Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Zdravko Čuka

TOPOLOŠKE GRUPE GRUBOGA OBLIKA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2018.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Zdravko Čuka

TOPOLOŠKE GRUPE GRUBOGA OBLIKA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Nikola Koceić Bilan

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Zdravko Čuka

TOPOLOGICAL COARSE SHAPE GROUPS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof. dr. sc. Nikola Koceić Bilan

Zagreb, 2018

ZAHVALE

Iskrene zahvale mojem mentoru prof. dr. sc. Nikoli Koceiću Bilanu na ukazanom povjerenju te uloženom trudu i velikoj pomoći u svim aspektima koji su doveli u konačnici do izrade ovog rada.

Veliko hvala i svim članovima Topološkog seminara u Splitu, posebice profesorici Vlasti Matijević i profesoru Nikici Uglešiću na svim pruženim sugestijama i savjetima koji su mi bili iznimno korisni.

Zahvaljujem se također i svim profesorima splitskog i zagrebačkog PMF-a, te kolegama sa FGAG-a u Splitu.

Naposljetku, jedno ogromno hvala obitelji i prijateljima na podršci.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Teorija oblika je dobro poznata grana topologije koja nam pruža općenitiji pogled na topološke prostore (kraće prostore) nego homotopska teorija i pomaže nam posebno u klasifikaciji prostora s lošim lokalnim svojstvima gdje su alati homotopske teorije obično nemoćni.

Njezinim utemeljiteljem smatra se poznati poljski matematičar Karol Borsuk. Kao početak teorije oblika uzima se 1968. godina kada je Borsuk objavio rad [3], a iste godine je na međunarodnoj konferenciji u Herceg Novom predstavio originalne ideje iz rada [4] gdje je zapravo po prvi put i koristio termin oblik (kompaktnog metričkog prostora). Ubrzo je oblik generaliziran za sve prostore, te su ti rezultati objedinjeni 1975. godine u knjizi *Theory of shape* [5].

Snažan doprinos teoriji oblika dugujemo jednom od najvećih hrvatskih matematičara Sibi Mardešiću. Uz brojne njegove radove posebno je bitno istaknuti knjigu *Shape theory* [23] koju je objavio s američkim matematičarem Jack Segalom 1982. godine. U njoj je obrađen sistematičan pristup (abstraktnoj) teoriji oblika tj. kategoriji oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ (za proizvoljni par kategorija $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ gdje je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija, a $\mathcal{D}$ puna i proreflektivna potkategorija od $\mathcal{C}$) i to preko inverznih sustava, te je taj jednostavniji i operabilniji način bio temelj i neizostavna referenca mnogobrojnih radova sve do danas, a taj pristup biti će korišten i u ovom radu. Za nas će najinteresantniji slučajevi biti kategorija topološkog oblika $Sh := Sh_{(HTop,HPol)}$ ($HTop$ je homotopska kategorija, $HPol$ je puna potkategorija od $HTop$ restringirana na poliedre), te analogno punktirani slučaj tj. kategorija punktiranog topološkog oblika $Sh_0 := Sh_{(HTop_0,HPol_0)}$.

Teorija oblika svoje poopćenje ima u relativno mladoj teoriji gruboga oblika (vidi [17]). Ona je, kao i teorija oblika u [23], razvijena kategorijski općenito, ali su najkonkretnije primjene u topologiji, a i mi ćemo u ovom radu najviše koristiti kategorije topološkog te punktiranog topološkog gruboga oblika $Sh^* := Sh^*_{(HTop,HPol)}$ i $Sh^*_0 := Sh^*_{(HTop_0,HPol_0)}$.

Važne algebarske invarijante kategorija Sh_0 i Sh^*_0, koje se pridružuju objektima (tj. punktiranim prostorima) su grupe oblika i gruboga oblika, redom. Nedavno je grupa oblika topologizirana u [26], pokazano je da je na taj način osnažena strukturom topološke grupe, te da je dobivena nova invarijanta oblika, prirodnog naziva topološka grupa oblika, koja uspijeva razlikovati i neke prostore koje 'klasična' grupa oblika ne može. Analognim konstrukcijama, ali jednim sistematičnijim pristupom ćemo u ovoj disertaciji topologizirati grupe gruboga oblika i proučavati dobivenu obogaćenu strukturu. Motivacija među ostalim leži u činjenici da grupe gruboga oblika sadrže odgovarajuće grupe oblike kao svoje podgrupe, a samim time općenito nude i više informacija o prostoru.

Za početak, u Poglavlju 2 naziva *Pregled elementarnih pojmova* utvrđujemo temeljnu matematičku podlogu nužnu za praćenje ostatka disertacije i formalizaciju samog sadržaja. Spomenuto poglavlje podijeljeno je na 4 manje cjeline, a u njima redom, među obrađenim pojmovima, posebice ističemo pojmove kategorije i funktora, potom homotopske kategorije i homotopske grupe, poliedra, te topološke grupe. Osnovne reference korištene u ovom pregledu su [1], [2], [9], [21], [24] i [31].

Nadalje, u Poglavlju 3 naziva *Topologije na skupovima pro- i pro*- morfizama* prvo definiramo kategorije inv-$\mathcal{C}$ i inv^*-$\mathcal{C}$, gdje je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija, te topologiziramo skupove morfizama između fiksnih objekata u tim kategorijama (tj. između inverznih sustava u $\mathcal{C}$), i to na dva različita načina za svaku od tih kategorija, pojednostavljeno rečeno koristeći relacije μ_0-homotopije i κ-homotopije (Definicija 3.7 i Teorem 3.11). Prethodne topologizacije ne zadovoljavaju općenito ni najslabiji aksiom separacije (Primjeri 3.15 i 3.16). Zatim se upoznajemo s kategorijama pro-$\mathcal{C}$ i pro^*-$\mathcal{C}$ kao kvocijentnim kategorijama (Teorem 2.8) kategorija inv-$\mathcal{C}$ i inv^*-$\mathcal{C}$ redom, s obzirom na kongruencije definirane u Definiciji 3.17, da bi smo pomoću prethodno uvedenih topologija na prirodan način topologizirali skupove morfizama u tim pro- i pro^*- kategorijama. Preciznije, u oba slučaja uvodimo po dvije topologije, koje u pro- slučaju označavamo sa $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}_{card}$, a u pro^*- slučaju sa $\mathcal{T}^*_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$.

Pokazujemo da sve četiri spomenute topologije imaju baze čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi (Korolar 3.29), te da ih smijemo zamišljati kao relativne topologije Cantorove kocke pa su naravno i potpuno regularne (Korolar 3.38), a za pridružene prostore vrijedi da imaju malu induktivnu dimenziju 0 (Korolar 3.33) i da su potpuno nepovezani (Korolar 3.35). Vrijedi da su $\mathcal{T}_{card}$, $\mathcal{T}^*_{card}$ finije od $\mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{ind}$, redom (Propozicija 3.42), a raznim protuprimjerima pokazujemo da su spomenute topologije u odgovarajućim parovima općenito različite (Primjeri 3.45, 3.49 i 3.55). Također, dokazujemo da se odabirom inverznog niza u kodomeni topologije u parovima poklapaju (Korolar 3.44), te da ih tada možemo metrizirati konkretnim potpunim ultrametrikama (3.5) i (3.6), redom (Propozicija 3.41).

Na kraju Poglavlja 3 pokazujemo da topologije $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$, za razliku od $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$, nisu osjetljive (u smislu topološke ekvivalencije) na izomorfne transformacije inverznih sustava u domeni i kodomeni (Korolar 3.54 i Primjer 3.55), pa su nam zbog toga (i još nekih kasnije jasnih razloga) topologije $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$ zanimljivije nego $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$ u nastavku disertacije.

U Poglavlju 4 se prvo detaljno upoznajemo s pojmovima inverznog limesa i ekspanzije, s posebnim naglaskom na pojam inverznog limesa u kategoriji Top i pojam $HPol$-ekspanzije (ili analogno punktirani slučaj), kao i najvažnijim tvrdnjama koje ih u tim specijalnim slučajevima karakteriziraju i međusobno povezuju. Zatim, koristeći ove pojmove i neke dodatne činjenice upoznajemo čitatelja s teorijom oblika i već spomenutim kategorijama (apstraktnog) oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, te posebno kategorijama topološkog i punktiranog topološkog oblika Sh i Sh_0.

Kategorija Sh za objekte ima topološke prostore, a morfizmi između neka dva prostora su klase jedne dobro usklađene (što se kompozicije tiče) relacije ekvivalencije (Definicija 4.26) na skupu *pro*- morfizama između $HPol$-ekspanzija tih prostora. Još se kaže i da je kategorija *pro*-$HPol$ realizirajuća kategorija za Sh. Kategorizacija po obliku topoloških prostora (tj. po izomorfizmu u Sh) slabija je nego kategorizacija po homotopskom tipu (a onda i po homeomorfizmu). Analogno vrijedi i u punktiranom slučaju.

Dobro poznate invarijante punktiranog topološkog oblika koje se za neku dimenziju $k \in \mathbb{N}$ mogu pridružiti svakom punktiranom prostoru su k-dimenzionalne *pro*-grupe (4.6), te k-dimenzionalne grupe oblika (4.8) kao inverzni limesi odgovarajućih *pro*-grupa. Bitno je napomenuti da je k-dimenzionalna grupa oblika nekog punktiranog prostora (X, x_0) u prirodnoj bijektivnoj vezi sa skupom *pro*- morfizama između punktirane k-dimenzionalne sfere i neke $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0), pa je preko netom spomenute bijekcije možemo topologizirati pomoću topologije $\mathcal{T}_{ind}$, i to neovisno o izboru $HPol_0$-ekspanzije.

U posljednjoj podcjelini Poglavlja 4 upoznajemo se s već spomenutim topološkim grupama oblika, gdje se topologija kojom su topologizirane u [26] poklapa sa $\mathcal{T}_{ind}$. Navest ćemo njihova osnovna svojstva, poopćiti neke već poznate primjere, te pružiti eksplicitnu metriku za topološke grupe oblika kompaktnih metričkih prostora.

U Poglavlju 5, posljednjem poglavlju ove disertacije, prvo ćemo reći nešto o teoriji gruboga oblika, te opisati kategoriju topološkog gruboga oblika Sh^*, koja za objekte ima topološke prostore kao i kategorija topološkog oblika, ali morfizmi između dva prostora su sada klase jedne relacije ekvivalencije na skupu *pro**- morfizama (Definicija 5.1) između $HPol$-ekspanzija tih prostora (kategorija *pro**-$HPol$ je realizirajuća kategorija kategorije topološkog gruboga oblika). Analogno vrijedi i za punktirani slučaj Sh_0^* (napomenimo da ćemo također po potrebi promatrati i bipunktirani slučaj). Bitno je istaknuti da postoji vjeran funktor koji povezuje kategoriju oblika i gruboga oblika, a budući da obje kategorije imaju iste objekte onda kategoriju oblika možemo smatrati potkategorijom kategorije gruboga oblika. Također, postoje primjeri parova prostora koji imaju različite oblike, a isti grubi oblik (izomorfni u kategoriji topološkog gruboga oblika), što sugerira važnost teorije gruboga oblika (Primjer 5.2).

Zatim uvodimo važnu algebarsku invarijantu gruboga oblika, a to je k-dimenzionalna grupa gruboga oblika (5.4) nekog punktiranog prostora (X, x_0), koja se označava sa $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$. Ona, kako smo već spominjali, kao svoju podgrupu sadrži grupu oblika, te stoga sadrži i više informacija o prostoru. Interesantan je primjer prostora koji ima trivijalnu jednodimenzionalnu grupu oblika, ali neprebrojivu jednodimenzionalnu grupu gruboga oblika (Primjer 5.6).

Ostale važne činjenice, pojmovi i rezultati o teoriji gruboga oblika i grupama gruboga oblika, koji se koriste u ovom posljednjem poglavlju, mogu se pronaći u [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17] i [18].

Naposljetku, u podcjelini 5.3 ćemo proučavati topologiziranu $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$, gdje će topologizacija biti s obzirom na $\mathcal{T}_{ind}^*$ i na postojanje prirodne bijektivne korespondencije između $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ i skupa pro^*- morfizama između punktirane k-dimenzionalne sfere i neke $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0) (slično kao i kod grupa oblika). Provjeriti ćemo da je topologizirana $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ uistinu topološka grupa (Teorem 5.14), prirodno ćemo je nazvati *k-dimenzionalna topološka grupa gruboga oblika od* (X, x_0) i označiti sa $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, te konstrukcijom pripadnog funktora (Propozicija 5.15) pokazati da je nova invarijanta gruboga oblika. Njezina topološka svojstva se nasljeđuju od $\mathcal{T}_{ind}^*$, pa će primjerice odmah izaći potpuna regularnost.

Povezat ćemo slučaj oblika i gruboga oblika tako da ćemo pokazati da $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ sadrži odgovarajuću topološku grupu oblika kao svoju zatvorenu podgrupu (Teorem 5.24). Također, promatrat ćemo odnos $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ s topološkom grupom gruboga oblika nekog retrakta od X (Teorem 5.22). Potom, pokazati ćemo da je kvocijentna grupa topološke grupe gruboga oblika po proizvoljnoj normalnoj podgrupi, opskrbljena kvocijentnom topologijom, također topološka grupa (Teorem 5.27). Ispitat ćemo u kojim slučajevima je izbor bazne točke nebitan za topološku grupu gruboga oblika (Teorem 5.33), što će primjerice uvijek vrijediti za kontinuume (Korolar 5.35). Među dokazanim tvrdnjama posebno ističemo teorem o neprekidnosti topoloških grupa gruboga oblika, kao poopćenje njegove tek nedavno pokazane algebarske varijante (Teorem 5.39).

Na samom kraju dobivene rezultate koristimo za konstrukciju zanimljivih primjera, među kojima je i primjer prostora koji nije stabilan, a ima diskretnu, netrivijalnu topološku grupu gruboga oblika (Primjer 5.41), a i pružamo jednostavan kriterij kojim za produkt članova određene familije kompaktnih poliedara možemo jednostavno utvrditi da nema homotopski tip nijednog poliedra (Propozicija 5.46).

Napomenimo još da su neki od rezultata u podcjelini 5.3 već publicirani u [16], a topološke grupe gruboga oblika proučava, neovisno o autoru ove disertacije, i grupa Iranskih matematičara u nedavno objavljenom radu [27].

Poglavlje 2

Pregled elementarnih pojmova

Ovo poglavlje podijeljeno je u četiri manje cjeline. U prvoj cjelini reći ćemo nešto o teoriji kategorije koju ćemo koristiti u formalizaciji sadržaja ove disertacije. Potom ćemo u cjelini *Topološki prostori i homotopija* dati podsjetnik na nama bitne pojmove iz područja samog naziva te cjeline, s posebnim naglaskom na pojam homotopske grupe. Iza toga slijedi upoznavanje s pojmom poliedra, kao ključnog u konstrukciji i razumijevanju teorije topološkog oblika i gruboga oblika. U posljednjoj cjelini ovog poglavlja izložit ćemo najbitnije o topološkoj grupi općenito.

2.1 Kategorije

Započinjemo pregled elementarnih pojmova s najosnovnijim činjenicama vezanima za kategoriju i funktor, pojmove koji su neizostavni u sistematskom pristupu gotovo svakoj matematičkoj teoriji, a tako će biti i u ovom radu. Detaljnije o pojmovima koji slijede može se pronaći u [1] i [21].

Definicija 2.1 ***Kategorija*** $\mathcal{C}$ *je uređena četvorka* $\mathcal{C} = (O, M, id, \circ)$ *koja se sastoji od:*

(1) klase O *čije elemente nazivamo* ***objektima u*** $\mathcal{C}$*,*

*(2) klase M koja se sastoji od skupova $\mathcal{C}(A,B)$ pridruženih svakom paru (A,B) objekata u $\mathcal{C}$, čije elemente nazivamo **morfizmima u** $\mathcal{C}$ (kraće morfizmima) s domenom A i kodomenom B (proizvoljni $f \in \mathcal{C}(A,B)$ ćemo najčešće označavati sa $f : A \to B$),*

*(3) klase id koja se sastoji od morfizama $1_A \in \mathcal{C}(A,A)$, pridruženih svakom $A \in O$, koje nazivamo **identičkim morfizmima**,*

*(4) komponiranja $\circ$ koje proizvoljnom paru morfizama $f : A \to B$, $g : B \to C$, za svaku uređenu trojku (A,B,C) objekata u $\mathcal{C}$, pridružuje jedinstveni morfizam $g \circ f : A \to C$ (kojeg zovemo **kompozicija od** f i g),*

tako da vrijede sljedeći uvjeti:

*(a) za proizvoljne morfizme $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$ vrijedi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (**asocijativnost komponiranja**),*

(b) za svaki morfizam $f : A \to B$ vrijedi $1_B \circ f = f$ i $f \circ 1_A = f$,

(c) skupovi morfizama su u parovima disjunktni tj. $\mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(A',B') \neq \varnothing$ povlači $A = A'$ i $B = B'$.

Napomena 2.2 *Za kategoriju $\mathcal{C} = (O, M, id, \circ)$ ćemo klasu O najčešće označavati sa $Ob(\mathcal{C})$, a klasu M sa $Mor(\mathcal{C})$.*

Primijetimo da je kompozicija $g \circ f$ definirana samo za parove morfizama (f,g) za koje se kodomena od f podudara sa domenom od g. Također, uočimo da po uvjetu (b) identički morfizmi za proizvoljni objekt A u $\mathcal{C}$ djeluju neutralno u kompoziciji, a lako se može dokazati i da su morfizmi s takvim svojstvom jedinstveni, za svaki $A \in Ob(\mathcal{C})$. Morfizam $f : A \to B$ nazivamo **izomorfizmom** ako postoji morfizam $g : B \to A$ tako da vrijedi $g \circ f = 1_A$ i $f \circ g = 1_B$. Tada morfizam g nazivamo **inverz** od f. Ako inverz od f postoji on je jedinstven pa ga još označavamo sa f^{-1}. Za objekte A i B kažemo da su **izomorfni** ako postoji barem jedan izomorfizam $f : A \to B$.

Primjer 2.3 *Kategorija Set je kategorija kojoj je klasa objekata klasa svih skupova, skup morfizama između proizvoljnih objekata tj. skupova A i B je skup svih funkcija između tih skupova, identički morfizmi su identičke funkcije, a komponiranje morfizama je definirano kao komponiranje funkcija. Izomorfizmi u Set su bijekcije.*

Primjer 2.4 ***Konkretna kategorija*** *je svaka kategorija koja za objekte ima skupove s nekom dodatnom strukturom, a za morfizme funkcije koje čuvaju tu strukturu (identički morfizmi i kompozicija su kao i u Set). Osnovni primjeri konkretnih kategorija su Grp (Ab) koje za objekte imaju sve (Abelove) grupe, a za morfizme homomorfizme, te Top* ***(topološka kategorija)*** *koja za objekte ima sve topološke prostore, a morfizmi su neprekidne funkcije. Izomorfizmi u Grp (Ab) su 'klasični' algebarski izomorfizmi, a izomorfizmi u Top su homeomorfizmi.*

Definicija 2.5 *Za kategoriju $\mathcal{C}'$ kažemo da je* ***potkategorija od kategorije*** *$\mathcal{C}$, u oznaci $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, ako vrijede sljedeći uvjeti:*

(a) $Ob(\mathcal{C}') \subseteq Ob(\mathcal{C})$,

(b) $\mathcal{C}'(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$, *za svaki par objekata* (A, B) *u* $\mathcal{C}'$,

(c) identički morfizam na A u $\mathcal{C}'$ je identički morfizam na A u $\mathcal{C}$, za svaki objekt A u $\mathcal{C}'$,

(d) komponiranje u $\mathcal{C}'$ je restrikcija komponiranja u $\mathcal{C}$ na morfizme u $\mathcal{C}'$.

Ako za potkategoriju $\mathcal{C}'$ od $\mathcal{C}$ vrijedi dodatno da je $\mathcal{C}'(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$, za svaki par objekata (A, B) u $\mathcal{C}'$, onda takvu potkategoriju nazivamo **punom potkategorijom**. Konstrukcija pune potkategorije od neke kategorije je jednostavna, dovoljno ju je opisati samo specificiranjem potklase objekata od polazne kategorije. Primjerice Ab je puna potkategorija od Grp, a sa Met obično označavamo punu potkategoriju od Top kojoj su objekti svi metrizabilni prostori.

Definicija 2.6 *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije.* ***Funktor*** *F sa $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ je pravilo koje svakom objektu A iz $\mathcal{C}$ pridružuje objekt $F(A)$ iz $\mathcal{D}$, i svakom morfizmu $f : A \to B$ u $\mathcal{C}$ pridružuje morfizam $F(f) : F(A) \to F(B)$ u $\mathcal{D}$ tako da vrijedi sljedeće:*

(1) F čuva kompoziciju, tj. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, kad god je $g \circ f$ definirano,

(2) F čuva identičke morfizme, tj. $F(1_A) = 1_{F(A)}$, za svaki objekt A u $\mathcal{C}$.

Napomena 2.7 *Funktor F sa $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ ćemo označavati sa $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Funktor je zapravo dobro usklađena familija funkcija, jedna sa $Ob(\mathcal{C})$ u $Ob(\mathcal{D})$, te po jedna sa $\mathcal{C}(A, B)$ u $\mathcal{D}(F(A), F(B))$, za svaki par objekata (A, B) u $\mathcal{C}$.*

Funktor F nazivamo **vjernim** ako je za svaki par objekata (A, B) u $\mathcal{C}$ funkcija

$$F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$$

injektivna, a **punim** ako je za svaki (A, B) prethodna funkcija surjektivna. **Identički funktor** $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ fiksira objekte i morfizme. Za $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ **funktor ulaganja** $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ definiran je također na prirodan način, ulaganjem objekata i morfizama. Ponekad ćemo koristiti i **zaboravljivi funktor** (npr. sa Top u Set ili sa Grp u Set) definiran tako da objekt s bogatijom strukturom shvaća kao taj isti objekt samo sa siromašnijom strukturom. Svi funktori čuvaju izomorfizme, tj. ako je f izomorfizam u $\mathcal{C}$ onda je $F(f)$ izomorfizam u $\mathcal{D}$.

Ako su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktori onda kompoziciju dobro definiramo kao funktor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ koji objektu A pridruži $G(F(A))$ i morfizmu $f : A \to B$ pridruži $G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B))$. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazivamo **(kategorijskim) izomorfizmom** ako postoji funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takav da je $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$, funktor G tada nazivamo inverzom od F i (zbog jedinstvenosti) označavamo sa F^{-1}, a kategorije smatramo **izomorfnima** ako postoji izomorfizam među njima.

Na kraju ovog odjeljka uvodimo još pojam kongruencije i kvocijentne kategorije. **Kongruencija na kategoriji** $\mathcal{C}$ je klasa kojoj su elementi relacije ekvivalencije $\sim_{(A,B)}$ na $\mathcal{C}(A,B)$, za svaki par objekata (A,B) u $\mathcal{C}$ (pojednostavljeno ćemo sve relacije označavati s istim znakom $\sim$ i skraćeno govoriti o kongruenciji $\sim$, jer će iz elemenata koji su u relaciji biti jasno koju od relacija iz klase koristimo), tako da vrijedi sljedeći uvjet: ako je $f \sim f'$ i $g \sim g'$ i ako kompozicija $g \circ f$ postoji onda je $g \circ f \sim g' \circ f'$, za sve morfizme f, f', g, g' u $\mathcal{C}$.

Teorem 2.8 *Neka je $\sim$ kongruencija na kategoriji $\mathcal{C}$ =$(O, M, id, \circ)$ i neka $[f]$ označava klasu ekvivalencije od $f \in \mathcal{C}(A,B)$ obzirom na $\sim$. Tada je $\mathcal{C}/_{\sim} := (O, M', id', \circ')$ kategorija, gdje je sa M' označena klasa svih kvocijentnih skupova $\mathcal{C}/_{\sim}(A,B) := \mathcal{C}(A,B)/_{\sim}$, za sve $A, B \in O$, id' je klasa kojoj su elementi $[1_A]$, za sve $A \in O$, a komponiranje $\circ'$ je definirano kao $[g] \circ' [f] := [g \circ f]$, čim kompozicija $g \circ f$ postoji, za sve $f, g \in M$. Kategoriju $\mathcal{C}/_{\sim}$ nazivamo **kvocijentnom kategorijom** (kategorije $\mathcal{C}$ obzirom na $\sim$).*

Dokaz. Dokaz se provodi direktnom provjerom aksioma definicije kategorije koristeći definiciju kongruencije i svojstva kategorije $\mathcal{C}$. ■

2.2 Topološki prostori i homotopija

Slijedi podsjetnik na neke od osnovnih pojmova i činjenica iz opće topologije te teorije homotopije koji će biti korišteni u ovom radu, a kao referencu uglavnom koristimo [8], [9] i [24]. Za topološki prostor (ili kraće prostor) $(X, \mathcal{T})$ (gdje je X skup, a $\mathcal{T}$ topologija na X) ćemo pisati samo X kad god nam je topologija na X jasna iz konteksta ili nam njezino eksplicitno isticanje nije potrebno.

Definicija 2.9 *Neka je dan prostor $(X, \mathcal{T})$. Za podfamiliju $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ kažemo da je **baza topologije** $\mathcal{T}$ ako se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{T}$ može prikazati kao unija neke familije članova iz $\mathcal{B}$.*

Lema 2.10 *Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze topologija $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, redom, na skupu X. Tada je $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}'$ **je finija od** $\mathcal{T}$) ako i samo ako za svaki $x \in X$ i za svaki $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži x, postoji $B' \in \mathcal{B}'$ takav da je $x \in B' \subseteq B$.*

Definicija 2.11 *Za familiju $\mathcal{B}$ podskupova skupa X kažemo da udovoljava svojstvo $(B1)$ na X ako $\mathcal{B}$ pokriva X, te kažemo da $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstvo $(B2)$ na X ako za svaki $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i za svaki $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Lema 2.12 *Ako familija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X udovoljava svojstvima $(B1)$ i $(B2)$ na X onda postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Tu jedinstvenu topologiju ćemo označavati sa $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, a njezini elementi su svi oni podskupovi od X koji su unije familije članova iz $\mathcal{B}$.*

Definicija 2.13 ***Separacija*** *prostora X je par U, V disjunktnih, nepraznih i otvorenih podskupova od X čija unija je X. Za prostor X kažemo da je* ***povezan*** *ako ne postoji separacija od X.*

Za dane točke x i y prostora X, **put** u X od x do y je neprekidno preslikavanje $\alpha : I = [0,1] \to X$ takvo da je $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$ (za topologiju na jediničnom intervalu I uzimamo onu induciranu euklidskom metrikom).

Definicija 2.14 *Za prostor X kažemo da je* ***povezan putovima*** *ako za svaki par točaka od X postoji put među njima.*

Ako je prostor putovima povezan onda je i povezan, ali obrat ne vrijedi. Također vrijedi da je produkt (putovima) povezanih prostora (putovima) povezan. Nadalje, **komponente povezanosti prostora** X su klase ekvivalencije na X po sljedećoj relaciji: $x, y \in X$ su ekvivalentne ako postoji povezan potprostor koji ih sadrži. Slično, **komponente povezanosti putovima prostora** X su klase po relaciji postojanja puta među točkama.

Definicija 2.15 *Za prostor X kažemo da je* ***lokalno povezan (putovima) u točki*** *x ako za svaku otvorenu okolinu U od x postoji (putovima) povezana otvorena okolina V od x sadržana u U. Prostor je lokalno (putovima) povezan ako je lokalno (putovima) povezan u svakoj svojoj točki.*

Definicija 2.16 *Za prostor X kažemo da je* ***kompaktan*** *ako svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{A}$ od X dopušta konačni podpokrivač.*

Neprekidna slika kompaktnog prostora je kompaktna, a kompaktnost se također čuva i na zatvorenom potprostoru te na produktu.

Za prostor X kažemo da je $\boldsymbol{T_1}$-prostor ako je svaki jednočlani skup zatvoren u X. Nadalje, prostor X nazivamo **potpuno regularnim** (ili još i $\boldsymbol{T_{3\frac{1}{2}}}$-) prostorom ako je T_1-prostor i ako za svaku točku $x_0 \in X$ i za svaki zatvoren skup $A \subseteq X$ koji ne sadrži x_0 postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da je $f(A) = \{0\}$ i $f(x_0) = 1$. Vrijedi da je potprostor potpuno regularnog prostora potpuno regularan te da je produkt potpuno regularnih prostora potpuno regularan. Potpuna regularnost implicira da je prostor regularan (a onda naravno i Hausdorffov), ali je slabija od normalnosti. Svojstva prostora nabrojana u prethodnoj rečenici su neka od takozvanih **aksioma separacije**, a još ćemo se podsjetiti na najslabije takvo svojstvo tj. najslabiji aksiom separacije, T_0-aksiom. Dakle, za prostor kažemo da je $\boldsymbol{T_0}$**-prostor** ako za svake dvije različite točke tog prostora barem jedna od tih točaka ima okolinu koja ne sadrži onu drugu točku.

Definicija 2.17 *Neka su X i Y prostori i neka je $p : X \to Y$ surjekcija. Tada p nazivamo* ***kvocijentnim preslikavanjem*** *ako vrijedi: podskup $U \subseteq Y$ je otvoren u Y ako i samo ako je $p^{-1}(U)$ otvoren u X.*

Dakle p je kvocijentno preslikavanje ako je neprekidna surjekcija i ako sve otvorene skupove koji su jednaki inverzu nekog podskupa od Y preslikava u otvorene skupove. Lako je pokazati da ako uzmemo proizvoljni prostor X, skup A i surjektivnu funkciju $p : X \to A$ te ako opskrbimo A sa topologijom $\mathcal{T}$ koja se sastoji od onih podskupova U od A za koje je $p^{-1}(U)$ otvoren u X da je tada topologija $\mathcal{T}$ jedinstvena topologija na A u odnosu na koju je p kvocijentno preslikavanje. U tom slučaju topologiju $\mathcal{T}$ nazivamo **kvocijentnom topologijom** s obzirom na p.

Definicija 2.18 *Neka je X prostor i neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na X te $X/_\sim$ kvocijentni skup od X s obzirom na $\sim$. Tada $X/_\sim$ opskrbljen kvocijentnom topologijom s obzirom na kanonsku surjekciju $p : X \to X/_\sim$ nazivamo* ***kvocijentnim prostorom*** *od X (s obzirom na $\sim$).*

Propozicija 2.19 *Neka je X skup, neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ topologije na X takve da je $\mathcal{T}'$ finija od $\mathcal{T}$ i neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na X te $X/_\sim$ kvocijentni skup od X s obzirom na $\sim$. Tada je kvocijentna topologija na $X/_\sim$ s obzirom na kanonsku surjekciju $p : (X, \mathcal{T}') \to X/_\sim$ finija nego kvocijentna topologija s obzirom na kanonsku surjekciju $p : (X, \mathcal{T}) \to X/_\sim$.*

Dokaz. Neka je U element kvocijentne topologije na $X/_\sim$ s obzirom na $p : (X, \mathcal{T}) \to X/_\sim$. Tada je po definiciji kvocijentne topologije $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}'$ finija od $\mathcal{T}$ to je $p^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$, a to onda opet po definiciji kvocijentne topologije implicira da je U element kvocijentne topologije na $X/_\sim$ s obzirom na $p : (X, \mathcal{T}') \to X/_\sim$. ■

Ako su dani prostori X i Y, tada prostor disjunktne unije skupova X i Y opskrbljene topologijom koja se sastoji od svih unija otvorenih skupova iz X i Y označavamo sa $X \coprod Y$ i nazivamo **disjunktnom unijom prostora** X i Y. Analogno definiramo disjunktnu uniju proizvoljne familije prostora.

Kategoriju Top smo već spominjali, kao i punu potkategoriju $Met \subseteq Top$ svih metrizabilnih prostora. Sa Cpt ćemo označavati punu potkategoriju od Top kojoj su objekti svi kompaktni Hausdorffovi prostori. Nadalje,

- Top_0 **(punktirana topološka kategorija)** označava kategoriju kojoj su objekti svi punktirani prostori (X, x_0) (uređeni parovi koji se sastoje od prostora X i istaknute bazne točke $x_0 \in X$), a morfizmi $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ su sve neprekidne funkcije $f : X \to Y$ takve da je $f(x_0) = y_0$,
- Top_{00} **(bipunktirana topološka kategorija)** označava kategoriju kojoj su objekti svi bipunktirani prostori (X, x_0, x_1) (uređene trojke koje se sastoje od prostora X i istaknutih točaka $x_0, x_1 \in X$), a morfizmi $f : (X, x_0, x_1) \to (Y, y_0, y_1)$ su sve neprekidne funkcije $f : X \to Y$ takve da je $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$,
- Top^2 **(kategorija topoloških parova)** označava kategoriju kojoj su objekti svi parovi prostora (X, A) (uređeni parovi koji se sastoje od

prostora X i potprostora $A \subseteq X$), a morfizmi $f : (X, A) \to (Y, B)$ su sve neprekidne funkcije $f : X \to Y$ takve da je $f(A) \subseteq B$.

Kompozicije i identitete u prethodnim kategorijama su prirodne, a potpuno analogno se definiraju i kategorije Set_0, Set_{00} i Set^2. Sada uvodimo relaciju homotopije na skupovima morfizama u odgovarajućim kategorijama Top, Top_0, Top_{00} i Top^2.

- Za morfizme (neprekidne funkcije) $f, g : X \to Y$ u Top kažemo da su **homotopni** ako postoji neprekidna funkcija $H : X \times I \to Y$ takva da je $H(x, 0) = f(x)$ i $H(x, 1) = g(x)$, za svaki $x \in X$.

- Za morfizme $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Top_0 kažemo da su **homotopni** ako postoji neprekidna funkcija $H : X \times I \to Y$ takva da je $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ i $H(x_0, t) = y_0$, za svaki $x \in X, t \in I$.

- Za morfizme $f, g : (X, x_0, x_1) \to (Y, y_0, y_1)$ u Top_{00} kažemo da su **homotopni** ako postoji neprekidna funkcija $H : (X \times I) \to Y$ takva da je $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, $H(x_0, t) = y_0$ i $H(x_1, t) = y_1$, za svaki $x \in X, t \in I$.

- Za morfizme $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ u Top^2 kažemo da su **homotopni** ako postoji neprekidna funkcija $H : X \times I \to Y$ takva da je $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ i $H(a, t) \in B$, za svaki $x \in X, a \in A, t \in I$.

Teorem 2.20 *Prethodne relacije su kongruencije na odgovarajućim kategorijama Top, Top_0, Top_{00} i Top^2. Pripadne kvocijentne kategorije redom označavamo sa $HTop, HTop_0, HTop_{00}$ i $HTop^2$ te nazivamo redom* ***homotopskom kategorijom, punktiranom homotopskom kategorijom, bipunktiranom homotopskom kategorijom*** *i* ***homotopskom kategorijom parova.***

Dokaz. Dokaz da je relacija homotopije kongruencija na Top možemo pronaći u poglavlju 15 u [8], a analogno se dokaže i da je relacija homotopije kongruencija na preostalim kategorijama. ■

Klase ekvivalencije morfizama u prethodnim (homotopskim) kategorijama po relaciji homotopije nazivamo **homotopskim klasama** (označavati ćemo ih sa predstavnikom u uglatim zagradama), a za izomorfne objekte kažemo da imaju isti **homotopski tip**. Za prostor kažemo da je **kontraktibilan** ako je identiteta na prostoru homotopna konstantnom preslikavanju (analogno definiramo kontraktibilnost punktiranog prostora i para prostora), a to je ekvivalentno činjenici da prostor (punktirani prostor, par prostora) ima **trivijalni homotopski tip** tj. homotopski tip jednotočkovnog prostora u odgovarajućoj kategoriji. Ako je morfizam $[f]$ u $HTop$ izomorfizam onda f nazivamo **homotopskom ekvivalencijom**.
Homotopski funktor $H : Top \to HTop$ definiran je prirodno kao $H(X) = X$, $H(f) = [f]$, a analogno se definiraju **punktirani homotopski funktor** $H_0 : Top_0 \to HTop_0$, **bipunktirani homotopski funktor** $H_{00} : Top_{00} \to HTop_{00}$ i **homotopski funktor parova** $H^2 : Top^2 \to HTop^2$.

Na kraju nam je još bitno definirati homotopsku grupu, a prvo će nam trebati definicija klina. Ako su zadani punktirani prostori (X, x_0) i (Y, y_0) tada **klin** tih prostora, u oznaci $(X, x_0)\bigvee(Y, y_0)$, označava punktirani prostor $((X\coprod Y)/_{\sim}, \star)$ gdje je $\sim$ relacija ekvivalencije na $X\coprod Y$ koja identificira bazne točke x_0 i y_0, a $\star$ je točka dobivena upravo prethodno spomenutom identifikacijom. Ako su zadani morfizmi $f : (X, x_0) \to (Z, z_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ u Top_0 tada postoji jedinstveni morfizam $h : (X, x_0)\bigvee(Y, y_0) \to (Z, z_0)$ takav da je $h|_{(X,x_0)} = f$, $h|_{(Y,y_0)} = g$ (u prethodnim restrikcijama (X, x_0) i (Y, y_0) promatramo kao prirodna smještenja u klin) i označavamo ga sa $f\bigvee g$.
Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ i S^k jedinična k-sfera, potprostor od $\mathbb{R}^{k+1}$ koji se sastoji od svih točaka koje su na udaljenosti 1 od ishodišta (euklidska metrika, euklidska topologija) i neka je $s_0 \in S^k$ proizvoljna. Sa $\pi_k(X, x_0)$ označimo skup $HTop_0((S^k, s_0), (X, x_0))$ gdje je (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor.
Sada, za $k \in \mathbb{N}$ i $[f], [g] \in \pi_k(X, x_0)$ definiramo zbroj $[f] + [g]$ kao element od $\pi_k(X, x_0)$ reprezentiran sljedećim morfizmom u Top_0

$$(S^k, s_0) \xrightarrow{c} (S^k, s_0)\bigvee(S^k, s_0) \xrightarrow{f\bigvee g} (X, x_0),$$

gdje je c kompozicija kanonskog kvocijentnog preslikavanja sa (S^k, s_0) u punktirani kvocijentni prostor $(S^k/E, E)$ (identifikacija ekvatora E od S^k sa točkom, uz uvjet da je $s_0 \in E$) i prirodnog punktiranog homeomorfizma sa $(S^k/E, E)$ u $(S^k, s_0)\bigvee(S^k, s_0)$, dakle

$$[f] + [g] =: [(f\bigvee g) \circ c] : (S^k, s_0) \to (X, x_0).$$

Operacija je dobro definirana, tj. ne ovisi o izboru reprezentanata od $[f]$ i $[g]$.
U 4. poglavlju u [9] se može pronaći detaljnije o prethodnoj definiciji operacije zbrajanja, kao i činjenici da $\pi_k(X, x_0), k \in \mathbb{N}$ na ekvivalentan način možemo promatrati kao $HTop^2((I^k, \partial I^k), (X, x_0))$, gdje je I^k k-dimenzionalna jedinična kocka tj. $I^k = \prod_{i=1}^{k} I$, ∂I^k (rub od I^k) je skup svih točaka od I^k kojima je barem jedna koordinata 0 ili 1, a zbrajanje dvaju elemenata $[f], [g] \in \pi_k(X, x_0)$ je tada definirano kao

$$[f] + [g] = [h]$$

gdje je

$$h(s_1, s_2, ..., s_k) = \left\{ \begin{array}{c} f(2s_1, s_2, ..., s_k), s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, ..., s_k), s_1 \in [1/2, 1] \end{array} \right\}.$$

Neka je $[o]$ homotopska klasa konstantne funkcije $o : (S^k, s_0) \to (X, x_0)$, dakle $o(s) = x_0, \forall s \in S^k$. Tada, za svaki $[f] \in \pi_k(X, x_0)$ postoji jedinstveni $\left[\bar{f}\right] \in \pi_k(X, x_0)$ takav da je

$$[f] + \left[\bar{f}\right] = \left[\bar{f}\right] + [f] = [o].$$

Eksplicitna formula za $\bar{f}$ u ekvivalentnom pristupu preko $HTop^2((I^k, \partial I^k), (X, x_0))$ je dana sa

$$\bar{f}(s_1, s_2, ..., s_k) = f(1 - s_{1,} s_2, ..., s_k).$$

Također, za svaki $[f] \in \pi_k(X, x_0)$ vrijedi

$$[f] + [o] = [o] + [f] = [f].$$

Slijedi nekoliko važnih činjenica.

- Za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $\pi_k(X, x_0)$ uz prethodno definiranu operaciju zbrajanja $+$ ima strukturu grupe i tu grupu nazivamo **k-dimenzionalna homotopska grupa punktiranog prostora** (X, x_0).
- Neutralni element u grupi $\pi_k(X, x_0)$ je $[o]$, a inverz od $[f]$ je $\left[\bar{f}\right]$.
- Grupa $\pi_k(X, x_0)$ je Abelova, za svaki $k \geq 2$.
- Ako postoji put između točaka $x_0, x_1 \in X$ onda on (odnosno njegova homotopska klasa) inducira izomorfizam između grupa $\pi_k(X, x_0)$ i $\pi_k(X, x_1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Stoga, kada je prostor putovima povezan homotopske grupe ne ovise o baznoj točki pa je dovoljno pisati $\pi_k(X)$. Kada je prostor putovima povezan i vrijedi dodatno da je $\pi_1(X)$ trivijalna tj. $\pi_1(X) = \{[o]\}$ tada kažemo da je X **jednostavno povezan**.
- Postoji dobro definiran funktor $\pi_k : HTop_0 \to Grp$ koji svakom punktiranom prostoru (X, x_0) pridruži grupu $\pi_k(X, x_0)$ i svakom morfizmu $[h] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u $HTop_0$ pridruži homomorfizam $\pi_k([h]) : \pi_k(X, x_0) \to \pi_k(Y, y_0)$, $\pi_k([h])([f]) = [h \circ f]$.
- Ako postoji homotopska ekvivalencija $f : X \to Y$ onda su grupe $\pi_k(X, x_0)$ i $\pi_k(Y, f(x_0))$ izomorfne za svaki $x_0 \in X, k \in \mathbb{N}$.
- Za produkt $\prod_\alpha X_\alpha$ proizvoljne familije putovima povezanih prostora X_α vrijedi da su grupe $\pi_k(\prod_\alpha X_\alpha)$ i $\prod_\alpha \pi_k(X_\alpha)$ izomorfne, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
- Skup $\pi_0(X, x_0)$ (primijetimo da je zbrajanje definirano samo za $k \geq 1$) zovemo **0-dimenzionalna homotopska grupa punktiranog prostora** (X, x_0) iako nema strukturu grupe. Taj skup je zapravo skup komponenata povezanosti putovima prostora X.

Primjer 2.21 *$\pi_k(S^k, s_0)$ je izomorfna $\mathbb{Z}$, aditivnoj grupi cijelih brojeva, za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $s_0 \in S^k$ (dovoljno je pisati samo $\pi_k(S^k)$ jer je S^k povezana putovima).*

Primjer 2.22 *$\pi_i(S^k)$ je trivijalna za svaki $k \geq 2, i < k$.*

Primjer 2.23 *Svaki konveksni podskup od $\mathbb{R}^n$ je jednostavno povezan, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

2.3 Poliedri

U ovom odjeljku ćemo se upoznati sa poliedrima i njihovim najbitnijim topološkim svojstvima te uvesti homotopsku kategoriju poliedara što nam je od neizmjerne važnosti u izgradnji teorije oblika i gruboga oblika topoloških prostora. Postoje različiti pristupi definiciji poliedra, a mi ćemo uglavnom koristiti pristup iz [31], kojeg ćemo nadopuniti s nekim rezultatima iz [23].

Definicija 2.24 ***(Abstraktni) simplicijalni kompleks*** *K* ***sa skupom vrhova*** *V je skup konačnih nepraznih podskupova od V, koje nazivamo* ***simpleksima (u*** *K), tako da su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(a) svaki jednotočkovni podskup od V je simpleks,

(b) svaki neprazni podskup simpleksa je simpleks.

Napomena 2.25 *Ako nema potrebe za referiranjem na skup vrhova V pričat ćemo samo o simplicijalnom kompleksu K bez eksplicitnog isticanja skupa vrhova, koji se lako može i rekonstruirati iz skupa K.*

Simpleks s koji sadrži točno $k+1$ vrhova se naziva **k-simpleks** odnosno kažemo da je dimenzija od s jednaka k. Ako za simplekse s, s' vrijedi $s' \subseteq s$ onda s' nazivamo **stranicom** od s, a elemente od s (koje možemo identificirati sa 0-stranicama od s) nazivamo **vrhovima** od s.
Punktirani simplicijalni kompleks (K, v_0) je uređeni par koji se sastoji od simplicijalnog kompleksa K i istaknutog vrha v_0 od K. Analogno se definira **bipunktirani simplicijalni kompleks** (K, v_0, v_1).

Definicija 2.26 ***Tijelo*** *$|K|$ simplicijalnog kompleksa K sa skupom vrhova V je skup svih funkcija $\theta : V \to I$ za koje vrijedi*

(a) $\{v \in V : \theta(v) \neq 0\}$ je simpleks u K,

(b) $\sum_{v \in V} \theta(v) = 1$.

Vrijednost funkcije θ u točki v nazivamo v-ta baricentrička koordinata od θ. Ako je s simpleks u K onda tijelom tog simpleksa, u oznaci $|s|$, zovemo skup

$$|s| = \{\theta \in |K| : \theta^{-1}\langle 0, 1] \subseteq s\}.$$

Ako je s k-simpleks (u K) onda postoji prirodna bijektivna korespondencija skupa $|s|$ sa skupom $\Delta_k = \{x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : 0 \leq x_i \leq 1, \sum_i x_i = 1\}$ **(standardni k-simpleks)**. Stoga, na $|s|$ možemo definirati topologiju tako da ta bijektivna veza postane homeomorfizam ($\Delta_k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ uz standardnu euklidsku topologiju). Vrlo lako se pokaže da familija svih tako topologiziranih tijela simpleksa u K dopušta topologiziranje od $|K|$ na način da je skup $U \subseteq |K|$ otvoren ako je $U \cap |s|$ otvoren u $|s|$, za svaki simpleks s u K (u literaturi je ovakva topologija poznata pod nazivom **slaba topologija** s obzirom na neku množinu topoloških prostora i ona se definira na uniji svih tih topoloških prostora, u našem konkretnom slučaju na $|K|$ s obzirom na $\{|s| : s \in K\}$). Odsada sa $|K|$ ćemo označavati ne samo skup već i prethodno definirani (topološki) prostor.
Napokon uvodimo definiciju poliedra.

Definicija 2.27 *Prostor P nazivamo **poliedar** ako postoji simplicijalni kompleks K i homeomorfizam $f : |K| \to P$, a uređeni par (K, f) tada nazivamo **triangulacijom prostora** P.*

Prirodno uvodimo i sljedeće pojmove:

- **punktirani poliedar** (P, p_0) je punktirani prostor koji je izomorfan $(|K|, v_0)$ u Top_0 gdje je (K, v_0) punktirani simplicijalni kompleks,
- **bipunktirani poliedar** (P, p_0, p_1) je bipunktirani prostor koji je izomorfan $(|K|, v_0, v_1)$ u Top_{00} gdje je (K, v_0, v_1) bipunktirani simplicijalni kompleks.

Triangulacija punktiranog poliedra i bipunktiranog poliedra može se također definirati analogno definiciji triangulacije poliedra, dakle kao uređeni par odgovarajućeg izomorfnog objekta i odgovarajućeg izomorfizma.
Neka od najbitnijih topoloških svojstava poliedara su:

- normalnost (čak perfektna normalnost, tj. svaka dva disjunktna zatvorena skupa se mogu separirati realnom neprekidnom funkcijom),
- parakompaktnost,
- povezanost je ekvivalentna povezanosti putovima,
- metrizabilnost je ekvivalentna lokalnoj kompaktnosti (za svaku točku $p \in P$ postoji kompaktna okolina) koja je ekvivalentna lokalnoj konačnosti (za svaku triangulaciju (K, f) poliedra P vrijedi da je svaki vrh od K sadržan u konačno mnogo simpleksa u K),
- lokalna kontraktibilnost (za svaku točku $p \in P$ i njezinu otvorenu okolinu U postoji otvorena okolina V od x takva da je $V \subseteq U$ i da je V kontraktibilna u U, tj. ulaganje $i : V \hookrightarrow U$ je nulhomotopno), a onda očito i lokalna povezanost putovima i lokalna povezanost.

Dokazi ovih svojstava mogu se pronaći u [31].

Neprekidnu funkciju $r : X \to A$, gdje je A potprostor od X, nazivamo **retrakcijom** ako je $r \circ i = 1_A$, gdje je $i : A \hookrightarrow X$ ulaganje i tada kažemo da je A **retrakt od** X. Za prostor Y kažemo da je **apsolutni okolinski retrakt za kategoriju metrizabilnih prostora** ako vrijedi sljedeće: kad god uzmemo proizvoljni metrizabilni prostor X te zatvoren potprostor Y' od X takav da je Y' homeomorfan Y tada postoji otvorena okolina U od Y' u X takva da je Y' retrakt od U (još se kratko kaže da je Y' okolinski retrakt od X). Punu potkategoriju kategorije Top kojoj su objekti svi apsolutni okolinski retrakti za kategoriju metrizabilnih prostora označavamo sa $ANR(Met)$ ili kraće ANR.

Teorem 2.28 *Svaki poliedar ima homotopski tip nekog objekta kategorije* ANR.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Teorema 1.3.10. i 1.3.11., Appendix 1, u [23]. ■
Analogno je u [23] dokazano i da svaki (bi)punktirani poliedar ima homotopski tip nekog (bi)punktiranog prostora iz kategorije ANR_0 (ANR_{00}).

Teorem 2.29 *Svaki lokalno konačni poliedar je objekt kategorije* ANR.

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Teorema 1.3.9. i 1.3.11., Appendix 1, u [23]. ■

Dakle poliedri su "lijepi" (s posebnim naglaskom na lokalna svojstva) prostori koji se mogu shvaćati kao prostori sastavljeni od simpleksa različitih dimenzija (dužina, trokut, tetraedar itd.), mogu se relativno lako klasificirati pomoću klasičnih alata homotopske teorije npr. pomoću homotopskih grupa, a iz prethodnog teorema slijedi da za svako zatvoreno smještenje lokalno konačnog poliedra u metrički prostor mora postojati okolina oko poliedra koja se može retraktirati na sami poliedar. Od posebne važnosti su nam kompaktni poliedri za koje se lako dokaže da su sastavljeni od konačno mnogo simpleksa (vidi Korolar 1.1.1., Appendix 1, u [23]), svakog od njih možemo zamišljati kao zatvoren potprostor nekog metričkog prostora i tada po prethodnom teoremu te zbog kompaktnosti postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je kompaktni poliedar retrakt svoje $\frac{1}{n}$-okoline.
Napomenimo i da postoji općenitija klasa prostora koji imaju sva lijepa svojstva kao i poliedri. To su CW-kompleksi (detaljno o njima se može pronaći u [20]), ali vrijedi da svaki CW-kompleks ima homotopski tip nekog poliedra (dokaz u [22]), što će za naša kasnija razmatranja (uz činjenicu da prethodna tvrdnja vrijedi i u punktiranom i bipunktiranom slučaju) značiti da će nam poliedri biti dovoljni.
Na kraju ovog poglavlja još definirajmo kategorije $HPol$, $HPol_0$ i $HPol_{00}$ kao pune potkategorije od $HTop$, $HTop_0$ i $HTop_{00}$, redom, dobivene redom restrikcijom objekata na poliedre, punktirane poliedre i bipunktirane poliedre.

2.4 Topološke grupe

Definicija 2.30 *Neka je G skup, $\cdot$ binarna operacija na G koja zadovoljava aksiome grupe te neka je $\mathcal{T}$ topologija na G. Tada uređenu trojku $(G, \cdot, \mathcal{T})$ nazivamo* ***topološkom grupom*** *ako vrijedi da su funkcije*

*(a) $G \times G \to G, (x, y) \to x \cdot y$ (**grupovna operacija**) i*

*(b) $G \to G, x \to x^{-1}$ (**operacija invertiranja**)*

neprekidne, gdje na $G \times G$ uzimamo odgovarajuću produktnu topologiju.

Napomena 2.31 *Pisat ćemo kratko topološka grupa G umjesto $(G, \cdot, \mathcal{T})$ kada je jasno o kojoj grupovnoj operaciji $\cdot$ i o kojoj topologiji $\mathcal{T}$ je riječ.*

Dakle, topološka grupa je zapravo topologizirana grupa takva da grupovna operacija i operacija invertiranja budu "dobro usklađene" s tom topologijom u smislu neprekidnosti. Svaka grupa može trivijalno postati topološka grupa ako je opskrbimo diskretnom topologijom, međutim zanimljivo je ako grupu možemo pretvoriti u topološku grupu tako da je opskrbimo netrivijalnom topologijom koja bi dodatno udovoljavala barem Hausdorffovu svojstvu.

Primjer 2.32 $\mathbb{R}^n$ *uz zbrajanje i euklidsku topologiju je lokalno kompaktna Abelova topološka grupa.*

Primjer 2.33 *Neka je $\mathbb{T}$ skup svih kompleksnih brojeva z takvih da je $|z| = 1$. Tada je $\mathbb{T}$ uz množenje kompleksnih brojeva i relativnu topologiju naslijeđenu od standardne topologije na $\mathbb{C}$ kompaktna Abelova grupa.*

Primjer 2.34 *Neka je G skup svih invertibilnih realnih matrica dimenzije $n \times n$. Tada je G uz množenje matrica i relativnu topologiju naslijeđenu od euklidske topologije na $\mathbb{R}^{n^2}$ topološka grupa.*

Homomorfizmom između topoloških grupa G i H nazivamo svaki neprekidni grupovni homomorfizam $f : G \to H$. Sa $TopGrp$ ćemo označavati konkretnu kategoriju kojoj su objekti sve topološke grupe, a morfizmi su prethodno definirani homomorfizmi. U toj kategoriji su izomorfizmi oni homomorfizmi koji su ujedno i grupovni izomorfizmi i homeomorfizmi. Napomenimo da neprekidni grupovni izomorfizam između topoloških grupa ne mora nužno biti i izomorfizam, primjerice $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdje promatramo $\mathbb{R}^n$ uz zbrajanje, te u domeni opskrbljeno diskretnom, a u kodomeni euklidskom topologijom.

Propozicija 2.35 *Svaka podgrupa topološke grupe G opskrbljena relativnom topologijom je i sama topološka grupa.*

Dokaz. Trivijalno. ■

Zbog prethodne propozicije ćemo pod pojmom **podgrupe** neke **topološke grupe** podrazumijevati dobivenu ne samo grupovnu već i topološku strukturu.

Detaljnije o topološkim grupama se može pronaći u [2].

Poglavlje 3

Topologije na skupovima *pro*- i *pro**- morfizama

Glavni cilj ovog poglavlja je definirati različite (netrivijalne) topologije na skupovima morfizama u kategorijama *pro*-$\mathcal{C}$ i *pro**-$\mathcal{C}$, za proizvoljnu kategoriju $\mathcal{C}$, te najprikladnije od njih odabrati za kasnije primjene u teoriji oblika i gruboga oblika. U prvoj cjelini poglavlja upoznat ćemo se sa pojmovima inverznog sustava, te morfizma i $*$-morfizma između inverznih sustava, pomoću kojih ćemo opisati važne kategorije *inv*-$\mathcal{C}$ i *inv**-$\mathcal{C}$. U drugoj cjelini ćemo topologizirati skupove morfizama između fiksnih objekata u prethodno spomenutim kategorijama, i to na dva načina. Potom ćemo, u dvije cjeline koje slijede, opisati još dvije kategorije *pro*-$\mathcal{C}$ i *pro**-$\mathcal{C}$, a onda i skupove morfizama između fiksnih objekata u tim kategorijama topologizirati također na dva načina, što će biti direktno povezano sa topologizacijama iz netom spomenute druge cjeline. Naposljetku, te topologije na takozvanim skupovima *pro*- i *pro**- morfizama ćemo detaljno proučiti u podcjelinama *Osnovna svojstva i međusoban odnos* i *Hom-bifunktor*, a ova posljednja će nam posebno biti važna i za već spomenute kasnije primjene.

3.1 Kategorije *inv*-$\mathcal{C}$ i inv^*-$\mathcal{C}$

Preduređenim skupom nazivamo uređeni par $(\Lambda, \leq)$ koji se sastoji od skupa Λ i binarne relacije $\leq$ na skupu Λ za koju vrijedi da je refleksivna i tranzitivna.
Preduređeni skup $(\Lambda, \leq)$ nazivamo:

- **uređenim skupom** ako je $\leq$ antisimetrična;
- **usmjerenim skupom** ako za svaki $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da je $\lambda_1 \leq \lambda$ i $\lambda_2 \leq \lambda$;
- **kofinitnim skupom** ako je za svaki $\lambda \in \Lambda$ skup $\{\lambda' \in \Lambda : \lambda' \leq \lambda\}$ (kojeg nazivamo skup prethodnika od λ) konačan.

Za binarne relacije iz prethodnih definicija ćemo uvijek birati oznaku $\leq$ pa ćemo često kratko umjesto $(\Lambda, \leq)$ pisati Λ i govoriti o preduređenom (odnosno uređenom, usmjerenom ili kofinitnom) skupu Λ. Također, često ćemo za proizvoljne $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ takve da je $\lambda \leq \lambda'$ pisati $\lambda' \geq \lambda$.

Primjer 3.1 *(a) Skup $\mathcal{O}(x_0)$ svih okolina neke točke x_0 iz proizvoljnog topološkog prostora je usmjeren i uređen obzirom na relaciju definiranu sa: $U \leq V$ ako je $U \supseteq V$, za proizvoljne $U, V \in \mathcal{O}(x_0)$.*

(b) Skup $\mathcal{A}$ svih pokrivača nekog topološkog prostora je usmjeren obzirom na relaciju definiranu sa: $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2$ ako $\mathcal{U}_2$ profinjuje $\mathcal{U}_1$, za proizvoljne $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{A}$.

(c) Skup $\mathbb{N}$ sa standardnom relacijom $\leq$ je uređen, usmjeren i kofinitan.

Definicija 3.2 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija.* ***Inverzni sustav*** *$(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u kategoriji $\mathcal{C}$ je uređena trojka koja se sastoji od usmjerenog skupa Λ kojega nazivamo* ***indeksnim****, objekata X_λ u $\mathcal{C}$, $\lambda \in \Lambda$, koje nazivamo* ***članovima sustava****, i za svaki par indeksa $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, takvih da je $\lambda \leq \lambda'$, morfizama $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ u $\mathcal{C}$, koje nazivamo* ***veznim****, tako da vrijedi:*

(a) $p_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda}$, *za svaki* $\lambda \in \Lambda$,

(b) $p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$, *za svaki* $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$, $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$.

- $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ ćemo označavati sa $\boldsymbol{X}$.
- Ako je $\Lambda = \mathbb{N}$ (uz standardni uređaj) onda $\boldsymbol{X}$ nazivamo **inverznim nizom**.
- Ako je Λ jednotočkovan skup onda $\boldsymbol{X}$ nazivamo **rudimentarnim sustavom** i označavamo sa (X).

Sada ćemo definirati pojam *morfizma* i $*$-*morfizma* između dva inverzna sustava $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$ (obično ćemo kad god je jasna kategorija na koju se referiramo i u nastavku rada sa $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ uvijek označavati inverzne sustave $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $(Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$, redom, u odgovarajućoj kategoriji, a $\boldsymbol{Z}$ će označavati inverzni sustav $(Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$, također u odgovarajućoj kategoriji).

Definicija 3.3 ***Morfizam*** $(f, f_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *je uređeni par koji se sastoji od indeksne funkcije* $f : M \to \Lambda$ *i morfizama* $f_\mu : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$ *u* $\mathcal{C}$, *za svaki* $\mu \in M$, *tako da je zadovoljen sljedeći uvjet: za svaki* $\mu \leq \mu'$ *u* M *postoji* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$ *takav da vrijedi*

$$f_\mu p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{f(\mu')\lambda},$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} & X_\lambda & \\ \swarrow & & \searrow \\ X_{f(\mu)} & & X_{f(\mu')} \\ f_\mu \downarrow & & \downarrow f_{\mu'} \\ Y_\mu & \leftarrow & Y_{\mu'} \end{array}.$$

Definicija 3.4 $*$-***morfizam*** $(f, f_\mu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *je uređeni par koji se sastoji od indeksne funkcije* $f : M \to \Lambda$ *i od niza morfizama* $f_\mu^n : X_{f(\mu)} \to Y_\mu$ *u*

$\mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$, za svaki $\mu \in M$, tako da je zadovoljen sljedeći uvjet: za svaki $\mu \leq \mu'$ u M postoji $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu), f(\mu')$ i postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da za svaki $n' \geq n$ vrijedi

$$f_{\mu}^{n'} p_{f(\mu)\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'}^{n'} p_{f(\mu')\lambda} \, ,$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} & X_\lambda & \\ \swarrow & & \searrow \\ X_{f(\mu)} & & X_{f(\mu')} \\ f_{\mu}^{n'} \downarrow & & \downarrow f_{\mu'}^{n'} \\ Y_\mu & \leftarrow & Y_{\mu'} \end{array} .$$

Napomena 3.5 *Morfizme između proizvoljnog rudimentarnog inverznog sustava (X) i inverznog sustava $\boldsymbol{Y}$ ćemo označavati kratko sa (f_μ), a $*$-morfizme između (X) i $\boldsymbol{Y}$ kratko sa (f_μ^n) jer je izbor odgovarajuće indeksne funkcije u tom slučaju jedinstven.*

Kompozicijom morfizama $(f, f_\mu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $(g, g_\nu) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, u oznaci $(g, g_\nu) \circ (f, f_\mu)$, nazivamo dobro definirani morfizam $(h, h_\nu) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ gdje je

$$h = f \circ g,$$
$$h_\nu = g_\nu \circ f_{g(\nu)}, \, \forall \nu \in N.$$

Slično, **kompozicijom** $*$-morfizama $(f, f_\mu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $(g, g_\nu^n) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$, u oznaci $(g, g_\nu^n) \circ (f, f_\mu^n)$, nazivamo dobro definirani $*$-morfizam $(h, h_\nu^n) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$ gdje je

$$h = f \circ g,$$
$$h_\nu^n = g_\nu^n \circ f_{g(\nu)}^n, \, \forall \nu \in N, n \in \mathbb{N}.$$

Komponiranje morfizama i $*$-morfizama između inverznih sustava definirano na prethodan način je asocijativno, a lako se provjeri i da morfizam $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ te $*$-morfizam $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda}^n = 1_{X_\lambda}) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, za svaki inverzni sustav $\boldsymbol{X}$, gdje je $1_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ identička funkcija, djeluju neutralno u odgovarajućem komponiranju.

Stoga, ako uzmemo proizvoljnu kategoriju $\mathcal{C}$ možemo definirati sljedeće dvije kategorije:

- kategorija *inv*-$\mathcal{C}$ kojoj su objekti svi inverzni sustavi u $\mathcal{C}$, a skup morfizama *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ između proizvoljna dva inverzna sustava $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ tvore svi prethodno definirani morfizmi (f, f_μ),

- kategorija *inv**-$\mathcal{C}$ kojoj su objekti svi inverzni sustavi u $\mathcal{C}$, a skup morfizama *inv**-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ između proizvoljna dva inverzna sustava $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ tvore svi prethodno definirani $*$-morfizmi (f, f_μ^n),

dok su identički morfizmi i komponiranje u *inv*-$\mathcal{C}$, *inv**-$\mathcal{C}$, redom, također prethodno opisani.

3.2 Topologije na skupovima *inv*- i *inv**- morfizama

Za konstrukciju topologija na skupovima morfizama između dva fiksna objekta u kategorijama *inv*-$\mathcal{C}$ i *inv**-$\mathcal{C}$ (ili kraće na skupovima *inv*- i *inv**-morfizama) prvo ćemo definirati po dvije relacije na spomenutim skupovima, redom. Ove relacije (uz sitne promjene) su prvi put definirane u [32] i [33]. Za početak, za proizvoljni indeks α iz predurećenog skupa A uvedimo oznaku $|\alpha|$ za

$$card\{\alpha' \in A : \alpha' \leq \alpha\}.$$

Sada fiksirajmo dva proizvoljna inverzna sustava $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ u $\mathcal{C}$, tj. dva objekta u *inv*-$\mathcal{C}$ odnosno *inv**-$\mathcal{C}$.

Napomena 3.6 *U nastavku ćemo bez dodatnog isticanja uvijek smatrati da su skupovi inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ neprazni, jer su u protivnom sva razmatranja trivijalna.*

Definicija 3.7 *Neka su $(f, f_\mu), (f', f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $(f, f_\mu^n), (f', f'^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\mu_0 \in M$ i kardinalni broj κ proizvoljni.*
Za (f, f_μ) i (f', f'_μ) kažemo da su

- μ_0-***ekvivalentni***, *u oznaci* $(f, f_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'_\mu)$, *ako postoji* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu_0), f'(\mu_0)$ *takav da je*

$$f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} = f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda},$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{f(\mu_0)} \arrow[dr, "f_{\mu_0}"'] & & X_{f'(\mu_0)} \arrow[dl, "f'_{\mu_0}"] \\ & Y_{\mu_0} & \end{tikzcd};$$

- κ-***ekvivalentni***, *u oznaci* $(f, f_\mu) \sim_\kappa (f', f'_\mu)$, *ako je* $(f, f_\mu) \sim_{\mu'} (f', f'_\mu)$ *za svaki* $\mu' \in M$ *takav da je* $|\mu'| \leq \kappa$.

Nadalje, za (f, f^n_μ) *i* (f', f'^n_μ) *kažemo da su*

- μ_0-***ekvivalentni***, *u oznaci* $(f, f^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'^n_\mu)$, *ako postoji* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu_0), f'(\mu_0)$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je za svaki* $n' \geq n$

$$f^{n'}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} = f'^{n'}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda},$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{f(\mu_0)} \arrow[dr, "f^{n'}_{\mu_0}"'] & & X_{f'(\mu_0)} \arrow[dl, "f'^{n'}_{\mu_0}"] \\ & Y_{\mu_0} & \end{tikzcd};$$

- κ-***ekvivalentni***, *u oznaci* $(f, f^n_\mu) \sim_\kappa (f', f'^n_\mu)$, *ako je* $(f, f^n_\mu) \sim_{\mu'} (f', f'^n_\mu)$ *za svaki* $\mu' \in M$ *takav da je* $|\mu'| \leq \kappa$.

Sljedeće dvije tvrdnje se bez dokaza mogu pronaći u [32] i [33], a mi ćemo ih ovdje i dokazati zbog boljeg razumijevanja u nastavku.

Lema 3.8 *Relacije μ_0-ekvivalentnosti i κ-ekvivalentnosti na skupovima inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ su relacije ekvivalencije, za svaki $\mu_0 \in M$ i za svaki kardinalni broj κ.*

Dokaz. Neka su $\mu_0 \in M$ i kardinalni broj κ proizvoljni. Direktno iz Definicije 3.7 očito je da je μ_0-ekvivalentnost refleksivna i simetrična relacija na *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i na *inv**-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, a onda, opet po istoj definiciji, je očito i na svakom od tih skupova κ-ekvivalentnost također refleksivna i simetrična relacija. Preostaje pokazati tranzitivnost svake od četiriju relacija i time je dokaz gotov. Prvo, neka su $(f, f_\mu), (f', f'_\mu), (f'', f''_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takvi da je $(f, f_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'_\mu)$ i $(f', f'_\mu) \sim_{\mu_0} (f'', f''_\mu)$. Dakle, postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq f(\mu_0), f'(\mu_0)$, $\lambda_2 \geq f'(\mu_0), f''(\mu_0)$ takvi da je $f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} = f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_1}$ i $f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} = f''_{\mu_0} p_{f''(\mu_0)\lambda_2}$. Sada, po usmjerenosti skupa Λ odaberimo $\lambda \in \Lambda$ takav da je $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda$ i uočimo, koristeći prethodne činjenice i svojstvo (b) iz Definicije 3.2, da vrijede sljedeće jednakosti

$$
\begin{aligned}
f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} &= f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} p_{\lambda_1 \lambda} \\
&= f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_1} p_{\lambda_1 \lambda} \\
&= f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda} \\
&= f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} p_{\lambda_2 \lambda} \\
&= f''_{\mu_0} p_{f''(\mu_0)\lambda_2} p_{\lambda_2 \lambda} \\
&= f''_{\mu_0} p_{f''(\mu_0)\lambda},
\end{aligned}
$$

dakle $(f, f_\mu) \sim_{\mu_0} (f'', f''_\mu)$, odnosno μ_0-ekvivalentnost je tranzitivna relacija na *inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Sada, neka su $(f, f^n_\mu), (f', f'^n_\mu), (f'', f''^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takvi da je $(f, f^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'^n_\mu)$ i $(f', f'^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f'', f''^n_\mu)$. Stoga postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq f(\mu_0), f'(\mu_0)$, $\lambda_2 \geq f'(\mu_0), f''(\mu_0)$ i $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n' \geq n_1$ vrijedi $f^{n'}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} = f'^{n'}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_1}$, a za sve $n'' \geq n_2$ vrijedi $f'^{n''}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} = f''^{n''}_{\mu_0} p_{f''(\mu_0)\lambda_2}$. Opet, po usmjerenosti skupa Λ odaberimo $\lambda \in \Lambda$ takav da je $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda$, potom odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_1, n_2$, i uočimo, koristeći analogiju iz prvog dijela dokaza, da za svaki $n' \geq n$ vrijedi

$$f^{n'}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} = f''^{n'}_{\mu_0} p_{f''(\mu_0)\lambda},$$

tj. $(f, f_\mu^n) \sim_{\mu_0} (f'', f_\mu''^n)$ pa je μ_0-ekvivalentnost tranzitivna relacija i na skupu inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Tranzitivnost relacija κ-ekvivalentnosti na skupovima inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ slijedi iz definicije i prethodno pokazane tranzitivnosti μ_0-ekvivalentnosti na svakom od spomenutih skupova. ∎

Lema 3.9 *Neka su dani* $(f, f_\mu), (f', f'_\mu) \in inv$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $(f, f_\mu^n), (f', f_\mu'^n) \in inv^*$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\mu_0, \mu'_0 \in M$ *i kardinalni brojevi* κ, κ' *takvi da je* $\mu_0 \le \mu'_0$ *i* $\kappa \le \kappa'$.

(i) Ako je $(f, f_\mu) \sim_{\mu'_0} (f', f'_\mu)$ *onda je* $(f, f_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'_\mu)$.

(ii) Ako je $(f, f_\mu) \sim_{\kappa'} (f', f'_\mu)$ *onda je* $(f, f_\mu) \sim_{\kappa} (f', f'_\mu)$.

(iii) Ako je $(f, f_\mu^n) \sim_{\mu'_0} (f', f_\mu'^n)$ *onda je* $(f, f_\mu^n) \sim_{\mu_0} (f', f_\mu'^n)$.

(iv) Ako je $(f, f_\mu^n) \sim_{\kappa'} (f', f_\mu'^n)$ *onda je* $(f, f_\mu^n) \sim_{\kappa} (f', f_\mu'^n)$.

Dokaz.

(i) Neka je $(f, f_\mu) \sim_{\mu'_0} (f', f'_\mu)$. Tada postoji $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \ge f(\mu'_0), f'(\mu'_0)$ takav da je $f_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda'} = f'_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda'}$. Nadalje, po Definiciji 3.3 za odabir (f, f_μ) i $\mu_0 \le \mu'_0$ postoji $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_1 \ge f(\mu_0), f(\mu'_0)$ takav da je $f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} = q_{\mu_0\mu'_0} f_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda_1}$. Analogno, za (f', f'_μ) i $\mu_0 \le \mu'_0$ postoji $\lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_2 \ge f'(\mu_0), f'(\mu'_0)$ takav da je $f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} = q_{\mu_0\mu'_0} f'_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda_2}$. Sada, po usmjerenosti skupa Λ odaberimo $\lambda \ge \lambda', \lambda_1, \lambda_2$. Koristeći prethodne činjenice i svojstvo (b) iz Definicije 3.2 imamo da vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}
f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} &= f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} p_{\lambda_1\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda_1} p_{\lambda_1\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda'} p_{\lambda'\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f'_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda'} p_{\lambda'\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f'_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda_2} p_{\lambda_2\lambda} \\
&= f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} p_{\lambda_2\lambda} \\
&= f'_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda},
\end{aligned}$$

dakle $(f, f_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'_\mu)$.

(ii) Trivijalno.

(iii) Neka je $(f, f^n_\mu) \sim_{\mu'_0} (f', f'^n_\mu)$. Tada postoji $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda' \geq f(\mu'_0), f'(\mu'_0)$ i $n'_0 \in \mathbb{N}$ tako da zvaki $\bar{n} \geq n'_0$ vrijedi $f^{\bar{n}}_{\mu_0'} p_{f(\mu'_0)\lambda'} = f'^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda'}$. Zatim, po Definiciji 3.4 za odabir (f, f^n_μ) i $\mu_0 \leq \mu'_0$ postoje $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq f(\mu_0), f(\mu'_0)$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $\bar{n} \geq n_1$ vrijedi $f^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} = q_{\mu_0\mu'_0} f^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda_1}$. Analogno, za (f', f'^n_μ) i $\mu_0 \leq \mu'_0$ postoje $\lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_2 \geq f'(\mu_0), f'(\mu'_0)$ i $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $\bar{n} \geq n_2$ vrijedi $f'^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} = q_{\mu_0\mu'_0} f'^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda_2}$. Potom, po usmjerenosti skupa Λ odaberimo $\lambda \geq \lambda', \lambda_1, \lambda_2$ i odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq n'_0, n_1, n_2$ te koristeći prethodne činjenice, a slično kao u dokazu tvrdnje (i) ove leme, imamo da za svaki $\bar{n} \geq n_0$ vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}
f^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} &= f^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda_1} p_{\lambda_1\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda_1} p_{\lambda_1\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f(\mu'_0)\lambda'} p_{\lambda'\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f'^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda'} p_{\lambda'\lambda} \\
&= q_{\mu_0\mu'_0} f'^{\bar{n}}_{\mu'_0} p_{f'(\mu'_0)\lambda_2} p_{\lambda_2\lambda} \\
&= f'^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda_2} p_{\lambda_2\lambda} \\
&= f'^{\bar{n}}_{\mu_0} p_{f'(\mu_0)\lambda}.
\end{aligned}$$

Stoga je $(f, f^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f', f'^n_\mu)$.

(iv) Trivijalno.

■

Sada, za proizvoljne $(f, f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $(f, f^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mu_0 \in M$ i kardinalni broj κ definiramo skupove $V^{(f,f_\mu)}_{\mu_0}, V^{(f,f_\mu)}_\kappa, V^{(f,f^n_\mu)}_{\mu_0}$ i $V^{(f,f^n_\mu)}_\kappa$ na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)} &:= \left\{(f',f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (f',f'_\mu) \sim_{\mu_0} (f,f_\mu)\right\},\\
V_{\kappa}^{(f,f_\mu)} &:= \left\{(f',f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (f',f'_\mu) \sim_{\kappa} (f,f_\mu)\right\},\\
V_{\mu_0}^{(f,f_\mu^n)} &:= \left\{(f',f'^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (f',f'^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f,f_\mu^n)\right\},\\
V_{\kappa}^{(f,f_\mu^n)} &:= \left\{(f',f'^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (f',f'^n_\mu) \sim_{\kappa} (f,f_\mu^n)\right\}.
\end{aligned}
$$

Napomena 3.10 *Budući da su μ_0-ekvivalentnost i κ-ekvivalentnost relacije ekvivalencije na inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ i inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ (Lema 3.8) tada su prethodni skupovi zapravo klase ekvivalencije od (f,f_μ) odnosno od (f,f_μ^n) s obzirom na odgovarajuće relacije. Stoga, primijetimo da $(f,f_\mu) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}, V_\kappa^{(f,f_\mu)}$ i $(f,f_\mu^n) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu^n)}, V_\kappa^{(f,f_\mu^n)}$, te da relacije $(f',f'_\mu) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}, (f',f'_\mu) \in V_\kappa^{(f,f_\mu)}, (f',f'^n_\mu) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu^n)}, (f',f'^n_\mu) \in V_\kappa^{(f,f_\mu^n)}$ povlače redom jednakosti $V_{\mu_0}^{(f',f'_\mu)} = V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$, $V_\kappa^{(f',f'_\mu)} = V_\kappa^{(f,f_\mu)}$, $V_{\mu_0}^{(f',f'^n_\mu)} = V_{\mu_0}^{(f,f_\mu^n)}$, $V_\kappa^{(f',f'^n_\mu)} = V_\kappa^{(f,f_\mu^n)}$, za svaki $(f',f'_\mu) \in$ inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $(f',f'^n_\mu) \in$ inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.*

Slijedi važna tvrdnja.

Teorem 3.11 *(i) Familije*

$$\mathcal{V}_{ind}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)} : (f,f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \mu_0 \in M\right\}$$

i

$$\mathcal{V}_{card}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{V_{\kappa}^{(f,f_\mu)} : (f,f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\}\right\}$$

zadovoljavaju svojstva $(B1)$ i $(B2)$ (iz Definicije 2.11) na inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

(ii) Familije

$$\mathcal{V}_{ind}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{V_{\mu_0}^{(f,f_\mu^n)} : (f,f_\mu^n) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \mu_0 \in M\right\}$$

i

$$\mathcal{V}_{card}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{V_{\kappa}^{(f,f_\mu^n)} : (f,f_\mu^n) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\}\right\}$$

zadovoljavaju svojstva $(B1)$ i $(B2)$ na inv*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

Napomena 3.12 *Familije* $\mathcal{V}_{ind}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}, \mathcal{V}_{card}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}, \mathcal{V}_{ind}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}$ *i* $\mathcal{V}_{card}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}$ *koje se zapravo pridružuju paru inverznih sustava* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *(u kategoriji* $\mathcal{C}$*) ćemo kratko označavati* $\mathcal{V}_{ind}, \mathcal{V}_{card}, \mathcal{V}_{ind}^*$ *i* $\mathcal{V}_{card}^*$*, redom, onda kada je jasno iz konteksta o kojemu paru inverznih sustava je riječ.*

Dokaz.

(i) Neka je $(f, f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Uzmimo proizvoljni $\mu_0 \in M$. Znamo da je $(f, f_\mu) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ i $V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)} \in \mathcal{V}_{ind}$, stoga $\mathcal{V}_{ind}$ zadovoljava $(B1)$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Slično, odabirom kardinalnog broja κ takvog da je $\kappa = |\mu_0|$, iz $(f, f_\mu) \in V_\kappa^{(f,f_\mu)}$ i $V_\kappa^{(f,f_\mu)} \in \mathcal{V}_{card}$ lako možemo zaključiti da i $\mathcal{V}_{card}$ zadovoljava $(B1)$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Sada pokažimo da $\mathcal{V}_{ind}$ zadovoljava $(B2)$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{ind}$ takvi da je $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ i neka je $(f, f_\mu) \in V_1 \cap V_2$ proizvoljan element iz presjeka. Budući da su $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{ind}$ tada postoje $(f', f'_\mu), (f'', f''_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu'_0, \mu''_0 \in M$ takvi da je $V_1 = V_{\mu'_0}^{(f',f'_\mu)}$ i $V_2 = V_{\mu''_0}^{(f'',f''_\mu)}$. Po Napomeni 3.10 $(f, f_\mu) \in V_1 \cap V_2 = V_{\mu'_0}^{(f',f'_\mu)} \cap V_{\mu''_0}^{(f'',f''_\mu)}$ povlači $V_1 = V_{\mu'_0}^{(f,f_\mu)}$i $V_2 = V_{\mu''_0}^{(f,f_\mu)}$. Sada po usmjerenosti skupa M odaberimo $\mu_0 \in M$ takav da je $\mu_0 \geq \mu'_0, \mu''_0$. Neka je $V_3 = V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$. Uočimo da je $(f, f_\mu) \in V_3$ te da je $V_3 \in \mathcal{V}_{ind}$. Potom, koristeći tvrdnju (i) Leme 3.9 imamo da je $V_3 \subseteq V_1$ i $V_3 \subseteq V_2$, stoga je $(f, f_\mu) \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$. Dakle, $\mathcal{V}_{ind}$ zadovoljava $(B2)$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Preostaje još pokazati da $\mathcal{V}_{card}$ također zadovoljava $(B2)$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, a dokaz će biti dosta sličan kao za $\mathcal{V}_{ind}$. Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{card}$ takvi da je $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ i neka je $(f, f_\mu) \in V_1 \cap V_2$ proizvoljan element iz presjeka. Tada postoje $(f', f'_\mu), (f'', f''_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu'_0, \mu''_0 \in M$ takvi da za $\kappa' = |\mu'_0|, \kappa'' = |\mu''_0|$ vrijedi $V_1 = V_{\kappa'}^{(f',f'_\mu)}$ i $V_2 = V_{\kappa''}^{(f'',f''_\mu)}$. Slično kao i prije, Napomena 3.10 i $(f, f_\mu) \in V_1 \cap V_2 = V_{\kappa'}^{(f',f'_\mu)} \cap V_{\kappa''}^{(f'',f''_\mu)}$ povlače $V_1 = V_{\kappa'}^{(f,f_\mu)}$ i $V_2 = V_{\kappa''}^{(f,f_\mu)}$. Sada, neka je $V_3 = V_\kappa^{(f,f_\mu)}$ gdje je $\kappa = \max\{\kappa', \kappa''\}$. Uočimo da je $\kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\}$ pa je $V_3 \in \mathcal{V}_{card}$, a jasno je i $(f, f_\mu) \in V_3$. Po tvrdnji (ii) Leme 3.9 imamo da je $V_3 \subseteq V_1$ i $V_3 \subseteq V_2$, pa $(f, f_\mu) \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$ i time je dokaz ove prve tvrdnje gotov.

(ii) Dokaz je potpuno analogan dokazu prve tvrdnje koristeći pritom također Napomenu 3.10 te pozivajući se na tvrdnje (iii) i (iv) Leme 3.9.

■

Koristeći prethodni teorem i Lemu 2.12 možemo topologizirati svaki od skupova $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ dvjema topologijama i to onima kojima će baze biti odgovarajuće familije iz prethodnog teorema, a jasno je zbog proizvoljnosti odabira inverznih sustava $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ u $\mathcal{C}$ na samom početku poglavlja da su konstrukcije iz ovog poglavlja primjenjive na skupovima morfizama između bilo kojih fiksnih objekata u kategorijama $inv\text{-}\mathcal{C}$ i $inv^*\text{-}\mathcal{C}$, redom, za svaku kategoriju $\mathcal{C}$. Dakle, koristeći oznaku iz Leme 2.12, dobivamo sljedeće prostore:

- $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$,
- $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}))$,
- $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind}))$ i
- $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card}))$,

i to za svaki par inverznih sustava $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$.

Slijedi nekoliko najbitnijih topoloških svojstava prethodno opisanih topologija. Prvo ćemo pokazati da su bazni elementi svih prethodno opisanih topologija otvoreno-zatvoreni skupovi u odgovarajućim prostorima, a onda nešto više reći i o međuodnosu samih topologija.

Propozicija 3.13 *Neka su $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$.*

(i) Elementi familija $\mathcal{V}_{ind}$ i $\mathcal{V}_{card}$ pridruženih paru $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ su otvoreno-zatvoreni skupovi u prostorima $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$ i $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}))$, redom.

(ii) Elementi familija $\mathcal{V}^*_{ind}$ i $\mathcal{V}^*_{card}$ pridruženih paru $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ su otvoreno-zatvoreni skupovi u prostorima $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind}))$ i $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card}))$, redom.

Dokaz.

(i) Prvo neka je $V \in \mathcal{V}_{ind}$ proizvoljan. Očito je V otvoren skup u $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$ (Lema 2.12). Zatim, znamo da postoji $(f, f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu_0 \in M$ takav da je $V = V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$. Budući da je μ_0-ekvivalentnost relacija ekvivalencije na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ (Lema 3.8) to su skupovi V i $V_{\mu_0}^{(f',f'_\mu)}$ disjunktni, za svaki $(f', f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takav da $(f, f_\mu) \not\sim_{\mu_0} (f', f'_\mu)$. Stoga, imamo da je $V = inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \setminus U$ gdje je

$$U = \bigcup_{(f',f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):\ (f,f_\mu) \not\sim_{\mu_0} (f',f'_\mu)} V_{\mu_0}^{(f',f'_\mu)}.$$

Budući da je U otvoren kao unija baznih elemenata (Lema 2.12) to je V zatvoren skup u $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$. Dakle, V je otvoreno-zatvoren skup u prostoru $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$. Dokaz da su elementi familije $\mathcal{V}_{card}$ otvoreno-zatvoreni skupovi u prostoru $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}))$ je potpuno analogan prvom dijelu dokaza, samo umjesto $\mathcal{V}_{ind}$ biramo $\mathcal{V}_{card}$, umjesto proizvoljnog indeksa $\mu_0 \in M$ biramo proizvoljni kardinalni broj $\kappa \in \{|\mu'_0| : \mu'_0 \in M\}$ te koristimo činjenicu da je κ-ekvivalentnost (isto kao i μ_0-ekvivalentnost) relacija ekvivalencije na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ (Lema 3.8).

(ii) Analogno dokazu tvrdnje (i) ove propozicije, koristeći odgovarajuće činjenice iz Leme 3.8.

■

Propozicija 3.14 *Neka su $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$ i neka su dani prostori $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$ i $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}))$, te $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind}))$ i $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card}))$. Vrijedi:*

(i) $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}) \supseteq \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$ odnosno $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{card})$ je finija od $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$;

(ii) $\mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card}) \supseteq \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind})$ odnosno $\mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card})$ je finija od $\mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind})$.

Dokaz.

(i) Neka je $(f, f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i neka je $V \in \mathcal{V}_{ind}$ takav da je $(f, f_\mu) \in V$. Tada postoji $(f', f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu_0 \in M$ takav da je $V = V_{\mu_0}^{(f', f'_\mu)}$. Po Napomeni 3.10 očito je $V = V_{\mu_0}^{(f, f_\mu)}$. Neka je kardinalni broj κ jednak $|\mu_0|$. Definirajmo $V' = V_\kappa^{(f, f_\mu)}$. Jasno je da je $(f, f_\mu) \in V'$ i $V' \in \mathcal{V}_{card}$. Po Definiciji 3.7 očito je da u našem slučaju κ-ekvivalentnost povlači μ_0-ekvivalentnost. Stoga, po definiciji skupova V i V', trivijalno slijedi $V' \subseteq V$, a onda po Lemi 2.10 imamo da je $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}) \supseteq \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$.

(ii) Potpuno analogno dokazu prve tvrdnje ove propozicije.

■

Ovo poglavlje završit ćemo jednostavnim primjerima koji pokazuju da prethodno definirane topologije na skupovima *inv*- i *inv**- morfizama općenito ne zadovoljavaju jake aksiome separacije, štoviše niti najslabiji od njih.

Primjer 3.15 *Neka je $\mathcal{C} = Set$, te neka su $\boldsymbol{X} = (X_i, p_{ii'}, \Lambda)$ i $\boldsymbol{Y} = (Y_{\mu_0})$ inverzni sustavi u $\mathcal{C}$, gdje je $\Lambda = \{1, 2\}$ uz prirodni uređaj nasljeđen iz $\mathbb{N}$, $X_1 = \{0, 1\}, X_2 = \{0\}$, $p_{12} : X_2 \to X_1$ je inkluzija i $Y_{\mu_0} = \{0, 1\}$ (formalno smo za jednočlani indeksni skup od rudimentarnog sustava $\boldsymbol{Y}$ odabrali neki konkretni skup $\{\mu_0\}$ radi kasnijih oznaka). Neka su $(f), (f') : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ zadani tako da je $f : X_1 \to Y_{\mu_0}$ identiteta i $f' : X_1 \to Y_{\mu_0}$ nul-konstanta. Trivijalno je provjeriti da su $(f), (f') \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $(f) \neq (f')$. Nadalje, iz očigledne jednakosti*

$$fp_{12} = f'p_{12}$$

slijedi da je $(f) \sim_{\mu_0} (f')$. Također očito je i $(f) \sim_1 (f')$ za kardinalni broj 1. Stoga, po definiciji familija $\mathcal{V}_{ind}$ i $\mathcal{V}_{card}$ pridruženih paru $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i po Napomeni 3.10 slijedi da svaki element tih familija koji sadrži (f) mora sadržavati i (f'), i obratno. Kako su te familije baze topologija $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$ i $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{card})$, redom, slijedi da $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind}))$ i $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{card}))$ nisu T_0-prostori, tj. ne zadovoljavaju T_0-aksiom.

Primjer 3.16 *Neka je* $\mathbf{Y} = (Y_{\mu_0})$ *rudimentarni inverzni sustav u Set definiran kao u prethodnom primjeru. Neka su* $(f^n), (f'^n) : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ *zadani tako da je* $f^1 : Y_{\mu_0} \to Y_{\mu_0}$ *nul-konstanta,* $f'^1 : Y_{\mu_0} \to Y_{\mu_0}$ *je identiteta, te su i* f^n *i* f'^n *identitete na* Y_{μ_0}*, za svaki* $n \geq 2$*. Očito su* $(f^n), (f'^n) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ *i* $(f^n) \neq (f'^n)$*. No, s druge strane jasno je da* $(f^n) \sim_{\mu_0} (f'^n)$*, te* $(f^n) \sim_1 (f'^n)$ *za kardinalni broj* 1*. Prema tome, potpuno analogno prethodnom primjeru, a pritom koristeći odgovarajuće činjenice za* inv^* *-slučaj, zaključujemo da* $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind}))$ *i* $(inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card}))$ *nisu* T_0*-prostori.*

3.3 Kategorije *pro*-$\mathcal{C}$ i *pro**-$\mathcal{C}$

Kategorije *inv*-$\mathcal{C}$ i *inv**-$\mathcal{C}$ nisu same po sebi ključne ni posebno zanimljive za naše kasnije potrebe, tj. za teoriju oblika i gruboga oblika, već ćemo morati prijeći na određene kvocijentne kategorije tih kategorija s obzirom na kongruencije koje ćemo uskoro definirati. Slično vrijedi i za topologije koje smo uveli na skupovima morfizama u *inv*- i *inv**- kategorijama u prethodnom poglavlju, za koje smo čak pokazali da ne ispunjavaju ni najslabije aksiome separacije. No, te topologije koristit ćemo za prirodno topologiziranje skupova morfizama u netom spomenutim kvocijentnim kategorijama, i to već u sljedećem poglavlju.

Definicija 3.17 *Neka su* $\mathbf{X}$ *i* $\mathbf{Y}$ *inverzni sustavi u nekoj kategoriji* $\mathcal{C}$ *i neka su* $(f, f_\mu), (f', f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*,* $(f, f^n_\mu), (f', f'^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *proizvoljni.*

(i) Za (f, f_μ) *i* (f', f'_μ) *kažemo da su* ***ekvivalentni****, u oznaci* $(f, f_\mu) \sim (f', f'_\mu)$*, ako za svaki* $\mu \in M$ *postoji* $\lambda \in \Lambda$*,* $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$ *takav da je*

$$f_\mu p_{f(\mu)\lambda} = f'_\mu p_{f'(\mu)\lambda},$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{f(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu"'] & & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f'_\mu"] \\ & Y_\mu & \end{tikzcd} .$$

(ii) Za (f, f_μ^n) *i* $(f', f_\mu'^n)$ *kažemo da su* ***ekvivalentni****, u oznaci* $(f, f_\mu^n) \sim (f', f_\mu'^n)$*, ako za svaki* $\mu \in M$ *postoji* $\lambda \in \Lambda$*,* $\lambda \geq f(\mu), f'(\mu)$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je za svaki* $n' \geq n$

$$f_\mu^{n'} p_{f(\mu)\lambda} = f_\mu'^{n'} p_{f'(\mu)\lambda},$$

odnosno da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{f(\mu)} \arrow[dr, "f_\mu^{n'}"'] & & X_{f'(\mu)} \arrow[dl, "f_\mu'^{n'}"] \\ & Y_\mu & \end{tikzcd} .$$

Propozicija 3.18 *Klasa kojoj su elementi relacije ekvivalentnosti* $\sim$ *iz (i) Definicije 3.17 po svim skupovima* $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$*, za sve parove inverznih sustava* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*, je kongruencija na kategoriji* $inv\text{-}\mathcal{C}$*.*

Dokaz. Vidi [23]. ■

Propozicija 3.19 *Klasa kojoj su elementi relacije ekvivalentnosti* $\sim$ *iz (ii) Definicije 3.17 po svim skupovima* $inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$*, za sve parove inverznih sustava* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*, je kongruencija na kategoriji* $inv^*\text{-}\mathcal{C}$*.*

Dokaz. Direktno iz Lema 3.20 i 3.21. u [17]. ■

Po prethodnim propozicijama i Teoremu 2.8 za proizvoljnu kategoriju $\mathcal{C}$ dobivamo sljedeće dvije kvocijentne kategorije:

- $pro\text{-}\mathcal{C} := inv\text{-}\mathcal{C}/_{\sim}$,
- $pro^*\text{-}\mathcal{C} := inv^*\text{-}\mathcal{C}/_{\sim}$.

Morfizme $[(f, f_\mu)] \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $[(f, f_\mu^n)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, (koje ćemo ponekad kratko zvati *pro*- i *pro**- morfizmi, redom) za neke inverzne sustave $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ u $\mathcal{C}$, ćemo još označavati sa $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{f}^*$, redom.

Napomena 3.20 *Budući da smo definirali više relacija ekvivalencije na svakom od skupova* $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *te* $inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *ovdje samo napominjemo da će se klasična oznaka klase ekvivalencije od* (f, f_μ) *te* (f, f_μ^n) *preko uglatih zagrada, dakle* $[(f, f_\mu)]$ *odnosno* $[(f, f_\mu^n)]$, *uvijek koristiti samo s obzirom na relacije* $\sim$ *iz Definicije 3.17.*

Propozicija 3.21 *Neka je* (X) *rudimentarni inverzni sustav i* $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustav u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$. *Tada:*

(i) za svake $(f_\mu), (f'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}((X), \boldsymbol{Y})$ *vrijedi* $(f_\mu) \sim (f'_\mu)$ *ako i samo ako je, za svaki* $\mu \in M$, $f_\mu = f'_\mu$;

(ii) za svake $(f_\mu^n), (f_\mu'^n) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}((X), \boldsymbol{Y})$ *vrijedi* $(f_\mu^n) \sim (f_\mu'^n)$ *ako i samo ako je, za svaki* $\mu \in M$, $f_\mu^n = f_\mu'^n$, *za gotovo svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Oba slučaja proizlaze direktno iz Definicije 3.17. ■

Primijetimo da po prethodnoj propoziciji svaki *pro*-morfizam između rudimentarnog inverznog sustava (X) i inverznog sustava $\boldsymbol{Y}$ ima jedinstvenog predstavnika u $inv\text{-}\mathcal{C}((X), \boldsymbol{Y})$.

Nadalje, postoji funktor

$$\underline{J} : pro\text{-}\mathcal{C} \to pro^*\text{-}\mathcal{C} \tag{3.1}$$

definiran na sljedeći način:

- $\underline{J}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, $\forall \mathbf{X} \in Ob(pro\text{-}\mathcal{C})$,
- $\underline{J}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}^* = [(f, f_\mu^n)]$, gdje je $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)] \in pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $f_\mu^n = f_\mu$, $\forall \mu \in M, n \in \mathbb{N}$.

Za morfizam $\boldsymbol{f}^* = \underline{J}(\boldsymbol{f})$ se još kaže da je induciran morfizmom $\boldsymbol{f}$. Vrijedi da je funktor $\underline{J}$ vjeran (Propozicija 3.24 u [17]), ali nije pun (Napomena 3.25 u [17]).

Ovo poglavlje ćemo završiti s bitnim teoremom, poznatim pod nazivom "Mardešićev trik", koji će nam u nekim kasnijim razmatranjima zatrebati.

Teorem 3.22 *Za svaki* $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \in Ob(pro\text{-}\mathcal{C})$ *postoji njemu izomorfan* $\boldsymbol{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ *u kategoriji pro-*$\mathcal{C}$ *takav da je* M *kofinitan i uređen te* $card(M) \leq card(\Lambda)$. *Štoviše, svaki član i vezni morfizam od* $\boldsymbol{Y}$ *je član i vezni morfizam od* $\boldsymbol{X}$.

Dokaz. Vidi Teorem 1.1.2 u [23]. ■

Napomena 3.23 *Analogna tvrdnja prethodnog teorema vrijedi i u pro***- slučaju, direktnom primjenom funktora* $\underline{J}$ *i činjenice da funktori čuvaju izomorfizme.*

3.4 Topologije na skupovima *pro*- i *pro**-morfizama

Za svaki par inverznih sustava $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ u nekoj kategoriji $\mathcal{C}$ promatramo sljedeće dvije kanonske surjekcije p i q:

- $p : inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \to pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $p((f, f_\mu)) = [(f, f_\mu)]$,
- $q : inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \to pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $q((f, f_\mu^n)) = [(f, f_\mu^n)]$,

dakle s obzirom na odgovarajuće relacije ekvivalentnosti $\sim$ iz Definicije 3.17. Primijetimo da zbog Napomene 3.6 smatramo da su skupovi $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ neprazni.

Prema Definiciji 2.18 i koristeći prethodno konstruirane topologije na skupovima *inv*- i *inv**- morfizama dobivamo po dvije topologije na $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i to:

(1) kvocijentnu topologiju s obzirom na p i $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$ na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, koju ćemo označavati sa $\mathcal{T}_{ind}$ i

(2) kvocijentnu topologiju s obzirom na p i $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{card})$ na inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, u oznaci $\mathcal{T}_{card}$,

te po dvije topologije na pro^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$:

(1) kvocijentnu topologiju s obzirom na q i $\mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{ind})$ na inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, koju ćemo označavati sa $\mathcal{T}^*_{ind}$ i

(2) kvocijentnu topologiju s obzirom na q i $\mathcal{T}(\mathcal{V}^*_{card})$ na inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, u oznaci $\mathcal{T}^*_{card}$.

U sljedećoj propoziciji ćemo vidjeti kako možemo, s obzirom na prirodu konstrukcije kvocijentne topologije, lako opisati bazu prethodno dobivenih topologija na pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ i pro^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Naime, bazne elemente ćemo smjeti zamišljati kao bazne elemente odgovarajućih topologija na inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ odnosno inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, samo u termima klasa odgovarajućih relacija ekvivalentnosti $\sim$ iz Definicije 3.17. Prvo uvedimo za proizvoljne $\boldsymbol{f}=[(f,f_\mu)]\in pro$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{f}^*=[(f,f^n_\mu)]\in pro^*$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $\mu_0\in M$ i kardinalni broj κ skupove $B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0}, B^{\boldsymbol{f}}_{\kappa}, B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0}$, i $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\kappa}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0} &:= \{\boldsymbol{g}=[(g,g_\mu)]\in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (g,g_\mu)\sim_{\mu_0}(f,f_\mu)\}\,,\\
B^{\boldsymbol{f}}_{\kappa} &:= \{\boldsymbol{g}=[(g,g_\mu)]\in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (g,g_\mu)\sim_{\kappa}(f,f_\mu)\}\,,\\
B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0} &:= \left\{\boldsymbol{g}^*=[(g,g^n_\mu)]\in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (g,g^n_\mu)\sim_{\mu_0}(f,f^n_\mu)\right\},\\
B^{\boldsymbol{f}^*}_{\kappa} &:= \left\{\boldsymbol{g}^*=[(g,g^n_\mu)]\in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : (g,g^n_\mu)\sim_{\kappa}(f,f^n_\mu)\right\}.
\end{aligned}$$

Napomena 3.24 *Dobra definiranost prethodnih skupova, odnosno neovisnost skupova o izboru predstavnika od* $\boldsymbol{f}$ *i* $\boldsymbol{g}$, *odnosno* $\boldsymbol{f}^*$ *i* $\boldsymbol{g}^*$, *slijedi direktno iz očite činjenice da ekvivalentnost implicira i* μ_0*-ekvivalentnost i* κ*-ekvivalentnost na skupovima* inv-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ *odnosno* inv^*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, *i to za svaki* $\mu_0\in M$ *i kardinalni broj* κ.

Napomena 3.25 *Slično kao u Napomeni 3.10 navedimo da uvijek vrijedi* $\boldsymbol{f}\in B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0}, B^{\boldsymbol{f}}_{\kappa}$ *i* $\boldsymbol{f}^*\in B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0}, B^{\boldsymbol{f}^*}_{\kappa}$, *te da relacije* $\boldsymbol{g}\in B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0}$, $\boldsymbol{g}\in B^{\boldsymbol{f}}_{\kappa}$, $\boldsymbol{g}^*\in B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0}$, $\boldsymbol{g}^*\in B^{\boldsymbol{f}^*}_{\kappa}$ *povlače redom jednakosti* $B^{\boldsymbol{g}}_{\mu_0}=B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0}$, $B^{\boldsymbol{g}}_{\kappa}=B^{\boldsymbol{f}}_{\kappa}$, $B^{\boldsymbol{g}^*}_{\mu_0}=B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0}$,

$B_\kappa^{\boldsymbol{g}^*} = B_\kappa^{\boldsymbol{f}^*}$, za svaki $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^* \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\mu_0 \in M$ i kardinalni broj κ.

Propozicija 3.26 *(i) Familije*

$$\mathcal{B}_{ind}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{ B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{f} \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mu_0 \in M \right\}$$

i

$$\mathcal{B}_{card}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{ B_{\kappa}^{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{f} \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\} \right\}$$

su baze topologija $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}_{card}$ na $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, redom.

(ii) Familije

$$\mathcal{B}_{ind}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{ B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}^*} : \boldsymbol{f}^* \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mu_0 \in M \right\}$$

i

$$\mathcal{B}_{card}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} := \left\{ B_{\kappa}^{\boldsymbol{f}^*} : \boldsymbol{f}^* \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\} \right\}$$

su baze topologija $\mathcal{T}_{ind}^*$ i $\mathcal{T}_{card}^*$ na $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, redom.

Napomena 3.27 *Familije $\mathcal{B}_{ind}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}, \mathcal{B}_{card}^{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}, \mathcal{B}_{ind}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}$ i $\mathcal{B}_{card}^{*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}$ ćemo kraće označavati $\mathcal{B}_{ind}, \mathcal{B}_{card}, \mathcal{B}_{ind}^*$ i $\mathcal{B}_{card}^*$, redom, i to onda kada je par $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ jasan iz konteksta.*

Dokaz.

(i) Pokažimo prvo da je $\mathcal{B}_{ind}$ baza topologije $\mathcal{T}_{ind}$ na $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Po Definiciji 2.9 treba pokazati da je $\mathcal{B}_{ind} \subseteq \mathcal{T}_{ind}$, te da se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{T}_{ind}$ može prikazati kao unija neke familije članova iz $\mathcal{B}_{ind}$. Neka je $B \in \mathcal{B}_{ind}$. Tada postoji $\boldsymbol{f} \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu_0 \in M$ takvi da je $B = B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}}$, te $(f, f_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takav da je $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)]$. Uočimo da je

$$p^{-1}(B) = V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}. \tag{3.2}$$

Naime, $p^{-1}(B) \subseteq V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ slijedi iz činjenice da $x \in p^{-1}(B)$ povlači $x \in p^{-1}(B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}})$ pa postoji $\boldsymbol{g} = [(g, g_\mu)] \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ takav da je $(g, g_\mu) \sim_{\mu_0}$

(f, f_μ) i $x \in p^{-1}(\{\boldsymbol{g}\})$, stoga je $x = (g', g'_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ gdje je $(g', g'_\mu) \sim (g, g_\mu)$, a to po Napomeni 3.24 znači da je $(g', g'_\mu) \sim_{\mu_0} (g, g_\mu)$, pa iz $(g, g_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f_\mu)$ i po tranzitivnosti μ_0-ekvivalentnosti (Lema 3.8) slijedi da je $(g', g'_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f_\mu)$, dakle $x \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$. S druge strane, $p^{-1}(B) \supseteq V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ proizlazi iz toga što $x \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ povlači $x = (g, g_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ gdje je $(g, g_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f_\mu)$, a onda očito za $\boldsymbol{g} = [(g, g_\mu)]$ vrijedi $x \in p^{-1}(\{\boldsymbol{g}\})$ te $\boldsymbol{g} \in B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}} = B$, pa je $x \in p^{-1}(B)$. Prema tome, budući da je $V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ očito otvoren u $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$, po Definiciji 2.18 relacija (3.2) povlači $B \in \mathcal{T}_{ind}$, stoga je $\mathcal{B}_{ind} \subseteq \mathcal{T}_{ind}$. Sada neka je odabran proizvoljni otvoreni skup $U \in \mathcal{T}_{ind}$ i proizvoljan *pro*-morfizam $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)] \in U$. Prema Definiciji 2.18 slijedi da je $p^{-1}(U)$ otvoren u $\mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$. Stoga je

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha, \tag{3.3}$$

gdje je A neki indeksni skup, a $V_\alpha \in \mathcal{V}_{ind}$, za svaki $\alpha \in A$. Neka je $(f', f'_\mu) \in p^{-1}(\{\boldsymbol{f}\})$ proizvoljan. Nadalje, iz (3.3) slijedi da postoji $\alpha' \in A$ takav da je $(f', f'_\mu) \in V_{\alpha'}$ pa postoje $(g, g_\mu) \in inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $\mu_0 \in M$ takvi da je $V_{\alpha'} = V_{\mu_0}^{(g,g_\mu)}$, dakle $(f', f'_\mu) \in V_{\mu_0}^{(g,g_\mu)} = V_{\mu_0}^{(f',f'_\mu)}$(posljednja jednakost slijedi po Napomeni 3.8). Zatim, kako je očito $(f', f'_\mu) \sim (f, f_\mu)$ onda je i $(f', f'_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f_\mu)$, pa je po prethodnom $(f', f'_\mu) \in V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$. Iz proizvoljnosti od $(f', f'_\mu) \in p^{-1}(\{\boldsymbol{f}\})$ slijedi $p^{-1}(\{\boldsymbol{f}\}) \subseteq V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$, a jasno je od prije da je

$$V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)} = V_{\alpha'} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = p^{-1}(U). \tag{3.4}$$

Sada definirajmo $B := B_{\mu_0}^{\boldsymbol{f}}$. Očito je $\boldsymbol{f} \in B$ te $B \in \mathcal{B}_{ind}$. Zatim, kako je p surjekcija tada (3.2) povlači $B = p(V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)})$. Stoga, iz (3.4) imamo

$$B \subseteq U.$$

Zbog proizvoljnosti od $\boldsymbol{f}$ možemo, koristeći prethodnu konstrukciju, za svaki $\boldsymbol{f}' \in U$ pronaći $B' \in \mathcal{B}_{ind}$ takav da je $\boldsymbol{f}' \in B'$ i $B' \subseteq U$. Sada U jasno možemo prikazati kao uniju svih takvih B' po svim $\boldsymbol{f}' \in U$.

Zaključujemo da je $\mathcal{B}_{ind}$ baza topologije $\mathcal{T}_{ind}$ na pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Dokaz da je $\mathcal{B}_{card}$ baza topologije $\mathcal{T}_{card}$ na pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ slijedi na isti način, koristeći odgovarajuće činjenice analogne onima iz prvog dijela dokaza.

(ii) Analogno tvrdnji (i) ove propozicije, koristeći odgovarajuće pomoćne tvrdnje i surjekciju q.

■

3.4.1 Osnovna svojstva i međusoban odnos

Za početak proučavanja osnovnih svojstava topologija na skupovima *pro*- i *pro**- morfizama konstruiranih u prethodnom poglavlju slijedi propozicija koja je analogon Propozicije 3.13 u *inv*- odnosno *inv**- slučaju.

Propozicija 3.28 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$.

(i) Elementi familija $\mathcal{B}_{ind}$ *i* $\mathcal{B}_{card}$ *pridruženih paru* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *su otvoreno-zatvoreni skupovi u prostorima* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ *i* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$*, redom.*

(ii) Elementi familija $\mathcal{B}^*_{ind}$ *i* $\mathcal{B}^*_{card}$ *pridruženih paru* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *su otvoreno-zatvoreni skupovi u prostorima* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$*, redom.*

Dokaz.

(i) Neka je $B \in \mathcal{B}_{ind}$ proizvoljan. Pokažimo da je B otvoreno-zatvoren skup u prostoru $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$. Budući da je $\mathcal{B}_{ind}$ baza topologije $\mathcal{T}_{ind}$ (Propozicija 3.26) to je B jasno otvoren u $\mathcal{T}_{ind}$. Nadalje, postoje $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)] \in pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\mu_0 \in M$ takvi da je $B = B^{\boldsymbol{f}}_{\mu_0}$, a primjenom relacije (3.2) očito imamo

$$p^{-1}(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\backslash B) = inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\backslash V^{(f,f_\mu)}_{\mu_0}$$

pa budući da je $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\backslash V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ otvoren u $(inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}(\mathcal{V}_{ind})$ (jer je $V_{\mu_0}^{(f,f_\mu)}$ otvoreno-zatvoren, Propozicija 3.13) to je po definiciji topologije $\mathcal{T}_{ind}$ onda i $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\backslash B$ otvoren, tj. B je zatvoren u $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$. Dokaz da su elementi familije $\mathcal{B}_{card}$ otvoreno-zatvoreni u $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ može se provesti na isti način.

(ii) Analogno dokazu tvrdnje (i) ove propozicije.

■

Iz prethodne propozicije i Propozicije 3.26 imamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.29 *Topologije $\mathcal{T}_{ind}, \mathcal{T}_{card}, \mathcal{T}^*_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$ imaju baze kojima su svi elementi otvoreno-zatvoreni skupovi.*

Propozicija 3.30 *Neka su $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$. Prostori $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$, $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$, $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ su T_1-prostori.*

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)]$ proizvoljna točka prostora $\Omega := (pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$. Odaberimo neki $\boldsymbol{g} = [(g, g_\mu)] \in \Omega \setminus \{\boldsymbol{f}\}$ (ako je moguće, u protivnome je $\{\boldsymbol{f}\}$ trivijalno zatvoren u Ω). Po Propoziciji 3.18 to znači da je $(f, f_\mu) \nsim (g, g_\mu)$ što po definiciji odgovarajuće relacije ekvivalentnosti $\sim$ (Definicija 3.17) povlači da postoji $\mu_0 \in M$ takav da za svaki $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu_0), g(\mu_0)$ vrijedi

$$f_{\mu_0} p_{f(\mu_0)\lambda} \neq g_{\mu_0} p_{g(\mu_0)\lambda}.$$

No, to je drugim riječima negacija relacije μ_0-ekvivalentnosti na $inv\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ (Definicija 3.7), tj. $(f, f_\mu) \nsim_{\mu_0} (g, g_\mu)$. Sada očito imamo

$$\boldsymbol{g} \in B_{\mu_0}^{\boldsymbol{g}} \subseteq \Omega \setminus \{\boldsymbol{f}\}$$

i znamo da je $B_{\mu_0}^{\boldsymbol{g}}$ element baze topologije $\mathcal{B}_{ind}$ od $\mathcal{T}_{ind}$. Stoga, iz proizvoljnosti odabira $\boldsymbol{g} \in \Omega \setminus \{\boldsymbol{f}\}$ slijedi da je $\Omega \setminus \{\boldsymbol{f}\}$ otvoren, odnosno $\{\boldsymbol{f}\}$ je zatvoren u Ω, dakle $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ je T_1-prostor. Dokaz da je $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ T_1-prostor slijedi potpuno isto kao i za $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$, samo za otvorenu okolinu oko $\boldsymbol{g}$ odaberemo $B_\kappa^{\boldsymbol{g}}$, gdje je $\kappa = |\mu_0|$ (očito $(f, f_\mu) \nsim_{\mu_0} (g, g_\mu)$ povlači $(f, f_\mu) \nsim_{|\mu_0|} (g, g_\mu)$). Za $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ dokaz se također provodi analogno pa ćemo samo proći najosnovnije korake. Naime, krenemo od proizvoljnog $\boldsymbol{f}^* = [(f, f_\mu^n)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, ako je moguće odaberemo $\boldsymbol{g}^* = [(g, g_\mu^n)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \setminus \{\boldsymbol{f}^*\}$, i uočimo da $(f, f_\mu^n) \nsim (g, g_\mu^n)$ povlači postojanje $\mu_0 \in M$ takvog da za svaki $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq f(\mu_0), g(\mu_0)$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $n' \in \mathbb{N}, n' \geq n$ takav da je

$$f_{\mu_0}^{n'} p_{f(\mu_0)\lambda} \neq g_{\mu_0}^{n'} p_{g(\mu_0)\lambda},$$

što je upravo negacija μ_0-ekvivalentnosti na $inv^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Dakle $(f, f_\mu^n) \nsim_{\mu_0} (g, g_\mu^n)$, a onda jasno i $(f, f_\mu^n) \nsim_\kappa (g, g_\mu^n)$, za $\kappa = |\mu_0|$. Stoga su $B_{\mu_0}^{\boldsymbol{g}^*}$ i $B_\kappa^{\boldsymbol{g}^*}$ otvorene okoline oko $\boldsymbol{g}^*$ u $\mathcal{T}^*_{ind}, \mathcal{T}^*_{card}$, redom, te sadržane u $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \setminus \{\boldsymbol{f}^*\}$, i time je dokaz gotov. ■

Slijedi nekoliko činjenica iz opće topologije i teorije dimenzija topoloških prostora koje ćemo iskoristiti za 'naše' topologije.

Definicija 3.31 ***Mala induktivna dimenzija*** *nekog prostora X, u oznaci ind X, se definira induktivno na sljedeći način (više o tome u [28]). Za prostor X vrijedi da je ind $X = -1$ ako i samo ako je X prazan. Nadalje, ako je n nenegativan cijeli broj tada ind $X \leq n$ znači da za svaku točku $x \in X$ i za svaku otvorenu okolinu G od x postoji otvorena okolina U od x takva da je $U \subseteq G$ i ind $Fr(U) \leq n-1$, gdje je $Fr(U)$ rub od U (budući da je skup U otvoren tada je $Fr(U)$ razlika zatvarača skupa U i samog skupa U). Potom, definiramo ind $X = n$ ako vrijedi da je ind $X \leq n$, ali ne vrijedi da je ind $X \leq n-1$, za neki nenegativan cijeli broj n. Naposljetku, ako ne postoji nenegativan cijeli broj n takav da je ind $X \leq n$ onda definiramo ind $X = \infty$.*

Propozicija 3.32 *Za prostor X vrijedi sljedeće: ind $X = 0$ ako i samo ako je X neprazan i ima bazu koja se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova.*

Dokaz. Dokaz Propozicije 4.1.1 u [28]. ■

Korolar 3.33 *Neka su* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*. Svaki od prostora* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{ind})$*,* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$*,* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *ima malu induktivnu dimenziju* 0.

Dokaz. Tvrdnja u sva četiri slučaja slijedi direktnom primjenom Korolara 3.29 i Propozicije 3.32. ■

Definicija 3.34 *Za prostor* X *kažemo da je* ***potpuno nepovezan*** *ako ne sadrži povezane skupove koji imaju više od jedne točke, tj. ako su mu sve komponente povezanosti jednotočkovni skupovi.*

Također (po napomenama nakon Propozicije 4.1.1 u [28]) vrijedi da je svaki T_1-prostor X za kojeg je $ind\ X = 0$ potpuno nepovezan. Prema tome, iz Propozicije 3.30 i Korolara 3.33 odmah proizlazi sljedeći korolar.

Korolar 3.35 *Neka su* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*. Tada su* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{ind})$*,* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$*,* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *potpuno nepovezani prostori.*

Definicija 3.36 *Neka je* A *proizvoljni indeksni skup. Neka je skup* $D := \{0, 1\}$ *opskrbljen diskretnom topologijom. Tada skup* $D^{card(A)} := \prod_{\alpha \in A} D$ *opskrbljen produktnom topologijom nazivamo* ***Cantorovom kockom dimenzije*** $card(A)$.

Propozicija 3.37 *Neka je* X T_1*-prostor takav da je* $ind\ X = 0$*. Tada postoji indeksni skup* A *takav da* X *možemo smjestiti u Cantorovu kocku dimenzije* $card(A)$.

Dokaz. Vidi Propozicija 4.1.3 u [28]. ■

Dakle, svaki od prostora $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{ind})$, $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$, $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ smijemo zamišljati kao potprostore Cantorove kocke neke dimenzije. Nadalje, budući da se potpuna regularnost čuva kod produkta i potprostora to imamo odmah još jedan korolar.

Korolar 3.38 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*. Tada su* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$, $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$, $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *potpuno regularni prostori.*

Stoga, imamo bitno poboljšanje u smislu aksioma separacije u odnosu na konstrukciju polaznih topologija na skupovima *inv*- i *inv**- morfizama. Slijedi jednostavan i lako dokaziv dovoljni uvjet za diskretnost naših prostora.

Propozicija 3.39 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$ *takvi da indeksni skup od* $\boldsymbol{Y}$ *ima maksimum. Tada su* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$, $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$, $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *diskretni prostori.*

Dokaz. *Pokažimo samo pro***- slučaj, a pro- slučaj slijedi analogno. Neka je* $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *neprazan i* $\boldsymbol{f}^* = [(f, f^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *proizvoljan te* $\mu_{maks} \in M$ *maksimum od* M*. Promotrimo* $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_{maks}}$ *i uočimo da je to otvoren skup u* $\mathcal{T}^*_{ind}$*. Nadalje, budući da je* $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_{maks}}$ *zapravo* $\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{g}^* = [(g, g^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : \\ (g, g^n_\mu) \sim_{\mu_{maks}} (f, f^n_\mu) \end{array} \right\}$, *a po pretpostavci vrijedi da je* $\mu_0 \leq \mu_{maks}$*, za svaki* $\mu_0 \in M$*, tada po tvrdnji (iii) Leme 3.9 imamo da za svaki* $\boldsymbol{g}^* = [(g, g^n_\mu)] \in B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_{maks}}$ *vrijedi* $(g, g^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f^n_\mu)$*, za svaki* $\mu_0 \in M$*, drugim riječima* $(g, g^n_\mu) \sim (f, f^n_\mu)$*, odnosno* $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{f}^*$*. Prema tome je* $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_{maks}} = \{\boldsymbol{f}^*\}$*, stoga je* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *diskretan prostor. Nadalje, neka je opet* $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *neprazan i* $\boldsymbol{f}^* = [(f, f^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *proizvoljan te* $\mu_{maks} \in M$ *maksimum od* M*. Definirajmo* $\kappa = |\mu_{maks}|$*. Budući da je* $\kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\}$ *to je* $B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa$ *otvoren u* $\mathcal{T}^*_{card}$*. Nadalje, primijetimo da za svaki* $\mu_0 \in M$ *zbog* $\mu_0 \leq \mu_{maks}$ *jasno mora vrijediti i* $|\mu_0| \leq |\mu_{maks}|$*. Stoga, budući da je* $B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{g}^* = [(g, g^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : \\ (g, g^n_\mu) \sim_\kappa (f, f^n_\mu) \end{array} \right\}$ *to slično kao i prije uz pomoć tvrdnje (iv) Leme 3.9 i definicije* κ*-ekvivalentnosti zaključujemo da je* $B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa = \{\boldsymbol{f}^*\}$*, stoga je i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *diskretan prostor i time je dokaz gotov.* ■

Sada ćemo uz dodatnu pretpostavku da inverzni sustav u kodomeni, dakle $\boldsymbol{Y}$, ima kofinitan indeksni skup (što bi moglo biti interesantno zbog Teorema

3.22) pokazati da su $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ metrizabilni i to navođenjem eksplicitne metrike, štoviše, ultrametrike. Ultrametrike koje ćemo koristiti dio su radova [32] i [33].

Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$ takvi da je indeksni skup od $\boldsymbol{Y}$, dakle skup M, kofinitan (još se kaže i da je $\boldsymbol{Y}$ kofinitan inverzni sustav). Definiramo funkcije

$$d : pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \times pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \to \mathbb{R}_0^+, \tag{3.5}$$

$$d(\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)], \boldsymbol{g} = [(g, g_\mu)]) = \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \frac{1}{m+1} : (f, f_\mu) \sim_m (g, g_\mu),\ m \in \mathbb{N} \right\} \\ 1, \text{ inače} \end{array} \right\}$$

i

$$d^* : pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \times pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \to \mathbb{R}_0^+, \tag{3.6}$$

$$d^*(\boldsymbol{f}^* = [(f, f_\mu^n)], \boldsymbol{g}^* = [(g, g_\mu^n)]) = \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \frac{1}{m+1} : (f, f_\mu^n) \sim_m (g, g_\mu^n),\ m \in \mathbb{N} \right\} \\ 1, \text{ inače} \end{array} \right\}.$$

Funkcije d i d^* su dobro definirane, tj. neovisne o izboru predstavnika *pro*- odnosno *pro**- morfizama u *inv*-$\mathcal{C}$ odnosno *inv**-$\mathcal{C}$. Nadalje, vrijedi da su d i d^* potpune ultrametrike na $pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, $pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, redom (Teorem 1 u [32] i Teorem 1 u [33]). Sa $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d)$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$ označimo odgovarajuće potpune (ultra)metričke prostore, koje ćemo promatrati i kao topološke prostore, te sa $K_d(\boldsymbol{f}, \varepsilon)$ i $K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \varepsilon)$ označimo kugle oko $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{f}^*$ radijusa $\varepsilon > 0$ u tim prostorima redom.

Napomena 3.40 *Ako M dodatno ima maksimum onda za svaki $m_0 \geq |\max(M)|$ očito vrijedi da je $(f, f_\mu) \sim_{m_0} (g, g_\mu) \Leftrightarrow (f, f_\mu) \sim (g, g_\mu)$ i $(f, f_\mu^n) \sim_{m_0} (g, g_\mu^n) \Leftrightarrow (f, f_\mu^n) \sim (g, g_\mu^n)$ stoga je $K_d(\boldsymbol{f}, \frac{1}{m_0}) = \{\boldsymbol{f}\}$, $K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \frac{1}{m_0}) = \{\boldsymbol{f}^*\}$, te se onda lako pokaže da su $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d)$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$ diskretni prostori.*

Propozicija 3.41 *Neka su $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$ takvi da je $\boldsymbol{Y}$ kofinitan. Tada je $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}) = (pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d)$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card}) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$.*

Dokaz. Pokažimo samo *pro**- slučaj, dok *pro*- slučaj slijedi potpuno slično. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da M nema maksimum jer su inače oba prostora diskretna (Propozicija 3.39 i Napomena 3.40). Odaberimo $\boldsymbol{f}^* = [(f, f_\mu^n)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i neka je $K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \varepsilon), \varepsilon > 0$ proizvoljan bazni element u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$ oko $\boldsymbol{f}^*$. Očito postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$ pa je $\boldsymbol{f}^* \in K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \frac{1}{m_0}) \subseteq K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \varepsilon)$. Neka je $m_0' \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\} \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $m_0' > m_0$ (koji postoji jer M nema maksimum). Uočimo da za $B_{m_0'}^{\boldsymbol{f}^*}$, koji je jasno dobro definiran bazni element oko $\boldsymbol{f}^*$ u $\mathcal{T}_{card}^*$, vrijedi

$$B_{m_0'}^{\boldsymbol{f}^*} = K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \frac{1}{m_0'}) \tag{3.7}$$

gdje posljednja jednakost očito slijedi iz definicija tih skupova i Tvrdnje (iv) Leme 3.9. Stoga, zbog $K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \frac{1}{m_0'}) \subseteq K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \frac{1}{m_0})$, iz prethodnih relacija imamo $B_{m_0'}^{\boldsymbol{f}^*} \subseteq K_{d^*}(\boldsymbol{f}^*, \varepsilon)$, dakle topologija $\mathcal{T}_{card}^*$ je finija od topologije generirane metrikom d^* (Lema 2.10). Uočimo da relacija (3.7) vrijedi za svaki $m_0 \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\} \subseteq \mathbb{N}$, pa koristeći analogiju s prvim dijelom dokaza i još jednostavnije slijedi obratna inkluzija tj. da je topologija generirana metrikom d^* finija od $\mathcal{T}_{card}^*$. Stoga je $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}^*) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$. ■

Sada ćemo proučiti međuodnos topologija $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}_{card}$, te $\mathcal{T}_{ind}^*$ i $\mathcal{T}_{card}^*$. Prvo općenita usporedba kao analogon Propozicije 3.14.

Korolar 3.42 *Neka su $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$ i neka su dani prostori $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ i $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$, te $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind}^*)$ i $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}^*)$. Vrijedi:*

(i) $\mathcal{T}_{card} \supseteq \mathcal{T}_{ind}$ odnosno $\mathcal{T}_{card}$ je finija od $\mathcal{T}_{ind}$;

(ii) $\mathcal{T}_{card}^* \supseteq \mathcal{T}_{ind}^*$ odnosno $\mathcal{T}_{card}^*$ je finija od $\mathcal{T}_{ind}^*$.

Dokaz. Oba slučaja su direktna posljedica odgovarajućih tvrdnji Propozicije 3.14 i Propozicije 2.19. ■

Slijedi jednostavan dovoljan uvjet kada su naše topologije u *pro*- odnosno *pro**- slučaju iste.

Propozicija 3.43 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$. *Ako je za svaki* $\kappa \in \{|\mu| : \mu \in M\}$ *skup* $\{\mu' \in M : |\mu'| \leq \kappa\}$ *ograničen odozgo u* M *tada je* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind}) = (pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo *pro**- slučaj, *pro*- slučaj slijedi potpuno analogno. Zbog tvrdnje (ii) Korolara 3.42, za pokazati da je $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ dovoljno je pokazati $\mathcal{T}^*_{ind} \supseteq \mathcal{T}^*_{card}$ odnosno da je $\mathcal{T}^*_{ind}$ finija od $\mathcal{T}^*_{card}$. Odaberimo neki $\boldsymbol{f}^* = [(f, f^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i neka je $B \in \mathcal{B}^*_{card}$ proizvoljan i takav da je $\boldsymbol{f}^* \in B$. Tada postoje $\boldsymbol{g}^* \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ i $\kappa \in \{|\mu_0| : \mu_0 \in M\}$ takvi da je $B = B^{\boldsymbol{g}^*}_\kappa$. Napomena 3.25 i činjenica da je $\boldsymbol{f}^* \in B = B^{\boldsymbol{g}^*}_\kappa$ povlače da je $B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa = B^{\boldsymbol{g}^*}_\kappa$ tj. $B = B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa$. Sada neka je $\mu_0 \in M$ neka gornja granica skupa $\{\mu' \in M : |\mu'| \leq \kappa\}$ koja postoji po pretpostavci. Definiramo $B' := B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0} \in \mathcal{B}^*_{ind}$. Uočimo prvo da je $\boldsymbol{f}^* \in B'$ (Napomena 3.25). Nadalje, lako je provjeriti da vrijedi

$$B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0} \subseteq B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa. \tag{3.8}$$

Naime, neka je $\boldsymbol{h}^* = [(h, h^n_\mu)] \in B^{\boldsymbol{f}^*}_{\mu_0}$ proizvoljan. Dakle $(h, h^n_\mu) \sim_{\mu_0} (f, f^n_\mu)$. Potom neka je odabran neki $\mu'_0 \in M$ takav da je $|\mu'_0| \leq \kappa$. Kako je $\mu'_0 \leq \mu_0$ tada tvrdnja (iii) Leme 3.9 povlači $(h, h^n_\mu) \sim_{\mu'_0} (f, f^n_\mu)$. Iz proizvoljnosti $\mu'_0 \in M$ takvog da je $|\mu'_0| \leq \kappa$ imamo da je $(h, h^n_\mu) \sim_\kappa (f, f^n_\mu)$, stoga je $\boldsymbol{h}^* \in B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa$ pa (3.8), tj. $B' \subseteq B$ uistinu vrijedi. Prema tome, iz svega prethodnog imamo da je $\boldsymbol{f}^* \in B' \subseteq B$. Budući da su $\mathcal{B}^*_{card}$ i $\mathcal{B}^*_{ind}$ redom baze topologija $\mathcal{T}^*_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$ to po Lemi 2.10 zaključujemo $\mathcal{T}^*_{ind} \supseteq \mathcal{T}^*_{card}$. ■

Korolar 3.44 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$ *takvi da je* $\boldsymbol{Y}$ *inverzni niz. Tada vrijedi:*

(i) $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind}) = (pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}) = (pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d)$,

(ii) $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card}) = (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), d^*)$.

Dokaz. Budući da je $M = \mathbb{N}$ uz standardni uređaj očito je da je M kofinitan te da je skup $\{m' \in M : |m'| \leq m_0\}$ ograničen odozgo sa m_0 (ili bilo kojim većim prirodnim brojem) u M, za svaki $m_0 \in \mathbb{N}$. Stoga obje tvrdnje slijede direktno iz Propozicija 3.43 i 3.41. ■

Općenito ne vrijedi da su naše pridružene topologije na odgovarajućim skupovima *pro*- te *pro**- morfizama iste, odnosno $\mathcal{T}_{ind} \neq \mathcal{T}_{card}$, $\mathcal{T}^*_{ind} \neq \mathcal{T}^*_{card}$. Prvo ćemo pružiti protuprimjer kada inverzni sustav u kodomeni nije kofinitan, a u sljedećem odjeljku ćemo pokazati da niti kofinitnost nije dovoljna za jednakost.

Primjer 3.45 *Neka je dana kategorija Set i neka su dani inverzni sustavi* $\boldsymbol{X}$ *i* $\boldsymbol{Y}$ *u toj kategoriji opisani na sljedeći način:* $\boldsymbol{X}$ *je rudimentarni inverzni sustav kojem je jedini element skup prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$, *tj.* $\boldsymbol{X} = (\mathbb{N})$, *a* $\boldsymbol{Y} = (Y_m, q_{mm'}, \mathbb{Z})$, *gdje je* $\mathbb{Z}$ *skup cijelih brojeva uz prirodni uređaj* $\leq$, *te*

$$Y_m = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{N},\ m \leq 0 \\ \mathbb{N}^m,\ m \geq 1 \end{array} \right\},$$

$$\begin{gathered} q_{mm+1} : Y_{m+1} = \mathbb{N} \to Y_m = \mathbb{N}\,, \\ q_{mm+1}(y) = 2y,\ \textit{za svaki}\ m \leq 0, \end{gathered}$$

i

$$\begin{gathered} q_{mm+1} : Y_{m+1} = \mathbb{N}^{m+1} \to Y_m = \mathbb{N}^m\,, \\ q_{mm+1}(y_1, ..., y_m, y_{m+1}) = (y_1, ..., y_m),\ \textit{za svaki}\ m \geq 1. \end{gathered}$$

Jasno da je $\boldsymbol{Y}$ *dobro definiran inverzni sustav (prirodno podrazumijevamo da je* q_{mm} *identiteta, za svaki* $m \in \mathbb{Z}$, *te* $q_{mm'} = q_{mm+1}q_{m+1m+2}...q_{m'-1m'}$, *za svaki* $m, m' \in \mathbb{Z}$, $m \leq m'$*). Neka je sada dan niz funkcija* $s = (s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$. *Lako se pokaže da tom nizu možemo na sljedeći način pridružiti dobro definirani inv- morfizam* $(f_m) : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *gdje je*

$$\begin{aligned} &f_m : \mathbb{N} \to Y_m = \mathbb{N},\ f_m(x) = 2^{-m+1}s_1(x),\ \textit{za svaki}\ m \leq 0 \\ &f_m : \mathbb{N} \to Y_m = \mathbb{N}^m,\ f_m(x) = (s_1(x), ..., s_m(x)),\ \textit{za svaki}\ m \geq 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

To pridruživanje je također injektivno, a ako dodatno svakom takvom morfizmu (f_m) *pridružimo pro- morfizam* $\boldsymbol{f} = [(f_m)] : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, *po komentaru iza*

Propozicije 3.21 slijedi da je i kompozicija tih pridruživanja injektivna. Sada promotrimo prostore $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{ind})$ *i* $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{card})$*. Neka je odabran neki niz funkcija* $s = (s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ *i njemu pridružen pro-morfizam* $\boldsymbol{f} = [(f_m)] : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *kao u (3.9). Uzmimo proizvoljnu otvorenu okolinu* $U \in \mathcal{T}_{ind}$ *oko* $\boldsymbol{f}$*. Budući da je* $\mathcal{B}_{ind}$ *baza topologije* $\mathcal{T}_{ind}$ *to postoji* $B \in \mathcal{B}_{ind}$ *takav da je* $\boldsymbol{f} \in B \subseteq U$*, a zbog* $B \in \mathcal{B}_{ind}$ *postoji* $m_0 \in \mathbb{Z}$ *takav da je* $B = B^{\boldsymbol{f}}_{m_0}$ *(B je dovoljno opisati samo pomoću* m_0 *zbog Napomene 3.25). Sa* k_0 *označimo apsolutnu vrijednost od* m_0*. Sada neka je dan niz funkcija* $s' = (s'_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ *takav da je* $s'_{n'} = s_{n'}$*, za svaki prirodni broj* $n' \leq k_0$*, i* $s'_{n_0} \neq s_{n_0}$*, za neki* $n_0 > k_0$*. Neka je* $\boldsymbol{f}' = [(f'_m)] : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *pridružen* s' *kao u (3.9). Primijetimo prvo da je* $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{f}'$*. Nadalje, budući da je očito* $f_{m_0} = f'_{m_0}$ *to je* $(f_m) \sim_{m_0} (f'_m)$*, stoga je* $\boldsymbol{f}' \in B^{\boldsymbol{f}}_{m_0} \subseteq U$*. Dakle, pokazali smo da u svakoj okolini oko* $\boldsymbol{f}$ *u prostoru* $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{ind})$ *postoji točka različita od* $\boldsymbol{f}$*, drugim riječima* $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{ind})$ *nije diskretan prostor. Sada primijetimo da za svaki* $m \in \mathbb{Z}$ *vrijedi* $|m| = \aleph_0$*. Kako je očito relacija* $(f_m) \sim_{\aleph_0} (g_m)$ *ekvivalentna* $(f_m) \sim (g_m)$*, za svake* $(f_m),(g_m) \in inv\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$*, tada za svaki* $\boldsymbol{f} \in pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ *vrijedi* $B^{\boldsymbol{f}}_{\aleph_0} = \{\boldsymbol{f}\}$*. Stoga, budući da je* $\mathcal{B}_{card}$ *baza topologije* $\mathcal{T}_{card}$*, a* $B^{\boldsymbol{f}}_{\aleph_0}$ *pripada* $\mathcal{B}_{card}$ *imamo da je* $\{\boldsymbol{f}\} \in \mathcal{T}_{card}$*, za svaki* $\boldsymbol{f} \in pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$*, pa je* $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{card})$ *diskretan prostor. Dakle* $\mathcal{T}_{ind} \neq \mathcal{T}_{card}$*. Vrijedi i* $\mathcal{T}^*_{ind} \neq \mathcal{T}^*_{card}$ *na* $pro^*\text{-}Set(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ *što ćemo lako pokazati poslije sljedeće tvrdnje.*

Slijedi propozicija, koja će nam više puta kasnije biti korisna, a povezuje *pro*- i *pro**- slučaj u smislu naših topologizacija.

Propozicija 3.46 *Neka su* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *proizvoljni inverzni sustavi u proizvoljnoj kategoriji* $\mathcal{C}$*. Funktor* $\underline{J} : pro\text{-}\mathcal{C} \to pro^*\text{-}\mathcal{C}$ *inducira smještenja sa zatvorenom slikom prostora* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{ind})$ *u* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}^*_{ind})$ *i prostora* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}_{card})$ *u* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{T}^*_{card})$*.*

Napomena 3.47 *Pod pojmom* ***smještenja sa zatvorenom slikom prostora*** X ***u prostor*** Y *smatramo injektivnu neprekidnu funkcija* $: X \to Y$

koja uz restringiranu kodomenu na sliku ima neprekidni inverz te čija je slika zatvoren skup u Y.

Dokaz. Dokazat ćemo samo drugi slučaj, a prvom slučaju je dokaz sličan. Dakle, po definiciji funktora $\underline{J} : pro\text{-}\mathcal{C} \rightarrow pro^*\text{-}\mathcal{C}$ (3.1) trebamo pokazati da je funkcija

$$j : (pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card}) \rightarrow (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card}),$$
$$j(\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)]) = \boldsymbol{f}^* = [(f, f^n_\mu)], \text{ gdje } f^n_\mu = f_\mu \text{ za svaki } \mu \in M \text{ i } n \in \mathbb{N},$$

smještenje sa zatvorenom slikom prostora $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$ u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$. Budući da je $\underline{J}$ vjeran funktor to je funkcija j injektivna. Sada, neka je $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)] \in pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ proizvoljan i V proizvoljan otvoren skup u kodomeni koji sadrži $j(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}^*$. Budući da je $\mathcal{B}^*_{card}$ baza topologije $\mathcal{T}^*_{card}$ to postoji $B \in \mathcal{B}^*_{card}$ takav da je $\boldsymbol{f}^* \in B \subseteq V$. Nadalje, zbog $B \in \mathcal{B}^*_{card}$ postoji $\mu_0 \in M$ takav da za kardinalni broj $\kappa = |\mu_0|$ vrijedi $B = B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa$ (Napomena 3.25). Definiramo $B' := B^{\boldsymbol{f}}_\kappa \in \mathcal{B}_{card}$. Jasno je B' otvoren skup u domeni oko $\boldsymbol{f}$. Uočimo sada da vrijedi sljedeća relacija

$$j(B^{\boldsymbol{f}}_\kappa) \subseteq B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa. \tag{3.10}$$

Naime $\boldsymbol{h} = [(h, h_\mu)] \in B^{\boldsymbol{f}}_\kappa$ znači $(h, h_\mu) \sim_\kappa (f, f_\mu)$, pa za $(h, h^n_\mu), (f, f^n_\mu) \in inv^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ takve da je $h^n_\mu = h_\mu$, $f^n_\mu = f_\mu$ za svaki $\mu \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ jasno vrijedi $(h, h^n_\mu) \sim_\kappa (f, f^n_\mu)$ (za svaki $\mu' \in M$ takav da $|\mu'| \leq \kappa$ odaberemo λ po $(h, h_\mu) \sim_{\mu'} (f, f_\mu)$ te n bilo koji prirodni broj), stoga je $j(\boldsymbol{h}) \in B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa$. Dakle iz relacije (3.10) očito da je $j(B') \subseteq V$ i time je neprekidnost funkcije j pokazana. Promotrimo sada inverznu funkciju $j^{-1} : j((pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})) \rightarrow (pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$ funkcije j uz restringiranu kodomenu na svoju sliku. Neka je odabran neki $\boldsymbol{f}^* \in j((pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ i promotrimo proizvoljni otvoren skup U oko $\boldsymbol{f} = j^{-1}(\boldsymbol{f}^*)$. Budući da je $\mathcal{B}_{card}$ baza topologije $\mathcal{T}_{card}$ to postoji $B \in \mathcal{B}_{card}$, tj. postoji $\mu_0 \in M$ takav da za kardinalni broj $\kappa = |\mu_0|$ imamo da je $B = B^{\boldsymbol{f}}_\kappa$ te da vrijedi $\boldsymbol{f} \in B = B^{\boldsymbol{f}}_\kappa \subseteq U$. Tada, slično kao i kod relacije (3.10) možemo provjeriti da je

$$j^{-1}(B^{\boldsymbol{f}^*}_\kappa \cap j((pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card}))) \subseteq B^{\boldsymbol{f}}_\kappa, \tag{3.11}$$

(zbog jednostavnosti za reprezentante induciranih pro^*- morfizama odaberemo one koji imaju konstantne nizove na svakoj koordinati μ i iskoristimo za svaku koordinatu μ bilo koji član tog niza da opišemo reprezentant odgovarajućeg pro- morfizma iz praslike). Neka je $V := B_\kappa^{\boldsymbol{f}^*} \cap j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}))$. Jasno je $\boldsymbol{f}^* \in V$ te V otvoren u relativnoj topologiji na $j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card}))$ kao potprostoru od $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$, a po relaciji (3.11) imamo i $j^{-1}(V) \subseteq U$. Stoga, je j^{-1} neprekidna pa po svemu prethodnom imamo da je j smještenje. Sada, pokažimo da je $j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ zatvoren ili ekvivalentno da je $K := pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \setminus j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ otvoren u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$. Ako je K prazan skup tada je trivijalno otvoren. Ako je K neprazan odaberimo neki $\boldsymbol{f}^* = [(f, f_\mu^n)] \in K$. To znači da postoji $\mu_0 \in M$ takav da za svaki $\lambda \geq f(\mu_0) \in \Lambda$ i za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \geq n_0$, takvi da je $f_{\mu_0}^{n_1} p_{f(\mu_0)\lambda} \neq f_{\mu_0}^{n_2} p_{f(\mu_0)\lambda}$. Drugim riječima, lako se vidi da za tako odabran $\mu_0 \in M$ i za svaki $\boldsymbol{h}^* = [(h, h_\mu^n)] \in j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ vrijedi $(f, f_\mu^n) \nsim_{\mu_0} (h, h_\mu^n)$. Stoga, za $\kappa = |\mu_0|$ očito vrijedi

$$\boldsymbol{f}^* \in V_\kappa^{\boldsymbol{f}^*} \subseteq K. \tag{3.12}$$

Nadalje, budući da je jasno $V_\kappa^{\boldsymbol{f}^*} \in \mathcal{T}^*_{card}$, to iz proizvoljnosti od $\boldsymbol{f}^* \in K$ te relacije (3.12) slijedi da je K otvoren u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$. ■

Napomena 3.48 *Primijetimo da je smještenje j iz prethodnog dokaza također i zatvoreno preslikavanje tj. slika svakog zatvorenog skupa je zatvoreni skup (općenito je takvo i svako smještenje sa zatvorenom slikom). Naime, ako odaberemo bilo koji zatvoren skup A u $(pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ tada je $j(A)$ zatvoren u $j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ (jer je j uz restringiranu kodomenu na sliku homeomorfizam), a kako je $j((pro\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$ zatvoren u cijelom prostoru $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ tada je i $j(A)$ također zatvoren u cijelom prostoru.*

Primjer 3.49 *Neka su dani inverzni sustavi $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ u kategoriji Set kao u Primjeru 3.45. Pokažimo prvo da je $(pro^*\text{-}Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ diskretan prostor, na potpuno analogan način kao i za $(pro\text{-}Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$. Naime, budući da je relacija $(f_m^n) \sim_{\aleph_0} (g_m^n)$ očito ekvivalentna $(f_m^n) \sim (g_m^n)$, za* *svake* $(f^n_m), (g^n_m) \in inv^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, *to za svaki* $\boldsymbol{f}^* \in pro^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *vrijedi* $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\aleph_0} = \{\boldsymbol{f}^*\}$. *Međutim, budući da je* $\mathcal{B}^*_{card}$ *baza topologije* $\mathcal{T}^*_{card}$, *a* $B^{\boldsymbol{f}^*}_{\aleph_0}$ *pripada* $\mathcal{B}^*_{card}$, *to je* $\{\boldsymbol{f}^*\} \in \mathcal{T}^*_{card}$ *za svaki* $\boldsymbol{f}^* \in pro^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, *pa je* $(pro^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *uistinu diskretan prostor. Nadalje, koristeći Propoziciju 3.46 znamo da* $(pro$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ *možemo smatrati (zatvorenim) potprostorom od* $(pro^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$. *Stoga, budući da po Primjeru 3.45 znamo da* $(pro$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ *nije diskretan prostor to ni* $(pro^*$-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ *ne može biti diskretan. Dakle,* $\mathcal{T}^*_{ind} \neq \mathcal{T}^*_{card}$ *na* pro^*-$Set(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Na kraju ove podcjeline ukratko rezimirajmo najbitnije rezultate. Dakle neka su $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}_{card}$ te $\mathcal{T}^*_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$ četiri topologije pridružene skupovima *pro*- te *pro**- morfizama između proizvoljnih inverznih sustava $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ u nekoj kategoriji $\mathcal{C}$. Vrijedi:

- sve četiri topologije imaju baze čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi;
- sva četiri prostora imaju malu induktivnu dimenziju 0 i potpuno su nepovezani;
- sve četiri topologije smijemo zamišljati kao relativne topologije Cantorove kocke;
- $\mathcal{T}_{card} \supseteq \mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{card} \supseteq \mathcal{T}^*_{ind}$;
- općenito je $\mathcal{T}_{card} \neq \mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{card} \neq \mathcal{T}^*_{ind}$;
- ako M ima maksimum sve četiri topologije su diskretne;
- ako je $\boldsymbol{Y}$ kofinitan onda su $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$ (ultra)metrizabilne;
- ako je $\boldsymbol{Y}$ inverzni niz onda je $\mathcal{T}_{card} = \mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{card} = \mathcal{T}^*_{ind}$;
- $(pro$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind})$ i $(pro$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{card})$ smijemo zamišljati kao zatvorene potprostore od $(pro^*$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ i $(pro^*$-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$, redom.

3.4.2 Hom-bifunktor

U ovom poglavlju ćemo opisati jedan važan pojam teorije kategorija, a to će biti pojam bifunktora Hom, te ćemo njega koristiti za formalni pristup rješavanju problema 'osjetljivosti' naših topologija na skupovima *pro*- i pro^*-morfizama u smislu mijenjanja inverznih sustava u domeni i kodomeni do na izomorfizam. Slijedi nekoliko kratkih definicija i činjenica (vidi [1] i [21]) koje će nam trebati.

Definicija 3.50 *Neka je* $\mathcal{C}=(O,M,id,\circ)$ *proizvoljna kategorija.* ***Dualna kategorija kategorije*** $\mathcal{C}$ *je kategorija*

$$\mathcal{C}^{op} := (O, M^{op}, id, \circ^{op}),$$

gdje je $\mathcal{C}^{op}(A,B)=\mathcal{C}(B,A)$*, za svaki par* (A,B) *objekata u* $\mathcal{C}^{op}$*, te* $g\circ^{op} f = f\circ g$ *, za svaku trojku* (A,B,C) *objekata u* $\mathcal{C}^{op}$ *i svaki* $f\in\mathcal{C}^{op}(A,B), g\in\mathcal{C}^{op}(B,C)$*.*

Lako se provjeri da $\mathcal{C}^{op}$ zadovoljava uvjete da bude kategorija. Uočimo da kategorija i njezina dualna kategorija imaju iste objekte, a i morfizme, samo što je smjer morfizama među objektima suprotan.

Definicija 3.51 *Neka su* $\mathcal{C}=(O,M,id,\circ)$ *i* $\mathcal{C}'=(O',M',id',\circ')$ *dvije proizvoljne kategorije.* ***Produktnom kategorijom kategorija*** $\mathcal{C}$ *i* $\mathcal{C}'$*, u oznaci* $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$*, nazivamo kategoriju kojoj su objekti svi uređeni parovi* (A,A') *takvi da je* $A\in O$*,* $A'\in O'$*, zatim morfizmi među proizvoljnim objektima* (A,A') *i* (B,B') *su svi parovi* (f,f') *takvi da je* $f\in\mathcal{C}(A,B)$*,* $f'\in\mathcal{C}'(A',B')$*, identiteta na* (A,A') *je uređeni par* $(id_A, id'_{A'})$*, za svaki objekt* (A,A') *u* $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$*, a za svaku trojku* $((A,A'),(B,B'),(C,C'))$ *objekata u* $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$ *kompozicija proizvoljnih morfizama* $(f,f'):(A,A')\to(B,B')$ *i* $(g,g'):(B,B')\to(C,C')$ *je definirana kao morfizam* $(g\circ f, g'\circ' f'):(A,A')\to(C,C')$*.*

Jasno je da je $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$ uistinu kategorija. Nadalje, svaki funktor kojemu je domena produktna kategorija još ćemo zvati i **bifunktor**. Slijedi definicija bifunktora hom, a potom i bifunktora Hom spomenutog na početku ovog odjeljka.

Propozicija 3.52 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija. Pravilo* $\hom : \mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C} \to$ *Set koje svakom objektu (A, B) kategorije $\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}$ pridružuje skup* $\hom(A, B) := \mathcal{C}(A, B)$ *te koje svakom morfizmu $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ kategorije $\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}$ pridružuje funkciju* $\hom(f, g) : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A', B')$ *definiranu kao* $\hom(f, g)(u) = g \circ u \circ f$ *je dobro definirani bifunktor.*

Dokaz. Vidi Poglavlje 2 u [21]. ∎

Nadalje, ako u kategoriji $\mathcal{C}$ nad svakim skupom $\mathcal{C}(A, B)$ uspostavimo strukturu objekta neke fiksirane konkretne kategorije $\mathcal{D}$, a svaka funkcija $\hom(f, g)$ čuva strukturu u toj konkretnoj kategoriji, tada se lako vidi da hom prirodno određuje dobro definiran bifunktor : $\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, kojeg ćemo označavati oznakom Hom ili $Hom_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$.

Propozicija 3.53 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija.*

(i) Pridruživanje koje svakom paru objekata $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ u pro-$\mathcal{C}$ pridjeli prostor (pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}_{ind}$) generira bifunktor $Hom_{(pro\text{-}\mathcal{C},Top)}$.

(ii) Pridruživanje koje svakom paru objekata $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ u pro*-$\mathcal{C}$ pridjeli prostor (pro*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}$) generira bifunktor $Hom_{(pro^*\text{-}\mathcal{C},Top)}$.

Dokaz. Pokazat ćemo samo tvrdnju (ii), a tvrdnja (i) je analogna. Prema definiciji općenitog bifunktora Hom u tekstu prije ove propozicije, da bi pokazali da je $Hom_{(pro^*\text{-}\mathcal{C},Top)} : (pro^*\text{-}\mathcal{C})^{op}\times pro^*\text{-}\mathcal{C} \to Top$ uistinu bifunktor dovoljno je pokazati da je funkcija

$$Hom_{(pro^*\text{-}\mathcal{C},Top)}(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*) : (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}) \to (pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}'), \mathcal{T}^*_{ind}), \tag{3.13}$$
$$Hom_{(pro^*\text{-}\mathcal{C},Top)}(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(\boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{g}^* \circ \boldsymbol{u}^* \circ \boldsymbol{f}^*$$

neprekidna, za svaku četvorku inverznih sustava $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')$ u $\mathcal{C}$ te za sve morfizme $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{g}^* : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ u *pro**-$\mathcal{C}$. Dakle, neka su inverzni sustavi $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}' = (X'_\lambda, p'_{\lambda\lambda'}, \Lambda')$ i $\boldsymbol{Y}' = (Y'_\mu, q'_{\mu\mu'}, M')$ te morfizmi $\boldsymbol{f}^* = [(f, f^n_\lambda)]$ i $\boldsymbol{g}^* = [(g, g^n_\mu)]$ iz prethodne rečenice proizvoljno odabrani. Funkciju $Hom_{(pro^*\text{-}\mathcal{C},Top)}(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)$ iz (3.13) označimo kraćom oznakom $Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)$.

Neka je $\boldsymbol{u}^* = [(u, u^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ proizvoljan i neka je U proizvoljna okolina oko

$$\begin{aligned} Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(\boldsymbol{u}^*) &= \boldsymbol{g}^* \circ \boldsymbol{u}^* \circ \boldsymbol{f}^* \\ &= [(g, g^n_\mu)] \circ [(u, u^n_\mu)] \circ [(f, f^n_\lambda)] \\ &= [(g, g^n_\mu)] \circ [(fu, u^n_\mu f^n_{u(\mu)})] \\ &= [(fug, g^n_\mu u^n_{g(\mu)} f^n_{u(g(\mu))})] \end{aligned} \tag{3.14}$$

u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}'), \mathcal{T}^*_{ind})$. Uvedimo oznake $h = fug$, $h^n_\mu = g^n_\mu u^n_{g(\mu)} f^n_{u(g(\mu))}$, za svaki $\mu \in M'$, te neka je $\boldsymbol{h}^* := [(h, h^n_\mu)] = Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(\boldsymbol{u}^*)$. Po Propoziciji 3.26 postoji $\mu'_0 \in M'$ takav da je

$$B^{\boldsymbol{h}^*}_{\mu'_0} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{k}^* = [(k, k^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}') : \\ (k, k^n_\mu) \sim_{\mu'_0} (h, h^n_\mu) \end{array} \right\} \subseteq U. \tag{3.15}$$

Sada neka je $\mu_0 = g(\mu'_0)$. Uočimo da je $B^{\boldsymbol{u}^*}_{\mu_0} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{k}^* = [(k, k^n_\mu)] \in pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : \\ (k, k^n_\mu) \sim_{\mu_0} (u, u^n_\mu) \end{array} \right\}$ bazni element oko $\boldsymbol{u}^*$ u $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \mathcal{T}^*_{ind})$ (Propozicija 3.26). Stoga, za pokazati neprekidnost funkcije $Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)$ dovoljno je pokazati da je

$$Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(B^{\boldsymbol{u}^*}_{\mu_0}) \subseteq U. \tag{3.16}$$

Neka je $\boldsymbol{v}^* = [(v, v^n_\mu)] \in B^{\boldsymbol{u}^*}_{\mu_0}$ proizvoljan. Budući da je $(v, v^n_\mu) \sim_{\mu_0} (u, u^n_\mu)$ to postoji $\lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda_0 \geq u(\mu_0), v(\mu_0)$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$v^{n'}_{\mu_0} p_{v(\mu_0)\lambda_0} = u^{n'}_{\mu_0} p_{u(\mu_0)\lambda_0} \tag{3.17}$$

Neka je $h' = fvg$ te $h'^n_\mu = g^n_\mu v^n_{g(\mu)} f^n_{v(g(\mu))}$, za svaki $\mu \in M'$, te neka je $\boldsymbol{h}'^* := [(h', h'^n_\mu)]$. Po koracima iz (3.14) lako je vidjeti da je $\boldsymbol{h}'^* = Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(\boldsymbol{v}^*)$. Sada pokažimo da je $(h', h'^n_\mu) \sim_{\mu'_0} (h, h^n_\mu)$. Po Definiciji 3.4 za odabir (f, f^n_λ) i $u(\mu_0) \leq \lambda_0$ postoje $\lambda'_1 \in \Lambda'$, $\lambda'_1 \geq f(u(\mu_0)), f(\lambda_0)$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n' \geq n_1$ vrijedi

$$f^{n'}_{u(\mu_0)} p'_{f(u(\mu_0))\lambda'_1} = p_{u(\mu_0)\lambda_0} f^{n'}_{\lambda_0} p'_{f(\lambda_0)\lambda'_1}. \tag{3.18}$$

Analogno, za (f, f^n_λ) i $v(\mu_0) \leq \lambda_0$ postoje $\lambda'_2 \in \Lambda'$, $\lambda'_2 \geq f(v(\mu_0)), f(\lambda_0)$ i $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n' \geq n_2$ vrijedi

$$f^{n'}_{v(\mu_0)} p'_{f(v(\mu_0))\lambda'_2} = p_{v(\mu_0)\lambda_0} f^{n'}_{\lambda_0} p'_{f(\lambda_0)\lambda'_2}. \tag{3.19}$$

Potom, po usmjerenosti skupa Λ' odaberimo $\lambda'_0 \in \Lambda'$ takav da $\lambda'_0 \geq \lambda'_1, \lambda'_2$. Naposljetku odaberimo $n'_0 \in \mathbb{N}$, $n'_0 \geq n_0, n_1, n_2$ i uočimo koristeći (3.17), (3.18), (3.19) te svojstva veznih morfizama u inverznom sustavu $\boldsymbol{X}'$ da za svaki $n' \geq n_0$ vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}
h'^{n'}_{\mu'_0} p'_{f(v(g(\mu'_0)))\lambda'_0} &= g^{n'}_{\mu'_0} v^{n'}_{g(\mu'_0)} f^{n'}_{v(g(\mu'_0))} p'_{f(v(g(\mu'_0)))\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} v^{n'}_{\mu_0} f^{n'}_{v(\mu_0)} p'_{f(v(\mu_0))\lambda'_2} p'_{\lambda'_2\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} v^{n'}_{\mu_0} p_{v(\mu_0)\lambda_0} f^{n'}_{\lambda_0} p'_{f(\lambda_0)\lambda'_2} p'_{\lambda'_2\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} u^{n'}_{\mu_0} p_{u(\mu_0)\lambda_0} f^{n'}_{\lambda_0} p'_{f(\lambda_0)\lambda'_2} p'_{\lambda'_2\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} u^{n'}_{\mu_0} p_{u(\mu_0)\lambda_0} f^{n'}_{\lambda_0} p'_{f(\lambda_0)\lambda'_1} p'_{\lambda'_1\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} u^{n'}_{\mu_0} f^{n'}_{u(\mu_0)} p'_{f(u(\mu_0))\lambda'_1} p'_{\lambda'_1\lambda'_0} \\
&= g^{n'}_{\mu'_0} u^{n'}_{g(\mu'_0)} f^{n'}_{u(g(\mu'_0))} p'_{f(u(g(\mu'_0)))\lambda'_0} \\
&= h^{n'}_{\mu'_0} p'_{f(u(g(\mu'_0)))\lambda'_0}
\end{aligned}$$

Stoga je $(h', h'^n_\mu) \sim_{\mu'_0} (h, h^n_\mu)$, pa je $\boldsymbol{h}'^* = Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(\boldsymbol{v}^*) \in B^{\boldsymbol{h}^*}_{\mu'_0}$. Iz proizvoljnosti od $\boldsymbol{v}^*$ imamo da je $Hom(\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}^*)(B^{\boldsymbol{u}^*}_{\mu_0}) \subseteq B^{\boldsymbol{h}^*}_{\mu'_0}$, pa onda iz (3.15) jasno i (3.16) vrijedi i time je dokaz gotov. ■

Koristeći prethodnu propoziciju i činjenicu da funktori 'čuvaju' izomorfizme imamo sljedeći važan korolar.

Korolar 3.54 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija i neka su dani inverzni sustavi $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}'$, $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Y}'$ u $\mathcal{C}$.*

(i) Ako su redom $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{X}'$ te $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Y}'$ izomorfni u pro-$\mathcal{C}$ tada su prostori (pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{ind}$) i (pro-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}', \mathbf{Y}'), \mathcal{T}_{ind}$) homeomorfni.

(ii) Ako su redom $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{X}'$ te $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Y}'$ izomorfni u pro*-$\mathcal{C}$ tada su prostori (pro*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{ind}$) i (pro*-$\mathcal{C}(\boldsymbol{X}', \mathbf{Y}'), \mathcal{T}^*_{ind}$) homeomorfni.

Slijedi primjer koji pokazuje da prethodni korolar ne vrijedi za topologije $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$.

Primjer 3.55 *Neka je $\boldsymbol{X} = (X_n, [p_{nn+1}], \mathbb{N})$ inverzni niz u kategoriji $HcPol$ (puna potkategorija kategorije $HPol$ kojoj su elementi kompaktni poliedri)* *gdje je* $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$*, a* $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$ *neprekidna funkcija zadana sa* $p_{nn+1}(x_{n+1}) = x_1$ *i* $p_{nn+1}(x_i) = x_i$*, za svake* $i, n \in \mathbb{N}, i \leq n$*. Neka je* $\mathbf{Y} = (Y_\mu, [q_{\mu\mu'}], M)$ *kofinitni inverzni sustav izomorfan sa* $\mathbf{X}$ *u pro-HcPol dobiven po eksplicitnoj konstrukciji iz dokaza "Mardešićevog trika" odnosno Teorema 3.22 (ukratko* M *je skup svih konačnih podskupova od* $\mathbb{N}$ *uz binarnu relaciju* $\leq$ *definiranu kao* $\mu \leq \mu' \Leftrightarrow \mu \subseteq \mu'$*, zatim* $Y_\mu = X_{\max \mu}$*, za svaki* $\mu \in M$*, te* $q_{\mu\mu'} = p_{\max \mu \max \mu'}$*, za svake* $\mu \leq \mu' \in M$*). Prema Propoziciji 3.41 i činjenici da su* $\mathbf{X}$ *i* $\mathbf{Y}$ *kofinitni imamo da se prostori* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \mathcal{T}_{card})$ *i* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$ *mogu metrizirati ultrametrikom* d*, a prostori* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \mathcal{T}^*_{card})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$ *ultrametrikom* d^**. No, prema Primjeru* 3 *u [32] i Primjeru* 1 *u [33] imamo da prostori* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \mathcal{T}_{card})$ *i* $(pro\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}_{card})$ *nisu homeomorfni, kao ni prostori* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \mathcal{T}^*_{card})$ *i* $(pro^*\text{-}\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{T}^*_{card})$*.*

Napomena 3.56 *Primijetimo da prethodni primjer te Korolar 3.54 dokazuju da topologije* $\mathcal{T}_{ind}$ *i* $\mathcal{T}_{card}$ *te* $\mathcal{T}^*_{ind}$ *i* $\mathcal{T}^*_{card}$ *ne moraju biti iste niti onda kada pretpostavimo da inverzni sustav u kodomeni ima kofinitan (štoviše prebrojivi) indeksni skup, što smo najavili pokazati u prethodnom odjeljku.*

Zbog svih ovih navedenih činjenica topologije $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$ će nam kasnije u direktnim primjenama biti važnije nego $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$.

Poglavlje 4

Topološke grupe oblika

U prvoj podcjelini ovog poglavlja *Inverzni limesi i ekspanzije* dajemo pregled ključnih pojmova i činjenica u razumijevanju teorije (abstraktnog) oblika, s kojom se, kao i njezinim specijalnim slučajem teorijom topološkog oblika (koju možemo najkraće rečeno smatrati poopćenjem homotopske teorije), upoznajemo u drugoj podcjelini *Teorija oblika.* Ove dvije podcjeline su većinom pisane koristeći [23], gdje se može pronaći i mnogo više o spomenutim temama. Naposljetku, u podcjelini *Topološke grupe oblika* ćemo definirati pojam grupe oblika, kao važne algebarske invarijante oblika, te potom vidjeti kako se ona može osnažiti korisnom strukturom topološke grupe, prirodnog naziva topološka grupa oblika, što je urađeno nedavno u članku [26]. Pružit ćemo najbitnije činjenice o topološkoj grupi oblika koristeći upravo [26], kao i neke dodatne rezultate koristeći [16], te Poglavlje 3.

4.1 Inverzni limesi i ekspanzije

Definicija 4.1 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija i $\boldsymbol{X}$ inverzni sustav u $\mathcal{C}$.* ***Inverzni limes*** *inverznog sustava $\boldsymbol{X}$ (u $\mathcal{C}$) je morfizam $\boldsymbol{p} : (X) \to \boldsymbol{X}$ u pro-$\mathcal{C}$ sa sljedećim univerzalnim svojstvom: za svaki morfizam $\boldsymbol{g} : (Y) \to \boldsymbol{X}$ u pro-$\mathcal{C}$ postoji jedinstveni morfizam $[(g)] : (Y) \to (X)$ u pro-$\mathcal{C}$ takav da vrijedi $\boldsymbol{p} \circ [(g)] = \boldsymbol{g}$.*

Napomena 4.2 *Odsada ćemo, zbog jednostavnosti, kod oznake rudimentarnih sustava izostavljati zagrade, tj. pisat ćemo X umjesto (X).*

Univerzalno svojstvo iz prethodne definicije možemo preko komutitativnog dijagrama zapisati na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{\exists![(g)]}{\dashrightarrow} & X \\ & \searrow^{\boldsymbol{g}} & \downarrow_{\boldsymbol{p}} \\ & & \boldsymbol{X} \end{array} .$$

Primijetimo da svaki morfizam $[(g)] : Y \to X$ u *pro*-$\mathcal{C}$ možemo zamišljati kao morfizam $g : Y \to X$ u $\mathcal{C}$, a i obratno (kategorija $\mathcal{C}$ i puna potkategorija kategorije *pro*-$\mathcal{C}$ restringirana na rudimentarne sustave su očito prirodno izomorfne). Nadalje, vrijedi da je inverzni limes jedinstven do na izomorfizam, preciznije ako su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{p}' : X' \to \boldsymbol{X}$ inverzni limesi inverznog sustava $\boldsymbol{X}$ onda postoji jedinstveni izomorfizam $g : X' \to X$ u $\mathcal{C}$ (dobiven po univerzalnom svojstvu inverznog limesa $\boldsymbol{p}$) takav da vrijedi $\boldsymbol{p} \circ [(g)] = \boldsymbol{p}'$. Ponekad ćemo kod inverznog limesa $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ isticati samo objekt X te ćemo njega (zbog jedinstvenosti do na izomorfizam) zvati inverznim limesom od $\boldsymbol{X}$ i pisati $X = \varprojlim \boldsymbol{X}$.
Ako svaki inverzni sustav u $\mathcal{C}$ ima limes kažemo da kategorija dopušta limese. Neke od kategorija koje dopuštaju limese, a za nas su bitne, su kategorije Set, Grp, Ab i Top.

Napomena 4.3 *U kategoriji $\mathcal{C}$ koja dopušta limese inverzni limes možemo promatrati kao funktor $\varprojlim$: pro-$\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ čije djelovanje na objektima je jasno (samo zbog više mogućnosti do na izomorfizam fiksiramo neko), dok za proizvoljni morfizam $\boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ definiramo $\varprojlim \boldsymbol{f} := f$ gdje je $f : \varprojlim \boldsymbol{X} \to \varprojlim \boldsymbol{Y}$ jedinstveni morfizam u $\mathcal{C}$ takav da je $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \circ [(f)]$, a $\boldsymbol{p} : \varprojlim \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{q} : \varprojlim \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ su inverzni limesi od $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$, redom.*

Slijede neki važni primjeri.

Primjer 4.4 *Neka je $\mathbf{X}$ rudimentarni sustav (X) u proizvoljnoj kategoriji $\mathcal{C}$. Tada je $[(1_X)] : X \to \mathbf{X}$ inverzni limes od $\mathbf{X}$.*

Primjer 4.5 *Neka je* $(Y_\alpha : \alpha \in A)$ *familija skupova, a* $X = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. *Označimo sa* Λ *skup svih konačnih podskupova od* A *uređen inkluzijom. Potom, za svaki* $\lambda \in \Lambda$ *neka je* $X_\lambda = \prod_{\alpha\in\lambda} Y_\alpha$, *te* $p_\lambda : X \to X_\lambda$ *projekcija. Također, za svaki* $\lambda \leq \lambda' \in \Lambda$ *neka je* $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ *projekcija. Tada je* $[(p_\lambda)] : X \to (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *inverzni limes od* $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$. *Analogna tvrdnja vrijedi ako je* $(Y_\alpha : \alpha \in A)$ *familija topoloških prostora ili grupa, a inverzni limes promatran u* Top *odnosno* Grp.

Primjer 4.6 *Neka je* $(X_1, x_1) = (S^1, s_0)$ *(punktirana* 1*-sfera odnosno kružnica), te* (X_n, x_n) *punktirani prostori definirani induktivno kao*

$$(X_n, x_n) = (X_{n-1}, x_{n-1}) \bigvee (S^1, s_0),$$

za svaki prirodni broj $n \geq 2$ *(klinovi od* n *punktiranih kružnica). Neka je* $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$ *definirana restrikcijama na sljedeći način:* $p_{nn+1}|_{X_n} = 1_{X_n}$, $p_{nn+1}|_{X_{n+1}\setminus X_n} = const_{x_n}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je inverzni limes od* $(X_n, p_{nn+1}, \mathbb{N})$ *u* Top *homeomorfan prostoru*

$$\mathbb{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{4.1}$$

Prostor $\mathbb{H}$ *je poznat u literaturi pod nazivom* ***Havajska naušnica****.*

Prije nego uvedemo pojam ekspanzije slijedi pregled bitnih činjenica za inverzne limese u kategoriji Top. Za svaki inverzni sustav $\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u Top (a i u Grp) poznato je da njegov inverzni limes X u Top (Grp) možemo promatrati kao sljedeći potprostor (podgrupu) od $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$:

$$X = \left\{ x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : p_{\lambda\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda,\ \lambda \leq \lambda',\, \lambda, \lambda' \in \Lambda \right\}, \tag{4.2}$$

gdje x_λ označava λ-koordinatu od x. Iz ovoga direktno možemo vidjeti da je inverzni limes inverznog sustava potpuno regularnih topoloških prostora također potpuno regularan (analogno vrijedi i za bilo koji slabiji aksiom separacije) te da je inverzni limes inverznog niza metrizabilnih prostora metrizabilan (metrizabilnost se čuva na prebrojivom produktu i potprostoru), što inače ne vrijedi za proizvoljan inverzni sustav metrizabilnih prostora (Primjer 4.5 i činjenica da se metrizabilnost ne čuva na proizvoljnom produktu).

Teorem 4.7 *Neka je* $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *inverzni sustav u Cpt takav da su* X_λ *neprazni prostori, za svaki* $\lambda \in \Lambda$. *Tada je* $X = \varprojlim(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *neprazan kompaktan Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Vidi Teorem I.5.3.u [23]. ■

Jedna od direktnih posljedica ovog teorema je da i kategorija *Cpt* dopušta limese te da je inverzni limes inverznog niza nepraznih kompaktnih metričkih prostora također neprazni kompaktni metrički prostor.

Teorem 4.8 *Inverzni limes inverznog niza kontinuuma je kontinuum.*

Dokaz. Vidi Teorem 2.4. u [25]. ■

Napomena 4.9 ***Kontinuum*** *je neprazni kompaktni povezani metrički prostor.*

Teorem 4.10 *Svaki kompaktni Hausdorffov prostor X je inverzni limes nekog inverznog sustava kompaktnih poliedara. Ako je dodatno X metrički prostor onda je inverzni limes nekog inverznog niza kompaktnih poliedara.*

Dokaz. Vidi Teorem I.5.7. i Korolar I.5.4 u [23]. ■

Sada ćemo se upoznati sa pojmom ekspanzije općenito.

Definicija 4.11 *Neka je* $\mathcal{C}$ *proizvoljna kategorija i* $\mathcal{D}$ *njezina potkategorija. Za* $X \in Ob(\mathcal{C})$, $\mathcal{D}$***-ekspanzijom*** *od* X *nazivamo morfizam* $\boldsymbol{p} : X \to \mathbf{X}$ *u pro-*$\mathcal{C}$, *gdje je* $\mathbf{X}$ *inverzni sustav u* $\mathcal{D}$, *tako da vrijedi sljedeće univerzalno svojstvo: za svaki inverzni sustav* $\mathbf{Y}$ *u* $\mathcal{D}$ *i za svaki morfizam* $\boldsymbol{h} : X \to \mathbf{Y}$ *u pro-*$\mathcal{C}$, *postoji jedinstveni morfizam* $\boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *u pro-*$\mathcal{D}$ *takav da je* $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{p}$.

U nekim situacijama ćemo samo $\boldsymbol{X}$ nazivati $\mathcal{D}$-ekspanzijom od X. Preko komutitativnog dijagrama zahtjev univerzalnog svojstva iz prethodne definicije možemo zapisati kao

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\boldsymbol{h}"'] \arrow[d, "\boldsymbol{p}"] \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{X} \arrow[l, dashed, "\exists! \boldsymbol{f}"] \end{tikzcd} .$$

Napomena 4.12 *Ako postoji $\mathcal{D}$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ od X takva da je $\boldsymbol{X}$ inverzni niz onda kažemo da X dopušta nizovnu $\mathcal{D}$-ekspanziju.*

Ako su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ dvije $\mathcal{D}$-ekspanzije od X tada postoji jedinstveni izomorfizam $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ u *pro*-$\mathcal{D}$ (dobiven po univerzalnom svojstvu $\mathcal{D}$-ekspanzije $\boldsymbol{p}$) takav da je $\boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$. Izomorfizam $\boldsymbol{i}$ još nazivamo **kanonskim izomorfizmom**, a za $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$ lako se vidi da je $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}_{\boldsymbol{X}}$. Nadalje, ako je $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ neka $\mathcal{D}$-ekspanzija objekta X, a $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ proizvoljni izomorfizam u *pro*-$\mathcal{D}$, onda je $\boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}'$ također $\mathcal{D}$-ekspanzija od X.

Primjer 4.13 *Neka je $X \in Ob(\mathcal{D})$, gdje je $\mathcal{D}$ puna potkategorija od $\mathcal{C}$. Tada je pro-morfizam $[(1_X)] : X \to X$ $\mathcal{D}$-ekspanzija od X.*

Primjer 4.14 *Neka je $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ puna potkategorija od Top kojoj su objekti svi potpuno regularni prostori. Uočimo da je Cpt puna potkategorija od $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$. Sa $\beta X \in Ob(Cpt)$ označimo Stone-Čehovu kompaktifikaciju potpuno regularnog prostora X (vidi Poglavlje* 38 *u [24]). Budući da svaka neprekidna funkcija $h : X \to Y$, $X \in Ob(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}})$, $Y \in Ob(Cpt)$, ima jedinstveno neprekidno proširenje na $\beta X \supseteq X$ (Teorem* 38.4. *u [24]), tada se lako pokaže da je Cpt-ekspanzija od X jednaka morfizmu $[(p)] : X \to \beta X$ u pro-$\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$, gdje je $p : X \to \beta X$ inkluzija.*

Kažemo da je potkategorija $\mathcal{D}$ kategorije $\mathcal{C}$ **gusta** (ili *pro*-**reflektivna**) **u** $\mathcal{C}$ ako za svaki objekt X u $\mathcal{C}$ postoji njegova $\mathcal{D}$-ekspanzija. Uočimo da je po prethodnom primjeru Cpt gusta u $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$.

Neformalno, $\mathcal{D}$-ekspanziju objekta kategorije $\mathcal{C}$ možemo zamišljati kao "aproksimaciju" tog objekta inverznim sustavom u potkategoriji $\mathcal{D}$, za čije objekte obično podrazumijevamo da imaju neka lijepa svojstva. Za nas će najvažniji slučaj biti kada je $\mathcal{C}$ homotopska kategorija, a "lijepa" potkategorija koju ćemo koristiti za aproksimaciju će biti homotopska kategorija poliedara, tako da ćemo se sada pozabaviti najvažnijim činjenicama koje se tiču takozvane poliedarske ekspanzije, njezine egzistencije i eksplicitne konstrukcije u specijalnim slučajevima. Za početak definirajmo (poliedarsku) rezolventu.

Definicija 4.15 ***Rezolventom*** *topološkog prostora X nazivamo morfizam $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : X \to \boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ u pro-Top koji udovoljuje sljedećim svojstvima:*

(R1) Neka je $P \in ANR$, $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od P i $h : X \to P$ neprekidna funkcija. Tada postoji $\lambda \in \Lambda$ i neprekidna funkcija $f : X_\lambda \to P$ takva da su h i $f \circ p_\lambda$ $\mathcal{V}$-bliske.

(R2) Neka je $P \in ANR$ i $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od P. Tada postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{V}'$ od P sa sljedećim svojstvom: za svaki $\lambda \in \Lambda$ i za svake dvije neprekidne funkcije $f, f' : X_\lambda \to P$ takve da su $f \circ p_\lambda$ i $f' \circ p_\lambda$ $\mathcal{V}'$-bliske postoji $\lambda' \geq \lambda$ takav da su $f \circ p_{\lambda\lambda'}$ i $f' \circ p_{\lambda\lambda'}$ $\mathcal{V}$-bliske.

Ako je dodatno X_λ poliedar, za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ nazivamo ***poliedarskom rezolventom*** *prostora X.*

Napomena 4.16 *Ako su X i Y prostori, a $\mathcal{U}$ pokrivač od Y, onda za neprekidne funkcije $f, g : X \to Y$ kažemo da su* ***$\mathcal{U}$-bliske*** *ako za svaki $x \in X$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $f(x), g(x) \in U$.*

Teorem 4.17 *Neka je $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ morfizam u pro-Cpt. Tada je $\boldsymbol{p}$ rezolventa od X ako i samo ako je $\boldsymbol{p}$ inverzni limes od $\boldsymbol{X}$.*

Dokaz. Vidi Teorem I.6.1. u [23]. ■

Teorem 4.18 *Svaki topološki prostor X dopušta svoju poliedarsku rezolventu $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$.*

Dokaz. Vidi Teorem I.6.7. u [23]. ■

Lako se vidi da homotopski funktor $H : Top \to HTop$ prirodno inducira funktor $\underline{H} : pro\text{-}Top \to pro\text{-}HTop$ na sljedeći način:

$$\underline{H}(\boldsymbol{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)) = (H(X_\lambda), H(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda) = (X_\lambda, [p_{\lambda\lambda'}], \Lambda),$$

$$\underline{H}(\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)]) = [(f, H(f_\mu))] = [(f, [f_\mu])].$$

Analogno, funktori H_0 i H_{00} induciraju redom funktore $\underline{H_0} : pro\text{-}Top_0 \to pro\text{-}HTop_0$ i $\underline{H_{00}} : pro\text{-}Top_{00} \to pro\text{-}HTop_{00}$. Sljedeći vrlo bitni teorem povezuje poliedarsku rezolventu i $HPol$-ekspanziju (poliedarsku eskpanziju).

Teorem 4.19 *Ako je $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ poliedarska rezolventa prostora X, onda je $\underline{H}(\boldsymbol{p}) : X \to \underline{H}(\boldsymbol{X})$ $HPol$-ekspanzija od X.*

Dokaz. Vidi Teorem I.6.2. u [23]. ■

Korolar 4.20 *Kategorija $HPol$ je gusta u $HTop$.*

Dokaz. Direktno iz Teorema 4.18 i 4.19. ■

Napomena 4.21 *Također vrijedi i da su kategorije $HPol_0$ i $HPol_{00}$ guste u $HTop_0$ i $HTop_{00}$, redom. Naime, postoje pojmovi (poliedarske) rezolvente (bi)punktiranog prostora, analogni Definiciji 4.15, te odgovarajuće verzije Teorema 4.18 i 4.19 u oba slučaja (više o tome u poglavljima I.6.4. i I.6.5. u [23] te poglavlju 2 u [18]).*

Navodimo sljedeću tvrdnju jer će nam ista kasnije biti potrebna.

Teorem 4.22 *Neka je $\boldsymbol{p} : X \to (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ poliedarska rezolventa prostora X, te $x_0, x_1 \in X$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) ako je $x_\lambda = p_\lambda(x_0)$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda je $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ poliedarska rezolventa punktiranog prostora (X, x_0), a $\underline{H_0}(\boldsymbol{p})$ je $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0);

(ii) *ako je* $x_\lambda = p_\lambda(x_0)$, $x'_\lambda = p_\lambda(x_1)$, *za svaki* $\lambda \in \Lambda$, *onda je* $\boldsymbol{p} : (X, x_0, x_1) \to ((X_\lambda, x_\lambda, x'_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *poliedarska rezolventa bipunktiranog prostora* (X, x_0, x_1), *a* $\underline{H_{00}}(\boldsymbol{p})$ *je* $HPol_{00}$*-ekspanzija od* (X, x_0, x_1).

Dokaz. Dokazi obje tvrdnje slijede direktno iz Leme 2.3. u [18] te Napomene 4.21. ■

Ovaj odjeljak završavamo s još dvije korisne tvrdnje, koje vrijede i u punktiranom i bipunktiranom slučaju.

Teorem 4.23 *Neka je* $\boldsymbol{X}$ *inverzni sustav kompaktnih poliedara i* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ *njegov inverzni limes. Tada je* $\underline{H}(\boldsymbol{p}) : X \to \underline{H}(\boldsymbol{X})$ $HPol$*-ekspanzija od* X.

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 4.17 i 4.19. ■

Teorem 4.24 *Neka je* X *kompaktni Hausdorffov prostor. Tada postoji* $HPol$*-ekspanzija* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ *od* X *takva da je* $\boldsymbol{X}$ *inverzni sustav kompaktnih poliedara. Štoviše, ako je* X *dodatno metrički onda postoji* $HPol$*-ekspanzija* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$ *od* X *takva da je* $\boldsymbol{X}$ *inverzni niz kompaktnih poliedara, dakle* X *dopušta nizovnu* $HPol$*-ekspanziju.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Teorema 4.10 i 4.23. ■

Napomena 4.25 *Ako sa* $HcPol$ *označimo punu potkategoriju kategorije* $HPol$ *restringiranu na kompaktne poliedre tada su* $HPol$*-eskpanzije iz prethodnog teorema također i* $HcPol$*-ekspanzije, a kategorija* $HcPol$ *je gusta u* $HCpt$.

4.2 Teorija oblika

Definicija 4.26 *Neka je* $\mathcal{C}$ *proizvoljna kategorija, a* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ *gusta i puna potkategorija. Neka su* $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ $\mathcal{D}$*-eskpanzije od* $X \in Ob(\mathcal{C})$ *i* $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ $\mathcal{D}$*-eskpanzije od* $Y \in Ob(\mathcal{C})$. *Za morfizme* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *i* $\boldsymbol{f}' : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ *kažemo da su pro-*$\mathcal{D}$ ***ekvivalentni****, u oznaci*

$\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$, *ako sljedeći dijagram komutira u pro-$\mathcal{D}$*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{\boldsymbol{i}} & \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{f}\downarrow & & \downarrow \boldsymbol{f}' \\ \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\boldsymbol{j}} & \boldsymbol{Y}' \end{array} \tag{4.3}$$

gdje su $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ *kanonski izomorfizmi među $\mathcal{D}$-ekspanzijama istog objekta.*

Napomena 4.27 *Relacija $\sim$ pro-$\mathcal{D}$ ekvivalencije je relacija ekvivalencije na klasi svih morfizama u pro-$\mathcal{D}$ između inverznih sustava u $\mathcal{D}$ koji su $\mathcal{D}$-ekspanzije objekata u $\mathcal{C}$, a klasu ekvivalencije morfizma $\boldsymbol{f}$ označavamo oznakom $\langle \boldsymbol{f} \rangle$.*

Napomena 4.28 *Relacija $\sim$ je dobro usklađena s kompozicijom u smislu da ako su još $\boldsymbol{r} : Z \to \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{r}' : Z \to \boldsymbol{Z}'$ $\mathcal{D}$-eskpanzije od $Z \in Ob(\mathcal{C})$, a $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{g}' : \boldsymbol{Y}' \to \boldsymbol{Z}'$ morfizmi takvi da je $\boldsymbol{g} \sim \boldsymbol{g}'$ onda je i $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{g}' \circ \boldsymbol{f}'$.*

Napomena 4.29 *Uz pretpostavke prethodne definicije vrijedi da za svaki morfizam $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ postoji jedinstveni $\boldsymbol{f}' : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ takav da je $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$. Također, ako su $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ takvi da je $\boldsymbol{f}_1 \sim \boldsymbol{f}_2$ onda je $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_2$.*

Neka je dan par $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, gdje je $\mathcal{D}$ puna i gusta potkategorija od $\mathcal{C}$. Definiramo **kategoriju** (**abstraktnog**) **oblika** (pridruženu paru $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$), u oznaci $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, na sljedeći način:

- objekti su svi objekti u $\mathcal{C}$,
- morfizmi $F : X \to Y$ su klase *pro-$\mathcal{D}$* ekvivalencije $\langle \boldsymbol{f} \rangle$ morfizama $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, gdje su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$ neke $\mathcal{D}$-ekspanzije od X i Y, redom,
- kompozicija morfizama $F = \langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$ i $G = \langle \boldsymbol{g} \rangle : Y \to Z$ je definirana kao $G \circ F := \langle \boldsymbol{gf} \rangle$ (zbog Napomene 4.29 uvijek možemo pronaći reprezentante $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{g}$ tako da se kodomena prvog podudara s domenom drugog, a zbog Napomene 4.28 je definicija kompozicije neovisna o izboru usklađenih $\mathcal{D}$-ekspanzija),

- identički morfizam $1_X : X \to X$ je $\langle \mathbf{1_X} : \mathbf{X} \to \mathbf{X} \rangle$, gdje je $\boldsymbol{p} : X \to \mathbf{X}$ neka $\mathcal{D}$-ekspanzija od X.

Uočimo da je $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X, Y)$ uistinu skup jer zbog Napomene 4.29 postoji bijekcija

$$\sigma : pro\text{-}\mathcal{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X, Y),\ \sigma(\boldsymbol{f}) = \langle \boldsymbol{f} \rangle\,. \tag{4.4}$$

Nadalje, reći ćemo da su objekti $X, Y \in Ob(\mathcal{C}) = Ob(Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})})$ **istoga oblika** ako su izomorfni u $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Očigledno je $F = \langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$ izomorfizam u $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ izomorfizam u pro-$\mathcal{D}$, tj. X i Y su istoga oblika ako i samo ako su im $\mathcal{D}$-ekspanzije $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ izomorfne u pro-$\mathcal{D}$.
Važnost kategorije $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ odnosno teorije (abstraktnog) oblika može se prepoznati u sljedećoj funktorijalnoj vezi između $\mathcal{C}$ i $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Neka su $\boldsymbol{p} : X \to \mathbf{X}$, $\boldsymbol{q} : Y \to \mathbf{Y}$ neke $\mathcal{D}$-ekspanzije od X i Y, redom. Tada, za svaki morfizam $f : X \to Y$ u $\mathcal{C}$ postoji jedinstveni morfizam $\boldsymbol{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ u pro-$\mathcal{D}$ (po univerzalnom svojstvu ekspanzije $\boldsymbol{p}$) takav da sljedeći dijagram komutira u pro-$\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{[(f)]}{\rightarrow} & Y \\ \downarrow_{\boldsymbol{p}} & & \downarrow_{\boldsymbol{q}} \\ \mathbf{X} & \overset{\boldsymbol{f}}{\rightarrow} & \mathbf{Y} \end{array}\,. \tag{4.5}$$

Nadalje, lako je pokazati da odabirom nekih drugih dviju $\mathcal{D}$-ekspanzija $\boldsymbol{p}' : X \to \mathbf{X}'$, $\boldsymbol{q}' : Y \to \mathbf{Y}'$ od X i Y, redom, te jedinstvenog morfizma $\boldsymbol{f}' : \mathbf{X}' \to \mathbf{Y}'$ za kojeg odgovarajući analogni dijagram iz (4.5) komutira, da je onda $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{f}'$.
Stoga, koristeći prethodne oznake i činjenice, **funktor oblika** $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \mathcal{C} \to Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ možemo dobro definirati kao

- $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X) = X$,
- $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(f) = \langle \boldsymbol{f} \rangle$.

Dakle, ako su X i Y izomorfni u $\mathcal{C}$ onda su i istoga oblika, pa nam $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ može biti od koristi u razlikovanju objekata iz $\mathcal{C}$, i to eventualno onih koji nisu u $\mathcal{D}$. Naime, očito funktor oblika $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ inducira izomorfizam između

$\mathcal{D}$ i pune potkategorije od $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ sužene na objekte iz $\mathcal{D}$, pa budući da $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ fiksira objekte, smijemo kategoriju $\mathcal{D}$ smatrati punom potkategorijom kategorije $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$. Drugim riječima, objekti iz $\mathcal{D}$ su izomorfni u $\mathcal{D}$ ako i samo ako su istoga oblika.

Za nas će najvažniji specijalni slučaj teorije oblika biti teorija topološkog oblika, preciznije slučaj kada je par $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ jednak $(HTop, HPol)$ ili odgovarajućem punktiranom te bipunktiranom slučaju, što ima smisla zbog Korolara 4.20 i Napomene 4.21. Pripadne kategorije oblika $Sh_{(HTop,HPol)}$, $Sh_{(HTop_0,HPol_0)}$ i $Sh_{(HTop_{00},HPol_{00})}$ ćemo redom označavati sa Sh, Sh_0 i Sh_{00}, te nazivati **kategorijom topološkog oblika** i **kategorijom punktiranog** (odnosno **bipunktiranog**) **topološkog oblika**. Također, odgovarajuće funktore oblika $S_{(HTop,HPol)}$, $S_{(HTop_0,HPol_0)}$ i $S_{(HTop_{00},HPol_{00})}$ ćemo redom kratko označavati sa S, S_0 i S_{00}, te prirodno nazivati **funktorom topološkog oblika** i **funktorom punktiranog** (odnosno **bipunktiranog**) **topološkog oblika**.

Na kraju ovog odjeljka još pružimo osnovni motivirajući primjer koji ukazuje na značajnost i zanimljivost teorije (topološkog) oblika.

Primjer 4.30 *Sa W označimo potprostor od $\mathbb{R}^2$ jednak beskonačno izlomljenoj crti dobivenoj spajanjem redom točaka $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$, A_1, B_1, A_2, B_2,... gdje je $A_n = \left(\frac{1}{2n-1}, 1\right)$, $B_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prostor W nije lokalno povezan, pa ne može biti poliedar. Nadalje prostor W i kružnica S^1 nemaju isti homotopski tip, jer se može pokazati da je $\pi_1(W)$ trivijalna, a $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, drugim riječima nisu izomorfne u $HTop$. No, prema Primjeru I.5.4. u [23] i Primjeru 4.13 imamo da je rudimentarni sustav (S^1) $HPol$-ekspanzija i od W i od S^1, dakle W i S^1 imaju isti oblik. Prostor W je inače u literaturi poznat pod nazivom **Varšavska kružnica**, a često se može pronaći i njegova homeomorfna inačica*

$$\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq \frac{1}{2\pi}\right\} \bigcup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \bigcup C,$$

u $\mathbb{R}^2$, gdje je C luk od $(0,0)$ do $\left(\frac{1}{2\pi}, 0\right)$ u $\mathbb{R}^2$ disjunktan s prva dva skupa osim u krajnjim točkama.

Napomena 4.31 *Prostori koji dopuštaju rudimentarni sustav za svoju poliedarsku ekspanziju se još nazivaju* ***stabilni prostori****. Analogno se mogu definirati i stabilni punktirani prostori, a po Teoremu II.9.1 u [23] vrijedi da su "stabilnost" i "punktirana stabilnost" ekvivalentne, preciznije, vrijedi da je prostor X stabilan ako i samo ako je za proizvoljni $x_0 \in X$ punktirani prostor (X, x_0) stabilan. Očito su poliedri i CW-kompleksi (jer imaju homotopski tip nekog poliedra) stabilni prostori, a po prethodnom primjeru je i Varšavska kružnica (koja nije poliedar) također stabilan prostor.*

4.3 Topološke grupe oblika

Neka je $k \in \mathbb{N}$ i (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor, te $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka njegova fiksirana $HPol_0$-ekspanzija (koja postoji po Napomeni 4.21). Definiramo **k-dimenzionalnu homotopsku** *pro*-**grupu** punktiranog prostora (X, x_0) (s obzirom na $\boldsymbol{p}$), u oznaci *pro*-$\pi_k(X, x_0)$, kao sljedeći inverzni sustav u Grp (štoviše Ab za $k \geq 2$)

$$pro\text{-}\pi_k(X, x_0) = \left(\pi_k\left(X_\lambda, x_\lambda\right), \pi_k\left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right). \tag{4.6}$$

Ako uzmemo neku drugu $HPol_0$-ekspanziju $\boldsymbol{p}' : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}', \boldsymbol{x}_0') = ((X'_\lambda, x'_\lambda), p'_{\lambda\lambda'}, \Lambda')$ od (X, x_0) tada kanonski izomorfizam $\boldsymbol{i} = [(i, i_\lambda)] : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) \to (\boldsymbol{X}', \boldsymbol{x}_0')$ inducira izomorfizam $[(i, \pi_k(i_\lambda))]$ između $\left(\pi_k\left(X_\lambda, x_\lambda\right), \pi_k\left(p_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda\right)$ i $\left(\pi_k\left(X'_\lambda, x'_\lambda\right), \pi_k\left(p'_{\lambda\lambda'}\right), \Lambda'\right)$, stoga homotopska *pro*-grupa do na izomorfizam ne ovisi o izboru ekspanzije. Nadalje, za fiksni odabir $HPol_0$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{q} : (Y, y_0) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_0) = ((Y_\mu, y_\mu), q_{\mu\mu'}, M)$ od nekih punktiranih prostora (X, x_0), (Y, y_0), redom, svaki morfizam $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0 ima jedinstvenog predstavnika $\boldsymbol{f} = [(f, f_\mu)]$ u *pro*-$HPol_0((\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0), (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0))$, pa po funktorijalnosti od π_k slijedi da F inducira dobro definirani morfizam

$$pro\text{-}\pi_k(F) = [(f, \pi_k(f_\mu))] : pro\text{-}\pi_k(X, x_0) \to pro\text{-}\pi_k(Y, y_0) \tag{4.7}$$

u *pro*-Grp (štoviše *pro*-Ab za $k \geq 2$).

Teorem 4.32 *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Pridruživanja iz (4.6) i (4.7) određuju funktor*

$$pro\text{-}\pi_k : Sh_0 \to pro\text{-}Grp.$$

Štoviše, za $k \geq 2$ kodomena funktora je $pro\text{-}Ab \subseteq pro\text{-}Grp$.

Dokaz. Teorem II.3.6. u [23]. ■

Potom, definiramo funktor $\check{\pi}_k$ kao

$$\begin{aligned} &\check{\pi}_k : Sh_0 \to Grp \text{ (ili } Ab \text{ za } k \geq 2), \\ &\check{\pi}_k = \varprojlim \circ\, pro\text{-}\pi_k, \end{aligned} \tag{4.8}$$

(vidi Korolar II.3.2. u [23]), te za svaki $(X, x_0) \in Ob(Sh_0) = Ob(Top_0)$ pridruženu grupu (Abelovu grupu za $k \geq 2$) $\check{\pi}_k(X, x_0)$ nazivamo **k-dimenzionalnom grupom oblika** punktiranog prostora (X, x_0) (a $\check{\pi}_k$ ćemo zvati **funktorom k-dimenzionalnih grupa oblika**). Jasno je da su homotopske *pro*-grupe i grupe oblika invarijante u Sh_0, a samim time i invarijante u $HTop_0$ i Top_0.

Primjer 4.33 *Neka je (P, p_0) punktirani poliedar (ili prostor koji ima homotopski tip nekog punktiranog poliedra). Tada, primjenom Primjera 4.13 i 4.4 imamo da je*

$$\check{\pi}_k(P, p_0) = \pi_k(P, p_0),$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Put oblika u prostoru X od x_0 do x_1 je svaki morfizam $\Omega : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ u kategoriji Sh_{00}, a za prostor X kažemo da je **povezan putovima oblika** ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in X$ postoji put oblika u X od x_0 do x_1. Povezanost putovima oblika je topološka, štoviše homotopska invarijanta, a bitno je naglasiti da povezanost putovima implicira povezanost putovima oblika.

Poznato je da put oblika u X od x_0 do x_1 inducira izomorfizam između $\check{\pi}_k(X, x_0)$ i $\check{\pi}_k(X, x_1)$, stoga grupe oblika onih prostora koji su povezani putovima (oblika) ne ovise (do na izomorfizam) o izboru bazne točke. Prema tome ćemo često u takvim slučajevima za grupu oblika od X pisati samo $\check{\pi}_k(X)$.

Primjer 4.34 *Varšavska kružnica W ima oblik kružnice S^1 (vidi Primjer 4.30), a analogno se pokaže i da ti prostori imaju isti punktirani oblik, za neki izbor baznih točaka. Uočimo i da su oba prostora povezana putovima. Stoga, vrijedi*

$$\check{\pi}_k(W) = \check{\pi}_k(S^1) = \pi_k(S^1),$$

gdje druga jednakost slijedi iz Primjera 4.33. Dakle, $\check{\pi}_1(W) = \mathbb{Z}$, dok je $\check{\pi}_k(W)$ trivijalna za sve $k \geq 2$.

Ekvivalentan pristup definiciji k-dimenzionalne grupe oblika (vidi poglavlje 3 u [10]), a koji nam među ostalim daje i više uvida u samu grupovnu operaciju, je sljedeći. Neka je (S^k, s_0) punktirana k-dimenzionalna sfera i neka je

$$[(1_{(S^k,s_0)})] : (S^k, s_0) \to (S^k, s_0)$$

uvijek fiksirana $HPol_0$-ekspanzija od (S^k, s_0) (Primjer 4.13 i činjenica da je (S^k, s_0) punktirani poliedar). Tada, za proizvoljni punktirani prostor (X, x_0), grupa $\check{\pi}_k(X, x_0)$ je skup

$$Sh_0((S^k, s_0), (X, x_0)) \tag{4.9}$$

uz operaciju zbrajanja

$$A + B = \langle \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle = \langle [(a_\lambda)] + [(b_\lambda)] \rangle = \langle [(a_\lambda + b_\lambda)] \rangle , \tag{4.10}$$

gdje je $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0), potom $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : (S^k, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ su predstavnici u *pro*-$HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ od A i B, redom, te naposljetku, zbrajanje $a_\lambda + b_\lambda$ u posljednjoj zagradi je zapravo zbrajanje u homotopskoj grupi $\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$. Nadalje, neutralni element u $\check{\pi}_k(X, x_0)$ je $\langle [(o_\lambda)] \rangle$, a inverz od $\langle [(a_\lambda)] \rangle$ je $\langle [(\overline{a_\lambda})] \rangle$, gdje je o_λ neutralni element u $\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, a $\overline{a_\lambda}$ inverz od a_λ u $\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Što se tiče funktora $\check{\pi}_k : Sh_0 \to Grp$, on je u ovom pristupu definiran na način da svakom morfizmu $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0 pridruži homomorfizam

$$\check{\pi}_k(F) : \check{\pi}_k(X, x_0) \to \check{\pi}_k(Y, y_0),$$

$$\check{\pi}_k(F)(A) = F \circ A.$$

Stoga, zbog (4.9) i koristeći specijalni slučaj bijekcije (4.4), dakle

$$\sigma_{\boldsymbol{p}} : pro\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)) \to Sh_0((S^k, s_0), (X, x_0)), \tag{4.11}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{a} \rangle ,$$

možemo na dva načina prirodno topologizirati $\check{\pi}_k(X, x_0)$ i to tako da na domeni bijekcije uzmemo neku od topologija $\mathcal{T}_{ind}$ ili $\mathcal{T}_{card}$ (vidi podcjelinu 3.4) te zahtijevamo da $\sigma_{\boldsymbol{p}}$ bude homeomorfizam. Nadalje, prema Korolaru 3.54 imamo da je prethodno opisana topologizacija skupa $\check{\pi}_k(X, x_0)$ preko topologije $\mathcal{T}_{ind}$ neovisna do na homeomorfizam o izboru $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0), štoviše, koristeći dokaz Propozicije 3.53 i dijagram (4.3) može se pokazati potpuna jedinstvenost konstrukcije, a ne samo do na homeomorfizam (u relaciji (3.13) odaberemo kanonske izomorfizme). Uzimajući sve ovo u obzir, zajedno i sa Primjerom 3.55, odabiremo topologiju $\mathcal{T}_{ind}$ kao pogodniju u topologizaciji grupe oblika. Na topološki ekvivalentan način je topologizirana grupa oblika i u [26] (slučaj kompaktnog metričkog prostora je komentiran i u [16], a lako se i općenitiji slučaj vidi), gdje je dobivena struktura označena oznakom

$$\check{\pi}_k^{top}(X, x_0). \tag{4.12}$$

U nastavku ćemo pružiti najvažnije i najzanimljivije činjenice o (4.12) pozivajući se uglavnom na upravo spomenuti članak [26], dok će referenca za neke dodatne ili unaprijeđene rezultate biti podcjelina 3.4 te članak [16].

Teorem 4.35 *Neka je (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor. Tada je $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ topološka grupa, za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Vidi Teorem 3.1. u [26]. ■

Odsada ćemo $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ prirodno nazivati k-**dimenzionalnom topološkom grupom oblika** punktiranog prostora (X, x_0).

Napomena 4.36 *Sljedeće tvrdnje vrijede za svaki punktirani prostor (X, x_0) i za svaki $k \in \mathbb{N}$:*

(i) $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *je potpuno regularna topološka grupa (Teorem 4.35 i Korolar 3.38);*

(ii) $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *je potpuno nepovezan prostor koji ima malu induktivnu dimenziju* 0 *(Korolari 3.35 i 3.33);*

(iii) ako je $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *proizvoljan morfizam u* Sh_0 *onda je funkcija* $\check{\pi}_k^{top}(F) : \check{\pi}_k^{top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{top}(Y, y_0)$, $\check{\pi}_k^{top}(F)(A) = F \circ A$ *neprekidna (tvrdnja (ii) Napomene* 3.2. *u [26]);*

(iv) ako je (Y, y_0) *punktirani prostor takav da su* (X, x_0) *i* (Y, y_0) *izomorfni u* Sh_0 *(još se kaže da su istog punktiranog oblika) onda su topološke grupe* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *i* $\check{\pi}_k^{top}(Y, y_0)$ *izomorfne (tvrdnja (iii) Napomene* 3.2. *u [26]).*

Korolar 4.37 *Za svaki* $k \in \mathbb{N}$, *pravilo* $\check{\pi}_k^{top} : Sh_0 \to TopGrp$ *koje svakom punktiranom prostoru* (X, x_0) *pridruži* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$, *a svakom morfizmu* $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *u* Sh_0 *pridruži neprekidni homomorfizam* $\check{\pi}_k^{top}(F) : \check{\pi}_k^{top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{top}(Y, y_0)$ *definiran kao* $\check{\pi}_k^{top}(F)(A) = F \circ A$, *je dobro definirani funktor.*

Funktor $\check{\pi}_k^{top}$ ćemo zvati **funktorom k-dimenzionalnih topoloških grupa oblika**. Primijetimo da kompozicijom funktora $\check{\pi}_k^{top}$ i zaboravljivog funktora $: TopGrp \to Grp$ dobivamo $\check{\pi}_k$.

Propozicija 4.38 *Neka je* X *stabilan prostor i* $k \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *diskretna, za svaki* $x_0 \in X$.

Dokaz. Odabirom proizvoljne rudimentarne $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0) (vidi Napomenu 4.31) tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 3.39. ∎

Korolar 4.39 *Neka je* (P, p_0) *punktirani poliedar (ili prostor koji ima homotopski tip nekog punktiranog poliedra) i* $k \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\check{\pi}_k^{top}(P, p_0)$ *jednaka grupi* $\pi_k(P, p_0)$ *opskrbljenoj diskretnom topologijom.*

Dokaz. Dokaz ide primjenom prethodne propozicije i Primjera 4.33. ∎

Propozicija 4.40 *Neka je* (X, x_0) *punktirani prostor koji dopušta nizovnu* $HPol_0$*-ekspanziju i neka je* $k \in \mathbb{N}$*. Tada je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *(ultra)metrizabilna topološka grupa.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Korolara 3.44. ■

Napomena 4.41 *Po Teoremu 4.24 odmah izlazi da je topološka grupa oblika svakog kompaktnog metričkog prostora (ultra)metrizabilna.*

Ako punktirani prostor (X, x_0) dopušta nizovnu $HPol_0$-ekspanziju i ako je odabrana neka takva njegova $HPol_0$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_i, x_i), p_{ii+1}, \mathbb{N})$, tada (potpuna) ultrametrika d na $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ (po relaciji (4.11) i specijalnom slučaju ultrametrike d iz (3.5)) može eksplicitno biti zadana kao:

$$d : \check{\pi}_k^{top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{top}(X, x_0) \to \mathbb{R}_0^+, \tag{4.13}$$

$$d\left(\langle[(a_i)]\rangle, \langle[(b_i)]\rangle\right) = \left\{ \begin{array}{c} \inf\left\{\frac{1}{m+1} : a_m = b_m,\, m \in \mathbb{N}\right\} \\ 1, \text{ inače} \end{array} \right\}.$$

Napomena 4.42 *Topološka grupa oblika metrizirana metrikom iz relacije (4.13) je u radu [16] označena oznakom* $\check{\pi}_k^d(X, x_0)$*. Također, ako je* $Sh_{0_\mathbb{N}}$ *puna potkategorija kategorije* Sh_0 *restringirana na sve punktirane prostore koji dopuštaju nizovnu* $HPol_0$*-ekspanziju, a* $TopGrp_{M_c}$ *puna potkategorija kategorije* $TopGrp$ *restringirana na sve topološke grupe koje dopuštaju metrizaciju potpunom metrikom, onda se specijalni slučaj funktora* $\check{\pi}_k^{top}$ *uz odgovarajuću restrikciju domene i kodomene može prikladno označiti sa* $\check{\pi}_k^d : Sh_{0_\mathbb{N}} \to TopGrp_{M_c}$ *(vidi Korolar* 3.4. *u [16]).*

Propozicija 4.43 *Neka je* X *prostor i* x_0, x_1 *dvije točke u* X *koje su povezane putom oblika te* $k \in \mathbb{N}$*. Tada su* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *i* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_1)$ *izomorfne topološke grupe.*

Dokaz. Neka je $\Omega : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ put oblika od x_0 do x_1 u X. Neka je $\boldsymbol{p} : (X, x_0, x_1) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) = ((X_\lambda, x_\lambda, x'_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ proizvoljna $HPol_{00}$-ekspanzija od (X, x_0, x_1) i neka $[(\omega_\lambda)] : (I, 0, 1) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$ reprezentira Ω

u *pro-*$HPol_{00}((I,0,1),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1))$ ($(I,0,1)$ je poliedar pa, po Primjeru 4.13, možemo kao njegovu $HPol_{00}$-eskpanziju uzeti $[(1_{(I,0,1)})] : (I,0,1) \to (I,0,1))$.
Neka je dana funkcija

$$i_\Omega : \check{\pi}_k^{top}(X,x_0) \to \check{\pi}_k^{top}(X,x_1), \tag{4.14}$$
$$i_\Omega\left(A = \langle[(a_\lambda)]\rangle\right) = \langle[(i_{\omega_\lambda}(a_\lambda))]\rangle\,,$$

gdje za $HPol_0$-ekspanzije od (X,x_0), (X,x_1) biramo slike od $\boldsymbol{p}$ po funktoru : *pro-*$HPol_{00} \to$ *pro-*$HPol_0$ prirodno induciranom od zaboravljivog funktora : $HPol_{00} \to HPol_0$ koji zaboravlja točke na drugoj, odnosno prvoj koordinati, redom (lako se provjeri da su to uistinu ekspanzije, a redom ćemo ih prirodno označavati sa $\boldsymbol{p_0} : (X,x_0) \to (\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{p}_1 : (X,x_1) \to (\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_1)$), a $i_{\omega_\lambda} : \pi_k(X_\lambda,x_\lambda) \to \pi_k(X_\lambda,x'_\lambda)$ je izomorfizam homotopskih grupa induciran sa ω_λ.
Poznato je da je i_Ω izomorfizam grupa, a da mu je inverz zadan sa

$$i_\Omega^{-1} : \check{\pi}_k^{top}(X,x_1) \to \check{\pi}_k^{top}(X,x_0),$$
$$i_\Omega^{-1}\left(B = \langle[(b_\lambda)]\rangle\right) = \left\langle\left[\left(i_{\omega_\lambda}^{-1}(b_\lambda)\right)\right]\right\rangle.$$

Stoga, dovoljno je pokazati da su i_Ω i i_Ω^{-1} neprekidne funkcije. Po relaciji (4.11), za pokazati da je funkcija i_Ω neprekidna dovoljno je pokazati neprekidnost funkcije $\sigma_{\boldsymbol{p}_1}^{-1}\circ i_\Omega\circ\sigma_{\boldsymbol{p}_0}$ koju ćemo označiti sa h i koja je eksplicitno zadana na sljedeći način:

$$h : (\textit{pro-}HPol_0((S^k,s_0),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)),\mathcal{T}_{ind}) \to (\textit{pro-}HPol_0((S^k,s_0),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_1)),\mathcal{T}_{ind}),$$
$$h\left([(a_\lambda)]\right) = [(i_{\omega_\lambda}(a_\lambda))]\,.$$

Neka je $[(a_\lambda)] \in$ *pro-*$HPol_0((S^k,s_0),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0))$ i neka je odabran proizvoljni otvoren skup V u kodomeni takav da je $h\left([(a_\lambda)]\right) \in V$. Budući da je $\mathcal{B}_{ind}$ (preciznije $\mathcal{B}_{ind}^{(S^k,s_0),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_1)}$) baza topologije $\mathcal{T}_{ind}$ u kodomeni, to postoji $B \in \mathcal{B}_{ind}$ takav da je $h\left([(a_\lambda)]\right) \in B \subseteq V$. Zatim, zbog $B \in \mathcal{B}_{ind}$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da vrijedi $B = B_{\lambda_0}^{h([(a_\lambda)])}$ (Napomena 3.25). Sada odaberimo $B_{\lambda_0}^{[(a_\lambda)]} \in \mathcal{B}_{ind}$ (preciznije $\mathcal{B}_{ind}^{(S^k,s_0),(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x}_0)}$). Jasno je $B_{\lambda_0}^{[(a_\lambda)]}$ otvoren skup u domeni oko $[(a_\lambda)]$, a lako se dokaže i da vrijedi sljedeća relacija

$$h(B_{\lambda_0}^{[(a_\lambda)]}) \subseteq B_{\lambda_0}^{h([(a_\lambda)])}. \tag{4.15}$$

Naime $[(b_\lambda)] \in B_{\lambda_0}^{[(a_\lambda)]}$ znači $b_{\lambda_0} = a_{\lambda_0}$, pa budući da je $i_{\omega_{\lambda_0}}$ izomorfizam, to je $i_{\omega_{\lambda_0}}(b_{\lambda_0}) = i_{\omega_{\lambda_0}}(a_{\lambda_0})$, a to onda povlači da je $h([(b_\lambda)]) \in B_{\lambda_0}^{h([(a_\lambda)])}$. Po relaciji (4.15) očito je $h(B_{\lambda_0}^{[(a_\lambda)]}) \subseteq V$ i time je pokazana neprekidnost funkcije h, a onda i funkcije i_Ω. Dokaz za neprekidnost funkcije i_Ω^{-1} se provodi analogno.
■

Korolar 4.44 *Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je prostor X povezan putovima (oblika), onda njegova k-dimenzionalna topološka grupa oblika ne ovisi do na izomorfizam o izboru bazne točke.*

Napomena 4.45 *Neovisnost o baznoj točki iz prethodnog korolara je samo za kontinuume povezane putovima oblika dokazana u Teoremu* 3.5. *u [26], gdje je dokaz trivijalan zbog činjenice da takvi prostori imaju isti punktirani oblik u svakoj svojoj točki (Teorem II.8.9. u [23])*

Slično kao i kod grupe oblika topološku grupu oblika putovima (oblika) povezanog prostora X ćemo označavati samo sa $\check{\pi}_k^{top}(X)$ bez isticanja bazne točke.

Neka je za svaki $k \in \mathbb{N}$ $\pi_k^{discr} : HTop_0 \to TopGrp$ funktor koji djeluje analogno kao i π_k, samo što svaku pridruženu grupu dodatno opskrbi diskretnom topologijom.

Teorem 4.46 *Neka je (X, x_0) punktirani prostor i $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0) te $k \in \mathbb{N}$. Tada je topološka grupa $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ izomorfna sa*

$$\lim_{\leftarrow}(\pi_k^{discr}(X_\lambda, x_\lambda), \pi_k^{discr}(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda)$$

u $TopGrp$.

Dokaz. Vidi Teorem 3.7. u [26]. ■
Uz oznake prethodnog teorema, vrijedi da je $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ izomorfna i sa

$$\lim_{\leftarrow}(\check{\pi}_k^{top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{top}(S_0(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda),$$

što se može pronaći u dokazu prethodnog teorema.

Korolar 4.47 *Neka je* $(X, x_0) = \lim\limits_{\leftarrow}((X_i, x_i), p_{ii+1}, \mathbb{N})$ *u* Top_0*, gdje su* (X_i, x_i) *punktirani kompaktni poliedri, za svaki* $i \in \mathbb{N}$*, te neka je* $k \in \mathbb{N}$*. Tada je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *izomorfna sa*

$$\lim_{\leftarrow}(\pi_k^{discr}(X_i, x_i), \pi_k^{discr}(H_0(p_{ii+1})), \mathbb{N})$$

u $TopGrp$*.*

Dokaz. Vidi Korolar 3.8. u [26]. ■

Teorem 4.48 *Neka je* (X, x_0) *punktirani prostor i* $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *neka* $HPol_0$*-ekspanzija od* (X, x_0) *te* $k \in \mathbb{N}$*. Ako je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *diskretna onda postoji* $\lambda_0 \in \Lambda$ *takav da je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *izomorfna nekoj podgrupi od* $\check{\pi}_k^{top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$*.*

Dokaz. Vidi Teorem 4.4. u [26]. ■

Slijedi primjer prostora koji nema diskretnu 1-dimenzionalnu topološku grupu oblika (po Primjeru 4.5. u [26]).

Primjer 4.49 *Promotrimo Havajsku naušnicu* $\mathbb{H}$ *(vidi (4.1)). Poznato je da je klin od* n*-kružnica, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, kompaktni poliedar. Sada, po Primjeru 4.6 i Teoremu 4.17 te Teoremu 4.22 zaključujemo da za svaki* $h_0 \in \mathbb{H}$ *postoji* $HPol_0$*-ekspanzija* $\boldsymbol{p} : (\mathbb{H}, h_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_n, x_n), p_{nn+1}, \mathbb{N})$ *od* $(\mathbb{H}, h_0)$ *takva da je* (X_n, x_n) *punktirani klin od* n*-kružnica, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Budući da su prostori* $\mathbb{H}$ *i* X_n*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, povezani putovima dovoljno je za njihove* 1*-dimenzionalne topološke grupe oblika pisati samo* $\check{\pi}_1^{top}(\mathbb{H})$ *i* $\check{\pi}_1^{top}(X_n)$*. Znamo da je* $\check{\pi}_1^{top}(\mathbb{H})$ *neprebrojiva (vidi [7] i [30]), dok je* $\check{\pi}_1^{top}(X_n)$ *prebrojiva, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, jer je po Korolaru 4.39* $\check{\pi}_1^{top}(X_n)$ *jednaka* $\pi_1(X_n)$ *uz diskretnu topologiju, a* $\pi_1(X_n)$ *je izomorfna slobodnoj grupi nad konačno mnogo generatora, dakle prebrojiva (vidi Teorem* 71.1. *i Poglavlje* 69 *u [24]). Stoga,* $\check{\pi}_1^{top}(\mathbb{H})$ *ne može biti izomorfna nijednoj podgrupi od* $\check{\pi}_1^{top}(X_n)$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, pa Teorem 4.48 povlači da* $\check{\pi}_1^{top}(\mathbb{H})$ *nije diskretna.*

Sada dajemo vrlo važan primjer (kao generalizaciju konstrukcije iz Primjera 4.7. u [26]) u kojem detaljno opisujemo klasu parova prostora takvih da za neku fiksnu dimenziju prostori u paru imaju iste grupe oblike, a različite topološke grupe oblika.

Primjer 4.50 *Odaberimo $k \in \mathbb{N}$. Neka je $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ familija povezanih kompaktnih poliedara (a onda i putovima povezanih) takva da gotovo svi članovi te familije imaju netrivijalnu k-dimenzionalnu homotopsku grupu (odabir baznih točaka nije potreban jer su svi članovi familije putovima povezani). Neka je $X = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ i $X_n = \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po Primjeru 4.5 imamo da je $\boldsymbol{p} = [(p_n)] : X \to (X_n, p_{nn+1}, \mathbb{N})$ inverzni limes od X u Top, a specijalno i u Cpt, gdje su $p_n : X \to X_n$, $p_{nn+1} : X_{n+1} \to X_n$ projekcije, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da su X i X_n kompaktni prostori (kompaktnost se čuva na produktu), a X_n je dodatno i poliedar (Teorem 5.2. u [20]), za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome je $\boldsymbol{p} : X \to (X_n, p_{nn+1}, \mathbb{N})$ i poliedarska rezolventa od X (Teorem 4.17), pa po Teoremu 4.22, odabirom $x_0 \in X$, te $x_n = p_n(x_0)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, imamo da je $\boldsymbol{p} = [(p_n)] : (X, x_0) \to ((X_n, x_n), p_{nn+1}, \mathbb{N})$ poliedarska rezolventa od (X, x_0), a $\underline{H_0}(\boldsymbol{p}) = [([p_n])] : (X, x_0) \to ((X_n, x_n), [p_{nn+1}], \mathbb{N})$ je $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0). Nadalje, budući da su prostori X i X_n, za svaki $n \in \mathbb{N}$, povezani putovima (povezanost putovima se čuva na produktu) to možemo za k-dimenzionalne homotopske grupe tih prostora u proizvoljnim baznim točkama pisati samo $\pi_k(X)$ i $\pi_k(X_n)$ (a također i $\check{\pi}_k(X)$, $\check{\pi}_k^{top}(X)$, $\check{\pi}_k(X_n)$, $\check{\pi}_k^{top}(X_n)$), te vrijedi $\pi_k(X) = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \pi_k(Y_n)$, $\pi_k(X_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \pi_k(Y_i)$ (vidi Poglavlje Topološki prostori i homotopija). Također, lako se pokaže da je homomorfizam*

$$\pi_k([p_{nn+1}]) : \pi_k(X_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \pi_k(Y_i) \to \pi_k(X_n) = \prod_{i=1}^{n} \pi_k(Y_i)$$

zapravo odgovarajuća projekcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$, (također neovisno o izboru baznih točaka u domeni i kodomeni, tj. o x_0). Stoga, po definiciji k-dimenzionalne grupe oblika, slijedi da je $\check{\pi}_k(X)$ jednaka $\lim\limits_{\leftarrow} \left(\prod\limits_{i=1}^{n} \pi_k(Y_i), p_{nn+1\#}, \mathbb{N} \right)$ u Grp, gdje je homomorfizam $p_{nn+1\#}$ zadan kao projekcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada, još jednom primjenom Primjera 4.5 na familiju $(\pi_k(Y_n) : n \in \mathbb{N})$ proizlazi *da je* $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(Y_n) = \lim\limits_{\leftarrow} \left(\prod\limits_{i=1}^{n} \pi_k(Y_i), p_{nn+1\#}, \mathbb{N} \right)$ *u Grp. Dakle*

$$\check{\pi}_k(X) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(Y_n).$$

Uočimo također da je $\check{\pi}_k(X) = \pi_k(X)$. *Nadalje, vrijedi da homotopska grupa (svake dimenzije) proizvoljnog kompaktnog poliedra ima prebrojivo mnogo elemenata (Vježba* 11.30. *u [29]), pa* $\check{\pi}_k(X_n) = \pi_k(X_n)$ *ima prebrojivo mnogo elemenata, za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *No, budući da beskonačno mnogo prostora u familiji* $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ *ima netrivijalnu* k*-dimenzionalnu homotopsku grupu, to očito* $\check{\pi}_k(X)$ *ima neprebrojivo mnogo elemenata. Sada zaključujemo da* $\check{\pi}_k^{top}(X)$ *ne može biti izomorfna nijednoj podgrupi od* $\check{\pi}_k^{top}(X_n)$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *pa Teorem 4.48 povlači da* $\check{\pi}_k^{top}(X)$ *nije diskretna. S druge strane, neka je dan povezani (a onda i putovima povezani) CW-kompleks* P *takav da je* P *jednak Eilenberg-Maclaneovom prostoru* $K\left(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(Y_n), k\right)$ *(Eilenberg-Maclaneov prostor* $K(G,i)$, *gdje je* G *grupa, a* $i \in \mathbb{N}$, *je prostor kojemu je* i*-ta homotopska grupa jednaka* G, *dok su sve druge trivijalne; za proizvoljnu grupu* G *i prozvoljni* $i \in \mathbb{N}$, *gdje dodatno moramo zahtijevati da je* G *Abelova za* $i \geq 2$, *postoji povezani CW kompleks* W *takav da je* $W = K(G,i)$ *i takav CW kompleks je jedinstven do na homotopski tip; detaljnije o prethodnim činjenicama se može pronaći u Poglavlju* 4.2 *u [9]). Dakle, vrijedi* $\pi_k(P) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(Y_n)$, *a prema Primjeru 4.33 također je i*

$$\check{\pi}_k(P) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \pi_k(Y_n).$$

Nadalje, po Korolaru 4.39 vrijedi da je $\check{\pi}_k^{top}(P)$ *diskretna. Zaključujemo da su* X *i* P *prostori koji imaju iste* k*-dimenzionalne grupe oblika (čak i iste* k*-dimenzionalne homotopske grupe), a različite* k*-dimenzionalne topološke grupe oblike. U Primjeru* 4.7. *u [26] promatran je samo specijalan slučaj kada je* $Y_n = S^k$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Ovo poglavlje završavamo još jednom zanimljivom tvrdnjom.

Teorem 4.51 *Neka je X_0 potprostor prostora X, $r : X \to X_0$ retrakcija i $j : X_0 \hookrightarrow X$ ulaganje. Tada j inducira smještenje prostora $\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)$ u $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$, za svaki $x_0 \in X_0$.*

Dokaz. Vidi Teorem 4.2. u [26]. ■

Napomena 4.52 *Smještenje iz prethodnog teorema je definirano kao $j_\# = \check{\pi}_k^{top}(S_0(\underline{H_0}(j_0)))$, gdje je $j_0 : (X_0, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ punktirano ulaganje. Vrijedi očito i da je $j_\#$ homomorfizam, pa zbog prethodne tvrdnje (uočimo injektivnost od $j_\#$) topološku grupu $\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)$ smijemo zamišljati kao podgrupu od $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$.*

Poglavlje 5

Topološke grupe gruboga oblika

U prvoj podcjelini ovog poglavlja upoznajemo se s kategorijom abstraktnoga gruboga oblika, s posebnim naglaskom na njezine specijalne slučajeve, kategoriju topološkog gruboga oblika i kategoriju topološkog punktiranog gruboga oblika. Potom, u podcjelini 5.2 ćemo definirati grupe gruboga oblika, algebarske invarijante teorije topološkog (punktiranog) gruboga oblika, te dati uvid u najvažnije poznate rezultate vezane uz njih. Naposljetku, u podcjelini *Topološke grupe gruboga oblika* ćemo topologizirati grupe gruboga oblika na prirodan način koristeći $\mathcal{T}^*_{ind}$ (vidi 3.4) i detaljno proučavati dobivenu strukturu, te na samom kraju pružiti zanimljive primjere.

5.1 Kategorija gruboga oblika

Teorija gruboga oblika je poopćenje teorije oblika. Vidjeli smo na koji način je kategorija *pro*-$\mathcal{D}$ ključna za kategoriju (abstraktnoga) oblika $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ (inače se za taj odnos još kaže da je *pro*-$\mathcal{D}$ realizirajuća kategorija za $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$). Konstrukcija kategorije (abstraktnoga) gruboga oblika je analogna konstrukciji kategorije (abstraktnoga) oblika, samo što je njezina realizirajuća kategorija *pro**-$\mathcal{D}$. Prvo će nam trebati odgovarajuća generalizacija pojma *pro*-$\mathcal{D}$ ekvivalencije.

Definicija 5.1 *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija, a $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ gusta i puna potkategorija. Neka su $\boldsymbol{p} : X \to \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{p}' : X \to \boldsymbol{X}'$ $\mathcal{D}$-eskpanzije od $X \in Ob(\mathcal{C})$ i $\boldsymbol{q} : Y \to \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{q}' : Y \to \boldsymbol{Y}'$ $\mathcal{D}$-eskpanzije od $Y \in Ob(\mathcal{C})$. Za morfizme $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ i $\boldsymbol{f}'^* : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ kažemo da su pro*-$\mathcal{D}$* ***ekvivalentni****, u oznaci $\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{f}'^*$, ako sljedeći dijagram komutira u pro*-$\mathcal{D}$*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \stackrel{\underline{J}(\boldsymbol{i})}{\to} & \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{f}^* \downarrow & & \downarrow \boldsymbol{f}'^* \\ \boldsymbol{Y} & \stackrel{\underline{J}(\boldsymbol{j})}{\to} & \boldsymbol{Y}' \end{array} \tag{5.1}$$

gdje su $\boldsymbol{i} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}'$ kanonski izomorfizmi među $\mathcal{D}$-ekspanzijama istog objekta, a $\underline{J}$: pro-$\mathcal{C} \to$ pro*-$\mathcal{C}$ funktor definiran u (3.1).

Za relaciju *pro**-$\mathcal{D}$ ekvivalencije vrijedi analogoni Napomena 4.27, 4.28 i 4.29, pa ćemo sada odgovarajuća svojstva navesti u skraćenoj formi, podrazumijevajući pretpostavke prethodne definicije. Dakle, vrijedi sljedeće:

- relacija *pro**-$\mathcal{D}$ ekvivalencije je relacija ekvivalencije (na odgovarajućoj klasi morfizama u *pro**-$\mathcal{D}$), a klasu ekvivalencije morfizma $\boldsymbol{f}^*$ označavamo oznakom $\langle \boldsymbol{f}^* \rangle$;
- ako su $\boldsymbol{g}^* : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ i $\boldsymbol{g}'^* : \boldsymbol{Y}' \to \boldsymbol{Z}'$ morfizmi takvi da je $\boldsymbol{g}^* \sim \boldsymbol{g}'^*$ onda je i $\boldsymbol{g}^* \circ \boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{g}'^* \circ \boldsymbol{f}'^*$ (dobra usklađenost sa kompozicijom);
- za svaki morfizam $\boldsymbol{f}^* : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ postoji jedinstveni $\boldsymbol{f}'^* : \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}'$ takav da je $\boldsymbol{f}^* \sim \boldsymbol{f}'^*$;
- ako su $\boldsymbol{f}^*_1, \boldsymbol{f}^*_2 : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ takvi da je $\boldsymbol{f}^*_1 \sim \boldsymbol{f}^*_2$ onda je $\boldsymbol{f}^*_1 = \boldsymbol{f}^*_2$.

Sada, za par $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, gdje je $\mathcal{D}$ puna i gusta potkategorija od $\mathcal{C}$, definiramo **kategoriju** (**abstraktnoga**) **gruboga oblika** (pridruženu paru $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$), u oznaci $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, na sljedeći način:

- objekti su svi objekti u $\mathcal{C}$,

- morfizmi $F^* : X \to Y$ su klase pro^*-$\mathcal{D}$ ekvivalencije $\langle \boldsymbol{f}^* \rangle$ morfizama $\boldsymbol{f}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, gdje su $\boldsymbol{p} : X \to \mathbf{X}$, $\boldsymbol{q} : Y \to \mathbf{Y}$ neke $\mathcal{D}$-ekspanzije od X i Y, redom,

- kompozicija morfizama $F^* = \langle \boldsymbol{f}^* \rangle : X \to Y$ i $G^* = \langle \boldsymbol{g}^* \rangle : Y \to Z$ je definirana kao $G^* \circ F^* := \langle \boldsymbol{g}^* \boldsymbol{f}^* \rangle$ (podrazumijevamo reprezentante $\boldsymbol{f}^*$ i $\boldsymbol{g}^*$ takve da je kodomena prvog usklađena s domenom drugog, a to je moguće i kompozicija ima smisla zbog prethodno nabrojenih svojstava pro^*-$\mathcal{D}$ ekvivalencije),

- identički morfizam $1_X^* : X \to X$ je $\langle \mathbf{1}_{\mathbf{X}}^* : \mathbf{X} \to \mathbf{X} \rangle$, gdje je $\boldsymbol{p} : X \to \mathbf{X}$ neka $\mathcal{D}$-ekspanzija od X.

Vrijedi da je $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X, Y)$ skup zbog sljedeće funkcije:

$$\sigma^* : pro^*\text{-}\mathcal{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X, Y), \tag{5.2}$$

$$\sigma^*(\boldsymbol{f}^*) = \langle \boldsymbol{f}^* \rangle \,,$$

za koju se, koristeći svojstva pro^*-$\mathcal{D}$ ekvivalencije, lako pokaže da je uistinu dobro definirana te da je bijekcija (slično kao i kod kategorije oblika).
Za objekte $X, Y \in Ob(\mathcal{C}) = Ob(Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})})$ reći ćemo da su **istoga gruboga oblika** ako postoji izomorfizam $F^* : X \to Y$ u $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, a F^* je izomorfizam u $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ ako i samo ako mu je reprezentant izomorfizam u pro^*-$\mathcal{D}$. Drugim riječima X i Y su istoga gruboga oblika ako i samo ako su im $\mathcal{D}$-ekspanzije izomorfne u pro^*-$\mathcal{D}$.
Veza između kategorija oblika i gruboga oblika je sljedeća. Prvo, prisjetimo se da je funktor $\underline{J} : pro\text{-}\mathcal{C} \to pro^*\text{-}\mathcal{C}$ (vidi (3.1)) vjeran funktor koji fiksira objekte, te zbog njega kategoriju pro-$\mathcal{C}$ smijemo smatrati potkategorijom od pro^*-$\mathcal{C}$. S druge strane, funktor $\underline{J}$ inducira dobro definirani funktor $J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} \to Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ na sljedeći način:

- $J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(X) = X$, za svaki $X \in Ob(Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})})$,

- $J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(\langle \boldsymbol{f} \rangle) = \langle \underline{J}(\boldsymbol{f}) \rangle$, za svaki morfizam oblika $\langle \boldsymbol{f} \rangle : X \to Y$,

za kojeg se također lako vidi da je vjeran i da fiksira objekte. Stoga, $Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ smijemo smatrati potkategorijom od $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$, drugim riječima teorija gruboga oblika je poopćenje teorije oblika, i to s obzirom na poopćenje između realizirajućih kategorija tih teorija.
Naposljetku definiramo **funktor gruboga oblika** $S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \mathcal{C} \to Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ kao sljedeću kompoziciju:

$$S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} : \mathcal{C} \overset{S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}}{\to} Sh_{(\mathcal{C},\mathcal{D})} \overset{J_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}}{\to} Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}. \tag{5.3}$$

Funktor gruboga oblika $S^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ (za razliku od funktora oblika $S_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$) ne inducira izomorfizam između $\mathcal{D}$ i pune potkategorije od $Sh^*_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}$ sužene na objekte iz $\mathcal{D}$ (vidi Primjer 7.4. u [17]), ali vrijedi da su objekti iz $\mathcal{D}$ izomorfni u $\mathcal{D}$ ako i samo ako su istoga gruboga oblika (Tvrdnja 3. u [17]), a jasno je onda da su obje prethodne klasifikacije objekata iz $\mathcal{D}$ ekvivalentne i sa klasifikacijom po obliku.

I u teoriji gruboga oblika najvažniji specijalni slučaj je kad za par $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ odaberemo $(HTop, HPol)$ ili odgovarajući punktirani te bipunktirani slučaj. Pripadne kategorije gruboga oblika $Sh^*_{(HTop,HPol)}$, $Sh^*_{(HTop_0,HPol_0)}$ i $Sh^*_{(HTop_{00},HPol_{00})}$ ćemo redom označavati sa Sh^*, Sh^*_0 i Sh^*_{00}, te nazivati **kategorijom topološkog** (**punktiranog** odnosno **bipunktiranog topološkog**) **gruboga oblika**, a pripadne funktore gruboga oblika ćemo redom kratko označavati sa S^*, S^*_0 i S^*_{00}, uz prirodno pridružena imena.

Jasno je da ako objekti imaju isti oblik, da onda imaju i isti grubi oblik, ali ono što teoriju gruboga oblika čini važnom i zanimljivom je postojanje primjera gdje objekti imaju isti grubi oblik, a različiti oblik. S jednim takvim primjerom ćemo završiti ovo poglavlje.

Primjer 5.2 *Neka su* $\mathbf{X} = (X_n, p_{nn+1}, \mathbb{N})$ *i* $\mathbf{Y} = (Y_n, q_{nn+1}, \mathbb{N})$ *inverzni nizovi u Cpt opisani na sljedeći način: za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *članovi* X_n *i* Y_n *prethodno spomenutih inverznih nizova su jednaki* ***torusu*** T *(torus je kompaktni poliedar jednak produktu dvije kružnice, dakle* $S^1 \times S^1$*), a vezni morfizmi* $p_{nn+1}, q_{nn+1} : T \to T$ *su proizvoljne neprekidne funkcije takve da su im* *homotopske klase opisane redom sljedećim cjelobrojnim matricama*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{2n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & -2^{2n} \end{bmatrix},$$

što ima smisla jer T možemo promatrati kao (topološku) Abelovu grupu $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ (vidi Primjer 2.33), čiji je skup automorfizama izomorfan sa skupom svih cjelobrojnih 2×2 matrica (vidi IV.1.2. u [6]), a svaka homotopska klasa $: T \to T$ djeluje kao homomorfizam (vidi komentar prije Primjera 7.2. u [17]). Tada (neprazni) prostori $\varprojlim \boldsymbol{X}$ i $\varprojlim \boldsymbol{Y}$ imaju isti (topološki) grubi oblik, a različiti (topološki) oblik (po primjeru 7.2. u [17], uočimo da su $HPol$-ekspanzije od $\varprojlim \boldsymbol{X}$ i $\varprojlim \boldsymbol{Y}$ jednake $\underline{H}(\boldsymbol{X})$, $\underline{H}(\boldsymbol{Y})$, redom).

5.2 Grupe gruboga oblika

Neka je (X, x_0) punktirani prostor i $k \in \mathbb{N}$. Skup

$$Sh_0^*((S^k, s_0), (X, x_0)) \tag{5.4}$$

zajedno sa binarnom operacijom

$$A^* + B^* = \langle \boldsymbol{a}^* \rangle + \langle \boldsymbol{b}^* \rangle = \langle \boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}^* \rangle = \langle [(a_\lambda^n)] + [(b_\lambda^n)] \rangle = \langle [(a_\lambda^n + b_\lambda^n)] \rangle\,, \tag{5.5}$$

gdje je $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0), a $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^* : (S^k, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ su predstavnici u $pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ od A^* i B^*, redom ($HPol_0$-ekspanzija od (S^k, s_0) je identiteta), nazivamo **k-dimenzionalna grupa gruboga oblika** punktiranog prostora (X, x_0) i označavamo sa $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$. Operacija (5.5) je uistinu dobro definirana i neovisna o izboru $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0) te o izboru predstavnika od $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$ u $inv^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$.

Teorem 5.3 *Za svaki punktirani prostor (X, x_0) i $k \in \mathbb{N}$, $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ je grupa. Štoviše, za $k \geq 2$, $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ je Abelova grupa.*

Dokaz. Vidi Teorem 1. u [10]. ■

Iz prethodnog dokaza, te koristeći oznake i pretpostavke prije teorema, može se vidjeti da je neutralni element u $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ jednak $\langle[(o_\lambda^n)]\rangle$, a inverz od $\langle[(a_\lambda^n)]\rangle$ je $\left\langle\left[(\overline{a_\lambda^n})\right]\right\rangle$, gdje je o_λ^n neutralni element u $\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, a $\overline{a_\lambda^n}$ inverz od a_λ^n u $\pi_k(X_\lambda, x_\lambda)$, za svaki $\lambda \in \Lambda$ i $n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, u [10] je definiran i funktor $\check{\pi}_k^* : Sh_0^* \to Grp$, kojeg nazivamo funktorom k**-dimenzionalnih grupa gruboga oblika**, a koji svakom punktiranom prostoru (X, x_0) pridruži $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ te svakom morfizmu $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0^* pridruži homomorfizam

$$\check{\pi}_k^*(F^*) : \check{\pi}_k^*(X, x_0) \to \check{\pi}_k^*(Y, y_0),$$

$$\check{\pi}_k^*(F^*)(A^*) = F^* \circ A^*.$$

Dakle, k-dimenzionalne grupe gruboga oblika su algebarske invarijante teorije gruboga oblika. Sljedeći teorem ih povezuje s grupama oblika, za koje ćemo vidjeti da ih smijemo smatrati podgrupama grupa gruboga oblika, što je bilo i za očekivati s obzirom na prethodne konstrukcije koje su u većini analogne onima u teoriji oblika. Prije iskaza teorema samo uvodimo oznaku J kao skraćenu oznaku funktora $J_{(HTop_0, HPol_0)}$.

Teorem 5.4 *Za svaki punktirani prostor (X, x_0) i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $j \equiv J|_{\check{\pi}_k(X,x_0)} : \check{\pi}_k(X, x_0) \to \check{\pi}_k^*(X, x_0)$ injektivni homomorfizam (još se kaže da je j algebarsko smještenje). Štoviše, za svaki morfizam $F : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0 sljedeći dijagram komutira u Grp*

$$\begin{array}{ccc} \check{\pi}_k(X, x_0) & \overset{j}{\hookrightarrow} & \check{\pi}_k^*(X, x_0) \\ {\scriptstyle \check{\pi}_k(F)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \check{\pi}_k^*(J(F))} \\ \check{\pi}_k(Y, y_0) & \overset{j}{\hookrightarrow} & \check{\pi}_k^*(Y, y_0) \end{array} .$$

Dokaz. Vidi Teorem 2. u [10]. ■

Homotopske grupe i grupe oblika se za fiksnu dimenziju poklapaju na klasi punktiranih prostora koji imaju homotopski tip nekog poliedra (vidi Primjer 4.33), ali na toj klasi su te grupe općenito različite od grupa gruboga oblika.

Primjer 5.5 *Neka je* (P, p_0) *punktirani poliedar (ili prostor koji ima homotopski tip nekog punktiranog poliedra) i* $k \in \mathbb{N}$*. Neka je* $G_n = \pi_k(P, p_0)$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada je*

$$\check{\pi}_k^*(P, p_0) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) / \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n\right),$$

dakle kvocijentna grupa produkta $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *po direktnoj sumi* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *(vidi Primjer* 1. *u [10], a za više o pojmovima direktna suma i kvocijentna grupa vidi [19]).*

Dakle, ako je primjerice (P, p_0) punktirani kompaktni poliedar kojem je za neku dimenziju homotopska grupa netrivijalna, tada je za tu dimenziju njegova grupa oblika prava podgrupa grupe gruboga oblika.

Sljedeći primjer prostora (a koji nema (grubi) oblik poliedra) posebno ukazuje na važnost grupa gruboga oblika u odnosu na grupe oblika (po Primjeru 2. u [10]).

Primjer 5.6 *Neka je* $\boldsymbol{X} = (X_i, p_{ii+1}, \mathbb{N})$ *inverzni niz u* Top*, takav da je za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *prostor* $X_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *(kružnica* S^1*), a neprekidna funkcija* $p_{ii+1} : X_{i+1} \to X_i$ *zadana sa* $p_{ii+1}(z) = z^2$*. Neka je* $\boldsymbol{p} = [(p_i)] : D \to \boldsymbol{X}$ *inverzni limes od* $\boldsymbol{X}$ *u* Top*. Uočimo da je* D *kontinuum (Teorem 4.8), a vrijedi i da* D *nema (grubi) oblik poliedra (vidi Primjer* $II.3.1.$ *u [23]). Nadalje, neka je odabrana točka* $d_0 \in D$ *i neka je* $x_i = p_i(d_0)$*, za svaki* $i \in \mathbb{N}$*. Po Teoremima 4.17 i 4.22 imamo da je* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_i, x_i), [p_{ii+1}], \mathbb{N})$ $HPol_0$*-ekspanzija od* (D, d_0)*. Poznato je da je* $\check{\pi}_1(D, d_0)$ *trivijalna grupa. No,* $\check{\pi}_1^*(D, d_0)$ *ima neprebrojivo mnogo elemenata. Prvo, budući da je* $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ *to svaki niz* $\alpha = (\alpha_k)$ *u* $\mathbb{Z}$ *smijemo smatrati nizom homotopskih klasa u* $\pi_1(S^1)$ *i obratno, a lako se pokaže i da tada* $\pi_1([p_{in}])$ *smijemo promatrati kao homomorfizam* : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *zadan kao množenje sa* 2^{n-i}*, za svaki* $i \leq n \in \mathbb{N}$*. Sada, vrijedi da svaki* (α_k) *u* $\mathbb{Z}$ *određuje morfizam* $(a_i^n) : (S^1, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ *u* inv^**-*$HTop_0$ *na sljedeći način:*

$$a_i^n = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{n-i}\alpha_n, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{array} \right\}. \tag{5.6}$$

Očito je za morfizme (a_i^n), $(a_i'^n)$ *zadane prethodnom relacijom preko nizova* (α_k), (α'_k) *redom, relacija* $(a_i^n) \sim (a_i'^n)$ *ekvivalentna sa* $\alpha_k = \alpha'_k$, *za gotovo sve* $k \in \mathbb{N}$. *Stoga, ako na skupu svih cjelobrojnih nizova definiramo relaciju ekvivalencije* $\sim$ *koja izjednačava nizove koji su na gotovo svim koordinatama isti, tada je sljedeća funkcija*

$$f : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/_{\sim} \to \check{\pi}_1^*(D, d_0), \tag{5.7}$$

$$f([(\alpha_k)]) = \langle [(a_i^n)] \rangle$$

(s obzirom na (5.6)) dobro definirana i injektivna (prisjetimo se i bijekcije σ^*, *vidi (5.2) i (5.4)). Dakle, budući da je* $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ *očito neprebrojiv, to je* $\check{\pi}_1^*(D, d_0)$ *neprebrojiva. Uočimo i da* f *nije surjektivna. Naime, neka je za svaki* $n \in \mathbb{N}$

$$b_1^n = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{n-2}, & n \geq 2 \\ 0, & n = 1 \end{array} \right\}$$

i neka su za svaki $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, *cijeli brojevi* b_i^n, $n \in \mathbb{N}$, *definirani rekurzivno na sljedeći način*

$$b_i^n = \left\{ \begin{array}{ll} b_{i-1}^{n-1}, & n \geq i \\ 0, & n \leq i-1 \end{array} \right\}.$$

Direktnom provjerom po Definiciji 3.4 izlazi da je $(b_i^n) \in inv^*\text{-}HTop_0((S^1, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$, *tj.* $\langle [(b_i^n)] \rangle \in \check{\pi}_1^*(D, d_0)$, *ali* $\langle [(b_i^n)] \rangle \notin f(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/_{\sim})$, *jer bi postojanje* $[(\alpha_k)] \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ *takvog da je* $f([(\alpha_k)]) = \langle [(b_i^n)] \rangle$ *povlačilo postojanje* $n' \in \mathbb{N}$ *takvog da za svaki* $n \geq n'$ *vrijedi*

$$2^{n-1}\alpha_n = 2^{n-2}$$

(gotova svuda "podudaranje" na svakoj pa tako i na prvoj koordinati), što je moguće samo ako je $\alpha_n = 2^{-1}$, *za svaki* $n \geq n'$, *a to je kontradikcija s činjenicom da je* (α_k) *cjelobrojni niz. Prostor* D *je u literaturi poznat kao* ***dijadski solenoid***, *a općenitije,* ***solenoidom*** $\Sigma_{(k_i)}$, *gdje je* (k_i) *niz brojeva u* $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, *nazivamo kontinuum dobiven kao* $\varprojlim(X_i, p_{ii+1}, \mathbb{N})$ *u* Top, *gdje je za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *prostor* $X_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *a neprekidna funkcija* $p_{ii+1} : X_{i+1} \to X_i$ *zadana sa* $p_{ii+1}(z) = z^{k_i}$. *Napomenimo da nijedan solenoid nema (grubi) oblik poliedra.*

Definicija 5.7 ***Put gruboga oblika*** *u prostoru* X *od* x_0 *do* x_1 *je svaki morfizam* $\Omega^* : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ *u kategoriji* Sh^*_{00}*, a za prostor* X *kažemo da je* ***povezan putovima gruboga oblika*** *ako za svake dvije točke* $x_0, x_1 \in X$ *postoji put gruboga oblika u* X *od* x_0 *do* x_1*.*

Teorem 5.8 *Povezanost putovima gruboga oblika je homotopska, a jasno onda i topološka invarijanta.*

Dokaz. Vidi Teorem 3.8. u [18]. ■

Teorem 5.9 *Razmotrimo sljedeća topološka svojstva:*
(a) *povezanost putovima;*
(b) *povezanost putovima oblika;*
(c) *povezanost putovima gruboga oblika;*
(d) *povezanost.*
Tada $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$*. Također, vrijedi da su prethodne implikacije striktne.*

Dokaz. Vidi Teorem 3.3. u [18] i [34]. ■
Primjer prostora koji je povezan putovima gruboga oblika, a nije povezan putovima oblika je solenoid (vidi Primjer 3.4. u [18]).

Teorem 5.10 *Kompaktni metrizabilni prostor* X *je povezan ako i samo ako je povezan putovima gruboga oblika.*

Dokaz. Vidi Teorem 3.5. u [18]. ■

Teorem 5.11 *Neka je* X *prostor koji je povezan putovima gruboga oblika i* $k \in \mathbb{N}$*. Tada, za svake dvije točke* $x_0, x_1 \in X$ *vrijedi da su grupe* $\check{\pi}^*_k(X, x_0)$ *i* $\check{\pi}^*_k(X, x_1)$ *izomorfne.*

Dokaz. Vidi Korolar 1. u [13]. ■
Stoga, grupe gruboga oblika onih prostora koji su povezani putovima gruboga oblika ćemo označavati samo sa $\check{\pi}^*_k(X)$. Iz prethodna 2 teorema direktno slijedi i sljedeći korolar.

Korolar 5.12 *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada k-dimenzionalna grupa gruboga oblika kontinuuma ne ovisi (do na izomorfizam) o izboru bazne točke.*

Prije nego krenemo na sljedeće poglavlje napomenimo da su grupe gruboga oblika eksplicitno izračunate za veliku klasu kompaktnih metričkih prostora (uključujući i solenoide), a zanimljiva formula se može pronaći u [14].

5.3 Topološke grupe gruboga oblika

U ovom odjeljku ćemo topologizirati grupe gruboga oblika i pokazati da se tako može dobiti bogatija struktura topološke grupe, za koju ćemo vidjeti i da će postati nova invarijanta u kategoriji Sh_0^*, a neke konstrukcije i rezultati će, kako ćemo vidjeti u nastavku, biti analogni onima kod topoloških grupa oblika.
Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ i proizvoljni punktirani prostor (X, x_0), te neka je $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0). Koristeći činjenicu da vrijedi sljedeća jednakost skupova

$$\check{\pi}_k^*(X, x_0) = Sh_0^*((S^k, s_0), (X, x_0))$$

(vidi (5.4)) možemo definirati sljedeću bijekciju, kao specijalni slučaj bijekcije (5.2):

$$\sigma_{\boldsymbol{p}}^* : pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)) \to \check{\pi}_k^*(X, x_0), \tag{5.8}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{p}}^*(\boldsymbol{a}^*) = \langle \boldsymbol{a}^* \rangle .$$

Sada, slično kao kod grupa oblika, uzimajući topologije $\mathcal{T}_{ind}^*$ ili $\mathcal{T}_{card}^*$ na $pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ (vidi podcjelinu 3.4) možemo na dva načina prirodno topologizirati $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ na način da zahtijevamo da $\sigma_{\boldsymbol{p}}^*$ bude homeomorfizam. Nadalje, ako u relaciji (3.13) odaberemo slike kanonskih izomorfizama među različitim $HPol_0$-ekspanzijama od (X, x_0) po funktoru $\underline{J}$, tada koristeći dokaz Propozicije 3.53 i dijagram (5.1) imamo da je za prethodno opisane topologizacije skupa $\check{\pi}_k^*(X, x_0)$ bolji izbor topologija $\mathcal{T}_{ind}^*$ jer onda takva konstrukcija ne ovisi o izboru $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0). Stoga, koristit ćemo $\mathcal{T}^*_{ind}$, a s obzirom na nju topologizirani skup (odnosno grupu) $\check{\pi}^*_k(X, x_0)$ označavat ćemo oznakom

$$\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0). \tag{5.9}$$

Napomena 5.13 *Koristeći neovisnost topologije na $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ o $HPol_0$-ekspanziji od (X, x_0), relaciju (5.8), te tvrdnju (ii) Propozicije 3.26 zaključujemo da je sljedeća familija*

$$\mathcal{W}^*_{\boldsymbol{p}} = \left\{ W_{\lambda_0}^{\langle [(a^n_\lambda)] \rangle} : [(a^n_\lambda)] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)), \lambda_0 \in \Lambda \right\},$$

gdje je

$$W_{\lambda_0}^{\langle [(a^n_\lambda)] \rangle} = \left\{ \begin{array}{c} \langle [(b^n_\lambda)] \rangle \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) : [(b^n_\lambda)] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)) \ i \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ takav \ da \ \forall n' \geq n_0 \ vrijedi \ b^{n'}_{\lambda_0} = a^{n'}_{\lambda_0} \end{array} \right\},$$

baza topologije na $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, za svaku $HPol_0$-eskpanziju $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ od (X, x_0). Također, vrijedi da je $\langle [(a^n_\lambda)] \rangle \in W_{\lambda_0}^{\langle [(a^n_\lambda)] \rangle}$, te da je $W_{\lambda_0}^{\langle [(a'^n_\lambda)] \rangle} = W_{\lambda_0}^{\langle [(a^n_\lambda)] \rangle}$, za svaki $\langle [(a'^n_\lambda)] \rangle \in W_{\lambda_0}^{\langle [(a^n_\lambda)] \rangle}$ (po Napomeni 3.25). Prethodno spomenute činjenice i oznake ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 5.14 *Neka je (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor. Tada je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ topološka grupa, za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Odaberimo proizvoljni $k \in \mathbb{N}$. Po Definiciji 2.30, za pokazati da je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ topološka grupa potrebno je pokazati neprekidnost grupovne operacije (tj. operacije zbrajanja)

$$f : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0), \ f(A^*, B^*) = A^* + B^*,$$

i operacije invertiranja

$$g : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0), \ g(A^*) = (A^*)^{-1}.$$

Prvo neka je odabrana neka $HPol_0$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ od (X, x_0). Zatim, neka je odabran proizvoljni element

$(A^*, B^*) \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Tada postoje (jedinstveni) $[(a_\lambda^n)], [(b_\lambda^n)] \in$ pro^*-$HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ takvi da je $A^* = \langle[(a_\lambda^n)]\rangle$, $B^* = \langle[(b_\lambda^n)]\rangle$. Potom, odaberimo proizvoljni otvoreni skup V oko $f(A^*, B^*) = \langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\rangle$ (vidi (5.5)) u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Koristeći Napomenu 5.13 s obzirom na $\boldsymbol{p}$ imamo da postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je

$$f(A^*, B^*) \in W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\rangle} \subseteq V. \tag{5.10}$$

Sada promotrimo skup $U = W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n)]\rangle} \times W_{\lambda_0}^{\langle[(b_\lambda^n)]\rangle} \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Po Napomeni 5.13 imamo da je U otvoren u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, te da je $(A^*, B^*) \in U$. Neka je $(C^*, D^*) \in U$. Tada postoje $[(c_\lambda^n)], [(d_\lambda^n)] \in$ pro^*-$HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ takvi da je $C^* = \langle[(c_\lambda^n)]\rangle$, $D^* = \langle[(d_\lambda^n)]\rangle$, te postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n' \geq n_1$, $n'' \geq n_2$ vrijede jednakosti $c_{\lambda_0}^{n'} = a_{\lambda_0}^{n'}$, $d_{\lambda_0}^{n''} = b_{\lambda_0}^{n''}$. Stoga, za svaki $n''' \geq \max\{n_1, n_2\}$ vrijedi

$$c_{\lambda_0}^{n'''} + d_{\lambda_0}^{n'''} = a_{\lambda_0}^{n'''} + b_{\lambda_0}^{n'''},$$

a to onda povlači $f(C^*, D^*) \in W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\rangle}$. Prema tome, iz proizvoljnosti od $(C^*, D^*) \in U$ i (5.10) slijedi

$$f(U) \subseteq V$$

i time je neprekidnost grupovne operacije pokazana. Sada, neka je dan neki $A'^* = \langle[(a_\lambda'^n)]\rangle \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i neka je V' neki otvoren skup oko $g(A'^*) = \left\langle\left[(\overline{a_\lambda'^n})\right]\right\rangle$ (vidi podcjelinu 5.2) u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Slično kao i u prvom dijelu dokaza, koristeći Napomenu 5.13 s obzirom na $\boldsymbol{p}$ imamo da postoji $\lambda_0' \in \Lambda$ takav da je

$$g(A'^*) \in W_{\lambda_0'}^{\langle[(\overline{a_\lambda'^n})]\rangle} \subseteq V'. \tag{5.11}$$

Nadalje, neka je $U' = W_{\lambda_0'}^{\langle[(a_\lambda'^n)]\rangle}$. Očito je U' otvoren skup oko A'^* u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Sada, za proizvoljni $B'^* = \langle[(b_\lambda'^n)]\rangle \in U'$ imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi jednakost $b_{\lambda_0'}'^{n'} = a_{\lambda_0'}'^{n'}$, a to onda povlači i da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$\overline{b_{\lambda_0'}'^{n'}} = \overline{a_{\lambda_0'}'^{n'}},$$

dakle $g(B'^*) \in W_{\lambda'_0}^{\left\langle [(\overline{a'^n_\lambda})] \right\rangle}$. Naposljetku, iz proizvoljnosti od $B'^* \in U'$ i (5.11) imamo da je

$$g(U') \subseteq V',$$

što povlači neprekidnost operacije invertiranja, i time je dokaz gotov. ■

Zbog prethodnog teorema odsada ćemo $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ prirodno nazivati **k-dimenzionalnom topološkom grupom gruboga oblika** punktiranog prostora (X, x_0). Pokažimo i da postoji odgovarajući prirodni funktor.

Propozicija 5.15 *Za svaki $k \in \mathbb{N}$, pravilo $\check{\pi}_k^{*top} : Sh_0^* \to TopGrp$ koje svakom punktiranom prostoru (X, x_0) pridruži $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, a svakom morfizmu $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0^* pridruži funkciju $\check{\pi}_k^{*top}(F^*) : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(Y, y_0)$ definiranu kao $\check{\pi}_k^{*top}(F^*)(A^*) = F^* \circ A^*$, je dobro definirani funktor.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Ako uzmemo u obzir činjenice o funktoru $\check{\pi}_k^* : Sh_0^* \to Grp$, onda nam je za pokazati prethodnu tvrdnju dovoljno pokazati da je funkcija $\check{\pi}_k^{*top}(F^*)$ neprekidna za svaki morfizam $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ u Sh_0^*. Dakle, neka je $F^* : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ proizvoljan morfizam u Sh_0^*, A^* proizvoljan element u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i neka su $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ i $\boldsymbol{q} : (Y, y_0) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0) = ((Y_\mu, y_\mu), q_{\mu\mu'}, M)$ neke $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0) i (Y, y_0), redom. Neka su $[(a_\lambda^n)] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ i $[(f, f_\mu^n)] \in pro^*\text{-}HPol_0((\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0), (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y}_0))$ takvi da je $A^* = \langle [(a_\lambda^n)] \rangle$ i $F^* = \left\langle [(f, f_\mu^n)] \right\rangle$. Neka je V proizvoljni otvoren skup oko $\check{\pi}_k^{*top}(F^*)(A^*) = F^* \circ A^* = \left\langle [(f_\mu^n a_{f(\mu)}^n)] \right\rangle$ u $\check{\pi}_k^{*top}(Y, y_0)$. Tada, koristeći Napomenu 5.13 s obzirom na $\boldsymbol{q}$ zaključujemo da postoji $\mu_0 \in M$ takav da je

$$\check{\pi}_k^{*top}(F^*)(A^*) \in W_{\mu_0}^{\left\langle [(f_\mu^n a_{f(\mu)}^n)] \right\rangle} \subseteq V. \tag{5.12}$$

Sada, neka je $\lambda_0 = f(\mu_0)$ i neka je $U = W_{\lambda_0}^{\left\langle [(a_\lambda^n)] \right\rangle}$ (jasno s obzirom na $\boldsymbol{p}$). Očito je U otvoren skup oko A^* u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Nadalje, ako uzmemo proizvoljni $B^* = \langle [(b_\lambda^n)] \rangle \in U$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi jednakost $b_{\lambda_0}^{n'} = a_{\lambda_0}^{n'}$, a to onda povlači i da za svaki $n' \geq n_0$

vrijedi

$$f_{\mu_0}^{n'} b_{f(\mu_0)}^{n'} = f_{\mu_0}^{n'} a_{f(\mu_0)}^{n'},$$

stoga $\check{\pi}_k^{*top}(F^*)(B^*) \in W_{\mu_0}^{\left\langle [(f_\mu^n a_{f(\mu)}^n)] \right\rangle}$. Prema tome, iz proizvoljnosti od B^* $\in U$ i (5.12) slijedi

$$\check{\pi}_k^{*top}(F^*)(U) \subseteq V$$

i time je dokaz gotov. ■

Dakle, topološka grupa gruboga oblika je uistinu invarijanta teorije (punktiranog topološkog) gruboga oblika. Funktor $\check{\pi}_k^{*top} : Sh_0^* \to TopGrp$ ćemo zvati **funktorom k-dimenzionalnih topoloških grupa gruboga oblika**. Analogno kao i kod $\check{\pi}_k^{top}$, možemo uočiti da je kompozicija funktora $\check{\pi}_k^{*top}$ i zaboravljivog funktora : $TopGrp \to Grp$ jednaka funktoru $\check{\pi}_k^*$.

5.3.1 Osnovna svojstva i odnos s topološkim grupama oblika

Za početak navedimo nekoliko tvrdnji o svojstvima topoloških grupa gruboga oblika koja su direktno povezana s njihovom topologizacijom (vidi bijekciju (5.8)) te rezultatima o topologiji $\mathcal{T}_{ind}^*$ iz podcjeline 3.4, a analogna onima za topološke grupe oblika.

Teorem 5.16 *Neka je dan proizvoljni punktirani prostor (X, x_0) i $k \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *je potpuno regularna topološka grupa;*

(ii) $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *je potpuno nepovezan prostor;*

(iii) $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *je prostor koji ima malu induktivnu dimenziju* 0.

Dokaz. Tvrdnja (i) slijedi iz Korolara 3.38 i Teorema 5.14, (ii) slijedi iz Korolara 3.35, a (iii) slijedi iz Korolara 3.33. ■

Teorem 5.17 *Neka je X stabilan prostor i $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ diskretna, za svaki $x_0 \in X$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Koristeći pretpostavku o stabilnosti prostora X i Napomenu 4.31 odaberemo proizvoljnu rudimentarnu $HPol_0$-ekspanziju od (X, x_0), pa tvrdnja slijedi direktno iz Propozicije 3.39. ■

Teorem 5.18 *Neka je (X, x_0) punktirani prostor koji dopušta nizovnu $HPol_0$-ekspanziju i neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ (ultra)metrizabilna topološka grupa.*

Dokaz. Dokaz tvrdnje slijedi iz Korolara 3.44 i Teorema 5.14. ■
Budući da po Teoremu 4.24 vrijedi da svaki punktirani kompaktni metrički prostor dopušta nizovnu $HPol_0$-ekspanziju, to odmah imamo sljedeći korolar.

Korolar 5.19 *Topološka grupa gruboga oblika svakog kompaktnog metričkog prostora i svake dimenzije je (ultra)metrizabilna.*

Konkretno, ako za punktirani prostor (X, x_0) koji dopušta nizovnu $HPol_0$-ekspanziju odaberemo neku njegovu takvu $HPol_0$-ekspanziju $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_i, x_i), p_{ii+1}, \mathbb{N})$, tada je jedna potpuna ultrametrika d^* na $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ (po specijalnom slučaju ultrametrike d^* iz (3.6)) eksplicitno zadana kao:

$$d^* : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \mathbb{R}_0^+, \tag{5.13}$$

$$d^*\left(\langle[(a_i^n)]\rangle, \langle[(b_i^n)]\rangle\right) = \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{m+1} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall n' \geq n_0 \\ a_m^{n'} = b_m^{n'},\ m \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \\ 1, \text{ inače} \end{array} \right\}.$$

Napomena 5.20 *Slično kao i kod topoloških grupa oblika, topološka grupa gruboga oblika metrizirana metrikom iz relacije (5.13) je u radu [16] označena oznakom $\check{\pi}_k^{*d}(X, x_0)$. Također, u tom radu je i baš preko spomenute metrike dokazano da je $\check{\pi}_k^{*d}(X, x_0)$ topološka grupa (Teorem 3.2.), te je uveden funktor $\check{\pi}_k^{*d} : Sh_{0_{\mathbb{N}}}^* \to TopGrp_{M_c}$, gdje je $Sh_{0_{\mathbb{N}}}^*$ puna potkategorija kategorije Sh_0^* restringirana na sve punktirane prostore koji dopuštaju nizovnu $HPol_0$-ekspanziju (Propozicija 4.1.), a koji je zapravo samo specijalni slučaj funktora $\check{\pi}_k^{*top}$ uz odgovarajuću restrikciju domene i kodomene.*

Sada slijedi jedan nužan uvjet da topološka grupa gruboga oblika bude diskretna, koji je, kao i sami dokaz koji ćemo pružiti, analogon Teoremu 4.48.

Teorem 5.21 *Neka je* (X, x_0) *punktirani prostor i* $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *neka* $HPol_0$*-ekspanzija od* (X, x_0) *te* $k \in \mathbb{N}$. *Ako je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *diskretna onda postoji* $\lambda_0 \in \Lambda$ *takav da je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *izomorfna nekoj podgrupi od* $\check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$.

Dokaz. Neka je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ diskretna. Tada je $\{O^*\}$ otvoren skup u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, gdje je $O^* = \langle [(o_\lambda^n)] \rangle$ neutralni element u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ (vidi podcjelinu 5.2). Stoga, po Napomeni 5.13 (s obzirom na $\boldsymbol{p}$) postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je $W_{\lambda_0}^{\langle [(o_\lambda^n)] \rangle} = \{O^*\}$. Sada neka je

$$p_{\lambda_0 \#} := \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda_0})) : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0}).$$

Uočimo da je $p_{\lambda_0 \#}$ neprekidni homomorfizam. Pokažimo da je $p_{\lambda_0 \#}$ injektivan. Neka je $A^* = \langle [(a_\lambda^n)] \rangle \in \ker p_{\lambda_0 \#}$. Dakle, vrijedi

$$\check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda_0}))(A^*) = S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ A^* = \left\langle \left[(o_{\lambda_0}^n)\right] \right\rangle. \tag{5.14}$$

Iz sljedećeg očito komutitativnog dijagrama

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \overset{[(p_{\lambda_0})]}{\longrightarrow} & (X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0}) \\ \boldsymbol{p}\downarrow & & \downarrow \boldsymbol{1}_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})} \\ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) & \overset{\left[\left(1_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})}\right)\right]}{\longrightarrow} & (X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0}) \end{array}$$

u *pro-*$HTop_0$ i po definiciji funktora S_0^* (vidi (5.3)) slijedi da je

$$S_0^*(p_{\lambda_0}) = \left\langle \left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})} = 1_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})} \right) \right] \right\rangle. \tag{5.15}$$

Stoga, vrijedi

$$\begin{aligned} S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ A^* &= \left\langle \left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})} \right) \right] \right\rangle \circ \langle [(a_\lambda^n)] \rangle \qquad (5.16) \\ &= \left\langle \left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})} \right) \right] \circ [(a_\lambda^n)] \right\rangle \\ &= \left\langle \left[(a_{\lambda_0}^n) \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Sada, relacije (5.14) i (5.16) povlače da je $\left\langle\left[(a^n_{\lambda_0})\right]\right\rangle = \left\langle\left[(o^n_{\lambda_0})\right]\right\rangle$, odnosno $\left[(a^n_{\lambda_0})\right] = \left[(o^n_{\lambda_0})\right]$, pa je $(a^n_{\lambda_0}) \sim (o^n_{\lambda_0})$, a to znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$a^{n'}_{\lambda_0} = o^{n'}_{\lambda_0}.$$

No, to zapravo znači da je $A^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle\left[(o^n_{\lambda})\right]\right\rangle} = \{O^*\}$, drugim riječima $A^* = O^*$. Dakle, jezgra homomorfizma $p_{\lambda_{0\#}}$ je trivijalna, pa je $p_{\lambda_{0\#}}$ uistinu injektivan. Nadalje, budući da je X_{λ_0} stabilan prostor, to je po Teoremu 5.17 $\check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$, odnosno kodomena od $p_{\lambda_{0\#}}$, diskretna. Prema tome, $p_{\lambda_{0\#}}$ uz restrikciju kodomene na sliku je homeomorfizam (a jasno i izomorfizam), i time je dokaz gotov. ∎

Teorem 5.22 *Neka je X_0 potprostor prostora X, $r : X \to X_0$ retrakcija i $j : X_0 \hookrightarrow X$ ulaganje te $k \in \mathbb{N}$. Tada j inducira smještenje prostora $\check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)$ u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, koje je ujedno i injektivni homomorfizam grupa, za svaki $x_0 \in X_0$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X_0$. Zatim, neka su $r_0 : (X, x_0) \to (X_0, x_0)$ i $j_0 : (X_0, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ neprekidne punktirane funkcije inducirane sa r i j, redom (uočimo da se x_0 uistinu "čuva" kod obje punktirane funkcije jer je $r|_{X_0}$ identiteta, a j ulaganje). Neka su $r^*_\#$ i $j^*_\#$ definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} r^*_\# &:= \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(H_0(r_0))) : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0), \\ j^*_\# &:= \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(H_0(j_0))) : \check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0), \end{aligned}$$

i neka je $G = \operatorname{Im}(j^*_\#)$. Očito su $r^*_\#|_G$ i $j^*_\#$ neprekidni homomorfizmi. Ako pokažemo da su $r^*_\#|_G$ i $j^*_\#$ međusobni inverzi tada će dokaz biti gotov. Neka je $A^* \in \check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)$. Tada vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} (r^*_\#|_G \circ j^*_\#)(A^*) &= (r^*_\# \circ j^*_\#)(A^*) = (S_0^*(H_0(r_0)) \circ S_0^*\left(H_0\left(j_0\right)\right)) \circ A^* \qquad (5.17) \\ &= (S_0^*(H_0(r_0 \circ j_0))) \circ A^* = 1^*_{(X_0, x_0)} \circ A^* = A^*, \end{aligned}$$

u kojima smo koristili funktorijalna svojstva navedenih funktora i činjenicu da je $r_0 \circ j_0$ identiteta na (X_0, x_0) u Top_0 (jer je r retrakcija pa je $r \circ j$

identiteta na X u Top). Uočimo i da je $j^*_\#$ injektivna zbog (5.17). Sada, neka je $B^* \in G$. Tada postoji jedinstveni $B^*_0 \in \check{\pi}^{*top}_k(X_0, x_0)$ takav da je $B^* = j^*_\#(B^*_0)$. Stoga vrijedi

$$(j^*_\# \circ r^*_\#|_G)(B^*) = (j^*_\# \circ r^*_\#|_G)(j^*_\#(B^*_0)) = j^*_\#((r^*_\#|_G \circ j^*_\#)(B^*_0)) = j^*_\#(B^*_0) = B^*, \tag{5.18}$$

gdje smo u trećoj jednakosti koristili (5.17). Relacije (5.17) i (5.18) povlače da su $r^*_\#|_G$ i $j^*_\#$ uistinu međusobni inverzi. ■

Korolar 5.23 *Neka je X_0 retrakt prostora X te $k \in \mathbb{N}$. Tada $\check{\pi}^{*top}_k(X_0, x_0)$ smijemo smatrati podgrupom od $\check{\pi}^{*top}_k(X, x_0)$, za svaki $x_0 \in X_0$.*

Gotovi svi rezultati vezani za topološke grupe oblika su poopćeni i na topološke grupe gruboga oblika, a kako ćemo u idućoj tvrdnji vidjeti i one same su povezane pojačavanjem već poznate algebarske veze. Prisjetimo se da smo sa J skraćeno označili funktor $J_{(HTop_0, HPol_0)}$.

Teorem 5.24 *Neka je (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor te $k \in \mathbb{N}$. Tada je $j \equiv J|_{\check{\pi}^{top}_k(X,x_0)} : \check{\pi}^{top}_k(X, x_0) \to \check{\pi}^{*top}_k(X, x_0)$ injektivni homomorfizam grupa i smještenje sa zatvorenom slikom prostora $\check{\pi}^{top}_k(X, x_0)$ u prostor $\check{\pi}^{*top}_k(X, x_0)$.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz Teorema 5.4, te kombinacijom prve tvrdnje Propozicije 3.46 (za domenu (S^k, s_0) i kodomenu proizvoljnu fiksiranu $HPol_0$-ekspanziju od (X, x_0)) i načina topologizacije od $\check{\pi}^{top}_k(X, x_0)$ i $\check{\pi}^{*top}_k(X, x_0)$ preko odgovarajućih bijekcija u (4.11) i (5.8), redom (u oba slučaja također s obzirom na istu spomenutu $HPol_0$-ekspanziju od (X, x_0)). ■

Dakle, topološku grupu oblika smijemo smatrati podgrupom, štoviše zatvorenom podgrupom topološke grupe gruboga oblika (za neku fiksiranu dimenziju).

Pojmovi normalne podgrupe i kvocijentne grupe su opće poznati. S obzirom na podgrupe topološke grupe gruboga oblika koje se prirodno pojavljuju po Korolaru 5.23 i Teoremu 5.24 zanimljivo je promatrati kvocijentne grupe topološke grupe gruboga oblika po tim ili nekim drugim podgrupama (naravno uz dodatnu pretpostavku da su te podgrupe normalne) i ispitati kada je dobivena struktura, prirodno opskrbljena kvocijentnom topologijom, također topološka grupa. Prvo uvedimo neke pomoćne oznake. Neka je $(G,+)$ grupa, te neka je H neki podskup od G. Tada, za svaki $M \subseteq G$ definiramo skup

$$MH = \{m + h : m \in M, h \in H\}.$$

Također, za svaki $a \in G$ ćemo $\{a\}H$ označavati kratko sa aH.

Napomena 5.25 *Iako se sa + obično označava grupovna operacija u grupama koje su Abelove ovdje to ne mora biti slučaj, a koristimo tu oznaku jer ćemo se u nastavku vratiti na grupe oblika i gruboga oblika gdje se grupovna operacija obično tako uvijek označava, neovisno o komutativnosti koja kod dimenzije* 1 *ne mora biti ispunjena.*

Nadalje, za topološku grupu G i neku njezinu normalnu podgrupu N sa G/N ćemo označavati kvocijentnu grupu grupe G po N opskrbljenu kvocijentnom topologijom s obzirom na kanonsku surjekciju

$$q : G \to G/N,\; q(a) = aN. \tag{5.19}$$

Lema 5.26 *Neka je G topološka grupa i N normalna podgrupa od G. Tada je kanonska surjekcija (5.19) otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je U otvoren u G. Pokažimo da je $q(U)$ otvoren u G/N. Budući da je q kvocijentno preslikavanje dovoljno je pokazati da je skup

$$q^{-1}(q(U)) = UN \tag{5.20}$$

otvoren u G. No, to slijedi direktno iz Propozicije 1.4.1. u [2]. ■

Sada se vraćamo na topološke grupe gruboga oblika i pokazujemo zanimljivu tvrdnju.

Teorem 5.27 *Neka je (X, x_0) proizvoljni punktirani prostor, $k \in \mathbb{N}$ te N proizvoljna normalna podgrupa od $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Tada je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$ topološka grupa.*

Napomena 5.28 *Prilikom odabira proizvoljnog elementa θ grupe $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$ odmah ćemo odabrati neki $A^* \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ takav da je $\theta = A^*N$ i pisati samo A^*N.*

Dokaz. Budući da je $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$ dobro definirana grupa, to je po Definiciji 2.30 dovoljno pokazati neprekidnost grupovne operacije

$$f : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N,$$

$$f(A^*N, B^*N) = A^*N + B^*N = (A^* + B^*)N,$$

i operacije invertiranja

$$g : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N,$$

$$g(A^*N) = (A^*N)^{-1} = (A^*)^{-1}N.$$

Sa q označimo specijalni slučaj kanonske surjekcije (5.19), dakle

$$q : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N,\ q(A^*) = A^*N.$$

Sada, neka je odabrana neka $HPol_0$-ekspanzija $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ od (X, x_0), te neka je odabran proizvoljni element $(A^*N, B^*N) \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$. Tada postoje (jedinstveni) $[(a_\lambda^n)], [(b_\lambda^n)] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ takvi da je $A^* = \langle[(a_\lambda^n)]\rangle$, $B^* = \langle[(b_\lambda^n)]\rangle$. Potom, odaberimo proizvoljni otvoreni skup V oko $f(A^*N, B^*N) = (A^* + B^*)N$ u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$. Budući da je q neprekidna (kvocijentno preslikavanje), to je $q^{-1}(V)$ otvoren u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i sadrži $A^* + B^*$. Sada, po Napomeni 5.13 s obzirom na $\boldsymbol{p}$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je

$$(A^* + B^*) \in W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\rangle} \subseteq q^{-1}(V). \tag{5.21}$$

Sada promotrimo skup

$$U = q\left(W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n)]\rangle}\right) \times q\left(W_{\lambda_0}^{\langle[(b_\lambda^n)]\rangle}\right) \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N.$$

Po Napomeni 5.13 i Lemi 5.26 slijedi da je U otvoren u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N \times \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$, te da je $(A^*N, B^*N) \in U$. Pokažimo da je $f(U) \subseteq V$. Neka je $(C^*N, D^*N) \in U$. To znači da je $C^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n)]\right\rangle}N$, $D^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(b_\lambda^n)]\right\rangle}N$ (što se lako vidi koristeći 5.20), tj. postoje $A'^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n)]\right\rangle}$, $B'^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(b_\lambda^n)]\right\rangle}$, N_1^*, $N_2^* \in N$ takvi da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} C^* &= A'^* + N_1^*\,, \\ D^* &= B'^* + N_2^*. \end{aligned}$$

Promotrimo jednakost

$$C^* + D^* = A'^* + N_1^* + B'^* + N_2^*. \tag{5.22}$$

Budući da je N normalna podgrupa od $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, to postoji $N_3^* \in N$ takav da je

$$N_1^* + B'^* = B'^* + N_3^*. \tag{5.23}$$

Neka je $N^* = N_3^* + N_2^*$. Uočimo da je $N^* \in N$. Stoga, koristeći (5.22) i (5.23) dobivamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} C^* + D^* &= A'^* + N_1^* + B'^* + N_2^* \\ &= A'^* + B'^* + N_3^* + N_2^* \\ &= A'^* + B'^* + N^*. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Po prvom dijelu dokaza Teorema 5.14 i činjenici da je $A'^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n)]\right\rangle}$, $B'^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(b_\lambda^n)]\right\rangle}$ slijedi da je

$$A'^* + B'^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\right\rangle}.$$

Iz prethodne relacije i relacije (5.24) zaključujemo da je

$$C^* + D^* \in W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\right\rangle}N = q^{-1}\left(q\left(W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\right\rangle}\right)\right),$$

a onda je

$$q\,(C^* + D^*) = (C^* + D^*)N \in q\left(q^{-1}\left(q\left(W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\right\rangle}\right)\right)\right) = q\left(W_{\lambda_0}^{\left\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\right\rangle}\right), \tag{5.25}$$

gdje posljednja jednakost vrijedi jer je q surjekcija (iako nam to neće biti ključno, dovoljno će nam biti što na tom mjestu uvijek vrijedi relacija $\subseteq$). Sada, budući da je

$$f(C^*N, D^*N) = (C^* + D^*)N$$

to po relacijama (5.21) i (5.25) slijedi da je

$$f(C^*N, D^*N) \in q\left(W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n + b_\lambda^n)]\rangle}\right) \subseteq V.$$

Prema tome, iz prethodne relacije i iz proizvoljnosti $(C^*N, D^*N) \in U$ slijedi

$$f(U) \subseteq V.$$

Time je neprekidnost grupovne operacije f pokazana. Na sličan način ćemo pokazati i neprekidnost funkcije g. Prvo, neka je dan neki $A^*N \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$, neka je A^* predstavljen sa $[(a_\lambda^n)] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$ i neka je V neki otvoren skup oko $g(A^*) = (A^*)^{-1}N$ u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$. Podsjetimo se da je $(A^*)^{-1} = \langle[(\overline{a_\lambda^n})]\rangle$ (vidi podcjelinu 5.2). Slično kao i u prvom dijelu dokaza, koristeći Napomenu 5.13 s obzirom na $\boldsymbol{p}$ zaključujemo da postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je

$$(A^*)^{-1} \in W_{\lambda_0}^{\langle[(\overline{a_\lambda^n})]\rangle} \subseteq q^{-1}(V). \tag{5.26}$$

Nadalje, neka je $U = q\left(W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n)]\rangle}\right)$. Iz Napomene 5.13 i Leme 5.26 slijedi da je U otvoren skup oko A^*N u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/N$. Pokažimo da je $g(U) \subseteq V$ i time će neprekidnost od g biti pokazana. Odaberimo proizvoljni $B^*N \in U$. Slično kao u prvom dijelu dokaza, to znači da postoje $A'^* \in W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n)]\rangle}$ i $N_1^* \in N$ takvi da je

$$B^* = A'^* + N_1^*,$$

a onda je

$$(B^*)^{-1} = (N_1^*)^{-1} + (A'^*)^{-1}. \tag{5.27}$$

Iz normalnosti podgrupe N slijedi da postoji $N^* \in N$ takav da je

$$(N_1^*)^{-1} + (A'^*)^{-1} = (A'^*)^{-1} + N^*.$$

Sada, koristeći prethodnu relaciju i relaciju (5.27) dobivamo sljedeću relaciju

$$
\begin{aligned}
(B^*)^{-1} &= (N_1^*)^{-1} + (A'^*)^{-1} \\
&= (A'^*)^{-1} + N^*.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Po drugom dijelu dokaza Teorema 5.14 i činjenici da je $A'^* \in W_{\lambda_0}^{\langle [(a_\lambda^n)] \rangle}$ slijedi da je

$$
(A'^*)^{-1} \in W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle}.
$$

Prema tome, iz prethodne relacije i relacije (5.28) zaključujemo da je

$$
(B^*)^{-1} \in W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle} N = q^{-1}\left(q\left(W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle}\right)\right),
$$

pa je

$$
q\left((B^*)^{-1}\right) = (B^*)^{-1} N \in q\left(q^{-1}\left(q\left(W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle}\right)\right)\right) = q\left(W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle}\right).
\tag{5.29}
$$

Sada iz jednakosti

$$
g\left(B^* N\right) = (B^*)^{-1} N
$$

te iz relacija (5.26) i (5.29) slijedi da je

$$
g(B^* N) \in q\left(W_{\lambda_0}^{\langle [(\overline{a_\lambda^n})] \rangle}\right) \subseteq V,
$$

a onda iz proizvoljnosti elementa $B^* N \in U$ slijedi

$$
g(U) \subseteq V
$$

i time je dokaz gotov. ■

Napomena 5.29 *Prethodni teorem se može na analogan način dokazati u odgovarajućoj formi i za slučaj topoloških grupa oblika.*

Stoga, koristeći prethodni teorem i prethodnu napomenu, te Korolar 5.23 i Teorem 5.24 imamo sljedeće korolare.

Korolar 5.30 *Neka je X_0 retrakt prostora X, $x_0 \in X_0$ te $k \in \mathbb{N}$.*

(i) Ako je podgrupa $\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)$ *od* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *normalna, onda je* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)/\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)$ *topološka grupa.*

(ii) Ako je podgrupa $\check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)$ *od* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *normalna, onda je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/\check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)$ *topološka grupa.*

Napomena 5.31 *Preciznije bi bilo da smo umjesto* $\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)$, $\check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)$ *redom pisali* $j_\#\left(\check{\pi}_k^{top}(X_0, x_0)\right)$ *i* $j_\#^*\left(\check{\pi}_k^{*top}(X_0, x_0)\right)$ *(vidi Napomenu 4.52 i Teorem 5.22), ali smo to izostavili smatrajući izomorfne objekte istima. Analogno ćemo u sljedećem korolaru identificirati* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *i* $j\left(\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)\right)$.

Korolar 5.32 *Neka je* (X, x_0) *proizvoljni punktirani prostor te* $k \in \mathbb{N}$. *Ako je podgrupa* $\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *od* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *normalna, onda je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)/\check{\pi}_k^{top}(X, x_0)$ *topološka grupa.*

Uočimo da se za $k \geq 2$ pretpostavka da odgovarajuće podgrupe u prethodna dva korolara budu normalne ne treba navoditi jer su tada sve spomenute grupe Abelove, a poznato je da je svaka podgrupa Abelove grupe ujedno i normalna. Nadalje, općenito normalnost podgrupe ne mora uvijek biti zadovoljena. Primjerice, grupa oblika klina od dvije kružnice je slobodna grupa s dva generatora (vidi Primjer 4.49), a grupa oblika kružnice (kao retrakta klina od dvije kružnice), koja je jednaka slobodnoj grupi s jednim generatorom, nije očito njezina normalna podgrupa. Slično možemo konstruirati protuprimjere i u ostalim slučajevima.

5.3.2 Ovisnost o promjeni bazne točke

U Definiciji 5.7 uveli smo pojmove puta gruboga oblika te povezanosti putovima gruboga oblika, a u Teoremu 5.11 vidjeli da grupe gruboga oblika prostora povezanih putovima gruboga oblika ne ovise (do na izomorfizam) o izboru bazne točke. Takvu neovisnost želimo sada pokazati i za topološke grupe gruboga oblika.

Teorem 5.33 *Neka je X prostor i x_0, x_1 dvije točke u X koje su povezane putom gruboga oblika te $k \in \mathbb{N}$. Tada su $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_1)$ izomorfne topološke grupe.*

Dokaz. Neka je $\Omega^* : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ put gruboga oblika od x_0 do x_1 u X. Odaberimo proizvoljnu $HPol_{00}$-ekspanziju $\boldsymbol{p} : (X, x_0, x_1) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) = ((X_\lambda, x_\lambda, x'_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ od (X, x_0, x_1) i neka $[(\omega_\lambda^n)] : (I, 0, 1) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$ reprezentira Ω^* u pro^*-$HPol_{00}((I, 0, 1), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1))$ (za poliedar $(I, 0, 1)$ odabiremo bipunktiranu "identitetu" kao $HPol_{00}$-eskpanziju). Neka je dana funkcija

$$i_{\Omega^*} : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_1), \tag{5.30}$$

$$i_{\Omega^*}\left(A^* = \langle[(a_\lambda^n)]\rangle\right) = \left\langle \left[\left(i_{\omega_\lambda^n}(a_\lambda^n) \right) \right] \right\rangle,$$

gdje za $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0) i (X, x_1) biramo slike od $\boldsymbol{p}$ po funktoru : pro-$HPol_{00} \to pro$-$HPol_0$ prirodno induciranom od zaboravljivog funktora : $HPol_{00} \to HPol_0$ koji zaboravlja točke na drugoj, odnosno prvoj koordinati, redom (analogno kao u dokazu Propozicije 4.43), a $i_{\omega_\lambda^n} : \pi_k(X_\lambda, x_\lambda) \to \pi_k(X_\lambda, x'_\lambda)$ je izomorfizam homotopskih grupa induciran sa ω_λ^n, za svaki $\lambda \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$. Po Teoremu 1. u [13] vrijedi da je funkcija i_Ω^* uistinu dobro definirana, da je izomorfizam grupa, te da joj je inverz zadan sa

$$i_{\Omega^*}^{-1} : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_1) \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0),$$

$$i_{\Omega^*}^{-1}\left(B^* = \langle[(b_\lambda^n)]\rangle\right) = \left\langle \left[\left((i_{\omega_\lambda^n})^{-1}(b_\lambda^n) \right) \right] \right\rangle.$$

Prema tome, dovoljno je pokazati da su i_{Ω^*} i $i_{\Omega^*}^{-1}$ neprekidne funkcije i time je dokaz gotov. Neka je $A^* = \langle[(a_\lambda^n)]\rangle$ proizvoljni element iz $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i neka je V proizvoljni otvoreni skup oko $i_{\Omega^*}(A^*) = \left\langle \left[\left(i_{\omega_\lambda^n}(a_\lambda^n) \right) \right] \right\rangle$ u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_1)$. Po Napomeni 5.13 (s obzirom na prethodno spomenutu $HPol_0$-ekspanziju od (X, x_1)) postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je

$$i_{\Omega^*}(A^*) \in W_{\lambda_0}^{\left\langle \left[\left(i_{\omega_\lambda^n}(a_\lambda^n) \right) \right] \right\rangle} \subseteq V. \tag{5.31}$$

Sada promotrimo skup $U = W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n)]\rangle} \in \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ (ovaj put po Napomeni 5.13 s obzirom na $HPol_0$-ekspanziju od (X, x_0)). Očito je U otvoren u prostoru $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ i $A^* \in U$. Neka je $B^* = \langle[(b_\lambda^n)]\rangle$ proizvoljan element iz U. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi jednakost $b_{\lambda_0}^{n'} = a_{\lambda_0}^{n'}$, a budući da je $i_{\omega_\lambda^n}$ injektivan, za svaki $\lambda \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$, to prethodna jednakost povlači da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$i_{\omega_{\lambda_0}^{n'}}(b_{\lambda_0}^{n'}) = i_{\omega_{\lambda_0}^{n'}}(a_{\lambda_0}^{n'}).$$

Stoga je $i_{\Omega^*}(B^*) \in W_{\lambda_0}^{\left\langle\left[\left(i_{\omega_\lambda^n}(a_\lambda^n)\right)\right]\right\rangle}$, pa iz proizvoljnosti od $B^* \in U$ i (5.31) slijedi

$$i_{\Omega^*}(U) \subseteq V$$

i time je neprekidnost od i_{Ω^*} pokazana. Potpuno analogno se može pokazati i neprekidnost od $i_{\Omega^*}^{-1}$. ■

Iz prethodnog teorema i Teorema 5.9 slijedi korolar.

Korolar 5.34 *Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je prostor X povezan putovima ((gruboga) oblika), onda njegova k-dimenzionalna topološka grupa gruboga oblika ne ovisi o izboru bazne točke do na izomorfizam.*

Nadalje, budući da su kontinuumi uvijek povezani putovima gruboga oblika (vidi Teorem 5.10) istaknut ćemo još jedan korolar.

Korolar 5.35 *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da k-dimenzionalna topološka grupa gruboga oblika kontinuuma ne ovisi (do na izomorfizam) o izboru bazne točke.*

I naposljetku još jedna standardna konvencija. Topološke grupe gruboga oblika putovima ((gruboga) oblika) povezanog prostora X označavati ćemo samo sa $\check{\pi}_k^{*top}(X)$ bez isticanja bazne točke.

5.3.3 Teorem o neprekidnosti topoloških grupa gruboga oblika

Sada ćemo pokazati još jedan ekvivalentan pristup topologiji na topološkoj grupi gruboga oblika, a koji će biti generalizacija rezultata poznatih i za topološke grupe oblika.

Napomena 5.36 *Samo za potrebe sljedećeg teorema, a zbog jednostavnosti oznaka, pod funktorom* $\check{\pi}_k^{*top}$ *ćemo zapravo podrazumijevati njegovu kompoziciju sa zaboravljivim funktorom* $: TopGrp \to Top$.

Teorem 5.37 *Neka je* (X, x_0) *punktirani prostor i* $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ *neka* $HPol_0$*-ekspanzija od* (X, x_0) *te* $k \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\widetilde{\boldsymbol{p}} = [(\check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_\lambda)))] : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to (\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda)$ *inverzni limes od* $(\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda)$ *u* Top.

Dokaz. Uvedimo oznaku $\check{\pi}_k^{*top}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) := (\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda)$. Neka je Y proizvoljni prostor i $\boldsymbol{f} = [(f_\lambda)] : Y \to \check{\pi}_k^{*top}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ proizvoljan morfizam u *pro*-Top. Po Definiciji 4.1 inverznog limesa dovoljno je pokazati da postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f : Y \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ takva da sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{[(f)]}{\longrightarrow} & \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \\ & \searrow^{\boldsymbol{f}} & \downarrow_{\widetilde{\boldsymbol{p}}} \\ & & \check{\pi}_k^{*top}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) \end{array} \tag{5.32}$$

komutira u *pro*-Top (u nastavku ćemo umjesto $[(f)]$ pisati samo f, štoviše pod morfizmom f u Top ili Set zapravo ćemo podrazumijevati odgovarajući morfizam u *pro*-Top odnosno *pro*-Set). Budući da je $\boldsymbol{f}$ morfizam u *pro*-Top, to je

$$f_\lambda = \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})) \circ f_{\lambda'}$$

za svaki $\lambda \leq \lambda' \in \Lambda$. Stoga, vrijedi

$$f_\lambda(y) = S_0^*(p_{\lambda\lambda'}) \circ f_{\lambda'}(y), \tag{5.33}$$

za svaki $y \in Y$, $\lambda \leq \lambda' \in \Lambda$. Sada, za svaki $\lambda \in \Lambda$ i $y \in Y$, sa $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\lambda}}(y) = [(\overline{a}_\lambda^n(y))]$ označimo jedinstvenog predstavnika od $f_\lambda(y)$ u pro^*-$HPol_0((S^k, s_0), (X_\lambda, x_\lambda))$ (uočimo da je $f_\lambda(y) \in \check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda))$. Pokažimo da je, za svaki $y \in Y$, $\boldsymbol{a}(y) = [(a_\lambda^n(y))] \in pro^*$-$HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$, gdje je

$$a_\lambda^n(y) = \overline{a}_\lambda^n(y), \text{ za svaki } \lambda \in \Lambda \text{ i } n \in \mathbb{N}. \tag{5.34}$$

Prvo, lako se vidi da je definicija od $\boldsymbol{a}(y)$ neovisna o izboru predstavnika od $\overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\lambda}}(y)$ u inv^*-$HPol_0((S^k, s_0), (X_\lambda, x_\lambda))$, za svaki $\lambda \in \Lambda$ (i dalje bi na svakoj koordinati λ gotovo svi članovi niza $a_\lambda^n(y)$ bili isti). Sada, neka je $y \in Y$ proizvoljan, i neka je $\lambda \leq \lambda' \in \Lambda$. Po definiciji od S_0^* lako se vidi da je $S_0^*(p_{\lambda\lambda'})$ predstavljen sa $[(p_{\lambda\lambda'}^n = p_{\lambda\lambda'})] \in pro^*$-$HPol_0((X_{\lambda'}, x_{\lambda'}), (X_\lambda, x_\lambda))$. Stoga, po relaciji (5.33) i definiciji kompozicije u Sh_0^* i pro^*-$HPol_0$ slijedi

$$\langle[(\overline{a}_\lambda^n(y))]\rangle = \langle[(p_{\lambda\lambda'}\overline{a}_{\lambda'}^n(y))]\rangle\,,$$

što povlači

$$[(\overline{a}_\lambda^n(y))] = [(p_{\lambda\lambda'}\overline{a}_{\lambda'}^n(y))],$$

odnosno

$$(\overline{a}_\lambda^n(y)) \sim (p_{\lambda\lambda'}\overline{a}_{\lambda'}^n(y)).$$

To znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$\overline{a}_\lambda^{n'}(y) = p_{\lambda\lambda'}\overline{a}_{\lambda'}^{n'}(y)$$

tj. po (5.34) za svaki $n' \geq n_0$ je

$$a_\lambda^{n'}(y) = p_{\lambda\lambda'}a_{\lambda'}^{n'}(y),$$

pa je uistinu $\boldsymbol{a}(y) = [(a_\lambda^n(y))] \in pro^*$-$HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$. Sada definirajmo

$$f : Y \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0),$$

$$f(y) = \langle \boldsymbol{a}(y)\rangle\,.$$

Po prethodnom dijelu dokaza zaključujemo da je funkcija f dobro definirana. Sada pokažimo da je $\widetilde{\boldsymbol{p}} \circ f = \boldsymbol{f}$ (komutacija dijagrama (5.32)) u pro-Set, a kasnije kad pokažemo neprekidnost od f onda će jasno vrijediti i $\widetilde{\boldsymbol{p}} \circ f = \boldsymbol{f}$ u *pro-Top*. Neka je $y \in Y$ i $\lambda_0 \in \Lambda$. Dovoljno je pokazati da je

$$S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ f(y) = f_{\lambda_0}(y). \tag{5.35}$$

No, $S_0^*(p_{\lambda_0})$ je predstavljen sa $\left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0},x_{\lambda_0})} = 1_{(X_{\lambda_0},x_{\lambda_0})}\right)\right] \in pro^*\text{-}HPol_0((\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0), (X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0}))$ (vidi (5.15)), pa (5.35) proizlazi iz sljedećih jednakosti

$$\begin{aligned} S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ f(y) &= \left\langle \left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0},x_{\lambda_0})}\right)\right] \right\rangle \circ \langle [(a^n_\lambda(y))] \rangle \\ &= \left\langle \left[\left(1^n_{(X_{\lambda_0},x_{\lambda_0})}\right)\right] \circ [(a^n_\lambda(y))] \right\rangle \\ &= \left\langle [(a^n_{\lambda_0}(y))] \right\rangle \\ &\overset{(5.34)}{=} \left\langle [(\overline{a}^n_{\lambda_0}(y))] \right\rangle \\ &= f_{\lambda_0}(y). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Pokažimo sada jedinstvenost od f (u smislu komutacije dijagrama (5.32) u *pro-Set*). Neka je odabran neki morfizam $f' : Y \to \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ u *Set* takav da je $\widetilde{\boldsymbol{p}} \circ f' = \boldsymbol{f}$ u *pro-Set*. Tada je

$$S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ f(y) = S_0^*(p_{\lambda_0}) \circ f'(y), \tag{5.37}$$

za svaki $\lambda_0 \in \Lambda$ i $y \in Y$. Stoga, ako je za neki $y \in Y$ morfizam $f'(y)$ predstavljen sa $[(a'^n_\lambda(y))] \in pro^*\text{-}HPol_0((S^k, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$, onda (5.37) (uz korištenje postupka u (5.36)) povlači da je za svaki $\lambda_0 \in \Lambda$

$$\left\langle [(a^n_{\lambda_0}(y))] \right\rangle = \left\langle [(a'^n_{\lambda_0}(y))] \right\rangle,$$

što je ekvivalentno sa

$$(a^n_{\lambda_0}(y)) \sim (a'^n_{\lambda_0}(y)).$$

Prema tome, za svaki $\lambda_0 \in \Lambda$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n$ vrijedi

$$a^{n'}_{\lambda_0}(y) = a'^{n'}_{\lambda_0}(y),$$

pa je onda jasno $f(y) = f'(y)$, a iz proizvoljnosti od $y \in Y$ slijedi da je $f = f'$, tj. f je jedinstvena. Preostaje pokazati neprekidnost funkcije f. Neka je odabran $y_0 \in Y$ i neka je V proizvoljni otvoreni skup oko $f(y_0) = \langle[(a_\lambda^n(y_0))]\rangle$ u $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. Po Napomeni 5.13 postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da je

$$f(y_0) \in W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n(y_0))]\rangle} \subseteq V. \tag{5.38}$$

Definirajmo $U = f^{-1}(W_{\lambda_0}^{\langle[(a_\lambda^n(y_0))]\rangle})$. Očito je $y_0 \in U$. Nadalje, iz sljedećih jednakosti

$$\begin{aligned} U &= \{y \in Y : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall n' \geq n_0 \text{ vrijedi } a_{\lambda_0}^{n'}(y) = a_{\lambda_0}^{n'}(y_0)\} \\ &\overset{(5.34)}{=} \{y \in Y : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall n' \geq n_0 \text{ vrijedi } \overline{a}_{\lambda_0}^{n'}(y) = \overline{a}_{\lambda_0}^{n'}(y_0)\} \\ &= \{y \in Y : \ \big(\overline{a}_{\lambda_0}^n(y)\big) \sim \big(\overline{a}_{\lambda_0}^n(y_0)\big)\} \\ &= \{y \in Y : \ \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\lambda}_0}(y) = \overline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\lambda}_0}(y_0)\} \\ &= \{y \in Y : \ f_{\lambda_0}(y) = f_{\lambda_0}(y_0)\} \\ &= f_{\lambda_0}^{-1}(\{f_{\lambda_0}(y_0)\}), \end{aligned}$$

te iz činjenica da je f_{λ_0} po pretpostavci neprekidna, a $\{f_{\lambda_0}(y_0)\}$ otvoren skup u $\check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$ ($(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$ je stabilan prostor pa je $\check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$ diskretan prostor), možemo zaključiti da je U otvoren u Y. Naposljetku, po relaciji (5.38) jasno je da je $f(U) \subseteq V$ i time je dokaz gotov. ■

Korolar 5.38 *Neka je (X, x_0) punktirani prostor i $\boldsymbol{p} = [(p_\lambda)] : (X, x_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ neka $HPol_0$-ekspanzija od (X, x_0) te $k \in \mathbb{N}$. Tada je $\widetilde{\boldsymbol{p}} = [(\check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_\lambda)))] : \check{\pi}_k^{*top}(X, x_0) \to (\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda)$ inverzni limes od $(\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(p_{\lambda\lambda'})), \Lambda)$ u $TopGrp$.*

Dokaz. Dokaz slijedi direktno iz prethodnog teorema i Teorema 2.1. u [15], Teorema 5.14 te činjenice da je f konstruiran u dokazu prethodnog teorema jedinstven i u smislu komutacije dijagrama (5.32) u *pro-Set*. ■

Teorem 5.39 *Neka je $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_\lambda, x_\lambda), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ inverzni sustav u Top_0 kojemu su svi članovi kompaktni poliedri te $k \in \mathbb{N}$. Ako uvedemo oznaku $\check{\pi}_k^{*top}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) := (\check{\pi}_k^{*top}(X_\lambda, x_\lambda), \check{\pi}_k^{*top}(S_0^*(H_0(p_{\lambda\lambda'}))), \Lambda)$ tada je*

$$\check{\pi}_k^{*top}\Big(\varprojlim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)\Big) = \varprojlim\big(\check{\pi}_k^{*top}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)\big) \tag{5.39}$$

gdje je prvi inverzni limes promatran u Top_0, a drugi u $TopGrp$.

Dokaz. Po verziji Teorema 4.23 za punktirani slučaj imamo da je $\underline{H}_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ $HPol_0$-ekspanzija od $\varprojlim(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$. Stoga, dokaz slijedi direktnom primjenom prethodnog korolara. ■

Prethodni teorem zovemo **teorem o neprekidnosti topoloških grupa gruboga oblika**, zbog "komutacije" $\check{\pi}_k^{*top}$ i $\varprojlim$ u relaciji (5.39).

5.3.4 Primjeri

U ovom posljednjem odjeljku pružit ćemo neke interesantne primjere i vidjeti kako nam neke od tvrdnji pokazanih u prethodnom poglavlju mogu biti korisne u konstrukciji zanimljivih zaključaka.

Primjer 5.40 *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Ako je (P, p_0) punktirani poliedar (ili prostor koji ima homotopski tip nekog punktiranog poliedra), onda je, koristeći Primjer 5.40 i Teorem 5.17, $\check{\pi}_k^{*top}(P, p_0)$ jednaka grupi*

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k(P, p_0)\right) / \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k(P, p_0)\right) \tag{5.40}$$

opskrbljenoj diskretnom topologijom. S obzirom na prethodnu formulu, te činjenicu da je $\check{\pi}_k^{top}(P, p_0)$ također diskretna, postavlja se prirodno pitanje je li diskretna topologija na $\check{\pi}_k^{*top}(P, p_0)$ dobivena kao kvocijentna topologija s obzirom na kanonsku surjekciju $p : \prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)/_\sim$, gdje je $\sim$ relacija ekvivalencije koja generira kvocijentnu grupu (5.40). Primijetimo da vrijedi

$$(a_1, a_2, a_3, ...) \sim (a_1', a_2', a_3', ...)$$

ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' > n_0$ vrijedi

$$a_{n'} = a_{n'}'.$$

Odgovor na prethodno pitanje je negativan, štoviše $\prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)/_\sim$ je indiskretan prostor. To ćemo dokazati tako da uzmemo proizvoljni neprazni otvoreni skup $U \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)/_\sim$ i pokažemo da je $U = \prod_{n\in\mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)/_\sim$.

Pretpostavimo protivno, tj. neka postoji

$$[(b_1, b_2, b_3, \ldots)] \in \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)/_{\sim} \right) \setminus U. \tag{5.41}$$

Neka je $[(a_1, a_2, a_3, \ldots)] \in U$. *Tada je po definiciji kvocijentne topologije* $p^{-1}(U)$ *otvoren skup u* $\prod_{n \in \mathbb{N}} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)$, *te sadrži* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. *Stoga, po definiciji produktne topologije postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \{a_1\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \prod_{n > n_0} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0) \subseteq p^{-1}(U). \tag{5.42}$$

Skup $\{a_1\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \prod_{n > n_0} \check{\pi}_k^{top}(P, p_0)$ *označimo sa* B. *Uočimo da je*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \ldots) \sim (b_1, b_2, b_3, \ldots), \tag{5.43}$$

te da koristeći (5.42) možemo pokazati da je

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \ldots) \subseteq B \subseteq p^{-1}(U). \tag{5.44}$$

Prema tome, iz (5.43) i (5.44) možemo zaključiti da je

$$[(b_1, b_2, b_3, \ldots)] \subseteq U,$$

a to je kontradikcija sa (5.41).

Slijedi važan primjer prostora koji nije stabilan, a ipak ima diskretnu netrivijalnu topološku grupu gruboga oblika (dimenzije 1) i to u svakoj svojoj točki.

Primjer 5.41 *Neka je dan proizvoljni niz brojeva* (k_i) *u* $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ *te njemu pridružen solenoid* $\Sigma_{(k_i)}$ *(vidi Primjer 5.6), dakle* $\Sigma_{(k_i)} = \varprojlim(X_i, p_{ii+1}, \mathbb{N})$ *u* Top, *gdje je za svaki* $i \in \mathbb{N}$ *prostor* $X_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *a neprekidna funkcija* $p_{ii+1} : X_{i+1} \to X_i$ *zadana sa* $p_{ii+1}(z) = z^{k_i}$. *Znamo da* $\Sigma_{(k_i)}$ *nema oblik poliedra, tj. da nije stabilan prostor. Poznato je da i je* $\check{\pi}_1(\Sigma_{(k_i)}, d_0)$ *trivijalna grupa, za svaki* $d_0 \in \Sigma_{(k_i)}$, *pa je onda topološka grupa oblika* $\check{\pi}_1^{top}(\Sigma_{(k_i)}, d_0)$ *trivijalna. Nadalje, budući da je* $\Sigma_{(k_i)}$ *kontinuum, to po Korolaru 5.35 slijedi* *da 1-dimenzionalna topološka grupa gruboga oblika od $\Sigma_{(k_i)}$ ne ovisi o izboru bazne točke, pa ćemo za nju pisati samo $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$. Znamo da $\check{\pi}_1^{*}(\Sigma_{(k_i)})$, a onda i $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$ ima neprebrojivo mnogo elemenata (vidi [14]). Dokažimo da je $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$ diskretna. Kombinacijom Teorema 4.17 i 4.22 zaključujemo da je $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0) = ((X_i, x_i), [p_{ii+1}], \mathbb{N})$ $HPol_0$-ekspanzija od punktiranog (proizvoljnom baznom točkom) $\Sigma_{(k_i)}$, za neke $x_i \in X_i$, $i \in \mathbb{N}$ (x_i nam nije bitno eksplicitno znati jer je X_i povezan putovima). Slično kao u Primjeru 5.6, budući da svaki niz (α_k) u $\mathbb{Z}$ smijemo smatrati nizom homotopskih klasa u $\pi_1(S^1)$ i obratno, te budući da za svaki $i \leq n \in \mathbb{N}$ $\pi_1([p_{in}])$ smijemo promatrati kao homomorfizam $: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zadan kao identiteta ako je $i = n$, te kao množenje sa $k_i \cdot \dots \cdot k_{n-1}$ inače, to svaki morfizam $(a_i^n) : (S^1, s_0) \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0)$ u inv^*-$HTop_0$ smijemo promatrati kao familiju cijelih brojeva $(a_i^n : i, n \in \mathbb{N})$ i to takvu da je zadovoljena sljedeća relacija:*

$$\text{za svaki } i_1 < i_2 \in \mathbb{N} \text{ postoji } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da za svaki } n' \geq n_0 \text{ vrijedi}$$
$$a_{i_1}^{n'} = k_{i_1} \cdot \dots \cdot k_{i_2-1} \cdot a_{i_2}^{n'}, \tag{5.45}$$

i obratno. Sada neka su $A^* = \langle [(a_i^n)] \rangle$ i $B^* = \langle [(b_i^n)] \rangle$ dvije različite točke u $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$, gdje su $(a_i^n), (b_i^n) \in inv^*\text{-}HTop_0((S^1, s_0), (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_0))$. Budući da metrika d^* (vidi (5.13)) generira topologiju na $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$, za pokazati da je $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$ diskretna dovoljno je pokazati da je $d^*(A^*, B^*) = 1$. Pretpostavimo protivno, preciznije da je $d^*(A^*, B^*) < 1$ (jer je po definiciji udaljenost po d^* uvijek manja ili jednaka 1). No po definiciji od d^* to također znači i da $d^*(A^*, B^*) \leq \frac{1}{2}$. Stoga, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n' \geq n_0$ vrijedi

$$a_1^{n'} = b_1^{n'}. \tag{5.46}$$

Sada, neka je $m \geq 2$ proizvoljan prirodan broj. Po (5.45) (za (a_i^n), (b_i^n) i $1 < m$) slijedi da postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n'' \geq n_1$, $n''' \geq n_2$ vrijedi

$$\begin{aligned} a_1^{n''} &= k_1 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot a_m^{n''}, \\ b_1^{n'''} &= k_1 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot b_m^{n'''}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Sada odaberimo $\overline{n} = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ *i uočimo da relacije (5.46) i (5.47) povlače da za svaki* $n' \geq \overline{n}$ *vrijedi*

$$k_1 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot a_m^{n'} = a_1^{n'} = b_1^{n'} = k_1 \cdot \dots \cdot k_{m-1} \cdot b_m^{n'},$$

tj. za svaki $n' \geq \overline{n}$ *vrijedi*

$$a_m^n = b_m^n. \tag{5.48}$$

Iz proizvoljnosti od $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, *relacija (5.48) (zajedno sa (5.46)) povlači da* $[(a_i^n)] = [(b_i^n)]$. *Stoga,* $A^* = B^*$, *a to je kontradikcija sa pretpostavkom da su* A^* *i* B^* *različite.*

Napomena 5.42 *Uočimo da je u dokazu diskretnosti od* $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$ *ključna činjenica bila da je množenje cijelih brojeva s nekom konstantom iz* $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ *injektivno, tj. da je za svaki* $i \in \mathbb{N}$ $\pi_1([p_{ii+1}])$ *monomorfizam. Stoga se po analogiji prethodnog primjera može pokazati sljedeće: ako je* $k \in \mathbb{N}$ *i ako je* (X, x_0) *punktirani prostor koji dopušta nizovnu* $HPol_0$*-ekspanziju* $\boldsymbol{p} : (X, x_0) \to ((X_i, x_i), p_{ii+1}, \mathbb{N})$ *takvu da je* $\pi_1([p_{ii+1}])$ *monomorfizam, za svaki* $i \in \mathbb{N}$, *tada je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *diskretna. Također, uz pretpostavke prethodne tvrdnje, možemo koristeći Teorem 5.21 dodatno zaključiti da onda postoji* $\lambda_0 \in \Lambda$ *takav da je* $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ *izomorfna nekoj podgrupi od* $\check{\pi}_k^{*top}(X_{\lambda_0}, x_{\lambda_0})$. *Primjerice,* $\check{\pi}_1^{*top}(\Sigma_{(k_i)})$ *smijemo zamišljati kao podgrupu od* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)$ *(napomenimo da po Primjeru 5.40 vrijedi da je*

$$\check{\pi}_1^{*top}(S^1) = \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}\right) \diagup \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}\right) \tag{5.49}$$

uz diskretnu topologiju).

Primjer 5.43 *U prethodnoj napomeni dali smo eksplicitnu formulu za* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)$. *Nadalje, znamo da je* $\check{\pi}_1^{top}(S^1) = \mathbb{Z}$ *uz diskretnu topologiju (Korolar 4.39). Budući da je* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)$ *Abelova to po Korolaru 5.32 slijedi da je* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)/\check{\pi}_1^{top}(S^1)$ *topološka grupa, uz identifikaciju* $\check{\pi}_1^{top}(S^1)$ *i* $j\left(\check{\pi}_1^{top}(S^1)\right)$ *(vidi Napomenu 5.31). Topologija na* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)/\check{\pi}_1^{top}(S^1)$ *je diskretna, kao kvocijentna topologija diskretne* *topologije, pa nam u smislu topologije spomenuta topološka grupa nije toliko interesantna, ali ovaj primjer koristimo da eksplicitno opišemo njezinu algebarsku strukturu. Prvo, po prirodi homomorfizma* $j = J|_{\check{\pi}_1^{top}(S^1)} : \check{\pi}_1^{top}(S^1) \to \check{\pi}_1^{*top}(S^1)$, *očito slijedi da su elementi podgrupe* $j\left(\check{\pi}_1^{top}(S^1)\right)$ *od* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right) / \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right)$ *zapravo sve klase cjelobrojnih nizova oblika*

$$(m, m, m, \ldots,),$$

za svaki $m \in \mathbb{Z}$ *(podsjetimo se da su elementi klase svi nizovi koji se poklapaju na gotovo svim koordinatama). Stoga, grupu* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)/\check{\pi}_1^{top}(S^1)$ *smijemo zamišljati kao skup klasa svih cjelobrojnih nizova po sljedećoj relaciji ekvivalencije:*

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \sim (a_1', a_2', a_3', \ldots)$$

ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $m_0 \in \mathbb{Z}$ *takav da za svaki* $n' \geq n_0$ *vrijedi*

$$a_{n'} - a_{n'}' = m_0,$$

uz zbroj dviju klasa definiran kao klasa niza dobivenog kao zbroj neka dva predstavnika (tih dviju klasa) po koordinatama.

Primjer 5.44 *Neka je dana Havajska naušnica* $\mathbb{H}$ *(vidi (4.1)). U Primjeru 4.49 smo vidjeli da* $\check{\pi}_1^{top}(\mathbb{H})$ *nije diskretna. Stoga, koristeći Teorem 5.24 zaključujemo da* $\check{\pi}_1^{*top}(\mathbb{H})$ *nije diskretna (ne trebamo isticati baznu točku* $h_0 \in \mathbb{H}$ *jer je Havajska naušnica povezana putovima pa možemo primijeniti Korolar 5.34), a po Korolaru 5.19 vrijedi i da je* $\check{\pi}_1^{*top}(\mathbb{H})$ *ultrametrizabilna. Također, postoji neprebrojiva, diskretna podgrupa od* $\check{\pi}_1^{*top}(\mathbb{H})$ *(koja je onda dodatno i zatvorena po Korolaru* 1.4.18. *u [2]). Naime, kružnica* S^1 *(a također i proizvoljni klin od konačno mnogo kružnica) je retrakt od* $\mathbb{H}$*, pa zaključak iz prethodne rečenice slijedi po Korolaru 5.23 i činjenici da je* $\check{\pi}_1^{*top}(S^1)$ *diskretna i neprebrojiva (vidi (5.49)).*

Primjer 5.45 *Neka je* $k \in \mathbb{N}$ *i* $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ *familija povezanih kompaktnih poliedara takva da gotovo svi članovi te familije imaju netrivijalnu k-dimenzionalnu homotopsku grupu. Neka je* $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. *Po Primjeru 4.50* *znamo da* $\check{\pi}_k^{top}(X)$ *nije diskretna, a očito je* X *putovima povezani kompaktni metrički prostor. Stoga, po Teoremu 5.24 i Korolaru 5.19 slijedi da je* $\check{\pi}_k^{*top}(X)$ *ultrametrizabilna i da nije diskretna. Analogno prethodnim zaključcima, ako definiramo* X_0 *kao produkt članova neke potfamilije od* $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ *onda imamo da je* $\check{\pi}_k^{*top}(X_0)$ *ultrametrizabilna (a ako dodatno vrijedi da ta potfamilija ima beskonačno mnogo elemenata, te da gotovo svi članovi te potfamilije imaju netrivijalnu* k*-dimenzionalnu homotopsku grupu onda ni* $\check{\pi}_k^{top}(X_0)$ *ni* $\check{\pi}_k^{*top}(X_0)$ *nisu diskretne). Uočimo da je* X_0 *retrakt od* X*. Sada, ako pretpostavimo dodatno da je* k*-dimenzionalna homotopska grupa svakog člana familije* $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ *Abelova (inače za* $k \geq 2$ *ovo uvijek vrijedi), onda po Korolarima 5.30 i 5.32 (lako se provjeri da su* $\check{\pi}_k^{top}(X)$ *i* $\check{\pi}_k^{*top}(X)$ *uistinu Abelove) vrijedi da su sljedeće (dobro definirane) kvocijentne grupe ujedno i topološke grupe:*

$$\check{\pi}_k^{top}(X)/\check{\pi}_k^{top}(X_0),$$
$$\check{\pi}_k^{*top}(X)/\check{\pi}_k^{*top}(X_0),$$
$$\check{\pi}_k^{*top}(X)/\check{\pi}_k^{top}(X)$$

(za korištene oznake u prethodnim relacijama vidi Napomenu 5.31).

Koristeći konstrukcije iz Primjera 4.50 i 5.45 formulirajmo i pokažimo sljedeću tvrdnju.

Propozicija 5.46 *Neka je* $(Y_\alpha : \alpha \in A)$ *familija povezanih kompaktnih poliedara. Ako postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da za beskonačno mnogo* $\alpha' \in A$ *vrijedi da* $\pi_k(Y_{\alpha'})$ *nije trivijalna, onda* $\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ *nema homotopski tip nijednog poliedra.*

Dokaz. Neka je dan $k \in \mathbb{N}$ takav da za beskonačno mnogo $\alpha' \in A$ vrijedi da $\pi_k(Y_{\alpha'})$ nije trivijalna. Tada postoji prebrojivi beskonačni podskup $M \subseteq A$ takav da svaki član familije $(Y_\alpha : \alpha \in M)$ ima netrivijalnu k-dimenzionalnu homotopsku grupu. Po Primjerima 4.50 i 5.45 slijedi da za dimenziju k ni topološka grupa oblika ni topološka grupa gruboga oblika od $\prod\limits_{\alpha \in M} Y_\alpha$ nisu diskretne (dovoljno je M identificirati sa $\mathbb{N}$). Neka je $y_\alpha \in Y_\alpha$ proizvoljna točka, za svaki $\alpha \in A \setminus M$. Tada je $\prod_{\alpha \in M} Y_\alpha \times \prod_{\alpha \in A \setminus M} \{y_\alpha\}$ očito retrakt od $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$. Uočimo da su $\prod_{\alpha \in M} Y_\alpha$ i $\prod_{\alpha \in M} Y_\alpha \times \prod_{\alpha \in A \setminus M} \{y_\alpha\}$ homeomorfni. Stoga, retrakt od $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ nema diskretnu topološku grupu (gruboga) oblika, pa iz Napomene 4.52 (iz Korolara 5.23) zaključujemo da $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ nema diskretnu topološku grupu (gruboga) oblika. Dakle, po Propoziciji 4.38 (ili po Teoremu 5.17) slijedi da $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ nema homotopski tip nijednog poliedra. ■

Bibliografija

[1] J. Adamek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, John Wiley and Sons, Inc, New York, (1990).

[2] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam, (2008).

[3] K. Borsuk, *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. 62 (1968) 223-254.

[4] K. Borsuk, *Concerning the notion of the shape of compacta*, na: Proc. Internat. Symp. Topology and its Appl. (Herceg-Novi 1968), D. Kurepa, Ed., Savez - Društava Mat. Fiz. Astronom., Beograd, (1969) 98–104.

[5] K. Borsuk, *Theory of shape*, Polish scientific publishers, Warszawa, (1975).

[6] T. Bröcker, T. t. Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1985).

[7] J. W. Cannon, G. R. Conner, *The combinatorial structure of the Hawaiian earring group*, Topology Appl. 106 (2000) 225-271.

[8] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, Mass., (1966).

[9] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[10] N. Koceić Bilan, *The coarse shape groups*, Topology Appl. 157 (2010) 894-901.

[11] N. Koceić Bilan, *On some coarse shape invariants*, Topology Appl. 157 (2010) 17; 2679-2685.

[12] N. Koceić Bilan, *On exactness of the coarse shape group sequence*, Glasnik Mat. 47 (67) (2012) 207-223.

[13] N. Koceić Bilan, *Towards the algebraic characterization of (coarse) shape path connectedness*, Topology Appl. 160 (2013) 538-545.

[14] N. Koceić Bilan, *Computing coarse shape groups of solenoids*, Mathematical Communications 14 (2014) 243-251.

[15] N. Koceić Bilan, *Continuity of coarse shape groups*, Homology Homotopy and Applications 18 (2016) 2; 209-215.

[16] N. Koceić Bilan, Z. Čuka, *Topological coarse shape groups of compact metric spaces*, Rad HAZU, Matematičke znanosti, 21 (532) (2017) 205-217.

[17] N. Koceić Bilan, N. Uglešić, *The coarse shape*, Glasnik Mat. 42 (62) (2007) 145-187.

[18] N. Koceić Bilan, N. Uglešić, *The coarse shape path connectedness*, Glasnik Mat. 46 (66) (2011) 491-505.

[19] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2002).

[20] A. T. Lundell, S. Weingram, *The topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold, New York, (1969).

[21] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5 (Second edition), Springer-Verlag, New York, (1998).

[22] S. Mardešić, *Spaces having the homotopy type of CW-complexes*, Lexington, Kentucky, (1978).

[23] S. Mardešić, J. Segal, *Shape theory*, North-Holland, Amsterdam, (1982).

[24] J. R. Munkres, *Topology*, Second edition, Prentice Hall Inc., (2000).

[25] S. Nadler, *Continuum theory: An Introduction*, CRC Press, (1992).

[26] T. Nasri, F. Ghanei, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi, *On topological shape homotopy groups*, Topology Appl. 198 (2016) 22-33.

[27] T. Nasri, F. Ghanei, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi, *Topological coarse shape homotopy groups*, Topology Appl. 219 (2017) 17-28.

[28] A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, (1975).

[29] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1988).

[30] B. de Smit, *The fundamental group of the Hawaiian earring is not free*, Internat. J. Algebra Comput. 2 (1) (1992) 33–37.

[31] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, Inc, New York, (1966).

[32] N. Uglešić, *Metrization of pro*-morphism sets, Glasnik Mat. 44 (2009) 499-531.

[33] N. Uglešić, *Ultrametrization of pro**-morphism sets, Mathematical Communications 18 (2013) 19-47.

[34] N. Uglešić, *An Example Relating the Coarse and Weak Shape*, Mediterranean Journal of Mathematics 13 (6) (2016) 4939-4947.

[35] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1970).

Sažetak

Teorija (topološkog) oblika (vidi [23]) je dobro poznata grana topologije koja pruža općenitiji pogled na topološke prostore (kraće prostore) nego homotopska teorija, a svoje poopćenje ima u teoriji (topološkog) gruboga oblika (vidi [17]). Važne invarijante tih teorija, koje se pridružuju (punktiranim) prostorima su grupe oblika i gruboga oblika, redom. Nedavno je grupa oblika topologizirana u [26], te je dobivena topološka grupa, a na sličan način ćemo obogatiti i strukturu grupe gruboga oblika.

U prvom dijelu rada proučavamo različite (netrivijalne) topologije na skupovima morfizama u kategorijama *inv*-$\mathcal{C}$, *inv**-$\mathcal{C}$, gdje je $\mathcal{C}$ proizvoljna kategorija. Potom, pomoću prethodno spomenutih topologija, na prirodan način topologiziramo skupove morfizama u kategorijama *pro*-$\mathcal{C}$, *pro**-$\mathcal{C}$ između dvaju fiksnih objekata (tj. inverznih sustava u $\mathcal{C}$), preciznije, u oba slučaja uvodimo po dvije topologije, koje u *pro*- slučaju označavamo sa $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}_{card}$, a u *pro**- slučaju sa $\mathcal{T}^*_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$.

Pokazujemo da sve četiri spomenute topologije imaju baze čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi, te da ih smijemo zamišljati kao relativne topologije Cantorove kocke, a za pridružene prostore vrijedi da imaju malu induktivnu dimenziju 0 i da su potpuno nepovezani. Vrijedi da su $\mathcal{T}_{card}$, $\mathcal{T}^*_{card}$ finije od $\mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{ind}$, redom, a protuprimjerima pokazujemo da su spomenute topologije u odgovarajućim parovima općenito različite. Također, dokazujemo da se odabirom inverznog niza u kodomeni topologije u parovima poklapaju, te da ih možemo metrizirati konkretnim potpunim ultrametrikama.

Prethodne topologije su nam bitne jer je k-dimenzionalna grupa oblika i

gruboga oblika nekog punktiranog prostora (X, x_0) u prirodnoj bijektivnoj vezi redom sa skupom *pro*- odnosno pro^*- morfizama između punktirane k-dimenzionalne sfere i neke $HPol_0$-ekspanzije od (X, x_0). Nadalje, budući da pokazujemo da topologije $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$, za razliku od $\mathcal{T}_{card}$ i $\mathcal{T}^*_{card}$, nisu osjetljive na izomorfne transformacije kodomene, to preko netom spomenutih bijektivnih korespondencija možemo koristeći topologije $\mathcal{T}_{ind}$ i $\mathcal{T}^*_{ind}$ topologizirati grupe oblika i gruboga oblika, redom, neovisno o izboru $HPol_0$-ekspanzije.

U drugom dijelu radu prvo ćemo se upoznati s već spomenutim topološkim grupama oblika, gdje se topologija kojom su topologizirane u [26] poklapa sa $\mathcal{T}_{ind}$. Navest ćemo njihova osnovna svojstva, poopćiti neke već poznate primjere, te pružiti eksplicitnu metriku za topološke grupe oblika kompaktnih metričkih prostora.

U posljednjem poglavlju ćemo proučavati topologiziranu grupu gruboga oblika nekog punktiranog prostora (X, x_0) i neke dimenzije k. Pokazat ćemo da je ona uistinu topološka grupa, prirodno ćemo je nazvati *k-dimenzionalna topološka grupa gruboga oblika od* (X, x_0) i označiti sa $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$, te konstrukcijom pripadnog funktora pokazati da je nova invarijanta gruboga oblika. Njezina topološka svojstva bit će naslijeđena od $\mathcal{T}^*_{ind}$, pa će primjerice odmah izaći potpuna regularnost.

Povezat ćemo slučaj oblika i gruboga oblika tako da ćemo pokazati da $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ sadrži odgovarajuću topološku grupu oblika kao svoju zatvorenu podgrupu. Također, promatrat ćemo odnos $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ s topološkom grupom gruboga oblika nekog retrakta od X, a i vidjeti ćemo u kojim slučajevima je izbor bazne točke nebitan. Među dokazanim tvrdnjama posebno ističemo teorem o neprekidnosti topoloških grupa gruboga oblika, kao poopćenje njegove nedavno pokazane algebarske varijante. Naposljetku, primjenjujemo dobivene rezultate za konstrukciju zanimljivih primjera, među kojima je i primjer prostora koji nije stabilan, a ima diskretnu, netrivijalnu topološku grupu gruboga oblika.

Ključne riječi: inverzni sustav, *pro*-kategorija, pro^*-kategorija, ekspanzija, oblik, grubi oblik, grupa (gruboga) oblika, topološka grupa (gruboga) oblika

Abstract

Shape theory (see [23]) is the well known branch of topology which provides more generalised view on topological spaces (shortly spaces) than homotopic theory and it has its own generalisation in the coarse shape theory (see [17]). Important invariants of these theories, which are associated to (pointed) spaces, are shape and coarse shape groups, respectively. Recently, shape group has been topologized in [26], where topological group has been obtained and on similar way we will enrich structure of coarse shape group.

In the first part we study different (nontrivial) topologies on the sets of morphisms in categories *inv*-$\mathcal{C}$, *inv**-$\mathcal{C}$, where $\mathcal{C}$ is any category. Then, by using previously mentioned topologies, we topologize in most natural way sets of morphisms in categories *pro*-$\mathcal{C}$, *pro**-$\mathcal{C}$ between two fixed objects (i.e. inverse systems in $\mathcal{C}$), more precise, in both cases we introduce two topologies, which we denote by $\mathcal{T}_{ind}$ and $\mathcal{T}_{card}$ in *pro*- case and by $\mathcal{T}^*_{ind}$ and $\mathcal{T}^*_{card}$ in *pro**-case.

We show that all four mentioned topologies have bases which are consisted of clopen sets and that we may consider them as relative topologies of Cantor cube, and also that associated spaces have small inductive dimension 0 and are completely disconnected. It holds that $\mathcal{T}_{card}$, $\mathcal{T}^*_{card}$ are finer than $\mathcal{T}_{ind}$, $\mathcal{T}^*_{ind}$, respectively, and by using some counterexamples it is shown that those topologies generally differ in pairs. Also, we prove that for any inverse sequence in codomain the topologies match in pairs and that in that case we can metrizise them with explicit complete ultrametrics.

Aforementioned topologies are important for us because k-dimensional shape and coarse shape group of some pointed space (X, x_0) is in natural bijective correspondence with set of *pro*- and *pro**- morphisms, respectively, between pointed k-dimensional sphere and $HPol_0$-expansion of (X, x_0). Further, since we prove that topologies $\mathcal{T}_{ind}$ and $\mathcal{T}_{ind}^*$ are not sensitive on isomorphic transformations of codomain, unlike $\mathcal{T}_{card}$ and $\mathcal{T}_{card}^*$, we can, by using just mentioned bijective correspondences and topologies $\mathcal{T}_{ind}$ and $\mathcal{T}_{ind}^*$, topologise shape and coarse shape groups, respectively, independently of choice of $HPol_0$-expansion.

In the second part we consider mentioned topological shape groups, where their topology in [26] coincides with $\mathcal{T}_{ind}$. Their main properties are listed, some of known examples are generalised, and also explicit metric for topological shape groups of compact metric spaces is provided.

In the last chapter topologised coarse shape group of some pointed space (X, x_0) and some dimension k is studied. We show that it is truly topological group, which we naturally call k-dimensional topological coarse shape group of (X, x_0) and denote by $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$. By constructing associated functor it is shown that it becomes new coarse shape invariant. Their topological properties are inherited from $\mathcal{T}_{ind}^*$, so for example it immediately follows that $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ is completely regular.

We relate shape and coarse shape case by proving that $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ contains appropriate topological shape group as its closed subgroup. Also, we consider relation of $\check{\pi}_k^{*top}(X, x_0)$ with topological coarse shape group of some retract of X, and we see in which cases specifying basepoint is irrelevant. Among proven facts we highlight continuity of topological coarse shape groups theorem, as generalisation of its recently shown algebraic variant. Finally, our results are applied for constructing interesting examples, among which the example of the space which is not stable, but has discrete, nontrivial topological coarse shape group is most interesting.

Keywords: inverse system, *pro*-category, *pro**-category, expansion, shape, coarse shape, (coarse) shape group, topological (coarse) shape group

Životopis

Zdravko Čuka je rođen 6. travnja 1989. godine u Splitu gdje je 2007. završio IV. gimnaziju "Marko Marulić". U srpnju 2010. godine završava preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu. Iste godine u rujnu upisuje diplomski studij Financijska i poslovna matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, kojeg završava u srpnju 2012. godine obranom diplomskog rada *Jako uniformna vremena i konačne slučajne šetnje* pod mentorstvom prof. Zorana Vondračeka, te tako stječe zvanje mag. math.

U studenom 2012. godine upisuje Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišta u Splitu, te Sveučilišta u Zagrebu.

Od listopada 2012. godine zaposlen je kao asistent na Katedri za geometriju Fakulteta građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu.

Član je Topološkog seminara u Splitu, Splitskog matematičkog društva, Hrvatskog matematičkog društva, te Hrvatskog društva za geometriju i grafiku.

Publikacije

1. N. Koceić Bilan, Z. Čuka, *Topological coarse shape groups of compact metric spaces*, Rad HAZU, Matematičke znanosti, 21 (532) (2017) 205-217.

Sudjelovanja i izlaganja na konferencijama

- 3rd Croatian Conference on Geometry and Graphics, Supetar, September 07-11, 2014. - sudjelovanje

- Dubrovnik VIII - Geometric Topology, Geometric Group Theory and Dynamical Systems, June 22-26, 2015. - sudjelovanje
- *Topological coarse shape groups,* 6th Croatian Mathematical Congress, 14-17 June, 2016., Zagreb, Croatia. - izlaganje

Kontakt

Zdravko Čuka
tel (ured): 021/303-395
e-mail: zdravko.cuka@gradst.hr

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, ______________________________, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi ____,OIB ______________________, JMBAG ____________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: ____ ____ ____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, ______________________

____

Potpis