Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Bliznac Trebješanin

Diofantske $D(4)$-m-torke i srodni problemi

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marija Bliznac Trebješanin

Diophantine $D(4)$-m-tuples and related problems

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2018

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Bliznac Trebješanin

Diofantske $D(4)$-m-torke i srodni problemi

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Alan Filipin

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marija Bliznac Trebješanin

Diophantine $D(4)$-m-tuples and related problems

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof. dr. sc. Alan Filipin

Zagreb, 2018

Zahvala

Do izrade ove disertacije ne bi došlo da prije svega nije bilo podrške i poticaja kroz cijelo moje školovanje onih koji su mi najbliži, zato se želim zahvaliti cijeloj svojoj obitelji, no posebno trima osobama, didi Anti, koji je ulagao u moju znatiželju u najranijim počecima, mami Vesni, koja mi je bila uzor u upornosti i podrška u svim aspektima života, i mužu Danilu, koji je proživljavao sa mnom moj matematički put kao da je njegov.

Zahvaljujem se svim svojim profesorima, koji su zaslužni za moju ljubav prema matematici, članovima Seminara za teoriju brojeva i algebru, što su slušali moja izlaganja, članovima povjerenstva za ocjenu disertacije, na detaljnom pregledu rada, a posebno akademiku Andreju Dujelli na velikoj pomoći kod rada na HRZZ projektu „Diofantove m-torke, eliptičke krivulje, Thueove i indeksne jednadžbe" i detaljnom iščitavanju naših rezultata. Također, želim se zahvaliti i Mihaiu Cipuu s Institute of Mathematics of the Romanian Academy iz Bukurešta, na detaljnom pregledu rezultata vezanih za nepostojanje diofantskih petorki i sugestijama za popravak grešaka koje su se pokazale ključnima za ovu disertaciju i konačan članak.

Najveća zahvala ide mome mentoru, prof. dr. sc. Alanu Filipinu, jer su njegovo znanje, strpljenje i pomoć bili presudni u ostvarivanju ovih rezultata, ali isto tako želim naglasiti koliko mi je njegova podrška olakšala zaposlenje, rad na projektu i sami proces doktorskog studija.

Sadržaj

Uvod

U ovoj disertaciji će biti predstavljeni novi rezultati vezani za diofantske m-torke, objavljeni u [8] i [10], te još neobjavljeni rezultat vezan za nepostojanje $D(4)$-petorki u prirodnim brojevima.

Definicija problema kako se danas promatra je sljedeća: Neka je $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i $m \geq 2$ prirodan broj. Diofantskom $D(n)$-m-torkom nazivamo skup od m prirodnih brojeva takvih da je produkt svaka dva različita elementa tog skupa uvećan za n potpun kvadrat.

Proučavanje svojstava diofantskih m-torki je i kroz dugu povijest matematike više puta bio aktualan i zanimljiv problem koji se veže uz imena nekih velikih matematičara. U knjizi IV Diofantove *Aritmetike*, [39, Book IV, 20.], je predstavljen problem pronalaska skupa koji sadrži četiri broja takva da produkt bilo koja dva od tih brojeva uvećan za jedinicu daje potpun kvadrat. Diofant je predstavio jedan mogući postupak traženja takvih skupova koji vodi do rješenja $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{68}{16}, \frac{105}{16}\}$ u racionalnim brojevima. Problem su proučavali i Pierre de Fermat, koji je pronašao rješenje u prirodnim brojevima $\{1, 3, 8, 120\}$, te Leohnard Euler, koji je pokazao da se paru prirodnih brojeva x i y, takvih da je $xy + 1 = l^2$ za neki prirodan broj l, može dodati treći element $z = x + y + 2l$, jer je tada $xz + 1 = (l + x)^2$ i $yz + 1 = (l + y)^2$, te četvrti element $v = 4l(l + x)(l + y)$ za kojeg vrijedi

$$xv + 1 = (2l^2 + 2lx - 1)^2, \quad yv + 1 = (2l^2 + 2ly - 1)^2, \quad zv + 1 = (4l^2 + 2lx + 2ly - 1)^2.$$

U moderno vrijeme problem su aktualizirali Baker i Davenport u [5] gdje su pokazali da se $D(1)$-trojka $\{1, 3, 8\}$ može proširiti do $D(1)$-četvorke samo elementom $d = 120$, čime je dokazano da ta četvorka nema proširenje do petorke. To je prirodno dovelo, uz druge slične rezultate, do formiranja slutnje da ne postoji $D(1)$-petorka. Prvi značajan korak u dokazivanju te tvrdnje je napravio Dujella u [16] gdje je pokazao da ne postoji $D(1)$-šestorka i da postoji samo konačno mnogo $D(1)$-petorki. Analogne rezultate za $D(4)$-m-torke je pokazao Filipin u [28] i [32].

Već su i Euler i Fermat promatrali neka poopćenja problema (vidi [39]) te se i danas proučava mnoštvo različitih generalizacija problema. Pregled svih važnijih rezultata predstavljen je u [18]. Neka od tih poopćenja dobijemo tako da promatramo skupove u drugim domenama, umjesto u $\mathbb{Z}$ ili $\mathbb{Q}$, te će u ovom radu biti prezentirana jedna varijanta problema u prstenu polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Osim tog problema, veći dio rada je posvećen proučavanju svojstava skupova prirodnih brojeva koji imaju Diofantovo svojstvo za $n = 4$.

Prva tri poglavlja disertacije sadrže rezultate vezane za $D(4)$-m-torke. Konkretno, u prvom poglavlju proučavamo $D(4)$-parove, tj. neke aritmetičke sume koje nam mogu dati ocjenu broja parova koji zadovoljavaju neke zadane gornje granice za elemente, ali se mogu primijeniti i na druge probleme u teoriji brojeva jer se tiču na primjer divizorske funkcije. Ti rezultati su objavljeni u [8] gdje su korišteni za ocjenu broja mogućih $D(4)$-petorki. Drugo poglavlje sadrži problem proširenja $D(4)$-trojke do $D(4)$-četvorke većim elementom. Za to proširenje je vezana još uvijek nedokazana slutnja o jedinstvenosti takvog proširenja. Tu smo dali kratki uvod u problem proširenja $D(4)$-trojke do $D(4)$-četvorke te dokazali poboljšanja nekih poznatih rezultata, prvenstveno kako bismo dobili nove alate za pristup dokazu nepostojanja $D(4)$-petorki.

Budući da je pitanje nepostojanja petorki dugo vremena bilo otvoren problem kojeg su matematičari aktivno pokušavali riješiti, smatramo da je po važnosti dokaz nepostojanja $D(4)$-petorki centralni rezultat ovog rada, koji je obrađen u trećem poglavlju. Naime, otkako je Dujella u [16] dokazao da postoji samo konačno mnogo $D(1)$-petorki, više puta je procjena mogućeg broja bila poboljšana, npr. u [11], [12] i [14], ali slutnja o nepostojanju petorke nije bila dokazana. Tek su krajem 2016. godine, He, Togbé i Ziegler u [38] predstavili konačan dokaz koji u trenutku pisanja ovog rada još uvijek nije objavljen, ali se smatra točnim. Filipin je u [32] pokazao da također postoji samo konačno mnogo $D(4)$-petorki, te se i iz [28], [29], i ostalih radova vezanih za $D(4)$-m-torke, moglo vidjeti da se slične metode iz $D(1)$ slučaja mogu primijeniti i na ovaj problem. Primjenjujući uglavnom modifikacije metoda i ideja iz [38], u koautorstvu s mentorom Alanom Filipinom, dokazali smo slutnju nepostojanja $D(4)$-petorki.

Posljednje poglavlje je posvećeno proučavanju proširenja polinomijalne $D(-1)$-trojke $\{a, b, c\}$ do $D(-1; 1)$-četvorke, što znači da za trojku $\{a, b, c\}$ tražimo element d takav da su $ad + 1$, $bd + 1$ i $cd + 1$ potpuni kvadrati nekih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Pokazali smo da je uz neke uvjete takvo proširenje jedinstveno te dali formulu za veći element d u terminima elemenata trojke za koji smatramo da daje jedinstveno proširenje polinomijalne $D(-1)$-trojke do $D(-1; 1)$-četvorke. Rezultati iz ovog poglavlja su objavljeni u [10] u koautorstvu s Alanom Filipinom i Anom Jurasić.

Napomenimo, da iako je u ovom radu korišten izraz „diofantske $D(4)$-m-torke”, po uzoru na izraz „diofantske jednadžbe”, u hrvatskoj literaturi vezanoj za ovaj problem često se koristi izraz „Diofantove $D(n)$-m-torke”.

Poglavlje 1

Neke aritmetičke sume vezane uz prebrojavanje $D(4)$-parova

Definicija 1.1. *Neka je $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i $m \geq 2$ prirodan broj. Diofantskom $D(n)$-m-torkom nazivamo skup od m prirodnih brojeva $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ takvih da je $a_i a_j + n$ potpun kvadrat za svaki $1 \leq i < j \leq m$.*

Neka je $\{a, b\}$ $D(4)$-par. Tada postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je

$$ab + 4 = r^2,$$

tj. $r = \sqrt{ab+4}$, te će ova oznaka značiti isto kada god pišemo o $D(4)$-m-torkama.

U ovom poglavlju će biti prezentirani neki opći rezultati o aritmetičkim sumama koji se mogu primijeniti na prebrojavanje $D(4)$-parova za koje je zadana gornja granica za veći element para, ili za broj r kako je prethodno definiran.

Neka je $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom i $d(n)$ oznaka za broj djelitelja broja n. Ocjenu vrijednosti sume $\sum_{x=1}^{N} d(P(x))$, za neki prirodan broj N i ireducibilni polinom $P(x)$, je dao Erdős u [27]. U slučaju reducibilnog polinoma, situacija je drukčija, i postoje različiti rezultati ovisno o svojstvima polinoma. Hooley je u [41] pokazao da vrijedi ocjena

$$\sum_{n=1}^{N} d(n^2 - k^2) < A(k) N \log^2 N + \mathcal{O}(N \log N)$$

gdje je k fiksan prirodni broj i $A(k)$ konstanta ovisna o k. Dudek je u [15] odredio vrijednost $A(1) = \frac{6}{\pi^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$, a mi ćemo u ovom poglavlju pokazati da je $A(2) = A(1)$ i dati egzaktniju ocjenu od asimptotske za vrijednost sume koristeći rezultate iz [48]. Napomenimo i da su vrijednosti konstanti za ostale prirodne brojeve k proučavane u [42].

U ocjeni vrijednosti sume broja djelitelja, koristit ćemo i sume vezane za funkciju broja rješenja kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{d}$, u oznaci $g(d)$. Osim što smo ih koristili u dokazu tvrdnje vezane za sumu broja djelitelja, te sume su i same zanimljive jer se, isto kao i suma broja djelitelja, mogu iskoristiti za ocjenu broja $D(4)$-parova $\{a, b\}$ za koje je $r = \sqrt{ab+4} < N$ za neki zadani N.

Napomenimo da su definicije i teoremi vezani za aritmetičke funkcije iz sljedećeg potpoglavlja preuzete iz [40], a identiteti vezani za Riemannovu zeta funkciju iz [47]. Također naglasimo da će, u cijelom radu, s oznakom $\log(x)$ će biti označena vrijednost prirodnog logaritma u točki x, a ne dekadskog logaritma kako je uobičajeno označavati.

Rezultati iz ovog poglavlja su objavljeni u [8].

1.1 Suma djelitelja broja $x^2 - 4$

Definicija 1.2. *Aritmetičkom funkcijom nazivamo svaku funkciju f sa skupa prirodnih brojeva u skup realnih ili kompleksnih brojeva za koju je $f(1) = 1$, to jest, svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, za koju je $f(1) = 1$, je aritmetička funkcija. Očito je da aritmetičku funkciju f možemo poistovjetiti s nizom kompleknih brojeva $\{f_n\}$.*

Za aritmetičku funkciju f kažemo da je multiplikativna (aditivna), ako za svaka dva relativno prosta prirodna broja a i b vrijedi $f(ab) = f(a)f(b)$ $(f(ab) = f(a) + f(b))$.

S $d(n)$ ćemo označavati vrijednost u prirodnom broju n multiplikativne aritmetičke funkcije d, koju nazivamo divizorska funkcija, i koja je definirana tako da prirodnom broju n pridružuje broj djelitelja tog broja n, tj.

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Označimo s $g(d)$ broj rješenja $x \in \mathbb{Z}_d$ kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{d}$, te s $\omega(n)$ broj različitih prostih djelitelja broja n. Da bismo odredili broj rješenja kongruencije u skupu ostataka modulo d, koristit ćemo sljedeće dvije leme koje su dokazane npr. u [49, Poglavlje 9.].

Lema 1.3. *Neka je p neparan prost broj te α i b prirodni brojevi takvi da je $\gcd(b, p) = 1$. Kongruencija $x^2 \equiv b \pmod{p^\alpha}$ ima 2 rješenja modulo p^α ako je b kvadratni ostatak modulo p, a nema rješenja inače.*

Lema 1.4. *Neka su α i b prirodni brojevi takvi da je $\gcd(b, 2) = 1$. Tada broj rješenja kongruencije $x^2 \equiv b \pmod{2^\alpha}$ ovisi o vrijednosti eksponenta α na sljedeći način:*

i) ako je $\alpha = 1$, kongruencija ima 1 rješenje modulo 2^α,

ii) ako je $\alpha = 2$, kongruencija ima 2 rješenja modulo 2^α ako za b vrijedi $b \equiv 1 \pmod{4}$, a nema rješenja inače,

iii) ako je $\alpha \geq 3$, kongruencija ima 4 rješenja modulo 2^α ako za b vrijedi $b \equiv 1 \pmod{8}$, a nema rješenja inače.

Promotrimo sada kongruenciju $x^2 \equiv 4 \pmod{d}$ u kojoj smo istaknuli faktorizaciju broja d

$$x^2 \equiv 4 \left(\bmod\ 2^a p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right), \tag{1.1}$$

gdje su $a \geq 0$ i $\alpha_i > 0$ cijeli brojevi, p_i neparni međusobno različiti prosti brojevi, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Po Kineskom teoremu o ostacima znamo da je broj rješenja $x \in \mathbb{Z}_d$ kongruencije (1.1) jednak umnošku broja rješenja svake od kongruencija

$$x^2 \equiv 4 \pmod{2^a}, \quad x^2 \equiv 4 \pmod{p_i^{\alpha_i}},\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Iz Lema 1.3 i 1.4 vidimo da nam je preostalo provjeriti samo broj rješenja kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{2^a}$, jer zbog $\gcd(4, 2) \neq 1$ ova kongruencija ne zadovoljava uvjete Leme 1.4. S obzirom na eksponent a vrijedi nam neka od sljedećih tvrdnji.

1. Ako je $a = 1$, imamo kongruenciju $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ koja eksplicitno daje jedno rješenje $x \equiv 0 \pmod{2}$.

2. Ako je $a = 2$, imamo kongruenciju $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ koja ima 2 rješenja modulo 4, $x \equiv 0, 2 \pmod{4}$.

3. Ako je $a \geq 3$, promatramo kongruenciju $x^2 \equiv 4 \pmod{2^{a'+2}}$, gdje je $a' = a - 2 \geq 1$. Kako je x paran broj, možemo kongruenciju podijeliti s 4 i promatrati kongruenciju

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \equiv 1 \pmod{2^{a'}}$$

kojoj broj rješenja ovisi o vrijednosti eksponenta a' i znamo taj broj rješenja po Lemi 1.4. Iz svakog rješenja $\frac{x}{2} \equiv x_0 \pmod{2^{a'}}$ dobijemo jedno rješenje

$$x \equiv 2x_0 \pmod{2^{a'+1}},$$

što nam daje 2 rješenja modulo $2^{a'+2} = 2^a$, eksplicitno

$$x \equiv x_0, 2^{a'+1} + x_0 \pmod{2^a}.$$

Ovime smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.5. *Neka je $d = 2^a q$ prirodan broj, gdje je q neparan broj i $a \geq 0$. Tada je broj rješenja kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{d}$ jednak $g(d) = 2^{\omega(q)+s(a)}$, gdje je*

$$s(a) = \begin{cases} 0, & za\ a = 0, 1 \\ 1, & za\ a = 2, 3 \\ 2, & za\ a = 4 \\ 3, & za\ a \geq 5. \end{cases} \tag{1.2}$$

Funkcija g je multiplikativna funkcija, jer je $\omega(n)$ aditivna funkcija, pa za relativno proste brojeve $d_1 = 2^{a_1} q_1$, $a_1 \geq 0$, i $d_2 = q_2$ vrijedi

$$g(d_1 d_2) = 2^{\omega(q_1)+\omega(q_2)+s(a_1)} = g(d_1)g(d_2).$$

Multiplikativna funkcija je u potpunosti određena vrijednostima u potencijama prostih brojeva, pa istaknimo da za funkciju g imamo sljedeće vrijednosti u potencijama prostih brojeva:

$$g(2) = 1, \quad g(4) = g(8) = g(p^{e_1}) = 2, \quad g(16) = 4, \quad g(2^{e_2}) = 8,$$

gdje su p neparni prosti brojevi, a $e_1 \geq 1$ i $e_2 \geq 5$ prirodni brojevi.

Definicija 1.6. *Dirichletovim produktom ili Dirichletovom konvolucijom aritmetičkih funkcija f i g, u oznaci $f * g$, nazivamo aritmetičku funkciju definiranu sa*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Definicija 1.7. *Red*

$$F(s) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

nazivamo Dirichletov red pridružen aritmetičkoj funkciji f.

Ako je f multiplikativna funkcija, Eulerovim produktom Dirichletovog reda $F(s)$ nazivamo beskonačni produkt

$$\prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}\right).$$

Ako Dirichletova suma $F(s)$ konvergira apsolutno u s, onda i Eulerov produkt konvergira apsolutno u s i njihove su vrijednosti jednake, pa ćemo ih dalje u radu koristiti ravnopravno. Navedimo sada vezu Dirichletove konvolucije i Dirichletovih redova.

Teorem 1.8 ([40, Theorem 4.1])**.** *Neka su f i g aritmetičke funkcije s pridruženim Dirichletovim redovima $F(s)$ i $G(s)$. Neka je $h = f * g$ Dirichletova konvolucija od f i g i $H(s)$ pridruženi Dirichletov red. Ako $F(s)$ i $G(s)$ konvergiraju apsolutno u nekoj točki s, onda konvergira i $H(s)$ i vrijedi $H(s) = F(s)G(s)$.*

Napomena 1.9. *Napomenimo da Dirichletov red $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ predstavlja analitičku funkciju u varijabli s na svom području konvergencije. Ta činjenica osigurava da vrijedi Teorem jedinstvenosti za Dirichletove redove koji kaže da ako se dva Dirichletova reda podudaraju na području konvergencije da su onda aritmetičke funkcije kojima su oni pridruženi jednake, tj. ako je $F(s) = G(s)$, onda je $f(n) = g(n)$ za svaki n.*

Sljedeće dvije leme nam daju ocjenu sume vezane za broj djelitelja i ocjenu sume elemenata niza kompleksnih brojeva, tj. aritmetičkih funkcija, koje zadovoljavaju neke posebne uvjete. Prije nego ih navedemo, dat ćemo kratka objašnjenja nekih oznaka.

Sa $f(x) = \vartheta(g(x))$ ćemo označiti da je $|f(x)| \leq g(x)$ za sve x koje promatramo. Pod Eulerovom konstantom γ podrazumijevamo vrijednost

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(-\log n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m},$$

gdje je $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ vrijednost Riemannove zeta funkcije u s, te ćemo dalje koristiti približnu vrijednost Eulerove konstante $\gamma \approx 0.577216$.

Lema 1.10 ([48, Lemma 13])**.** *Za sve $t > 0$ vrijedi*

$$\sum_{n\leq t}\frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 t + 2\gamma\log t + \gamma^2 - 2\gamma_1 + \vartheta(1.16t^{-1/3}),$$

gdje je γ Eulerova konstanta i γ_1 druga Stieltjesova konstanta, za koju vrijedi $-0.07282 < \gamma_1 < -0.07281$.

Lema 1.11 ([48, Lemma 14])**.** *Neka su $\{g_n\}_{n\geq1}$, $\{h_n\}_{n\geq1}$ i $\{k_n\}_{n\geq1}$ tri niza kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju $g = h * k$, to jest, g je Dirichletova konvolucija od h i k. Neka su $H(s) = \sum_{n\geq1} h_n n^{-s}$ i $H^*(s) = \sum_{n\geq1}|h_n|n^{-s}$ te pretpostavimo da $H^*(s)$ konvergira za $Re(s) \geq -\frac{1}{3}$. Ako su A, B, C i D četiri konstante koje zadovoljavaju*

$$\sum_{n\leq t} k_n = A\log^2 t + B\log t + C + \vartheta(Dt^{-1/3}), \quad (t > 0),$$

onda je

$$\sum_{n\leq t} g_n = u\log^2 t + v\log t + w + \vartheta(Dt^{-1/3}H^*(-1/3))$$

i

$$\sum_{n\leq t} ng_n = Ut\log t + Vt + W + \vartheta(2.5Dt^{2/3}H^*(-1/3)),$$

gdje je

$$\begin{aligned}
&u = AH(0), \quad v = 2AH'(0) + BH(0), \quad w = AH''(0) + BH'(0) + CH(0),\\
&U = 2AH(0), \quad V = -2AH(0) + 2AH'(0) + BH(0),\\
&W = A(H''(0) - 2H'(0) + 2H(0)) + B(H'(0) - H(0)) + CH(0).
\end{aligned}$$

Iskoristimo prethodne leme za ocjenu gornjih granica suma $\sum_{d\leq N} g(d)$ i $\sum_{d\leq N}\frac{g(d)}{d}$.

Lema 1.12. *Neka je s $g(d)$ označen broj rješenja kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{d}$ i neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\sum_{d\leq N}\frac{g(d)}{d} \leq \frac{3}{\pi^2}\log^2 N + 1.078763\log N + 0.160201 + 7.07945N^{-1/3} \tag{1.3}$$

i

$$\sum_{d\le N} g(d) \le \frac{6}{\pi^2} N\log N + 0.470835N - 0.310634 + 17.6986N^{2/3}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Neka je $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^{s+1}}$ Dirichletov red pridružen aritmetičkoj funkciji s vrijednostima $\frac{g(n)}{n}$. Zbog multiplikativnosti funkcije g, lako vidimo da slijedi i multiplikativnost aritmetičke funkcije s vrijednostima $\frac{g(n)}{n}$, pa se $F(s)$ može prikazati preko Eulerovog produkta

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)}{p^{s+1}} + \frac{g(p^2)}{p^{2(s+1)}} + \cdots\right)$$

i uvrštavanjem vrijednosti $g(n)$ u potencijama prostih brojeva dobijemo

$$F(s) = \left(1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{2}{2^{2(s+1)}} + \frac{2}{2^{3(s+1)}} + \frac{4}{2^{4(s+1)}} + 8\left(\frac{1}{2^{5(s+1)}} + \frac{1}{2^{6(s+1)}} + \cdots\right)\right)\cdot \prod_{p>2}\left(1 + \frac{2}{p^{s+1}} + \frac{2}{p^{2(s+1)}} + \cdots\right).$$

Koristeći činjenicu, dokazanu npr. u [15], da je

$$\frac{\zeta^2(s+1)}{\zeta(2(s+1))} = \prod_p \frac{1+p^{-(s+1)}}{1-p^{-(s+1)}} = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^{s+1}} + \frac{2}{p^{2(s+1)}} + \cdots\right),$$

imamo da je

$$F(s) = \left(1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{2}{2^{2(s+1)}} + \frac{2}{2^{3(s+1)}} + \frac{4}{2^{4(s+1)}} + 8\left(\frac{1}{2^{5(s+1)}} + \frac{1}{2^{6(s+1)}} + \cdots\right)\right)\cdot \left(\frac{1-2^{-s-1}}{1+2^{-s-1}}\right)\frac{\zeta^2(s+1)}{\zeta(2(s+1))}. \tag{1.5}$$

Neka je $K(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-(s+1)} = \zeta^2(s+1)$. Odredimo vrijednosti $\{h_n\}_{n\ge1}$ multiplikativne aritmetičke funkcije h takve da za pridruženi Dirichletov red $H(s) = \sum_{n\ge1} h_n n^{-(s+1)}$ vrijedi $F(s) = H(s)\cdot K(s) = H(s)\zeta^2(s+1)$. Usporedimo li Eulerove produkte Dirichletovih redova iz jednakosti imamo da je

$$\frac{1}{\zeta(2(s+1))}\left(\frac{1-2^{-s-1}}{1+2^{-s-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{2}{2^{2(s+1)}} + \frac{2}{2^{3(s+1)}} + \frac{4}{2^{4(s+1)}} + 8\left(\frac{1}{2^{5(s+1)}} + \frac{1}{2^{6(s+1)}} + \cdots\right)\right) = \prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^{s+1}} + \frac{h(p^2)}{p^{2(s+1)}} + \cdots\right). \tag{1.6}$$

Budući da vrijedi $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, jednakost (1.6) prelazi u oblik

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{2}{2^{2(s+1)}} + \frac{2}{2^{3(s+1)}} + \frac{4}{2^{4(s+1)}} + 8\left(\frac{1}{2^{5(s+1)}} + \frac{1}{2^{6(s+1)}} + \cdots\right)\right)\cdot \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{p^{2(s+1)}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^{s+1}} + \frac{h(p^2)}{p^{2(s+1)}} + \cdots\right).$$

Uspoređujući odgovarajuće koeficijente dobijemo vrijednosti funkcije h u potencijama prostih faktora

$$\begin{aligned}
&h(1) = 1, \quad h(p^2) = -1, \quad h(p^{e_1}) = 0, \text{ za } p \neq 2 \text{ i } e_1 \in \mathbb{N} \setminus \{2\},\\
&h(2) = h(8) = -1, \quad h(4) = 1, \quad h(16) = h(32) = 2, \quad h(64) = -4,\\
&h(2^{e_2}) = 0, \text{ za } e_2 \geq 7.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$H(s) = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{p^{2(s+1)}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{1}{2^{2(s+1)}} - \frac{1}{2^{3(s+1)}} + \frac{2}{2^{4(s+1)}} + \frac{2}{2^{5(s+1)}} - \frac{4}{2^{6(s+1)}}\right),$$

i za $H^*(s) = \sum_{n\geq 1} |h_n| n^{-(s+1)}$ imamo

$$H^*(s) = \prod_{p}\left(1 + \frac{1}{p^{2(s+1)}}\right)\frac{\left(1 + \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{1}{2^{2(s+1)}} + \frac{1}{2^{3(s+1)}} + \frac{2}{2^{4(s+1)}} + \frac{2}{2^{5(s+1)}} + \frac{4}{2^{6(s+1)}}\right)}{(1 + 2^{-2(s+1)})}.$$

S obzirom na to da produkt po prostim brojevima u ovom izrazu konvergira za $s > -1$ i jednak je

$$\frac{\zeta(2(s+1))}{\zeta(4(s+1))} = \prod_{p}\left(1 + \frac{1}{p^{2(s+1)}}\right),$$

možemo lako izračunati da je $H^*\left(-\frac{1}{3}\right) \leq 6.103$, i slično, jer je $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s})$, dobijemo da je

$$H(s) = \zeta(2(s+1))\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}} + \frac{1}{2^{2(s+1)}} - \frac{1}{2^{3(s+1)}} + \frac{2}{2^{4(s+1)}} + \frac{2}{2^{5(s+1)}} - \frac{4}{2^{6(s+1)}}\right)}{1 - 2^{-2(s+1)}},$$

pa vrijedi $H(0) = \frac{6}{\pi^2}$, $H'(0) \leq 0.377$ i $H''(0) \leq -1.1321$. Budući da nam za ove redove vrijede Teorem jedinstvenosti za Dirichletove redove i Teorem 1.8, pronašli smo nizove, tj. aritmetičke funkcije, koje zadovoljavaju Lemu 1.11 pa je možemo iskoristiti da dobijemo

$$\sum_{d\leq N} \frac{g(d)}{d} \leq \frac{3}{\pi^2}\log^2 N + 1.078763 \log N + 0.160201 + 7.07945 N^{-1/3}$$

i

$$\sum_{d\leq N} g(d) \leq \frac{6}{\pi^2} N \log N + 0.470835N - 0.310634 + 17.6986N^{2/3}.$$

□

Sada možemo dobiti ocjenu za sumu broja djelitelja brojeva oblika $n^2 - 4$ gdje je n prirodan broj veći od 2, omeđen odozgo nekim prirodnim brojem N.

Lema 1.13. *Neka je $N \in \mathbb{N}$. Vrijedi*

$$\sum_{n=3}^{N} d(n^2-4) \leq N\left(\frac{6}{\pi^2}\log^2 N + 2.15752\log N + 0.320402 + 14.159N^{-1/3}\right).$$

Dokaz. Lako se vidi da imamo

$$\sum_{n=3}^{N} d(n^2-4) = \sum_{n=3}^{N}\left(2\sum_{\substack{d\mid n^2-4\\ d<n}} 1\right) = 2\sum_{d=1}^{N-1}\sum_{\substack{n=\max\{3,d+1\}\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{N} 1,$$

gdje prva jednakost vrijedi iz definicije od $d(n)$, a drugu dobijemo prenumeriranjem sume.

Primijetimo da je

$$\sum_{\substack{n=\max\{3,d+1\}\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{N} 1 = \sum_{\substack{n=3\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{N} 1 - \sum_{\substack{n=3\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{d} 1$$

kada je $d \geq 3$. Vrijednost druge sume je jednaka $g(d) - S$, gdje je $S \in \{0,1,2\}$ ovisno koliko je brojeva iz skupa $\{1,2\}$ rješenje kongruencije $n^2 \equiv 4 \pmod{d}$ za zadani d. Sada se lako vidi da je vrijednost prve sume manja od $\left\lceil \frac{N}{d} \right\rceil (g(d) - S)$, pa imamo

$$\sum_{\substack{n=3\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{N} 1 - \sum_{\substack{n=3\\ n^2\equiv 4 \pmod{d}}}^{d} 1 < \left(\left\lceil \frac{N}{d} \right\rceil - 1\right)(g(d) - S) < \frac{N}{d} g(d).$$

Dakle, vrijedi nejednakost $\sum_{n=3}^{N} d(n^2-4) \leq 2N\sum_{d\leq N} \frac{g(d)}{d}$ pa tvrdnja slijedi iz Leme 1.12. $\square$

Za određivanje gornje granice sume $\sum_{d\leq N} g(d)$ možemo primijeniti i metodu korištenu u [11] i [14] koja nam daje nešto bolje rezultate u prebrojavanju parova za veći broj N. Naime, kako je

$$\begin{aligned}
\sum_{d=1}^{N} g(d) = {} & \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{N} 2^{\omega(d)} + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 2 \pmod{4}}}^{N} 2^{\omega(d)-1} + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 4 \pmod{8}}}^{N} 2^{\omega(d)} \\
& + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 8 \pmod{16}}}^{N} 2^{\omega(d)} + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 16 \pmod{32}}}^{N} 2^{\omega(d)+1} + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 0 \pmod{32}}}^{N} 2^{\omega(d)+2} \\
\leq {} & \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{N} 2^{\omega(d)} + \sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{\frac{N+2}{4}} 2^{\omega(d)} + 2\sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{\frac{N+4}{8}} 2^{\omega(d)} \\
& + 2\sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{\frac{N+8}{16}} 2^{\omega(d)} + 4\sum_{\substack{d=1\\ d\equiv 1 \pmod{2}}}^{\frac{N+16}{32}} 2^{\omega(d)} + 8\sum_{d=1}^{\frac{N}{32}} 2^{\omega(d)}
\end{aligned}$$

određivanje gornje granice svedemo na promatranje sume

$$K(N) = \sum_{\substack{d=1 \\ d\equiv 1 \pmod 2}}^{N} 2^{\omega(d)}.$$

Pri dokazivanju tvrdnje ćemo koristiti i sljedeću lemu iz [48].

Lema 1.14. *Za sve $N \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$L(N) = \sum_{d\le N} 2^{\omega(d)} \le \frac{6}{\pi^2} N\log N + 0.787N - 0.3762 + 8.14N^{2/3}.$$

Lema 1.15. *Za sve $N \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$K(N) = \sum_{\substack{d=1 \\ d\equiv 1 \pmod 2}}^{N} 2^{\omega(d)} \le \frac{2}{\pi^2} N\log N + 0.449573N + 0.0953722 + 15.4665N^{2/3}$$

i

$$\sum_{d\le N} g(d) \le \frac{5}{\pi^2} N\log N + 0.123179N + 46.8079N^{2/3} + \\ 9.11891N^{-1} + 0.911891\log N + 70.5085.$$

Dokaz. Gornja granica za $K(N)$ se dobije primjenom Leme 1.11 na multiplikativnu funkciju koja u parnim brojevima ima vrijednost 0, a u neparnim je jednaka $g(d)$. Detalje dokaza izostavljamo jer je postupak identičan onome iz dokaza Leme 1.12. Budući da imamo po prethodnom razmatranju da je

$$\begin{aligned}\sum_{d\le N} g(d) \le & K(N) + K\left(\frac{N+2}{4}\right) + 2K\left(\frac{N+4}{8}\right) + 2K\left(\frac{N+8}{16}\right) \\ & + 4K\left(\frac{N+16}{32}\right) + 8L\left(\frac{N}{32}\right),\end{aligned}$$

konačna tvrdnja leme slijedi kada primijenimo nejednakosti $\log(\frac{N+a}{b}) \le \log N + a/N - \log b$ i $(N+a)^{2/3} \le N^{2/3} + (1+a)^{2/3} - 1$, za koje se lako provjeri da vrijede za $N \ge 1$ i $a \in \{2,4,8,16\}$. □

1.2 Prebrojavanje $D(4)$-parova

Za prebrojavanje $D(4)$-parova $\{a,b\}$ mogu se koristiti sljedeće dvije metode, ovisno o tome koristimo li gornju granicu za element b ili za element $r = \sqrt{ab+4}$.

1. Za fiksan broj b, broj $D(4)$-parova $\{a,b\}$ je jednak broju rješenja $1 < r < b$ kongruencije $r^2 \equiv 4 \pmod b$, što znamo da je jednako $g(b)$, pa je broj parova $\{a,b\}$ takvih

da je $a < b < N$ jednak $\sum_{d \leq N} g(d)$. Gornju granicu te sume imamo u Lemama 1.12 i 1.15.

2. Lemu 1.13 koristimo za $r < N$ gdje je $r = \sqrt{ab+4}$, jer je tada broj parova $\{a, b\}$ takvih da je $a < b$ jednak $\left(\sum_{n=3}^{\infty} d(n^2-4)\right)/2$.

U slučaju da promatramo gornju granicu za element b, tj. da imamo $b < N$ za neki N, vrijedi nam sljedeće:

1. ako je $N \leq 11532$, onda je ocjena sume iz Leme 1.12 manja, a time i bolja, od ocjene sume iz Leme 1.15, inače je ocjena sume iz Leme 1.12 veća od ocjene sume iz Leme 1.15,

2. ako uzmemo da je $r < b < N$, procjena broja parova koji dobijemo kao pola vrijednosti sume iz Leme 1.13 je lošija od one iz Leme 1.12 za $N \geq 21$, pa ova opcija nikada neće biti povoljna za prebrojavanje u slučaju da nam je poznata samo gornja granica za b.

Ako želimo prebrojati neke posebne $D(4)$-parove $\{a, b\}$, onda nam Lema 1.13 može dati povoljnije rezultate. Na primjer, želimo li prebrojati parove za koje vrijedi $b > a^2$ i $b < 10^6$, imamo da je $r = \sqrt{ab+4} < \sqrt{b^{3/2}+4} < 31623$, pa iz Leme 1.13 dobijemo da je broj takvih parova manji od 1397623, dok iz Leme 1.15 koristeći gornju granicu za b dobijemo da je broj takvih parova manji od 7590360.

Različite metode za prebrojavanje parova su se najčešće koristile kod procjene broja petorki, kao što smo i mi to učinili u [8], prije nego je taj problem konačno riješen.

Poglavlje 2

Proširenje $D(4)$-trojke do četvorke

Neka je dan $D(4)$-par $\{a,b\}$. Tada postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je $ab+4=r^2$. Ako proširimo taj par elementom c do $D(4)$-trojke $\{a,b,c\}$, onda postoje i prirodni brojevi s i t takvi da je

$$ac+4=s^2, \quad bc+4=t^2,$$

te ćemo ove oznake koristiti s ovim značenjem kada su god vezane za $D(4)$-m-torke.

Svaki $D(4)$-par $\{a,b\}$ možemo proširiti do $D(4)$-trojke elementom $c=a+b+2r$ te takvu trojku $\{a,b,c\}$ nazivamo Eulerova ili regularna trojka. Proširenje para do trojke nije jedinstveno te ćemo u nastavku navesti neke beskonačne nizove $\{c_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ koji proširuju fiksni par $\{a,b\}$, a koji su detaljno proučavani u [4].

Za $D(4)$-trojku $\{a,b,c\}$ definiramo brojeve $d_+(a,b,c)$ i $d_-(a,b,c)$ sa

$$d_\pm(a,b,c)=a+b+c+\frac{1}{2}(abc\pm rst)$$

gdje je $r=\sqrt{ab+4}$, $s=\sqrt{ac+4}$ i $t=\sqrt{bc+4}$. Kada je jasno na koju se trojku odnosi pisat ćemo samo kratko d_+ i d_-.

Skup $\{a,b,c,d_+\}$ je $D(4)$-četvorka jer se lako provjeri da su brojevi

$$x=\frac{rs+at}{2}, \quad y=\frac{rt+bs}{2}, \quad z=\frac{st+cr}{2},$$

prirodni brojevi i da za njih vrijedi

$$ad_+ +4=x^2, \quad bd_+ +4=y^2, \quad cd_+ +4=z^2.$$

Također, vrijedi da je $d_+>\max\{a,b,c\}$.

Pokažimo da vrijedi

$$d_+(a,b,c)\cdot d_-(a,b,c)=(c-a-b+2r)(c-a-b-2r).$$

Naime,

$$\begin{aligned} d_+(a,b,c)\cdot d_-(a,b,c) &= \left(a+b+c+\frac{1}{2}(abc+rst)\right)\left(a+b+c+\frac{1}{2}(abc-rst)\right) \\ &= a^2+b^2+c^2-2(ab+ac+bc)-16 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc-4r^2 \\ &= (c-a-b)^2-(2r)^2. \end{aligned}$$

Propozicija 2.1. *Neka je dana $D(4)$-trojka $\{a,b,c\}$ takva da je $a<b<c$. Tada je ta trojka regularna ako i samo ako je $d_-(a,b,c)=0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je trojka $\{a,b,c\}$ regularna, tj. da je $c=a+b+2r$. Iz $d_+(a,b,c)\cdot d_-(a,b,c)=(c-a-b+2r)(c-a-b-2r)$ dobijemo da je $d_+(a,b,c)\cdot d_-(a,b,c)=0$, a kako je očito $d_+(a,b,c)>0$, onda mora biti $d_-(a,b,c)=0$.

Pretpostavimo sada da je $d_-(a,b,c)=0$. Tada je $(c-a-b+2r)(c-a-b-2r)=0$ pa je $c=a+b\pm 2r$. Kada bi bilo $c=a+b-2r$, imali bismo $c<b$, jer je $a<2r$, što bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom propozicije da je $b<c$. Dakle, $c=a+b+2r$. □

Napomena 2.2. *Regularnu trojku smo mogli definirati i na sljedeći način: za trojku $\{a,b,c\}$ kažemo da je regularna ako je $c=a+b\pm 2r$. Naime, ako je $c=a+b-2r$, onda je $c<b$. Ako još vrijedi i, na primjer, $a<b$, pokaže se da je $r=a+s$, $t=b+s$ i $b=a+c+2s$, pa uz promjenu oznaka elemenata vidimo da je ovakva trojka po definiciji regularna. Radi jednostavnosti, u ostatku rada ćemo najčešće smatrati da vrijedi $a<b<c$.*

Vrijedi i sljedeća lema.

Lema 2.3. *Neka je $\{a,b,c\}$ $D(4)$-trojka i $a<b<c$. Tada je $c=a+b+2r$ ili vrijedi $c>\max\{ab,4b\}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz [30, Lemma 3] i [17, Lemma 1]. □

Ako trojka $\{a,b,c\}$ nije regularna, koristeći Lemu 2.3 lako vidimo da vrijedi da je $d_->0$ i $d_-<c$. Direktnim uvrštavanjem se provjeri da je $\{a,b,d_-,c\}$ $D(4)$-četvorka za koju je

$$x=\frac{rs-at}{2},\quad y=\frac{rt-bs}{2},\quad z=\frac{cr-st}{2}.$$

Napomena 2.4. *Odnosi među elementima $D(4)$-četvorke $\{a,b,c,d_-\}$, kada je $d_-\neq 0$, ovise o trojki $\{a,b,c\}$.*
Za $D(4)$-trojku $\{1,60,2912\}$ imamo $d_+=180621$ i $d_-=45$.
Za $D(4)$-trojku $\{1,60,180621\}$ imamo $d_+=11195712$ i $d_-=2912$.
Za $D(4)$-trojku $\{5,12,96\}$ imamo $d_+=5985$ i $d_-=1$.

Još uvijek je otvoren problem jedinstvenosti proširenja trojke do četvorke većim elementom i u $D(1)$ i u $D(4)$ slučaju.

Slutnja 2.5. *Ako je* $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$*-četvorka takva da je* $d > \max\{a,b,c\}$*, onda je* $d = d_+(a,b,c)$.

Slično kao za trojke, četvorku $\{a,b,c,d_+(a,b,c)\}$ nazivamo regularnom četvorkom, pa slutnju možemo fromulirati i riječima da je svaka $D(4)$-četvorka regularna.

U ostatku poglavlja ćemo promatrati što se može pokazati za proširenje $D(4)$-trojke do četvorke. Dio rezultata smo koristili u procjeni broja $D(4)$-petorki u [8], gdje smo ih i prvi put objavili, a bili su nam potrebni i u konačnom dokazu nepostojanja $D(4)$-petorke u Poglavlju 3.

2.1 Pellovske jednadžbe pridružene proširenju trojke do četvorke

Neka je $\{a,b,c\}$ $D(4)$-trojka takva da je $a < b < c$, i neka su r, s, t prirodni brojevi definirani s

$$ab + 4 = r^2, \quad ac + 4 = s^2, \quad bc + 4 = t^2.$$

Ako želimo proširiti trojku $\{a,b,c\}$ do $D(4)$-četvorke $\{a,b,c,d\}$, moramo riješiti sustav

$$ad + 4 = x^2, \quad bd + 4 = y^2, \quad cd + 4 = z^2,$$

s rješenjima u prirodnim brojevima x, y, z. Eliminirajući d iz navedenih jednadžbi dobijemo sustav pellovskih jednadžbi

$$az^2 - cx^2 = 4(a-c), \tag{2.1}$$
$$bz^2 - cy^2 = 4(b-c). \tag{2.2}$$

Svojstva rješenja pellovskih jednadžbi ovog oblika nam daje sljedeća lema iz [26].

Lema 2.6. *Neka je dan* $D(4)$*-par* $\{a,b\}$*, gdje je* $ab + 4 = r^2$*. Postoji prirodan broj* i_0 *i cijeli brojevi* $x_0^{(i)}$ *i* $y_0^{(i)}$*,* $i = 1,\dots,i_0$*, sa sljedećim svojstvima:*

i) Par $(y_0^{(i)}, x_0^{(i)})$ *je rješenje pellovske jednadžbe*

$$ay^2 - bx^2 = 4(a-b). \tag{2.3}$$

ii) Brojevi $x_0^{(i)}$ *i* $y_0^{(i)}$ *zadovoljavaju nejednakosti*

$$1 \le x_0^{(i)} \le \sqrt{\frac{a(b-a)}{r-2}}, \quad i \quad |y_0^{(i)}| \le \sqrt{\frac{(r-2)(b-a)}{a}}.$$

iii) Ako je (y,x) *rješenje jednadžbe (2.3), onda postoji* $i \in \{1,\dots,i_0\}$ *i cijeli broj* $n \ge 0$

takvi da je

$$y\sqrt{a}+x\sqrt{b}=(y_0^{(i)}\sqrt{a}+x_0^{(i)}\sqrt{b})\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^n.$$

Dakle, ako su (z,x) i (z,y) rješenja sustava pellovskih jednadžbi (2.1) i (2.2) redom, onda postoje cijeli brojevi z_0, x_0, z_1, y_1, koje nazivamo fundamentalna rješenja pellovske jednadžbe i koji zadovoljavaju nejednakosti iz Leme 2.6 te vrijedi

$$z\sqrt{a}+x\sqrt{c}=(z_0\sqrt{a}+x_0\sqrt{c})\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^m,$$
$$z\sqrt{b}+y\sqrt{c}=(z_1\sqrt{b}+y_1\sqrt{c})\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^n,$$

za neke cijele brojeve $m,n\geq 0$. Iz obje jednakosti možemo izraziti nizove rješenja za z i prikazati ih preko binarnih rekurzivnih nizova

$$v_0=z_0,\quad v_1=\frac{1}{2}(sz_0+cx_0),\quad v_{m+2}=sv_{m+1}-v_m, \tag{2.4}$$
$$w_0=z_1,\quad w_1=\frac{1}{2}(tz_1+cy_1),\quad w_{n+2}=tw_{n+1}-w_n, \tag{2.5}$$

te nam treba vrijediti $z=v_m=w_n$ za neke m i n, ako imamo proširenje trojke $\{a,b,c\}$ do četvorke elementom d za koji je $ad+4=z^2$. Napomenimo da zbog ovog zapisa preko binarnih rekurzivnih nizova, eksponente m i n nazivamo i indeksima.

Sljedeća lema nam daje vezu među indeksima m i n te ćemo je više puta koristiti u ovom radu.

Lema 2.7 ([30, Lemma 5]). *Neka je $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$-četvorka. Ako je $v_m=w_n$, onda je $n-1\leq m\leq 2n+1$.*

U sljedećoj propoziciji, i ostatku ovog poglavlja, ćemo dokazati neke tvrdnje koje vrijede za one $D(4)$-četvorke koje se dobiju iz nizova v_m i w_n kada su indeksi m i n parni i za koje su fundamentalna rješenja $z_0=z_1=\pm 2$. Razlog tome je što su upravo takve četvorke koje promatramo kod problema postojanja $D(4)$-petorki pa ćemo rezultate vezane za takve $D(4)$-četvorke primijeniti u sljedećem poglavlju.

Propozicija 2.8. *Neka je $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$-četvorka takva da je $a<b<c<d$ i za koju vrijedi $v_{2m}=w_{2n}$, $z_0=z_1=2\varepsilon$, gdje je $\varepsilon=\pm 1$. Tada je*

$$\varepsilon am^2+sm\equiv\varepsilon bn^2+tn \pmod{c}.$$

Dokaz. Ako je $z_0=2\varepsilon$, onda iz $az_0^2-cx_0^2=4(a-c)$ imamo da je $x_0=2$ i slično iz (2.2) dobijemo $y_1=2$.

Dakle, promatramo binarne rekurzivne nizove

$$v_0 = 2\varepsilon, \quad v_1 = \varepsilon s + c, \quad v_{m+2} = s v_{m+1} - v_m,$$
$$w_0 = 2\varepsilon, \quad w_1 = \varepsilon t + c, \quad w_{n+2} = t w_{n+1} - w_n.$$

Primijetimo da možemo izraziti i rekurzivnu relaciju koju zadovoljavaju elementi s parnim indeksima u nizovima koje promatramo. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} v_{2m+2} &= s v_{2m+1} - v_{2m} \\ &= s(s v_{2m} - v_{2m-1}) - v_{2m} \\ &= s^2 v_{2m} - (s v_{2m-1} - v_{2m-2}) - v_{2m-2} - v_{2m} \\ &= (s^2-2) v_{2m} - v_{2m-2}, \end{aligned}$$

i analogno se pokaže da je $w_{2n+2} = (t^2-2)w_{2n} - w_{2n-2}$.

Provjerimo indukcijom da vrijedi

$$v_{2m} \equiv 2\varepsilon + c(a\varepsilon m^2 + sm) \pmod{c^2}.$$

Za bazu indukcije $m = 0$, tvrdnja očito vrijedi. Za $m = 1$ imamo da je

$$v_2 = s v_1 - v_0 = 2\varepsilon + c(a\varepsilon + s) \equiv 2\varepsilon + c(a\varepsilon \cdot 1^2 + s \cdot 1) \pmod{c^2},$$

pa i za $m = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $m \leq k$. Za $m = k+1$ možemo iskoristiti prethodno dokazanu jednakost koja povezuje elemente nizova s parnim indeksima pa koristeći pretpostavku indukcije na $m = k$ i $m = k-1$ imamo

$$\begin{aligned} v_{2k+2} &= (s^2-2) v_{2k} - v_{2k-2} \\ &\equiv (ac+2)(2\varepsilon + c(a\varepsilon k^2 + sk)) - (2\varepsilon + c(a\varepsilon(k-1)^2 + s(k-1))) \pmod{c^2} \\ &\equiv 2\varepsilon + c(a\varepsilon(k+1)^2 + s(k+1)) \pmod{c^2}, \end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdnju. Slično se pokaže da vrijedi

$$w_{2n} \equiv 2\varepsilon + c(b\varepsilon n^2 + tn) \pmod{c^2}.$$

Dakle, ako vrijedi $v_{2m} = w_{2n}$, onda nakon izjednačavanja kongruencija i dijeljenja s elementom c dobijemo da vrijedi kongruencija

$$a\varepsilon m^2 + sm \equiv b\varepsilon n^2 + tn \pmod{c},$$

što smo i trebali pokazati. $\square$

Sljedeća propozicija nam daje ocjenu za donju granicu za indeks m u terminima elemenata b i c $D(4)$-četvorke $\{a, b, c, d\}$ kada su indeksi parni i imamo zadana fundamentalna rješenja.

Propozicija 2.9. *Neka je $\{a, b, c, d\}$ $D(4)$-četvorka takva da je $a < b < c < d$ te za koju jednadžba $v_{2m} = w_{2n}$ ima rješenje takvo da vrijedi i $z_0 = z_1 = 2\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ i takvo da za indekse m i n vrijedi $Ln \geq m \geq n \geq 2$ za neki realni broj $L > 1$.*

Pretpostavimo da je $a \geq a_0$, $b \geq b_0$, $c \geq c_0$, $b \geq \rho a$ za neke prirodne brojeve a_0, b_0 i c_0 i realni broj $\rho > 1$. Tada je

$$m > \alpha b^{-1/2} c^{1/2},$$

gdje je α bilo koji realni broj koji zadovoljava obje nejednakosti

$$\alpha^2 + (1 + 2b_0^{-1} c_0^{-1})\alpha \leq 1, \tag{2.6}$$

$$4\left(1 - \frac{1}{L^2}\right)\alpha^2 + \alpha(b_0(\lambda + \rho^{-1/2}) + 2c_0^{-1}(\lambda + \rho^{1/2})) \leq b_0, \tag{2.7}$$

gdje je $\lambda = (a_0 + 4)^{1/2}(\rho a_0 + 4)^{-1/2}$.

Također, ako je $c^\tau \geq \beta b$ za neke pozitivne realne brojeve β i τ, onda je

$$m > \alpha \beta^{1/2} c^{(1-\tau)/2}. \tag{2.8}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je α realan broj koji zadovljava nejednakosti (2.6) i (2.7) i pretpostavimo suprotno tvrdnji propozicije, da vrijedi nejednakost $m \leq \alpha b^{-1/2} c^{1/2}$. Po Propoziciji 2.8 znamo da vrijedi

$$\varepsilon a m^2 + sm \equiv \varepsilon b n^2 + tn \pmod{c}. \tag{2.9}$$

Kako po pretpostavci imamo da je

$$|am^2 - bn^2| < \max\{am^2, bn^2\} \leq bm^2 \leq \alpha^2 c$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} |sm - tn| &< \max\{sm, tn\} \leq tm \leq \alpha b^{-1/2} c^{1/2} \sqrt{bc + 4} \\ &< \alpha b^{-1/2} c^{1/2} \left(b^{1/2} c^{1/2} + 2b^{-1/2} c^{-1/2}\right) \\ &\leq \alpha(1 + 2b_0^{-1} c_0^{-1})c, \end{aligned}$$

iz nejednakosti (2.6) slijedi da u kongruenciji vrijedi jednakost, tj. vrijedi

$$am^2 - bn^2 = \varepsilon(tn - sm)$$

odakle množenjem s $tn + sm$ dobijemo

$$(bn^2 - am^2)(c + \epsilon(tn + sm)) = 4(m^2 - n^2). \tag{2.10}$$

Ako je $m = n$, izraz s desne strane nejednakosti se poništava pa je barem jedan faktor s lijeve strane jednakosti jednak 0. No kada bi to bio faktor $bn^2 - am^2 = bm^2 - am^2 = 0$ imali bismo $a = b$ što naravno ne može biti. Dakle, u ovom slučaju mora biti $c = tn+sm$, tj.

$$c = m(t + s). \tag{2.11}$$

Pomnožimo li tu jednakost s $t - s$ i iskoristimo definiciju brojeva t^2 i s^2 dobijemo da je

$$t - s = m(b - a). \tag{2.12}$$

Po pretpostavci je $m \geq 2$. Kako je $v_0 = w_0 = 2\varepsilon$ imamo

$$v_1 = c + s\varepsilon, \quad v_2 = cs + s^2\varepsilon - 2\varepsilon,$$
$$w_1 = c + t\varepsilon, \quad w_2 = ct + t^2\varepsilon - 2\varepsilon.$$

Primijetimo da je

$$w_2 - v_2 = ct - cs + \varepsilon t^2 - \varepsilon = (t - s)(c + \varepsilon(t + s)) \geq (t - s)(c - (t + s))$$

pa vidimo da je zbog (2.11) i činjenice da je $m \geq 2$ druga zagrada u produktu pozitivna, a zbog (2.12) da je pozitivna i prva zagrada jer je $b > a$. Dakle imamo $w_2 > v_2$. Lako se indukcijom, koristeći da su oba niza strogo rastuća i da je $t > s$, pokaže da je onda $w_{m'} > v_{m'}$ za svaki $m' \geq 2$ pa posebno i $w_{2m} > v_{2m}$. Dakle, ne može nam vrijediti slučaj $m = n$.

Ako je $m > n$, onda su obje strane jednakosti različite od 0 pa zaključujemo da zbog $bn^2 - am^2 | 4(m^2 - n^2)$ vrijedi nejednakost $4(m^2 - n^2) \geq -am^2 + bn^2$. Vidimo da je tada

$$\frac{m^2}{n^2} \geq \frac{b + 4}{a + 4} \geq \frac{\rho a_0 + 4}{a_0 + 4} = \frac{1}{\lambda^2},$$

tj. $\lambda m \geq n$.

Analogno iz $c + \epsilon(tn + sm) | 4(m^2 - n^2)$ imamo $4(m^2 - n^2) \geq c + \epsilon(tn + sm)$, tj. $c \leq 4(m^2 - n^2) + tn + sm$. Koristeći da je $4(m^2 - n^2) < 4m^2 \left(1 - \frac{1}{L^2}\right)$ iz prethodne nejednakosti dobijemo

$$\begin{aligned} c &\leq 4(m^2 - n^2) + tn + sm < tn + sm + m^2 \cdot 4\left(1 - \frac{1}{L^2}\right) < \lambda mt + sm + 4\left(1 - \frac{1}{L^2}\right) m^2 \\ &= \lambda m\sqrt{bc + 4} + m\sqrt{ac + 4} + 4\left(1 - \frac{1}{L^2}\right) m^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 4\left(1-\frac{1}{L^2}\right)\alpha^2 b^{-1}c + \alpha b^{-1/2}c^{1/2}\left(\lambda\sqrt{bc+4}+\sqrt{\rho^{-1}bc+4}\right)\\
&< 4\left(1-\frac{1}{L^2}\right)\alpha^2 b^{-1}c + \alpha c\left(\lambda(1+2b^{-1}c^{-1})+\rho^{-1/2}(1+2\rho b^{-1}c^{-1})\right)\\
&\leq \frac{c}{b_0}\left(4\left(1-\frac{1}{L^2}\right)\alpha^2+\alpha\left(b_0\left(\lambda+\rho^{-1/2}\right)+2c_0^{-1}\left(\lambda+\rho^{1/2}\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Budući da vrijedi nejednakost (2.7), imali bismo $c < c$, kontradikciju. Dakle, mora vrijediti nejednakost $m > \alpha b^{-1/2}c^{1/2}$.

Ako je $c^\tau \geq \beta b$ vrijedi

$$m > \alpha b^{-1/2}c^{1/2} > \alpha\beta^{1/2}c^{\frac{1-\tau}{2}}$$

čime smo dokazali i drugu tvrdnju propozicije. □

Napomena 2.10. *Primijetimo da nejednakost (2.6) poprima oblik $\alpha^2+\alpha \leq 1$ kada b_0 i c_0 idu u beskonačnost, a maksimalno rješenje te nejednadžbe je $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618034$, što znači da nećemo moći dobiti vrijednost za koeficijent α veću od navedenog broja koristeći Propoziciju 2.9.*

2.2 Baker-Davenportova redukcija i donja granica za element b u neregularnoj četvorki

Postoji li proširenje $D(4)$-trojke do neregularne četvorke možemo provjeriti koristeći Baker-Davenportovu redukciju. No, redukciju možemo provesti samo nad trojkama unutar nekog intervala koji je odabran tako da je vrijeme provedbe algoritma redukcije prihvatljivo. Baćić i Filipin su u [4] pokazali da se $D(4)$-trojka $\{a,b,c\}$, $a<b<c$, za koju je $b \leq 10^4$ može proširiti samo do regularne $D(4)$-četvorke. Pokazat ćemo da isto vrijedi i za trojke za koje je $b \leq 10^5$. Navedimo prvo neke preliminarne rezultate.

Lema 2.11 ([30, Lemma 9])**.** *Neka je $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$-četvorka te v_m i v_n nizovi definirani u (2.4) i (2.5).*

i) Ako jednadžba $v_{2m} = w_{2n}$ ima rješenje, onda je $z_0 = z_1$. Također $|z_0| = 2$ ili $|z_0| = \frac{1}{2}(cr-st)$ ili $|z_0| < 1.608a^{-5/14}c^{9/14}$.

ii) Ako jednadžba $v_{2m+1} = w_{2n}$ ima rješenje, onda je $|z_0| = t$, $|z_1| = \frac{1}{2}(cr-st)$, $z_0z_1 < 0$.

iii) Ako jednadžba $v_{2m} = w_{2n+1}$ ima rješenje, onda je $|z_1| = s$, $|z_0| = \frac{1}{2}(cr-st)$, $z_0z_1 < 0$.

iv) Ako jednadžba $v_{2m+1} = w_{2n+1}$ ima rješenje, onda je $|z_0| = t$, $|z_1| = s$, $z_0z_1 > 0$.

Filipin je u [28] pokazao i da vrijede određene gornje granice za element c četvorke koja nije regularna.

Lema 2.12 ([28, Lemma 8])**.** *Neka je $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$-četvorka takva da je $a<b<c<d$ i $c > \max\{7b^{11}, 10^{26}\}$. Tada je $d = d_+$.*

Promotrimo fiksan $D(4)$-par $\{a, b\}$ takav da je $a < b$. Ako ga želimo proširiti do $D(4)$-trojke elementom c, onda moraju postojati prirodni brojevi s i t takvi da je $ac + 4 = s^2$ i $bc + 4 = t^2$. Tom proširenju odgovara pellovska jednadžba

$$at^2 - bs^2 = 4(a - b). \tag{2.13}$$

Po Lemi 2.6 znamo da su svakom paru rješenja (t, s) te jednadžbe pridruženi par fundamentalnih rješenja (t_0, s_0) i prirodan broj ν, takvi da vrijedi jednakost

$$t\sqrt{a} + s\sqrt{b} = (t_0\sqrt{a} + s_0\sqrt{b})\left(\frac{r + \sqrt{ab}}{2}\right)^\nu$$

te da s_0 i t_0 zadovoljavaju nejednakosti

$$1 \leq s_0 \leq \sqrt{\frac{a(b-a)}{r-2}}, \quad |t_0| \leq \sqrt{\frac{(r-2)(b-a)}{a}}.$$

Očito parovi $(t_0, s_0) = (\pm 2, 2)$ daju rješenja jednadžbe (2.13) za svaki $D(4)$-par $\{a, b\}$. Nizovi rješenja pridruženi tim fundamentalnim rješenjima su dani eksplicitno u sljedećoj lemi iz [4] gdje je dokazano i da su za parove u kojima je $b < 5a$ to jedina moguća fundamentalna rješenja koja će generirati $D(4)$-trojku $\{a, b, c\}$.

Lema 2.13 ([4, Lemma 1.]). *Neka je $\{a, b, c\}$ $D(4)$-trojka takva da je $a < b < 5a$. Tada je $c = c_\nu^\pm$ za neki $\nu \in \mathbb{N}$,*

$$c_\nu^\pm = \frac{4}{ab}\left[\left(\frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{a}}{2}\right)^2\left(\frac{r + \sqrt{ab}}{2}\right)^{2\nu} + \left(\frac{\sqrt{b} \mp \sqrt{a}}{2}\right)^2\left(\frac{r - \sqrt{ab}}{2}\right)^{2\nu} - \frac{a+b}{2}\right].$$

Ako je $b \geq 5a$, moguće je da postoje proširenja do $D(4)$-trojke takva da c nije jednak nikojem $c_\nu^\pm$, definiranih izrazom u Lemi 2.13. Takva proširenja su generirana fundamentalnim rješenjima $(t_0, s_0) \neq (\pm 2, 2)$. Iz nejednakosti koju zadovoljava rješenje s_0 imamo da je

$$ac_0 + 4 = s_0^2 \leq \frac{a(b-a)}{r-2} < \frac{r^2 - 4}{r - 2} = r + 2,$$

za neki prirodan broj c_0. Tada je $\{a, b, c_0\}$ $D(4)$-trojka takva da je $c_0 < \frac{r-2}{a}$.

Po [4] znamo da se tada za svaku takvu trojku $\{a, b, c_0\}$ opće rješenje s pellovske jednadžbe (2.13) može dobiti u obliku

$$s = (s'_\nu)^\pm = \frac{s_0\sqrt{b} \pm t_0\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}\left(\frac{r + \sqrt{ab}}{2}\right)^\nu + \frac{s_0\sqrt{b} \mp t_0\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}\left(\frac{r - \sqrt{ab}}{2}\right)^\nu,$$

gdje je $\nu \geq 0$ cijeli broj. Izbor dva različita predznaka imamo jer su svakom fiksnom s_0 pridružena fundamentalna rješenja (t_0, s_0) i $(-t_0, s_0)$. Iz toga lako dobijemo sva ostala moguća proširenja

$$c = c_\nu^\pm = \frac{((s'_\nu)^\pm)^2 - 4}{a},$$

i nad trojkama $\{a, b, c\}$ provodimo redukciju.

Opišimo sada algoritam redukcije te napomenimo da mi koristimo varijantu algoritma koju su opisali Dujella i Pethő u [25].

Lema 2.14 (Dujella, Pethő). *Pretpostavimo da je M prirodan broj. Neka je p/q konvergenta u razvoju u verižni razlomak realnog broja κ takva da je $q > 6M$ i neka je*

$$\eta = \|\mu q\| - M \cdot \|\kappa q\|,$$

gdje $\|\cdot\|$ označava udaljenost do najbližeg cijelog broja. Ako je $\eta > 0$, onda nejednakost

$$0 < J\kappa - K + \mu < AB^{-J}$$

nema rješenja u cijelim brojevima J i K gdje je

$$\frac{\log(Aq/\eta)}{\log B} \leq J \leq M.$$

Ovu lemu ćemo primijeniti na nejednakost koja je dokazana u [28], a daje nam vezu indeksa m i n i elemenata trojke $\{a, b, c\}$.

Lema 2.15 ([30, Lemma 10]). *Ako je $v_m = w_n$, $m, n \neq 0$, onda je*

$$\begin{aligned} 0 &< m \log\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right) - n \log\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right) + \log\frac{\sqrt{b}(x_0\sqrt{c}+z_0\sqrt{a})}{\sqrt{a}(y_1\sqrt{c}+z_1\sqrt{b})} \\ &< 2ac\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-2m}. \end{aligned}$$

Označimo $\alpha_1 = \frac{s+\sqrt{ac}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{t+\sqrt{bc}}{2}$ i $\alpha_3 = \frac{\sqrt{b}(x_0\sqrt{c}+z_0\sqrt{a})}{\sqrt{a}(y_1\sqrt{c}+z_1\sqrt{b})}$. Dijeljenjem nejednakosti iz prethodne leme s $\log\alpha_2$ dobijemo nejednakost

$$0 < m\frac{\log\alpha_1}{\log\alpha_2} - n + \frac{\log\alpha_3}{\log\alpha_2} < \frac{2ac}{\log\alpha_2}\left(\alpha_1^2\right)^{-m},$$

iz čega vidimo da su parametri za primjenu Leme 2.14 jednaki

$$J = m, \quad K = n, \quad \kappa = \frac{\log\alpha_1}{\log\alpha_2}, \quad \mu = \frac{\log\alpha_3}{\log\alpha_2}, \quad A = \frac{2ac}{\log\alpha_2}, \quad B = \alpha_1^2.$$

Iz dokaza Teorema 1 u [28] imamo i da je

$$\frac{m}{\log(m+1)} < 6.543 \cdot 10^{15} \log^2 c. \tag{2.14}$$

Ovu nejednakost ćemo iskoristiti za dobivanje vrijednosti parametra M. Naime, po Lemi 2.12 imamo da je $c < \max\{7b^{11}, 10^{26}\}$ te zbog pretpostavke da je $b \leq 10^5$ dobijemo $c < \max\{7 \cdot 10^{55}, 10^{26}\} = 7 \cdot 10^{55}$. Uvrštavajući u nejednakost (2.14) vidimo da vrijedi $m < 5.41408 \cdot 10^{21}$ i to možemo uzeti kao početnu vrijednost za M.

Pokazat ćemo da je redukciju dovoljno provjeriti samo na nekim od mogućih fundamentalnih rješenja iz Leme 2.11.

Lema 2.16. *Neka $\{v_{z_0,m}\}$ označava niz $\{v_m\}$ s početnim članom $v_0 = z_0$ i $\{w_{z_1,n}\}$ niz $\{w_n\}$ s početnim članom $w_0 = z_1$. Vrijedi da je $v_{\frac{1}{2}(cr-st),m} = v_{-t,m+1}$, $v_{-\frac{1}{2}(cr-st),m+1} = v_{t,m}$ za svaki $m \geq 0$ i $w_{\frac{1}{2}(cr-st),n} = w_{-s,n+1}$, $w_{-\frac{1}{2}(cr-st),n+1} = w_{s,n}$ za svaki $n \geq 0$.*

Dokaz. Neka je $v_0 = -t$, tada je $x_0 = r$ pa je $v_1 = \frac{1}{2}(cr - st)$. Slično, ako je $w_0 = -s$, iz $y_1 = r$ dobijemo da je $w_1 = \frac{1}{2}(cr - st)$.

Ako je $v_0 = -\frac{1}{2}(cr - st)$ imamo da je $x_0 = \frac{1}{2}(rs - at)$ pa je

$$v_1 = \frac{1}{4}(s^2t - crs + crs - cat) = t$$

i slično zbog $y_1 = \frac{1}{2}(rt - bs)$ dobijemo ako je $w_0 = -\frac{1}{2}(cr - st)$ da je $w_1 = t$. □

Promotrimo slučaj *ii)* u Lemi 2.11. Po oznakama iz Leme 2.16, vidimo da ovdje imamo $v_{t,2m+1} = w_{-\frac{1}{2}(cr-st),2n}$ ili $v_{-t,2m+1} = w_{\frac{1}{2}(cr-st),2n}$ i da onda vrijedi redom, $v_{t,2m+1} = w_{s,2n+1}$ ili $v_{-t,2m+1} = w_{-s,2n+1}$, tj. imamo nizove kao u slučaju *iv)*.

U slučaju *iii)* imamo da je $v_{\frac{1}{2}(cr-st),2m} = w_{-s,2n+1}$ ili $v_{-\frac{1}{2}(cr-st),2m} = w_{s,2n+1}$, te pomicanjem nizova imamo da je onda $v_{-t,2m+1} = w_{-s,2n+1}$ ili $v_{t,2m+1} = w_{s,2n+1}$, tj. opet promatramo nizove iz slučaja *iv)*.

Promotrimo sada slučaj *i)* kada je $|z_0| = \frac{1}{2}(cr - st)$. Tada imamo $v_{\frac{1}{2}(cr-st),2m} = w_{\frac{1}{2}(cr-st),2n}$ ili $v_{-\frac{1}{2}(cr-st),2m} = w_{-\frac{1}{2}(cr-st),2n}$ i ako pomaknemo vrijednosti tih nizova dobijemo nizove iz *iv)*: $v_{-t,2m+1} = w_{-s,2n+1}$ ili $v_{t,2m+1} = w_{s,2n+1}$.

No, trebamo biti oprezni jer ovakvim pomicanjem nizova početni član novog niza nije unutar granica iz Leme 2.6. Vidimo da se u Lemi 2.14 vrijednosti fundamentalnih elemenata javljaju samo u izrazu za element α_3 u nejednakosti iz Leme 2.15. U dokazu te leme u [30] vidimo da tada moramo provjeriti da vrijedi $\frac{16}{3}x_0^2 < 2ac$ i s novim početnim vrijednostima nizova. Jedina promjena z_0 i x_0 je kada nova vrijednost postaje $|z_0| = t$. Onda je $x_0 = r$ pa trebamo pokazati da je

$$\frac{16}{3}r^2 = \frac{16}{3}(ab + 4) < 2ac$$

što vrijedi ako je $c > \max\{ab, 4b\}$. Inače imamo da je $c = a + b + 2r$ i možemo se vratiti na prethodni korak u dokazu leme i pogledati da vrijedi nejednakost

$$\frac{(z_0\sqrt{a} - x_0\sqrt{c})^2}{2(c - a)} \leq \frac{(|z_0|\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})^2}{2(c - a)} < 2ac.$$

U ovom slučaju nejednakost poprima oblik

$$\frac{(t\sqrt{a}+r\sqrt{c})^2}{2(c-a)} < 2ac.$$

Budući da je $\sqrt{ac} < s = a + r$ i $t = b + r$, dovoljno je promatrati nejednakost

$$(b+r)^2a + (ab+4)(a+b+2r) + 2(b+r)r(a+r) < 4a(a+b+2r)(b+2r)$$

koja se nakon sređivanja svede na nejednakost

$$12b + 16r < 8a^2r + 8abr + 16a^2b + 48a$$

za koju je očito da vrijedi.

Dakle, dovoljno je redukciju provesti nad slučajem *iv)* i slučajem *i)* kada je $|z_0| = 2$ i $|z_0| < 1.608a^{-5/14}c^{9/14}$. Iz dokaza [30, Lemma 9] vidimo da u slučaju *i)* vrijednost $|z_0| < 1.608a^{-5/14}c^{9/14}$ možemo imati samo onda kada postoji $d_0 < d_-(a,b,c)$ takav da je $\{a,b,c,d_0\}$ neregularna $D(4)$-četvorka. Zato ćemo taj slučaj promotriti zasebno, gdje ćemo provjeriti postoje li trojke $\{a,b,c\}$ unutar granica koje promatramo za koje postoji takav d_0. Ako postoji takva trojka, našli smo neregularnu četvorku i tada je $|z_0| = \sqrt{cd_0+4}$.

Propozicija 2.17. *Neka je $\{a,b,c,d\}$ $D(4)$-četvorka takva da je $a < b$ i $b \leq 10^5$. Tada je $d = d_-$ ili $d = d_+$.*

Dokaz. Vidimo po Lemi 2.13 i razmatranju nakon nje da je korisno promatrati zasebno slučajeve kada je $b < 5a$ i $b \geq 5a$.

Napomenimo da je provedba algoritma bila u programskom paketu Mathematica 11.1 na računalu s procesorom Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU @2.00-3.10 GHz.

Slučaj $b < 5a$:

1. Promotrimo prvo slučaj kada su m i n parni indeksi i $z_0 = z_1 = 2$. Tada je $x_0 = y_1 = 2$. Za svaki $D(4)$-par $\{a,b\}$ takav da je $a < b \leq 10^5$, računamo zasebno $c = c_\nu^+$ i $c = c_\nu^-$, gdje ν kreće od broja 1 i povećavamo ga u svakom od nizova dok je god $c < \max\{7b^{11}, 10^{26}\}$. Za svaku tako definiranu trojku $\{a,b,c\}$, provodimo Baker-Davenportovu redukciju, dobivamo nove vrijednosti za M, gornju granicu indeksa m, te pamtimo samo najveću dobivenu vrijednost za M. Za prvu provedbu algoritma bilo je potrebno 16 sati i 16 minuta i dobili smo da je novi $M = 4.39123$ koji se dobije za trojku $\{a,b,c_1^-\} = \{3384, 13544, 30468\}$. Za taj novi M ponovili smo redukciju, za što je bilo potrebno 15 sati i 30 minuta te smo dobili da je $m < M = 1.7665$, što se dobije za trojku $\{a,b,c_1^-\} = \{10937, 43756, 98445\}$. Dakle, dobili smo da je jedina mogućnost $m = 0$, što znači da je $z = z_0 = 2$ i iz $cd + 4 = z^2$

vidimo da u ovom slučaju imamo $d = 0$, tj. ne postoji proširenje do četvorke u ovom slučaju.

2. Promotrimo sada slučaj kada su m i n parni indeksi i $z_0 = z_1 = -2$. Postupamo kao i u prethodnom slučaju, stavljamo prvo da je $m < M = 5.41408 \cdot 10^{21}$, te nakon prvog provođenja algoritma dobijemo da je novi $M = 4.50121$ te smo ga dobili za $\{a, b, c_1^-\} = \{3384, 13544, 30468\}$ za što je bilo potrebno 16 sati i 25 minuta. Sada za novi M ponovimo algoritam, no ovdje ne uspijevamo redukcijom eliminirati sve parne vrijednosti za M, jer dobijemo da je novi $M = 3.6936$ za trojku $\{a, b, c_1^+\} = \{2561, 11872, 25461\}$, za što je bilo potrebno 15 sati i 2 minute. Budući da je ovo slučaj s parnim indeksima, preostaju nam mogućnosti da je $m = 0$ ili $m = 2$. Ako je $m = 0$, dobijemo da je $d = 0$, kao i u prethodnom slučaju. Ako pretpostavimo da je $m = 2$, onda iz Leme 2.7 imamo da je jedina mogućnost $n = 2$. Iz dokaza [30, Lemma 6] vidimo da za $(m, n) = (2, 2)$ mora biti $d = d_+$ pa ne postoji proširenje do neregularne četvorke.

3. Promotrimo sada slučaj kada su m i n neparni indeksi i $z_0 = t$, $z_1 = s$. Tada imamo da je $x_0 = y_1 = r$. Ostatak algoritma je sličan kao u prethodnim slučajevima. Nakon prvog prolaska kroz algoritam, za što nam je trebalo 16 sati i 30 minuta dobijemo da je $M = 4.50121$, za trojku $\{a, b, c_1^+\} = \{3384, 13544, 30468\}$. Postupak ponovimo za novi M te dobijemo da je sada $M = 3.70746$, za trojku $\{a, b, c_1^+\} = \{6880, 13002, 38798\}$, za što je bilo potrebno malo više od 16 sati. Slično kao i u prethodnom slučaju, imamo da tada mora biti $n \in \{1, 3\}$. Opet iz dokaza [30, Lemma 6] vidimo da je slučaj $(m, n) = (3, 1)$ nemoguć, a iz [30, Lemma 8] da ni $(m, n) = (3, 3)$ ne može biti. Ostaje nam jedino opcija da je $m = 1$, gdje dobijemo da je $z = v_1 = w_1 = \frac{1}{2}(st + cr)$ pa je
$$d = \frac{z^2 - 4}{c} = a + b + c + \frac{1}{2}(abc + rst) = d_+(a, b, c).$$

4. Promotrimo slučaj kada je $z_0 = -t$, $z_1 = -s$ i indeksi neparni. U prvom prolasku kroz algoritam dobijemo da je novi $M = 4.39123$ za trojku $\{a, b, c_1^+\} = \{3384, 13544, 30468\}$. Ponovimo postupak za taj novi M i dobijemo da je sada najveći $M = 1.95031$ što je postignuto za trojku $\{a, b, c_6^+\} = \{7896, 31576, c_6^+\}$, gdje je $c_6^+ \approx 6.84538 \cdot 10^{46}$, odakle vidimo da je jedina mogućnost $m = 1$ koja vodi do toga da je $z = v_1 = \frac{1}{2}(cr - st)$ i $d = d_-(a, b, c)$.

Slučaj $b \geq 5a$:

Pretpostavljamo da je $b \geq 5a$ i $b \leq 10^5$, odakle vidimo da je $a \leq 20000$. Prvo provodimo redukciju nad trojkama za koje je $c = c_\nu^\pm$ kao u slučaju $b < 5a$. S obzirom na to da su postupak i zaključci slični kao u prethodnom slučaju, napomenimo da nam je za provjeru po svim mogućnostima za fundamentalna rješenja ukupno trebao 31 sat, te smo provjerili da se takve trojke ne mogu proširiti do neregularne četvorke.

Po prethodnom razmatranju, zbog $b \geq 5a$ znamo da je moguće da postoje i elementi c koji nisu dani izrazima iz Leme 2.13, te ih trebamo pronaći kao u prethodno opisanom postupku.

Unutar zadanih intervala za a i b pretražujemo postoje li proširenja c_0 takva da je $ac_0 + 4 < r + 2$ i dobijemo 297 trojki s tim svojstvom, prvih nekoliko je

$$\{1, 11660, 96\}, \{1, 16896, 117\}, \{1, 17952, 21\}, \{1, 19040, 12\}, \{1, 23712, 140\}, \ldots$$

Za svaku od tih trojki promatramo nizove

$$(s'_\nu)^{\pm} = \frac{s_0\sqrt{b} \pm t_0\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} \left(\frac{r + \sqrt{ab}}{2}\right)^{\nu} + \frac{s_0\sqrt{b} \mp t_0\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} \left(\frac{r - \sqrt{ab}}{2}\right)^{\nu},$$

iz njih dobijemo moguća proširenja $c = c_\nu^{\pm} = \frac{((s'_\nu)^{\pm})^2 - 4}{a}$, te provodimo redukciju nad trojkom $\{a, b, c\}$. Kao i prije razlikujemo 4 slučaja u redukciji ovisno je li $|z_0| = |z_1| = 2$ ili $|z_0| = t$, $|z_1| = s$ i $z_0 z_1 > 0$. Za redukciju po svim slučajevima je bilo potrebno 75 sekundi i dobili smo novi $M = 3.41721$ za $\{a, b, c_1^-\} = \{1, 16896, 20554186750\}$ i fundamentalna rješenja $z_0 = -t$ i $z_1 = -s$. Zatim ponovimo redukciju, ali zasebno za slučajeve parnih i neparnih indeksa. U slučaju parnih indeksa dobijemo da je novi $M = 1.63776$ za $\{a, b, c_1^+\} = \{11, 34720, 579232371198\}$ i za fundamentalna rješenja $z_0 = z_1 = 2$, što znači da je jedina opcija $m = 0$. U slučaju neparnih indeksa dobijemo novi $M = 2.66403$ za $\{a, b, c_1^+\} = \{75, 67620, 21956974048798\}$ i fundamentalna rješenja $z_0 = t$, $z_1 = s$, što znači da je jedina opcija $m = 1$. Dakle, u oba slučaja imamo samo proširenje do četvorke elementima $d = d_+$ ili $d = d_-$.

Preostalo je provjeriti postoji li $\{a, b, c, d_0\}$ $D(4)$-četvorka za koju je $d_0 < d_-(a, b, c)$ za sve mogućnosti $\{a, b, c\}$. Za provjeru su bila potrebna 24 sata i nismo pronašli takvu četvorku.

$\square$

2.3 Poboljšanje Rickertovog teorema

Kao što smo vidjeli, promatranje neke $D(n)$-m-torke možemo svesti na promatranje pridruženog sustava pellovskih jednadžbi. Bennett u [7] i Rickert u [46] su dokazali teoreme o simultanim racionalnim aproksimacijama kvadratnih korijena brojeva koji su blizu broja 1, koristeći Padéove aproksimacije hipergeometrijskih funkcija, kako bi dali gornju granicu za broj cjelobrojnih rješenja nekih konkretnih sustava pellovskih jednadžbi. Njihovi rezultati su se stoga mogli primijeniti i na problem diofantskih m-torki, kao što je napravljeno, na primjer, u [36] za $D(1)$-m-torke ili u [4] i [30] za $D(4)$-m-torke. U ovom potpoglavlju ćemo po uzoru na poboljšanje dano za $D(1)$-m-torke u [12] pokazati slično poboljšanje rezultata za $D(4)$-m-torke, te dati gornju granicu za indeks n, pridružen problemu proširenja $D(4)$-trojke do četvorke, u terminima elemenata trojke.

Konkretno, dat ćemo poboljšanje posljednjeg objavljenog rezultata iz [4] koji se primijenio na $D(4)$-četvorke. Navedimo lemu za koju će poboljšanje biti dano u Lemi 2.22.

Lema 2.18. *[4, Lemma 6] Neka je $\{A, B, C, D\}$ $D(4)$-četvorka takva da je $A < B < C < D$. Pretpostavimo da je $C > 308.07A'B(B-A)^2/A$, gdje je $A' = \max\{4A, 4(B-A)\}$. Tada je,*

$$\log z < \frac{\log(32.02AA'B^4C^2)\log(0.026AB(B-A)^{-2}C^2)}{\log(0.00325A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}C)}.$$

Navedimo prvo Bennettovu lemu koja će nam biti potrebna za dokaz Teorema 2.20.

Lema 2.19. *[7, Lemma 3.1] Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$, po volji odabrani realni brojevi i $\theta_0 = 1$. Pretpostavimo da postoje realni brojevi l, p, L i P takvi da je $L > 1$ i da za svaki prirodni broj k možemo naći cijele brojeve p_{ijk} $(0 \leq i, j \leq m)$ s nenul determinantom,*

$$|p_{ijk}| \leq pP^k \quad (0 \leq i, j \leq m)$$

i

$$\left|\sum_{j=0}^{m} p_{ijk}\theta_j\right| \leq lL^{-k} \quad (0 \leq i \leq m).$$

Tada

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \ldots, \left|\theta_m - \frac{p_m}{q}\right|\right\} > cq^{-\lambda}$$

vrijedi za sve cijele brojeve $p_1, \ldots, p_m$, $q > 0$, gdje je

$$\lambda = 1 + \frac{\log P}{\log L} \quad i \quad c^{-1} = 2mpP(\max\{1, 2l\})^{\lambda-1}.$$

Teorem 2.20. *Neka su A i B cijeli brojevi i $g = \gcd(A, B)$ te neka je $0 < A/g \leq B/g - 4$, $B/g \geq 5$ te N višekratnik od AB. Neka je $A' = \max\{4(B-A), 4A\}$. Pretpostavimo da je $N \geq 59.488A'B^2(B-A)^2g^{-4}$. Neka su*

$$\theta_1 = \sqrt{1 + \frac{4B}{N}} \quad i \quad \theta_2 = \sqrt{1 + \frac{4A}{N}}.$$

Tada vrijedi

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\theta_2 - \frac{p_2}{q}\right|\right\} > \left(\frac{3.53081 \cdot 10^{27}A'BN}{Ag^2}\right)^{-1} q^{-\lambda}$$

za sve cijele brojeve p_1, p_2, $q > 0$, gdje je

$$\lambda = 1 + \frac{\log(2.500788A^{-1}A'BNg^{-2})}{\log(0.04216N^2g^2A^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2})} < 2.$$

Dokaz. Iskoristit ćemo rezultate iz dokaza [13, Theorem 2.2] i [4, Theorem 2], te slično kao i u tim teoremima, Lemu 2.19 ćemo iskoristiti za $m = 2$ te θ_1 i θ_2 definirane u iskazu teorema. Kao u [7], promatra se problem pronalaska simultanih aproksimacija funkcija oblika

$$(1 + a_0x)^{\frac{s}{n}}, \dots, (1 + a_mx)^{\frac{s}{n}},$$

gdje su a_i različiti cijeli brojevi takvi da je $a_j = 0$ za neki j, $|a_i| < |x|^{-1}$ i s i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je $s < n$. Sve rezultate koji su detaljno pokazani u [2] koristimo bez ulaska u detalje.

Promatramo polinome oblika

$$p_{ij}(x) = \sum_{i,j} \binom{k+\frac{1}{2}}{h_j}(1+a_jx)^{k-h_j}x^{h_j}\prod_{l\neq j}\binom{-k_{il}}{h_l}(a_j-a_l)^{-k_{il}-h_l}$$

gdje je $k_{il} = k + \delta_{il}$, δ_{il} Kroneckerov simbol, $\sum_{i,j}$ suma po svim nenegativnim cijelim brojevima h_0, h_1, h_2 koji zadovoljavaju $h_0 + h_1 + h_2 = k_{ij} - 1$, a $\prod_{l\neq j}$ označava produkt od $l = 0$ do $l = 2$ osim kad je $l = j$.

Iz [12] imamo da je

$$f(x) := 2^{2k-1}\prod_{l\neq j}(a_j - a_l)^{k_{il}+h_l}p_{ij}(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

te iz dokaza [13, Theorem 2.2] vidimo da za zajednički djelitelj, u oznaci $\Pi_2(x)$, koeficijenata od $f(x)$ vrijedi

$$\Pi_2(x) > \frac{1.6^k}{4.09 \cdot 10^{13}}.$$

Posebno, za $x = 1/N$ je vrijednost funkcije $p_{ij}(x)$ jednaka

$$p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{i,j}\binom{k+\frac{1}{2}}{h_j}C_{ij}^{-1}\prod_{l\neq j}\binom{-k_{il}}{h_l} \tag{2.15}$$

gdje je

$$C_{ij} := \frac{N^k}{(N+a_j)^{k-h_j}}\prod_{l\neq j}(a_j - a_l)^{k_{il}+h_l}.$$

Sada uvrštavamo $a_0 = 0$, $a_1 = 4A = 4A_0g$, $A_2 = 4B = 4B_0g$ i $N = ABN_0$ i promatramo izraze C_{ij}.

Za $j = 0$ imamo da je

$$|C_{i0}| = \frac{N^k (4A)^{k_{i1}+h_1}(4B)^{k_{i2}+h_2}}{A^{k-h_0}B^{k-h_0}N_0^{k-h_0}}$$
$$= \frac{4^{k_{i1}+k_{i2}+h_1+h_2}A^{k_{i1}+h_0+h_1-k}B^{k_{i2}+h_0+h_2-k}N^k}{N_0^{k-h_0}}$$

i jer vrijedi $k_{il} + h_j + h_l - k \leq k$ i $k_{i1} + k_{i2} + h_1 + h_2 \leq 3k$, zaključujemo da je

$$4^{3k}A^kB^kN^kC_{i0}^{-1} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i.$$

Za $j = 1$ vrijedi

$$|C_{i1}| = \frac{N^k}{(N+4A)^{k-h_1}}(4A)^{k_{i0}+h_0}(4B-4A)^{k_{i2}+h_2} =$$
$$= \frac{4^{k_{i0}+k_{i2}+h_0+h_2}A_0^{k_{i0}+h_0+h_1-k}(B_0-A_0)^{k_{i2}+h_2}N^kg^{k_{i0}+k_{i2}+h_0+h_1+h_2-k}}{(BN_0+4)^{k-h_1}}$$

i jer je $k_{il} + h_l < 2k$ i $k_{i0} + k_{i2} + h_0 + h_1 + h_2 - k = 2k$, imamo

$$4^{3k}A_0^k(B_0-A_0)^{2k}N^kg^{2k}C_{i1}^{-1} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i.$$

Slično se dobije za $j = 2$ da je

$$|C_{i2}| = \frac{4^{k_{i0}+k_{i1}+h_0+h_1}B_0^{k_{i0}+h_0+h_2-k}(B_0-A_0)^{k_{i1}+h_1}N^kg^{k_{i0}+k_{i1}+h_0+h_1+h_2-k}}{(AN_0+4)^{k-h_2}}$$

pa je

$$4^{3k}B_0^k(B_0-A_0)^{2k}N^kg^{2k}C_{i2}^{-1} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i.$$

Iz navedenog možemo zaključiti

$$\{4^3AB(B-A)^2Ng^{-2}\}^kC_{ij}^{-1} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i,j.$$

Iz dokaza [46, Lemma 3.4] imamo

$$2^{h_j+h'_j}\binom{k+\frac{1}{2}}{h_j} \in \mathbb{Z},$$

gdje je $h'_j = \max\{0, h_j - 1\}$, $\forall j$.

Vrijedi $h_j + h'_j \leq k_{ij} - 1 + k'_{ij} - 1 \leq 2k - 1$, to jest $2^{h_j+h'_j} < 2^{2k-1} = 2^{-1} \cdot 4^k$ pa je

$$2^{-1} \cdot 4^k\binom{k+\frac{1}{2}}{h_j} \in \mathbb{Z}, \quad \forall j$$

i posebno

$$2^{-1} \cdot 4^k \binom{k+\frac{1}{2}}{h_j} \{4^3 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k C_{ij}^{-1} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i, j.$$

Iz definicije za $f(x)$ i ovog razmatranja vidimo da su brojevi definirani na sljedeći način također cijeli brojevi:

$$p_{ijk} := 2^{-1} \cdot \{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k \Pi_2(k)^{-1} p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Iz [2] imamo

$$\left|\sum_{j=0}^{2} p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)\theta_j\right| < \frac{27}{64}\left(1-\frac{4B}{N}\right)^{-1}\left\{\frac{27}{4}\left(1-\frac{4B}{N}\right)^2 N^3\right\}^{-k}$$

i

$$\left|p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)\right| \leq \left(1+\frac{A'}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\frac{6B-2A}{N}}{8\zeta}\right)^k,$$

gdje je

$$\zeta = \begin{cases} A^2(2B-A), & \text{ako je } B-A \geq A \\ (B-A)^2(A+B), & \text{ako je } B-A < A. \end{cases}$$

Primijetimo da je tada

$$\begin{aligned} |p_{ijk}| &= \frac{1}{2\Pi_2(k)}\left|p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)\right| \{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k \\ &< \frac{4.09 \cdot 10^{13}}{2 \cdot 1.6^k}\{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k \left|p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)\right|, \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=0}^{2} p_{ijk}\theta_j\right| &= \frac{1}{2\Pi_2(k)}\left|\sum_{j=0}^{2} p_{ijk}\theta_j\right| \{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k \\ &< \frac{4.09 \cdot 10^{13}}{2 \cdot 1.6^k}\{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}\}^k \left|\sum_{j=0}^{2} p_{ijk}\theta_j\right|. \end{aligned}$$

Iz [46, Lema 3.4] vidimo da je $\det_{0\leq i,j\leq m} p_{ij}\left(\frac{1}{N}\right) \neq 0$ a iz toga posebno i za svaki k možemo zaključiti $\det_{0\leq i,j\leq m} p_{ijk} \neq 0$.

Dakle, možemo primijeniti Lemu 2.19, jer vrijedi

$$|p_{ijk}| < pP^k, \quad \left|\sum_{j=0}^{2} p_{ijk}\theta_j\right| < lL^{-k}$$

za

$$p = \frac{4.09 \cdot 10^{13}}{2}\left(1 + \frac{A'}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad P = \frac{1 + \frac{6B-2A}{N}}{8\zeta} \cdot \frac{4^4 AB(B-A)^2 N}{1.6 g^2}$$

$$l = \frac{4.09 \cdot 10^{13}}{2} \cdot \frac{27}{64}\left(1 - \frac{4B}{N}\right)^{-1}$$

$$L = \frac{1.6}{4^4 AB(B-A)^2 N g^{-2}} \cdot \frac{27}{4}\left(1 - \frac{4B}{N}\right)^2 N^3.$$

Koristeći da je $N \geq 59.488A'B^2(B-A)^2 g^{-4}$, $B_0 = B/g \geq 5$, $B_0 - A_0 \geq 4$ imamo ocjenu $\frac{N}{4B} \geq 14.872A'B(B-A)^2 g^{-4} \geq 14.872 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4^2 = 4759.04$ jer je i $A'/g \geq 4$ pa je

$$1 - \frac{4B}{N} > 0.999789 \tag{2.16}$$

i jer je

$$1 + \frac{A'}{2N} = 1 + \frac{\max\{4A, 4(B-A)\}}{2N} < 1 + \frac{2B}{N},$$

vrijedi

$$\left(1 + \frac{A'}{2N}\right)^{1/2} < \left(1 + \frac{2B}{N}\right)^{1/2} < 1.000053.$$

Iz ovoga imamo ocjenu

$$p < 2.0452 \cdot 10^{13}. \tag{2.17}$$

Također, budući da je $6B - 2A < 6B < \alpha \cdot 59.488A'B^2(B-A)^2 g^{-4} < \alpha N$ za neki $\alpha > 0$ i jer je $\alpha \cdot 59.488A'B^2(B-A)^2 g^{-4} > \alpha \cdot 59.488 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4^2 B$, možemo uzeti $\alpha = 0.0003152 > \frac{6}{59.488 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4^2}$ pa je

$$\begin{aligned}
P =& \frac{20(N + 6B - 2A)AB(B-A)^2}{\zeta g^2} < \frac{20.006304NAB(B-A)^2}{\zeta g^2} \\
<& \begin{cases} \frac{20.006304NAB(B-A)^2}{A^2(2B-A)g^2}, & \text{ako je } B - A \geq A \\ \frac{20.006304NAB(B-A)^2}{(B-A)^2(A+B)g^2}, & \text{ako je } B - A < A \end{cases} \\
<& \begin{cases} \frac{20.006304NAB(B-A)^2}{2A^2(B-A)g^2}, & \text{ako je } B - A \geq A \\ \frac{20.006304NAB(B-A)^2}{2A(B-A)^2 g^2}, & \text{ako je } B - A < A \end{cases} \\
<& \frac{2.500788NA'B}{Ag^2},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili trivijalne nejednakosti $2B - A > 2B - 2A$ i $A + B > 2A$. Iz ocjene (2.16) imamo

$$l < 8.6292 \cdot 10^{12}$$

i

$$L > \frac{0.04216N^2 g^2}{AB(B-A)^2}.$$

Tada za
$$\lambda = 1 + \frac{\log(2.500788NA^{-1}A'Bg^{-2})}{\log(0.04216N^2g^2A^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2})}$$
vrijedi $\lambda < 2$ jer je $0 < 2.500788NA^{-1}A'Bg^{-2} < 0.04216N^2g^2A^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}$ iz pretpostavke $N \geq 59.488A'B^2(B-A)^2g^{-4}$. Imamo po Lemi 2.19 da je

$$\begin{aligned}
c^{-1} &= 2mpP(\max\{1, 2l\})^{\lambda-1} \\
&< 2 \cdot 2 \cdot 2.0452 \cdot 10^{13} \cdot \frac{2.5000788A'BN}{Ag^2}(2 \cdot 8.6292 \cdot 10^{12})^{2-1} \\
&< \frac{3.53081 \cdot 10^{27}A'BN}{Ag^2},
\end{aligned}$$

čime smo dokazali teorem. □

Zbog primjene na dokaz slutnje nepostojanja $D(4)$-petorke, promotrimo što nam vrijedi za binarne rekurzivne nizove $z = v_m = w_n$, pridružene proširenju trojke do četvorke, kada imaju parne indekse.

Lema 2.21. *Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $z = v_{2m} = w_{2n}$, i da je $|z_1| = 2$ te $c \geq b^2 \geq 25$. Tada je $\log z > n \log bc$.*

Dokaz. Iz rekurzivnih relacija za elemente niza w_n dobijemo

$$w_n = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^n \left((z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c}) + (z_1\sqrt{b} - y_1\sqrt{c})\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{-2n}\right),$$

a kako za $|z_1| = 2$ imamo $y_1 = 2$ zaključujemo

$$w_{2n} > \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2n} \left((-\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (-\sqrt{b} - \sqrt{c})\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{-4n}\right).$$

Budući da vrijedi $\sqrt{bc+4} - \sqrt{bc} < \frac{4}{\sqrt{bc+4}}$, dobijemo

$$\left(\frac{\sqrt{bc+4} - \sqrt{bc}}{2}\right)^4 < \frac{16}{(bc+4)^2} < \frac{16}{(5 \cdot 25 + 4)^2} < 0.001.$$

S druge strane, $\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{-4n} = \left(\frac{t-\sqrt{bc}}{2}\right)^{4n} < \left(\frac{t-\sqrt{bc}}{2}\right)^4 < 0.001$ pa imamo

$$\begin{aligned}
z = w_{2n} &> \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2n} \left((-\sqrt{b} + \sqrt{c}) + (-\sqrt{b} - \sqrt{c}) \cdot 0.001\right) \\
&> \left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{b}}(0.999\sqrt{c} - 1.001\sqrt{b}) \\
&> \left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{b}}(0.999\sqrt{5b} - 1.001\sqrt{b})
\end{aligned}$$

$$> \left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2n} > \sqrt{bc}^{2n} > (bc)^n.$$

Logaritmiranjem prethodne nejednakosti dobijemo traženu nejednakost. □

Konačno dajemo iskaz leme kakvu ćemo primijeniti na četvorke sadržane u $D(4)$-petorki u sljedećem poglavlju.

Lema 2.22. *Neka je $\{A,B,C,D\}$ $D(4)$-četvorka takva da za indekse m i n vrijedi $m \geq 3$, $n \geq 2$, $z = v_{2m} = w_{2n}$, $z_0 = z_1$ i $|z_0| = 2$. Također, neka je $A' = \max\{4(B-A), 4A\}$ i neka za $g = \gcd(A,B)$ vrijedi $0 < A/g \leq B/g - 4$, $B/g \geq 5$ te pretpostavimo da je $C \geq 59.488A'B(B-A)^2 g^{-4}A^{-1}$. Tada je*

$$n < \frac{4\log(8.40335\cdot 10^{13}(A')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1})\log(0.20533A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C(B-A)^{-1}g)}{\log(BC)\log(0.016858A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}Cg^4)}.$$

Dokaz. Iz [30, Lemma 14] imamo da je

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\theta_2 - \frac{p_2}{q}\right|\right\} < \frac{2C}{Az^2},$$

gdje su θ_1 i θ_2 definirani kao u Teoremu 2.20, x, y, z pozitivna rješenja sustava pellovskih jednadžbi pridruženih proširenju $D(4)$-trojke $\{A,B,C\}$ do četvorke, te $p_1 = sBx$, $p_2 = zAy$ i $q = ABz$. Nadalje, uzimamo $N = ABC$.

Uzimajući u obzir rezultat iz Teorema 2.20 imamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3.53081\cdot 10^{27}A'BN}{Ag^2}\right)^{-1} q^{-\lambda} &< \frac{2C}{Az^2} \\ A^2g^2z^2(ABz)^{-\lambda} &< 7.06162\cdot 10^{27}A'AB^2C^2, \end{aligned}$$

a kako je $\lambda < 2$ dobijemo

$$\begin{aligned} A^2g^2z^{2-\lambda} &< 7.06162\cdot 10^{27}A'A^3B^4C^2 \\ z^{2-\lambda} &< 7.06162\cdot 10^{27}A'AB^4C^2g^{-2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

S druge strane, budući da je $\lambda = 1 + \frac{\log(2.500788A^{-1}A'BNg^{-2})}{\log(0.04216N^2g^2A^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2})} < 2$, imamo

$$\begin{aligned} 2-\lambda &= 1 - \frac{\log(2.500788A^{-1}A'BNg^{-2})}{\log(0.04216N^2g^2A^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2})} \\ &> \frac{\log(0.016858AB^{-1}C(A')^{-1}(B-A)^{-2}g^4)}{\log(0.04216ABC^2(B-A)^{-2}g^2)} \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{1}{2-\lambda} < \frac{\log(0.04216ABC^2(B-A)^{-2}g^2)}{\log(0.016858AB^{-1}C(A')^{-1}(B-A)^{-2}g^4)}.$$

Logaritmiranjem nejednakosti (2.18) dobijemo

$$\begin{aligned}\log z &< \frac{1}{2-\lambda}\log(7.06162\cdot 10^{27}A'AB^4C^2g^{-2}) < \\ &< \frac{\log(7.06162\cdot 10^{27}A'AB^4C^2g^{-2})\log(0.04216ABC^2(B-A)^{-2}g^2)}{\log(0.016858AB^{-1}C(A')^{-1}(B-A)^{-2}g^4)}.\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti iz Leme 2.21 imamo

$$n\log(BC) < \frac{\log(7.06162\cdot 10^{27}A'AB^4C^2g^{-2})\log(0.04216ABC^2(B-A)^{-2}g^2)}{\log(0.016858AB^{-1}C(A')^{-1}(B-A)^{-2}g^4)}.$$

pa je

$$n < \frac{4\log(8.40335\cdot 10^{13}(A')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1})\log(0.20533A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C(B-A)^{-1}g)}{\log(BC)\log(0.016858A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}Cg^4)}$$

što smo i trebali pokazati. $\square$

Poglavlje 3

Ne postoji $D(4)$-petorka

Jedan od najčešće proučavanih problema vezanih za cjelobrojne $D(n)$-m-torke je dokaz slutnje nepostojanja $D(1)$-petorki (npr. u [5], [11], [12], [14], [16], [36]), ili analogan problem u slučaju $D(4)$-petorki (npr. u [3], [26], [32]).

Slutnja 3.1. *Ne postoji $D(4)$-petorka.*

Problem određivanja moguće veličine skupa $D(4)$-m-torki je po rezultatima i metodama koje se koriste sličan problemu $D(1)$-m-torki. Naime, vidimo da se $D(n)$-par $\{a, b\}$ može proširiti do $D(n)$-trojke elementom $c = a+b+2r$, gdje je $r = \sqrt{ab+n}$ i za $n = 1$ i za $n = 4$. Takvu trojku ćemo nazivati regularna ili Eulerova trojka u oba slučaja i pokaže se da ako tražimo proširenje para većim elementom da je tim izrazom dan najmanji mogući element c. Također, kada se promatra proširenje $D(n)$-trojke do regularne četvorke, za $n = 1$ i $n = 4$ imamo slične rezultate, jer je regularna $D(1)$-četvorka oblika

$$\{a, b, c, a+b+c+2(abc+\sqrt{(ab+1)(ac+1)(bc+1)})\},$$

a regularna $D(4)$-četvorka oblika

$$\{a, b, c, a+b+c+\frac{1}{2}(abc+\sqrt{(ab+4)(ac+4)(bc+4)})\}.$$

Sličnosti nalazimo i u ostalim aspektima promatranja problema, no primjena istih metoda ne daje uvijek i jednako uspješne rezultate, pa je tako i u ovdje prezentiranom dokazu nepostojanja $D(4)$-petorke bilo potrebno riješiti neke posebne slučajeve koji se kod proučavanja $D(1)$-petorki nisu pojavili.

Iako je pitanje nepostojanja proširenja trojke do petorke bilo dokazano za neke posebne trojke, npr. u [5], prvi značajniji korak u dokazivanju slutnje je napravio Dujella u [16] kada je dokazao da ne postoji $D(1)$-šestorka i da postoji samo konačno mnogo $D(1)$-petorki. Filipin je u [28] i [32] dokazao analogne rezultate za $D(4)$-m-torke. Od tada je više autora poboljšalo gornju granicu za broj mogućih petorki u oba slučaja. Posljednji objavljeni rezultati su od Cipua i Trudigana iz [14], gdje su pokazali da je broj $D(1)$-petorki manji od $5.41 \cdot 10^{26}$ te naš rezultat s Alanom Filipinom iz [8] gdje smo pokazali da je broj $D(4)$-petorki manji od $6.8587 \cdot 10^{29}$.

Konačan dokaz slutnje nepostojanja $D(1)$-petorke su predložili He, Togbé i Ziegler u [38], te po uzoru na njihove nove metode, u ovom poglavlju ćemo detaljno razraditi dokaz Slutnje 3.1. Rezultati iz ovog poglavlja su napisani u obliku članka [9] i poslani na recenziju.

3.1 Preliminarni rezultati vezani za pellovske jednadžbe

Neka je $\{a, b, c\}$ $D(4)$-trojka, takva da je $a < b < c$, i r, s, t prirodni brojevi za koje vrijedi

$$ab + 4 = r^2, \quad ac + 4 = s^2, \quad bc + 4 = t^2.$$

Pretpostavimo da je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka koja se dobije proširenjem trojke $\{a, b, c\}$, takva da vrijedi $a < b < c < d < e$, i stavimo

$$ad + 4 = x^2, \quad bd + 4 = y^2, \quad cd + 4 = z^2,$$

gdje su x, y, z prirodni brojevi. Tada postoje i prirodni brojevi X, Y, Z, W takvi da je

$$ae + 4 = X^2, \quad be + 4 = Y^2, \quad ce + 4 = Z^2, \quad de + 4 = W^2. \tag{3.1}$$

Iz [29] znamo da vrijedi sljedeća lema koja nam daje dodatne informacije o elementu d i brojevima x, y, z.

Lema 3.2. *[29, Theorem 1] Neka je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka takva da je $a < b < c < d < e$. Tada je $d = d_+(a, b, c)$.*

S obzirom ne to da imamo $d = d_+(a, b, c)$, lako se provjeri da vrijedi

$$x = \frac{at + rs}{2}, \quad y = \frac{bs + rt}{2}, \quad z = \frac{cr + st}{2}.$$

Eliminirajući e iz jednadžbi (3.1) dobijemo sustav pellovskih jednadžbi:

$$aY^2 - bX^2 = 4(a - b), \tag{3.2}$$
$$aZ^2 - cX^2 = 4(a - c), \tag{3.3}$$
$$bZ^2 - cY^2 = 4(b - c), \tag{3.4}$$
$$aW^2 - dX^2 = 4(a - d), \tag{3.5}$$
$$bW^2 - dY^2 = 4(b - d), \tag{3.6}$$
$$cW^2 - dZ^2 = 4(c - d). \tag{3.7}$$

U Lemi 2.6 smo opisali opće rješenje jednadžbi ovoga oblika pa ako ju primijenimo na sve jednadžbe iz sustava, dobijemo da se rješenja mogu zapisati u obliku

$$Y\sqrt{a}+X\sqrt{b}=Y_{h'}^{(a,b)}\sqrt{a}+X_{h'}^{(a,b)}\sqrt{b}=(Y_0\sqrt{a}+X_0\sqrt{b})\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{h'}, \tag{3.8}$$

$$Z\sqrt{a}+X\sqrt{c}=Z_{j'}^{(a,c)}\sqrt{a}+X_{j'}^{(a,c)}\sqrt{c}=(Z_1\sqrt{a}+X_1\sqrt{c})\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{j'}, \tag{3.9}$$

$$Z\sqrt{b}+Y\sqrt{c}=Z_{k'}^{(b,c)}\sqrt{b}+Y_{k'}^{(b,c)}\sqrt{c}=(Z_2\sqrt{b}+Y_2\sqrt{c})\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{k'}, \tag{3.10}$$

$$W\sqrt{a}+X\sqrt{d}=W_{l'}^{(a,d)}\sqrt{a}+X_{l'}^{(a,d)}\sqrt{d}=(W_3\sqrt{a}+X_3\sqrt{d})\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{l'}, \tag{3.11}$$

$$W\sqrt{b}+Y\sqrt{d}=W_{m'}^{(b,d)}\sqrt{b}+Y_{m'}^{(b,d)}\sqrt{d}=(W_4\sqrt{b}+Y_4\sqrt{d})\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{m'}, \tag{3.12}$$

$$W\sqrt{c}+Z\sqrt{d}=W_{n'}^{(c,d)}\sqrt{c}+Z_{n'}^{(c,d)}\sqrt{d}=(W_5\sqrt{c}+Z_5\sqrt{d})\left(\frac{z+\sqrt{cd}}{2}\right)^{n'}, \tag{3.13}$$

gdje su h', j', k', l', m', n' nenegativni cijeli brojevi, a Y_0, Y_2, Y_4, X_0, X_1, X_3, Z_1, Z_2, Z_5, W_3, W_4, W_5 cijeli brojevi koji zadovoljavaju uvjete Leme 2.6 i koje nazivamo fundamentalnim rješenjima pellovskih jednadžbi (3.2)-(3.7).

Svaki od nizova rješenja se može prikazati i kao binarni rekurzivni niz pa na primjer za niz rješenja $(Y_{h'}^{(a,b)}, X_{h'}^{(a,b)})$ iz (3.8) vrijedi:

$$\begin{aligned}
Y_0^{(a,b)}&=Y_0, \quad Y_1^{(a,b)}=\frac{rY_0+bX_0}{2}, \quad Y_{h'+2}^{(a,b)}=rY_{h'+1}^{(a,b)}-Y_{h'}^{(a,b)},\\
X_0^{(a,b)}&=X_0, \quad X_1^{(a,b)}=\frac{rX_0+aY_0}{2}, \quad X_{h'+2}^{(a,b)}=rX_{h'+1}^{(a,b)}-X_{h'}^{(a,b)},
\end{aligned}$$

što se lako može provjeriti indukcijom. Zbog ovakvog zapisa preko binarnih rekurzivnih nizova, eksponente h', j', k', l', m', n' nazivamo i indeksima.

Budući da je $d=d_+(a,b,c)$ u $D(4)$-petorki, nije teško provjeriti da onda imamo $d>abc$, a nešto bolju donju granicu ćemo i dokazati u Lemi 3.6. Koristeći tu nejednakost i druga svojstva elemenata petorke, Filipin je u [32] pokazao koje vrijednosti mogu imati fundamentalna rješenja i koje relacije zadovoljavaju indeksi pridruženi pellovskim jednadžbama koje sadrže element d.

Lema 3.3. *[32, Lemma 3] Ako je $W=W_{l'}^{(a,d)}=W_{m'}^{(b,d)}=W_{n'}^{(c,d)}$, onda je*

$$l'\equiv m'\equiv n'\equiv 0 \pmod 2).$$

Također,

$$W_3=W_4=W_5=2\varepsilon=\pm 2 \quad i \quad X_3=Y_4=Z_5=2.$$

Već su dokazane i neke relacije među indeksima, a neke slijede direktno iz relacija vezanih za $D(4)$-četvorke.

Korolar 3.4. *Ako je $Z = Z_{j'}^{(a,c)} = Z_{k'}^{(b,c)}$, onda je $k' - 1 \leq j' \leq 2k' + 1$.*

Dokaz. Dovoljno je primijeniti Lemu 2.7 na četvorku $\{a, b, c, e\}$. □

S obzirom da za jednadžbe koje sadrže element d možemo iskoristiti da je d znatno veći od ostalih manjih elemenata petorke, možemo pokazati da vrijedi i bolji odnos među indeksima pridruženim tim jednadžbama.

Lema 3.5. *[32, Lemma 4.] Ako je $W = W_{2l}^{(a,d)} = W_{2m}^{(b,d)} = W_{2n}^{(c,d)}$, onda je $4 \leq n \leq m \leq l \leq 2n$.*

Nakon što poboljšamo numeričke granice za elemente u $D(4)$-petorki, moći ćemo dokazati i da ostali indeksi pridruženi jednadžbama (3.2)-(3.7) moraju biti parni te odrediti fundamentalna rješenja tih jednadžbi.

3.2 Granice za elemente $D(4)$-petorke

U ovom potpoglavlju ćemo prezentirati uglavnom rezultate iz [8], skupa s nekim poznatim rezultatima vezanim za granice za elemente petorke. Poboljšali smo neke numeričke granice za elemente petorke, konkretno, dobili smo bolje numeričke gornje granice za elemente b i d. Numerička donja granica za element b u $D(4)$-petorki je prvi put objavljena u [8], a u ovoj disertaciji je dokazan i bolji rezultat u Propoziciji 2.17 gdje smo pokazali da ista donja granica vrijedi i za element b u svim neregularnim četvorkama. Iako su ovi rezultati u [8] korišteni za ocjenu mogućeg broja petorki, koriste se i u dokazu nepostojanja $D(4)$-petorke u ostatku ovog poglavlja, te ih u opsegu koji je potreban za taj dokaz navodimo i ovdje.

Lema 2.3 nam daje odnos među elementima $D(4)$-trojke $\{a, b, c\}$, tj. znamo ako trojka nije regularna da je tada $c > \max\{ab, 4b\}$. Dokažimo preciznije kako se element $d_+ = d_+(a, b, c)$ odnosi prema elementima trojke $\{a, b, c\}$.

Lema 3.6. *Neka je $\{a, b, c\}$ $D(4)$-trojka i $a < b < c$. Vrijedi $abc + c < d_+ < abc + 4c$.*

Dokaz. Kako je $rst = \sqrt{(ab + 4)(ac + 4)(bc + 4)} > \sqrt{abacbc} = abc$, imamo da je $d_+ > a + b + c + abc > abc + c$. Želimo odrediti najmanji realni broj K takav da je $d_+(a, b, c) < abc + K \cdot c$. Za takav K vrijedi

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{1}{2}(abc + rst) &< abc + Kc \\ rst &< abc + 2(K - 1)c - 2a - 2b. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i preslagivanjem dobijemo

$$8a^2bc + 8ab^2c + 16ab + 16ac + 16bc + 64 < (4K - 8)abc^2 + 4((K - 1)c - a - b)^2.$$

Budući da je $c \geq a+b+2r$, možemo promatrati

$$\begin{aligned}&8a^2bc + 8ab^2c + 16ab + 16ac + 16bc + 64\\&< (4K-8)abc(a+b+2r) + 4((K-1)c-a-b)^2\end{aligned}$$

to jest, imamo

$$\begin{aligned}&8a^2bc + 8ab^2c + 16ab + 16ac + 16bc + 64\\&< (4K-8)a^2bc + (4K-8)ab^2c + 2(4K-8)abcr + 4((K-1)c-a-b)^2.\end{aligned}$$

Vidimo da bismo trebali odabrati vrijednost $K = 4$, jer tada imamo $4K - 8 = 8$, pa dobijemo

$$\begin{aligned}16ab + 16ac + 16bc + 64 &< 16abcr + 4(3c-a-b)^2,\\8ab + 40ac + 40bc + 64 &< 16abcr + 4a^2 + 4b^2 + 36c^2,\end{aligned}$$

a ta nejednakost vrijedi jer možemo koristiti $a \geq 1$, $b \geq 5$, $c \geq 12$ i $r \geq 3$ pa je

$$16abcr = 2abcr + 14abcr \geq 72ab + 42bc > 8ab + 40bc$$

te $4b^2 \geq 100 > 64$ i $36c^2 > 144ac > 40ac$ jer je $c \geq a+b+2r > 4a$. □

Filipin je u [33] dokazao sljedeći odnos među elementima a i b u neregularnoj $D(4)$-četvorki, koji onda naravno vrijedi i u $D(4)$-petorki, te će se ovo pokazati kao bitan alat pri dokazivanju pomoćnih tvrdnji u ostatku rada.

Lema 3.7. *[33, Corollary 1.2] Ako je $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$-petorka takva da je $a < b < c < d < e$, onda je $b \geq a + 57\sqrt{a}$.*

Iz [3] imamo sljedeću podjelu $D(4)$-petorki s obzirom na svojstva odnose među elementima, koju ćemo poboljšati.

Lema 3.8. *Neka je $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$-petorka takva da je $a < b < c < d < e$. Tada je $\{a,b,c,d\}$ regularna četvorka i vrijedi jedan od slučajeva*

i) $b > 4a$ *i* $d > b^2$,

ii) $b \leq 4a$, $c = a+b+2r$ *i* $d > c^2$,

iii) $b \leq 4a$, $c = (ab+2)(a+b-2r) + 2(a+b)$ *i* $c^{5/3} < d < c^2$,

iv) $b \leq 4a$, $c = (ab+2)(a+b+2r) + 2(a+b)$ *i* $c^{4/3} < d < c^{5/3}$.

Dokaz. Vrijedi iz [3, Proposition 2.2] i [3, Proposition 2.3]. □

Primijetimo da po Propoziciji 2.17 imamo i sljedeći korolar.

Korolar 3.9. *Ako je* $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$*-petorka takva da je* $a < b < c < d < e$*, onda je* $b > 10^5$.

Ovu donju granicu za b sada možemo iskoristiti zajedno s Lemom 2.22 da bismo pokazali da petorke sa svojstvima *iii)* ili *iv)* iz Leme 3.8 nisu moguće.

Lema 3.10. *Neka je* $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$*-petorka takva da je* $a < b < c < d < e$*. Ako je* $b \leq 4a$ *u* $D(4)$*-petorki, onda je jedina mogućnost* $c = a + b + 2r$.

Dokaz. Promotrimo slučajeve kada je $c_{\pm} = (ab + 2)(a + b \pm 2r) + 2(a + b)$. Tada je $c_{\pm} > ab(a+b-2r) > 700ab > 7 \cdot 10^7 a$, jer je $b > 10^5$, pa imamo i $d = d_+ > abc > 700a^2b^2$.

Da bismo primijenili Lemu 2.22 na $D(4)$-četvorku $\{a, b, d, e\}$ uzet ćemo $N = abd$, pa vidimo da mora vrijediti $d > \frac{58.458a'b(b-a)^2}{ag^4}$ gdje je $a' = \max\{4a, 4(b-a)\}$. No kako je,

$$4a \leq a' < 4(4a - a) = 12a$$

i po Lemi 3.7

$$57\sqrt{a} < b - a < 3a,$$

imamo da je

$$ac > \frac{7 \cdot 10^7}{12 \cdot 3^2} \frac{a'(b-a)^2}{a} > 59.458 \frac{a'(b-a)^2}{ag^4}$$

pa tvrdnja vrijedi jer je $d > abc$.

Sada ove nejednakosti možemo, skupa s $1 \leq g \leq a$, iskoristiti za ocjenu izraza

$$\begin{aligned}
8.40335 \cdot 10^{13} a'^{1/2} a^{1/2} b^2 d g^{-1} &< 8.40335 \cdot 10^{13} \cdot 12a \cdot a^{1/2} (4a)^2 d \\
&< 1.6135 \cdot 10^{16} a^{7/2} d, \\
0.020533 a^{1/2} b^{1/2} (b-a)^{-1} d g &< \frac{0.20533 a^{1/2} 2 a^{1/2} d}{57 a^{1/2}} a \\
&< 0.0073 a^{3/2} d, \\
bd &> ad, \\
0.016858 a (a')^{-1} b^{-1} (b-a)^{-2} d g^4 &> 0.016858 a (12a)^{-1} (4a)^{-1} (3a)^{-2} d \\
&> 0.000039 a^{-3} d.
\end{aligned}$$

Dakle, po Lemi 2.22 imamo da je

$$n < \frac{4 \log(1.6135 \cdot 10^{16} a^{7/2} d^2) \log(0.0073 a^{3/2} d)}{\log(ad) \log(0.000039 a^{-3} d)}.$$

Funkcija s desne strane nejednakosti je padajuća u d za $d > 0.000039^{-1} a^3$ pa uvrštavajući donju granicu za d, konkretno $d > 7 \cdot 10^7 a^3$, imamo da mora vrijediti nejednakost

$$n < \frac{4 \log(1.1295 \cdot 10^{24} a^{13/2}) \log(511000 a^{9/2})}{\log(7 \cdot 10^7 a^4) \log(2730)}. \tag{3.14}$$

Budući da po Lemi 3.5 imamo da je $2n \geq m \geq n$, to jest $n \geq \frac{m}{2}$, Propoziciju 2.9 možemo iskoristiti da bismo dobili donju granicu za m, to jest n. Želimo li primijeniti Propoziciju 2.9 na četvorku $\{a, b, d, e\}$ vidimo da moramo odabrati sljedeće vrijednosti parametra, $L = 2$, $a_0 = 25000$, jer je $10^5 < b < 4a$, $b_0 = 10^5$, a donja granica za element d u četvorki je $c_0 = 700 a_0^2 b_0^2 = 4.375 \cdot 10^{21}$. Također, kako je $b > a$ imamo $\rho = 1$, a onda i $\lambda = 1$. Sada rješavamo sustav nejednadžbi iz iskaza Propozicije 2.9 i dobijemo da je $\alpha = 0.499998$, tj. da je $m > 0.499998\sqrt{d/b}$. Dakle, imamo

$$n > 0.5 \cdot 0.499998 b^{-0.5} d^{0.5} > 0.249999\sqrt{\frac{700a^4}{4a}} > 3.307a^{3/2}$$

pa uspoređujući s nejednakosti (3.14) vidimo da mora vrijediti

$$3.307a^{3/2} < \frac{4 \log(1.1295 \cdot 10^{24} a^{13/2}) \log(511000 a^{9/2})}{\log(7 \cdot 10^7 a^4) \log(2730)}.$$

Rješavanjem nejednadžbe po a, dobijemo da je $a \leq 4$ što je u kontradikciji s $a > a_0 = 25000$. Dakle, ovi izbori za vrijednost elementa c nisu mogući. □

Vidimo da sada vrijedi sljedeća podjela.

Korolar 3.11. *Neka je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka takva da je $a < b < c < d < e$. Tada je $d = d_+(a, b, c)$ i vrijedi jedan od slučajeva*

i) $b > 4a$, $d > b^2$,

ii) $b \leq 4a$, $c = a + b + 2r$.

S obzirom na to da uvjeti Propozicije 2.9 vrijede za četvorke sadržane u $D(4)$-petorki koje sadrže elemente d i e možemo tu propoziciju iskoristiti za dobivanje donje granice za m u takvim četvorkama u ovisnosti o d. Naglasimo da je ovaj indeks m pridružen proširenju trojke do četvorke.

Lema 3.12. *Neka je $\{a, b, c, d, e\}$ petorka takva da je $a < b < c < d < e$. Tada je, ovisno o slučajevima iz Korolara 3.11,*

i) $m > 0.618034 d^{1/4}$,

ii) $m > 6.03466 d^{1/4}$,

gdje je m indeks pridružen proširenju $D(4)$-trojke do $D(4)$-četvorke.

Dokaz. U slučaju *i)* promotrimo četvorku $\{A, B, C, D\} := \{a, b, d, e\}$. Imamo da je $B = b > 4a = 4A$ pa je $\rho = 4$. Zbog $d > b^2$ dobijemo $\tau = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $L = 2$ te iz Propozicije 2.9 imamo $\alpha = 0.618034$ uz donje granice $A_0 = 1$, $B_0 = 10^5$ i $C_0 = 10^{10}$ što povlači da je $m > 0.618034d^{1/4}$. U drugom slučaju ćemo promatrati četvorku $\{a, c, d, e\}$ pa je $B = c = a + b + 2r > a + a + 2a = 4a$ i opet $\rho = 4$. Zbog $c < a + 4a + 2\sqrt{4a^2 + 4} = a + 4a + 4\sqrt{a^2 + 1} \le a + 4a + 4\left(a + \frac{1}{2}\right) \le 11a$ imamo

$$d > abc > \frac{c}{11}10^5 c > 9090c^2$$

pa je $A_0 = 1$, $B_0 = 10^5$, $C_0 = 9090 \cdot 10^{10}$ te $\tau = \frac{1}{2}$, $\beta = \sqrt{9090}$ i $L = 2$. Dobijemo iz Propozicije 2.9 da je $\alpha = 0.618034$ i imamo $m > 6.03466d^{1/4}$. $\square$

Ovako dobivene donje granice za m ćemo iskoristiti za dobivanje numeričkih gornjih granica za d u ova 2 slučaja, no prvo dokažimo propoziciju koja nam daje gornju granicu za element c u $D(4)$-petorki.

Propozicija 3.13. *Neka je dana $D(4)$-petorka $\{a, b, c, d, e\}$, takva da vrijedi $a < b < c < d < e$. Tada je*

$$c < \frac{237.952b^3}{a}.$$

Dokaz. Ako je $c = a + b + 2r$, tada je $c < 4b < \frac{237.952b^3}{a}$.

Promotrimo slučaj kada je $c \neq a + b + 2r$. Po Korolaru 3.11 tada imamo da je $b > 4a$. Također po Lemi 2.3 i Korolaru 3.9 imamo da je $c > \max\{ab, 4b\}$ i $b > 10^5$.

Pretpostavimo da je $d \ge k \cdot b^4$, za neki $k \in \mathbb{R}$. Imamo da je $a' = 4(b - a)$ pa je

$$\frac{59.488A'b(b-a)^2}{ag^4} < 237.952(b-a)^3 \cdot \frac{b}{a} < 237.952b^4.$$

Vidimo da Lemu 2.22. možemo primijeniti za $k = 237.952$, jer iz $a < b/4$ imamo $a/g \le b/g - 4$ i $b/g \ge b/a \ge 5$ pa su zadovoljeni svi uvjeti leme. Sada promatramo nejednakosti

$$\begin{aligned}
8.40335 \cdot 10^{13}(a')^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^2cg^{-1} &< 8.40335 \cdot 10^{13} \cdot 2(b)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{2}} b^2 d \\
&= 8.40335 \cdot 10^{13}b^3 d, \\
0.20533a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c(b-a)^{-1}g &< 0.20533\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} d \left(\frac{3}{4}b\right)^{-1}\frac{b}{4} \\
&< 0.03423bd, \\
0.016858a(a')^{-1}b^{-1}(b-a)^{-2}cg^4 &> 0.016858\frac{1 \cdot d \cdot 1}{4b^4} \\
&> 0.0042145b^{-4}d,
\end{aligned}$$

gdje smo koristili da je $a < b/4$, $1 \leq g \leq a$ i $3b/4 < a' < 4b$. Slijedi da je

$$n < \frac{4\log(8.40335 \cdot 10^{13} b^3 d)\log(0.03423bd)}{\log(bd)\log(0.0042145b^{-4}d)}.$$

S obzirom na to da je desna strana nejednakosti definirana za svaki $d > (0.0042145b^{-4})^{-1} > 237.28b^4$ i padajuća u d za sve d koje promatramo, možemo iskoristiti nejednakost $d \geq 237.952b^4$ da promatramo

$$n < \frac{4\log(1.9996 \cdot 10^{16} b^7)\log(8.14272b^5)}{\log(237.952b^5)\log(1.002848)}.$$

S druge strane, iz Leme 3.12 imamo

$$n > \frac{m}{2} > 0.309017\sqrt{\frac{d}{b}} > 0.309017\sqrt{237.952}b^{3/2} > 4.7668b^{3/2}$$

pa možemo promatrati nejednakost u b, gdje dobijemo da je $b < 803$, što ne može biti. Dakle, mora vrijediti $d < 237.952b^4$ pa je $abc < 237.952b^4$, to jest,

$$c < \frac{237.952b^3}{a}.$$

□

3.2.1 Linearne forme u logaritmima

U ovom radu ćemo više puta promatrati različite linearne forme u logaritmima da bismo dobili gornje granice za neke elemente petorke, indekse ili produkte elemenata koji će nas u konačnici dovesti do dokaza nepostojanja petorke. Sada ćemo definirati neke osnovne pojmove i iskoristiti poznate alate na linearnu formu u tri logaritma koja je promatrana i prije, npr. u [28].

Definicija 3.14. *Za bilo koji nenul algebarski broj γ stupnja D nad $\mathbb{Q}$, kojem je minimalni polinom nad $\mathbb{Z}$ jednak $A\prod_{j=1}^{D}\left(X-\gamma^{(j)}\right)$, apsolutnu logaritamsku visinu definiramo kao*

$$h(\gamma) = \frac{1}{D}\left(\log A + \sum_{j=1}^{D}\log^{+}\left|(\gamma^{(j)})\right|\right),$$

gdje je $\log^{+}\alpha = \log\max\{1,\alpha\}$.

Definicija 3.15. *Reći ćemo da je algebarski broj γ totalno realan broj ako je svaki korijen njegovog minimalnog polinoma realan broj, to jest ako je $A\prod_{j=1}^{D}\left(X-\gamma^{(j)}\right)$ minimalni polinom od γ nad $\mathbb{Z}$, onda je $\gamma^{(j)}$ realan broj za svaki j.*

Za skup algebarskih brojeva $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, kažemo da je multiplikativno nezavisan skup, ako za svaki podskup $\{\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_k}\}$, $2 \le k \le n$, jednakost $\gamma_{i_1}^{a_1} \cdot \gamma_{i_2}^{a_2} \cdots \gamma_{i_k}^{a_k} = 1$, gdje su $a_i \in \mathbb{Z}$, vrijedi samo kada je $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Navedimo teorem iz [1] koji ćemo iskoristiti za dobivanje gornje granice za indeks m u $D(4)$-četvorki. Ovaj teorem nam daje bolje rezultate nego Baker-Wüstholzov iz [6] ili Matveevov teorem iz [44] koji se najčešće koriste u ovu svrhu. Naglasimo da je teorem iskazan u obliku kakvog su koristili Cipu i Trudgian u [14] kod promatranja $D(1)$-četvorki.

Teorem 3.16 (Aleksentsev)**.** *Neka je Λ linearna forma u logaritmima od n multiplikativno nezavisnih totalno realnih algebarskih brojeva $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, s racionalnim koeficijentima $b_1, \ldots, b_n$. Neka $h(\alpha_j)$ označava apsolutnu logaritamsku visinu od α_j za $1 \le j \le n$. Neka je d stupanj proširenja polja algebarskih brojeva $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, i neka je $A_j = \max\{dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 1\}$. Konačno, neka je*

$$E = \max\left\{\max_{1 \le i,j \le n}\left\{\frac{|b_i|}{A_j} + \frac{|b_j|}{A_i}\right\}, 3\right\}. \tag{3.15}$$

Tada vrijedi

$$\log|\Lambda| \ge -5.3n^{\frac{1-2n}{2}}(n+1)^{n+1}(n+8)^2(n+5)31.44^n d^2(\log E)A_1 \cdots A_n \log(3nd).$$

Neka je dana $D(4)$-trojka $\{A, B, C\}$, takva da je $A < B < C$, te njoj pridruženi prirodni brojevi $R = \sqrt{AB+4}$, $S = \sqrt{AC+4}$ i $T = \sqrt{BC+4}$. Želimo je proširiti većim elementom D do $D(4)$-četvorke $\{A, B, C, D\}$. Oznake smo promijenili u odnosu na one u prethodnim razmatranjima kako bismo naglasili da ćemo ovako dobiveni rezultat primijeniti na različite četvorke, ovisno o kojem se slučaju radi, kao u dokazu Leme 3.12.

Promatramo linearnu formu u tri logaritma

$$\Lambda = 2m \log \alpha_1 - 2n \log \alpha_2 + \log \alpha_3,$$

gdje su $2m$ i $2n$ indeksi definirani u nizovima (2.4) i (2.5) pridruženi proširenju trojke do četvorke, s time da promatramo samo elemente s parnim indeksima kako je ovom oznakom i naglašeno. Definiramo algebarske brojeve

$$\alpha_1 = \frac{S + \sqrt{AC}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{T + \sqrt{BC}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C} + \varepsilon\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C} + \varepsilon\sqrt{B})},$$

uzimajući u obzir da se izbor $\varepsilon = \pm 1$ podudara s vrijednosti ε u zapisu vrijednosti fundamentalnih rješenja $z_0 = z_1 = 2\varepsilon$.

Linearna forma u logaritmima ovog oblika je promatrana i u [28] pa iz Leme 2.15

vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &< 2m\log\left(\frac{S+\sqrt{AC}}{2}\right) - 2n\log\left(\frac{T+\sqrt{BC}}{2}\right) + \log\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}\pm\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}\pm\sqrt{B})} \\
&< 2AC\left(\frac{S+\sqrt{AC}}{2}\right)^{-4m}.
\end{aligned}$$

Promotrimo sada koje vrijednosti parametara još trebamo odabrati u Teoremu 3.16. Očito je $n = 3$ i $d = 4$. Da bismo odredili parametar E potrebno je odrediti A_j i neke ocjene za te vrijednosti, te ćemo probati dati te ocjene što općenitije, kako bismo mogli dobiti najbolje moguće vrijednosti i ponoviti postupak više puta s novodobivenim vrijednostima. Napomenimo da osim oznaka A_0, B_0 i C_0 koje smo do sada koristili za donje granice elemenata A, B i C redom, uvodimo i oznaku C_1 s kojom ćemo označiti prirodni broj za koji je $C \leq C_1$.

Odredimo prvo vrijednost A_1. Kako je minimalni polinom od α_1 jednak $p(X) = X^2 - SX + 1$, dobijemo da je $h(\alpha_1) = \frac{1}{2}\log\alpha_1$ pa je $A_1 = 2\log\alpha_1$. Imamo

$$2\log\alpha_1 = \log\frac{2AC+4+2\sqrt{A^2C^2+4AC}}{4} < \log(AC+2).$$

U svim slučajevima koje promatramo vrijedi $\rho A \leq B-1$, pa je

$$\begin{aligned}
2\log\alpha_1 &\leq \log(\rho^{-1}(B-1)C+2) < \log(\rho^{-1}BC) < \log(\rho^{-1}\beta^{-1}C^{1+\tau}) \\
&= \log C\left(1+\tau-\frac{\log(\beta\rho)}{\log C}\right) \leq \log C g_1(\beta,\rho,\tau,C_1),
\end{aligned}$$

gdje smo označili

$$g_1(\beta,\rho,\tau,C_1) = 1+\tau-\frac{\log(\beta\rho)}{\log C_1}.$$

S druge strane, vrijedi

$$2\log\alpha_1 > \log AC > g_2(A_0,C_1)\log C,$$

gdje je

$$g_2(A_0,C_1) = 1+\frac{\log A_0}{\log C_1}.$$

Slično dobijemo $A_2 = 2\log\alpha_2$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
2\log\alpha_2 &= \log\frac{2BC+4+2\sqrt{B^2C^2+4BC}}{4} < \log(BC+2) \\
&< \log\left(\beta^{-1}C^{1+\tau}+2\right) = \left(1+\tau+\frac{\log(\beta^{-1}+2C^{-1-\tau})}{\log C}\right)\log C \\
&< g_3(\beta,\tau,C_0)\log C,
\end{aligned}$$

gdje je

$$g_3(\beta,\tau,C_0) = 1+\tau+\frac{\log(\beta^{-1}+2C_0^{-1-\tau})}{\log C_0}.$$

Također,

$$2\log\alpha_2 > \log BC > g_4(B_0,C_1)\log C,$$

gdje je

$$g_4(B_0,C_1) = 1+\frac{\log B_0}{\log C_1}.$$

Da bismo odredili A_3 promatramo algebarski broj α_3. Minimalni polinom od α_3 je jednak polinomu

$$\begin{aligned}p_3(X) =&A^2(C-B)^2X^4+4A^2B(C-B)X^3+2AB(3AB-AC-BC-C^2)X^2\\&+4AB^2(C-A)X+B^2(C-A)^2\end{aligned}$$

podijeljenom s najvećim zajedničkim djeliteljem koeficijenata toga polinoma, a taj djelitelj ćemo označiti s g.

Trivijalno vrijede nejednakosti $\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}+\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}-\sqrt{B})} > \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}-\sqrt{B})} > 1$ i $\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}+\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} > 1$. Nejednakost $\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} > 1$ ne mora vrijediti uvijek, no vrijedit će ako je $\rho \geq 2$ i $C > B^2$, što znamo da će u našim slučajevima biti. Naime, vrijedi

$$\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{\frac{A}{C}}}{1+\sqrt{\frac{B}{C}}}.$$

Kako je $\frac{A}{C} < \frac{B}{2C}$ i $C > B^2$, dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} &\geq \sqrt{2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{B}{C}}}{1+\sqrt{\frac{B}{C}}} = \sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{\frac{B}{C}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{B}{C}}}{1+\sqrt{\frac{B}{C}}}\right)\\&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{C}{B}}+1}\right) > \sqrt{2}\left(1-\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{B}+1}\right)\end{aligned}$$

i zbog $B \geq 10^5$ dobijemo da je izraz s desne strane veći od 1. Time smo pokazali da su svi konjugati od α_3 veći od 1 pa imamo

$$A_3 = 4h(\alpha_3) = \log\left(\frac{A^2(C-B)^2}{g}\cdot\frac{B^2(C-A)^2}{A^2(C-B)^2}\right) = \log\left(\frac{B^2(C-A)^2}{g}\right),$$

odakle slijedi ocjena

$$\begin{aligned}A_3 &\leq \log(B^2(C-A)^2) < 2\log(\beta^{-1}C^{1+\tau})\\&= \left(2+2\tau-\frac{2\log\beta}{\log C}\right)\log C < g_5(\beta,\tau,C_1)\log C,\end{aligned}$$

gdje je

$$g_5(\beta, \tau, C_1) = 2 + 2\tau - \frac{2\log\beta}{\log C_1}.$$

Također vrijedi

$$A_3 \geq \log\left(\frac{B(C-A)^2}{4A^2(C-B)}\right) > \log\frac{\rho^2(C-A)^2B^{-1}}{4(C-B)} >$$
$$\log\frac{\rho^2\beta C^{2-\tau}(1-A/C)^2}{4C(1-B/C)} > \log\frac{\rho^2\beta C^{1-\tau}(1-A/C)^2}{4(1-\rho A/C)}$$

pa je

$$A_3 > g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C,$$

gdje je

$$g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1) = 1 - \tau + \frac{\log\frac{\beta\rho^2}{4} + 2\log\left(1 - \frac{A_0}{C_1}\right) - \log\left(1 - \frac{4}{C_1}\right)}{\log C_1}.$$

Koristeći da je $C_1 > 10^{10} = C_0$ i ostale definirane vrijednosti parametara, lako se vidi da je $g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1) < g_2(A_0, C_1) < g_4(B_0, C_1)$ u svim slučajevima. S obzirom na to da vrijedi

$$\frac{2m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C} > \frac{2m}{A_1} > \frac{2n}{A_1} > \frac{1}{A_1},$$
$$\frac{2m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C} > \frac{2m}{A_2} > \frac{2n}{A_2} > \frac{1}{A_2}$$

i

$$\frac{2m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C} > \frac{2m}{A_3},$$

slijedi da je

$$\max_{1\leq i,j\leq 3}\left\{\frac{|b_i|}{A_j} + \frac{|b_j|}{A_i}\right\} \leq \frac{4m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C}.$$

Kako je $C_1 > C_0 = 10^{10}$, imamo da je $g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1) < 0.561$, i jer iz Leme 3.12 imamo u najlošijem slučaju da je $m > 0.618034d^{1/4}$ i $d > 10^{10}$, to jest $m \geq 196$. Pretpostavimo sada da je $\frac{4m}{g_6(\beta,\rho,\tau,A_0,C_1)\log C_0} < 3$ i jer po [3] imamo da je $d < 10^{89}$ slijedi

$$4m < 3g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C_0 < 3 \cdot 0.561\log(10^{89}) < 345$$

iz čega dobijemo $m \leq 86$, kontradikciju. Dakle, vrijedi nejednakost

$$\frac{4m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C_0} \geq 3$$

pa možemo uzeti

$$E \leq \frac{4m}{g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)\log C_0}. \tag{3.16}$$

Zbog jednostavnosti u zapisu označit ćemo skraćeno $g_3 := g_3(\beta, \tau, C_0)$, $g_5 := g_5(\beta, \tau, C_1)$ i $g_6 := g_6(\beta, \rho, \tau, A_0, C_1)$.

Preostalo je pokazati da su algebarski brojevi α_1, α_2 i α_3 multiplikativno nezavisni i totalno realni.

Lema 3.17. *Neka su α_1, α_2 i α_3 algebarski brojevi definirani kao prije. Tada su oni multiplikativno nezavisni i totalno realni.*

Dokaz. Da su ovi brojevi totalno realni vidimo iz prethodnog razmatranja gdje smo ovim algebarskim brojevima eksplicitno izrazili minimalne polinome u $\mathbb{Z}[X]$ i korijene tih polinoma koji su svi bili realni.

Promotrimo algebarske brojeve α_1 i α_2. Oni su invertibilni u prstenima cijelih brojeva polja $\mathbb{Q}(\sqrt{AC})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{BC})$ redom. Kako ABC^2 nije potpun kvadrat (AB nije potpun kvadrat jer je takav $AB+4$), možemo zaključiti da su ova dva polja različita pa su α_1 i α_2 multiplikativno nezavisni. Naime, inače bismo imali

$$\alpha_1^{a_1} = (\alpha_2^{-1})^{a_2}$$

za neke cijele brojeve a_1 i a_2, od kojih je barem jedan različit od 0.

Promotrimo sada algebarski broj α_3 i polje $K = \mathbb{Q}(\sqrt{AC}, \sqrt{BC})$. Za normu broja α_3 vrijedi

$$\begin{aligned} N_{K/\mathbb{Q}} &= \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}+\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} \cdot \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}-\sqrt{B})} \cdot \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}+\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}-\sqrt{B})} \cdot \frac{\sqrt{B}(\sqrt{C}-\sqrt{A})}{\sqrt{A}(\sqrt{C}+\sqrt{B})} \\ &= \frac{B^4(C-A)^2}{A^4(C-B)^2} \neq \pm 1 \end{aligned}$$

pa vidimo da α_3 nije invertibilan u prstenu cijelih brojeva polja K. Pretpostavimo li da jednakost

$$\alpha_1^{a_1} \cdot \alpha_2^{a_2} \cdot \alpha_3^{a_3} = 1$$

vrijedi za cijele brojeve a_i, $i = 1, 2, 3$, takve da nisu svi jednaki 0, iz nezavisnosti brojeva α_1 i α_2 znamo da onda mora biti $a_3 \neq 0$. No, kako su ti brojevi i invertibilni, to bi značilo da je $\alpha_3^{a_3}$ invertibilan, a time i α_3, čime bismo dobili kontradikciju. Dakle, algebarski brojevi α_1, α_2 i α_3 su multiplikativno nezavisni. □

Kako znamo da je $\Lambda > 0$, po Teoremu 3.16 slijedi

$$\begin{aligned} -\log \Lambda &\leq 1.5013 \cdot 10^{11} A_1 A_2 A_3 \log E \\ &\leq 1.5013 \cdot 10^{11} \cdot 2 \log \alpha_1 \cdot g_3 \cdot g_5 \cdot \log^2 C \cdot \log \frac{4m}{g_6 \log C_0}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Također znamo i gornju granicu za linearnu formu u logaritmima Λ pa imamo

$$\Lambda < 2AC\alpha_1^{-4m} \implies$$
$$-\log\Lambda > -\log(2AC) + 4m\log\alpha_1$$

što skupa s (3.17) daje

$$4m\log\alpha_1 < \log(2AC) + 1.5013\cdot 10^{11}\cdot 2\log\alpha_1\cdot g_3\cdot g_5\cdot\log^2 C\cdot\log\frac{4m}{g_6\log C_0}$$

i jer je $\frac{\log 2x}{2\log\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{2}} < 1.2$ za $x > 10$, imamo

$$2m - 1.2 < 1.5013\cdot 10^{11}\cdot g_3\cdot g_5\cdot\log^2 C\log\frac{4m}{g_6\log C_0}.$$

Sada koristimo da je $C = d$ i $C_1 = 10^{89}$ po [3], jer to imamo u oba slučaja koja ćemo promatrati, pa je

$$\frac{2m - 1.2}{\log\frac{4m}{g_6\log C_0}} < 1.5013\cdot 10^{11}\cdot g_3\cdot g_5\log^2 d. \tag{3.18}$$

Funkcija s lijeve strane nejednakosti (3.18) je rastuća u m za $m > \frac{e\cdot g_6\cdot\log C_0}{4}$. U oba naša slučaja lako vidimo da nejednakost vrijedi jer je $m > 195$, pa koristeći donju granicu za m iz Leme 2.9 i uvrštavajući odgovarajuće parametre dobijemo gornje granice za d. Kada dobijemo novu gornju granicu za d možemo tu vrijednost uvrstiti kao novu vrijednost parametra C_1 i ponavljati postupak dok dobijemo najbolji mogući rezultat.

Lema 3.18. *U $D(4)$-petorki, ovisno o slučajevima iz Leme 3.11, vrijedi*

i) $d < 1.06765\cdot 10^{71}$,

ii) $d < 4.18244\cdot 10^{66}$.

Dokaz. U slučaju *i)* imamo parametre $m > 0.618034d^{1/4}$, $A = a$, $B = b$, $\rho = 4$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $A_0 = 1$, $B_0 = 10^5$, $C_0 = 10^{10}$. Za vrijednost $C_1 = 10^{89}$ dobijemo da je $d < 1.06804\cdot 10^{71}$ te tu vrijednost uvrstimo kao novi C_1. Uz iste parametre dobijemo $d < 1.06765\cdot 10^{71}$. Ponavljanjem postupka dobijemo istu vrijednost za gornju granicu za d pa vidimo da je to najbolja moguća vrijednost koju možemo dobiti na ovaj način.

U slučaju *ii)* imamo parametre $m > 6.03466d^{1/4}$, $A = a$, $B = c$, $\rho = 4$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\beta = \sqrt{9090}$, $A_0 = 1$, $B_0 = 10^5$, $C_0 = 9090\cdot 10^{10}$. Uvrstimo da je $C_1 = 10^{89}$ te dobijemo $d < 4.28417\cdot 10^{66}$. Ponavljanjem postupka kao u prethodnom slučaju dobijemo $d < 4.1825\cdot 10^{66}$ te u sljedećem koraku $d < 4.18244\cdot 10^{66}$, za što se pokaže da je najbolja moguća vrijednost koju možemo dobiti ovim postupkom. □

Propozicija 3.19. *Neka je $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$-petorka, takva da je $a < b < c < d < e$. Vrijedi jedno od sljedećeg:*

i) *ako je* $b > 4a$, *onda je* $d < 1.06765 \cdot 10^{71}$ *i* $10^5 < b < 3.26748 \cdot 10^{35}$,

ii) *ako je* $b \leq 4a$, *onda je* $d < 4.18244 \cdot 10^{66}$ *i* $10^5 < b < 1.9519 \cdot 10^{22}$.

Dokaz. U prvom slučaju imamo $d < 1.06765 \cdot 10^{71}$ i kako je $d > b^2$ dobijemo $b < 3.26748 \cdot 10^{35}$. U drugom slučaju imamo $b \leq 4a$, pa je $c = a + b + 2r > \frac{9b}{4}$ i $d > abc > \frac{9}{16}b^3$ iz čega dobijemo $b < 1.9519 \cdot 10^{22}$. □

3.3 Svojstva rješenja pellovskih jednadžbi i odnosi među indeksima

Navedimo i dokažimo sada tvrdnju o početnim vrijednosti nizova pridruženih jednadžbama (3.2)-(3.4) i parnosti indeksa h', j', l'.

Lema 3.20. *Neka su* h', j' *i* k' *indeksi koji zadovoljavaju jednakosti (3.8)-(3.10) za neku* $D(4)$*-petorku* $\{a, b, c, d, e\}$. *Tada vrijedi* $h' \equiv j' \equiv k' \equiv 0 \pmod 2$ *i*

$$X_0 = X_1 = Y_0 = Y_2 = Z_1 = Z_2 = 2.$$

Dokaz. Promotrimo pellovske jednadžbe (3.2) i (3.6).

Po Lemi 2.6 vidimo da vrijedi ocjena

$$|Y_0| < \sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}} < b^{\frac{3}{4}} a^{\frac{-1}{4}} \tag{3.19}$$

i jer za $Y_{h'}^{(a,b)}$ vrijedi rekurzija

$$Y_0^{(a,b)} = Y_0, \quad Y_1^{(a,b)} = \frac{rY_0 + bX_0}{2}, \quad Y_{h'+2}^{(a,b)} = rY_{h'+1}^{(a,b)} - Y_{h'}^{(a,b)},$$

vidimo da je

$$Y_{h'}^{(a,b)} \equiv \begin{cases} Y_0^{(a,b)} \pmod b, & h' \text{ paran} \\ Y_1^{(a,b)} \pmod b, & h' \text{ neparan.} \end{cases}$$

S druge strane, za $Y_{m'}^{(b,d)}$, koristeći Lemu 3.3, vrijedi rekurzija

$$Y_0^{(b,d)} = Y_4 = 2, \quad Y_1^{(b,d)} = y + \varepsilon b, \quad Y_{m'+2}^{(b,d)} = yY_{m'+1}^{(b,d)} - Y_{m'}^{(b,d)},$$

te s obzirom na to da znamo da je m' paran lako vidimo da je $Y_{m'}^{(b,d)} \equiv 2 \pmod b$.

Pretpostavimo da vrijedi $Y_{h'}^{(a,b)} = Y_{m'}^{(b,d)}$ i pretpostavimo suprotno tvrdnji leme, da je h' neparan. Tada je

$$\frac{1}{2}(rY_0 + bX_0) \equiv 2 \pmod b. \tag{3.20}$$

Očito je da vrijedi kongruencija $bX_0 \equiv 0 \pmod{b}$, pa ako od nje oduzmemo kongruenciju (3.20) dobijemo

$$\frac{1}{2}(bX_0 - rY_0) \equiv -2 \pmod{b}. \tag{3.21}$$

Promotrimo sljedeće:

$$\begin{aligned}(bX_0 - rY_0)(bX_0 + rY_0) &= b^2X_0^2 - r^2Y_0^2 = b(aY_0^2 + 4(b-a)) - abY_0^2 - 4Y_0^2 \\ &= 4b(b-a) - 4Y_0^2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Budući da je $|Y_0| < b^{3/4}a^{-1/4}$, imamo

$$4b(b-a) - 4Y_0^2 > 4b(b-a) - 4b^{3/2}a^{-1/2} = 4b(b - a - (b/a)^{1/2}).$$

Funkcija u zagradama je rastuća u b, a kako nam vrijedi $b \geq a + 57\sqrt{a}$, vidimo da je

$$b - a - (b/a)^{1/2} > 57\sqrt{a} - \left(1 + \frac{57}{\sqrt{a}}\right)^{1/2} > 0.$$

Dakle, ova razlika kvadrata je veća od 0 pa je i $bX_0 - r|Y_0| > 0$. S druge strane, vrijedi $b^2X_0^2 - r^2Y_0^2 < 4b^2$ pa je $\frac{1}{2}(bX_0 - r|Y_0|) < b$.

1.) Ako je $Y_0 > 0$, onda je $\frac{1}{2}(bX_0 - r|Y_0|) = \frac{1}{2}(bX_0 - rY_0)$ pa vidimo po kongruenciji (3.21) da treba vrijediti $\frac{1}{2}(bX_0 - rY_0) = b - 2$. Promotrimo sada

$$\begin{aligned}bX_0 + rY_0 &< \frac{4b^2}{bX_0 - rY_0} = \frac{4b^2}{2b-4} \\ &= 2b + \frac{8b}{2b-4} = 2b + 4 + \frac{16}{2b-4} < 2b + 4.1.\end{aligned}$$

Budući da je $b > 10^5$ i $r > 316$ i oba pribrojnika s desne strane nejednakosti pozitivna, treba vrijediti $1 \leq X_0 \leq 2$. U slučaju $X_0 = 1$, direktnim uvrštavanjem vidimo da ne postoji cijeli broj Y_0 koji zadovoljava jednadžbu (3.2). Za $X_0 = 2$ dobijemo $Y_0 = 2$. No, tada je $\frac{1}{2}(2b - 2r) = b - r = b - 2$, tj. $r = 2$ što ne može biti.

2.) Ako je $Y_0 < 0$, onda je $\frac{1}{2}(bX_0 - r|Y_0|) = \frac{1}{2}(bX_0 + rY_0)$ pa po kongruenciji (3.21) treba vrijediti $\frac{1}{2}(bX_0 + rY_0) = 2$. Imamo da je

$$bX_0 - rY_0 < 2bX_0 < 2b\sqrt{\frac{a(b-a)}{r-2}} < 2b\sqrt{b}$$

jer je $a < r - 2$, inače bismo dobili $b \leq a + 4$ što je u kontradikciji s Lemom 3.7. Vidimo i da je $4b(b-a) - 4Y_0^2 > 4b^2 - 4ab - 4b\sqrt{b} = 4b(b - a - \sqrt{b})$, jer je $Y_0^2 < b^{3/2}$, pa je

$$4 = bX_0 + rY_0 > \frac{4b(b - a - \sqrt{b})}{bX_0 - rY_0} > \frac{4b(b - a - \sqrt{b})}{2b\sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}(b - a - \sqrt{b})$$

tj. $\sqrt{b} - 1 - \frac{a}{\sqrt{b}} < 2$. Kvadriranjem ovog izraza i rješavanjem kvadratne jednadžbe po b dobijemo $b < a + \frac{3}{2}(\sqrt{4a+9} + 3)$. Kako po Lemi 3.7 vrijedi nejednakost $b \geq a + 57\sqrt{a}$, dobili smo kontradikciju, jer iz ove dvije nejednakosti dobijemo nejednadžbu koja nema rješenja za a u prirodnim brojevima.

Dakle, h' je paran. Iz $Y_0 \equiv 2 \pmod{b}$ i $|Y_0| < b^{3/4}$ imamo $Y_0 = 2$. Direktnim uvrštavanjem u (3.2) dobijemo $X_0 = 2$, čime smo dokazali jedan dio iskaza leme.

Promotrimo sada sustav jednadžbi (3.3) i (3.7). Analogno kao u prethodnom slučaju za rješenje (Z_1, X_1) prve jednadžbe imamo $|Z_1| < c^{3/4}$, te za j' neparan vrijedi kongruencija $\frac{1}{2}(sZ_1 + cX_1) \equiv 2 \pmod{c}$. U ovom slučaju ćemo kontradikcije dobivati s činjenicom da je $c \geq a + b + 2r > a + b + 2\sqrt{ab}$. Raspišimo po slučajevima.

Razlika kvadrata

$$(cX_1 - sZ_1)(cX_1 + sZ_1) = c^2X_1^2 - s^2Z_1^2 = 4c(c-a) - 4Z_1^2 \tag{3.23}$$

je pozitivna. Naime, ako prepostavimo suprotno, $4c(c-a) - 4Z_1^2 < 0$, imamo da je $4c(c-a) - 4c^{3/2} = 4c(c - a - \sqrt{c}) < 0$, tj. $(c - a - \sqrt{c}) < 0$, iz čega kvadriranjem i rješavanjem kvadratne jednadžbe po c dobivamo $c < \frac{1}{2}(2a + 1 + \sqrt{4a+1})$ što ne može biti jer je $c \geq a + b + 2r > 4a$. Dakle, iz $cX_1 - s|Z_1| > 0$ i $4c(c-a) - 4Z_1^2 < 4c^2$ slijedi nejednakost $cX_1 - s|Z_1| < 2c$, tj. $\frac{1}{2}(cX_1 - s|Z_1|) < c$.

Ako je $Z_1 > 0$, onda imamo $\frac{1}{2}(cX_1 - s|Z_1|) = \frac{1}{2}(cX_1 - sZ_1) \equiv -2 \pmod{c}$ pa zaključujemo $\frac{1}{2}(cX_1 - sZ_1) = c - 2$. Analogno prethodnom slučaju dobijemo $cX_1 + sZ_1 < 2c + 4.1$ i lako vidimo da to ne može vrijediti.

Ako je $Z_1 < 0$, onda imamo $\frac{1}{2}(cX_1 - s|Z_1|) = \frac{1}{2}(cX_1 + sZ_1) \equiv 2 \pmod{c}$ pa je $\frac{1}{2}(cX_1 + sZ_1) = 2$, i kao i prije dobijemo

$$4 = cX_1 + sZ_1 > \frac{4c(c - a - \sqrt{c})}{c\sqrt{c}} = \frac{4}{\sqrt{c}}(c - a - \sqrt{c})$$

to jest, treba vrijediti $c - a - \sqrt{c} < \sqrt{c}$. Kvadriranjem i rješavanjem po c dobijemo $c < a + 2 + 4\sqrt{a+1}$. Kako je $c > 4a$, ova nejednakost može vrijediti samo za $a \leq 3$. No, tada je $c < 3 + 2 + 4\sqrt{4} = 13$, što je u kontradikciji s $c > b > 10^5$ iz Korolara 3.9.

Dakle, j' je paran, odakle dobijemo $Z_1 \equiv 2 \pmod{c}$, pa za fundamentalna rješenja vrijedi $Z_1 = 2$ i $X_1 = 2$.

Preostalo je promotriti sustav jednadžbi (3.4) i (3.7). Imamo $|Z_2| < \frac{c^{3/4}}{b^{1/4}} < c^{3/4}$ i ako pretpostavimo da je k' neparan, imamo $\frac{1}{2}(tZ_2 + cY_2) \equiv 2 \pmod{c}$. Promotrimo razliku kvadrata

$$(cY_2 - tZ_2)(cY_2 + tZ_2) = c^2X_2^2 - t^2Z_2^2 = 4c(c-b) - 4Z_2^2. \tag{3.24}$$

Ona je nenegativna jer inače, ako pretpostavimo suprotno, dobijemo $4c(c-b) - 4c^{3/2}b^{-1/2} = 4c(c - b - \sqrt{\frac{c}{b}}) < 0$, tj. $c - b < \sqrt{c/b}$, a kvadriranjem i rješavanjem kvadratne jednadžbe po c dobijemo

$$c < \frac{2b^2+1+\sqrt{4b^2+1}}{2b} < b + \frac{1}{2b} + \frac{2b}{2b} + \frac{1}{2b} = b + 1 + \frac{1}{b} < b + 2,$$

što to ne može biti jer $c \geq a+b+2r > b+1+2 = b+3$. Dakle, imamo $cY_2 - t|Z_2| > 0$ i $\frac{1}{2}(cY_2 - t|Z_2|) < c$.

Ako je $Z_2 > 0$, dobijemo $\frac{1}{2}(cY_2 - tZ_2) = c - 2$ i $cY_2 + tZ_2 < 2c + 4.1$, što lako vidimo da ne može vrijediti.

Ako je $Z_2 < 0$, dobijemo $\frac{1}{2}(cY_2 + tZ_2) = 2$, $cY_2 - sZ_2 < 2cY_2 < 2c\sqrt{c-b}$ pa je $c - b - \sqrt{c/b} < 2\sqrt{c-b}$. Promotrimo dvije mogućnosti, $c > 4b$ i $c = a+b+2r$. Ako je $c > 4b$, onda je $c - b - \sqrt{c/b} > \sqrt{c}(\frac{3}{4}\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{b}})$, a izraz u zagradama je veći od 2 jer je $c > b > 10^5$. Ako je $c = a+b+2r$, onda je $c - b - \sqrt{c/b} = a + 2r - \sqrt{\frac{a+2r}{b} + 1} > a + 2r - 2$ jer je $a + 2r < 3b$, pa bi trebalo vrijediti $a + 2r - 2 < 2\sqrt{c-b} = 2\sqrt{a+2r}$, što povlači $a + 2r < 8$, a to ne može biti jer je $r > 10^{5/2} > 316$.

Dakle, i k' mora biti paran, pa je $Z_2 \equiv 2 \pmod{c}$ i za fundamentalna rješenja vrijedi $Z_2 = Y_2 = 2$. □

Iz Leme 3.20 i Leme 3.3 vidimo da možemo jednadžbe (3.8)-(3.13) zapisati kao:

$$Y\sqrt{a} + X\sqrt{b} = (2\sqrt{a} + 2\sqrt{b})\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h}, \tag{3.25}$$

$$Z\sqrt{a} + X\sqrt{c} = (2\sqrt{a} + 2\sqrt{c})\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{2j}, \tag{3.26}$$

$$Z\sqrt{b} + Y\sqrt{c} = (2\sqrt{b} + 2\sqrt{c})\left(\frac{t+\sqrt{bc}}{2}\right)^{2k}, \tag{3.27}$$

$$W\sqrt{a} + X\sqrt{d} = (2\varepsilon\sqrt{a} + 2\sqrt{d})\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l}, \tag{3.28}$$

$$W\sqrt{b} + Y\sqrt{d} = (2\varepsilon\sqrt{b} + 2\sqrt{d})\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}, \tag{3.29}$$

$$W\sqrt{c} + Z\sqrt{d} = (2\varepsilon\sqrt{c} + 2\sqrt{d})\left(\frac{z+\sqrt{cd}}{2}\right)^{2n}, \tag{3.30}$$

gdje smo uvrstili $h' = 2h$, $j' = 2j$ itd. te koristimo oznaku $\varepsilon = \pm 1$.

Dokažimo sada neke dodatne tvrdnje o mogućim vrijednostima indeksa.

Lema 3.21. *Neka su l i m indeksi koji zadovoljavaju jednakosti (3.28) i (3.29) za neku $D(4)$-petorku $\{a,b,c,d,e\}$. Tada vrijedi $2l \leq 3m$ i $m < l$, za $m > 2$.*

Dokaz. Iz (3.28) i (3.29), tj. konkretnije iz (3.11) i (3.12), dobijemo rekurzivne relacije

$$W_0^{(a,d)} = 2\varepsilon, \quad W_1^{(a,d)} = \frac{1}{2}(2\varepsilon x + 2d) = \varepsilon x + d, \quad W_{l+2}^{(a,d)} = xW_{l+1}^{(a,d)} - W_l^{(a,d)},$$
$$W_0^{(b,d)} = 2\varepsilon, \quad W_1^{(b,d)} = \frac{1}{2}(2\varepsilon y + 2d) = \varepsilon y + d, \quad W_{m+2}^{(b,d)} = yW_{m+1}^{(b,d)} - W_m^{(b,d)},$$

gdje su $m, l \geq 0$ i $\varepsilon = \pm 1$. Riješimo prvu rekurziju eksplicitno. Prvo promatramo kvadratnu jednadžbu $R^2 - xR + 1 = 0$ koja daje

$$R_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{ac}}{2}$$

pa je

$$W_l^{(a,d)} = \lambda_1 \left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^l + \lambda_2 \left(\frac{x-\sqrt{ad}}{2}\right)^l,$$

gdje su λ_1 i λ_2 nepoznanice koje trebamo odrediti iz sustava

$$\begin{aligned} l = 0 &\implies 2\epsilon = \lambda_1 + \lambda_2 \\ l = 1 &\implies x\epsilon + d = \lambda_1 \left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{x-\sqrt{ad}}{2}\right). \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobijemo $\lambda_1 = \frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}$ i $\lambda_2 = \frac{-d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}$ pa imamo opće rješenje

$$W_l^{(a,d)} = \frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} \left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^l + \frac{-d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} \left(\frac{x-\sqrt{ad}}{2}\right)^l$$

i analogno dobijemo

$$W_m^{(b,d)} = \frac{d+\varepsilon\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}} \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^m + \frac{-d+\varepsilon\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}} \left(\frac{y-\sqrt{bd}}{2}\right)^m.$$

Dokažimo prvo da je $2l \leq 3m$ promatrajući jednakost $W_{2l}^{(a,d)} = W_{2m}^{(b,d)}$. Primijetimo da je $x - \sqrt{ad} < 1$ pa je i $\left(\frac{x-\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}\right)^{2m} < 1$ i jer je $-d + \varepsilon\sqrt{ad} < 0$ vrijedi

$$\frac{-d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} \left(\frac{x-\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}\right)^{2m} > \frac{-d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} \geq \frac{-d-\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}.$$

Također, primijetimo da je drugi pribrojnik u izrazima za $W_l^{(a,d)}$ i $W_m^{(b,d)}$ negativan jer zbog $d > b > a$ vrijedi $d > \sqrt{bd} > \sqrt{ad}$. Dakle, vrijedi

$$\frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} \left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l} - \frac{d+\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} < W_{2l}^{(a,d)} = W_{2m}^{(b,d)} < \frac{d+\varepsilon\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}} \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}.$$

S druge strane,

$$\frac{d+\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}} = 1 + \frac{d}{\sqrt{ad}} < \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^2 < \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}$$

što se lako vidi jer je $\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^2 > bd+1$ i $\frac{y+\sqrt{bd}}{2} > 1$, pa dobijemo nejednakost

$$\begin{aligned}
&\frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l} < \left(\frac{d+\varepsilon\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}+1\right)\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} \\
\Longrightarrow\ &\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l} < \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{d+(\varepsilon+1)\sqrt{bd}}{d+\varepsilon\sqrt{ad}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}.
\end{aligned}$$

Vrijedi $\sqrt{\frac{a}{b}}(d+(\varepsilon+1)\sqrt{bd}) \leq \sqrt{\frac{a}{b}}(d+2\sqrt{bd}) = \sqrt{\frac{a}{b}}d + 2\sqrt{ad} < d+2\sqrt{ad}$ pa je

$$\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l} < \frac{d+2\sqrt{ad}}{d+\varepsilon\sqrt{ad}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} \leq \frac{d+2\sqrt{ad}}{d-\sqrt{ad}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}.$$

Također

$$\frac{d+2\sqrt{ad}}{d-\sqrt{ad}} = 1+\frac{3\sqrt{ad}}{d-\sqrt{ad}} = 1+\frac{3}{\sqrt{\frac{d}{a}}-1} < 1+\frac{3}{10^5-1} = \frac{100002}{99999},$$

gdje nejednakost slijedi iz $\sqrt{\frac{d}{a}} > \sqrt{\frac{abc}{a}} > b > 10^5$. Dakle,

$$\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2l} < \frac{100002}{99999}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}.$$

Pretpostavimo li da je $2l \geq 3m+1$, imali bismo

$$\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{3m+1} < \frac{100002}{99999}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}$$

i zbog $\frac{x+\sqrt{ad}}{2} > \frac{100002}{99999}$ dobijemo

$$\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{3} < \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2}.$$

Kako je $x+\sqrt{ad} > 2\sqrt{ad}$ i jer za bilo koji $p > 0$ vrijedi $\sqrt{p+4} < \sqrt{p}+\frac{2}{\sqrt{p}}$, imamo $\sqrt{bd+4} < \sqrt{bd}+\frac{2}{\sqrt{bd}}$ pa je

$$y+\sqrt{bd} < 2\sqrt{bd}+\frac{2}{\sqrt{bd}} = 2\sqrt{bd}\left(1+\frac{1}{bd}\right) < 2\sqrt{bd}\left(1+\frac{1}{b^3}\right) < 2\sqrt{bd}\left(1+\frac{1}{B_0^3}\right),$$

gdje je $B_0 < b$ prirodan broj. Sada nejednakost koju promatramo poprima oblik

$$(\sqrt{ad})^3 < (\sqrt{bd})^2\left(1+\frac{1}{B_0^3}\right)^2$$

i kvadriranjem dobijemo da treba vrijediti

$$a^4bcd^2 < a^3d^3 < b^2d^2\left(1+\frac{1}{B_0^3}\right)^4,$$

to jest,

$$a^4c < b\left(1+\frac{1}{B_0^3}\right)^4.$$

Za $B_0 = 10^5$, vidimo da tvrdnja ne vrijedi ako je $a > 1$ ili ako je $c > 4b$. Promotrimo sada jedini preostali slučaj, $a = 1$ i $c = a + b + 2r$. Ovdje imamo nejednakost

$$1 + b + 2\sqrt{b+4} < b\left(1+\frac{1}{B_0^3}\right)^4.$$

Za $B_0 = 10^5$, možemo riješiti nejednadžbu u b i dobijemo da je $b > 2.5 \cdot 10^{29}$ pa tu vrijednost možemo uvrstiti kao novu vrijednost od B_0. No tada navedena nejednakost nema rješenja. Slijedi da je pretpostavka $2l \geq 3m+1$ pogrešna, tj. mora vrijediti $2l \leq 3m$.

Pretpostavimo sada da je $m = l$. Slično kao prije, možemo promatrati da je tada

$$\begin{aligned}\frac{d+\varepsilon\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} - \frac{d+\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}} &< W_{2m}^{(b,d)} = W_{2m}^{(a,d)} \\ &< \frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2m}\end{aligned}$$

pa, jer je $d + \sqrt{bd} < \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^2$, imamo

$$\frac{d+\varepsilon\sqrt{bd}-1}{\sqrt{bd}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} < \frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{\sqrt{ad}}\left(\frac{x+\sqrt{ad}}{2}\right)^{2m}$$

i množenjem dobijemo

$$\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{x+\sqrt{ad}}\right)^{2m} < \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{d+\varepsilon\sqrt{bd}-1}.$$

No, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{d+\varepsilon\sqrt{ad}}{d+\varepsilon\sqrt{bd}-1} &< \frac{d+\sqrt{bd}}{d-\sqrt{bd}} = 1 + \frac{2\sqrt{bd}}{d-\sqrt{bd}} = 1 + \frac{2}{\frac{d}{\sqrt{bd}}-1} \\ &< 1 + \frac{2}{\sqrt{B_0}-1} = \frac{\sqrt{B_0}+1}{\sqrt{B_0}-1}\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost vrijedi jer je $\frac{d}{\sqrt{bd}} = \sqrt{\frac{d}{b}} > \sqrt{\frac{abc}{b}} = \sqrt{ac} > \sqrt{b} > \sqrt{B_0}$. Dakle, trebamo imati

$$\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{x+\sqrt{ad}}\right)^{2m} < \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{\sqrt{B_0}+1}{\sqrt{B_0}-1}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem izraza možemo vidjeti da vrijedi

$$\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{x+\sqrt{ad}}\right)^{2} > \sqrt{\frac{b}{a}}$$

pa se prethodno svodi na promatranje nejednakosti

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{m-1} < \frac{\sqrt{B_0}+1}{\sqrt{B_0}-1}.$$

Primijetimo da smo u Lemi 3.12 dobili da je $l' = 2l > 0.61803d^{\frac{1}{4}} > 0.61803(abc)^{\frac{1}{4}} > 0.61803 \cdot 10^{\frac{10}{4}} > 195$. Kako po Lemi 3.5 imamo $m \geq \frac{l}{2}$, dobijemo $m > 48$. Sada vidimo da je posebno

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{47} < \frac{\sqrt{B_0}+1}{\sqrt{B_0}-1},$$

to jest

$$(a+57\sqrt{a})^{47/2} < b^{47/2} < \frac{\sqrt{B_0}+1}{\sqrt{B_0}-1}a^{47/2}.$$

Ako riješimo nejednadžbu po a, za $B_0 = 10^5$ dobijemo $a > 4.484 \cdot 10^{10}$, te kako je $b > a$ to možemo ovu vrijednost iskoristiti kao novu vrijednost od B_0. Ponavljanjem postupka dobivamo nove donje granice za b, redom $b > 2.01136 \cdot 10^{16}$, $b > 9.02225 \cdot 10^{21}$, $b > 4.047 \cdot 10^{27}$, $b > 1.8304 \cdot 10^{33}$. U sljedećem koraku dolazimo u kontradikciju s gornjom granicom za b u Lemi 3.19, gdje imamo $b < 3.26748 \cdot 10^{35}$. Dakle, možemo zaključiti da je $m \neq l$. $\square$

Lema 3.22. *Neka su h i m indeksi koji zadovoljavaju jednakosti (3.25) i (3.29) za neku $D(4)$-petorku $\{a,b,c,d,e\}$. Tada vrijedi $h \geq 2m$.*

Dokaz. Slično kao u prethodnoj lemi, za nizove $Y_h^{(a,b)}$ i $Y_m^{(b,d)}$ imamo

$$\begin{aligned} &Y_0^{(a,b)} = 2, \quad Y_1^{(a,b)} = r+b, \quad Y_{h+2}^{(a,b)} = rY_{h+1}^{(a,b)} - Y_h^{(a,b)}, \\ &Y_0^{(b,d)} = 2, \quad Y_1^{(a,b)} = y+\varepsilon b, \quad Y_{m+2}^{(b,d)} = yY_{m+1}^{(b,d)} - Y_m^{(b,d)}, \end{aligned}$$

gdje su $h, m \geq 0$ i $\varepsilon = \pm 1$. Za opća rješenja s parnim indeksima dobijemo

$$\begin{aligned} Y_{2h}^{(a,b)} &= \frac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h} + \frac{-b+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\left(\frac{r-\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h} \\ Y_{2m}^{(b,d)} &= \frac{\varepsilon b+\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} + \frac{-\varepsilon b+\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}\left(\frac{y-\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m}. \end{aligned}$$

Ako je $Y = Y_{2h}^{(a,b)} = Y_{2m}^{(b,d)}$, onda je

$$\left(1-\sqrt{b/d}\right)\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} < \frac{-b+\sqrt{bd}}{\sqrt{bd}}\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} < Y_{2m}^{(b,d)} = Y_{2h}^{(a,b)} <$$
$$< \frac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h} \leq \left(1+\sqrt{b/a}\right)\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h}.$$

Lako možemo provjeriti da je $\frac{1+\sqrt{b/a}}{1-\sqrt{b/d}} = \frac{\sqrt{d}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{d}-\sqrt{b})} < \frac{r+\sqrt{ab}}{2}$, pa imamo

$$\left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} < \frac{1+\sqrt{b/a}}{1-\sqrt{b/d}}\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h} < \left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h+1}.$$

Kako vrijedi

$$\frac{y+\sqrt{bd}}{2} > \sqrt{bd} > \sqrt{ab^2c} \geq \sqrt{ab^2(a+b+2r)} > r^2 > \left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^2,$$

imamo da je

$$\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{4m} < \left(\frac{y+\sqrt{bd}}{2}\right)^{2m} < \left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h+1},$$

odakle dobijemo nejednakost $4m < 2h+1$, tj. $2m \leq h$ što je i trebalo pokazati. □

Koristeći Propoziciju 2.9 na $D(4)$-četvorki $\{a, b, d, e\}$ dobijemo donju granicu za indeks l u terminima produkta elemenata a i c, a primjenjujući prethodne nejednakosti, dobijemo takvu donju granicu i za indeks h koja će nam biti potrebna za ostatak dokaza.

Lema 3.23. *Neka je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka. Tada je $l > 0.499997\sqrt{ac}$, $j > m > 0.333331\sqrt{ac}$ i $h > 0.666662\sqrt{ac}$.*

Dokaz. Direktnim uvrštavanjem $L = \frac{3}{2}$, što imamo iz Leme 3.21, $A_0 = 1$, $B_0 = 10^5$ i $D_0 = 10^{10}$ te $\rho = 1$ u nejednakosti iz Propozicije 2.9 i numeričkim rješavanjem korištenjem računala dobijemo da je $\alpha = 0.499997$, a ostale tvrdnje vrijede iz odnosa među indeksima iz Lema 3.5, 3.21 i 3.22 i činjenice da je $d > abc$. □

3.4 Gornja granica za produkt ac koristeći linearne forme u logaritmima

Promotrimo jednadžbe (3.25) i (3.26). Rješavanjem rekurzija vezanih za te jednadžbe dobijemo da je opće rješenje za X oblika

$$X_{2h}^{(a,b)} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h} + \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\left(\frac{r-\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h}$$

i

$$X_{2j}^{(a,c)} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{2j} + \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\left(\frac{s-\sqrt{ac}}{2}\right)^{2j},$$

za neke h i j. Označimo

$$P := \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{2h}, \quad Q := \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{2j}.$$

Primijetimo da je $\left(\frac{r+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{r-\sqrt{ab}}{2}\right)$, jer je $r^2-ab=4$, pa se lako provjeri da vrijedi

$$P + \frac{b-a}{b}P^{-1} = Q + \frac{c-a}{c}Q^{-1}. \tag{3.31}$$

Također je

$$P-Q = \frac{c-a}{c}Q^{-1} - \frac{b-a}{b}P^{-1} > \frac{c-a}{c}\left(Q^{-1}-P^{-1}\right) = \frac{c-a}{c}\frac{P-Q}{PQ}.$$

Kada bi bilo $P-Q<0$, dijeleći gornju nejednakost s $P-Q$ imali bismo $1 < \frac{c-a}{c}\frac{1}{PQ}$. No, s druge strane je $\frac{c-a}{c}\frac{1}{PQ} = \left(1-\frac{a}{c}\right)\frac{1}{PQ} < 1$ pa bismo dobili kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $P-Q>0$. Označimo

$$\Lambda_1 := 2h\log\frac{r+\sqrt{ab}}{2} - 2j\log\frac{s+\sqrt{ac}}{2} + \log\frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}. \tag{3.32}$$

Očito je $\Lambda_1 = \log\frac{P}{Q} > 0$.

S druge strane, iz (3.31) imamo

$$\begin{aligned} P-Q &< \frac{c-a}{c}Q^{-1} < Q^{-1} \\ \Longrightarrow \frac{P-Q}{Q} &< Q^{-2} \Longrightarrow \frac{P}{Q} < 1+Q^{-2} \end{aligned}$$

pa je

$$\Lambda_1 = \log\frac{P}{Q} < \log(1+Q^{-2}) < Q^{-2} = \frac{c}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2}\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-4j} < \left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-4j},$$

čime smo dokazali sljedeću lemu.

Lema 3.24. *Neka je Λ_1 linearna forma u logaritmima definirana s (3.32). Tada vrijedi $0 < \Lambda_1 < \left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-4j}$.*

Linearnoj formi u logaritmima Λ_1 možemo pronaći bolju donju granicu tako da primijenimo Teorem 3.16. Vrijednosti parametara su

$$
\begin{aligned}
&n = 3, \quad d = 4, \quad b_1 = 2h, \quad b_2 = -2j, \quad b_3 = 1, \\
&\alpha_1 = \frac{r + \sqrt{ab}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{s + \sqrt{ac}}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{c})}.
\end{aligned}
$$

Slično kao u Potpoglavlju 3.2.1, imamo da je $h(\alpha_1) = \frac{1}{2}\log\alpha_1$ i $h(\alpha_2) = \frac{1}{2}\log\alpha_2$. Minimalni polinom od α_3 je jednak $p_3(X)/g$ gdje je g najveći zajednički djelitelj koeficijenata polinoma $p_3(X)$ koji je dan s

$$
\begin{aligned}
p_3(X) = {} & b^2(c-a)^2X^4 - 4b^2c(c-a)X^3 + \\
& 2bc(3bc - a^2 - ac - ab)X^2 - 4bc^2(b-a)X + c^2(b-a)^2.
\end{aligned}
$$

Nultočke polinoma $p_3(X)$ su $\beta_1 = \frac{\sqrt{c}(-\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$, $\beta_2 = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(-\sqrt{a}+\sqrt{c})}$, $\beta_3 = \frac{\sqrt{c}(-\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(-\sqrt{a}+\sqrt{c})}$ i α_3 te za njih vrijedi

$$\beta_1 < \beta_3 < 1$$

i

$$1 < \alpha_3 < \beta_2$$

što se lako provjeri množenjem i kvadriranjem, pa imamo da je

$$h(\alpha_3) = \frac{1}{4}\left(\log\frac{b^2(c-a)^2}{g} + \log\alpha_3 + \log\beta_2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\log(b^2(c-a)^2) + \log\alpha_3 + \log\beta_2\right).$$

Vrijedi ocjena

$$
\begin{aligned}
h(\alpha_3) &\leq \frac{1}{4}\left(\log(b^2(c-a)^2) + \log\frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{b(c-a)}\right) \\
&= \frac{1}{4}\log(cb(c-a)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2) \\
&< \frac{1}{4}\log c^4 = \log c.
\end{aligned}
$$

S obzirom na to da je u Teoremu 3.16 vrijednost funkcije s desne strane nejednakosti padajuća u A_3, možemo uzeti

$$A_1 = 4\frac{1}{2}\log\alpha_1 = 2\log\alpha_1, \quad A_2 = 2\log\alpha_2, \quad A_3 = 4\log c = \log c^4.$$

Također, nije teško vidjeti da su ovako definirani α_1, α_2 i α_3 totalno realni i multiplikativno nezavisni, što se dokaže na analogan način kao u Lemi 3.17.

Pokažimo da vrijedi $|b_1|A_1 < |b_2|A_2$. Ako pretpostavimo suprotno, da je $|b_1|A_1 \geq$

$|b_2|A_2$, onda bismo zbog Leme 3.24 imali da je

$$\log \alpha_3 < \left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-4j}.$$

Zbog Leme 3.23 je $\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{-4j} < \sqrt{ac}^{-4\cdot 0.333331\sqrt{ac}} < \sqrt{10^5}^{-4\cdot 0.333331\sqrt{10^5}} < 10^{-1054}$, pa bismo imali $\alpha_3 < e^{10^{-1054}} < 1 + 10^{-1000}$. Primijetimo sada da je $\alpha_3 = 1 + \frac{\sqrt{ac}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}}$ pa bi vrijedilo $\sqrt{ac} - \sqrt{ab} < 10^{-1000}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc})$. Iz Propozicije 3.19 imamo da je $d < 10^{72}$, $10^5 < b < 10^{36}$ pa je $c < 10^{67}$, što povlači da je $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} < b + c < 10^{68}$ pa bismo imali $\sqrt{ac} - \sqrt{ab} < 10^{-1000}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc}) < 10^{-932}$. No,

$$\begin{aligned}\sqrt{ac} - \sqrt{ab} = \sqrt{a}(\sqrt{c} - \sqrt{b}) &> \sqrt{1 + b + 2\sqrt{b+4}} - \sqrt{b} > \sqrt{b + 2\sqrt{b}} - \sqrt{b}\\ &> \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt{b} > 10^{-5/4}\end{aligned}$$

što očito vodi u kontradikciju pa je $|b_1|A_1 < |b_2|A_2$. Nije teško provjeriti da vrijedi i nejednakost $|b_3|A_3 < |b_1|A_1|$.

Iz Leme 3.24 i nejednakosti $|b_1|A_1 < |b_2|A_2$ imamo

$$\log |\Lambda_1| < -4j \log \alpha_2 < -4h \log \alpha_1.$$

Da bismo odredili vrijednost parametra E, primijetimo da je

$$\begin{aligned}&\frac{|b_3|}{A_3} < \frac{|b_3|}{A_2} < \frac{|b_3|}{A_1} < \frac{|b_1|}{A_3} < \frac{|b_1|}{A_1},\\ &\frac{|b_3|}{A_2} < \frac{|b_1|}{A_2} < \frac{|b_2|}{A_1} < \frac{|b_1|}{A_1},\\ &\frac{|b_2|}{A_3} < \frac{|b_3|}{A_2} < \frac{|b_2|}{A_2} < \frac{|b_1|}{A_2} < \frac{|b_1|}{A_1},\end{aligned}$$

pa je

$$E = \max\left\{\frac{2|b_1|}{A_1}, 3\right\} = \max\left\{\frac{2h}{\log \alpha_1}, 3\right\}.$$

Kako je $0.666662\sqrt{ac} > 0.666662r > \log r^3$, što vrijedi čim je $r > 10$, imamo $h > 0.666662\sqrt{ac} > 3\log r > 3\log \alpha_1$ pa je $\frac{2h}{\log \alpha_1} > 3$, tj. možemo uzeti $E = \frac{2h}{\log \alpha_1}$ pa po Teoremu 3.16 imamo

$$\begin{aligned}4h \log \alpha_1 < -\log |\Lambda_1| <& 5.3 n^{0.5-n}(n+1)^{n+1}(n+8)^2(n+5)31.44^n d^2 \log \frac{2h}{\log \alpha_1}\\ &\cdot 2\log \alpha_1 \cdot 2\log \alpha_2 \cdot 4\log c \cdot \log(3nd).\end{aligned}$$

Uvrstimo li vrijednosti $n = 3$ i $d = 4$ dobijemo

$$\frac{4h}{\log 2h - \log\log\sqrt{10^5}} < 2.40207 \cdot 10^{12} \log\alpha_2 \log c. \tag{3.33}$$

Iz Leme 3.23 imamo da je $h > 0.666662\sqrt{ac}$. S obzirom na to da je lijeva strana nejednakosti (3.33) rastuća u h za $h \geq 8 > \frac{e^{\log\log\sqrt{10^5}+1}}{2}$, možemo u nejednakost uvrstiti donju granicu za h te dobijemo da je

$$ac < 1.08915 \cdot 10^{34}. \tag{3.34}$$

Promotrimo sada desnu stranu nejednakosti (3.33). Lako vidimo da vrijedi nejednakost $\log\alpha_2 \log c < \log\sqrt{ac+4}\log ac$ pa gornju granicu (3.34) možemo uvrstiti s desne strane nejednakosti (3.33) odakle dobijemo da je

$$h < 6.95745 \cdot 10^{16}. \tag{3.35}$$

Propozicija 3.25. *Ako je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka takva da je $a < b < c < d < e$, onda je $ac < 1.08915 \cdot 10^{34}$ i $h < 6.95745 \cdot 10^{16}$. Također*

$$\frac{h}{\log 2h - \log\log\sqrt{10^5}} < 6.005175 \cdot 10^{11} \log\alpha_2 \log c.$$

3.4.1 Drugi alati vezani za linearne forme u logaritmima

Iskažimo teorem iz [45] koji ćemo koristiti kako bismo dobili nešto bolje numeričke granice za produkt ac i indeks h.

Teorem 3.26. *Promatramo nenul algebarske brojeve α_1, α_2 i α_3, koji su ili svi realni i veći od 1 ili svi kompleksni brojevi modula 1 i svi različiti od 1. Pretpostavimo da su ili ta tri broja multiplikativno nezavisna ili su dva broja multiplikativno nezavisna, a treći je korijen jedinice. Definiramo*

$$\mathcal{D} = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \mathbb{R}].$$

Promatramo tri pozitivna relativno prosta cijela broja b_1, b_2, b_3 i linearnu formu

$$\Lambda = b_2 \log\alpha_2 - b_1 \log\alpha_1 - b_3 \log\alpha_3,$$

gdje su logaritmi od α_i proizvoljne vrijednosti logaritma, ali koje su ili sve realne ili sve čisto imaginarne. Pretpostavimo i da je

$$b_2|\log\alpha_2| = b_1|\log\alpha_1| + b_3|\log\alpha_3| \pm |\Lambda|.$$

Stavimo

$$d_1 = \gcd(b_1, b_2),\ d_3 = \gcd(b_3, b_2),\ b_1 = d_1 b_1',\ b_2 = d_1 b_2' = d_3 b_2'',\ b_3 = d_3 b_3''.$$

Neka je $\rho \geq e$ realni broj i stavimo $\lambda = \log \rho$. Neka su a_1, a_2 i a_3 realni brojevi takvi da je

$$a_i \geq \rho |\log \alpha_i| - \log |\alpha_i| + 2\mathcal{D} h(\alpha_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

i pretpostavimo da je

$$\Omega := a_1 a_2 a_3 \geq 2.5 \quad i \quad A := \min\{a_1, a_2, a_3\} \geq 0.62.$$

Neka su K, L i M prirodni brojevi takvi da je

$$L \geq 4 + \mathcal{D}, \quad K = \lfloor M \Omega L \rfloor, \quad M \geq 3.$$

Neka je $0 < \chi \leq 2$ fiksan. Definiramo

$$\begin{aligned}
c_1 &= \max\left\{(\chi M L)^{2/3}, \sqrt{2ML/A}\right\}, \\
c_2 &= \max\left\{2^{1/3}(ML)^{2/3}, \sqrt{M/A}L\right\}, \\
c_3 &= (6M^2)^{1/3} L,
\end{aligned}$$

i stavimo

$$\begin{aligned}
R_1 &= \lfloor c_1 a_2 a_3 \rfloor, \quad & S_1 &= \lfloor c_1 a_1 a_3 \rfloor, \quad & T_1 &= \lfloor c_1 a_1 a_2 \rfloor, \\
R_2 &= \lfloor c_2 a_2 a_3 \rfloor, \quad & S_2 &= \lfloor c_2 a_1 a_3 \rfloor, \quad & T_2 &= \lfloor c_2 a_1 a_2 \rfloor, \\
R_3 &= \lfloor c_3 a_2 a_3 \rfloor, \quad & S_3 &= \lfloor c_3 a_1 a_3 \rfloor, \quad & T_3 &= \lfloor c_3 a_1 a_2 \rfloor.
\end{aligned}$$

Neka je

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + 1, \quad S = S_1 + S_2 + S_3 + 1, \quad T = T_1 + T_2 + T_3 + 1.$$

Definiramo

$$c_0 = \max\left\{\frac{R}{La_2a_3}, \frac{S}{La_1a_3}, \frac{T}{La_1a_2}\right\}.$$

Konačno, pretpostavimo da je

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{KL}{2} + \frac{L}{4} - 1 - \frac{2K}{3L}\right)\lambda + 2\mathcal{D}\log 1.36 \\
&\qquad \geq (\mathcal{D}+1)\log L + 3gL^2 c_0 \Omega + \mathcal{D}(K-1)\log \widetilde{b} + 2\log K, \quad (3.36)
\end{aligned}$$

gdje je

$$g = \frac{1}{4} - \frac{K^2L}{12RST}, \quad b' = \left(\frac{b_1'}{a_2} + \frac{b_2'}{a_1}\right)\left(\frac{b_3''}{a_2} + \frac{b_2''}{a_3}\right), \quad \widetilde{b} = \frac{e^3c_0^2\Omega^2L^2}{4K^2} \cdot b'.$$

Tada je ili

$$\log|\Lambda| > -(KL + \log(3KL))\lambda, \tag{3.37}$$

ili (A1): *postoje dva nenul cijela broja r_0 i s_0 takva da je*

$$r_0b_2 = s_0b_1$$

sa svojstvom

$$|r_0| \le \frac{(R_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - T_1} \quad i \quad |s_0| \le \frac{(S_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - T_1},$$

gdje je

$$\mathcal{M} = \max\{R_1 + S_1 + 1, S_1 + T_1 + 1, R_1 + T_1 + 1, \chi\mathcal{V}\},$$
$$\mathcal{V} = \sqrt{(R_1+1)(S_1+1)(T_1+1)},$$

ili (A2): *postoje cijeli brojevi r_1, s_1, t_1 i t_2, takvi da je $r_1s_1 \neq 0$ i*

$$(t_1b_1 + r_1b_3)s_1 = r_1b_2t_2, \quad \gcd(r_1, t_1) = \gcd(s_1, t_2) = 1,$$

koji također zadovoljavaju

$$|r_1s_1| \le \delta \cdot \frac{(R_1+1)(S_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{R_1, S_1\}},$$
$$|s_1t_1| \le \delta \cdot \frac{(S_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{S_1, T_1\}},$$
$$|r_1t_2| \le \delta \cdot \frac{(R_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{R_1, T_1\}},$$

gdje je $\delta = \gcd(r_1, s_1)$. Štoviše, kada je $t_1 = 0$ možemo uzeti $r_1 = 1$ i kada je $t_2 = 0$ možemo uzeti $s_1 = 1$.

Ovaj teorem želimo primijeniti na linearnu formu

$$\Lambda = -\Lambda_1 = 2j\log\alpha_2 - 2h\log\alpha_1 - \log\alpha_3.$$

Naglasimo da ćemo koristiti da je $c > b > 10^5$.

Lako je vidjeti da imamo slično kao i prije

$$\mathcal{D} = 4, \quad b_1 = 2h, \quad b_2 = 2j, \quad b_3 = 1,$$

te da možemo uzeti iste ocjene za visine

$$h(\alpha_1) = \frac{1}{2}\log\alpha_1, \quad h(\alpha_2) = \frac{1}{2}\log\alpha_2, \quad h(\alpha_3) < \log c.$$

Primijetimo da je

$$\log\alpha_3 < \log\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right) < \log 2 < 0.694.$$

Sada trebamo odabrati $a_i \geq \rho|\log\alpha_i| - \log|\alpha_i| + 2\mathcal{D}h(\alpha_i)$ za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$. U svim slučajevima imamo da je $|\log\alpha_i| = \log|\alpha_i| = \log\alpha_i$. Za slučaj $i = 1$ promatramo

$$a_1 \geq \rho\log\alpha_1 - \log\alpha_1 + 4 \cdot \log\alpha_1 = (\rho + 3)\log\alpha_1,$$

te slično vrijedi i za $i = 2$. Za $i = 3$ vrijedi

$$a_3 \geq \rho\log\alpha_3 - \log\alpha_3 + 2 \cdot 4 \cdot \log c$$

pa vidimo da možemo odabrati

$$\begin{aligned} a_1 &= (\rho + 3)\log\alpha_1, \\ a_2 &= (\rho + 3)\log\alpha_2, \\ a_3 &= 8(\log c + 0.08675(\rho - 1)). \end{aligned}$$

Sada ćemo bez eksplicitnog odabira parametara M, L i ρ pogledati koje uvjete trebaju zadovoljavati da možemo primijeniti teorem, pa ćemo računalnom pretragom odabrati najbolje moguće parametre. Kako bismo olakšali sljedeće izračune, zadat ćemo intervale unutar kojih promatramo parametre. Promatrat ćemo da je $\chi = 2$ fiksan, $\rho \in [5.5, 14]$, $L \in [700, 1500]$ i $M \in [3, 10]$.

Lako vidimo da vrijedi $a_1 < a_2$ pa je $A = \min\{a_1, a_2, a_3\} = \min\{a_1, a_3\}$. Ako je $A = a_1$ imamo $A = (\rho + 3)\log\alpha_1 > 8.5\log\sqrt{ab} > 8.5\log 10^{5/2} > 48.92$, a ako je $A = a_3$ imamo $A > 8\log c > 8\log 10^5 > 92$ pa u svakom slučaju vrijedi $A \geq 0.62$. Također se lako vidi da je $\Omega = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > a_1^2 > 2.5$.

Vrijednosti c_1, c_2 i c_3 lako možemo izračunati kada odaberemo parametre. Gornju granicu za c_0 dobijemo promatrajući da je

$$\frac{R}{La_2a_3} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + 1}{La_2a_3} \leq \frac{c_1a_2a_3 + c_2a_2a_3 + c_3a_2a_3 + 1}{La_2a_3}$$

$$= \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{a_2 a_3}}{L} < \frac{c_1 + c_2 + c_3 + 1}{L}$$

i ista gornja granica vrijedi i za S i T, pa je $c_0 < \frac{c_1+c_2+c_3+1}{L}$.

Imamo

$$\Omega = a_1 a_2 a_3 = 8(\rho + 3)^2 \log \alpha_1 \log \alpha_2 (\log c + 0.08675(\rho - 1))$$

te

$$K = \lfloor M\Omega L \rfloor = \lfloor 8ML(\rho + 3)^2 \log \alpha_1 \log \alpha_2 (\log c + 0.08675(\rho - 1)) \rfloor.$$

Želimo pokazati kada vrijedi nejednakost (3.36) pa promatramo koje nejednakosti vrijede za pojedine grupe pribrojnika s lijeve i desne strane nejednakosti. S lijeve strane imamo $M\Omega L - 1 < K \leq M\Omega L$ pa je

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{KL}{2} + \frac{L}{4} - 1 - \frac{2K}{3L}\right)\lambda + 2\mathcal{D}\log 1.36 \\
&> M\Omega L\left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3L}\right)\lambda - \left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3L}\right)\lambda + \left(\frac{L}{4} - 1\right)\lambda + 2\mathcal{D}\log 1.36 \\
&= 8ML(\rho+3)^2\left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3L}\right)\lambda \log\alpha_1 \log\alpha_2 \log c \\
&+ 8ML(\rho+3)^2\left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3L}\right)\lambda \cdot 0.08675(\rho - 1)\log\alpha_1\log\alpha_2 \\
&+ \left(\frac{L}{4} - 1\right)\lambda + 2\mathcal{D}\log 1.36 - \left(\frac{L}{2} - \frac{2}{3L}\right)\lambda.
\end{aligned}$$

S druge strane, za izraze s desne strane nejednakosti (3.36) vrijedi sljedeće:

1. Budući da možemo koristiti gornju granicu za produkt ac, nakon uvrštavanja parametara s desne strane nejednakosti dobijemo brojčanu vrijednost za

$$(\mathcal{D} + 1)\log L + 2\log K < 5\log L + 2\log(8ML(\rho+3)^2 \log^2\sqrt{ac+4}\log ac).$$

2. Budući da je $g = \frac{1}{4} - \frac{K^2 L}{12RST} < \frac{1}{4}$, vidimo da je

$$\begin{aligned}
3gL^2c_0\Omega < \frac{3}{4}L^2c_0\Omega &= \frac{3}{4}L^2c_0 \cdot 8(\rho+3)^2\log\alpha_1\log\alpha_2\log c \\
&+ \frac{3}{4}L^2c_0 \cdot 8 \cdot 0.08675(\rho-1)(\rho+3)^2\log\alpha_1\log\alpha_2.
\end{aligned}$$

3. Za procijeniti posljednji dio desne strane nejednakosti, primijetimo da iz nejednakosti $\log\alpha_3 < 2\log\alpha_1$, jer je $\Lambda_1 > 0$, dobijemo $2(h+1)\log\alpha_1 - 2j\log\alpha_2 > 0$, to jest

$$\frac{b_2}{a_1} < \frac{b_1 + 2}{a_2}.$$

Promotrimo sada izraze

$$\frac{b_3}{a_2} = \frac{1}{(\rho+3)\log\alpha_2},$$

$$\frac{2}{a_3} = \frac{2}{8(\log c + 0.08674(\rho-1))}.$$

Želimo vidjeti kada će vrijediti nejednakost $\frac{b_3}{a_2} < \frac{2}{a_3}$, tj.

$$4(\log c + 0.08674(\rho-1)) < (\rho+3)\log\alpha_2.$$

Kako lako provjerimo da je $2\log\alpha_2 > \log c$, vidimo da je dovoljno naći za koje ρ vrijedi nejednakost $8(\log c + 0.08674(\rho-1)) < (\rho+3)\log c$. Dobijemo

$$\rho \geq 5 + \frac{2.776}{\log c - 0.694}.$$

S obzirom na to da imamo je $\log c > \log 10^5$, dobili bismo da nejednakost vrijedi za $\rho > 5.256$, što zadovoljavaju vrijednosti ρ unutar intervala koji ćemo promatrati. Dakle, vrijedi

$$\frac{b_3}{a_2} < \frac{2}{a_3}.$$

Budući da je $j < h$, imamo

$$b' \leq \left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_1}\right)\left(\frac{b_3}{a_2} + \frac{b_2}{a_3}\right) < \frac{2b_1+2}{a_2} \cdot \frac{b_2+2}{a_3} < \frac{(4h+2)(2h+2)}{8(\rho+3)\log\alpha_2\log c}.$$

Koristeći $c > 10^5$, $h < 6.95745 \cdot 10^{16}$ i odabrane parametre dobijemo numeričku gornju granicu za b'. Nadalje, imamo

$$\frac{K}{\Omega} > \frac{M\Omega L - 1}{\Omega} > ML - 1$$

pa je

$$\log\widetilde{b} < \log\left(\frac{c_0^2}{4}e^3\frac{1}{(ML-1)^2}L^2b'\right).$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(K-1)\log\widetilde{b} &< 4M\Omega L\log\widetilde{b} \\
&= 32ML(\rho+3)^2\log\widetilde{b}\log\alpha_1\log\alpha_2\log c \\
&+ 32ML(\rho+3)^2\log\widetilde{b}\cdot 0.08675(\rho-1)\log\alpha_1\log\alpha_2.
\end{aligned}$$

Kao što vidimo iz usporedbe, u nejednakosti imamo pribrojnike u kojima se javljaju izrazi $\log\alpha_1\log\alpha_2\log c$, $\log\alpha_1\log\alpha_2$ i pribrojnike koji ne ovise o vrijednosti elemenata trojke. Da bi odabrani parametri zadovoljavali nejednadžbu (3.36) dovoljno je promatrati koeficijente uz te izraze, to jest, odabrati parametre tako da koeficijenti uz odgovarajuće izraze s lijeve strane jednadžbe budu veći od koeficijenta zbroja s desne strane. Jedino treba biti pažljiv jer se pokaže da je suma pribrojnika koji ne ovise o elementima trojke s lijeve strane nejednakosti negativna, a s desne pozitivna, no ako zahtjevamo da je s desne strane jednadžbe koeficijent uz $\log\alpha_1 \log\alpha_2 \log c$ veći za barem vrijednost tog negativnog koeficijenta, lako se vidi da će tada vrijediti nejednakost (3.36), a to nije teško postići.

Uz te uvjete, imat ćemo odabrane parametre za koje po Teoremu 3.26 vrijedi ili neki od slučajeva (A1) ili (A2) ili vrijedi nejednakost (3.37). Promotrimo prvo slučaj kada vrijedi nejednakost (3.37):

$$\begin{aligned}\log|-\Lambda_1| &> -(KL+\log(3KL))\lambda \\ &\geq -(ML^2\Omega+\log(3ML^2\Omega))\log\rho.\end{aligned}$$

S druge strane, vrijedi

$$\log|-\Lambda_1| < -4j\log\alpha_2 < -4h\log\alpha_1$$

pa imamo

$$4h\log\alpha_1 < (ML^2\Omega+\log(3ML^2\Omega))\log\rho.$$

Kako promatramo parametre $M\geq 3$, $L\geq 700$, $\rho\geq 5.5$, primijetimo da je $ML^2\Omega > 8ML^2(\rho+3)^2\log\sqrt{ab}\log\sqrt{ac}\log c > 3.81\cdot 10^{10}$. S obzirom na to da za $x > 3.81\cdot 10^{10}$ vrijedi $\log 3x < 6.7\cdot 10^{-10}x$, dovoljno je promatrati nejednakost

$$4h\log\alpha_1 < ML^2\Omega(1+6.7\cdot 10^{-10})\log\rho$$

za koju dobijemo

$$h < 2ML^2(\rho+3)^2\log\rho(1+6.7\cdot 10^{-10})\left(1+\frac{0.08675}{\log 10^5}(\rho-1)\right)\log\alpha_2\log c.$$

Kako bismo skratili zapis izraza koje ćemo dalje koristiti, označit ćemo s $G(x)$ u nekom izrazu x gornju granicu numeričke vrijednosti koju dobijemo kada uvrstimo sve parametre osim onih koje sadrže vrijednosti trojke $\{a,b,c\}$. U skladu s time, označavamo

$$G(h) := 2ML^2(\rho+3)^2\log\rho(1+6.7\cdot 10^{-10})\left(1+\frac{0.08675}{\log 10^5}(\rho-1)\right),$$

tj. imamo da je $h < G(h)\cdot\log\alpha_2\log c$.

Ako ne vrijedi nejednakost (3.37), onda mora vrijediti neki od slučajeva (A1) ili (A2).

Primijetimo da iz

$$\chi\mathcal{V} = \chi\sqrt{(R_1+1)(S_1+1)(T_1+1)}$$

i

$$\mathcal{M} = \max\{R_1+S_1+1, S_1+T_1+1, R_1+T_1+1, \chi\mathcal{V}\}$$

imamo da je

$$\mathcal{M} \geq \chi\mathcal{V} > \chi c_1^{3/2} a_1 a_2 a_3.$$

Za svaki a_i možemo izračunati donju granicu

$$\begin{aligned} a_2 > a_1 &> (\rho+3)\log 10^{5/2} := A_{1,2},\\ a_3 &> 8(\log 10^5 + 0.08675(\rho-1)) := A_3. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da za vrijednosti $5.5 \leq \rho \leq \frac{\log 10^{65/2} - 0.694}{\log 10^{5/2} - 0.694} \approx 14.64505$ imamo da vrijedi nejednakost $A_3 > A_{1,2}$.

Podsjetimo se da je $R_1 = \lfloor c_1 a_2 a_3 \rfloor$, $S_1 = \lfloor c_1 a_1 a_3 \rfloor$ i $T_1 = \lfloor c_1 a_1 a_2 \rfloor$. Budući da vrijedi $a_2 > a_1$, lako vidimo da je je $\max\{R_1, S_1\} = R_1$. No, kako vrijednosti izraza R_1, S_1, i T_1 ovise i o trojki $\{a, b, c\}$, promatrat ćemo odvojeno svaku od mogućnosti za $\max\{S_1, T_1\}$ i $\max\{R_1, T_1\}$.

Označimo i izračunajmo:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \frac{(R_1+1)(S_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{R_1, S_1\}} < \frac{(c_1a_2a_3+1)(c_1a_1a_3+1)}{\chi c_1^{3/2} a_1a_2a_3 - c_1a_2a_3}\\ &= \frac{1+\frac{1}{c_1a_2a_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}a_1}}\left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}a_1a_3}\right)a_3\\ &< \frac{1+\frac{1}{c_1A_{1,2}A_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}}}\left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}A_3}\right)8\left(1 + \frac{0.08675}{\log 10^5}(\rho-1)\right)\log c\\ &=: G(B_1)\cdot\log c. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\max\{S_1, T_1\} = S_1$. Tada je

$$\begin{aligned} B_2 &:= \frac{(S_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{S_1, T_1\}} < \frac{(c_1a_1a_3+1)(c_1a_1a_2+1)}{\chi c_1^{3/2} a_1a_2a_3 - c_1a_1a_3}\\ &= \frac{1+\frac{1}{c_1a_1a_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}a_2}}\left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}a_2^2}\right)a_2\\ &< \frac{1+\frac{1}{c_1A_{1,2}A_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}}}\left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}^2}\right)(\rho+3)\log\alpha_2\\ &=: G(B_2^{(1)})\cdot\log\alpha_2, \end{aligned}$$

a ako je $\max\{S_1, T_1\} = T_1$, onda imamo

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{(S_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{S_1, T_1\}} < \frac{(c_1a_1a_3+1)(c_1a_1a_2+1)}{\chi c_1^{3/2}a_1a_2a_3 - c_1a_1a_2} \\
&= \frac{1+\frac{1}{c_1a_1a_2}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}a_3}} \left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}a_2a_3}\right) a_2 \\
&< \frac{1+\frac{1}{c_1A_{1,2}^2}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}A_3}} \left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}A_3}\right) (\rho+3)\log\alpha_2 \\
&=: G(B_2^{(2)}) \cdot \log\alpha_2,
\end{aligned}$$

gdje smo izraze raspisali tako da bude jasno da su padajući u varijablama a_1, a_2 i a_3 pa možemo uvrstiti donje granice za te izraze. Primijetimo da imamo da je

$$G(B_2^{(1)}) = \frac{(c_1A_{1,2}A_3+1)(c_1A_{1,2}^2+1)}{\chi c_1^{3/2}A_{1,2}^2A_3 - c_1A_{1,2}A_3}, \quad G(B_2^{(2)}) = \frac{(c_1A_{1,2}A_3+1)(c_1A_{1,2}^2+1)}{\chi c_1^{3/2}A_{1,2}^2A_3 - c_1A_{1,2}^2},$$

te s obzirom na to da se izrazi razlikuju samo u nazivniku, lako vidimo ako je $A_3 > A_{1,2}$, da je onda $G(B_2^{(1)}) > G(B_2^{(2)})$.

Definirat ćemo $G(B_2) = \max\{G(B_2^{(1)}), G(B_2^{(2)})\}$ pa je

$$B_2 < G(B_2) \cdot \log\alpha_2.$$

Slično za posljednji izraz koji promatramo, pretpostavimo prvo da je $\max\{R_1, T_1\} = R_1$ pa imamo

$$\begin{aligned}
B_3 &:= \frac{(R_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{R_1, T_1\}} < \frac{(c_1a_2a_3+1)(c_1a_1a_2+1)}{\chi c_1^{3/2}a_1a_2a_3 - c_1a_2a_3} \\
&= \frac{1+\frac{1}{c_1a_2a_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}a_1}} \left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}a_1a_2}\right) a_2 \\
&< \frac{1+\frac{1}{c_1A_{1,2}A_3}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}}} \left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}^2}\right) (\rho+3)\log\alpha_2 \\
&=: G(B_3^{(1)}) \cdot \log\alpha_2,
\end{aligned}$$

a ako je $\max\{R_1, T_1\} = T_1$, onda je

$$\begin{aligned}
B_3 &= \frac{(R_1+1)(T_1+1)}{\mathcal{M} - \max\{R_1, T_1\}} < \frac{(c_1a_2a_3+1)(c_1a_1a_2+1)}{\chi c_1^{3/2}a_1a_2a_3 - c_1a_1a_2} \\
&= \frac{1+\frac{1}{c_1a_1a_2}}{\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2c_1^{1/2}a_3}} \left(0.5c_1^{1/2} + \frac{1}{2c_1^{1/2}a_2a_3}\right) a_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1+\frac{1}{c_1A_{1,2}^2}}{\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2c_1^{1/2}A_3}}\left(0.5c_1^{1/2}+\frac{1}{2c_1^{1/2}A_{1,2}A_3}\right)(\rho+3)\log\alpha_2\\
&=: G(B_3^{(2)})\cdot\log\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Analogno definiramo $G(B_3)=\max\{G(B_3^{(1)}),G(B_3^{(2)})\}$ pa je

$$B_3 < G(B_3)\cdot\log\alpha_2.$$

Primijetimo da zbog izbora da su donje granice za a_1 i a_2 jednake, vrijedi da su jednake vrijednosti izraza $G(B_2^{(1)})=G(B_3^{(1)})$ i $G(B_2^{(2)})=G(B_3^{(2)})$ pa je i $G(B_2)=G(B_3)$.

Promotrimo sada slučaj (A2). Ako vrijedi taj slučaj, onda postoje cijeli brojevi r_1, s_1, t_1 i t_2 takvi da je $r_1s_1\neq 0$ te takvi da vrijedi

$$(t_1b_1+r_1b_3)s_1=r_1b_2t_2,\quad \gcd(r_1,t_1)=\gcd(s_1,t_2)=1,$$

i

$$|r_1s_1|\leq\delta B_1,\quad |s_1t_1|\leq\delta B_2,\quad |r_1t_2|\leq\delta B_3,\quad \delta=\gcd(r_1,s_1).$$

Stavimo $r_1=\delta r_1'$ i $s_1=\delta s_1'$. Kako je $b_1=2h$, $b_2=2j$ i $b_3=1$ imamo

$$s_1't_1\cdot 2h+\delta r_1's_1'=r_1't_2\cdot 2j,$$

i

$$|\delta r_1's_1|\leq B_1,\quad |s_1't_1|\leq B_2,\quad |r_1't_2|\leq B_3.$$

Promotrimo slučaj kada je $t_2=0$. Tada imamo $\gcd(s_1,t_2)=s_1=1$ i iz $(t_1b_1+r_1b_3)s_1=0$, jer je $s_1\neq 0$, dobijemo $t_1b_1=-r_1b_3$, tj. $2ht_1=-r_1$. Kako je $\gcd(r_1,t_1)=1$, zaključujemo da je $t_1=\mp 1$ i $r_1=\pm 2h$. Također, vidimo da onda mora vrijediti

$$|r_1s_1|=2h\leq B_1<\frac{\left(c_1A_{1,2}+\frac{1}{A_3}\right)(c_1A_{1,2}A_3+1)}{\chi c_1^{3/2}A_{1,2}^2A_3-c_1A_{1,2}A_3}a_3.$$

Budući da je $\chi=2$ i $A=\min\{a_1,a_3\}>1$, imamo da je

$$c_1=\max\left\{(\chi ML)^{2/3},\sqrt{2ML/A}\right\}=(2ML)^{2/3}.$$

Ako uvrstimo rubove intervala unutar kojih su parametri M i L, dobijemo da je

$$260<c_1<966.$$

Uvrštavajući te vrijednosti, donje granice $A_{1,2}>48.9$, $A_3>8\log 10^5>92.1$ i da je

$a_3 < 8(1 + \frac{0.08675}{\log 10^5} \cdot 13) \log c$, dobijemo da je

$$B_1 < 979.86 \log c.$$

Dakle, vrijedi da je $2h < 979.86 \log c$. Iz Propozicije 3.23 imamo da je $h > 0.666662\sqrt{ac} \geq 0.666662\sqrt{c}$, pa vidimo da u ovom slučaju vrijedi

$$\sqrt{c} < 734.91 \log c.$$

Rješavajući nejednadžbu po c dobijemo da je $c < 1.9701 \cdot 10^8$. Vidjet ćemo da je ovo bolja gornja granica za c nego u slučaju kada je $t_2 \neq 0$.

Pretpostavimo sada da je $t_2 \neq 0$. Pomnožimo linearnu formu Λ_1 s $r_1' t_2$ da dobijemo

$$r_1' t_2 \Lambda_1 = 2h \log\left(\alpha_1^{r_1' t_2} \cdot \alpha_2^{-s_1' t_1}\right) - \log\left(\alpha_2^{\delta r_1' s_1'} \cdot \alpha_3^{-r_1' t_2}\right). \tag{3.38}$$

Na ovu linearnu formu u dva logaritma želimo primijeniti sljedeći teorem iz [43].

Teorem 3.27 (Laurent)**.** *Neka su a_1', a_2', h', ϱ i μ realni brojevi takvi da je $\varrho > 1$ i $1/3 \leq \mu \leq 1$. Stavimo*

$$\sigma = \frac{1+2\mu-\mu^2}{2}, \quad \lambda' = \sigma \log \varrho, \quad H = \frac{h'}{\lambda'} + \frac{1}{\sigma},$$
$$\omega = 2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4H^2}}\right), \quad \theta = \sqrt{1 + \frac{1}{4H^2}} + \frac{1}{2H}.$$

Promotrimo linearnu formu

$$\Lambda = b_2 \log \gamma_2 - b_1 \log \gamma_1,$$

gdje su b_1 i b_2 pozitivni cijeli brojevi. Pretpostavimo da su γ_1 i γ_2 multiplikativno nezavisni. Stavimo $D = [\mathbb{Q}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{Q}]/[\mathbb{R}(\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R}]$, i pretpostavimo da je

$$h' \geq \max\left\{D\left(\log\left(\frac{b_1}{a_2'} + \frac{b_2}{a_1'}\right) + \log \lambda' + 1.75\right) + 0.06, \lambda', \frac{D \log 2}{2}\right\},$$
$$a_i' \geq \max\{1, \varrho|\log \gamma_i| - \log|\gamma_i| + 2Dh(\gamma_i)\}, \quad i = 1, 2,$$
$$a_1' a_2' \geq \lambda'^2.$$

Tada je

$$\log|\Lambda| \geq -C\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1' a_2' - \sqrt{\omega\theta}\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right) - \log\left(C'\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1' a_2'\right)$$

gdje je

$$C = \frac{\mu}{\lambda'^3\sigma}\left(\frac{\omega}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{9} + \frac{8\lambda'\omega^{5/4}\theta^{1/4}}{3\sqrt{a_1'a_2'}H^{1/2}} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a_1'} + \frac{1}{a_2'}\right)\frac{\lambda'\omega}{H}}\right)^2,$$
$$C' = \sqrt{\frac{C\sigma\omega\theta}{\lambda'^3\mu}}.$$

Da bismo na linearnu formu (3.38) mogli primijeniti Teorem 3.27 trebamo provjeriti da su zadovoljeni svi uvjeti tog teorema. Kako su α_1, α_2 i α_3 multiplikativno nezavisni algebarski brojevi, onda su takvi i γ_1 i γ_2.

Rezultat koji nam daje manju gornju granicu za h od $h < G(h)\log\alpha_2\log c$ nam ne utječe na konačnu odluku o gornjoj granici za h, pa ćemo ovdje pretpostaviti da je $h \geq G(h)\log\alpha_2\log c$ i probati dobiti najbolji mogući rezultat u tom slučaju.

Koristeći svojstvo da za logaritamske visine algebarskih brojeva a i b vrijede svojstva $h(ab) \leq h(a) + h(b)$ i $h(a/b) \leq h(a) + h(b)$, pokaže se da je

$$\begin{aligned}
h(\gamma_1) &\leq 0.5B_1\log\alpha_2 + B_3\log c \\
&< (0.5G(B_1) + G(B_3))\log\alpha_2\log c =: G(h(\gamma_1))\cdot\log\alpha_2\log c, \\
h(\gamma_2) &\leq 0.5B_2\log\alpha_2 + 0.5B_3\log\alpha_1 \\
&\leq B_3\log\alpha_2 < G(B_3)\cdot\log^2\alpha_2 =: G(h(\gamma_2))\cdot\log^2\alpha_2, \\
|\log\gamma_1| &\leq B_1\log\alpha_2 + 0.694B_3 \\
&\leq \left(G(B_1) + 0.694\frac{G(B_3)}{\log 10^5}\right)\log\alpha_2\log c \\
&=: G(|\log\gamma_1|)\cdot\log\alpha_2\log c
\end{aligned}$$

i na kraju

$$\begin{aligned}
|\log\gamma_2| &< \frac{B_2 + |\log\gamma_1|}{2h} < \frac{G(B_2)\log\alpha_2 + G(|\log\gamma_1|)\cdot\log\alpha_2\log c}{2h} \\
&< \frac{\left(\frac{G(B_2)}{\log 10^5} + G(|\log\gamma_1|)\right)\log\alpha_2\log c}{2G(h)\cdot\log\alpha_2\log c} \\
&= \frac{\frac{G(B_2)}{\log 10^5} + G(|\log\gamma_1|)}{2G(h)} =: G(|\log\gamma_2|).
\end{aligned}$$

Sada promatramo što treba vrijediti za parametre ϱ i μ tako da zadovoljavaju uvjete teorema i tako da na kraju dobijemo što bolju ocjenu za h. Prvo trebamo odabrati a_i', $i = 1, 2$, takve da je

$$a_i' \geq |\log\gamma_i|(\varrho + 1) + 8h(\gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Možemo odabrati

$$a_1' = (G(|\log \gamma_1|)(\varrho + 1) + 8G(h(\gamma_1))) \log \alpha_2 \log c =: G(a_1') \log \alpha_2 \log c$$

i

$$a_2' = \left(\frac{G(|\log \gamma_2|)}{\log^2 10^{5/2}} (\varrho + 1) + 8G(h(\gamma_2)) \right) \log^2 \alpha_2 =: G(a_2') \log^2 \alpha_2.$$

Imamo da je $b_1 = 1$ i $b_2 = 2h$ u ovoj linearnoj formi u logaritmima pa je

$$\frac{b_1}{a_2'} + \frac{b_2}{a_1'} \leq \frac{\frac{2}{G(a_2')} + \frac{2h}{G(a_1')}}{\log \alpha_2 \log c} \leq \frac{h \left(\frac{2}{210.81 \cdot G(a_2')} + \frac{2}{G(a_1')} \right)}{\log \alpha_2 \log c},$$

gdje smo koristili da je $\log c < 2 \log \alpha_2$ i da zbog $h > 0.666662\sqrt{ac}$ i $c > 10^5$ vrijedi $h > 210.81$. Označimo

$$G(F) := \frac{2}{210.81 \cdot G(a_2')} + \frac{2}{G(a_1')}$$

i

$$F := \frac{G(F) \cdot h}{\log \alpha_2 \log c}.$$

Kako je $\frac{D \log 2}{2} = 2 \log 2 < 1.4$ i $\lambda' < \frac{3}{2} \log \varrho < 7$, jer će nam biti dovoljno promatrati $\varrho \leq 100$, možemo uzeti

$$h' = 4(\log F + \log \lambda') + 7.06.$$

Zbog pretpostavke da je $h \geq G(h) \log \alpha_2 \log c$, vrijedi $F > G(F) \cdot G(h)$ pa je

$$H = \frac{h'}{\lambda'} + \frac{1}{\sigma} > \frac{4 \log(G(F) \cdot G(h))}{\lambda'} + \frac{1}{\sigma}.$$

Po izrazima iz Teorema 3.27 možemo izračunati ω, θ, C i C'. Vrijedi

$$\log |r_1' t_2 \Lambda_1| > \, - C \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right)^2 a_1' a_2' - \sqrt{\omega\theta} \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right) - \log \left(C' \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right)^2 a_1' a_2' \right).$$

Pretpostavimo da je $C' \leq 3C$ (to možemo staviti u uvjet algoritma pretrage parametara). Vrijedi $\log 3x < 10^{-3}x$ za $x > 10343$, a pokaže se da će vrijediti $a_1' a_2' > 10343$ u svakom od naših odabira parametara i također $\sqrt{\omega\theta} < 3$. Također je $\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right) > 1$, pa možemo promatrati

$$\begin{aligned} \log |r_1' t_2 \Lambda_1| &> -C a_1' a_2' \left(1 + 10^{-3} + \frac{3}{C a_1' a_2'} \right) \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right)^2 \\ &> -C G(a_1') G(a_2') \left(1.001 + 3 \cdot 10^{-4} C^{-1} \right) \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma} \right)^2 (\log \alpha_2)^3 \log c \end{aligned}$$

Želimo odrediti realan broj k za koji će vrijediti $\log \alpha_2 < k \cdot \log \alpha_1$, tj. ako iskoristimo nejednakosti $\alpha_2 < \sqrt{ac+4}$ i $\sqrt{ab} < \alpha_1$, vidimo da možemo promatrati nejednakost $ac + 4 < (ab)^k$. Po Propoziciji 3.13 imamo da je $c < 237.952b^3a^{-1}$, pa je $ac < 237.952b^3$. Dakle, dovoljno je promatrati nejednakost

$$237.952b^3 + 4 < (ab)^k.$$

Imamo da je

$$\frac{\log(237.952b^3+4)}{\log(ab)} < \frac{\log(237.952b^3+4)}{\log(b)} < k.$$

Izraz $\frac{\log(237.952b^3+4)}{\log(b)}$ je padajući u b pa, jer je $b > 10^5$, možemo uzeti

$$k = 3.4753 > \frac{\log(237.952 \cdot 10^{15} + 4)}{\log(10^5)}.$$

Za linearnu formu u logaritmima koju promatramo nam vrijedi i

$$\log|r_1' t_2 \Lambda_1| < \log B_3 - 4j\log\alpha_2 < \log B_3 - 4h\log\alpha_1,$$

i jer je $\log\alpha_2 < 3.4753\log\alpha_1$ imamo

$$\begin{aligned}
h &< \frac{3.4753}{4}\left(CG(a_1')G(a_2')\left(1.001 + 3\cdot 10^{-4}C^{-1}\right) + \frac{\log G(B_3) + \log\log\sqrt{ac+4}}{\log 10^5(\log 10^{5/2})^3}\right) \\
&\cdot \left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 \log^2\alpha_2 \log c \\
&=: G(h2)\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 \log^2\alpha_2\log c.
\end{aligned}$$

Množeći ovu nejednakost s $\frac{G(F)}{\log\alpha_2\log c}$ dobijemo

$$F < G(h2)\cdot G(F)\left(4\log F + 4\log\lambda' + 7.06 + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2\log\alpha_2.$$

Ako iskoristimo nejednakost $\log\alpha_2 < \log\sqrt{ac+4}$ i uvrstimo gornju granicu za produkt ac, dobit ćemo gornju granicu za F, označimo je s F_1, tj. vrijedi $F < F_1$. Sada iz definicije za F imamo

$$h < \frac{F_1}{G(F)}\log\alpha_2\log c$$

pa smo time dobili gornju granicu za h za koju naravno želimo da bude minimalna.

Promotrimo preostali slučaj (A1). Postoje cijeli brojevi r_0 i s_0 takvi da je $r_0b_2 = s_0b_1$, i vidimo da vrijedi

$$|r_0| \leq B_3, \quad |s_0| \leq B_2.$$

Ako Λ_1 pomnožimo s r_0 dobijemo

$$\begin{aligned} r_0\Lambda_1 &= 2hr_0 \log \alpha_1 - 2jr_0 \log \alpha_2 + r_0 \log \alpha_3 \\ &= 2h \log\left(\alpha_1^{r_0}\alpha_2^{-s0}\right) - \log \alpha_3^{-r_0}, \end{aligned}$$

dakle, možemo uzeti $\gamma_1 = \alpha_3^{-r_0}$ i $\gamma_2 = \alpha_1^{r_0}\alpha_2^{-s0}$.

Za visine algebarskih brojeva γ_1 i γ_2 i za logaritam od γ_1 dobijemo

$$\begin{aligned} h(\gamma_1) &\leq |r_0|h(\alpha_3) \leq B_3 \log c, \\ h(\gamma_2) &\leq |r_0|h(\alpha_1) + |s_0|h(\alpha_2) \\ &< 0.5B_3 \log \alpha_1 + 0.5B_2 \log \alpha_2 < B_3 \log \alpha_2, \\ |\log \gamma_1| &= |r_0| \log \alpha_3 < B_3 \log \alpha_3. \end{aligned}$$

Vidimo da su ove ocjene bolje nego u slučaju (A2) pa će i konačna gornja granica za h, koju dobijemo preko Teorema 3.27 biti bolja, pa je dovoljno promatrati lošiji slučaj (A2).

Opisani postupak smo realizirali u računalni algoritam te smo promatrali parametre: $\chi = 2$ fiksan, $\rho \in [5.5, 14]$ s korakom 0.5, $L \in [700, 1500]$ s korakom 1, $M \in [3, 10]$ s korakom 0.1 te za svaki izbor tih parametara nakon što izračunamo vrijednost gornje granice za h po Teoremu 3.26, odabiremo $\varrho \in [40, 85]$ s korakom 1 i $\mu \in [0.44, 0.76]$ s korakom 0.01 takve da je novi koeficijent uz h najmanji mogući. Ovaj izbor parametara se pokazao dovoljan za naše potrebe, što će biti očito i iz konkretnih rezultata.

U prvoj realizaciji algoritama koristili smo gornje granice za ac i h iz Propozicije 3.25, $ac < 1.08915 \cdot 10^{34}$ i $h < 6.95745 \cdot 10^{16}$, te smo dobili za parametre $\rho = 11.5$, $M = 4.7$ i $L = 1043$ da je $h < 5.66642 \cdot 10^9 \log \alpha_2 \log c$, te za $\varrho = 59$ i $\mu = 0.63$ da je $h < 4.85941 \cdot 10^{10} \log \alpha_2 \log c$ u slučaju (A2). Iz ovoga dobijemo $ac < 2.42372 \cdot 10^{28}$ i $h < 1.03788 \cdot 10^{14}$.

Sada te gornje granice iskoristimo kao nove vrijednosti za provedbu algoritma i dobijemo za parametre $\rho = 11$, $M = 4.6$, $L = 901$ da je $h < 4.13857 \cdot 10^9 \log \alpha_2 \log c$, te za $\varrho = 59$, $\mu = 0.63$ da je $h < 3.53075 \cdot 10^{10} \log \alpha_2 \log c$. Iz ovoga dobijemo $ac < 1.22705 \cdot 10^{28}$ i $h < 7.38475 \cdot 10^{13}$. Ponovimo postupak još četiri puta i dobijemo da je $h < 3.46289 \cdot 10^{10} \log \alpha_2 \log c$. Slijedi da je $ac < 1.17732 \cdot 10^{28}$ i $h < 7.23357 \cdot 10^{13}$.

Propozicija 3.28. *Neka je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka, takva da je $a < b < c < d < e$. Tada je*

$$ac < 1.17732 \cdot 10^{28}.$$

Također

$$h < 7.23357 \cdot 10^{13}$$

i

$$h < 3.46289 \cdot 10^{10} \log \alpha_2 \log c.$$

3.5 Klasifikacija $D(4)$-trojki

Kao što smo do sada mogli vidjeti, proširenje $D(4)$-para s elementom $c = a + b + 2r$ je najmanje proširenje većim elementom. Takve trojke nazivamo regularnim trojkama te ćemo u ovom potpoglavlju klasificirati trojke $\{a, b, c\}$ s obzirom na to koliko su „udaljene” od regularne trojke. Podsjetimo se definicija regularne trojke i regularne četvorke.

Definicija 3.29. *$D(4)$-trojku $\{a, b, c\}$, $a < b < c$, nazivamo Eulerova ili regularna trojka ako je $c = a + b + 2r$.*

$D(4)$-četvorku $\{a, b, c, d\}$, nazivamo regularna četvorka ako je $d = d_+(a, b, c)$.

Ako je $\{a, b, c\}$ regularna trojka, lako se provjeri da je $d_+(a, b, c) = rst$ i da imamo $s = a + r$ i $t = b + r$.

Propozicija 3.30. *Neka je $\{a, b, c\}$ $D(4)$-trojka, $a < b < c$. Tada vrijedi*

$$a = d_-(b, c, d_+(a, b, c)), \quad b = d_-(a, c, d_+(a, b, c)), \quad c = d_-(a, b, d_+(a, b, c)).$$

Također, ako $\{a, b, c\}$ nije regularna trojka, onda je

$$c = d_+(a, b, d_-(a, b, c)),$$

odakle slijedi da je $\{a, b, d_-(a, b, c), c\}$ regularna četvorka.

Dokaz. Neka je zadana funkcija $d_{\{a,b\}}(x) := d_+(a, b, x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ s

$$d_{\{a,b\}}(x) = d_+(a, b, x) = a + b + x + \frac{1}{2}(abx + \sqrt{(ab + 4)(ax + 4)(bx + 4)}).$$

Neka je y realan broj, takav da je $y > b$. Riješimo jednadžbu

$$y = d_+(a, b, x)$$

u nepoznanici x. Kvadriramo li jednadžbu dobijemo

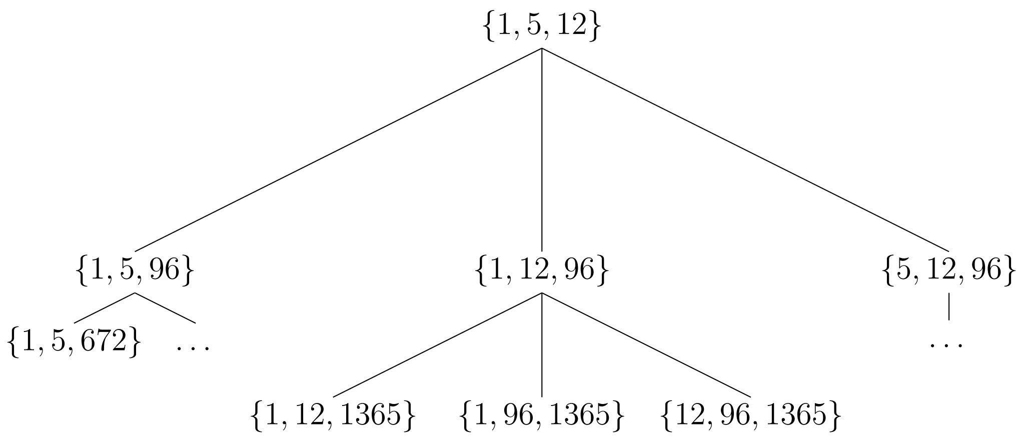
$$x^2 - (y(ab + 2) + 2(a + b))x + (a + b - y)^2 - 4(ab + 4) = 0$$

pa je

$$x = a + b + y + \frac{1}{2}(yab \pm \sqrt{(y(ab + 2) + 2(a + b))^2 - 4((a + b - y)^2 - 4(ab + 4))})$$

i nakon sređivanja izraza pod korijenom

$$x = a + b + y + \frac{1}{2}(yab \pm \sqrt{(ab + 4)(ay + 4)(by + 4)}).$$



Slika 3.1: Stablo koje sadrži $D(4)$-trojke generirane regularnom trojkom $\{1, 5, 12\}$.

Odabiremo rješenje za koje vrijedi $x < y$ pa vidimo da za njega vrijedi $x = d_-(a, b, y) = d_-(a, b, d_+(a, b, x))$. Uvrštavajući element c na mjesto varijable x, dobijemo da je $c = d_-(a, b, d_+(a, b, c))$, a zamjenom para $\{a, b\}$ s $\{b, c\}$ i $\{a, c\}$ i ponavljanjem postupka, dokažemo i preostale dvije formule. Posljednja formula se dokaže koristeći sličan postupak i Propoziciju 2.1. □

Opišimo ideju klasifikacije $D(4)$-trojki. Bilo koja $D(4)$-trojka $\{a, b, c\}$ može se proširiti do $D(4)$-četvorke većim elementom $d_+(a, b, c)$. Dodavajući novi element d_+ parovima sadržanim u trojki $\{a, b, c\}$ vidimo da imamo tri nove $D(4)$-trojke

$$\{a, b, d_+\}, \quad \{a, c, d_+\}, \quad \{b, c, d_+\},$$

za koje ćemo onda reći da su jedan korak dalje od regularne trojke nego što je bila originalna trojka $\{a, b, c\}$. Promotrimo na konkretnom primjeru.

Primjer 3.31. *$D(4)$-par $\{1, 5\}$ se može proširiti do regularne trojke elementom 12. Za tu trojku imamo $d_+ = 96$ te u stablu na Slici 3.1 vidimo tri nove trojke koje sadrže taj novi element. Za njih ćemo reći da su stupnja 1. Postupak se može nastaviti za svaku dobivenu trojku, te na taj način dobijemo nove trojke za koje ćemo reći da su stupnja 2.*

Iz prethodnog primjera lako možemo ilustrirati i obrnuti postupak. Ako uzmemo neku neregularnu $D(4)$-trojku, npr. $\{12, 96, 1365\}$, možemo izračunati $d_-(12, 96, 1365) = 1$. Ako iz novodobivene četvorke $\{1, 12, 96, 1365\}$ odbacimo maksimalni element, dobijemo trojku $\{1, 12, 96\}$ koja je prethodila trojki $\{12, 96, 1365\}$, i koja je jedan korak bliže regularnoj trojki. Definirajmo sada formalno ovako opisani postupak.

Definicija 3.32. *Definiramo ∂ operator na skupu $D(4)$-trojki na sljedeći način,*

$$\partial(\{a, b, c\}) = \begin{cases} \{a, b, c\}, & \textit{ako je } \{a,b,c\} \textit{ regularna trojka} \\ \{a, b, c, d_-(a, b, c)\} \setminus \{\max(a, b, c)\}, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Za $D \in \mathbb{N}_0$ definiramo operator ∂_{-D} na skupu $D(4)$-trojki rekurzivno,

1. *za $D(4)$-trojku $\{a, b, c\}$ definiramo*

$$\partial_0(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\},$$

2. *rekurzivno definiramo*

$$\partial_{-D}(\{a, b, c\}) = \partial(\partial_{-(D-1)}(\{a, b, c\})), \qquad \text{za } D \geq 1.$$

Označavamo i

$$d_{-D}(a, b, c) = d_-(\partial_{-(D-1)}(\{a, b, c\})).$$

Posebno, $\partial = \partial_{-1}$ i

$$\partial_{-2}(\{a, b, c\}) = \partial(\partial_{-1}(\{a, b, c\})).$$

Napomena 3.33. *U definiciji elementa $d_{-D}(a, b, c)$ se s desne strane javio izraz oblika $d_-(\{a, b, c\})$ kojeg poistovjećujemo s $d_-(a, b, c)$.*

Najčešće ćemo promatrati one trojke u kojima je $a < b < c$ te ako je to neregularna $D(4)$-trojka, onda je $\partial(\{a, b, c\}) = \{a, b, d_-(a, b, c)\}$.

Također primijetimo da primjenjujući operator ∂ na nekoj fiksnoj trojki $\{a, b, c\}$ dobijemo beskonačan niz $D(4)$-trojki

$$\partial_0(\{a, b, c\}),\ \partial_{-1}(\{a, b, c\}),\ \partial_{-2}(\{a, b, c\}), \ldots, \partial_{-D}(\{a, b, c\}), \ldots$$

U sljedećoj propoziciji ćemo pokazati da za svaku $D(4)$-trojku postoji nenegativan cijeli broj D za koji ovaj niz postaje stacionaran počevši od D-tog elementa, koji je jednak jedinstvenoj regularnoj $D(4)$-trojki.

Propozicija 3.34. *Za svaku fiksnu $D(4)$-trojku $\{a, b, c\}$ postoji minimalni prirodni broj $D < \frac{\log(abc)}{\log 5}$ takav da je $d_{-(D+1)}(a, b, c) = 0$.*

Dokaz. Za regularnu trojku $\{a, b, c\}$ imamo da za svaki $D \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $d_{-(D+1)}(a, b, c) = 0$ pa je minimalni takav $D = 0$.

Neka je $\{a, b, c\}$ neregularna $D(4)$-trojka. Po Propoziciji 3.30 slijedi da je $D(4)$-četvorka $\{a, b, d_-(a, b, c), c\}$ regularna pa po Lemi 3.6 imamo $c > abd_-(a, b, c)$. Kako je $ab \geq 5$, vrijedi $ab \cdot d_-(a, b, c) < \frac{abc}{5}$. Nastavljajući postupak, za $\{a', b', c'\} := \partial_{-k}(\{a, b, c\})$ vidimo da vrijedi $a'b'c' < \frac{abc}{5^k}$. S obzirom na to da postoji k takav da je $5^k > abc$, to u nekom koraku moramo dobiti $a'b'c' = 0$, tj. postoji $D < \frac{\log abc}{\log 5}$ takav da je $\{a', b', c'\} = \partial_{-D}(\{a, b, c\})$ regularna trojka, pa je onda $d_{-(D+1)}(a, b, c) = 0$. □

Definicija 3.35. *Za $D(4)$-trojku $\{a, b, c\}$ ćemo reći da ima stupanj D i da je generirana regularnom trojkom $\{a', b', c'\}$ ako je D minimalan nenegativan cijeli broj takav da je*

$d_{-(D+1)}(a,b,c) = 0$ *i* $\partial_{-D}(\{a,b,c\}) = \{a',b',c'\}$. *Ako je trojka* $\{a,b,c\}$ *stupnja* D *pišemo* $\deg(a,b,c) = D$.

Napomena 3.36. *Ako promotrimo stablo sa Slike 3.1, vidimo da stupanj neke trojke iz tog stabla odgovara udaljenosti čvora do korijena stabla.*

U ostatku ovog poglavlja dovršit ćemo dokaz nepostojanja $D(4)$-petorke tako da ćemo promatrati proširenja $D(4)$-trojki do $D(4)$-petorke. Trojke ćemo promatrati po prethodno opisanoj klasifikaciji, prvo ćemo promatrati trojke stupnja 0, što su regularne trojke, zatim neregularne trojke stupnja 1, a u trećem slučaju ćemo promatrati sve preostale $D(4)$-trojke, a to su neregularne trojke stupnja većeg ili jednakog 2.

3.6 Proširenje regularne trojke do $D(4)$-petorke

Neka je $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$-petorka, takva da je $a<b<c<d<e$. Vidjeli smo da po [29] imamo $d = d_+(a,b,c) = a+b+c+\frac{1}{2}(abc+rst)$ pa je

$$ad+4 = x^2, \quad bd+4 = y^2, \quad cd+4 = z^2,$$
$$x = \frac{at+rs}{2}, \quad y = \frac{rt+bs}{2}, \quad z = \frac{cr+st}{2}.$$

Ako je $\{a,b,c\}$ regularna trojka, tj. $c = a+b+2r$, onda imamo i da je $s = a+r$, $t = b+r$ i $d = rst$ pa dobijemo

$$\begin{aligned}
x &= \frac{at+rs}{2} = \frac{a(b+r)+r(a+r)}{2} = \frac{2ar+r^2+ab}{2} = \frac{2ar+2r^2-4}{2} \\
&= ar+r^2-2 = r(a+r)-2 = rs-2, \\
y &= \frac{rt+bs}{2} = \frac{r(b+r)+b(a+r)}{2} = \frac{2br+r^2+ab}{2} = \frac{2br+2r^2-4}{2} \\
&= br+r^2-2 = r(b+r)-2 = rt-2, \\
z &= \frac{cr+st}{2} = \frac{(a+b+2r)r+st}{2} = \frac{ar+br+2r^2+st}{2} \\
&= \frac{ar+br+r^2+ab+4+st}{2} = \frac{(a+r)(b+r)+4+st}{2} \\
&= \frac{2st+4}{2} = st+2.
\end{aligned}$$

Ove relacije ćemo koristiti kako bismo dokazali neke posebne tvrdnje koje vrijede za petorku u kojoj je $c = a+b+2r$.

Navedimo prvo pomoćni rezultat koji slijedi iz Propozicije 2.8.

Korolar 3.37. *Neka je* $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$*-petorka. Tada vrijedi*

$$a\varepsilon l^2 + xl \equiv b\varepsilon m^2 + ym \equiv c\varepsilon n^2 + zn \pmod{d}.$$

Pokažimo sada vezu između indeksa n i elementa r u ovom slučaju.

Lema 3.38. *Ako je $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$-petorka, $a < b < c < d < e$, takva da je $c = a + b + 2r$, onda je $2n > r$.*

Dokaz. Iz Korolara 3.37 vidimo da je

$$a\varepsilon l^2 + xl \equiv c\varepsilon n^2 + zn \pmod{d}.$$

Pretpostavimo da vrijedi jednakost, tj.

$$a\varepsilon l^2 + xl = c\varepsilon n^2 + zn.$$

Tada bismo imali

$$\begin{aligned} al^2 - cn^2 &= \varepsilon(zn - xl) \quad / \cdot \varepsilon(zn + xl) \\ \epsilon(zn + xl)(al^2 - cn^2) &= d(cn^2 - al^2) + 4(n^2 - l^2) \\ (al^2 - cn^2)(\epsilon(zn + xl) + d) &= 4(n^2 - l^2). \end{aligned}$$

Po Lemi 3.5 i Lemi 3.21 vidimo da je $n < l \leq 2n$, pa je $n \neq l$ i $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{l} < 1$, iz čega zaključujemo da $al^2 - cn^2 | 4(n^2 - l^2)$, tj. $al^2 - cn^2 \leq 4(l^2 - n^2)$. Dakle, vrijedi

$$\left| \frac{a}{c} - \left(\frac{n}{l}\right)^2 \right| \leq \frac{4}{c}\left(1 - \left(\frac{n}{l}\right)^2\right).$$

Imamo $c = a + b + 2r > a + a + 2a = 4a$ pa je $\frac{a}{c} < \frac{1}{4} \leq \left(\frac{n}{l}\right)^2$. Sada je

$$\frac{1}{4} - \frac{a}{c} < \left(\frac{n}{l}\right)^2 - \frac{a}{c} \leq \frac{4}{c}\left(1 - \left(\frac{n}{l}\right)^2\right) \leq \frac{3}{c}$$

tj. dobili smo da treba vrijediti $c < 4a + 12$. No, jer po Lemi 3.7 vrijedi nejednakost $b \geq a + 57\sqrt{a}$, imamo

$$4a + 57\sqrt{a} < a + b + 2r < 4a + 12,$$

a to ne može vrijediti jer je $a \geq 1$. Budući da ne vrijedi jednakost u kongruenciji, vidimo da $d | al^2 - xl - cn^2 + zn$ pa je

$$d \leq |al^2 - xl - cn^2 + zn| \leq |al^2 - cn^2| + |xl - zn|.$$

Promotrimo,

$$\frac{a}{c} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leq 2\left(\frac{n}{l}\right)^2$$

odakle vidimo da vrijedi $al^2 < 2cn^2$ pa je $-cn^2 < al^2 - cn^2 < cn^2$, tj. $|al^2 - cn^2| < cn^2$.

Također vrijedi $x < z$, pa je

$$\frac{x}{2z} < \frac{1}{2} \leq \frac{n}{l}$$

i imamo $|xl - zn| < zn$. Ovime smo dobili da mora vrijediti

$$d < cn^2 + zn.$$

Pretpostavimo suprotno, da vrijedi nejednakost $n \leq \frac{r}{2}$. Imamo $d = rst = r(a+r)(b+r)$ i $z = st + 2 = (a+r)(b+r) + 2$ pa bi vrijedilo

$$\begin{aligned}
r(a+r)(b+r) &< (a+b+2r)\frac{r^2}{4} + ((a+r)(b+r)+2)\frac{r}{2},\\
\frac{r}{2}(a+r)(b+r) &< (a+b)\frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{2} + r,\\
\frac{abr}{2} + (a+b)\frac{r^2}{4} &< r,
\end{aligned}$$

što očito ne može biti. Zaključujemo da je $n > \frac{r}{2}$. □

Lema 3.39. *Neka je $\{a,b,c,d,e\}$ $D(4)$-petorka takva da vrijedi $a < b < c < d < e$ i $c = a + b + 2r$. Tada je*

$$\begin{aligned}
8l &\equiv 2(1-(-1)^j)(-\varepsilon c) \pmod{s}, & 8n &\equiv 2(1-(-1)^j)\varepsilon a \pmod{s},\\
8m &\equiv 2(1-(-1)^k)(-\varepsilon c) \pmod{t}, & 8n &\equiv 2(1-(-1)^k)\varepsilon b \pmod{t},
\end{aligned}$$

gdje je $\varepsilon = \pm 1$.

Dokaz. Promotrimo jednadžbu (3.26)

$$Z\sqrt{a} + X\sqrt{c} = (2\sqrt{a} + 2\sqrt{c})\left(\frac{s+\sqrt{ac}}{2}\right)^{2j}.$$

Postupkom kao u Lemi 3.37 izvedemo da je

$$X_0 = 2, \quad X_2 = s^2 - 2 + sa, \quad X_{2j+2}^{(a,c)} = (s^2-2)X_{2j}^{(a,c)} - X_{2j-2}^{(a,c)}.$$

Dokažimo sada indukcijom da je $X_{2j} \equiv 2(-1)^j \pmod{s}$. Tvrdnja je za bazu indukcije $j = 0$ i $j = 1$ očito zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $j \leq J$ i promotrimo da onda za korak $j = J + 1$ imamo

$$\begin{aligned}
X_{2(J+1)} &= (s^2-2)X_{2J}^{(a,c)} - X_{2J-2}^{(a,c)}\\
&\equiv -2 \cdot 2(-1)^J - 2(-1)^{J-1} \pmod{s}\\
&\equiv 4(-1)^{J+1} - 2(-1)^{J+1} \equiv 2(-1)^{J+1} \pmod{s}.
\end{aligned}$$

Na analogan način dokažemo da je

$$Z_{2j}^{(a,c)} \equiv 2(-1)^j \pmod{s}.$$

Također iz (3.27) dobijemo

$$\begin{aligned} Y_{2k}^{(b,c)} &\equiv 2(-1)^k \pmod{t}, \\ Z_{2k}^{(b,c)} &\equiv 2(-1)^k \pmod{t}. \end{aligned}$$

Promotrimo (3.28),

$$W\sqrt{a} + X\sqrt{d} = (2\varepsilon\sqrt{a} + 2\sqrt{d}) \left(\frac{x + \sqrt{ad}}{2} \right)^{2l}.$$

Iz nje izvedemo

$$X_0^{(a,d)} = 2, \quad X_2^{(a,d)} = (x^2 - 2) + \varepsilon x a, \quad X_{2l+2}^{(a,d)} = (x^2 - 2) X_{2l}^{(a,d)} - X_{2l-2}^{(a,d)}$$

pa možemo lako indukcijom dokazati da je

$$X_{2l}^{(a,d)} \equiv 2 + \varepsilon axl (\text{mod } d).$$

Naime, za $l = 0$ je očito da tvrdnja vrijedi, za $l = 1$ imamo $X_2 = (x^2 - 2) + \varepsilon xa = ad + 2 + \varepsilon xa \equiv 2 + \varepsilon ax1 \pmod{d}$. Ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $l \leq L$, možemo izvesti

$$\begin{aligned} X_{2(L+1)} &= (ad + 2) X_{2L}^{(a,d)} - X_{2L-2}^{(a,d)} \\ &\equiv 4 + 2\varepsilon axL - (2 + \varepsilon ax(L-1)) \pmod{d} \\ &\equiv 2 + \varepsilon ax(2L - L + 1) \equiv 2 + \varepsilon ax(L+1) \pmod{d}. \end{aligned}$$

Slično za (3.30) dobijemo

$$Z_{2n}^{(c,d)} \equiv 2 + \varepsilon czn \pmod{d}.$$

Zbog toga što je $d = rst$, iz prethodnih kongruencija zaključujemo

$$\begin{aligned} X_{2l}^{(a,d)} &\equiv 2 + \varepsilon axl \pmod{s}, \\ Z_{2n}^{(c,d)} &\equiv 2 + \varepsilon czn \pmod{s}. \end{aligned}$$

Kako je $X_{2j}^{(a,c)} = X_{2l}^{(a,d)}$, imamo

$$\begin{aligned} 2(-1)^j &\equiv 2 + \varepsilon axl \pmod{s} \\ \varepsilon axl &\equiv 2((-1)^j - 1) (\text{mod } s) \quad / \cdot \varepsilon c \end{aligned}$$

$$acxl \equiv 2((-1)^j - 1)(\varepsilon c)(\text{mod } s).$$

Kako je $ac \equiv -4 \pmod s$, što vidimo iz $s^2 = ac + 4$, imamo

$$-4xl \equiv 2((-1)^j - 1)(\varepsilon c)(\text{mod } s),$$

a jer je $x \equiv -2 \pmod s$, što slijedi iz $x = rs - 2$, imamo konačno

$$8l \equiv 2((-1)^j - 1)(\varepsilon c)(\text{mod } s).$$

Na sličan način, koristeći $z = st + 2$, iz $Z_{2j}^{(a,c)} = Z_{2n}^{(c,d)}$ dobijemo

$$8n \equiv 2((-1)^j - 1)(-\varepsilon a) \pmod s.$$

Iz (3.29) dobijemo

$$Y_{2m}^{(b,d)} \equiv 2 + \varepsilon ybm \pmod d,$$

tj.

$$Y_{2m}^{(b,d)} \equiv 2 + \varepsilon ybm \pmod t,$$

pa iz jednakosti $Y_{2m}^{(b,d)} = Y_{2k}^{(b,c)}$ imamo, koristeći $y = rt - 2$,

$$8m \equiv 2((-1)^k - 1)(\varepsilon c)(\text{mod } t).$$

Također, iz $Z_{2k}^{(b,c)} = Z_{2n}^{(c,d)}$, koristeći $z = st + 2$, imamo

$$8n \equiv 2((-1)^k - 1)(-\varepsilon b)(\text{mod } t).$$

□

Lema 3.40. *Neka je* $\{a, b, c, d, e\}$ $D(4)$*-petorka takva da vrijedi* $a < b < c < d < e$ *i* $c = a + b + 2r$*. Tada vrijedi barem jedna od kongruencija*

i) $8l \equiv 8n \equiv 0 \pmod s$,

ii) $8m \equiv 8n \equiv 0 \pmod t$,

iii) $8n \equiv -4\varepsilon r \left(\text{mod } \frac{st}{\gcd(s,t)}\right)$, *i* $\gcd(s,t) \in \{1, 2, 4\}$.

Dokaz. Ako je j paran, onda imamo $1 - (-1)^j = 0$ pa je $8l \equiv 8n \equiv 0 \pmod s$.
Ako je k paran, onda je $1 - (-1)^k = 0$ pa je $8m \equiv 8n \equiv 0 \pmod t$.
U slučaju da su i j i k neparni imamo

$$8l \equiv 4(-\varepsilon c)(\text{mod } s), \quad 8n \equiv 4\varepsilon a \pmod s,$$
$$8m \equiv 4(-\varepsilon c)(\text{mod } t), \quad 8n \equiv 4\varepsilon b \pmod t.$$

Iz $s = a + r$ i $t = b + r$ imamo da je $a \equiv -r \pmod{s}$ i $b \equiv -r \pmod{t}$ pa je

$$8n \equiv -4\varepsilon r \pmod{s}, \quad 8n \equiv -4\varepsilon r \pmod{t},$$

tj.

$$8n \equiv -4\varepsilon r \left(\bmod \frac{st}{\gcd(s,t)}\right).$$

Kako je $c = s + t$, slijedi da je $\gcd(s,t) = \gcd(s, s+t) = \gcd(s,c)$, i iz $ac + 4 = s^2$ vidimo da $\gcd(s,c)|4$ pa smo dokazali tvrdnju leme. $\square$

Da bismo mogli ove rezultate iskoristiti i odrediti granice za Baker-Davenportovu redukciju, promotrit ćemo sljedeće.

Stavimo

$$\beta_1 = \frac{x + \sqrt{ad}}{2}, \quad \beta_2 = \frac{y + \sqrt{bd}}{2}, \quad \beta_3 = \frac{z + \sqrt{cd}}{2},$$
$$\beta_4 = \frac{\sqrt{c}(\varepsilon\sqrt{a} + \sqrt{d})}{\sqrt{a}(\varepsilon\sqrt{c} + \sqrt{d})}, \quad \beta_5 = \frac{\sqrt{c}(\varepsilon\sqrt{b} + \sqrt{d})}{\sqrt{b}(\varepsilon\sqrt{c} + \sqrt{d})},$$

i promotrimo linearne forme u logaritmima

$$\Lambda_2 = 2l \log \beta_1 - 2n \log \beta_3 + \log \beta_4, \tag{3.39}$$
$$\Lambda_3 = 2m \log \beta_2 - 2n \log \beta_3 + \log \beta_5. \tag{3.40}$$

Ako primijenimo Lemu 2.15 na $D(4)$-četvorke $\{a,b,d,e\}$ i $\{b,c,d,e\}$, dobijemo gornje granice za ove linearne forme u logaritmima.

Lema 3.41. *Neka su Λ_2 i Λ_3 linearne forme definirane s (3.39) i (3.40). Tada vrijede nejednakosti $0 < \Lambda_2 < 2ad\beta_1^{-4l}$ i $0 < \Lambda_3 < 2bd\beta_2^{-4m}$.*

Sada ćemo u svakom od slučajeva iz Leme 3.40 pronaći gornju granicu za neki od elemenata s, t i r pridruženih $D(4)$-petorki.

Lema 3.42. *Ako je $8l \equiv 8n \equiv 0 \pmod{s}$, onda je $s \leq 201884$.*

Dokaz. Lako se vidi da je $l \equiv n \equiv 0 \,(\bmod \frac{s}{\gcd(s,8)})$ i da je tada $l = \frac{s}{\gcd(s,8)} l_1$ i $n = \frac{s}{\gcd(s,8)} n_1$ za neke $l_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Označimo $s' = \frac{s}{\gcd(s,8)}$. Imamo

$$\Lambda_2 = 2s'l_1 \log \beta_1 - 2s'n_1 \log \beta_3 + \log \beta_4 = \log \beta_4 - 2s' \log \frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}.$$

Algebarski brojevi β_1 i β_3 su invertibilni u $\mathbb{Q}(\sqrt{ad})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{bd})$, pa su i multiplikativno nezavisni nad $\mathbb{Q}$, kao što smo slično argumentirali u Lemi 3.17. Želimo primijeniti Teorem

3.27 na ovu linearnu formu u dva logaritma, pa lako vidimo da možemo uzeti

$$D=4, \quad b_1=2s', \quad b_2=1, \quad \gamma_1=\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}, \quad \gamma_2=\beta_4.$$

Konjugati od γ_1 su jednaki

$$\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}, \quad \frac{\beta_3^{-n_1}}{\beta_1^{l_1}}, \quad \frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{-l_1}}, \quad \frac{\beta_3^{-n_1}}{\beta_1^{-l_1}}$$

i ovisno je li $\beta_3^{n_1}>\beta_1^{l_1}$ ili $\beta_3^{n_1}<\beta_1^{l_1}$ imamo

$$h(\gamma_1)=\frac{1}{4}\left(\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}\right|+\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{-l_1}}\right|\right)=\frac{n_1}{2}\log\beta_3$$

ili

$$h(\gamma_1)=\frac{1}{4}\left(\left|\log\frac{\beta_3^{-n_1}}{\beta_1^{-l_1}}\right|+\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{-l_1}}\right|\right)=\frac{l_1}{2}\log\beta_1.$$

Po Lemi 3.41 imamo

$$0<\log\beta_4-2s'\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}<2ad\beta_1^{-4l},$$

pa je

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}\right| &< \frac{1}{2s'}(\log\beta_4+2ad\beta_1^{-4l})\\ &< \frac{1}{2s'}(\log\beta_4+2ad(\sqrt{ad})^{-4})\\ &< \frac{1}{2s'}\left(\log\beta_4+\frac{2}{ad}\right).\end{aligned}$$

Vrijedi da je

$$\beta_4=\sqrt{\frac{c}{a}}\left(1-\varepsilon\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{d}+\varepsilon\sqrt{c}}\right)\leq\sqrt{\frac{c}{a}}\left(1+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}-\sqrt{c}}\right)<2\sqrt{\frac{c}{a}},$$

pa imamo

$$\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}\right|<\frac{\log 2\sqrt{\frac{c}{a}}}{2s'}+\frac{2}{2s'ad}<\frac{\log 2s}{2s'}+\frac{1}{s'ad}=\gcd(s,8)\left(\frac{\log 2s}{2s}+\frac{1}{sad}\right).$$

Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $r>10^4$, inače je $s=a+r<2r<20000$. Iz te pretpostavke slijedi da je $s>10^4$, $d=rst>r^3>10^{12}$ i

$$\left|\log\frac{\beta_3^{n_1}}{\beta_1^{l_1}}\right|<\gcd(s,8)\left(\frac{\log(2\cdot 10^4)}{2\cdot 10^4}+\frac{1}{10^4\cdot 10^{12}}\right)<5\cdot 10^{-4}\gcd(s,8)<0.004.$$

Sada imamo

$$\left|\frac{n_1}{2}\log\beta_3 - \frac{l_1}{2}\log\beta_1\right| < 0.002$$

pa je

$$h(\gamma_1) < \frac{l_1}{2}\log\beta_1 + 0.002.$$

Apsolutne vrijednosti konjugata od $\gamma_2 = \beta_4$ su

$$\frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{d})}{\sqrt{a}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}, \quad \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{d})}{\sqrt{a}(-\sqrt{c}+\sqrt{d})}, \quad \frac{\sqrt{c}(-\sqrt{a}+\sqrt{d})}{\sqrt{a}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}, \quad \frac{\sqrt{c}(-\sqrt{a}+\sqrt{d})}{\sqrt{a}(-\sqrt{c}+\sqrt{d})}$$

i lako se vidi da su sve veće od 1. Minimalni polinom izračunamo analogno kao za α_3 u Potpoglavlju 3.2.1 i dobijemo

$$h(\gamma_2) \leq \frac{1}{4}\log\left(a^2(d-c)^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{(d-a)^2}{(d-c)^2}\right) < \frac{1}{2}\log(cd) < \log\beta_3.$$

Primjenom Teorema 3.27 s parametrima $\varrho = 61$ i $\mu = 0.7$ dobijemo $\sigma = 0.955$ i $3.92 < \lambda' < 3.93$. Uzmimo

$$a_1' := 4l_1\log\beta_1 + 0.264 \geq 8h(\gamma_1) + \varrho|\log\gamma_1| - \log|\gamma_1|.$$

Kako je $c = a + b + 2r < 4b$, imamo $d > abc > c^2/4$ pa je $\beta_3 > \sqrt{cd} > \frac{1}{2}c^{3/2}$. Primijetimo da vrijedi

$$\frac{\sqrt{d}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{d}-\sqrt{c})} \leq 1 + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}-\sqrt{c}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{10^5}-1} < 1.0032$$

i $1.0032 \cdot \sqrt[3]{2} < 1.264$ pa biramo

$$\begin{aligned} a_2' &:= 28\log((1.264)^3\beta_3) > 60\log\left(1.264 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{c}\right) + 8\log((1.264)^3\beta_3) \geq \\ &\geq \varrho|\log\gamma_2| - \log|\gamma_2| + 8h(\gamma_2). \end{aligned}$$

Iz pretpostavke da je $r > 10^4$ imamo da vrijede nejednakosti $a_1' > 56$ i $a_2' > 560$, pa izbori vrijednosti svih parametara zadovoljavaju uvjete Teorema 3.27. Naime, ako uvrstimo da je $d = rst$, $t = b + r > 2r$ i $c > 3r$, vidimo da vrijede ocjene

$$\begin{aligned} a_1' &> 4\log(\sqrt{ad}) \geq 4\log(\sqrt{rst}) > 4\log(\sqrt{2r^3}) > 56, \\ a_2' &> 28\log((1.264)^3\sqrt{cd}) > 28\log((1.264)^3\sqrt{6r^4}) > 560. \end{aligned}$$

Stavimo

$$b' := \frac{2s'}{a_2'} + 0.018 > \frac{b_1}{a_2'} + \frac{b_2}{a_1'}$$

i slično kao u prethodnom poglavlju

$$h' = 4\log b' + 12.6.$$

Budući da je $\beta_3 = \frac{z+\sqrt{cd}}{2} < z$ i $z = st + 2 < s^3 + 2$, imamo

$$h' > 4\log\left(\frac{s'}{14\log((1.264)^3(s^3+2))}\right) + 12.6.$$

Sada za svaku vrijednost $\gcd(s, 8)$ računamo preostale parametre i dobijemo vrijednosti prikazane u Tablici 3.1.

Tablica 3.1

Vrijednosti parametara za primjenu Teorema 3.27

$\gcd(s,8)$	1	2	4	8
h'	25.508	22.736	19.963	17.191
H	7.537	6.832	6.126	5.421
ω	4.005	4.006	4.007	4.0085
θ	1.07	1.076	1.085	1.097
C	0.02276	0.02284	0.02294	0.02307
C'	0.04696	0.04722	0.04753	0.04792

Definirajmo još $B := \frac{1}{4}\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right) < \log b' + 4.187$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\log|\Lambda_2| &\geq -C\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1'a_2' - \sqrt{\omega\theta}\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right) - \log\left(C'\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1'a_2'\right)\\
&\geq -C\cdot 16B^2a_1'a_2' - \sqrt{\omega\theta}\cdot 4B - \log(C'\cdot 16B^2a_1'a_2')\\
&\geq -0.3692B^2a_1'a_2' - 8.388B - \log(0.7668B^2a_1'a_2').
\end{aligned}$$

S druge strane, iz Leme 3.41 imamo

$$\log|\Lambda_2| < -4s'l_1\log\beta_1 + \log 2ad = -s'(a_1' - 0.264) + \log 2ad$$

pa je

$$s'(a_1' - 0.264) < 0.3692B^2a_1'a_2' + 8.388B + \log(0.7668B^2a_1'a_2') + \log 2ad.$$

Kako je $a_1' > 56$, imamo da je $a_1' - 0.264 > 0.9952a_1'$ pa tu ocjenu možemo uvrstiti s lijeve strane nejednakosti, te kad je još pomnožimo s 2 i podijelimo s $0.9952a_1'a_2'$ dobijemo

$$\frac{2s'}{a_2'} < 0.74197B^2 + \frac{16.857}{a_1'a_2'}B + \frac{2.01}{a_1'a_2'}\log(0.7668B^2a_1'a_2') + \frac{2.01}{a_1'a_2'}\log 2ad,$$

to jest,

$$b' < 0.74197B^2 + \frac{16.857}{a_1'a_2'}B + \frac{2.01}{a_1'a_2'}\log(0.7668B^2a_1'a_2') + \frac{2.01}{a_1'a_2'}\log 2ad + 0.018.$$

Budući da je $d = rst > 2r^3 > 2\cdot 10^{12}$ i da je funkcija $\frac{\log(2ad)}{\log^2\sqrt{d}}$ padajuća u d, vidimo da vrijedi

$$\frac{2.01}{a_1'a_2'}\log 2ad < \frac{2.01\log(2ad)}{112\log^2\sqrt{d}} < 0.0026.$$

Slično možemo zaključiti i da je

$$\begin{aligned}\frac{2.01}{a_1'a_2'}\log(0.7668B^2a_1a_2) &= \frac{2.01\log(a_1'a_2')}{a_1'a_2'} + \frac{2.01}{a_1'a_2'}\log(0.7668B^2)\\ &< 0.0007 + 0.1625B^2\frac{2.01}{31360} < 0.0007 + 0.000011B^2,\end{aligned}$$

jer za $x > 0$ vrijedi $\log x < 0.37x$. Za $x > 4$ je $x < 0.25x^2$, a mi imamo $B > h'/4 > 4$, pa je

$$\frac{16.857}{a_1'a_2'}B < 0.000135B^2.$$

Dakle, imamo

$$b' < 0.742116B^2 + 0.02133 < 0.742116(\log b' + 4.187)^2 + 0.0213,$$

pa dobijemo $b' < 48.28$ što povlači

$$\begin{aligned}\frac{2s'}{a_2'} + 0.018 &< 48.28\\ \frac{s'}{a_2'} &< 24.131\\ s' < 24.131a_2' &< 675.668\log((1.264)^3(s^3+2)).\end{aligned}$$

Za svaku od vrijednosti $\gcd(s,8) \in \{1,2,4,8\}$ dobijemo redom da je $s \le S_1$, gdje je $S_1 \in \{20610, 44324, 94814, 201884\}$, tj. imamo da je $s \le 201884$. □

Lema 3.43. *Ako je* $8m \equiv 8n \equiv 0 \pmod{t}$*, onda je* $t \le 127293$.

Dokaz. Kao i u prethodnom slučaju, imamo $t' = \frac{t}{\gcd(t,8)}$ i $m = t'm_2$, $n = t'n_2$ za neke $m_2,\ n_2 \in \mathbb{N}$. Promatramo linearnu formu u logaritmima

$$\Lambda_3 = 2t'm_2\log\beta_2 - 2t'n_2\log\beta_3 + \log\beta_5 = \log\beta_5 - 2t'\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_2}}.$$

Slično kao u prethodnoj lemi, imamo

$$D = 4,\quad b_1 = 2t',\quad b_2 = 1,\quad \gamma_1 = \frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_w}},\quad \gamma_2 = \beta_5$$

te su konjugati od γ_1 jednaki

$$\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_2}}, \quad \frac{\beta_3^{-n_2}}{\beta_2^{m_2}}, \quad \frac{\beta_3^{-n_2}}{\beta_2^{-m_2}}, \quad \frac{\beta_3^{-n_2}}{\beta_2^{-m_2}}.$$

Ovisno o tome je li $\beta_3^{n_2} > \beta_2^{m_2}$ ili $\beta_3^{n_2} < \beta_2^{m_2}$ imamo

$$h(\gamma_1) = \frac{1}{4}\left(\left|\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_2}}\right| + \left|\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{-m_2}}\right|\right) = \frac{n_2}{2}\log\beta_3$$

ili

$$h(\gamma_1) = \frac{1}{4}\left(\left|\log\frac{\beta_3^{-n_2}}{\beta_2^{-m_2}}\right| + \left|\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_1^{-m_2}}\right|\right) = \frac{m_2}{2}\log\beta_2.$$

Vrijedi

$$\left|\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_2}}\right| < \frac{\log(2t)}{2t'} + \frac{1}{t'bd} = \gcd(t,8)\left(\frac{\log(2t)}{2t} + \frac{1}{tbd}\right).$$

Kako je $c > b > 10^5$, imamo $t = b + r > 10^5$ i $bd > b^2c > 10^{15}$ što nam daje

$$|\log\gamma_1| = \left|\log\frac{\beta_3^{n_2}}{\beta_2^{m_2}}\right| < 6.2\cdot 10^{-4}\gcd(t,8) \leq 0.00496$$

pa je

$$h(\gamma_1) < \frac{m_2}{2}\log\beta_2 + 0.00496.$$

Za ocjenu visine algebarskog broja γ_2, slično kao u Lemi 3.42, vrijedi

$$h(\gamma_2) \leq \frac{1}{4}\log\left(b^2(d-c)^2\frac{c^2(d-b)^2}{b^2(d-c)^2}\right) < \frac{1}{2}\log cd < \log\beta_3.$$

Sada možemo primijeniti Teorem 3.27 s vrijednostima parametara $\varrho = 61$ i $\mu = 0.7$.

S obzirom na to da je $8h(\gamma_1) < 4m_2\log\beta_2 + 0.03968$ i $62|\log\gamma_1| < 0.30752$, možemo uzeti

$$a_1' = 4m_2\log\beta_2 + 0.3472$$

i

$$a_2' = 28\log((1.264)^3\beta_3)$$

pa je $a_1' > 69$ i $a_2' > 560$. Stavimo

$$b' := \frac{2t'}{a_2'} + 0.015 > \frac{b_1}{a_2'} + \frac{b_2}{a_1'}$$

pa za h' imamo izraz

$$h' = 4\log b' + 12.6.$$

Budući da je $\beta_3 < z = st + 2 < t^2 + 2$, dobijemo da je

$$h' > 4\log\left(\frac{2t'}{28\log((1.264)^3(t^2+2))}\right) + 12.6$$

te možemo konačno izračunati vrijednosti prezentirane u Tablici 3.2.

Tablica 3.2

Vrijednosti parametara iz Teorema 3.27.

$\gcd(s,8)$	1	2	4	8
h'	35.428	32.656	29.883	27.110
H	10.0621	9.3565	8.651	7.9455
ω	4.0025	4.0029	4.0034	4.004
θ	1.051	1.055	1.06	1.065
C	0.02245	0.02249	0.02254	0.02259
C'	0.04625	0.04638	0.04653	0.04671

Definiramo $B := \frac{1}{4}\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right) < \log b' + 4.187$ pa je

$$\begin{aligned}\log|\Lambda_3| &\geq -C\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1'a_2' - \sqrt{\omega\theta}\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right) - \log\left(C'\left(h' + \frac{\lambda'}{\sigma}\right)^2 a_1'a_2'\right)\\ &\geq -C\cdot 16B^2a_1'a_2' - \sqrt{\omega\theta}\cdot 4B - \log(C'\cdot 16B^2a_1'a_2')\\ &\geq -0.36144B^2a_1'a_2' - 8.261B - \log(0.74736B^2a_1'a_2').\end{aligned}$$

S druge strane, iz Leme 3.41 imamo

$$\log|\Lambda_2| < -4t'm_2\log\beta_2 + \log 2bd = -t'(a_1' - 0.3472) + \log 2bd$$

pa dobijemo

$$0.99496a_1't' < 0.36144B^2a_1'a_2' + 8.261B + \log(0.74736B^2a_1'a_2') + \log(2bd),$$

tj. nakon sređivanja

$$\frac{2t'}{a_2'} < 0.72655B^2 + \frac{16.606}{a_1'a_2'}B + \frac{2.02}{a_1'a_2'}\log(0.74736B^2a_1'a_2') + \frac{2.02}{a_1'a_2'}\log(2bd).$$

Sada opet procijenimo gornje granice za izraze s desne strane u ovisnosti o B pa dobijemo

$$b' < 0.72655B^2 + 0.000065B^2 + 0.00056 + 0.0000051B^2 + 0.0015 + 0.015,$$

to jest,

$$b' < 0.726666(\log b' + 4.187)^2 + 0.01706,$$

iz čega je $b' < 46.943$ i

$$t' < 657.202 \log((1.264)^3(t^2+2)).$$

Za svaki izbor $\gcd(t,8) \in \{1,2,4,8\}$ dobijemo redom da je $t \leq T_1$ gdje je $T_1 \in \{12902, 27826, 59662, 127293\}$, tj. $t \leq 127295$. □

Pogledajmo konačno posljednji slučaj iz Leme 3.40.

Lema 3.44. *Ako je* $8n \equiv -4\varepsilon r \left(\bmod \frac{st}{\gcd(s,t)}\right)$*, gdje su vrijednosti* $\gcd(s,t) \in \{1,2,4\}$*, onda je* $r < 9164950$.

Dokaz. Po Lemi 3.38 vidimo da je $n > r/2$ pa je $8n+4r > 8n-4r > 0$ i $8n-4r \geq \frac{st}{\gcd(s,t)} \geq \frac{st}{4}$. Za $\varepsilon = +1$ imamo $32n \geq st - 16r$, a za $\varepsilon = -1$ imamo $32n \geq st + 16r$. Dakle, općenito za n vrijedi $n \geq \frac{st-16r}{32} \geq \frac{c(r-8)}{32}$ gdje zadnju nejednakost nije teško provjeriti jer je $c = a+b+2r$ i $st = (a+r)(b+r)$. Po Lemi 3.22 i Lemi 3.5 vrijedi $h \geq 2m \geq 2n$ pa je posebno i $h \geq \frac{c(r-8)}{16}$.

Iz Propozicije 3.28 vrijedi

$$h < 3.46289 \cdot 10^{10} \log \alpha_2 \log c.$$

Iz $b > \max\{10^5, a+57\sqrt{a}\}$ imamo da vrijedi $r-8 > a$ pa je

$$\alpha_2 < \sqrt{ac+4} = \sqrt{\frac{16a}{r-8} \cdot \frac{c(r-8)}{16} + 4} < \sqrt{16\frac{c(r-8)}{16} + 4}$$

i

$$c = \frac{16}{r-8}\frac{c(r-8)}{16} < \frac{16}{10^{5/2}-8}\frac{c(r-8)}{16} < \frac{16}{308}\frac{c(r-8)}{16}.$$

Dakle, promatramo nejednakost

$$\frac{c(r-8)}{16} < 3.46289 \cdot 10^{10} \log\left(\sqrt{16\frac{c(r-8)}{16}+4}\right) \log\left(\frac{16}{308}\frac{c(r-8)}{16}\right).$$

Dobijemo da vrijedi

$$\frac{c(r-8)}{16} < 1.57493 \cdot 10^{13}.$$

Kako je $r^2 - 3 + 2r \geq c > 3r$, imamo $r < 9164950$ i

$$h < 3.46289 \cdot 10^{10} \log(2r) \log(r^2-3+2r) < 1.85682 \cdot 10^{13}.$$

□

Primijetimo da nam Leme 3.42, 3.43 i 3.44 daju konačno mnogo trojki $\{a,b,c\}$ s efikasnim gronjim granicama za elemente trojke, pa za njih možemo provesti Baker-

Davenportovu redukciju nad linearnom formom

$$\Lambda_1 := 2h \log \frac{r + \sqrt{ab}}{2} - 2j \log \frac{s + \sqrt{ac}}{2} + \log \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{c})}.$$

Lemu 2.14 primjenjujemo na Λ_1 s parametrom $J = 2h$ pa je vrijednost $M = 2 \cdot 7.23357 \cdot 10^{13}$ ili $M = 2 \cdot 1.85682 \cdot 10^{13}$, a objasnit ćemo unutar opisa algoritma koju vrijednost biramo. Algoritam smo realizirali u programskom paketu Wolfram Mathematica 11.1 na sljedeći način:

- Kako je $1 \leq a < r < 9164950$, prvo realiziramo petlju po a s korakom 1.
- Za fiksan a nađemo sva rješenja kongruencije $x^2 \equiv 4 \pmod{a}$ takva da je $x < a$.
- Da bismo mogli realizirali petlju po r, primijetimo da za svaki fiksan a imamo da je r manji od maksimuma vrijednosti r koje dobijemo iz nejednakosti

    1. $r \leq 201884 - a$, koja slijedi iz Leme 3.42,
    2. $\frac{r^2-4}{a} + r \leq 127293$, iz Leme 3.43,
    3. $\frac{c(r-8)}{16} < 1.57493 \cdot 10^{13}$ koju imamo iz Leme 3.44. No, ako uvrstimo $b = \frac{r^2-4}{a}$ i $c = a + b + 2r$ imamo $(a + \frac{r^2-4}{a} + 2r)(r - 8) < 2.519888 \cdot 10^{14}$.

    Primijetimo da u posljednjoj nejednakosti za male vrijednosti parametra a dobivamo znatno manje gornje granice za r od one koja je eksplicitno izražena u Lemi 3.44, npr. za $a = 1$ dobijemo iz posljednje nejednakosti $r \leq 63164$. Maksimalnu gornju granicu za r koju dobijemo iz ovih nejednakosti označimo s r_{max}.

- Sada za fiksan a i za fiksan x iz skupa rješenja opisanih u drugoj točki realiziramo petlju po r kojoj je početna vrijednost $r = a + x$, a maksimalna ne prelazi r_{max} opisan u prethodnoj točki, te petlja ima korak a. Na taj način ćemo dobiti da je $b = \frac{r^2-4}{a}$ uvijek cijeli broj i sigurno smo pokrili sve moguće $D(4)$-parove $\{a, b\}$ za koje je r u zadanom intervalu. Ako je r takav da zadovoljava granicu iz treće nejednakosti, onda možemo uzeti $M = 2 \cdot 1.85682 \cdot 10^{13}$, jer zadovoljava uvjete Leme 3.44, što će i vrijediti za većinu trojki. Inače stavljamo $M = 2 \cdot 7.23357 \cdot 10^{13}$.
- Za fiksne a i r, kada izračunamo b, imamo da je $c = a + b + 2r$ pa na tu trojku primijenimo redukciju.

Za provođenje opisanog algoritma bilo je potrebno 29 sati i 45 minuta na računalu s Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU @2.00-3.10 GHz procesorom i za svaku promatranu trojku smo dobili $J = 2h < 5$ što očito ne može vrijediti jer je $2h > 2 \cdot 0.666662\sqrt{ac} > 2 \cdot 0.666662 \cdot 10^{5/2} > 421$. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3.45. *Regularna $D(4)$-trojka $\{a, b, c\}$ se ne može proširiti do $D(4)$-petorke.*

3.7 Proširenje neregularne trojke do $D(4)$-petorke

Preostalo je pokazati da se ni neregularne trojke ne mogu proširiti do petorke. Cipu, Filipin i Fujita su u [12] pokazali da je $b > 3ag \geq 3a$, gdje je $g = \gcd(a, b)$ u $D(1)$-petorki. U $D(4)$-petorkama iz Leme 2.22 ne možemo dobiti analogan rezultat koji bi vrijedio za sve petorke, no nama je preostalo promatrati petorke u kojima je $\{a, b, c\}$ neregularna petorka, tj. one za koje je $c > \max\{ab, 4b\}$ pa ćemo za takve dobiti rezultat koji je i bolji, s obzirom na to da imamo bolji odnos između elemenata b i c. Također, po Lemi 3.11 vidimo da je $b > 4a$ kada je $c \neq a + b + 2r$ pa za $g = \gcd(a, b)$ i $B = b/g$, $A = a/g$ imamo da je $B/A > 4$ i $B/g \geq B/A \geq 5$, pa vidimo da smo zadovoljili početne uvjete Teorema 2.20 koji će nam, skupa s Lemom 2.22, biti potreban u dokazu sljedeća dva teorema.

Teorem 3.46. *$D(4)$-trojka $\{a, b, c\}$, za koju je $\deg(a, b, c) = 1$, ne može se proširiti do $D(4)$-petorke.*

Dokaz. Po Lemi 2.3 imamo $c > \max\{ab, 4b\}$, a po Lemi 3.11 da je $b > 4a$. Označimo $d_{-1} = d_{-1}(a, b, c)$. Iz definicije stupnja trojke znamo da je $\{d_{-1}, a, b, c\}$ regularna četvorka i da je $\{d_{-1}, a, b\}$ regularna trojka pa nije teško vidjeti da je $d_{-1} = a + b \pm 2r$ i $c = d_+(a, d_{-1}, b) = r(r \pm a)(b \pm r)$. Za d_{-1} nam vrijedi

$$d_{-1} \geq a + b - 2r \geq a + b - 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + 4} > a - 1,$$

tj. $d_{-1} \geq a$ pa je $c > abd_{-1} \geq a^2 b$.

Pretpostavimo da je $4a < b \leq k \cdot a$. Želimo primijeniti Lemu 2.22 za $A = a$, $B = b$ i $C = d$ pa vidimo da prvo trebamo postići da vrijede uvjeti Teorema 2.20 i naći najveći broj k za koji to možemo postići. Kako imamo da je $c > a^2 b$ i $10^5 < b < k \cdot a$, imamo $a > \frac{10^5}{k}$ pa je $c > \frac{10^5}{k} ab$. Također,

$$d > abc > \frac{10^5}{k} abab \geq \frac{10^5}{k} \frac{b^2}{k^2} b^2 = \frac{10^5}{k^3} b^4.$$

S druge strane, kako je $b > 4a$, imamo da je $b - a > 3a$ pa je $A' = \max\{4(B - A), 4A\} = 4(B - A)$. Budući da je $g \geq 1$, vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{59.488 A' B (B - A)^2}{A g^4} &= 237.952 \frac{(b - a)^3 b}{a g^4} < 237.952 \frac{(b - a)^3 b}{a} \\ &\leq 237.952 \left(\frac{k - 1}{k} \right)^3 k b^3, \end{aligned}$$

pa je d veći od ovoga izraza onda kada je

$$\frac{10^5}{k^3} b > 237.952 \left(\frac{k - 1}{k} \right)^3 k.$$

Kako imamo da je $b > 10^5$, možemo promatrati slabiju nejednakost koju dobijemo kada uvrstimo 10^5 umjesto b na lijevoj strani prethodne nejednakosti, te za nju dobijemo $k \leq 81$. Dakle, pretpostavljamo da je $4a < b \leq 81a$.

Nadalje, promatramo proširenje trojke $\{a, b, d\}$ do četvorke i imamo za indeks n u tom slučaju, po Lemi 2.22, da je

$$n < \frac{4\log(8.40335 \cdot 10^{13}(A')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1})\log(0.20533A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C(B-A)^{-1}g)}{\log(BC)\log(0.016858A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}Cg^4)}.$$

Koristit ćemo $\frac{3}{4}b < b - a < \frac{80}{81}b$ i $1 \leq g = \gcd(a, b) \leq a$ u ocjeni izraza

$$\begin{aligned}
8.40335 \cdot 10^{13}(A')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1} &< 8.40335 \cdot 10^{13}(4(B-A))^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1} \\
&< 8.40335 \cdot 10^{13} \cdot 2\left(\frac{80}{81}b\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{2}}b^2d \\
&< 8.35132 \cdot 10^{13}b^3d, \\
0.20533A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C(B-A)^{-1}g &< 0.20533\left(\frac{b}{4}\right)^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{3}{4}b\right)^{-1}\frac{b}{4} \\
&< 0.03423bd, \\
0.016858A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}Cg^4 &> 0.016858\frac{\frac{b}{81}d}{4b(b-a)^3} \\
&> \frac{0.01684}{4 \cdot 81}\frac{d}{\left(\frac{80}{81}\right)^3b^3} \\
&> 0.0000544b^{-3}d,
\end{aligned}$$

pa je

$$n < \frac{4\log(8.35132 \cdot 10^{13}b^3d)\log(0.03423bd)}{\log(bd)\log(0.000054b^{-3}d)}.$$

Funkcija s desne strane nejednakosti je definirana i padajuća u d za $d > (0.000054b^{-3})^{-1} > 18518.52b^3$. S obzirom na to da je $d > \frac{10^5}{81^3}b^4 > 0.1881676b^4$ i $b > 10^5$, možemo iskoristiti ovu donju granicu za d, pa dobijemo da vrijedi

$$n < \frac{4\log(1.571449 \cdot 10^{13}b^7)\log(0.006441b^5)}{\log(0.1881676b^5)\log(0.000010161b)}.$$

Iz Leme 3.12 imamo da je u $D(4)$-četvorci $m \geq 0.618034\sqrt{d/b}$ pa je

$$n \geq \frac{m}{2} > 0.309017\sqrt{ac} > 0.309017\sqrt{\frac{b}{81}\frac{10^5}{81}\frac{b}{81}b} > 0.134046b^{3/2}$$

te iz ove dvije nejednakosti dobijemo $b < 98416 < 10^5$, što naravno ne može biti. Dakle, mora vrijediti $b > 81a$.

Sada imamo

$$d_{-1} > a+b-2\sqrt{\frac{b^2}{81}+4} = a+b-\frac{2}{9}\sqrt{b^2+324} > a+b-\frac{2}{9}(b+1) > \frac{7}{9}b$$

pa je

$$c > abd_{-1} > \frac{7}{9}ab^2$$

i $ac > \frac{7}{9}(ab)^2$.

Pretpostavimo da je $81a < b < 18.0793a^{3/2}$. Onda je $a > 18.0793^{-2/3}b^{2/3}$. Promotrimo,

$$\begin{aligned}\frac{59.488A'B(B-A)^2}{Ag^4} &= 237.952\frac{(b-a)^3b}{ag^4} < \frac{237.952}{18.0793^{-2/3}}\frac{b^4}{b^{2/3}}\\ &< 1639.12b^{10/3}.\end{aligned}$$

S druge strane, budući da je $d_{-1} > \frac{7}{9}b > \frac{7}{9}10^5$, imamo

$$d > abc > d_{-1}a^2b^2 > d_{-1}18.0793^{-4/3}b^{10/3} > 1639.129b^{10/3},$$

pa možemo iskoristiti Lemu 2.22. Koristeći da je $A' = 4(B-A) < 4B$ i $1 \leq g \leq a < b/81$ dobijemo

$$\begin{aligned}8.40335\cdot 10^{13}(A')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}B^2Cg^{-1} &< 8.40335\cdot 10^{13}\cdot 2(b)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{81}\right)^{\frac{1}{2}}b^2d\\ &< 1.86742\cdot 10^{13}b^3d,\\ 0.20533A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C(B-A)^{-1}g &< 0.20533\left(\frac{b}{81}\right)^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}d\left(\frac{80}{81}b\right)^{-1}\frac{b}{81}\\ &< 0.0002852bd,\\ 0.016858A(A')^{-1}B^{-1}(B-A)^{-2}Cg^4 &> 0.016858\frac{18.0793^{-2/3}b^{2/3}dg^4}{4b^4}\\ &> 0.000611b^{-10/3}d.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi nejednakost

$$n < \frac{4\log(1.86742\cdot 10^{13}b^3d)\log(0.0002852bd)}{\log(bd)\log(0.000611b^{-10/3}d)}. \tag{3.41}$$

Također za d vrijedi

$$\begin{aligned}d &> abc > d_{-1}a^2b^2 > \frac{7}{9}a^2b^3 > \frac{7}{9}18.0793^{-4/3}b^{4/3}b^3\\ &> 0.01639b^{13/3}.\end{aligned}$$

Funkcija s desne strane nejednakosti (3.41) je padajuća u d i definirana za sve $d > (0.000611b^{-10/3})^{-1} > 1636.67b^{10/3}$. S obzirom na to da imamo $b > 10^5$, vidimo da ovo vrijedi za d koje mi promatramo, pa možemo promatrati nejednakost u koju smo uvrstili $d > 0.01639b^{13/3}$ i dobili

$$n < \frac{4\log(3.0608 \cdot 10^{11}b^{22/3})\log(4.6743 \cdot 10^{-6}b^{16/3})}{\log(0.01639b^{16/3})\log(1.001429 \cdot 10^{-5}b)}.$$

Slično kao prije, za n dobijemo i donju granicu

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{m}{2} > 0.309017\sqrt{ac} > 0.272527ab > 0.272527 \cdot 18.0793^{-2/3}b^{5/3} \\ &> 0.03956b^{5/3}. \end{aligned}$$

Rješavajući nejednadžbu u b, koju dobijemo iz prethodne dvije nejednakosti, slijedilo bi da je $b \leq 99861$, što je kontradikcija s $b > 10^5$. Dakle, mora vrijediti $b > 18.0793a^{3/2}$.

Iz $b > 18.0793a^{3/2}$ imamo

$$a^{5/2} < \frac{r^2 - 4}{18.0793}.$$

Kako po Propoziciji 3.28 vrijedi $ac < 1.17732 \cdot 10^{28}$, imamo da je $\frac{7}{9}(ab)^2 < 1.17732 \cdot 10^{28}$, tj. $ab < 1.23033 \cdot 10^{14}$ odakle dobijemo $r \leq 11091997$. Koristeći $b > 18.0793a^{3/2}$ i gornju granicu za ab dobijemo $a \leq 135873$.

Sada možemo provesti Baker-Davenportovu redukciju slično kao u regularnom slučaju. Za $J = 2h$ po Propoziciji 3.28 imamo $M = 2 \cdot 7.23357 \cdot 10^{13}$. Algoritam se od onog u regularnom slučaju razlikuje po tome što je $r \leq 11091997$ za svaki a i ne možemo dobiti puno bolju gornju granicu. Redukciju radimo nad trojkama $\{a, b, r(r+a)(b+r)\}$ i $\{a, b, r(r-a)(b-r)\}$. Za provjeru je bilo potrebno 11 dana i 18 sati na računalu s Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU @2.00-3.10 GHz procesorom i u svakom slučaju smo imali $J = 2h < 5$ što očito ne može biti jer je i ovdje $2h > 421$. Time smo dokazali teorem. □

Svi preostali slučajevi su obuhvaćeni sljedećim teoremom.

Teorem 3.47. *$D(4)$-trojka, takva da je $\deg(a,b,c) \geq 2$, ne može se proširiti do $D(4)$-petorke.*

Dokaz. Ako je $\deg(a,b,c) \geq 2$, onda su $d_{-1} = d_{-}(a,b,c)$ i $d_{-2} = d_{-}(a,b,d_{-1})$ pozitivni brojevi. Po Propoziciji 3.13 imamo da je $c < \frac{237.952b^3}{a}$ pa ćemo analizu trojki koje promatramo podijeliti na četiri slučaja ovisno kojem od četiriju podintervala element c pripada

$$c \in \left\langle ab, a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right] \cup \left\langle a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}, ab^2\right] \cup \left\langle ab^2, ab^{\frac{5}{2}}\right] \cup \left\langle ab^{\frac{5}{2}}, \frac{237.952b^3}{a}\right].$$

Slučaj I: $c \in \left\langle ab, a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right]$.

Budući da je $c = d_+(a, b, d_{-1})$, vrijedi $c > abd_{-1}$ pa je $ad_{-1} < (ab)^{1/2}$ tj. $ab > (ad_{-1})^2$.

S druge strane, $ac > (ab)(ad_{-1}) > (ad_{-1})^3$ pa je

$$r_{(a,d_{-1})} = \sqrt{ad_{-1} + 4} < \sqrt{(1.17732 \cdot 10^{28})^{1/3} + 4} < 47697,$$

i jer je $d_{-1} \neq 0$ imamo $r_{(a,d_{-1})} \geq 3$. Sada želimo za $3 \leq r_{(a,d_{-1})} \leq 47696$ tražiti sve moguće $D(4)$-parove $\{a, d_{-1}\}$. Nadalje, imamo da je $\{a, d_{-1}, b\}$ trojka, pa se b dobije kao rješenje pellovske jednadžbe

$$\mathcal{A}\mathcal{V}^2 - \mathcal{B}\mathcal{U}^2 = 4(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \tag{3.42}$$

gdje je $\mathcal{A}\mathcal{B} + 4 = \mathcal{R}^2$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ prirodni brojevi. Po Lemi 2.6 znamo da su rješenja ove jednadžbe oblika

$$\mathcal{V}\sqrt{\mathcal{A}} + \mathcal{U}\sqrt{\mathcal{B}} = (\mathcal{V}_0\sqrt{\mathcal{A}} + \mathcal{U}_0\sqrt{\mathcal{B}}) \left(\frac{\mathcal{R} + \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}}}{2}\right)^q,$$

gdje je $q \geq 0$ cijeli broj i $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$ fundamentalno rješenje jednadžbe (3.42) za kojeg vrijede nejednakosti

$$0 \leq \mathcal{U}_0 \leq \sqrt{\frac{\mathcal{A}(\mathcal{B} - \mathcal{A})}{\mathcal{R} - 2}}, \quad 1 \leq |\mathcal{V}_0| \leq \sqrt{\frac{(\mathcal{R} - 2)(\mathcal{B} - \mathcal{A})}{\mathcal{A}}}.$$

Rješenja se mogu prikazati binarnim rekurzivnim nizom

$$\mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_1 = \frac{\mathcal{U}_0\mathcal{R} + \mathcal{V}_0\mathcal{A}}{2}, \quad \mathcal{U}_{m+2} = \mathcal{R}\mathcal{U}_{m+1} - \mathcal{U}_m.$$

Tada je $b = \frac{\mathcal{U}^2-4}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{V}^2-4}{\mathcal{B}}$ pa vidimo da mora vrijediti da $\mathcal{A}$ dijeli $\mathcal{U}^2 - 4$.

Iz nejednakosti $a^2b < ac < 1.17732 \cdot 10^{28}$, zaključujemo $b < \frac{1.17732 \cdot 10^{28}}{a^2} \leq \frac{1.17732 \cdot 10^{28}}{\mathcal{A}^2}$, pa je

$$\mathcal{U} < \sqrt{\frac{1.17732 \cdot 10^{28}}{\mathcal{A}} + 4}, \quad |\mathcal{V}| < \sqrt{\mathcal{B}\frac{1.17732 \cdot 10^{28}}{\mathcal{A}^2} + 4}.$$

Promatramo algoritam u kojem za svaki $\mathcal{R} = r_{(a,d_{-1})} \in [3, 47696]$ tražimo djelitelje d' od $\mathcal{R}^2 - 4$ takve da je $1 \leq d' \leq \mathcal{R}$ i stavljamo $\mathcal{A} = d'$ i $\mathcal{B} = \frac{\mathcal{R}^2-4}{\mathcal{A}}$. Za fiksne $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ nađemo sve parove cijelih brojeva $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$ unutar zadanih granica koji zadovoljavaju pellovsku jednadžbu (3.42) i za svaki par nađemo vrijednosti elemenata uzlaznog niza $\mathcal{U}_m$ do elementa koji zadovoljava gornju granicu za $\mathcal{U}$ koju smo dobili. Za svaki tako dobiveni $\mathcal{U}$ provjeravamo dijeli li $\mathcal{A}$ broj $\mathcal{U}^2 - 4$, te ako dijeli, uzimamo $b = \frac{\mathcal{U}^2-4}{\mathcal{A}}$.

Za svaku od dvije mogućnosti $(a, d_{-1}) \in \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}), (\mathcal{B}, \mathcal{A})\}$ računamo $c = d_+(a, b, d_{-1})$ i ako je $c \in \left\langle ab, a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right]$ nad trojkom $\{a, b, c\}$ provodimo Baker-Davenportovu redukciju s parametrima kao u Teoremu 3.46.

Za provjeru po svim mogućim trojkama je bilo potrebno 7 sati i 54 minute te smo dobili da je $J < 5$ u svakom slučaju, što ne može biti.

Slučaj II: $c \in \left\langle a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}, ab^2\right]$.
Imamo $abd_{-1} < c < ab^2$ pa je $d_{-1} < \frac{c}{ab} < b$, tj. $b = \max\{a, b, d_{-1}\}$. Po Lemi 3.6. vrijedi

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} < c < ad_{-1}b + 4b = b(ad_{-1} + 4)$$

pa je

$$(ab)^{1/2} < ad_{-1} + 4.$$

Slično, $d_{-2} = d_{-}(a, b, d_{-1})$ pa je $b > ad_{-1}d_{-2}$ što povlači $d_{-2} < \frac{b}{ad_{-1}} < \frac{b}{(ab)^{1/2}-4}$ i

$$ad_{-2} < (ab)^{1/2}\frac{(ab)^{1/2}}{(ab)^{1/2} - 4} = (ab)^{1/2}\left(1 + \frac{4}{(ab)^{1/2} - 4}\right) < 1.01282(ab)^{1/2}.$$

Dakle, $ab > \left(\frac{ad_{-2}}{1.01282}\right)^2$. Nadalje

$$ad_{-2} < 1.01282(ad_{-1} + 4) = 1.01282ad_{-1} + 4.05128$$

pa je

$$\frac{ad_{-2} - 4.05128}{1.01282} < ad_{-1}.$$

Sada imamo,

$$ac > (ab)(ad_{-1}) > \left(\frac{ad_{-2}}{1.01282}\right)^2 \frac{ad_{-2} - 4.05128}{1.01282}$$

i, kako je $ac < 1.17732 \cdot 10^{28}$, vrijedi $ad_{-2} < 2.30408 \cdot 10^9$ pa je

$$r_{(a,d_{-2})} = \sqrt{ad_{-2} + 4} < 48001.$$

Znamo i $d_{-1} < b < c^{2/3} < (1.17732 \cdot 10^{28})^{2/3} < 5.17524 \cdot 10^{18}$. Slično kao u prvom slučaju, promatramo algoritam s petljom po $\mathcal{R} = r_{(a,d_{-2})}$ te tražimo rješenja pellovske jednadžbe (3.42) za parove $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, ali stavljamo $d_{-1} = \frac{\mathcal{U}^2-4}{\mathcal{A}}$. Promatramo oba izbora $(a, d_{-2}) \in \{(\mathcal{A}, \mathcal{B}), (\mathcal{B}, \mathcal{A})\}$ te za njih računamo $b = d_{+}(a, d_{-1}, d_{-2})$ i $c = d_{+}(a, b, d_{-1})$. Nad trojkom $\{a, b, c\}$ provodimo Baker-Davenportovu redukciju. Za provjeru je bio potreban 1 sat i 34 minute te je $J < 5$ u svakom slučaju.

Slučaj III: $c \in \left\langle ab^2, a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}\right]$.
Ovdje je $(ab)^2 < ac < 1.17732 \cdot 10^{28}$ pa je $r = \sqrt{ab + 4} \leq 10416543$. Kako je $b^{1/2} < r$, imamo i gornju granicu za b.

Pretpostavimo da je $b > d_{-1}$, tada je $b = d_{+}(a, d_{-1}, d_{-2}) > ad_{-1}d_{-2}$ pa je $d_{-1} < \frac{b}{ad_{-2}} < \frac{b}{a}$ i $ab^2 < c < abd_{-1} + 4b < \frac{b^2}{d_{-1}} + 4b$. Budući da je $\{a, d_{-2}, b\}$ $D(4)$-trojka imamo ili $a < d_{-2}$ ili $a > d_{-2}$. Ako je $a < d_{-2}$, onda je $d_{-2} \geq 5$ pa je $b^2 < \frac{b^2}{5} + 4b$ što ne može biti jer je $b > 10^5$. Ako je $a > d_{-2}$, onda je $a \geq 5$ pa je $5b^2 < b^2 + 4b$ također očita kontradikcija. Dakle, mora biti $b < d_{-1} < \frac{c}{ab}$ pa imamo $d_{-1} < \frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}}{ab} = a^{1/2}b^{3/2}$. Iz nejednakosti $b < d_{-1}$

slijedi da je $d_{-1} = d_+(a, b, d_{-2})$ pa imamo $d_{-1} > abd_{-2}$. Sada je

$$ad_{-2} < \frac{d_{-1}}{b} < (ab)^{1/2} < r \leq 10416543$$

i $r_{(a,d_{-2})} = \sqrt{ad_{-2} + 4} < 3228$.

Ovdje postupamo isto kao u slučaju II., osim što b i d_{-1} mijenjaju definicije, pa je $b = \frac{\mathcal{U}^2-1}{\mathcal{A}}$, a $d_{-1} = d_+(a, b, d_{-2})$. Za provjeru je bilo potrebno manje od 3 minute te je $J < 5$ u svakom slučaju.

Slučaj IV: $c \in \left\langle a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}}, \frac{237.952b^3}{a} \right]$.

Ovdje imamo $a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}} < \frac{237.952b^3}{a}$ odakle je $b > \frac{a^5}{237.952^2}$ i

$$1.17732 \cdot 10^{28} > ac > (ab)^{5/2} > (a^6 \cdot 237.952^{-2})^{5/2}$$

pa dobijemo da je $a \leq 460$.

Kao i u slučaju III. ovdje je $b < d_{-1}$, $d_{-1} = d_+(a, b, d_{-2})$ i $c = d_+(a, b, d_{-1})$ pa je

$$d_{-1} < \frac{c}{ab} < \frac{237.952b^2}{a^2}, \quad d_{-2} < \frac{d_{-1}}{ab} < \frac{237.952b}{a^3}.$$

Iz $(ab)^{5/2} < 1.17732 \cdot 10^{28}$ imamo $ab < 1.69184 \cdot 10^{11}$. Iz $a^4 d_{-2} < 237.952ab$ dobijemo $ad_{-2} < \frac{4.02576 \cdot 10^{13}}{a^3}$ pa je $r_{(a,d_{-2})} < \frac{6344883}{a^{3/2}}$.

S obzirom na to da je $a \leq 460$, algoritam provodimo kroz petlju po a, te za fiksan a tražimo $r_{(a,d_{-2})}$ unutar intervala $\left[3, \frac{6344883}{a^{3/2}}\right]$ slično kao u regularnom slučaju tako da $a | r^2_{(a,d_{-2})} - 4$ te stavljamo $d_{-2} = \frac{r^2_{(a,d_{-2})} - 4}{a}$. Definiramo $\mathcal{A} = \min\{a, d_{-2}\}$ i $\mathcal{B} = \max\{a, d_{-2}\}$ te rješavamo pellovsku jednadžbu (3.42) kao u prethodnim slučajevima stavljajući $b = \frac{\mathcal{U}^2-4}{\mathcal{A}}$, $d_{-1} = d_+(a, b, d_{-2})$ i $c = d_+(a, b, d_{-1})$ te za tako definiranu trojku $\{a, b, c\}$ provodimo redukciju. Kako je gornja granica za $r_{(a,d_{-2})}$ velika za male vrijednosti elementa a, bilo je potrebno 9 dana, 20 sati i 48 minuti za provođenje redukcije te smo dobili $J < 5$ u svakom slučaju.

Ovime smo pokazali da ne postoji neregularna $D(4)$-trojka iz danih intervala za c koja se može proširiti do $D(4)$-petorke. □

Vidimo da smo ovim teoremom dovršili dokaz glavnog teorema ovog poglavlja.

Teorem 3.48. *Ne postoji $D(4)$-petorka.*

Poglavlje 4

Polinomijalne $D(-1;1)$-četvorke

Promatranje diofantskih $D(n)$-m-torki je najzanimljivije kada je $n=1$, kako je problem promatrao i Diofant. U radu smo predstavili rezultate vezane za $D(4)$-m-torke, no osim ta dva slučaja, često je proučavan i slučaj $n=-1$.

Slutnja je da ne postoji $D(-1)$-četvorka. Naime, Dujella, Filipin i Fuchs su u [19] pokazali da postoji samo konačno mnogo $D(-1)$-četvorki. Iako je slutnja da se $D(-1)$-trojka $\{a,b,c\}$, takva da je $a<b<c$, ne može proširiti do $D(-1)$-četvorke, postoji prirodan broj d takav da su brojevi $ad+1$, $bd+1$ i $cd+1$ potpuni kvadrati. Jedno od mogućih proširenja je proširenje većim elementom $d=d_+(a,b,c)$, definiranim s

$$d_+(a,b,c)=-(a+b+c)+2(abc+\sqrt{(ab-1)(ac-1)(bc-1)}),$$

te ćemo, kao i do sada, pisati kraće d_+ kada je jasno na koju se $D(-1)$-trojku $\{a,b,c\}$ element odnosi.

Ovo nas vodi do sljedeće definicije.

Definicija 4.1. *Za skup $\{a,b,c;d\}$ od četiri različita prirodna broja kažemo da ima svojstvo $D(-1;1)$, ili da je $D(-1;1)$-četvorka, ako je $\{a,b,c\}$ $D(-1)$-trojka i ako su brojevi $ad+1$, $bd+1$ i $cd+1$ potpuni kvadrati.*

Iako takvi skupovi nisu mnogo proučavani, vjeruje se da vrijedi sljedeća slutnja.

Slutnja 4.2. *Ako $\{a,b,c;d\}$ ima svojstvo $D(-1;1)$, onda je*

$$d=d_\pm=-(a+b+c)+2(abc\pm\sqrt{(ab-1)(ac-1)(bc-1)}).$$

Moguće je da vrijedi $d_-=0$, i tada nemamo proširenje $D(-1)$-trojke do $D(-1;1)$-četvorke elementom d_-. Fujita [34, 35] je dokazao Slutnju 4.2 za $D(-1)$-trojke oblika $\{1,2,c\}$ i za parametarsku familiju $D(-1)$-trojki oblika $\{F_{2k+1},F_{2k+3},F_{2k+5}\}$, gdje je $k\geq 1$ prirodan broj. Filipin je u [31] dokazao isto za familiju trojki oblika $\{k^{12},k^{12}+2k^6+2,4k^{12}+4k^6+5\}$, gdje je $k\geq 1$ prirodan broj. He i Togbé su u [37] dokazali da $D(-1)$-trojka oblika $\{1,k^2+1,(k+1)^2+1\}$, gdje je k prirodan broj, ima jedinstveno proširenje do $D(-1;1)$-četvorke.

U ovom poglavlju promatrat ćemo problem $D(-1;1)$-četvorki nad prstenom polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

Definicija 4.3. *Neka je $n \neq 0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Skup od m različitih nenul polinoma iz $\mathbb{Z}[X]$ nazivamo polinomijalnom $D(n)$-m-torkom, ako je produkt bilo koja dva različita elementa skupa uvećan za n potpuni kvadrat nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.*

Definicija 4.4. *Za skup $\{a,b,c;d\}$ od četiri nenul različita polinoma iz $\mathbb{Z}[X]$, od kojih je barem jedan polinom nekonstantan, kažemo da ima svojstvo $D(-1;1)$, ili da je polinomijalna $D(-1;1)$-četvorka, ako je $\{a,b,c\}$ polinomijalna $D(-1)$-trojka i ako je svaki od polinoma $ad+1$, $bd+1$ i $cd+1$ potpuni kvadrat nekog polinoma iz $\mathbb{Z}[X]$.*

Glavni rezultat ovog poglavlja će biti sljedeći teorem koji rješava polinomijalnu varijantu Slutnje 4.2 pod nekim uvjetima.

Teorem 4.5. *Neka je $\{a,b,c\}$ polinomijalna $D(-1)$-trojka takva da je $0<a<b<c$. Ako je barem jedan od sljedeća dva uvjeta zadovoljen*

i) $\deg(c) < \dfrac{3\deg(a)+5\deg(b)}{2}$,

ii) ne postoji proširenje $\{a,b,c\}$ do $D(-1;1)$-četvorke s $0<d<c$ i $d \neq d_-$,

onda takva trojka može biti proširena do $D(-1;1)$-četvorke samo s polinomima $d_\pm$. Preciznije, ako su $r,s,t \in \mathbb{Z}[X]$ polinomi s pozitivnim vodećim koeficijentima koji zadovoljavaju $ab-1=r^2$, $ac-1=s^2$ i $bc-1=t^2$, i ako je $\{a,b,c;d\}$ polinomijalna $D(-1;1)$-četvorka, onda je

$$d = d_\pm = -(a+b+c)+2(abc \pm rst).$$

Napomena 4.6. *Prvi uvjet zadovoljava, npr. trojka $\{a,b,c\}=\{1,x^2+1,4x^4+1\}$ ili $\{a,b,c\}=\{1,4x^2+1,16x^6-8x^4+x^2+1\}$. Primjer kada prvi uvjet nije zadovoljen je npr. za trojku $\{a,b,c\}=\{1,x^2+1,64x^8+64x^6+16x^4+1\}$.*

Prvi uvjet povlači drugi uvjet, što će biti objašnjeno pri kraju potpoglavlja. Nažalost, kada taj uvjet o odnosima stupnjeva nije zadovoljen, drugi uvjet je potreban kako bismo mogli odrediti inicijalne vrijednosti nizova iz Potpoglavlja 4.1. Vjerujemo da je drugi uvjet, a time i polinomijalna varijanta Slutnje 4.2, uvijek istinit za $D(-1;1)$-četvorke.

Da bismo dokazali Teorem 4.5, koristimo uglavnom metode iz [20] i [21], no kako se ne može sve pokazati analogno, bile su potrebne i neke nove ideje, što čini ovaj rezultat zanimljivim. Važno je primijetiti da su polinomi koje promatramo iz prstena $\mathbb{Z}[X]$ na kojem imamo uređaj.

Kao i prije, prvo ćemo promatrati sustav pellovskih jednadžbi pridružen proširenju $D(-1)$-trojke do $D(-1;1)$-četvorke. Zatim ćemo promatrati presjeke binarnih rekurzivnih nizova, te dokazati tvrdnju teorema koristeći kongruencije i princip pronalaženja razlika među elementima (eng. *gap principle*).

4.1 Sustav pellovskih jednadžbi i kongruencije pridružene problemu

Označimo s $\mathbb{Z}^+[X]$ skup polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i s pozitivnim vodećim koeficijentom. Za $a, b \in \mathbb{Z}[X]$, definiramo da vrijedi relacija $a < b$ ako je $b - a \in \mathbb{Z}^+[X]$. Također, definiramo apsolutnu vrijednost polinoma $a \in \mathbb{Z}[X]$ na prirodan način,

$$|a| = \begin{cases} a, & \textit{ako je } a \geq 0 \\ -a, & \textit{ako je } a < 0. \end{cases}$$

Od sada pretpostavljamo da je $\{a, b, c\}$ polinomijalna $D(-1)$-trojka takva da vrijedi $a < b < c$. Postoje $r, s, t \in \mathbb{Z}^+[X]$ takvi da je

$$ab - 1 = r^2, \quad ac - 1 = s^2, \quad bc - 1 = t^2. \tag{4.1}$$

Pretpostavimo da polinomijalnu $D(-1)$-trojku $\{a, b, c\}$ možemo proširiti do $D(-1;1)$-četvorke s $d \in \mathbb{Z}^+[X]$. Tada postoje polinomi $x, y, z \in \mathbb{Z}^+[X]$ takvi da je

$$ad + 1 = x^2, \quad bd + 1 = y^2, \quad cd + 1 = z^2. \tag{4.2}$$

Najviše jedan od polinoma a, b i c je konstantan, inače imamo $D(-1)$-trojku koju ne možemo proširiti s nekonstantnim polinomom d, što se lako može vidjeti uspoređujući vodeće koeficijente u jednadžbama (4.1) ili (4.2). Naime, ako pretpostavimo da su a, b i c konstantni polinomi, imamo po definiciji da d mora biti nekonstantan. Neka je d_0 vodeći koeficijent polinoma d. Iz jednakosti (4.2) imamo da je $ad_0 = x_0^2$, $bd_0 = y_0^2$ i $cd_0 = z_0^2$, odakle dobijemo da su ac, bc i ab potpuni kvadrati u $\mathbb{Z}$. S druge strane iz jednakosti (4.1) imamo da su $ab - 1$, $ac - 1$ i $bc - 1$ potpuni kvadrati, što naravno nije moguće pa zbog pretpostavke $a < b < c$ imamo da c nije konstantni polinom. Istim argumentima pokažemo da ne mogu biti konstantni ni a i b istovremeno pa je i b nekonstantni polinom. Dakle, $\deg(c) \geq \deg(b) > 0$.

Označimo s a_0, b_0, c_0, s_0, t_0 vodeće koeficijente polinoma a, b, c, s, t, redom. Tada, iz (4.1), imamo $a_0c_0 = s_0^2$ i $b_0c_0 = t_0^2$. Dakle, a_0, b_0 i c_0 moraju imati isti predznak, pa zato nemamo gubitak općenitosti ako pretpostavimo da su polinomi $a, b, c \in \mathbb{Z}^+[X]$.

Proširenje $D(-1)$-trojke do $D(-1;1)$-četvorke uvijek postoji, jer možemo uzeti $d = d_\pm$ što je iskazano u sljedećoj lemi koja je dokazana u [23].

Lema 4.7. *Neka je $\{a, b, c\}$ polinomijalna $D(-1)$-trojka i neka vrijedi (4.1). Tada postoje polinomi $d_\pm, u_\pm, v_\pm, w_\pm \in \mathbb{Z}[X]$ takvi da je*

$$ad_\pm + 1 = (u_\pm)^2, \quad bd_\pm + 1 = (v_\pm)^2, \quad cd_\pm + 1 = (w_\pm)^2. \tag{4.3}$$

Preciznije,

$$d_{\pm} = -(a+b+c) + 2abc \pm 2rst, \tag{4.4}$$

$$u_{\pm} = at \pm rs, \quad v_{\pm} = bs \pm rt, \quad w_{\pm} = cr \pm st. \tag{4.5}$$

Lako se vidi da je

$$d_{+} \cdot d_{-} = (c-a-b-2r)(c-a-b+2r). \tag{4.6}$$

i

$$c = a + b - d_{\pm} + 2abd_{\pm} \mp 2ru_{\pm}v_{\pm},$$

pa slično kao u cjelobrojnom $D(4)$-slučaju vidimo ako je $d_{-} = 0$, onda je $c = a + b \pm 2r$ i obratno.

Označimo

$$\deg(a) = \alpha, \quad \deg(b) = \beta \ \text{ i } \ \deg(\text{c}) = \gamma.$$

Imamo da je $\alpha \geq 0$ i $\beta > 0$.

Dokažimo prvo „gap principle", koji nam daje svojstva elementa $c > \max\{a, b\}$ kada c nije najmanji mogući. Kao što smo mogli vidjeti i u prethodnom poglavlju, ovakvo svojstvo se često koristi u cjelobrojnom slučaju i u drugim razmatranjima polinomijalne varijante problema (vidi npr. [21, Lemma 4]).

Lema 4.8. *Neka je $\{a, b, c\}$ polinomijalna $D(-1)$-trojka za koju vrijedi $a < b < c$. Tada je $c = a + b + 2r$ ili $\gamma \geq \deg(d_{-}) + \alpha + \beta$, gdje je d_{-} definiran s (4.4).*

Dokaz. Iz (4.4), možemo zaključiti $\deg(d_{+}) = \alpha + \beta + \gamma$. Neka je $\deg(d_{-}) \geq 0$. Iz (4.6) i činjenice da je $a < b < c$ dobijemo

$$\deg(d_{+}) + \deg(d_{-}) = \deg((c-a-b)^2 - (2r)^2) \leq 2\gamma$$

pa je $\deg(d_{-}) \leq \gamma - \alpha - \beta$. Kako imamo najviše jedan konstantni polinom u $D(-1)$-trojki $\{a, b, c\}$, zaključujemo $\deg(d_{-}) < \gamma$.

Sada imamo dvije mogućnosti.

1) Ako je $d_{-} = 0$, onda iz (4.6) dobijemo $c = a + b \pm 2r$. No, kako smo pretpostavili $a < b < c$, onda ne možemo imati $c = a + b - 2r$. Dakle, $c = a + b + 2r$.

2) Ako $d_{-} \neq 0$, onda $\gamma \geq \deg(d_{-}) + \alpha + \beta$. $\square$

Primijetimo da iz Leme 4.8 imamo da je ili $\gamma \geq \alpha + \beta$ ili $c = a + b + 2r$, što nam daje raskorak između elemenata b i c i pokazat će se kao bitna činjenica u dokazu Teorema 4.5.

Eliminirajući d iz (4.2), dobijemo sljedeći sustav pellovskih jednadžbi:

$$az^2 - cx^2 = a - c, \tag{4.7}$$
$$bz^2 - cy^2 = b - c. \tag{4.8}$$

Slično kao u Lemi 2.6, možemo opisati skupove rješenja jednadžbi (4.7) i (4.8). U dokazu se koristimo dokazom iz [20, Lemma 1].

Napomena 4.9. *U sljedećoj lemi ćemo promatrati jednakost u kojoj će se nalaziti korijeni polinoma, npr. $\sqrt{a}$, što je samo formalna oznaka kojom označavamo da su koeficijenti uz iste korijene polinoma jednaki s obje strane jednakosti. Također, prirodno je definirano da je $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$.*

Lema 4.10. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{Z}^+[X]$ i pretpostavimo da su (z, x) i (z, y) rješenja jednadžbi (4.7) i (4.8) redom. Tada postoje rješenja (z_0, x_0) i (z_1, y_1), gdje su $z_0, x_0, z_1, y_1 \in \mathbb{Z}[X]$, jednadžbi (4.7) i (4.8) redom, takva da*

i) vrijede nejednakosti

$$0 < x_0, \quad x_0^2 \le a(c-a), \quad z_0^2 < c(c-a), \tag{4.9}$$
$$0 < y_1, \quad y_1^2 \le b(c-b), \quad z_1^2 < c(c-b), \tag{4.10}$$

ii) postoje cijeli brojevi $m, n \ge 0$ takvi da je

$$z\sqrt{a} + x\sqrt{c} = (z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})(2ac - 1 + 2s\sqrt{ac})^m, \tag{4.11}$$

$$z\sqrt{b} + y\sqrt{c} = (z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c})(2bc - 1 + 2t\sqrt{bc})^n. \tag{4.12}$$

Dokaz. Primijetimo da je

$$(s + \sqrt{ac})^{2m} = (s^2 + ac + 2s\sqrt{ac})^m = (2ac - 1 + 2s\sqrt{ac})^m.$$

Množeći s konjugatom $(s - \sqrt{ac})^{2m}$ dobijemo da je

$$(s + \sqrt{ac})^{2m}(s - \sqrt{ac})^{2m} = (s^2 - ac)^{2m} = (-1)^{2m} = 1. \tag{4.13}$$

Promotrimo parove (z^*, x^*) polinoma oblika

$$z^*\sqrt{a} + x^*\sqrt{c} = (z\sqrt{a} + x\sqrt{c})(2ac - 1 + 2s\sqrt{ac})^m,$$

gdje je $m \in \mathbb{Z}$ i (z, x) rješenje jednadžbe (4.7) u polinomima iz $\mathbb{Z}^+[X]$. Po (4.13) je očito da (z^*, x^*) zadovoljava (4.7).

Neka je $(2ac-1+2s\sqrt{ac})^m = p+q\sqrt{ac}$, gdje su $p,q \in \mathbb{Z}[X]$. Imamo

$$z^*\sqrt{a}+x^*\sqrt{c} = (zp+cxq)\sqrt{a}+(px+azq)\sqrt{c}.$$

Dakle, $x^* = px+azq$. Želimo pokazati da je $x^*>0$. Ako je $m \geq 0$, onda je $p,q>0$ pa je $x^*>0$. Ako je $m<0$, onda je $p>0$ i $q<0$. Ako pretpostavimo da je $x^* \leq 0$, onda $px \leq -azq$. Obje strane prethodne nejednakosti su pozitivne pa kvadriranjem dobijemo $p^2x^2 \leq a^2z^2q^2$. Iz (4.13) zaključujemo da vrijedi $p^2-acq^2=1$ i dobijemo da je $x^2+x^2q^2ac \leq q^2a^2z^2$. Dakle,

$$x^2 \leq q^2a(az^2-cx^2) = q^2a(a-c) < 0,$$

što je kontradikcija. Preostaje nam zaključiti da je $x^*>0$.

Među svim parovima (z^*,x^*), odabiremo onaj par koji ima svojstvo da je x^* minimalan, i označavamo ga s (z_0,x_0). Definiramo polinome z' i x' s

$$z'\sqrt{a}+x'\sqrt{c} = (z_0\sqrt{a}+x_0\sqrt{c})(2ac-1-2s\varepsilon\sqrt{ac}),$$

gdje je $\varepsilon=1$ ako je $z_0>0$ i $\varepsilon=-1$ ako je $z_0<0$. Iz minimalnosti od x_0 zaključujemo da je

$$x' = x_0(2ac-1)-2asz_0\varepsilon \geq x_0.$$

Ovo vodi do zaključka $x_0(ac-1) \geq as|z_0|$. Kvadrirajući nejednakost dobijemo

$$x_0^2(ac-1)^2 \geq a^2s^2z_0^2 = a(ac-1)(a-c+cx_0^2).$$

Konačno, zaključujemo $0<x_0$ i $x_0^2 \leq a(c-a)$. Granice za $|z_0|$ slijede iz (4.7).

Ovime smo dokazali da postoji rješenje (z_0,x_0) jednadžbe (4.7), koje zadovoljava (4.9), i cijeli broj $m \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi (4.11). Preostaje pokazati da je $m \geq 0$. Pretpostavimo da vrijedi $m<0$. Tada dobijemo $z=z_0p+x_0cq$ (primijetimo da je u ovom slučaju $q<0$). Iz uvjeta $z>0$, dobijemo $z_0p>-x_0cq$ gdje su obje strane nejednakosti pozitivne. Kvadrirajući nejednakost i koristeći jednadžbu $p^2-acq^2=1$, dobijemo

$$z_0^2 > x_0^2c^2q^2-acq^2z_0^2 = cq^2(c-a) \geq c(c-a).$$

Ovo je u kontradikciji s (4.9), pa možemo zaključiti $m \geq 0$.

Dokaz tvrdnji vezanih za (4.8) je analogan. □

Po Lemi 4.10 postoji nenegativan cijeli broj m i rješenje (z_0,x_0) jednadžbe (4.7) takvi da (4.9) i (4.11) vrijede. Također, postoji nenegativni cijeli broj n i rješenje (z_1,y_1) jednadžbe (4.8) takvi da (4.10) i (4.12) vrijede. Dakle, vrijedi da mora biti $z=v_m=w_n$, gdje su binarni rekurzivni nizovi $(v_m)_{m\geq 0}$ i $(w_n)_{n\geq 0}$ definirani s

$$v_0 = z_0, \quad v_1 = (2ac-1)z_0 + 2scx_0, \quad v_{m+2} = (4ac-2)v_{m+1} - v_m, \tag{4.14}$$

$$w_0 = z_1, \quad w_1 = (2bc-1)z_1 + 2tcy_1, \quad w_{n+2} = (4bc-2)w_{n+1} - w_n. \tag{4.15}$$

Promotrimo sada za koje kongruencije možemo pokazati da vrijede za elemente nizova v_m i w_n. Iz (4.14) i (4.15), lako se indukcijom dokaže sljedeća lema.

Lema 4.11. *Neka su nizovi (v_m) i (w_n) dani s (4.14) i (4.15). Tada je*

$$v_m \equiv (-1)^m z_0 \pmod{2c}, \quad w_n \equiv (-1)^n z_1 \pmod{2c}.$$

Dokaz. Promotrimo (4.14). Lako se vidi da $v_m \equiv (-1)^m z_0 \pmod{2c}$ vrijedi za $m = 0$ i $m = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $m \leq k$. Neka je $m = k+1$. Tada je

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (4ac-2)v_k - v_{k-1} \equiv -2\cdot(-1)^k z_0 - (-1)^{k-1} z_0 \pmod{2c} \\ &\equiv (-1)^{k+1} z_0 \pmod{2c}. \end{aligned}$$

Slično se dokaže i tvrdnja za w_n. $\square$

Indukcijom po m i n, redom, iz (4.14) i (4.15) dobijemo da za stupnjeve elemenata vrijede sljedeće tvrdnje.

Lema 4.12. *Neka su (v_m) i (w_n) nizovi definirani s (4.14) i (4.15). Tada za $m, n \geq 1$ imamo*

$$\begin{aligned} \deg(v_m) &= (m-1)(\alpha+\gamma) + \deg(v_1), \\ \deg(w_n) &= (n-1)(\beta+\gamma) + \deg(w_1). \end{aligned}$$

Dokaz. Tvrdnja vrijedi trivijalno za $m = 1$. Promotrimo $v_2 = (4ac-2)v_1 - v_0$. Iz ocjene za z_0, $z_0^2 < c(c-a)$, zaključujemo da je $\deg(v_0) = \deg(z_0) \leq \gamma$ pa je $\deg(v_0) \leq \deg((4ac-2)v_1) = \alpha+\gamma+\deg(v_1)$. Jedina mogućnost da su polinomi $(4ac-2)v_1$ i $v_0 = z_0$ istog stupnja je kada su stupnja γ. Označimo vodeći koeficijent polinoma c s C. Budući da je $z_0^2 < c(c-a)$, ako je $\deg z_0 = \gamma$, onda $v_0 = z_0$ mora imati vodeći koeficijent manji ili jednak C, a vodeći koeficijent polinoma $(4ac-2)v_1$ je veći ili jednak $4C$, pa vidimo da se ne poništavaju vodeći koeficijenti tih polinoma u razlici $v_2 = (4ac-2)v_1 - v_0$. Zaključujemo da je $\deg(v_2) = (\alpha+\gamma) + \deg(v_1)$, što odgovara tvrdnji.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $m \leq M$. Promotrimo $v_{M+1} = (4ac-2)v_M - v_{M-1}$. Po pretpostavci indukcije je $\deg(v_{M-1}) < \deg(v_M)$ pa je

$$\deg(v_{M+1}) = (\alpha+\gamma) + \deg(v_M) = ((M+1)-1)(\alpha+\gamma) + \deg(v_1).$$

Dokaz tvrdnje za niz w_n je analogan. □

Sljedeća lema daje vezu među vrijednostima fundamentalnih rješenja z_0 i z_1.

Lema 4.13. *Ako jednadžba $v_m = w_n$ ima rješenje, onda je $(-1)^m z_0 = (-1)^n z_1$.*

Dokaz. Ako je $v_m = w_n$, onda je po Lemi 4.11

$$(-1)^m z_0 \equiv (-1)^n z_1 \pmod{2c}.$$

Po Lemi 4.10 imamo gornje granice za apsolutnu vrijednost fundamentalnih rješenja pa je

$$|z_0| + |z_1| < c + c = 2c,$$

što znači da u kongruenciji vrijedi jednakost. □

Također se lako može pokazati indukcijom, pa ostavljamo bez dokaza, da se iste kongruencije kao u [22, Lemma 2] mogu dobiti promatrajući nizove (v_m) i (w_n) modulo $8c^2$:

$$\begin{aligned} v_m &\equiv (-1)^m(z_0 - 2acm^2 z_0 - 2csmx_0) \pmod{8c^2}, \\ w_n &\equiv (-1)^n(z_1 - 2bcn^2 z_1 - 2ctny_1) \pmod{8c^2}. \end{aligned}$$

Iz ovih kongruencija i Leme 4.13 slijedi ako je $v_m = w_n$ i $m \equiv n \pmod 2$, onda imamo $z_0 = z_1$. Koristeći navedeno, iz kongruencije $v_m \equiv w_n \pmod{8c^2}$ dobijemo kongruenciju

$$2c(am^2 z_0 + smx_0) \equiv 2c(bn^2 z_1 + tny_1) \pmod{8c^2}$$

koju podijelimo s $2c$ i dobijemo

$$am^2 z_0 + smx_0 \equiv bn^2 z_1 + tny_1 \pmod{4c}. \tag{4.16}$$

Ako vrijedi $m \not\equiv n \pmod 2$, onda imamo $z_0 = -z_1$ te analognim postupkom dobijemo da vrijedi

$$am^2 z_0 + smx_0 \equiv -bn^2 z_1 - tny_1 \pmod{4c}. \tag{4.17}$$

Da bismo dokazali Teorem 4.5, prvo ćemo odrediti moguće inicijalne vrijednosti naših nizova, tj. fundamentalna rješenja sustava pellovskih jednadžbi (4.7) i (4.8).

Promatramo nizove (v_m) i (w_n) takve da je $z^2 = v_m^2 = w_n^2 = cd + 1$, gdje je $d \in \mathbb{Z}^+[X]$. Ovo povlači da je $v_m^2 \equiv 1 \pmod c$ i $w_n^2 \equiv 1 \pmod c$. Iz Leme 4.11 slijedi da je

$$z_0^2 \equiv 1 \pmod c.$$

Tada postoji

$$d_0 = \frac{z_0^2 - 1}{c} \in \mathbb{Z}^+[X] \cup \{0\}.$$

Iz (4.7) i (4.8) imamo

$$x_0^2 = ad_0 + 1 \quad \text{i} \quad y_1^2 = bd_0 + 1. \tag{4.18}$$

Nadalje, iz (4.9), imamo $cd_0 = z_0^2 - 1 < c^2$, pa je

$$d_0 < c.$$

Dakle, možemo konstruirati polinom $d_0 < c$ takav da je ili $d_0 = 0$ ili je $\{a, b, c; d_0\}$ polinomijalna $D(-1;1)$-četvorka.

Ako je drugi uvjet Teorema 4.5 zadovoljen, imamo $d_0 = 0$ ili $d_0 = d_-$.

Ako je prvi uvjet Teorema 4.5 zadovoljen, onda isto možemo zaključiti promatrajući sljedeću lemu.

Lema 4.14 ([24, Lemma 5])**.** *Neka je $\mathbb{K}$ algebarski zatvoreno polje karakteristike 0 i neka je $\{a, b, c, d\}$ polinomijalna $D(1)$-petorka nad $\mathbb{K}[X]$. Označimo sa $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stupnjeve polinoma a, b, c, d redom i pretpostavimo da je $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$. Tada vrijedi jedna od tvrdnji:*

i) $\delta \ge \frac{3\beta+5\gamma}{2}$,

ii) $d = d_+(a, b, c) = a+b+c+2(abc+rst)$, *gdje je* $r^2 = ab+1$, $s^2 = ac+1$ *i* $t^2 = bc+1$,

iii) $\{a, b, c, d\} = \left\{\frac{\sqrt{-3}}{2}, -\frac{2\sqrt{-3}}{3}(p^2-1), \frac{-3+\sqrt{-3}}{3}p^2 + \frac{2\sqrt{-3}}{3}, \frac{3+\sqrt{-3}}{3}p^2 + \frac{2\sqrt{-3}}{3}\right\}$ *za neki nekonstantni polinom* $p \in \mathbb{K}[X]$.

Primijetimo da je $\{ia, ib, -id_0, ic\}$ polinomijalna $D(1)$-četvorka u $\mathbb{Z}[i][X] \subset \mathbb{C}[X]$. S obzirom na to da pretpostavljamo da vrijedi prvi uvjet Teorema 4.5, to jest da vrijedi nejednakost $\deg(c) < \frac{3\deg(a)+5\deg(b)}{2}$, jasno je da iz Leme 4.14 slijedi da $\{ia, ib, -id_0, ic\}$ ne može biti neregularna $D(1)$-četvorka. Ovo povlači da ili imamo regularnu četvorku ili je $id_0 = 0$ ili su neki elementi četvorke jednaki. Ako je to regularna četvorka, onda je

$$-id_0 = ia + ib + ic + 2ia \cdot ib \cdot ic - 2ir \cdot is \cdot it,$$

to jest

$$d_0 = -(a+b+c) + 2abc - 2rst = d_-.$$

Ako je $id_0 = 0$, onda je očito $d_0 = 0$. Konačno, kako je četvorka koju promatramo iz $\mathbb{Z}[i][X]$, gdje se općenito kvadrati ne mogu razlikovati za 1, jedina mogućnost da imamo jednake elemente je kada je $a = 1$ i $d_0 = -1$. Ali tada $\{a, b, c; d_0\}$ očito nije $D(-1;1)$-četvorka u $\mathbb{Z}[X]$. Dakle, mora biti $d_0 \in \{0, d_-\}$.

Iz $cd_0 + 1 = z_0^2$, ako vrijedi prva mogućnost $d_0 = 0$, onda je

1.) $z_0 = \pm 1$.

Iz druge mogućnosti, $d_0 = d_-$, koristeći (4.3), dobijemo

2.) $z_0 = \pm(cr - st)$.

4.2 Dokaz Teorema 4.5

Dovršimo dokaz Teorema 4.5. Promatrat ćemo zasebno slučajeve **1.)** i **2.)**, te u svakom od njih promatrati više različitih mogućnosti za odnose među stupnjevima polinoma a, b i c. Zasebno ćemo morati promatrati i slučajeve kada su m i n iste ili različite parnosti. S obzirom na to da pretpostavljamo da je $a < b < c$, imamo da je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, a zbog prethodnih razmatranja znamo i da je $\beta > 0$.

Slučaj 1.) $d_0 = 0$ i $z_0 = \pm 1$.

Koristeći (4.9), (4.10) i (4.18), za $d_0 = 0$ dobijemo da je $x_0 = 1$ i $y_1 = 1$. Već smo vidjeli da su produkti vodećih koeficijenata u parovima polinoma koje promatramo potpuni kvadrati pa možemo pisati $a = A^2 DX^{\alpha} + ...$, $b = B^2 DX^{\beta} + ...$ i $c = C^2 DX^{\gamma} + ...$, gdje su A, B, C, D prirodni brojevi. Promotrimo sada nekoliko slučajeva ovisno o stupnjevima polinoma a, b i c.

1. a) Pretpostavimo da je $\beta < \gamma$. Iz (4.16), ako je $m \equiv n \pmod 2$, imamo

$$\pm am^2 + sm \equiv \pm bn^2 + tn \pmod{4c}.$$

S obzirom na to da se u kongruenciji nalaze samo polinomi stupnja manjeg od stupnja polinoma c, slijedi da u kongruenciji vrijedi jednakost pa dobijemo da je $\pm am^2 + sm = \pm bn^2 + tn$, pa mora biti $\alpha = \beta$. Slično iz (4.17) imamo $\pm am^2 + sm = \mp bn^2 - tn$ za $m \not\equiv n \pmod 2$, pa je također $\alpha = \beta$. Tada po Lemi 4.12 imamo da je $m = n$, pa vidimo da mora vrijediti da su m i n iste parnosti. Dakle, $\pm m(a - b) = t - s$. Množeći s $t + s$ dobijemo $\mp m(b - a)(t + s) = t^2 - s^2 = c(b - a)$. Vidimo da bi trebalo biti

$$\mp m(t + s) = c,$$

što je u kontradikciji s $\beta < \gamma$.

1. b) Pretpostavimo da je $\alpha < \beta = \gamma$. Po Lemi 4.8 imamo ako je $c \neq a + b + 2r$, onda je $\gamma \geq \deg(d^-) + \alpha + \beta$ i $d_- \neq 0$. Iz nejednakosti vidimo da onda a i d_- moraju biti konstantni polinomi. S obzirom na to da je vodeći koeficijent od $bd_- + 1$ potpuni kvadrat, imamo da je $d_- = \mu^2 D$ za neki prirodni broj μ. Tada imamo da su $ad_- + 1$ i ad_- potpuni kvadrati, što nije moguće. Dakle, mora vrijediti $c = a + b + 2r$, pa se lako vidi da je $s = a + r$ i $t = b + r$.

Ako je $m \equiv n \pmod 2$, iz (4.16) imamo

$$\pm am^2 + am + rm \equiv \pm bn^2 + bn + rn \pmod{4c}.$$

Zbog $b \equiv -a - 2r \pmod c$, kongruencija poprima oblik

$$a(\pm m^2 \pm n^2 + n + m) = r(\mp 2n^2 - n - m).$$

Kako je $\alpha < \beta$, uspoređujući stupnjeve polinoma u jednakosti vidimo da obje strane ove jednakosti moraju biti jednake 0. Zato imamo ili $m = n = 0$, što daje $d = 0$, ili $m = n = 1$ odakle je $z_0 = z_1 = 1$ ili $z_0 = z_1 = -1$. Ako je $z_0 = z_1 = 1$, jer je $a \neq b$, imamo da je $v_1 = 2c(2a + r) - 1 \neq 2c(2b + r) - 1 = w_1$ pa vidimo da taj slučaj ne može vrijediti. Ako je $z_0 = z_1 = -1$, imamo da je $z = v_1 = w_1 = 1 + 2rc$, odakle dobijemo da je

$$d = 4r(a + r)(b + r) = -(a + b + c) + 2abc + 2rst = d_+.$$

U slučaju da je $m \not\equiv n \pmod 2$, iz (4.17) imamo $m = \mp 2n^2 + n$ što je u kontradikciji s pretpostavkom o parnosti brojeva m i n.

1. c) Pretpostavimo da je $\alpha = \beta = \gamma$. Po Lemi 4.8 vidimo da tada mora biti $c = a + b + 2r$. Iz (4.14), (4.15) i Leme 4.12 zaključujemo da je $m = n$. Budući da imamo $m \equiv n \pmod 2$, iz (4.16) dobijemo

$$(\pm m^2 + m)(a - b) \equiv 0 \pmod{4c}. \tag{4.19}$$

Ako je $\pm m^2 + m = 0$, kao i prije, imamo $d = 0$, inače, ako je $\pm m^2 + m \neq 0$, onda je $k(b-a) = l(a+b+2r)$, gdje su $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq l$ i $k, l \neq 0$. Iz toga slijedi $(k-l)b-(k+l)a = 2lr$. Kvadriranjem i koristeći (4.1), dobijemo $(k - l)^2 b^2 - 2(k^2 + l^2)ab + (k + l)^2 a^2 = -4l^2$ i konačno

$$((k - l)^2 b - (k + l)^2 a)(b - a) = -4l^2.$$

Kako je polinom s desne strane stupnja 0, oba su faktora s lijeve strane polinomi stupnja 0. S obzirom na to da je $\beta > 0$, iz $\alpha = \beta > 0$ i činjenice da je $b - a$ konstantni polinom imamo da za $p = \alpha = \beta$ vrijedi $a_p = b_p \neq 0$. Označimo $b = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_0$ i $a = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0$. Budući da imamo $a_p = b_p$, polinom $(k - l)^2 b - (k + l)^2 a$ tada ima oblik

$$(k - l)^2(b_p x^p + \cdots + b_0) - (k + l)^2(a_p x^p + \cdots + a_0) = -4klb_p x^p + \cdots$$

i kako i taj polinom mora biti konstantan, morali bismo imati $4kl = 0$, što nije moguće.

Slučaj 2.) $d_0 = d_-$ i $z_0 = \pm(cr - st)$.

Koristeći (4.9), (4.10) i (4.18), za $d_0 = d_-$ dobijemo $x_0 = at - rs$ i $y_1 = bs - rt$. Ako je $\beta = \gamma$, onda je $c = a + b + 2r$, što smo već vidjeli da možemo zaključiti iz Leme 4.8. U tom slučaju je $st - cr = 1$, pa je $z_0 = \pm 1$ što smo već riješili u slučaju 1). Dakle, možemo pretpostaviti $\beta < \gamma$.

Prije razrade dokaza po slučajevima za stupnjeve, promotrimo koji oblik nam poprimaju elementi nizova, koje stupnjeve imaju i koji oblik imaju kongruencije koje ćemo koristiti.

Imamo da je $x_0 = at - rs$, no kako se vodeći koeficijenti polinoma u razlici poništavaju, da bismo odredili stupanj polinoma x_0 promotrimo produkt

$$\begin{aligned} x_0 \cdot x_0' &= (at - rs)(at + rs) = a^2t^2 - r^2s^2 = \\ &= a^2(bc-1) - (ab-1)(ac-1) = a(b+c) - a^2 - 1. \end{aligned}$$

Vidimo da je $\deg(x_0 \cdot x_0') = \alpha + \gamma$ i da je $\deg(x_0') = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2}$ pa je $\deg(x_0) = \frac{\gamma-\beta}{2}$, to jest $\deg(x_0^2) = \gamma - \beta$.

Slično, da bismo odredili stupanj polinoma $y_1 = bs - rt$ promatramo da je

$$y_1 \cdot y_1' = b^2s^2 - r^2t^2 = b(a+c) - b^2 - 1,$$

pa je $\deg(y_1 \cdot y_1') = \beta + \gamma$ i $\deg(y_1') = \deg(bs + rt) = \beta + \frac{\alpha+\gamma}{2}$, iz čega zaključujemo $\deg(y_1) = \frac{\gamma-\alpha}{2}$ i $\deg(y_1^2) = \gamma - \alpha$.

Promotrimo polinome $\pm(cr - st)$, što će nam biti vrijednosti od z_0 i z_1. Ovdje imamo

$$\pm(cr - st)(cr + st) = \pm(c^2(ab-1) - (ac-1)(bc-1)) = \pm((a+b)c - c^2 - 1)$$

i vidimo da je $\deg(\pm(cr - st)(cr + st)) = 2\gamma$ i $\deg(cr + st) = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}$ pa vrijedi $\deg(\pm(cr - st)) = \deg(z_0) = \deg(z_1) = \gamma - \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $\deg(z_0^2) = \deg(z_1^2) = 2\gamma - (\alpha + \beta)$.

Ako je $z_0 = cr - st$, imamo da je $v_1 = cr + st$ i $\deg(v_1) = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}$. Inače, ako je $z_0 = st - cr$, možemo direktnim uvrštavanjem vidjeti da je $v_1 = 4acst - 4acr^2 + 3cr - st$ i da su vodeći koeficijenti polinoma $4acst$ i $4acr^2$ jednaki, pa da bismo odredili stupanj polinoma v_1 promatramo produkt

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_1' &= ((2ac-1)z_0 + 2scx_0)(-(2ac-1)z_0 + 2scx_0) = 4s^2c^2x_0^2 - (4a^2c^2 - 4ac + 1)z_0^2 = \\ &= 4ac^3x_0^2 - 4c^2x_0^2 - 4a^2c^2z_0^2 + 4acz_0^2 - z_0^2 = (4ac^2 - 4c)(cx_0^2 - az_0^2) - z_0^2 = \\ &= 4c(c-a)(ac-1) - z_0^2, \end{aligned}$$

gdje smo koristili (4.7), pa vidimo da je $\deg(v_1 \cdot v_1') = 3\gamma + \alpha$ i $\deg(v_1') = \deg(cr + st) = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}$, i zaključujemo konačno $\deg(v_1) = 2\gamma + \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Ako je $z_1 = cr - st$, imamo da je $w_1 = cr + st$ pa je $\deg(w_1) = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}$. S druge strane, ako je $z_1 = st - cr$, analognim postupkom kao za z_0 dobijemo da je $\deg(w_1) = 2\gamma + \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Promotrimo sada kongruencije koje ćemo koristiti. Budući da vrijedi $\deg(d_-) < \gamma$, iz izraza za d_- imamo da je

$$-2rst \equiv d_- + a + b \pmod{c}.$$

Uvrstimo u kongruenciju (4.16) izraze za $z_0,\ z_1,\ x_0,\ y_1$ i dobijemo

$$\pm am^2st - mast - mr \equiv \pm bn^2 - nbst - nr \pmod{c}$$

te ako pomnožimo s $2st$ i koristimo da je $s^2t^2 \equiv 1 \pmod{c}$ imamo

$$2(\pm am^2 - am) - 2(\pm bn^2 - bn) \equiv -2rst(n-m) \pmod{c},$$

to jest

$$2(\pm am^2 - am) - 2(\pm bn^2 - bn) \equiv (a+b+d_-)(n-m) \pmod{c}. \tag{4.20}$$

Slično iz kongruencije (4.17) dobijemo

$$-2(\pm am^2 - am) - 2(\pm bn^2 - bn) \equiv (a+b+d_-)(n+m) \pmod{c}. \tag{4.21}$$

Razradimo sada ostatak dokaza po slučajevima za stupnjeve polinoma koje promatramo.

2. a) Pretpostavimo prvo $\alpha = \beta < \gamma$. Ako je $m \not\equiv n \pmod{2}$, imamo $\deg(v_1) = 2\gamma$ i $\deg(w_1) = \alpha + \gamma$ ili obratno. Iz Leme 4.12 dobijemo

$$(m-n-1)(\alpha+\gamma) + 2\gamma = 0.$$

Moramo imati $\alpha > 0$, jer je $\alpha = \beta > 0$, pa treba biti $-2\gamma < (m-n-1)(\alpha+\gamma) < 0$ odakle je jedina mogućnost $m-n-1 = -1$, tj. $m = n$, no to je u kontradikciji s pretpostavkom o parnosti brojeva m i n, pa ovaj slučaj ne može vrijediti.

S druge strane, ako je $m \equiv n \pmod{2}$, jer je $z_0 = z_1$ i $\deg(v_1) = \deg(w_1) \in \{2\gamma, \gamma+\alpha\}$, iz Leme 4.12 zaključujemo $m = n$. Uvrstimo li $m = n$ u (4.20), koristeći da je $\beta < \gamma$, dobijemo jednakost u kongruenciji pa vrijedi

$$\pm m(m-1)(a-b) = 0. \tag{4.22}$$

Ovo može vrijediti samo ako je $m = n = 0$, što vodi do zaključka da je $d = d_-$, ili $m = n = 1$, gdje iz (4.22) prvo zaključujemo da je $z_0 = cr - st$, zatim da je $z = v_1 = w_1 = cr + st$, i konačno $d = d_+$.

2. b) Pretpostavimo da je $\alpha < \beta < \gamma$. Promotrimo zasebno slučajeve s obzirom na stupanj polinoma d_-.

Pretpostavimo prvo da je $\deg(d_-) < \beta$ i $m \equiv n \pmod{2}$. Tada iz (4.20) uspoređujući vodeće koeficijente, imamo da je $\pm 2n(n \mp 1) = m - n$. Dakle,

$$m = n \pm 2n(n \mp 1) = \begin{cases} -2n^2 - n, & \textit{ako je } z_0 = cr - st < 0, \\ 2n^2 - n, & \textit{ako je } z_0 = cr - st > 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

U oba slučaja možemo imati $m = n = 0$, iz čega imamo $d = d_-$. Prvi slučaj može vrijediti samo tada, inače bismo dobili $m < 0$, što nije moguće. U drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned} \deg(v_1) &= 2\gamma + \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \deg(w_1) &= 2\gamma + \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Iz toga i Leme 4.12, dobijemo

$$\begin{aligned} \deg(v_m) &= 2\gamma + \frac{\alpha - \beta}{2} + (m-1)(\alpha + \gamma), \\ \deg(w_n) &= 2\gamma + \frac{\beta - \alpha}{2} + (n-1)(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Onda imamo da iz jednakosti $v_m = w_n$ slijedi da je

$$m(\alpha + \gamma) = n(\beta + \gamma). \tag{4.24}$$

Iz toga, za $n \geq m \geq 1$, dobijemo kontradikciju. Dakle, ili je $n < m$ ili $m = n = 0$. Štoviše, jer imamo $m = 2n^2 - n$, vrijedi $(2n-2)(\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$. Ovo može vrijediti samo za $n = 1$, no tada dobijemo $\alpha = \beta$, što ne može biti u ovom slučaju.

S druge strane, ako je $m \not\equiv n \pmod 2$, iz (4.21), uspoređujući vodeće koeficijente, dobijemo da je $\pm 2n(n \pm 1) = m + n$ što je u kontradikciji s pretpostavkom o parnosti brojeva m i n.

Ako je $\deg(d_-) > \beta$ i ako je $m \not\equiv n \pmod 2$ iz (4.21), uspoređujući vodeće koeficijente, imamo $m + n = 0$, što vodi u kontradikciju. S druge strane, ako je $m \equiv n \pmod 2$, onda iz (4.20) dobijemo $0 = m - n$, tj. $m = n$. U ovom slučaju, uvrštavanjem u kongruenciju (4.20) dobijemo $\mp m(m \mp 1)(a - b) = 0$. Ovo je moguće samo za $m = 0$ ili $m = 1$. Za $m = n = 0$ imamo $d = d_-$. Slučaj $m = n = 1$ nije moguć ako je $z_0 > 0$, što smo već pokazali. Za $z_0 = cr - st$, imamo $z = v_1 = w_1 = cr + st$ i $d = d_+$.

Pretpostavimo konačno da je $\deg(d_-) = \beta$. Kako je $s^2t^2 \equiv 1 \pmod{c}$, postoji polinom $c_1 \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ takav da je $\deg(c_1) \geq \frac{\gamma}{2}$, $c_1 | c$ i

$$st \equiv \pm 1 \pmod{c_1}. \tag{4.25}$$

Iz Leme 4.8 dobijemo $\beta \leq \frac{\gamma - \alpha}{2}$.

Promotrimo kongruencije (4.20) i (4.21) modulo c_1 i iskoristimo $a + b + d_- \equiv -2rst \equiv \mp 2r \pmod{c_1}$, te dobijemo

$$2(\pm am^2 - am) - 2(\pm bn^2 - bn) \equiv \mp 2r(n - m) \pmod{c_1}, \tag{4.26}$$

$$-2(\pm am^2 - am) - 2(\pm bn^2 - bn) \equiv \mp 2r(n + m) \pmod{c_1}. \tag{4.27}$$

U oba slučaja dobivamo kongruenciju modulo c_1 s polinomom stupnja $\frac{\alpha+\beta}{2}$ na desnoj strani kongruencije, a na lijevoj strani polinom stupnja β. Ako je $\beta < \frac{\gamma}{2}$, imamo kontradikciju, osim za $\pm 2n(n \mp 1) = 0$, što nas dovodi do zaključka da je $n = 0$ ili $n = 1$, u oba slučaja. Za $n = 0$, zaključujemo da je $m = 0$, što u slučaju da su m i n iste parnosti vodi do zaključka da je $d = d_-$, a ako su m i n različite parnosti do očite kontradikcije. Analogno, za $n = 1$ slijedi da je $m = 1$, ako su iste parnosti, odakle imamo $d = d_+$, a u slučaju da je $m \not\equiv n \pmod 2$ imamo $m = -1$, jer je tu $m + n = 0$, što nije moguće.

Preostaje nam ispitati mogućnost da je $\beta = \frac{\gamma}{2}$. Budući da je $\beta \leq \frac{\gamma-\alpha}{2}$, u ovom slučaju mora biti $\alpha = 0$. Polinomijalnom $D(-1)$-paru $\{a, b\}$ možemo pridružiti pellovsku jednadžbu

$$at^2 - bs^2 = b - a, \tag{4.28}$$

koja daje sva proširenja para $\{a, b\}$ do polinomijalne $D(-1)$-trojke $\{a, b, c\}$. Ako označimo s (t_0, s_0) fundamentalno rješenje jednadžbe (4.28), možemo paru $\{a, b\}$ pridružiti binarni rekurzivni niz $(\widetilde{t}_\nu)_{\nu \geq 0}$ definiran s

$$\widetilde{t}_0 = t_0, \quad \widetilde{t}_1 = (2ab - 1)t_0 + 2rbs_0, \quad \widetilde{t}_{\nu+2} = (4ab - 2)\widetilde{t}_{\nu+1} - \widetilde{t}_\nu.$$

Slično kao u dokazu Leme 4.10, dobijemo $|t_0| < b$. Buduq'ci da je $\alpha = 0$ i $\beta = \frac{\gamma}{2}$, vidimo iz (4.28) da moramo imati $\deg(t) = \frac{3\beta}{2}$. Lako se pokaže i da je $\widetilde{t}_v \equiv (-1)^v t_0 \pmod b$. S druge strane, iz $bc - 1 = t^2$, koristeći prethodnu kongruenciju, imamo $t_0^2 \equiv -1 \pmod b$ pa zaključujemo $\frac{\beta}{2} \leq \deg(t_0) \leq \beta$. Indukcijom možemo pokazati da je $\deg(\widetilde{t}_v) = (v-1)(\alpha + \beta) + \deg(\widetilde{t}_1)$ za $v \geq 1$, što nas dovodi do zaključka da je jedina mogućnost $\deg(t_0) = \frac{\beta}{2}$. To slijedi iz činjenice da je $\beta \leq \deg(\widetilde{t}_1) \leq 2\beta$ odakle imamo $\deg(\widetilde{t}_2) \geq 2\beta > \frac{3\beta}{2}$, pa je jedina mogućnost za t da je $t = t_1$. Imamo $\deg(\widetilde{t}_1) = \frac{3\beta}{2}$ i $\deg(t_0) = \frac{\beta}{2}$ te primijetimo da je polinom $(2ab-1)^2 t_0^2 - 4r^2b^2s_0^2$ stupnja 3β u tom slučaju. Sada iz (4.28) dobijemo $\deg(s_0) = 0$ i $ac_0 = s_0^2 + 1$ je konstantni polinom. Tada ac_0 mora biti potpun kvadrat, jer je $\{a, b, c_0\}$ također polinomijalna $D(-1)$-trojka. Ovo je moguće samo za $a = c_0 = 1$. Dakle, imamo $s_0 = 0$ i $t_0 = \sqrt{b-1} = r$. Sva rješenja t jednadžbe (4.28) zadovoljavaju linearnu rekurziju

$$\widetilde{t}_0 = r, \quad \widetilde{t}_1 = (2ab-1)r, \quad \widetilde{t}_{\nu+2} = (4ab-2)\widetilde{t}_{\nu+1} - \widetilde{t}_\nu$$

i zanimaju nas oni $t = \widetilde{t}_\nu$ za koje je $\deg(t) = \frac{3\beta}{2}$. Zaključujemo da je $t = \widetilde{t}_1$ pa dobijemo $c = 4b^2 - 8b + 5$. Koristeći (4.3) i (4.5), konačno dobijemo da je $d_- = b - 2$.

Sada iz (4.20) i (4.21), uspoređujući vodeće koeficijente, dobijemo da je $\pm 2n(n \mp 1) = 2(m - n)$ u slučaju $m \equiv n \pmod 2$, i $\pm 2n(n \pm 1) = 2(m + n)$ ako je $m \not\equiv n \pmod 2$. U drugom slučaju, imamo $m = \pm n^2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom o parnosti brojeva m i n. U slučaju da su m i n iste parnosti imamo

$$m = n \pm n(n \mp 1) = \begin{cases} -n^2, & \textit{ako je } z_0 = cr - st < 0 \\ n^2, & \textit{ako je } z_0 = cr - st > 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

U oba slučaja možemo imati $m = n = 0$, što vodi do zaključka $d = d_-$. U prvom slučaju samo ovo može vrijediti, inače dobijemo $m < 0$, što nije moguće. U drugom slučaju, za $v_m = w_n$, vrijedi također jednakost (4.24), pa imamo

$$2n^2\beta = 3n\beta,$$

što očito nije moguće za nenegativan cijeli broj n. Ovime završavamo dokaz Teorema 4.5 i vidimo da su nam jedine mogućnosti za proširenje $D(-1)$-trojke do $D(-1;1)$-četvorke s elementima $d = d_\pm$, što je i trebalo pokazati.

Bibliografija

[1] Y. M. Aleksentsev, *The Hilbert polynomial and linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Izv. Math. **72** (2008), 1063–1110.

[2] Lj. Baćić, *Sets in which xy+4 is always a square and problem of the extensibility of some parametric Diophantine triples*, Ph.D. dissertation, University of Zagreb, 2014. (In Croatian)

[3] Lj. Baćić, A. Filipin, *A note on the number of $D(4)$-quintuples*, Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. **18(519)** (2014), 7–13.

[4] Lj. Baćić, A. Filipin, *The extensibility of $D(4)$-pairs*, Math. Commun. **18** (2013), no. 2, 447–456.

[5] A. Baker, H. Davenport, *The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **20** (1969) 129–137.

[6] A. Baker, G. Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J. Reine Angew. Math. **442** (1993) 19–62.

[7] M. A. Bennett, *On the number of solutions of simultaneous Pell equations*, J. Reine Angew. Math. **498** (1998), 173–199.

[8] M. Bliznac, A. Filipin, *An upper bound for the number of Diophantine quintuples*, Bull. Aust. Math. Soc., **94(3)** (2016), 384–394.

[9] M. Bliznac Trebješanin, A. Filipin, *Nonexistence of $D(4)$-quintuples*, preprint, `arXiv:1610.01874v3 [math.NT]`

[10] M. Bliznac Trebješanin, A. Filipin, A. Jurasić, *On the polynomial quadruples with the property $D(-1;1)$*, Tokyo J. Math., to appear.

[11] M. Cipu, *Further remarks on Diophantine quintuples*, Acta Arith. **168** (2015), no. 3, 201–219

[12] M. Cipu, A. Filipin, Y. Fujita, *Bounds for Diophantine quintuples II*, Publ. Math. Debrecen **86** (2016), 59–78.

[13] M. Cipu, Y. Fujita, *Bounds for Diophantine quintuples* , Glas. Mat. Ser. III **50** (2015), 25–34.

[14] M. Cipu, T. Trudgian, *Searching for Diophantine quintuples*, Acta Arith. **173** (2016), 365–382.

[15] A. Dudek, *On the Number of Divisors of* $n^2 - 1$, Bull. Aust. Math. Soc. **93** (2016), 194–198.

[16] A. Dujella, *There are only finitely many Diophantine quintuples*, J. Reine Angew. Math. **566** (2004), 183–214.

[17] A. Dujella, M. Mikić, *On the torsion group of elliptic curves induced by* $D(4)$*-triples*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat. **22** (2014), no. 2, 79–90

[18] A. Dujella, *Diophantine* m*-tuples*, raspoloživo na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dtuples.html`, [datum pristupa sadržaju: 30.5.2017.].

[19] A. Dujella, A. Filipin, C. Fuchs, *Effective solution of the* $D(-1)$*-quadruple conjecture*, Acta. Arith. **128.4** (2007), 319–338.

[20] A. Dujella, C. Fuchs, *A polynomial variant of a problem of Diophantus and Euler*, Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), 797–811.

[21] A. Dujella, C. Fuchs, *Complete solution of the polynomial version of a problem of Diophantus*, J. Number Theory **106** (2004), 326–344.

[22] A. Dujella, C. Fuchs, *Complete solution of a problem of Diophantus and Euler*, J. London Math. Soc. **71** (2005), 35–52.

[23] A. Dujella, C. Fuchs, R. F. Tichy, *Diophantine* m*-tuples for linear polynomials*, Period. Math. Hungar. **45** (2002), 21–33.

[24] A. Dujella, A. Jurasić, *On the size of sets in a polynomial variant of a problem of Diophantus*, Int. J. Number Theory **6** (2010), 1449–1471.

[25] A. Dujella, A. Pethő, *A generalization of a theorem of Baker and Davenport*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **49** (1998), 291–306.

[26] A. Dujella, A. M. S. Ramasamy, *Fibonacci numbers and sets with the property* $D(4)$, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **12(3)** (2005), 401–412.

[27] P. Erdős, *On the sum* $\sum_{k=1}^{x} d(f(k))$*, Trans. Amer. Math. Soc. On the sum* $\sum_{k=1}^{x} d(f(k))$, J. London Math. Soc. **27** (1952), 7–15.

[28] A. Filipin, *There does not exist a $D(4)$-sextuple*, J. Number Theory **128** (2008), 1555–1565.

[29] A. Filipin, *An irregular $D(4)$-quadruple cannot be extended to a quintuple*, Acta Arith. **136** (2009), no. 2, 167–176.

[30] A. Filipin, *On the size of sets in which $xy + 4$ is always a square*, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), no. 4, 1195–1224.

[31] A. Filipin, *On the polynomial parametric family of the sets with the property $D(-1; 1)$*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **16** (2010), 1–8.

[32] A. Filipin, *There are only finitely many $D(4)$-quintuples*, Rocky Mountain J. Math. **41** (2011), no. 6, 1847–1859.

[33] A. Filipin, *The extension of some $D(4)$-pairs*, Notes Number Theory Discrete Math. **23** (2017), 126–135.

[34] Y. Fujita, *The $D(1)$-extensions of $D(-1)$-triples $\{1, 2, c\}$ and integer points on the attached elliptic curves*, Acta Arith. **128** (2007), 349–375.

[35] Y. Fujita, *The Hoggatt-Bergum conjecture on $D(-1)$-triples $\{F_{2k+1}, F_{2k+3}, F_{2k+5}\}$ and integer points on the attached elliptic curves*, Rocky Mountain J. Math. **39** (2009), 1907–1932.

[36] Y. Fujita, *Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple*, J. Number Theory **129** (2009), 15–29.

[37] B. He, A. Togbé, *On the $D(-1)$-triple $\{1, k^2 + 1, k^2 + 2k + 2\}$ and its unique $D(1)$-extension*, J. Number Theory **131** (2011), 120–137.

[38] B. He, A. Togbé, V. Ziegler, *There is no Diophantine quintuple*, preprint, `arXiv:1610.04020v1 [math.NT]`

[39] T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge, University Press, 1910.

[40] A. J. Hildebrand, *Introduction to Analytic Number Theory*, raspoloživo na: `http://www.math.illinois.edu/~ajh/ant/main.pdf`, [datum pristupa sadržaju: 30.5.2017.].

[41] C. Hooley, *On the number of divisors of quadratic polynomials*, Acta Math. **110** (1963), 97—114

[42] K. Lapkova, *On the average number of divisors of reducible quadratic polynomials*, J. Number Theory **180** (2017), 710–719.

[43] M. Laurent, *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II*, Acta Arith. **133 (4)** (2008), 325–348.

[44] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers II* , Izv. Math **64** (2000), 1217–1269.

[45] M. Mignotte, *A kit on linear forms in three logarithms*, Preprint.

[46] J. H. Rickert, *Simultaneous rational approximations and related Diophantine equations*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **113** (1993) 461–472.

[47] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press, 1986.

[48] T. Trudgian, *Bounds on the number of Diophantine quintuples*, J. Number Theory **157** (2015), 233–249.

[49] I. M. Vinogradov, *Elements of number theory*, Dover, New York, 1954.

Sažetak

Diofantskom $D(n)$-m-torkom nazivamo skup od m prirodnih brojeva takvih da je produkt svaka dva različita broja uvećan za n kvadrat nekog prirodnog broja. Najčešće se promatraju problemi kada je $n = 1$, no zbog sličnih svojstava, zanimljiv je i slučaj kada je $n = 4$. U prva tri poglavlja predstavljeni su novi rezultati vezani za $D(4)$-m-torke. Promatrali smo neke aritmetičke sume vezane za prebrojavanje mogućih parova unutar zadanih granica, problem proširenja $D(4)$-trojke do $D(4)$-četvorke te svojstva elemenata binarnih rekurzivnih nizova pridruženih tom proširenju. U trećem poglavlju je predstavljen dokaz nepostojanja $D(4)$-petorke te je to i opsegom i značajem centralni rezultat ovog rada.

U posljednjem poglavlju smo prezentirali rezultat vezan za polinomijalnu varijantu diofantskih m-torki. Naime, ako umjesto skupova cijelih brojeva promatramo skupove polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, možemo dokazati neke nove zanimljive rezultate. Mi smo promatrali proširenje polinomijalne $D(-1)$-trojke $\{a, b, c\}$ elementom d takvim da su $ad + 1$, $bd + 1$ i $cd + 1$ kvadrati polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i uz neke uvjete smo dokazali da je takav d jedinstven.

Summary

Diophantine $D(n)$-m-tuple is a set of m positive integers such that a product of each two distinct elements of a set increased by n is a perfect square. The case where $n = 1$ is the most studied one, but the case where $n = 4$ is also interesting, especially because of similar properties between the two cases. In the first three chapters, we will present some new results concerning $D(4)$-m-tuples. In the first and second chapter we proved which upper bounds hold for some arithmetical sums that can be used to estimate a number of possible $D(4)$-pairs in a given interval and we studied a problem of extending a $D(4)$-triple to a $D(4)$-quadruple and properties of elements of binary recurrence sequences associated with that extension. In the third chapter we present a proof of nonexistence of $D(4)$-quintuples, which is a central part of this thesis by its significance and size of the content.

In the last chapter, one problem concerning a polynomial variant of the problem of Diophantus is presented. Instead of considering sets of positive integers, we observe sets containing polynomials with integer coefficients for which it is usually possible to prove some similar results as in the integer case. We have considered an extension of polynomial $D(-1)$-triple $\{a, b, c\}$ with an element d such that polynomials $ad + 1$, $bd + 1$ and $cd + 1$ are perfect squares of polynomials with integer coefficients and we proved that such d must be unique under some conditions.

Životopis

Marija Bliznac Trebješanin rođena je 15. ožujka 1991. godine u Splitu u Hrvatskoj. U Žrnovnici pohađa osnovnu školu, a 2009. godine završava III. gimnaziju u Splitu. Iste godine upisuje preddiplomski studij matematike i informatike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu, te 2012. započinje diplomski studij matematike, smjer računarski. Tokom studija je nagrađena Dekanovom i Rektorovom nagradom. Titulu magistre matematike stječe 2014. godine s radom naslova *Složenost algoritama s primjenama u teoriji računarstva.*

U akademskoj godini 2014./2015. upisuje poslijediplomski doktorski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. U veljači 2015. godine zapošljava se na Građevinskom fakultetu u Zagrebu kao član projekta *Diofantove m-torke, eliptičke krivulje, Thueove i indeksne jednadžbe*, voditelja akademika Andreja Dujelle, te nastavlja doktorski studij uz mentorstvo prof. dr. sc. Alana Filipina i financiranje Hrvatske zaklade za znanost. Članica je *Seminara za teoriju brojeva i algebru*, gdje je i održala nekoliko seminara. Od ožujka 2017. godine zaposlena je kao asistent na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu.

Objavila je dva rada u SCIE referentnim časopisima te sudjelovala na nekoliko konferencija, gdje je izlagala svoje radove.

Objavljeni radovi

1. M. Bliznac, A. Filipin, *An upper bound for the number of Diophantine quintuples*, Bull. Aust. Math. Soc. **94(3)** (2016), 384–394.

2. M. Bliznac Trebješanin, A. Filipin, A. Jurasić, *On the polynomial quadruples with the property* $D(-1;1)$, Tokyo J. Math., to appear.