Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Rozarija Mikić

Obratne Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti i srodni rezultati

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Rozarija Mikić

Converse Edmundson-Lah-Ribarič inequalities and related results

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2017

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Rozarija Mikić

Obratne Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti i srodni rezultati

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Akademik Josip Pečarić

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Rozarija Mikić

Converse Edmundson-Lah-Ribarič inequalities and related results

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Akademik Josip Pečarić

Zagreb, 2017

Zahvala

Ova disertacija meni je mnogo više od sažetka jednog istraživanja – ona za mene predstavlja kraj jednog puta, obilježenog brojnim divnim ljudima i lijepim iskustvima, i početak jednog novog puta. Stoga se želim zahvaliti svima koji su, svatko na svoj način, pomogli u nastanku ove doktorske disertacije.

Na prvome mjestu, zahvalnost za izradu ove disertacije, ali i za moj cjelokupni profesionalni razvoj, dugujem svom mentoru, akademiku Josipu Pečariću. Njegova impresivna količina znanja i iskustva, dostupnost u svakom trenu za bilo koje pitanje ili nedoumicu, i sposobnost da riješi svaki problem uvijek su mi bili velika pomoć u radu. Profesore, hvala Vam na strpljenju, nesebičnoj pomoći i nadasve stručnom vodstvu!

Također se želim zahvaliti i svim članovima Seminara za nejednakosti i primjene te članovima povjerenstva za ocjenu disertacije na uloženom trudu i vremenu, i na svim dobronamjernim primjedbama i sugestijama kojima su utjecali na kvalitetu ove disertacije.

Zahvaljujem se i mojim roditeljima Alberti i Markitu i sestri Marici na moralnoj podršci i razumijevanju, i povjerenju koje su imali u mene.

Na kraju, najveću zahvalnost ipak dugujem mom suprugu Miljenu i sinu Vidu, koji su me u svemu podržavali i vjerovali u mene. Hvala vam na vašoj bezgraničnoj potpori, razumijevanju i ljubavi koju ste mi pružili tijekom izrade ove disertacije.

...

Sažetak

Ključne riječi: Jensenova nejednakost; Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost; konveksnost; pozitivni linearni funkcionali; hermitski operatori; pozitivna linearna preslikavanja; poopćene koneksije; koneksije; operatorska entropija; Levinsonova nejednakost; skalarni produkt

Definirat će se nova klasa funkcija koja proširuje klasu 3-konveksnih funkcija za koju će se dokazati generalizacija Levinsonovog tipa Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti. Dokazat će se da analogne generalizacije vrijede i za Edmundson-Lah-Ribaričevu nejednakost za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru, te za skalarni produkt istih. Dalje, promatrat će se Jensenova i Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost za linearne funkcionale. Dobit će se njihovi obrati u obliku razlike, kao i profinjenja i poboljšanja spomenutih obrata. Dobiveni rezultati primijenit će se na generalizirane sredine i na neke poznate nejednakosti (Hölderovu, Hermite-Hadamardovu, Giaccardijevu i Petrovićevu nejednakost). Dobit će se i obrati Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti, kao i daljnja profinjenja i poboljšanja istih. Dobiveni opći rezultati primijenit će se na kvazi-aritmetičke operatorske sredine, te na potencijalne operatorske sredine. Također će se dobiti i obrati Andove i Davis-Choijeve nejednakosti za pozitivna linearna preslikavanja, te Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost i njen obrat u obliku razlike za pozitivna linearna preslikavanja. Dokazat će se i obrati u obliku razlike i kvocijenta za poseban tip poopćenih koneksija - solidarities koji uključuje i koneksije, te za relativnu operatorsku entropiju.

Summary

Keywords: Jensen's inequality; the Edmundson-Lah-Ribarič inequality; convexity; positive linear functionals; self-adjoint operators; unital linear mappings; solidarity; connections; operator entropy; Levinson's inequality; scalar product

A new class of functions that extends the class of 3-convex functions will be defined, and Levinson's type generalization of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality will be proved for those functions. Analogue generalizations of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality for self-adjoint operators in Hilbert space and for their scalar product will be proved. Next, inequalities of Jensen and Edmundson-Lah-Ribarič for positive linear functionals will be studied. New inequalities of difference type, as well as their refinements and improvements, will be obtained. These results will be applied to generalized means and some famous inequalities (the ones of Hölder, Hermite-Hadamard, Giaccardi and Petrović). Further, converses of the Jensen and Edmundson-Lah-Ribarič operator inequalities and their refinements and improvements will be obtained. General results will be applied to quasi-arithmetic operator means and to potential operator means. Finally, converses of Ando's and Davis-Choi's inequality, as well as the Edmundson-Lah-Ribarič and it's converse of difference type for positive unital mappings, will be studied. Ratio and difference type converses will be proved for a special type of solidarities which includes connections, and for relative operator entropy.

Sadržaj

Uvod

Konveksne funkcije vrlo su bitne u teoriji nejednakosti. Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za sve $x, y \in I$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{1}$$

Ako je za sve $x \neq y$ i $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ nejednakost (1) stroga, onda kažemo da je f strogo konveksna. Ako je znak nejednakosti u (1) obrnut, onda funkciju f zovemo konkavnom. Geometrijski gledano, funkcija f je konveksna na intervalu I ako se za bilo koje dvije točke $x, y \in I$ dio grafa između točaka x i y nalazi ispod tetive na graf funkcije f u tim točkama.

Jensenova nejednakost za konveksne funkcije jedna je od najvažnijih nejednakosti moderne matematike budući da iz nje proizlazi čitav niz drugih klasičnih nejednakosti. Dobila je ime po danskom matematičaru Johanu Ludwigu Jensenu (1859-1925) koji ju je dokazao 1906. godine.

Teorem (Jensenova nejednakost, [74]) Neka je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Za $n \geq 2$, neka su $x_1, ..., x_n \in I$, te $p_1, .., p_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $p_i > 0$ za svaki i. Tada vrijedi

$$f\Big(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \tag{2}$$

gdje je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Ako je f strogo konveksna i ako $x_1, ..., x_n$ nisu svi međusobno jednaki, onda je nejednakost u (2) stroga.

Međutim, jednostavnije varijante nejednakosti (2) pojavile su se puno ranije, ali pod drukčijim pretpostavkama. Hölder je 1889. godine za funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i $x, y \in [a,b]$ dokazao da vrijedi

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3}$$

pod pretpostavkom da je f dvaput diferencijabilna na $[a,b]$, i da vrijedi $f''(x) \geq 0$ na spomenutom intervalu. Ako je funkcija f dvaput diferencijabilna, onda je uvjet $f''(x) \geq 0$ za $x \in [a,b]$ ekvivalentan s tim da je f konveksna na $[a,b]$, ali je pojam konveksnosti uveo Jensen u [44], u kojem je i dokazao nejednakost (2). Henderson je 1896. godine dokazao nejednakost (2), ali pod Hölderovim uvjetima. Specijalan slučaj nejednakosti (2) za $p_1 = ... = p_n = 1$ dokazao je Grolous još 1875. godine pomoću centroidne metode u radu [27]. To je ujedno i prva poznata nejednakost za konveksne funkcije u matematičkoj literaturi.

Jensenova nejednakost ima značajnu primjenu u raznim granama matematike, posebno u matematičkoj analizi i statistici, gdje se najčešće koristi kod određivanja donje granice za očekivanje konveksnih funkcija. Kroz stoljeća, Jensenovu nejednakost opsežno su istraživali mnogi poznati matematičari, i generalizirana je na brojne načine. Integralnu verziju iste nejednakosti dobili su Beesack i Pečarić 1984. godine. Analognu nejednakost za pozitivne linearne funkcionale dokazao Jessen 1931., a Davis je 1957. godine pokazao da Jensenova nejednakost vrijedi i među operatorskim algebrama. Brojne poznate klasične nejednakosti nastale su kao posljedica neke od verzija Jensenove nejednakosti. Jedna od poznatijih je takozvana Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost:

$$\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq \frac{M-\bar{x}}{M-m} f(m) + \frac{\bar{x}-m}{M-m} f(M), \tag{4}$$

gdje je $f\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Dokazali su je 1973. godine Lah i Ribarič, dok je Edmundson još 1956. godine dokazao vjerojatnosni oblik iste nejednakosti. Ima važnu primjenu u stohastičkom programiranju kod traženja gornje granice za očekivanje konveksnih funkcija. Beesack i Pečarić su 1985. godine dokazali generalizaciju spomenute nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale. Od novijih rezultata treba spomenuti obrate u obliku razlike integralne Jensenove nejednakosti koje je dobio Dragomir. Također treba spomenuti i poboljšanje Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale koje su dobili Klaričić Bakula, Pečarić i Perić.

Levinson je 1964. godine u radu "Generalisation of an inequality of Ky Fan" dobio važnu nejednakost Jensenovog tipa koja se tiče dva različita niza brojeva. Taj rezultat danas je poznat pod nazivom Levinsonova nejednakost. Mnogi matematičari su radili na oslabljivanju uvjeta pod kojima Levinsonova nejednakost vrijedi. Tako su Bullen i Pečarić oslabili uvjet simetrije, a Mercer ga je u potpunosti zamijenio uvjetom jednakosti varijanci za funkcije koje imaju nenegativnu treću derivaciju. Witkowski je pokazao da je u Mercerovim pretpostavkama dovoljno da funkcija bude 3-konveksna. Dalje, Baloch, Pečarić i Praljak su pronašli najveću klasu funkcija za koju Levinsonova nejednakost vrijedi pod Mercerovim pretpostavkama. Spomenuta klasa funkcija je proširenje klase 3-konveksnih funkcija i može biti promatrana kao klasa funkcija koje su 3-konveksne u točki.

Doprinosi doktorskog rada

Dobivena je generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa za matematičko očekivanje, koja vrijedi za jednu klasu funkcija koja proširuje klasu 3-konveksnih funkcija. Još je pokazano i da analogna generalizacija vrijedi i za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru, te za skalarni produkt istih.

Dokazani su obrati Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale. Dobiveni rezultati dalje su profinjeni i poboljšani, te primijenjeni na neke poznate nejednakosti sa ciljem dobivanja što bolje procjene razlike između desne i lijeve strane tih nejednakosti. Također je pokazano da analogni rezultati vrijede i za unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja među C^*-algebrama u kompaktnom Hausdorffovom prostoru, kao i za koneksije i poopćene koneksije - solidarities, te za relativnu operatorsku entropiju.

Pregled doktorskog rada po poglavljima

- Prvo poglavlje naslovljeno „Nejednakosti Levinsonovog tipa", započinje kratkim povijesnim komentarom o Edmundson-Madanskyjevoj i Lah-Ribaričevoj nejednakosti, te pregledom već poznatih rezultata. Obje nejednakosti su specijalni slučajevi jedne te iste nejednakosti, pa ih stoga sve nazivamo Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost. Dalje, dokazana je generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa za matematičko očekivanje koja vrijedi za jednu klasu funkcija koja proširuje klasu 3-konveksnih funkcija, te je ispitano pod kakvim sve uvjetima spomenuta nejednakost vrijedi. Također je pokazano da analogne generalizacije vrijede i za Edmundson-Lah-Ribaričevu nejednakost za operatore u Hilbertovom prostoru, te za skalarni produkt istih.

- Drugo poglavlje, pod naslovom „Obrati nejednakosti u obliku razlike za linearne funkcionale" počinje pregledom nekih bitnih rezultata povezanih s Jensenovom i Edmundson-Lah-Ribaričevom nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale koji su poznati od ranije. Dobiveni su obrati spomenutih rezultata, i dokazana su profinjenja i poboljšanja istih te su primijenjeni na razne klasične nejednakosti poput Hölderove, Hadamardove, nejednakosti među generaliziranim sredinama, te nejednakosti Giaccardija i Petrovića, čime su dobiveni obrati navedenih nejednakosti koji daju gornju ogradu za razliku desne i lijeve strane u tim nejednakostima.

- U trećem poglavlju naslovljenom „Obrati nejednakosti u kompaktnom Hausdorffovom prostoru" dokazani su obrati u obliku razlike Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti za unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja među C^*-algebrama operatora u kompaktnom Hausdorffovom prostoru, kao i daljnja profinjenja i poboljšanja istih. Dobiveni opći rezultati zatim su primijenjeni na kvazi-aritmetičke operatorske sredine i na potencijalne operatorske sredina sa ciljem dobivanja što bolje procjene za razliku među tim sredinama.

- U četvrtom poglavlju pod naslovom „Obrati Andove i Davis-Choijeve nejednakosti" dokazano je nekoliko obrata Andove nejednakosti i Davis-Choijeve nejednakosti različitog tipa, te Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost i njen obrat u obliku razlike za pozitivna linearna preslikavanja. Također je dobiven i obrat u obliku razlike nejednakosti za koneksije i poopćene koneksije - solidarities, te obrat kvocijentnog tipa (ili obrat operatorske Hölderove nejednakosti) za koneksije i poseban tip poopćenih koneksija - solidarities. U slučaju obrata u obliku razlike, procjene su izražene preko jedne vrste varijacije uključene familije operatora. Primjenom tih rezultata dobiveni su operatorski obrati u obliku kvocijenta i razlike tipa Hölderove nejednakosti za općenite težinske potencijalne sredine.

Poglavlje 1

Nejednakosti Levinsonovog tipa

U ovom poglavlju prvo ćemo dati kratki povijesni komentar o Edmundson-Madanskyjevoj i Lah-Ribaričevoj nejednakosti, te pregled već poznatih rezultata. Obje nejednakosti su specijalni slučajevi jedne te iste nejednakosti, pa ih stoga sve nazivamo Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost. Dalje, dokazat ćemo generalizaciju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa koja će vrijediti za jednu klasu funkcija koja proširuje klasu 3-konveksnih funkcija, te ispitati pod kakvim sve uvjetima spomenuta nejednakost vrijedi. Također ćemo pokazati da analogne generalizacije vrijede i za Edmundson-Lah-Ribaričevu nejednakost za operatore u Hilbertovom prostoru, te za skalarni produkt istih.

1.1 Uvod

Lah i Ribarič u svom radu [53] iz 1971. godine dobili su obrat Jensenove nejednakosti koji navodimo u originalnom obliku.

Teorem 1.1 ([53]) Neka je μ pozitivna mjera na $[0,1]$ i neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu $[m,M]$, gdje je $-\infty < m < M < +\infty$. Tada za svaku μ-izmjerivu funkciju f na intervalu $[0,1]$ takvu da vrijedi $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [0,1]$, imamo sljedeću nejednakost

$$\frac{\int_0^1 \Phi(f)d\mu}{\int_0^1 d\mu} \leq \frac{M-\bar{f}}{M-m}\Phi(m) + \frac{\bar{f}-m}{M-m}\Phi(M), \tag{1.1}$$

gdje je $\bar{f} = \int_0^1 f d\mu / \int_0^1 d\mu$.

Od onda je mnogo članaka napisano na temu generalizacija i obrata nejednakosti (1.1). Čitava serija monografija iz nejednakosti ([1], [21], [24], [25], [49] i [50]) posvećena je klasičnim nejednakosti uključujući i Lah-Ribaričevu nejednakost (1.1).

Beesack i Pečarić [8] (pogledati također [74, p.98]) dokazali su sljedeću generalizaciju Lah-Ribaričeve nejednakosti (1.1) za pozitivne linearne funkcionale.

Teorem 1.2 ([8]) Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu $I = [m,M]$, gdje je $-\infty < m < M < \infty$. Neka je L vektorski prostor realnih funkcija na nepraznom skupu E za koje vrijedi $af + bg \in L$ za sve $f, g \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$ i $\mathbf{1} \in L$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\phi(f) \in L$ vrijedi:

$$A(\phi(f)) \leq \frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M). \tag{1.2}$$

Vjerojatnosna verzija nejednakosti (1.1) za matematičko očekivanje dana je u teoremu koji slijedi.

Teorem 1.3 ([20]) Neka je $-\infty < a < b < +\infty$, te $X\colon \Omega \to [a, b]$ slučajna varijabla s konačnim očekivanjem na vjerojatnosnom prostoru (Ω, p). Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija takva da je $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \frac{b - \mathbb{E}(X)}{b - a}f(a) + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{b - a}f(b). \tag{1.3}$$

Nejednakost (1.3) se često naziva Edmundson-Madanskyjeva nejednakost jer ju je 1956. godine dokazao Edmundson ([20]), a Madansky ([56]) ju je 1959. godine prvi počeo koristiti u kontekstu stohastičkog programiranja kod traženja što bolje gornje granice za očekivanje konveksnih funkcija.

Opsežna lista nedavnih rezultata vezanih za Edmundson-Madanskyjevu nejednakost može se pronaći u knjigama [10] i [52].

Vidimo da je Teorem 1.2 također generalizacija i Teorema 1.3, to jest da su nejednakosti (1.1) i (1.3) zapravo jedna te ista nejednakost, ali u različitim postavkama. Stoga ćemo od sada te dvije nejednakosti objediniti pod zajedničkim nazivom Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost.

Jensenova nejednakost za matematičko očekivanje

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)) \tag{1.4}$$

u istom se kontekstu koristi za određivanje što bolje donje granice za očekivanje konveksne funkcije, pa vidimo da su nejednakosti (1.3) i (1.4) usko povezane.

Levinson je 1960. godine u radu [55] dobio važnu nejednakost koja se tiče dva različita niza brojeva. Taj rezultat, danas poznat pod nazivom Levinsonova nejednakost, iskazan je u sljedećem teoremu.

Teorem 1.4 ([55]) Neka funkcija $f\colon \langle 0, 2c\rangle \to \mathbb{R}$ zadovoljava $f''' \geq 0$ i neka su p_i, x_i, y_i za $i = 1, ..., n$ takvi da je $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $0 \leq x_i \leq c$ i

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = ... = x_n + y_n = 2c. \tag{1.5}$$

Tada vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) - f(\bar{y}), \tag{1.6}$$

gdje $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ i $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$ označavaju težinske aritmetičke sredine.

Kako bi se oslabilo pretpostavku o diferencijabilnosti funkcije f, promatrane su podijeljene razlike. Podijeljena razlika k-tog reda funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu I u međusobno različitim točkama $x_0, x_1, ..., x_k \in I$ definirana je rekurzivno relacijom

$$[x_i]f = f(x_i), \quad \text{for} \quad i = 0, ..., k$$

$$[x_0, ..., x_k]f = \frac{[x_1, ..., x_k]f - [x_0, ..., x_{k-1}]f}{x_k - x_0}.$$

Za funkciju $f\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je k-konveksna ako vrijedi $[x_0, ..., x_k]f \geq 0$ za bilo koji izbor $k+1$ međusobno različitih točaka $x_0, x_1, ..., x_k \in I$. Ako k-ta derivacija konveksne funkcije postoji, onda je $f^{(k)} \geq 0$, ali $f^{(k)}$ ne mora nužno postojati (svojstva podijeljenih razlika i k-konveksnih funkcija mogu se pronaći u knjizi [74]).

Mnogi matematičari su radili na oslabljivanju uvjeta pod kojima Levinsonova nejednakost (1.6) vrijedi. Tako je Bullen u radu [12] poopćio Levinsonovu nejednakost na općeniti interval $[a, b]$ i pokazao da ako je funkcija f 3-konveksna i ako su p_i, x_i, y_i $(i = 1, ..., n)$ takvi da su $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $a \leq x_i, y_i \leq b$, te vrijedi (1.5) i

$$\max\{x_1, ..., x_n\} \leq \max\{y_1, ..., y_n\}, \tag{1.7}$$

onda nejednakost (1.6) vrijedi. Također je pokazao da vrijedi i obrnuto, to jest, da je funkcija f 3-konveksna ako za p_i, x_i, y_i $(i = 1, ..., n)$ koji zadovoljavaju gore navedene uvjete vrijedi nejednakost (1.6).

Pečarić je u radu [71] dodatno oslabio Bullenove uvjete, to jest, dokazao je da nejednakost (1.6) vrijedi i ako uvjet (1.7) zamijenimo sa slabijim:

$$x_i + x_{n-i+1} \leq 2c \;\; \text{i} \;\; \frac{p_i x_i + p_{n-i+1} x_{n-i+1}}{p_i + p_{n-i+1}} \leq c, \;\; \text{za} \;\; i = 1, 2, ..., n$$

gdje je $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = ... = x_n + y_n = 2c$.

Mercer je u [57] dobio značajno poboljšanje u potpunosti zamijenivši uvjet simetrije (1.5) uvjetom jednakosti varijanci, to jest dokazao je da nejednakost (1.6) vrijedi pod sljedećim uvjetima:

$$f''' \geq 0, \;\; p_i > 0, \;\; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \;\; a \leq x_i, y_i \leq b, \;\; \max\{x_1, ..., x_n\} \leq \max\{y_1, ..., y_n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(y_i - \bar{y})^2. \tag{1.8}$$

Witkowski je u [78] pokazao da je u Mercerovim pretpostavkama umjesto uvjeta $f''' \geq 0$ dovoljno pretpostaviti da je funkcija f 3-konveksna. Dalje, Witkowski je još dodatno oslabio uvjet (1.8) i pokazao da se znak jednakosti može zamijeniti znakom nejednakosti u određenom smjeru.

U radu [5] su Baloch, Pečarić i Praljak uveli novu klasu funkcija $\mathcal{K}_c^1(a,b)$ koja proširuje klasu 3-konveksnih funkcija i mogu se tumačiti kao funkcije koje su "3-konveksne u točki $c \in \langle a,b \rangle$". Pokazali su da je $\mathcal{K}_c^1(a,b)$ najveća klasa funkcija za koju Levinsonova nejednakost (1.6) vrijedi pod Mercerovim pretpostavkama, to jest da je $f \in \mathcal{K}_c^1(a,b)$ ako i samo ako nejednakost (1.6) vrijedi za proizvoljne težine $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ i nizove x_i i y_i koji zadovoljavaju $x_i \leq c \leq y_i$ za $i = 1, 2, ..., n$.

Mi navodimo definiciju klase $\mathcal{K}_c^1(a,b)$ proširene na proizvoljni interval I iz $\mathbb{R}$.

Definicija 1.5 Neka je $f \colon I \to \mathbb{R}$ i neka je c proizvoljna točka iz unutrašnjosti intervala I. Kažemo da je $f \in \mathcal{K}_c^1(I)$ ($f \in \mathcal{K}_c^2(I)$) ako postoji konstanta D takva da je funkcija $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$ konkavna (konveksna) na $\langle -\infty, c] \cap I$ i konveksna (konkavna) na $[c, +\infty\rangle \cap I$.

1.2 Generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa

Kroz čitavo ovo poglavlje, $\mathbb{E}(Z)$ i $\mathrm{Var}(Z)$ redom označavaju očekivanje i varijancu slučajne varijable Z, i bez dodatnog naglašavanja pretpostavljamo da su te vrijednosti konačne. Pečarić, Praljak i Witkowski u radu [73] dokazali su sljedeću vjerojatnosnu verziju Levinsonove nejednakosti.

Teorem 1.6 ([73]) Neka su $X \colon \Omega_1 \to I$ i $Y \colon \Omega_2 \to I$ dvije slučajne varijable na vjerojatnosnim prostorima (Ω_1, p) i (Ω_2, q) redom, i neka postoji c iz unutrašnjosti intervala I takav da vrijedi

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega_1} X(\omega) \leq c \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\omega \in \Omega_2} Y(\omega) \tag{1.9}$$

i

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) < \infty.$$

Tada za svaku funkciju $f \in \mathcal{K}_c^1(I)$ takvu da su $\mathbb{E}(f(X))$ i $\mathbb{E}(f(Y))$ konačni imamo:

$$\mathbb{E}(f(X)) - f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y)) - f(\mathbb{E}(Y)).$$

Kao jednostavnu posljedicu prethodnog teorema, dobili su sljedeću generalizaciju rezultata dobivenih u radu [5]. Time su dobili značajno poboljšanje Levinsonove nejednakosti, jer ne samo da su dodatno oslabili uvjete, već se i promatraju nizovi brojeva različitih duljina i s različitim težinama.

Korolar 1.7 ([73]) Ako su $x_i \in I \cap \langle -\infty, c]$, $y_j \in I \cap [c, +\infty\rangle$, $p_i > 0$, $q_j > 0$ za $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., m$ takvi da je $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^m q_j = 1$ i $\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^m q_j(y_j - \bar{y})^2$, tada

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \sum_{j=1}^{m} q_j f(y_j) - f(\bar{y}) \tag{1.10}$$

vrijedi za sve $f \in \mathcal{K}_c^1(I)$.

Budući da je Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost proizašla iz Jensenove, one su usko povezane. Jensenova nejednakost nam daje donju, dok nam Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost daje gornju granicu za očekivanje konveksnih funkcija. Zato je prirodno očekivati da će vrijediti generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti analogna onoj iz Teorema 1.6. Cilj ovog odjeljka je pronaći takvu generalizaciju, te ispitati pod kakvim sve uvjetima ona vrijedi.

Glavni rezultat u ovom odjeljku je generalizacija Levinsonovog tipa Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za matematičko očekivanje dobivena u radu [39].

Teorem 1.8 Neka je $-\infty < a \leq A \leq b \leq B < +\infty$. Neka su $X \colon \Omega_1 \to [a, A]$ i $Y \colon \Omega_2 \to [b, B]$ dvije slučajne varijable na vjerojatnosnim prostorima (Ω_1, p) i (Ω_2, q) redom takve da (1.9) vrijedi i

$$\frac{A - \mathbb{E}(X)}{A - a} a^2 + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{A - a} A^2 - \mathbb{E}(X^2) = \frac{B - \mathbb{E}(Y)}{B - b} b^2 + \frac{\mathbb{E}(Y) - b}{B - b} B^2 - \mathbb{E}(Y^2). \tag{1.11}$$

Tada za svaku funkciju $f \in \mathcal{K}_c^1(a, B)$ takvu da su $\mathbb{E}(f(X))$ i $\mathbb{E}(f(Y))$ konačni imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{A - \mathbb{E}(X)}{A - a} f(a) + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{A - a} f(A) - \mathbb{E}(f(X)) \\
\leq &\frac{B - \mathbb{E}(Y)}{B - b} f(b) + \frac{\mathbb{E}(Y) - b}{B - b} f(B) - \mathbb{E}(f(Y)).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Dokaz. Neka je $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$, gdje je D konstanta iz Definicije 1.5. Pošto je $F \colon [a, A] \to \mathbb{R}$ konkavna, iz Edmundson-Madanskyjeve nejednakosti (1.3) odmah slijedi

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{A - \mathbb{E}(X)}{A - a} F(a) + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{A - a} F(A) - \mathbb{E}(F(X)) \\
&= \frac{A - \mathbb{E}(X)}{A - a} f(a) + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{A - a} f(A) - \mathbb{E}(f(X)) \\
&\quad - \frac{D}{2}\Big(\frac{A - \mathbb{E}(X)}{A - a} a^2 + \frac{\mathbb{E}(X) - a}{A - a} A^2 - \mathbb{E}(X^2)\Big).
\end{aligned}$$

Kad presložimo gornju nejednakost, dobijemo

$$\begin{aligned}
&-\frac{D}{2}\Big(\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}a^2+\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}A^2-\mathbb{E}(X^2)\Big)\\
&\leq-\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}f(a)-\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}f(A)+\mathbb{E}(f(X)).
\end{aligned}\tag{1.13}$$

Slično, $F\colon[b,B]\to\mathbb{R}$ je konveksna, pa na jednak način dobijemo

$$\begin{aligned}
0&\leq\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}F(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}F(B)-\mathbb{E}(F(Y))\\
&=\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}f(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}f(B)-\mathbb{E}(f(Y))\\
&\quad-\frac{D}{2}\Big(\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}b^2+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}B^2-\mathbb{E}(Y^2)\Big),
\end{aligned}$$

i nakon preslagivanja imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{D}{2}\Big(\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}b^2+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}B^2-\mathbb{E}(Y^2)\Big)\\
\leq&\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}f(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}f(B)-\mathbb{E}(f(Y)).
\end{aligned}\tag{1.14}$$

Nakon što zbrojimo (1.13) i (1.14), dobijemo

$$\begin{aligned}
0&=\frac{D}{2}\Big(\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}b^2+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}B^2-\mathbb{E}(Y^2)\\
&\quad-\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}a^2-\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}A^2+\mathbb{E}(X^2)\Big)\\
&\leq\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}f(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}f(B)-\mathbb{E}(f(Y))\\
&\quad-\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}f(a)-\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}f(A)+\mathbb{E}(f(X))
\end{aligned}$$

čime smo dokazali tvrdnju teorema. □

Iz dokaza prethodnog teorema očito je da nejednakost (1.12) vrijedi i ako zamijenimo uvjet jednakosti (1.11) slabijim uvjetom

$$\begin{aligned}
D\Big(&\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}b^2+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}B^2-\mathbb{E}(Y^2)\\
&-\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}a^2-\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}A^2+\mathbb{E}(X^2)\Big)\geq 0.
\end{aligned}$$

Budući da je $f''_-(c)\leq D\leq f''_+(c)$ (za detalje pogledati rad [5]), ako je dodatno funkcija f konveksna (respektivno konkavna), taj se uvjet može još dalje oslabiti na

$$\frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}b^2+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}B^2-\mathbb{E}(Y^2)$$

$$-\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}a^2-\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}A^2+\mathbb{E}(X^2)\geq 0 \text{ (respektivno } \leq 0 \text{)}.$$

Lako se iz (1.13) i (1.14) vidi da se nejednakost (1.12) može zapisati i kao

$$\begin{aligned}\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}f(a)+\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}f(A)-\mathbb{E}(f(X))\leq 0\\ \leq \frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}f(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}f(B)-\mathbb{E}(f(Y))\end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned}\frac{A-\mathbb{E}(X)}{A-a}f(a)+\frac{\mathbb{E}(X)-a}{A-a}f(A)-\mathbb{E}(f(X))\leq \frac{D}{2}C\\ \leq \frac{B-\mathbb{E}(Y)}{B-b}f(b)+\frac{\mathbb{E}(Y)-b}{B-b}f(B)-\mathbb{E}(f(Y)),\end{aligned}$$

gdje je C jednak jednoj od strana u jednakosti (1.11).

Sljedeći rezultat daje nam diskretnu verziju generalizacije Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa, i lako se dobije kao jednostavna posljedica prethodnog teorema.

Korolar 1.9 Neka je $-\infty < a \leq A \leq c \leq b \leq B < +\infty$. Ako su $x_i \in [a, A]$, $y_j \in [b, B]$, $p_i > 0$, $q_j > 0$ za $i = 1, ..., n$ i $j = 1, ..., m$ takvi da je $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^m q_j = 1$ i

$$\frac{A-\bar{x}}{A-a}a^2+\frac{\bar{x}-a}{A-a}A^2-\sum_{i=1}^n p_i x_i^2=\frac{B-\bar{y}}{B-b}b^2+\frac{\bar{y}-b}{B-b}B^2-\sum_{j=1}^m q_j y_j^2, \tag{1.15}$$

gdje je $\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ i $\bar{y} = \sum_{j=1}^m q_j y_j$, tada za svaku funkciju $f \in \mathcal{K}_c^1(a, B)$ vrijedi

$$\frac{A-\bar{x}}{A-a}f(a)+\frac{\bar{x}-a}{A-a}f(A)-\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)\leq\frac{B-\bar{y}}{B-b}f(b)+\frac{\bar{y}-b}{B-b}f(B)-\sum_{j=1}^m q_j f(y_j). \tag{1.16}$$

Dokaz. Neka je X diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti x_i s vjerojatnošću p_i za svaki $i = 1, 2, ..., n$ i neka je Y diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti y_j s vjerojatnošću q_j za svaki $j = 1, 2, ..., m$. Odmah se vidi da slučajne varijable X and Y zadovoljavaju uvjete iz Teorema 1.8, pa nejednakost (1.16) slijedi direktno iz (1.12). $\square$

1.3 Generalizacija operatorske Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa

U ovom odjeljku radit ćemo s općim oblikom Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru. Da bi mogli iskazati dobivene rezultate, potrebno je najprije opisati odgovarajuće okruženje.

Neka je H Hilbertov prostor, te neka je $\mathcal{B}(H)$ C^*-algebra svih omeđenih (to jest neprekidnih) linearnih operatora na H. Sa $\mathcal{B}_h(H)$ označavamo polu-prostor svih hermitskih operatora iz $\mathcal{B}(H)$.

Ako je A hermitski operator i ako je f realna neprekidna funkcija na spektru $Sp(A)$ od A, tada iz $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in Sp(A)$ od A slijedi da je $f(A) \geq 0$, to jest $f(A)$ je pozitivni operator na H. Ekvivalentno, ako su i f i g realne neprekidne funkcije na $Sp(A)$, tada vrijedi sljedeće svojstvo:

$$\text{iz } \; f(t) \geq g(t) \text{ za svaki } t \in Sp(A) \text{ slijedi da je } f(A) \geq g(A) \tag{1.17}$$

u operatorskom poretku prostora $\mathcal{B}(H)$.

Donju i gornju granicu hermitskog operatora $X \in \mathcal{B}(H)$ redom definiramo kao:

$$m_X = \inf_{||\xi||=1} \langle X\xi, \xi \rangle \quad \text{i} \quad M_X = \sup_{||\xi||=1} \langle X\xi, \xi \rangle.$$

Preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ je linearno ako je aditivno i homogeno, to jest ako vrijedi $\Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\Phi(X) + \beta\Phi(Y)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $X, Y \in \mathcal{B}(H)$. Linearno preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ je pozitivno ako čuva operatorski poredak $\geq$, to jest ako za pozitivni operator $A \in \mathcal{B}(H)$ vrijedi da je i $\Phi(A)$ također pozitivni operator. Linearno preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ je unitalno ako čuva operator identitete, to jest ako vrijedi $\Phi(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$.

Ako je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ operatorski konveksna, tada Jensenova operatorska nejednakost

$$f(\Phi(X)) \leq \Phi(f(X)) \tag{1.18}$$

vrijedi za svako pozitivno unitalno linearno preslikavanje Φ na $\mathcal{B}(H)$ i za svaki operator $X \in \mathcal{B}_h(H)$ sa spektrom sadržanim u intervalu I.

Mičić Hot, Pečarić i Praljak su u radu [62] dokazali generalizacija Levinsonove nejednakosti za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru. Budući da se njihov rezultat zasniva na operatorskoj konveksnosti i konkavnosti, prije iskazivanja spomenutog rezultata trebamo dati definiciju klase funkcija $\mathring{\mathcal{K}}_c^1(I)$ koja se nalazi u [62].

Definicija 1.10 Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$, te neka točka c pripada unutrašnjosti intervala I. Kažemo da je $f \in \mathring{\mathcal{K}}_c^1(I)$ (to jest, $f \in \mathring{\mathcal{K}}_c^2(I)$) ako postoji konstanta D takva da je funkcija $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$ operatorski konkavna (to jest, operatorski konveksna) na $\langle -\infty, c] \cap I$, te operatorski konveksna (to jest, operatorski konkavna) na $[c, +\infty\rangle \cap I$.

Teorem 1.11 ([62]) Neka su $X_i, Y_j \in \mathcal{B}_h(H)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, hermitski operatori sa spektrom sadržanim redom u intervalima $[m_X, M_X]$ i $[m_Y, M_Y]$ takvim da je $m_X < M_X \leq c \leq m_Y < M_Y$. Neka su $\Phi_i, \Psi_j\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, pozitivna linearna preslikavanja takva da vrijedi $\sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$ i $\sum_{j=1}^k \Psi_j(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$. Neka je

$f \in \mathring{\mathcal{K}}_c^1(m_X, M_Y)$. Ako vrijedi

$$C_1 := \frac{D}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i^2) - \Big(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i)\Big)^2\Big] \leq C_2 := \frac{D}{2}\Big[\sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j^2) - \Big(\sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j)\Big)^2\Big]$$

tada imamo

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(X_i)) - f\Big(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i)\Big) \leq C_1 \leq C_2 \leq \sum_{j=1}^{k}\Psi_j(f(Y_j)) - f\Big(\sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j)\Big). \tag{1.19}$$

Sljedeća generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru dokazana je u monografiji [25].

Teorem 1.12 ([25]) Neka su $A_j \in \mathcal{B}_h(H)$ hermitski operatori sa spektrom sadržanim u intervalu $[m, M]$ za neke skalare $m < M$, te neka su $\Phi_j\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ pozitivna linearna preslikavanja za $j = 1, ..., n$ takva da je $\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$. Ako je $f\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(f(A_j)) \leq \frac{M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n}\Phi_j(A_j)}{M-m}f(m) + \frac{\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K}{M-m}f(M). \tag{1.20}$$

Prvi i glavni rezultat ovog poglavlja je generalizacija Levinsonovog tipa Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za operatore u Hilbertovom prostoru, i dokazan je u radu [40] korištenjem slične metode kao u prethodnom poglavlju.

Teorem 1.13 Neka su $X_i, Y_j \in \mathcal{B}_h(H)$, za $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, hermitski operatori sa spektrom redom sadržanim u intervalima $[m_X, M_X]$ i $[m_Y, M_Y]$, gdje su $m_X < M_X \leq c \leq m_Y < M_Y$ skalari. Neka su $\Phi_i, \Psi_j\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, pozitivna linearna preslikavanja takva da vrijedi $\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$ i $\sum_{j=1}^{k}\Psi_i(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$. Neka je $f \in \mathcal{K}_c^1(m_X, M_Y)$. Ako vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{D}{2}\Big[\frac{M_X\mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i)}{M_X - m_X}m_X^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i) - m_X\mathbf{1}_K}{M_X - m_X}M_X^2 - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i^2)\Big] \\
=&C_1 \leq C_2 = \frac{D}{2}\Big[\frac{M_Y\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y}m_Y^2 + \frac{\sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j) - m_Y\mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y}M_Y^2 \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j^2)\Big]
\end{aligned} \tag{1.21}$$

tada imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{M_X\mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i)}{M_X - m_X}f(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(X_i) - m_X\mathbf{1}_K}{M_X - m_X}f(M_X) - \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(f(X_i)) \\
\leq&C_1 \leq C_2 \leq \frac{M_Y\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y}f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^{k}\Psi_j(Y_j) - m_Y\mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y}f(M_Y)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(f(Y_j)). \tag{1.22}$$

Ako je $f \in \mathcal{K}_c^2(m_X, M_Y)$ i $C_1 \geq C_2$, tada su nejednakosti u (1.22) obrnute.

Dokaz. Dokazat ćemo samo slučaj kada je $f \in \mathcal{K}_c^1(m_X, M_Y)$. Neka je $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$, gdje je D konstanta iz Definicije 1.5. Budući da je funkcija $F\colon [m_X, c] \to \mathbb{R}$ konkavna, iz Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za operatore u Hilbertovom prostoru (1.20) imamo:

$$\begin{aligned}
0 \geq{}& \frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} F(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} F(M_X) \\
&- \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(F(X_i)) \\
={}& \frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} f(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} f(M_X) \\
&- \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(f(X_i)) - \frac{D}{2}\Bigg[\frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} m_X^2 + \\
&\frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} M_X^2 - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i^2)\Bigg],
\end{aligned}$$

to jest, dobili smo

$$\begin{aligned}
&\frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} f(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} f(M_X) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(f(X_i)) \leq C_1.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Slično, zato jer je funkcija $F\colon [c, M_Y] \to \mathbb{R}$ konveksna, na isti način dobijemo

$$\begin{aligned}
0 \leq{}& \frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} F(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} F(M_Y) \\
&- \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(F(Y_j)) \\
={}& \frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} f(M_Y) \\
&- \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(f(Y_j)) - \frac{D}{2}\Bigg[\frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} m_Y^2 + \\
&\frac{\sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} M_Y^2 - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j^2)\Bigg],
\end{aligned}$$

pa nakon što presložimo tako dobivenu relaciju, imamo

$$\begin{aligned}C_2 \leq & \frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} f(M_Y) \\ & - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(f(Y_j)). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Konačno, kombiniranjem nejednakosti (1.23) i (1.24), te uzimajući u obzir da vrijedi (1.21), dobivamo upravo (1.22), čime je dokaz završen. □

Uvjet (1.21) možemo zamijeniti jačim uvjetom

$$(D \geq 0 \text{ i } \Delta_X \leq \delta_Y) \;\text{ ili }\; (D \leq 0 \text{ i } \Delta_Y \leq \delta_X),$$

gdje su $\delta_X \leq \Delta_X$ (respektivno $\delta_Y \leq \Delta_Y$) donja i gornja granica pozitivnog operatora X (respektivno Y) definiranog kao

$$X = \frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} m_X^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} M_X^2 - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i^2)$$

(respektivno

$$Y = \frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} m_Y^2 + \frac{\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} M_Y^2 - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j^2)\Big).$$

Ako je još funkcija f konveksna (respektivno konkavna), tada vrijedi $f''_-(c) \leq D \leq f''_+(c)$ (respektivno $f''_+(c) \leq D \leq f''_-(c)$), pa se uvjet (1.21) može oslabiti na (vidjeti [5])

$$X \leq Y, \qquad (\text{respektivno } \; Y \leq X).$$

U sljedećem rezultatu je dana jednostavnija verzija nejednakosti (1.22).

Korolar 1.14 Neka su $X_i, Y_j \in \mathcal{B}_h(H)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, hermitski operatori sa spektrom sadržanim u $[m_X, M_X]$ i $[m_Y, M_Y]$ respektivno, gdje su $m_X < M_X \leq c \leq m_Y < M_Y$ skalari. Neka su $\Phi_i, \Psi_j \colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, pozitivna linearna preslikavanja takva da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$ i $\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$. Neka je $f \in \mathcal{K}_c^1(m_X, M_X)$. Ako vrijedi

$$\begin{aligned} C := & \frac{M_X \mathbf{1}_K - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i)}{M_X - m_X} m_X^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i) - m_X \mathbf{1}_K}{M_X - m_X} M_X^2 - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(X_i^2) \\ = & \frac{M_Y \mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j)}{M_Y - m_Y} m_Y^2 + \frac{\sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j) - m_Y \mathbf{1}_K}{M_Y - m_Y} M_Y^2 - \sum_{j=1}^{k} \Psi_j(Y_j^2) \end{aligned} \tag{1.25}$$

tada

$$\begin{aligned}
&\frac{M_X\mathbf{1}_K-\sum_{i=1}^n\Phi_i(X_i)}{M_X-m_X}f(m_X)+\frac{\sum_{i=1}^n\Phi_i(X_i)-m_X\mathbf{1}_K}{M_X-m_X}f(M_X)-\sum_{i=1}^n\Phi_i(f(X_i))\\
\leq &C\leq\frac{M_Y\mathbf{1}_K-\sum_{j=1}^k\Psi_j(Y_j)}{M_Y-m_Y}f(m_Y)+\frac{\sum_{j=1}^k\Psi_j(Y_j)-m_Y\mathbf{1}_K}{M_Y-m_Y}f(M_Y)\\
&\qquad-\sum_{j=1}^k\Psi_j(f(Y_j)).
\end{aligned}\tag{1.26}$$

Ako je $f\in\mathcal{K}_c^2(m_X,M_Y)$, tada su nejednakosti u (1.26) obrnute.

1.3.1 Rezultati sa skalarnim produktom

Mičić Hot, Pečarić i Praljak su u radu [62] također dokazali i generalizaciju Levinsonove nejednakosti za skalarni produkt hermitskih operatora u Hilbertovom prostoru. Za razliku od njihovog ranije iskazanog rezultata gdje je bila potrebna operatorska konveksnost i konkavnost, u ovom je potrebna samo konveksnost i konkavnost u klasičnom smislu.

Teorem 1.15 ([62]) Neka su $X_i,Y_j\in\mathcal{B}_h(H)$, $i=1,...,n$, $j=1,...,k$, hermitski operatori sa spektrom sadržanim redom u intervalima $[m_X,M_X]$ i $[m_Y,M_Y]$ takvim da je $m_X<M_X\leq c\leq m_Y<M_Y$. Neka su $z_i,w_j\in H$, $i=1,...,n$, $j=1,...,k$, vektori za koje vrijedi $\sum_{i=1}^n||z_i||^2=1$ i $\sum_{j=1}^k||w_j||^2=1$. Neka je $f\in\mathcal{K}_c^1(m_X,M_Y)$. Ako vrijedi

$$C_1:=\frac{D}{2}\sum_{i=1}^n\langle(X_i-\bar{X}\mathbf{1}_H)^2z_i,z_i\rangle\leq C_2:=\frac{D}{2}\sum_{j=1}^k\langle(Y_j-\bar{Y}\mathbf{1}_H)^2w_j,w_j\rangle$$

tada

$$\sum_{i=1}^n\langle f(X_i)z_i,z_i\rangle-f(\bar{X})\leq C_1\leq C_2\leq\sum_{j=1}^k\langle f(Y_j)w_j,w_j\rangle-f(\bar{Y}),\tag{1.27}$$

gdje je $\bar{X}=\sum_{i=1}^n\langle X_iz_i,z_i\rangle$ i $\bar{Y}=\sum_{j=1}^k\langle Y_jw_j,w_j\rangle$.

U ovom odjeljku izvesti ćemo generalizaciju Levinsonovog tipa skalarne Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za operatore u Hilbertovom prostoru. Da bi mogli izreći naše tvrdnje, prvo moramo iskazati poopćenu verziju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za skalarni produkt koja će nam trebati u dokazu spomenutog rezultata.

Teorem 1.16 ([25]) Neka su $A_1,...,A_n$ hermitski operatori na Hilbertovom prostoru H sa spektrom sadržanim u intervalu $[m,M]$ za neke skalare $m<M$. Ako je f konveksna funkcija na $[m,M]$, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^n\langle f(A_i)x_i,x_i\rangle\leq\frac{M-\sum_{i=1}^n\langle A_ix_i,x_i\rangle}{M-m}f(m)+\frac{\sum_{i=1}^n\langle A_ix_i,x_i\rangle-m}{M-m}f(M)\tag{1.28}$$

za svaku n-torku vektora $x_1, ..., x_n \in H$ takvih da je $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = 1$.

U dokazu sljedećeg rezultata koristimo tehniku analognu onoj u dokazu Teorema 1.13, ali zbog potpunosti dati ćemo čitavi dokaz.

Teorem 1.17 Neka su $X_i, Y_j \in \mathcal{B}_h(H)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, hermitski operatori sa spektrom redom sadržanim u intervalima $[m_X, M_X]$ i $[m_Y, M_Y]$ takvima da za njihove granice vrijedi $m_X < M_X \le c \le m_Y < M_Y$. Neka su $z_i, w_j \in H$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$, vektori takvi da je $\sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 = 1$ i $\sum_{j=1}^k \|w_j\|^2 = 1$. Neka je $f \in \mathcal{K}_c^1(m_X, M_Y)$. Ako vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{D}{2}\Big[\frac{M_X - \sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} m_X^2 + \frac{\sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} M_X^2 - \sum_{i=1}^n \langle X_i^2 z_i, z_i\rangle\Big] \\
=&C_1 \le C_2 = \frac{D}{2}\Big[\frac{M_Y - \sum_{j=1}^k\langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} m_Y^2 + \frac{\sum_{j=1}^k\langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} M_Y^2 \\
&- \sum_{j=1}^k \langle Y_j^2 w_j, w_j\rangle\Big] \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

onda imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{M_X - \sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} f(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} f(M_X) - \sum_{i=1}^n \langle f(X_i) z_i, z_i\rangle \\
\le&C_1 \le C_2 \le \frac{M_Y - \sum_{j=1}^k\langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k\langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} f(M_Y) \\
&- \sum_{j=1}^k \langle f(Y_j) w_j, w_j\rangle. \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Ako je $f \in \mathcal{K}_c^2(m_X, M_Y)$ i $C_1 \ge C_2$, onda su nejednakosti u (1.30) obrnute.

Dokaz. Kao i ranije, dokazati ćemo samo slučaj kad je $f \in \mathcal{K}_c^1(m_X, M_Y)$. Neka je $F(x) = f(x) - \frac{D}{2}x^2$, gdje je D konstanta iz Definicije 1.5. Budući da je $F\colon [m_X, c] \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija, poopćena Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost za skalarni produkt (1.28) implicira

$$\begin{aligned}
0 \ge& \frac{M_X - \sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} F(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} F(M_X) \\
&- \sum_{i=1}^n \langle F(X_i) z_i, z_i\rangle \\
=& \frac{M_X - \sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} f(m_X) + \frac{\sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} f(M_X) \\
&- \sum_{i=1}^n \langle f(X_i) z_i, z_i\rangle - \frac{D}{2}\Big[\frac{M_X - \sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} m_X^2 + \\
&\frac{\sum_{i=1}^n\langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} M_X^2 - \sum_{i=1}^n \langle X_i^2 z_i, z_i\rangle\Big],
\end{aligned}$$

čime smo dobili

$$\begin{aligned}\frac{M_X - \sum_{i=1}^n \langle X_i z_i, z_i\rangle}{M_X - m_X} f(m_X) &+ \frac{\sum_{i=1}^n \langle X_i z_i, z_i\rangle - m_X}{M_X - m_X} f(M_X) \\ &- \sum_{i=1}^n \langle f(X_i) z_i, z_i\rangle \le C_1. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Na sličan način, budući da je $F\colon [c, M_Y] \to \mathbb{R}$ konveksna, na analogan način dobijemo

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{M_Y - \sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} F(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} F(M_Y) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \langle F(Y_j) w_j, w_j\rangle \\ &= \frac{M_Y - \sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} f(M_Y) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \langle f(Y_j) w_j, w_j\rangle - \frac{D}{2}\Bigg[\frac{M_Y - \sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} m_Y^2 + \\ &\quad \frac{\sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} M_Y^2 - \sum_{j=1}^k \langle Y_j^2 w_j, w_j\rangle\Bigg], \end{aligned}$$

pa nakon preslagivanja imamo

$$\begin{aligned} C_2 &\le \frac{M_Y - \sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle}{M_Y - m_Y} f(m_Y) + \frac{\sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle - m_Y}{M_Y - m_Y} f(M_Y) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \langle f(Y_j) w_j, w_j\rangle. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Nejednakost (1.30) direktno slijedi kombiniranjem nejednakosti (1.31) i (1.32) i uzimanjem u obzir uvjet teorema (1.29). □

Preslikavanja $\Phi_i, \Psi_J\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., k$ iz prethodnog poglavlja možemo odabrati na sljedeći način. Neka su $z_1, ..., z_n$ i $w_1, ..., w_k$ vektori iz H takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^n \|z_i\|^2 = 1$ i $\sum_{j=1}^k \|w_j\|^2 = 1$. Za bilo koji $A \in \mathcal{B}(H)$ definiramo preslikavanje Φ_i sa $\Phi_i(A) = \langle A z_i, z_i\rangle$, te preslikavanje Ψ_j sa $\Psi_j(A) = \langle A w_j, w_j\rangle$. Tada su $\Phi_i, \Psi_j\colon \mathcal{B}(H) \to \mathbb{R}$ pozitivni linearni funkcionali takvi da je $\sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{1}_H) = \sum_{j=1}^k \Psi_j(\mathbf{1}_H) = 1$. Sada vidimo da vrijedi $\sum_{i=1}^n \Phi_i(X_i) = \sum_{i=1}^n \langle X_i z_i, z_i\rangle$ i $\sum_{j=1}^k \Psi_j(Y_j) = \sum_{j=1}^k \langle Y_j w_j, w_j\rangle$. Na ovaj način Teorem 1.17 direktno slijedi iz Teorema 1.13 (vidjeti [25]).

Poglavlje 2

Obrati nejednakosti u obliku razlike za linearne funkcionale

U ovom poglavlju najprije ćemo dati pregled nekih bitnih rezultata povezanih s Jensenovom i Edmundson-Lah-Ribaričevom nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale koji su poznati od ranije. Dobit ćemo obrate spomenutih rezultata i dokazat ćemo profinjenja i poboljšanja istih, te ih primijeniti na razne klasične nejednakosti poput Hölderove, Hadamardove, nejednakosti među generaliziranim sredinama, te nejednakosti Giaccardija i Petrovića, čime ćemo dobiti obrate navedenih nejednakosti koji daju gornju ogradu za razliku desne i lijeve strane u tim nejednakostima.

2.1 Uvod

Neka je E neprazan skup i L vektorski prostor realnih funkcija $f\colon E \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:

(L1): $f, g \in L \Rightarrow (af + bg) \in L$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$;

(L2): $\mathbf{1} \in L$, tj. ako je $f(t) = 1$ za svaki $t \in E$, onda $f \in L$.

Također promatramo pozitivne linearne funkcionale $A\colon L \to \mathbb{R}$, to jest, pretpostavljamo da vrijedi:

(A1): $A(af + bg) = aA(f) + bA(g)$ za $f, g \in L$ i $a, b \in \mathbb{R}$;

(A2): $f \in L$, $f(t) \geq 0$ za svaki $t \in E \Rightarrow A(f) \geq 0$.

Kroz čitavo ovo poglavlje, za funkcije koje su definirane nad nekim intervalom $[m, M]$ bez dodatnog naglašavanja pretpostavljamo da za granice spomenutog intervala vrijedi $-\infty < m < M < \infty$.

Jessen [45] je dao sljedeću generalizaciju Jensenove nejednakosti za konveksne funkcije (također pogledati [74, str.47]):

Teorem 2.1 ([45]) Neka je L vektorski prostor realnih funkcija definiranih na nepraznom skupu E koji zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ i pretpostavimo da je ϕ neprekidna konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Ako je A pozitivni linearni funkcional takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$, onda za sve $f \in L$ takve da je $\phi(f) \in L$ vrijedi $A(f) \in I$ i

$$\phi(A(f)) \leq A(\phi(f)). \tag{2.1}$$

Sljedeći rezultat je generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za linearne funkcionale i dokazali su ga Beesack i Pečarić u [8] (također pogledati [74, str.98]):

Teorem 2.2 ([8]) Neka je ϕ konveksna funkcija na $I = [m, M]$, neka je L vektorski prostor realnih funkcija definiranih na nepraznom skupu E koji zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Tada za svaki $f \in L$ takav da je $\phi(f) \in L$ (pa vrijedi $m \leq f(t) \leq M$ za sve $t \in E$), imamo

$$A(\phi(f)) \leq \frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M). \tag{2.2}$$

Da bi mogli iskazati poboljšanje Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (2.2) koje su dobili Klaričić Bakula, Pečarić i Perić u radu [47], trebamo linearnu klasu realnih funkcija L definiranu na početku poglavlja opremiti dodatnim svojstvom:

(L3): ako su $f, g \in L$, onda je $\min\{f, g\} \in L$ ili $\max\{f, g\} \in L$ (svojstvo rešetke)

Teorem 2.3 ([47]) Neka je L vektorski prostor realnih funkcija definiranih na nepraznom skupu E koji zadovoljava svojstva $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ i neka je A pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Ako je ϕ konveksna funkcija na $[m, M]$, onda za sve $f \in L$ takve da je $\phi(f) \in L$ vrijedi $A(f) \in [m, M]$ i

$$A(\phi(f)) \leq \frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M) - A(\tilde{f})\delta_\phi, \tag{2.3}$$

gdje su

$$\tilde{f} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{M - m}\left|f - \frac{m + M}{2}\mathbf{1}\right|, \quad \delta_\phi = \phi(m) + \phi(M) - 2\phi\Big(\frac{m + M}{2}\Big). \tag{2.4}$$

Dragomir je u radu [17] promatrao izmjerivi prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ koji se sastoji od skupa Ω, σ-algebre $\mathcal{A}$ podskupova od Ω i prebrojivo aditivne i pozitivne mjere μ na $\mathcal{A}$ koja poprima vrijednosti u $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Za μ-izmjerivu funkciju $w\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takvu da je $w(x) \geq 0$ za μ-s.s. (skoro svaki) $x \in \Omega$, promatrao je Lebesgueov prostor

$$L_w(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ je } \mu - \text{izmjeriva i } \textstyle\int_\Omega w(x)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) < \infty\},$$

te je dokazao sljedeći obrat Jensenove nejednakosti.

Teorem 2.4 ([17]) Neka je $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$ takvi da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Neka je $w > 0$ takva da je $\int w \mathrm{d}\mu = 1$. Ako je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-izmjeriva, zadovoljava granice

$$-\infty < m \leq f(t) \leq M < \infty \text{ za } \mu\text{-s.s. } t \in \Omega$$

i takva da je $f, \phi \circ f \in L_w(\Omega, \mu)$, onda

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega w(t)\phi(f(t))\mathrm{d}\mu(t) - \phi(\bar{f}_{\Omega,w}) \\ &\leq (M - \bar{f}_{\Omega,w})(\bar{f}_{\Omega,w} - m)\frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m} \\ &\leq \frac{1}{4}(M - m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)), \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdje je $\bar{f}_{\Omega,w} := \int_\Omega w(t)f(t)\mathrm{d}\mu(t) \in [m, M]$.

U radu [18] Dragomir je dobio i profinjenje prethodnog rezultata koje navodimo u sljedećem teoremu.

Teorem 2.5 ([18]) Neka je $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$ takvi da $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Neka je $w > 0$ takva da je $\int w \mathrm{d}\mu = 1$. Ako je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-izmjeriva, zadovoljava granice

$$-\infty < m \leq f(t) \leq M < \infty \text{ for } \mu\text{-a.e. } t \in \Omega$$

i takva da je $f, \phi \circ f \in L_w(\Omega, \mu)$, onda

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega w(t)\phi(f(t))\mathrm{d}\mu(t) - \phi(\bar{f}_{\Omega,w}) \\ &\leq \frac{(M - \bar{f}_{\Omega,w})(\bar{f}_{\Omega,w} - m)}{M - m} \sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\ &\leq (M - \bar{f}_{\Omega,w})(\bar{f}_{\Omega,w} - m)\frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m} \\ &\leq \frac{1}{4}(M - m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdje je $\bar{f}_{\Omega,w} := \int_\Omega w(t)f(t)\mathrm{d}\mu(t) \in [m, M]$ i $\Psi_\phi(\cdot; m, M)\colon \langle m, M\rangle \to \mathbb{R}$ je definirana sa

$$\Psi_\phi(t; m, M) = \frac{\phi(M) - \phi(t)}{M - t} - \frac{\phi(t) - \phi(m)}{t - m}.$$

Također imamo nejednakosti

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega w(t)\phi(f(t))\mathrm{d}\mu(t) - \phi(\bar{f}_{\Omega,w}) \leq \frac{1}{4}(M - m)\Psi_\phi(t; m, M) \\ &\leq \frac{1}{4}(M - m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)), \end{aligned} \tag{2.7}$$

ako je $\bar{f}_{\Omega,w} \in \langle m, M\rangle$.

2.2 Obrati Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za linearne funkcionale

Rezultati koji slijede dobiveni su u [37] i redom daju gornju ogradu za razliku između desne i lijeve strane u Jensenovoj i Edmundson-Lah-Ribaričevoj nejednakosti. Prvi teorem je i generalizacija Dragomirovog rezultata (2.5) za linearne funkcionale.

Teorem 2.6 Neka je ϕ neprekidna konveksna funkcija na intervalu I čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$, neka je L vektorski prostor realnih funkcija definiranih na E takav da zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\phi(f) \in L$ i koja zadovoljava granice $m \leq f(t) \leq M$ za sve $t \in E$ imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \\ &\leq (M - A(f))(A(f) - m)\frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m} \\ &\leq \frac{1}{4}(M - m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ako je ϕ konkavna na I, onda su nejednakosti u (2.8) obrnute.

Dokaz. Pretpostavimo da je ϕ konveksna funkcija.
Prva nejednakost slijedi direktno iz Teorema 2.1. Prema Teoremu 2.2 vrijedi

$$A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \leq \frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M) - \phi(A(f)) =: B.$$

Zbog konveksnosti funkcije ϕ vrijedi gradijentna nejednakost:

$$\phi(t) - \phi(M) \geq \phi'_-(M)(t - M)$$

za bilo koji $t \in [m, M]$. Ako pomnožimo tu nejednakost sa $(t - m) \geq 0$, dobivamo

$$(t - m)\phi(t) - (t - m)\phi(M) \geq \phi'_-(M)(t - M)(t - m), \quad t \in [m, M] \tag{2.9}$$

Na sličan način možemo dobiti:

$$(M - t)\phi(t) - (M - t)\phi(m) \geq \phi'_+(m)(t - m)(M - t), \quad t \in [m, M] \tag{2.10}$$

Ako zbrojimo (2.9) i (2.10) i sve podijelimo sa $(m-M)$, dobivamo da za bilo koji $t \in [m, M]$ vrijedi:

$$\frac{(t - m)\phi(M) + (M - t)\phi(m)}{M - m} - \phi(t) \leq \frac{(M - t)(t - m)}{M - m}(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)). \tag{2.11}$$

Budući da je $A(f) \in [m, M]$, možemo u prethodnoj relaciji zamjieniti t s $A(f)$ i dobiti

$$B \le \frac{(M - A(f))(A(f) - m)}{M - m}(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)),$$

što je upravo druga nejednakost u (2.8).

Da bi dokazali treću nejednakost u (2.8), primijetimo da za svaki $t \in [m, M]$ vrijedi nejednakost $\frac{1}{M-m}(M-t)(t-m) \le \frac{1}{4}(M-m)$, čime je tvrdnja teorema dokazana.

Ako je ϕ konkavna funkcija, tada je $-\phi$ konveksna, i možemo primijeniti (2.8) na funkciju $-\phi$, pa obratne nejednakosti slijede množenjem s -1. □

U iskazu Teorema 2.6 traži se da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I zbog osiguravanja konačnosti jednostranih derivacija u (2.8). Bez tražene pretpostavke te bi derivacije mogle biti beskonačne.

Teorem 2.7 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$, neka je L vektorski prostor realnih funkcija definiranih na nepraznom skupu E koji zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\phi(f) \in L$ i koja zadovoljava granice $m \le f(t) \le M$ za sve $t \in E$ vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M) - A(\phi(f)) \\
&\le \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m} A([M - f][f - m]) \\
&\le \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m}(M - A(f))(A(f) - m) \\
&\le \frac{1}{4}(M - m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ako je ϕ konkavna, nejednakosti u (2.12) su obrnute.

Dokaz. Pretpostavimo da je ϕ konveksna funkcija. Prva nejednakost u (2.12) se dobije iz (2.2) tako da oduzmemo $\phi(A(f))$ od obje strane nejednakosti. Budući da je $f(t) \in [m, M]$, možemo zamijeniti t s $f(t)$ u relaciji (2.11), čime dobivamo

$$\frac{M - f(t)}{M - m}\phi(m) + \frac{f(t) - m}{M - m}\phi(M) - \phi(f(t)) \le \frac{(M - f(t))(f(t) - m)}{M - m}(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)).$$

Funkcija definirana s $h(t) = (M - t)(t - m)$ konkavna je na $[m, M]$, pa kad djelujemo funkcionalom A na prethodnu nejednakost, zbog njegove linearnosti i iz Jensenove nejednakosti (2.1) slijedi druga nejednakost u (2.12):

$$\begin{aligned}
\frac{M - A(f)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(f) - m}{M - m}\phi(M) - A(\phi(f)) &\le \frac{(\phi'_-(m) - \phi'_+(m))}{M - m} A([M - f][f - m]) \\
&\le \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m}(M - A(f))(A(f) - m).
\end{aligned}$$

Da bi dokazali posljednju nejednakost u (2.12), primijetimo da za svaki $t \in [m, M]$ vrijedi nejednakost $h(t) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2$. Budući da je $A(f) \in [m, M]$, vrijedi i:

$$h(A(f)) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2,$$

čime je dokaz završen.
Ako je ϕ konkavna, obratne nejednakosti direktno slijede iz konveksnosti funkcije $-\phi$. □

Uz pretpostavke iz prethodna dva teorema, neka je l linearna funkcija kroz točke $(m, f(m))$ i $(M, f(M))$. Budući da je ϕ konveksna funkcija na $[m, M]$, mora vrijediti

$$\phi(A(f)) \leq A(\phi(f)) \leq l(A(f))$$

za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\phi(f) \in L$.
Iz Teorema 2.6 i Teorema 2.7 vidimo da obje razlike

$$A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \ \text{ i } \ l(A(f)) - A(\phi(f))$$

imaju jednaku procjenu, pa slijedi da je, u slabom smislu, $A(\phi(f))$ skoro srednja točka između $\phi(A(f))$ i $l(A(f))$.

Sljedeći rezultati nalaze se u [38] i redom su profinjenja nizova nejednakosti dobivenih u Teoremu 2.6 i Teoremu 2.7. Prvi teorem koji slijedi generalizacija je Dragomirovih rezultata (2.6) i (2.7).

Teorem 2.8 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$. Neka vektorski prostor L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\phi(f) \in L$ i koja zadovoljava granice $m \leq f(t) \leq M$ za sve $t \in E$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &\leq A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \\ &\leq (M - A(f))(A(f) - m) \sup_{t \in \langle m, M \rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\ &\leq (M - A(f))(A(f) - m) \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M - m} \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Također imamo nejednakosti

$$\begin{aligned} 0 &\leq A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \Psi_\phi(A(f); m, M) \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)), \end{aligned} \tag{2.14}$$

gdje je $\Psi_\phi(\cdot; m, M)\colon \langle m, M\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\Psi_\phi(t; m, M) = \frac{1}{M-m}\Big(\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\Big). \tag{2.15}$$

Ako je ϕ konkavna na I, onda su nejednakosti obrnute.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija ϕ konveksna. Ako je $A(f) = m$ ili $A(f) = M$, nejednakosti su očite. Neka je $A(f) \in \langle m, M\rangle$.

Prve nejednakosti u (2.13) i (2.14) slijede direktno iz Teorema 2.1. Prema Teoremu 2.2 imamo

$$\begin{aligned}
A(\phi(f)) - \phi(A(f)) &\le \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) + \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) - \phi(A(f)) \\
&= \frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}\left\{\frac{\phi(M)-\phi(A(f))}{M-A(f)} - \frac{\phi(A(f))-\phi(m)}{A(f)-m}\right\} \\
&= (M-A(f))(A(f)-m)\Psi_\phi(A(f); m, M) \\
&\le (M-A(f))(A(f)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M),
\end{aligned}$$

i vidimo da smo dokazali drugu nejednakost u (2.13). Računamo dalje

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) &= \frac{1}{M-m} \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \left\{\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right\} \\
&\le \frac{1}{M-m}\Big(\sup_{t\in\langle m,M\rangle} \frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} + \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \frac{-(\phi(t)-\phi(m))}{t-m}\Big) \\
&= \frac{1}{M-m}\Big(\sup_{t\in\langle m,M\rangle} \frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \inf_{t\in\langle m,M\rangle} \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\Big) \\
&= \frac{\phi'_-(M)-\phi'_+(m)}{M-m},
\end{aligned}$$

što dokazuje treću nejednakost u (2.13). Da bi dokazali zadnju nejednakost u (2.13), primijetimo da za svaki $t \in [m, M]$ vrijedi $\dfrac{(M-t)(t-m)}{M-m} \le \dfrac{1}{4}(M-m)$. Pošto je $A(f) \in [m, M]$, možemo zamijeniti t s $A(f)$ u prethodnoj nejednakosti.

Dokaz nejednakosti (2.14) je očit iz dokaza za nejednakosti (2.13). Ako je ϕ konkavna, onda je $-\phi$ konveksna, pa možemo primijeniti (2.13) i (2.14) na funkcijiu $-\phi$ i time dobiti obrnute nejednakosti za ϕ. □

Primijetimo da je $\Psi_\phi(\cdot; m, M)$, definirana sa (2.15), zapravo podijeljena razlika drugog reda $[m, t, M]\phi$ funkcije ϕ u točkama m, t i M za svaki $t \in \langle m, M\rangle$.

Da bi mogli dokazati obrat Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti, potreban nam je sljedeći rezultat iz [38]:

Lema 2.9 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I, te neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$ takvi da $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Tada za bilo koji $t \in [m, M]$

vrijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}\Delta_\phi(t;m,M) &= \frac{t-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-t}{M-m}\phi(m) - \phi(t)\\ &\leq (M-t)(t-m)\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M)\\ &\leq \frac{(M-t)(t-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m))\\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Isto tako vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta_\phi(t;m,M) &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2\Psi_\phi(t;m,M)\\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)), \end{aligned} \tag{2.17}$$

gdje je $\Psi_\phi(\cdot;m,M)\colon \langle m,M\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa (2.15) Ako je ϕ konkavna, onda su nejednakosti obrnute.

Dokaz. Neka je ϕ konveksna funkcija. Ako je $t=m$ ili $t=M$, nejednakosti su očite. Za bilo koji $t\in\langle m,M\rangle$ vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta_\phi(t;m,M) &= \frac{t-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-t}{M-m}\phi(m) - \phi(t)\\ &= \frac{(M-t)(t-m)}{M-m}\left[\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right]\\ &= (M-t)(t-m)\Psi_\phi(t;m,M)\\ &\leq (M-t)(t-m)\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M), \end{aligned}$$

što je zapravo prva nejednakost u (2.16). Druga nejednakost slijedi direktno iz sljedećeg:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M) &= \frac{1}{M-m}\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\left\{\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right\}\\ &\leq \frac{1}{M-m}\left(\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} + \sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{-(\phi(t)-\phi(m))}{t-m}\right)\\ &= \frac{1}{M-m}\left(\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \inf_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right)\\ &= \frac{\phi'_-(M)-\phi'_+(m)}{M-m}. \end{aligned}$$

Zadnja nejednakost u (2.16), slijedi direktno iz činjenice da za svaki $t\in[m,M]$ vrijedi $\dfrac{(M-t)(t-m)}{M-m} \leq \dfrac{1}{4}(M-m)$. Dokaz nejednakosti (2.17) je jasan iz dokaza za nejednakosti (2.16). Ako je ϕ konkavna, onda je $-\phi$ konveksna, pa možemo primijeniti (2.16) i (2.17) na funkciju $-\phi$ i tako dobiti obrnute nejednakosti za ϕ. □

Teorem 2.10 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval$[m, M]$. Neka vektorski prostor L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$, te neka je A bilo koji pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Ako je funkcija $f \in L$ takva da je $\phi \circ f \in L$ i $m \le f(t) \le M$ za sve $t \in E$, onda vrijede sljedeći nizovi nejednakosti:

(i)

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) \\ &\le A[(M-f)(f-m)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) \\ &\le \frac{A[(M-f)(f-m)]}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \\ &\le \frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \\ &\le \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) \\ &\le A[(M-f)(f-m)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) \\ &\le (M-A(f))(A(f)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) \\ &\le \frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \\ &\le \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) \\ &\le \frac{1}{4}(M-m)^2 A(\Psi_\phi(t;m,M)) \\ &\le \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \end{aligned} \tag{2.20}$$

gdje je $\Psi_\phi(\cdot;m,M)\colon \langle m,M\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa (2.15). Ako je ϕ konkavna, onda su nejednakosti obrnute.

Dokaz. Neka je funkcija ϕ konveksna. Prve nejednakosti u (2.18), (2.19) i (2.20) slijede direktno iz Teorema 2.2.

Pošto se f nalazi u granicama $m \leq f(t) \leq M$ za svaki $t \in [m, M]$, možemo zamijeniti t s $f(t)$ u nejednakostima (2.16) i (2.17) iz Leme 2.9 i time dobiti

$$\begin{aligned}
&\frac{f(t)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-f(t)}{M-m}\phi(m) - \phi(f(t)) \\
\leq &(M-f(t))(f(t)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\
\leq &\frac{(M-f(t))(f(t)-m)}{M-m}(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)) \\
\leq &\frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m))
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\frac{f(t)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-f(t)}{M-m}\phi(m) - \phi(f(t)) \\
\leq &\frac{1}{4}(M-m)^2\Psi_\phi(f; m, M) \\
\leq &\frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M) - \phi'_+(m)).
\end{aligned}$$

Sad primijenimo linearni funkcional A, koji je pozitivan i vrijedi $A(\mathbf{1}) = 1$, na prethodna dva niza nejednakosti, čime redom dobivamo nejednakosti (2.20) i prve tri nejednakosti u (2.18). Budući da za svaki $t \in [m, M]$, vrijedi $\dfrac{(M-t)(t-m)}{M-m} \leq \dfrac{1}{4}(M-m)$, onda ta nejednakost vrijedi i za $A(f) \in [m, M]$. Na taj način smo dobili i zadnju nejednakost iz (2.18).

Prva nejednakost iz (2.19) je jednaka kao i prva nejednakost iz (2.18). Funkcija $g(t) = (M-t)(t-m)$ konkavna, pa prema Jessenovoj nejednakosti (2.1) imamo da je

$$A([M-f][f-m]) \leq (M - A(f))(A(f) - m),$$

što dokazuje drugu nejednakost iz (2.19). U dokazu Leme 2.9 pokazali smo da vrijedi

$$\sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \leq \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M-m},$$

pa treća nejednakost iz (2.19) direktno slijedi. Za dokazati zadnju nejednakost iz (2.19), opet primijetimo da za svaki $t \in [m, M]$ vrijedi $\dfrac{(M-t)(t-m)}{M-m} \leq \dfrac{1}{4}(M-m)$, pa onda ta nejednakost vrijedi i za $A(f) \in [m, M]$. □

Funkcija ϕ je definirana na intervalu I čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$. Taj uvjet osigurava konačnost jednostranih derivacija u točkama m i M. Tada je

$$\lim_{t\to m^+} \Psi_\phi(t; m, M) = \frac{1}{M-m}\left[\frac{\phi(M)-\phi(m)}{M-m} - \phi'_+(m)\right]$$

i

$$\lim_{t\to M^-} \Psi_\phi(t;m,M) = \frac{1}{M-m}\left[\phi'_-(M) - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right],$$

pa $\Psi_\phi(\cdot;m,M)$ možemo promatrati kao neprekidnu funkciju (u parametru t) na intervalu $[m,M]$. Stoga ako funkcija f zadovoljava granice $m \leq f(t) \leq M$ za svaki $t \in E$, onda je i izraz $\Psi_\phi(f(t);m,M)$ smislen.

Naredna dva teorema redom su poboljšanja Teorema 2.8 i Teorema 2.10. Dokazani su na analogan način kao prethodna dva rezultata, ali uz pomoć poboljšanja Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (2.3), pa za vektorski prostor realnih funkcija L definiranih na nepraznom skupu E mora dodatno vrijediti i svojstvo $(L3)$ definirano u Uvodu.

Teorem 2.11 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I i neka $[m,M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Neka vektorski prostor L zadovoljava svojstva $(L1), (L2)$ i $(L3)$ i neka je A pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Ako je funkcija $f \in L$ takva da je $\phi \circ f \in L$ i $m \leq f(t) \leq M$ za sve $t \in E$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\leq A(\phi(f)) - \phi(A(f)) \\
&\leq (M - A(f))(A(f)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq (M - A(f))(A(f)-m) \frac{\phi'_-(M)-\phi'_+(m)}{M-m} - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Također imamo nejednakosti

$$\begin{aligned}
0 \leq A(\phi(f)) - \phi(A(f)) &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \Psi_\phi(A(f);m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

gdje su $\tilde{f}$ i δ_ϕ definirani u (2.4) i pretpostavljamo da je $\Psi_\phi(f;m,M) \in L$, gdje je $\Psi_\phi(\cdot;m,M)\colon \langle m,M\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa (2.15). Ako je ϕ konkavna na intervalu I, onda su znakovi nejednakosti obrnuti.

Dokaz. Prvo trebamo primijetiti da prema svojstvu $(L3)$ vrijedi

$$\tilde{f} = \min\left\{\frac{M-f(x)}{M-m}, \frac{f(x)-m}{M-m}\right\} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{|f - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}|}{M-m} \in L.$$

Ako je $A(f) = m$ ili $A(f) = M$, nejednakosti su očite. Pretpostavimo da je $A(f) \in \langle m,M\rangle$ i da je funkcija ϕ konveksna.

Prva nejednakost u (2.21) slijedi direktno iz Jessenove nejednakosti (2.1). Prema

Teoremu 2.3 vrijedi

$$
\begin{aligned}
A(\phi(f)) - \phi(A(f)) &\leq \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) + \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) - \phi(A(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
=&\frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}\left\{\frac{\phi(M)-\phi(A(f))}{M-A(f)} - \frac{\phi(A(f))-\phi(m)}{A(f)-m}\right\} - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
=&(M-A(f))(A(f)-m)\Psi_\phi(A(f);m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
\leq&(M-A(f))(A(f)-m)\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi,
\end{aligned}
$$

čime je dokazana druga nejednakost u (2.21).

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M) &= \frac{1}{M-m}\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\left\{\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right\} \\
\leq&\frac{1}{M-m}\left(\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} + \sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{-(\phi(t)-\phi(m))}{t-m}\right) \\
=&\frac{1}{M-m}\left(\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \inf_{t\in\langle m,M\rangle}\frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\right) = \frac{\phi'_-(M)-\phi'_+(m)}{M-m},
\end{aligned}
$$

što dokazuje i treću nejednakost u (2.21). Za dokazati zadnju nejednakost u (2.21), primijetimo da za svaki $t \in [m,M]$ vrijedi nejednakost $\frac{(M-t)(t-m)}{M-m} \leq \frac{1}{4}(M-m)$. Budući da je $A(f) \in [m,M]$, možemo zamijeniti t s $A(f)$.

Dokaz nejednakost (2.22) je jasan iz dokaza za nejednakosti (2.21). Ako je ϕ konkavna, onda je $-\phi$ konveksna, pa možemo primijeniti (2.21) i (2.22) na funkciju $-\phi$ i na taj način dobiti obrnute nizove nejednakosti za ϕ. $\square$

Teorem 2.12 Neka je ϕ konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I i neka $[m,M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Neka vektorski prostor L zadovoljava svojstva $(L1), (L2)$ i $(L3)$ i neka je A pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$. Ako je funkcija $f \in L$ takva da je $\phi \circ f \in L$ i $m \leq f(t) \leq M$ za sve $t \in E$, onda vrijede sljedeći nizovi nejednakosti:

(i)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq A[(M-f)(f-m)]\sup_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\phi(t;m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{A[(M-f)(f-m)]}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq A[(M-f)(f-m)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq (M-A(f))(A(f)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{A(f)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-A(f)}{M-m}\phi(m) - A(\phi(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 A(\Psi_\phi(f;m,M)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) - A(\tilde{f})\delta_\phi
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

gdje su $\tilde{f}$ i δ_ϕ definirani u (2.4), a $\Psi_\phi(\cdot;m,M)$ je definirana sa (2.15). Ako je ϕ konkavna, znakovi nejednakosti su obrnuti.

Dokaz. U dokazu Teorema 2.11 pokazano je da je $\tilde{f} \in L$. Prve nejednakosti u (2.23), (2.24) i (2.25) dobivene su iz (2.3) oduzimanjem $A(\phi(f))$ od obje strane nejednakosti. Pošto f zadovoljava granice $m \leq f(t) \leq M$ za svaki $t \in [m,M]$, možemo zamijeniti t sa $f(t)$ u nejednakostima (2.16) i (2.17) u Lemi 2.9, čime se dobije

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(t)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-f(t)}{M-m}\phi(m) - \phi(f(t)) \\
&\leq (M-f(t))(f(t)-m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t;m,M) \\
&\leq \frac{(M-f(t))(f(t)-m)}{M-m}(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m))
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(t)-m}{M-m}\phi(M) + \frac{M-f(t)}{M-m}\phi(m) - \phi(f(t)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \Psi_\phi(f;m,M) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_-(M)-\phi'_+(m)).
\end{aligned}
$$

Za dokazati nejednakosti (2.25) i prve tri nejednakosti u (2.23), trebamo primijeniti funkcional A, koji je pozitivan, na prethodna dva niza nejednakosti, te oduzeti $A(\tilde{f})\delta_\phi$ svakoj strani tih nejednakosti. Za dokazati četvrtu nejednakost u (2.23), primijetimo da je funkcija $g(t) = (M-t)(t-m)$ konkavna, pa prema Jessenovoj nejednakosti vrijedi

$$A(g(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi \leq g(A(f)) - A(\tilde{f})\delta_\phi.$$

Budući da za svaki $t \in [m, M]$ vrijedi

$$\frac{(M-t)(t-m)}{M-m} - A(\tilde{f})\delta_\phi \leq \frac{1}{4}(M-m) - A(\tilde{f})\delta_\phi,$$

možemo zamijeniti t s $A(f) \in [m, M]$ i na taj način dobiti zadnju nejednakost u (2.23).

Prva nejednakost u (2.24) je jednaka kao i prva nejednakost u (2.23). Opet koristimo konkavnost funkcije $g(t) = (M-t)(t-m)$. Ako oduzmemo $A(\tilde{f})\delta_\phi$ od obje strane u Jessenovoj nejednakosti, slijediti će

$$A([M-f][f-m]) - A(\tilde{f})\delta_\phi \leq (M - A(f))(A(f)-m) - A(\tilde{f})\delta_\phi,$$

što dokazuje drugu nejednakost u (2.24). U dokazu Leme 2.9 pokazali smo da vrijedi

$$\sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \leq \frac{\phi'_-(M) - \phi'_+(m)}{M-m},$$

pa treća nejednakost u (2.24) direktno slijedi oduzimanjem $A(\tilde{f})\delta_\phi$ od obje strane spomenute nejednakosti. Budući da za svaki $t \in [m, M]$ imamo $\dfrac{(M-t)(t-m)}{M-m} \leq \dfrac{1}{4}(M-m)$, i pošto je $A(f) \in [m, M]$, odmah vidimo da vrijedi

$$\frac{(M-A(f))(A(f)-m)}{M-m} - A(\tilde{f})\delta_\phi \leq \frac{1}{4}(M-m) - A(\tilde{f})\delta_\phi,$$

čime smo dokazali i zadnju nejednakost u (2.24).

Ako je ϕ konkavna, onda je $-\phi$ konveksna, pa možemo primijeniti (2.23), (2.24) i (2.25) na funkciju $-\phi$ i time dobiti obrnute nejednakosti za ϕ. □

Kad su primijenjeni na prikladni vektorski prostor realnih funkcija L, Teorem 2.11 i Teorem 2.12 su očito poboljšanja teorema 2.8 i 2.10 pošto pod traženim pretpostavkama vrijedi

$$A(\tilde{f})\delta_\phi = A\left(\frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{|f - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}|}{M-m}\right)\left(\phi(m) + \phi(M) - 2\phi\left(\frac{m+M}{2}\right)\right) \geq 0$$

2.3 Primjene

U ovom odjeljku primijenit ćemo Teorem 2.11 i Teorem 2.12 na neke klasične nejednakosti i time dobiti gornju granicu za razliku desne i lijeve strane tih nejednakosti. Analogne primjene mogu se dobiti i pomoću Teorema 2.6 i Teorema 2.7, te Teorema 2.8 i Teorema 2.10. Spomenuti rezultati dokazani su redom u [37] i [38].

2.3.1 Generalizirane sredine

Definicija 2.13 Neka je $I = \langle a, b\rangle$, gdje su $-\infty \le a < b \le \infty$, te neka je $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. Pretpostavimo da vektorski prostor realnih funkcija L zadovoljava uvjete $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E. Neka je A pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$, te neka je $\psi(f) \in L$ za neku funkciju $f \in L$. Generalizirana sredina funkcije $f \in L$ u odnosu na funkcional A i funkciju ψ je

$$M_\psi(f, A) = \psi^{-1}A(\psi(f)).$$

Primijetimo da ako je $\alpha \le \psi(f(t)) \le \beta$ za $t \in E$, onda zbog pozitivnosti funkcionala A imamo $\alpha \le A(\psi(f)) \le \beta$, pa je $M_\psi(f, A)$ dobro definirana. Također primijetimo da zbog gornjih pretpostavki vrijedi $f(t) \in I$ za $t \in E$. U nastavku rada pretpostavljamo da $f \in L$ zadovoljava gornje pretpostavke, pa dobiveni rezultati vrijede samo za takve funkcije $f \in L$.

Prvo spomenimo neke poznate rezultate o generaliziranim sredinama. Dokaze tih rezultata može se pronaći u [74].

Teorem 2.14 ([74]) Neka je $I = \langle a, b\rangle$, gdje su $-\infty \le a < b \le \infty$, te neka su $\psi, \chi\colon I \to \mathbb{R}$ neprekidne i strogo monotone funkcije. Pretpostavimo da vektorski prostor realnih funkcija L zadovoljava uvjete $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E. Neka je A pozitivni linearni funkcional na L takav da je $A(\mathbf{1}) = 1$, te neka je $f \in L$ takva da je $\psi(f), \chi(f) \in L$. Onda vrijedi nejednakost

$$M_\psi(f, A) \le M_\chi(f, A),$$

pod pretpostavkom da je ili χ rastuća i $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ konveksna, ili da je χ padajuća i $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ konkavna.

Teorem 2.15 ([74]) Neka je $I = [m, M]$, te neka L, A, ψ i χ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 2.14. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $m \le f(t) \le M$ za svaki $t \in E$ imamo

$$(\psi(M) - \psi(m))A(\chi(f)) - (\chi(M) - \chi(m))A(\psi(f)) \le \psi(M)\chi(m) - \chi(M)\psi(m),$$

pod pretpostavkom da je $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ konveksna. Nejednakost je obrnuta ako je funkcija ϕ konkavna.

Sljedeći rezultati nam daju gornju ogradu za razliku između desne i lijeve strane u nejednakostima iz Teorema 2.14 i Teorema 2.15 respektivno.

Teorem 2.16 Neka L, A, ψ, χ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 2.15, te neka još dodatno L zadovoljava svojstvo $(L3)$. Neka je I interval realnih brojeva čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$, i pretpostavimo da je funkcija $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ konveksna na I. Tada za svaku funkciju $f \in L$ takvu da je $\psi(f), \chi(f) \in L$ i koja za svaki $t \in [m, M]$ zadovoljava granice $m \le f(t) \le M$ imamo

$$\begin{aligned}
0 &\le \chi(M_\chi(f, A)) - \chi(M_\psi(f, A)) \\
&\le (M_\psi - A(\psi(f)))(A(\psi(f)) - m_\psi) \sup_{t \in \langle m, M \rangle} \Psi_\phi(\psi(t); m_\psi, M_\psi) - A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi \\
&\le (M_\psi - A(\psi(f)))(A(\psi(f)) - m_\psi) \frac{\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)}{M_\psi - m_\psi} - A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi \\
&\le \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)) - A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Također vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned}
0 &\le \chi(M_\chi(f, A)) - \chi(M_\psi(f, A)) \\
&\le \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)^2 \Psi_\phi(A(\psi(f)); m_\psi, M_\psi) - A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi \\
&\le \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)) - A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi, \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

gdje je $[m_\psi, M_\psi] = \psi([m, M])$ i

$$\widetilde{\psi(f)} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \left| \frac{\psi(f) - \frac{\psi(m)+\psi(M)}{2}\mathbf{1}}{\psi(M) - \psi(m)} \right|, \quad \delta_\phi = \chi(m) + \chi(M) - 2\phi\Big(\frac{\psi(m) + \psi(M)}{2}\Big).$$

Ako je ϕ konkavna, gornje nejednakosti su obrnute.

Proof: Prvo primijetimo da prema svojstvima $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ vrijedi

$$\widetilde{\psi(f)} = \min\left\{ \frac{M_\psi - \psi(f(x))}{M_\psi - m_\psi}, \frac{\psi(f(x)) - m_\psi}{M_\psi - m_\psi} \right\} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{|\psi(f) - \frac{m_\psi + M_\psi}{2}\mathbf{1}|}{M_\psi - m_\psi} \in L.$$

Funkcija $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ je očito neprekidna. Pretpostavimo da je ϕ konveksna. S obzirom da je $m \le f(t) \le M$ za sve $t \in [m, M]$, imamo $m_\psi \le \psi(f(t)) \le M_\psi$ (ako je ψ rastuća, onda je $m_\psi = \psi(m)$ i $M_\psi = \psi(M)$, a ako je ψ padajuća, onda je $m_\psi = \psi(M)$ i $M_\psi = \psi(m)$). Uvjeti Teorema 2.11 su ispunjeni, pa (2.26) (2.27) možemo dobiti stavljanjem $m = m_\psi$, $M = M_\psi$ i zamjenom f s $\psi \circ f$ u nejednakostima (2.21) i (2.22).

□

Uvrštavanjem supstitucija iz dokaza prethodnog teorema u nizove nejednakosti (2.23), (2.24) i (2.25) dobije se rezultat koji slijedi.

Teorem 2.17 Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.16. Ako je funkcija $\phi = \chi \circ \psi^{-1}$ konveksna, onda imamo sljedeće nejednakosti:

(i)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi &\leq \frac{A(\psi(f)) - \psi(m)}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(M) + \frac{\psi(M) - A(\psi(f))}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(m) - \chi(M_\chi(f, A)) \\
&\leq A[(M_\psi - \psi(f))(\psi(f) - m_\psi)] \sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(\psi(t); m_\psi, M_\psi) \\
&\leq \frac{A[(M_\psi - \psi(f))(\psi(f) - m_\psi)]}{M - m}(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)) \\
&\leq \frac{(M_\psi - A(\psi(f)))(A(\psi(f)) - m_\psi)}{M_\psi - m_\psi}(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi))
\end{aligned} \tag{2.28}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi &\leq \frac{A(\psi(f)) - \psi(m)}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(M) + \frac{\psi(M) - A(\psi(f))}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(m) - \chi(M_\chi(f, A)) \\
&\leq A[(M_\psi - \psi(f))(\psi(f) - m_\psi)] \sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(\psi(t); m_\psi, M_\psi) \\
&\leq (M_\psi - A(\psi(f)))(A(\psi(f)) - m_\psi) \sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(\psi(t); m_\psi, M_\psi) \\
&\leq \frac{(M_\psi - A(\psi(f)))(A(\psi(f)) - m_\psi)}{M_\psi - m_\psi}(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi))
\end{aligned} \tag{2.29}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\psi(f)})\delta_\phi &\leq \frac{A(\psi(f)) - \psi(m)}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(M) + \frac{\psi(M) - A(\psi(f))}{\psi(M) - \psi(m)}\chi(m) - \chi(M_\chi(f, A)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)^2 A(\Psi_\phi(\psi(f); m_\psi, M_\psi)) \\
&\leq \frac{1}{4}(M_\psi - m_\psi)(\phi'_-(M_\psi) - \phi'_+(m_\psi))
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Ako je ϕ konkavna, sve nejednakosti su obrnute.

2.3.2 Potencijalne sredine

Definicija 2.18 Pretpostavimo da vektorski prostor realnih funkcija L i pozitivni linearni funkcional A zadovoljavaju uvjete $(L1)$, $(L2)$ i $(A1)$, $(A2)$ iz uvoda na nepraznom skupu

E, te neka vrijedi $A(\mathbf{1}) = 1$. Potencijalna sredina funkcije $f \in L$ s obzirom na pozitivni linearni funkcional A, u oznaci $M^{[r]}(f, A)$, je:

$$M^{[r]}(f, A) = \begin{cases} (A(f^r))^{1/r} & : r \neq 0 \\ \exp(A(\log f)) & : r = 0 \end{cases}$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$, $f(t) > 0$ za $t \in E$, $f^r \in L$ i $\log f \in L$.

Budući da su potencijalne sredine $M^{[r]}(f, A)$ specijalan slučaj generaliziranih sredina $M_\psi(f, A)$ za $\psi(t) = t^r$, iz Teorema 2.14 ([31, p.75, Theorem 92]), kao poseban slučaj slijedi:

Teorem 2.19 Neka su $-\infty < r \leq s < \infty$ i pretpostavimo da vrijede pretpostavke Definicije 2.18. Tada

$$M^{[r]}(f, A) \leq M^{[s]}(f, A).$$

Na isti se način iz Teorema 2.15 kao poseban slučaj može dobiti Goldmanova nejednakost za pozitivne funkcionale (vidi [14, p.203]):

$$(M^r - m^r)(M^{[s]}(f, A))^s - (M^s - m^s)(M^{[r]}(f, A))^r \leq M^r m^r - M^s m^s$$

za $0 < r < s$ ili $r < 0 < s$, i nejednakost je obrnuta za $r < s < 0$.
Slično, za $r = 0$ i $s \in \mathbb{R}$ imamo

$$\log \frac{M}{m}(M^{[s]}(f, A))^s - (M^s - m^s) \log(M^{[0]}(f, A)) \leq m^s \log M - M^s \log m.$$

Sljedeće rezultate dobili smo primjenom Teorema 2.16 i Teorema 2.17 na posebno odabrane funkcije ψ i χ, ali ih se također može dokazati i korištenjem Teorema 2.11 i Teorema 2.12.

Korolar 2.20 Neka vektorski prostor realnih funkcija L zadovoljava uvjete $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E, te neka je A pozitivni linearni funkcional takav da vrijedi $A(\mathbf{1}) = 1$. Neka je $f \in L$ i pretpostavimo da vrijedi $0 < m \leq f(t) \leq M < \infty$ za $t \in E$, $f^r, f^s \in L$ za $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ i $\log f \in L$, te neka je

$$\phi(t) = \begin{cases} t^{s/r} & : r \neq 0, s \neq 0, \\ \frac{1}{r} \log t & : r \neq 0, s = 0, \\ e^{st} & : r = 0, s \neq 0. \end{cases}$$

Ako je $0 < r < s$ ili $r < 0 < s$ tada:

$$\begin{aligned}
0 &\le (M^{[s]}(f,A))^s - (M^{[r]}(f,A))^s \\
&\le (M^r - A(f^r))(A(f^r) - m^r) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r; m^r, M^r) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \\
&\le \frac{s}{r}(M^r - A(f^r))(A(f^r) - m^r)\frac{M^{s-r} - m^{s-r}}{M^r - m^r} - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \\
&\le \frac{s}{4r}(M^r - m^r)(M^{s-r} - m^{s-r}) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi
\end{aligned} \tag{2.31}$$

i još imamo

$$\begin{aligned}
0 &\le (M^{[s]}(f,A))^s - (M^{[r]}(f,A))^s \le \frac{1}{4}(M^r - m^r)^2 \Psi_\phi(A(f^r); m^r, M^r) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \\
&\le \frac{s}{4r}(M^r - m^r)(M^{s-r} - m^{s-r}) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ako je $r < s < 0$, tada su gornje nejednakosti obrnute.
Ako je $s = 0$ i $r < 0$, tada:

$$\begin{aligned}
0 &\le \log(M^{[0]}(f,A)) - \log(M^{[r]}(f,A)) \\
&\le (M^r - A(f^r))(A(f^r) - m^r) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r; M^r, m^r) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \\
&\le -\frac{1}{r}\frac{(M^r - A(f^r))(A(f^r) - m^r)}{M^r m^r} - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \\
&\le \frac{1}{4r}(m^r - M^r)(\frac{1}{m^r} - \frac{1}{M^r}) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi
\end{aligned} \tag{2.33}$$

i također imamo

$$\begin{aligned}
0 &\le \log(M^{[0]}(f,A)) - \log(M^{[r]}(f,A)) \le \frac{1}{4}(m^r - M^r)^2 \Psi_\phi(A(f^r); M^r, m^r - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi) \\
&\le \frac{1}{4r}(m^r - M^r)(\frac{1}{m^r} - \frac{1}{M^r}) - A(\widetilde{f^r})\delta_\phi.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ako je $r = 0$ i $s > 0$, tada:

$$\begin{aligned}
0 &\le (M^{[s]}(f,A))^s - (M^{[0]}(f,A))^s \\
&\le (\log M - A(\log f))(A(\log f) - \log m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(\log t; \log m, \log M) - A(\widetilde{\log f})\delta_\phi \\
&\le s(\log M - A(\log f))(A(\log f) - \log m)\frac{M^s - m^s}{\log M - \log m} - A(\widetilde{\log f})\delta_\phi \\
&\le s(M^s - m^s)\log\frac{M}{m} - A(\widetilde{\log f})\delta_\phi
\end{aligned} \tag{2.35}$$

i još vrijedi

$$0 \le (M^{[s]}(f,A))^s - (M^{[0]}(f,A))^s$$

$$\le \frac{1}{4}(\log M - \log m)^2 \Psi_\phi(A(\log f); \log m, \log M) - A(\widetilde{\log f})\delta_\phi$$
$$\le \frac{s}{4}(M^s - m^s)\log\frac{M}{m} - A(\widetilde{\log f})\delta_\phi. \tag{2.36}$$

Dokaz. Kad stavimo $\chi(t) = t^s$ i $\psi(t) = t^r$, tada je funkcija $\phi(t) = \chi(\psi^{-1}(t)) = t^{s/r}$ neprekidna, i konveksna za $0 < r < s$ i $r < 0 < s$. Funkcija ψ je strogo rastuća za $r > 0$, pa vrijede pretpostavke Teorema 2.16. Nizove nejednakosti (2.31) i (2.32) redom dobijemo uvrštavanjem $m_\psi = \psi(m) = m^r$, $M_\psi = \psi(M) = M^r$, $\phi(t) = \chi \circ \psi^{-1}(t) = t^{s/r}$, $\psi(t) = t^r$ i $\psi(f) = f^r$ u (2.26) i (2.27). Funkcija ψ je strogo padajuća za $r < 0$, pa nizove nejednakosti (2.31) i (2.32) dobivamo uvrštavanjem $M_\psi = \psi(m) = m^r$, $m_\psi = \psi(M) = M^r$, $\phi(t) = \chi \circ \psi^{-1}(t) = t^{s/r}$ $\psi(t) = t^r$ i $\psi(f) = f^r$ u (2.26) i (2.27).

U slučaju kad je $r < s < 0$, funkcija $\psi(t) = t^r$ je strogo padajuća i $\phi(t) = \chi(\psi^{-1}(t)) = t^{s/r}$ je konkavna, pa dobijemo obrnute nejednakosti u (2.31) i (2.32) uvrštavanjem $M_\psi = \psi(m) = m^r$, $m_\psi = \psi(M) = M^r$, $\phi(t) = -\chi \circ \psi^{-1}(t) = -t^{s/r}$, $\psi(t) = t^r$ i $\psi(f) = f^r$ u (2.26) i (2.27).

U slučaju $r < 0$ i $s = 0$ stavimo $\chi(t) = \log t$ i $\psi(t) = t^r$. Tada je $\phi(t) = \chi(\psi^{-1}(t)) = \frac{1}{r}\log t$ neprekidna i konveksna funkcija, a ψ je strogo padajuća za $r < 0$, pa uvrštavanjem $M_\psi = \psi(m) = m^r$, $m_\psi = \psi(M) = M^r$, $\phi(t) = \chi \circ \psi^{-1}(t) = \frac{1}{r}\log t$, $\psi(t) = t^r$ i $\psi(f) = f^r$ u (2.26) i (2.27) redom dobivamo nizove nejednakosti (2.33) i (2.34)

Kad je $r = 0$ i $s > 0$, stavimo $\chi(t) = t^s$ i $\psi(t) = \log t$. Tada je $\phi(t) = \chi(\psi^{-1}(t)) = e^{st}$ neprekidna i konveksna funkcija, i ψ je strogo rastuća. Nejednakoti (2.35) i (2.36) redom slijede uvrštavanjem $m_\psi = \psi(m) = \log m$, $M_\psi = \psi(M) = \log M$, $\phi(t) = \chi \circ \psi^{-1}(t) = e^{st}$, $\psi(t) = \log t$ i $\psi(f) = \log f$ u (2.26) i (2.27). □

Uvrštavanjem istih supstitucija kao i u dokazu prethodnog korolara, iz Teorema 2.17 direktno slijedi naredni rezultat.

Korolar 2.21 Neka vrijede pretpostavke iz prethodnog korolara.
Ako je $0 < r < s$ ili $r < 0 < s$, tada:

(i)

$$A(\widetilde{f^r})\delta_\phi \le \frac{A(f^r) - m^r}{M^r - m^r}M^s + \frac{M^r - A(f^r)}{M^r - m^r}m^s - (M^{[s]}(f, A))^s$$
$$\le A[(M^r - f^r)(f^r - m^r)] \sup_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_\phi(t^r; m^r, M^r)$$
$$\le \frac{s}{r}\frac{A[(M^r - f^r)(f^r - m^r)]}{M^r - m^r}(M^{s-r} - m^{s-r})$$
$$\le \frac{s}{r}\frac{(M^r - A(f^r))(A(f^r) - m^r)}{M^r - m^r}(M^{s-r} - m^{s-r})$$
$$\le \frac{s}{4r}(M^r - m^r)(M^{s-r} - m^{s-r})$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{f^r})\delta_\phi &\leq \frac{A(f^r)-m^r}{M^r-m^r}M^s + \frac{M^r-A(f^r)}{M^r-m^r}m^s - (M^{[s]}(f,A))^s \\
&\leq A[(M^r-f^r)(f^r-m^r)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r;m^r,M^r) \\
&\leq (M^r-A(f^r))(A(f^r)-m^r) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r;m^r,M^r) \\
&\leq \frac{s}{r}\frac{(M^r-A(f^r))(A(f^r)-m^r)}{M^r-m^r}(M^{s-r}-m^{s-r}) \\
&\leq \frac{s}{4r}(M^r-m^r)(M^{s-r}-m^{s-r})
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{f^r})\delta_\phi &\leq \frac{A(f^r)-m^r}{M^r-m^r}M^s + \frac{M^r-A(f^r)}{M^r-m^r}m^s - (M^{[s]}(f,A))^s \\
&\leq \frac{1}{4}(M^r-m^r)^2 A(\Psi_\phi(f^r;m^r,M^r)) \\
&\leq \frac{s}{4r}(M^r-m^r)(M^{s-r}-m^{s-r}).
\end{aligned}$$

Ako je $r<s<0$, tada su sve gornje nejednakosti obrnute.
Ako je $s=0$ i $r<0$, tada:

(i)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{f^r})\delta_\phi &\leq \frac{A(f^r)-m^r}{M^r-m^r}\log M + \frac{M^r-A(f^r)}{M^r-m^r}\log m - \log(M^{[0]}(f,A)) \\
&\leq A[(M^r-f^r)(f^r-m^r)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r;M^r,m^r) \\
&\leq \frac{1}{r}\frac{A[(M^r-f^r)(f^r-m^r)]}{m^r-M^r}(\frac{1}{m^r}-\frac{1}{M^r}) \\
&\leq \frac{1}{r}\frac{(M^r-A(f^r))(A(f^r)-m^r)}{m^r-M^r}(\frac{1}{m^r}-\frac{1}{M^r}) \\
&\leq \frac{1}{4r}(m^r-M^r)(\frac{1}{m^r}-\frac{1}{M^r})
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{f^r})\delta_\phi &\leq \frac{A(f^r)-m^r}{M^r-m^r}\log M + \frac{M^r-A(f^r)}{M^r-m^r}\log m - \log(M^{[0]}(f,A)) \\
&\leq A[(M^r-f^r)(f^r-m^r)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r;M^r,m^r) \\
&\leq (M^r-A(f^r))(A(f^r)-m^r) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t^r;M^r,m^r) \\
&\leq \frac{1}{r}\frac{(M^r-A(f^r))(A(f^r)-m^r)}{m^r-M^r}(\frac{1}{m^r}-\frac{1}{M^r})
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4r}(m^r - M^r)(\frac{1}{m^r} - \frac{1}{M^r})$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{f^r})\delta_\phi &\leq \frac{A(f^r) - m^r}{M^r - m^r}\log M + \frac{M^r - A(f^r)}{M^r - m^r}\log m - \log(M^{[0]}(f, A)) \\
&\leq \frac{1}{4}(m^r - M^r)^2 A(\Psi_\phi(f^r; M^r, m^r)) \\
&\leq \frac{1}{4r}(m^r - M^r)(\frac{1}{m^r} - \frac{1}{M^r})
\end{aligned}$$

Ako je $r = 0$ i $s > 0$, tada:

(i)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\log f})\delta_\phi &\leq \frac{A(\log f) - \log m}{\log M - \log m}M^s + \frac{\log M - A(\log f)}{\log M - \log m}m^s - (M^{[s]}(f, A))^s \\
&\leq A[(\log M - \log f)(\log f - \log m)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(\log t; \log m, \log M) \\
&\leq s\frac{A[(\log M - \log f)(\log f - \log m)]}{\log M - \log m}(M^s - m^s) \\
&\leq s\frac{(\log M - A(\log f))(A(\log f) - \log m)}{\log M - \log m}(M^s - m^s) \\
&\leq \frac{s}{4}(M^s - m^s)\log\frac{M}{m}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\log f})\delta_\phi &\leq \frac{A(\log f) - \log m}{\log M - \log m}M^s + \frac{\log M - A(\log f)}{\log M - \log m}m^s - (M^{[s]}(f, A))^s \\
&\leq A[(\log M - \log f)(\log f - \log m)] \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(\log t; \log m, \log M) \\
&\leq (\log M - A(\log f))(A(\log f) - \log m) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(\log t; \log m, \log M) \\
&\leq s\frac{(\log M - A(\log f))(A(\log f) - \log m)}{\log M - \log m}(M^s - m^s) \\
&\leq \frac{s}{4}(M^s - m^s)\log\frac{M}{m}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A(\widetilde{\log f})\delta_\phi &\leq \frac{A(\log f) - \log m}{\log M - \log m}M^s + \frac{\log M - A(\log f)}{\log M - \log m}m^s - (M^{[s]}(f, A))^s \\
&\leq \frac{1}{4}(\log M - \log m)^2 A(\Psi_\phi(\log f; \log m, \log M)) \\
&\leq \frac{s}{4r}(\log M - \log m)(M^s - m^s).
\end{aligned}$$

Lako se provjeri da $M^{[r]}(f, A) = (M^{[-r]}(f^{-1}, A))^{-1}$ vrijedi za svaku funkciju $f \in L$ i $r \in \mathbb{R}$. Korištenjem te relacije možemo dobiti analogne nizove nejednakosti iz Korolara 2.20 i Korolara 2.21 supstitucijama $f \longleftrightarrow f^{-1}$, $-r \longleftrightarrow s$ i $-s \longleftrightarrow r$.

2.3.3 Hölderova nejednakost

Teorem 2.22 [74] (Hölderova nejednakost za pozitivne funkcionale) Neka vektorski prostor realnih funkcija L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivni linearni funkcional na L. Neka je $p > 1$ i $q = p/(p-1)$. Ako su $w, f, g \geq 0$ na E i $wf^p, wg^q, wfg \in L$, onda vrijedi

$$A(wfg) \leq A^{1/p}(wf^p)A^{1/q}(wg^q)$$

U slučaju kad je $0 < p < 1$ i $A(wg^q) > 0$ (ili $p < 0$ i $A(wf^p) > 0$) nejednakost je obrnuta.

Teorem 2.23 [74] Neka L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivni linearni funkcional na L. Neka je $p > 1$ i $q = p/(p-1)$. Ako su funkcije $w, f, g \geq 0$ na E takve da je $wf^p, wg^q, wfg \in L$ i $0 < m \leq f(t)g^{-q/p}(t) \leq M$ za $t \in E$, onda imamo

$$(M - m)A(wf^p) + (mM^p - Mm^p)A(wg^q) \leq (M^p - m^p)A(wfg).$$

Ako je $p < 0$, onda gornja nejednakost također vrijedi uz pretpostavku da je $A(wf^p) > 0$ ili $A(wg^q) > 0$. Ako je $0 < p < 1$, onda vrijedi obrnuta nejednakost uz pretpostavku da je $A(wf^p) > 0$ ili $A(wg^q) > 0$.

Rezultati koji slijede redom su obrati nejednakosti iz Teorema 2.22 i Teorema 2.23, to jest, redom daju procjenu razlike između desne i lijeve strane u spomenutim nejednakostima.

Teorem 2.24 Neka vektorski prostor L zadovoljava svojstva $(L1)$, $(L2)$ i $(L3)$ na nepraznom skupu E i neka je A pozitivni linearni funkcional na L. Neka je $p > 1$ i $q = p/(p-1)$. Ako za funkcije $w, f, g \in L$ vrijedi $w, f, g \geq 0$ na E i ako je $wf^p, wg^q, wfg \in L$, $A(wg^q) > 0$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\leq A(wf^p)A^{p/q}(wg^q) - A^p(wfg) \\
&\leq (MA(wg^q) - A(wfg))(A(wfg) - mA(wg^q)) \sup_{t \in \langle m, M \rangle} \Psi_\phi(t; m, M) A^{p-2}(wg^q) \\
&\quad - A(wg^q \widetilde{fg^{-q/p}})A^{p-1}(wg^q)\delta_p \\
&\leq (MA(wg^q) - A(wfg))(A(wfg) - mA(wg^q)) p \frac{M^{p-1} - m^{p-1}}{M - m} A^{p-2}(wg^q) \\
&\quad - A(wg^q \widetilde{fg^{-q/p}})A^{p-1}(wg^q)\delta_p
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{p}{4}(M-m)(M^{p-1}-m^{p-1})A^p(wg^q) - A(wg^q\widetilde{fg^{-q/p}})A^{p-1}(wg^q)\delta_p. \tag{2.37}$$

Također vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} 0 &\leq A(wf^p)A^{p/q}(wg^q) - A^p(wfg) \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2\Psi_\phi(\frac{A(wfg)}{A(wg^q)}; m, M)A^p(wg^q) - A(wg^q\widetilde{fg^{-q/p}})A^{p-1}(wg^q)\delta_p \\ &\leq \frac{p}{4}(M-m)(M^{p-1}-m^{p-1})A^p(wg^q) - A(wg^q\widetilde{fg^{-q/p}})A^{p-1}(wg^q)\delta_p, \end{aligned} \tag{2.38}$$

gdje je $\delta_p = m^p + M^p - 2\left(\frac{m+M}{2}\right)^p$ i $m \leq f(t)g^{-q/p}(t) \leq M$ za $t \in E$. Ako je $A(wfg) > 0$, onda gornje nejednakosti vrijede i za $p < 0$. U slučaju kad je $0 < p < 1$, nejednakosti su obrnute.

Dokaz. Funkcija $\phi(t) = t^p$ je neprekidna, konveksna za $p > 1$ i $p < 0$, konkavna za $0 < p < 1$. Definiramo linearni funkcional $B(f) = \frac{A(wf)}{A(w)}$ za funkciju $w \in L$ takvu da je $w \geq 0$ i $A(w) > 0$. Imamo $B(\mathbf{1}) = \frac{A(w)}{A(w)} = 1$, pa B zadovoljava uvjete Teorema 2.11. Sad možemo dobiti nejednakosti (2.37) i (2.38) iz (2.21) i (2.22) respektivno ako zamijenimo funkcional A funkcionalom B, te umjesto w stavimo wg^q, a umjesto f stavimo $fg^{-q/p}$. □

Definiranjem linearnog funkcionala B kao i u dokazu prethodnog teorema i jednakim supstitucijama, iz Teorema 2.12 dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 2.25 Uz pretpostavke iz Teorema 2.24, ako je $p > 1$ ili $p < 0$, vrijede sljedeće nejednakosti:

(i)

$$\begin{aligned} A(wg^q\widetilde{fg^{-q/p}})\delta_p &\leq \frac{A(wfg) - mA(wg^q)}{M-m}M^p + \frac{MA(wg^q) - A(wfg)}{M-m}m^p - A(wf^p) \\ &\leq A(wg^q[(M-fg^{-q/p})(fg^{-q/p}-m)]) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\ &\leq p\frac{A(wg^q[(M-fg^{-q/p})(fg^{-q/p}-m)])}{M-m}(M^{p-1}-m^{p-1}) \\ &\leq p\frac{(MA(wg^q) - A(wfg))(A(wfg) - mA(wg^q))}{(M-m)A(wg^q)}(M^{p-1}-m^{p-1}) \\ &\leq \frac{p}{4}(M-m)(M^{p-1}-m^{p-1})A(wg^q) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
A(wg^q \widetilde{fg^{-q/p}})\delta_p &\leq \frac{A(wfg) - mA(wg^q)}{M-m} M^p + \frac{MA(wg^q) - A(wfg)}{M-m} m^p - A(wf^p) \\
&\leq A(wg^q[(M - fg^{-q/p})(fg^{-q/p} - m)]) \sup_{t \in \langle m,M \rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\
&\leq \frac{(MA(wg^q) - A(wfg))(A(wfg) - mA(wg^q))}{A(wg^q)} \sup_{t \in \langle m,M \rangle} \Psi_\phi(t; m, M) \\
&\leq p \frac{(MA(wg^q) - A(wfg))(A(wfg) - mA(wg^q))}{(M-m)A(wg^q)} (M^{p-1} - m^{p-1}) \\
&\leq \frac{p}{4}(M-m)(M^{p-1} - m^{p-1})A(wg^q)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
A(wg^q \widetilde{fg^{-q/p}})\delta_p &\leq \frac{A(wfg) - mA(wg^q)}{M-m} M^p + \frac{MA(wg^q) - A(wfg)}{M-m} m^p - A(wf^p) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 A(wg^q \Psi_\phi(fg^{-q/p}; m, M)) \\
&\leq \frac{p}{4}(M-m)(M^{p-1} - m^{p-1})A(wg^q)
\end{aligned}$$

Ako je $0 < p < 1$, sve nejednakosti su obrnute.

2.3.4 Hermite-Hadamardova nejednakost

Hermite-Hadamardova nejednakost daje procjenu (integralne) srednje vrijednosti neprekidne konveksne funkcije. Prvi ju je dokazao Hermite [32] 1883. godine, da bi ju Hadamard [28] ponovno otkrio deset godina kasnije. Međutim, bilješka [32] nigdje nije bila zabilježena, pa se tek nedavno otkrilo da ju je Hermite prvi dokazao (za čitavu povijest pogledati [68]).

Teorem 2.26 ([28]) (Hermite − Hadamardova nejednakost) Neka je $-\infty < a < b < \infty$ i $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ako je f konveksna, onda vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.39}$$

Ako je f konkavna, nejednakosti u (2.39) su obrnute.

Prva nejednakost u nizu (2.39) jača je od druge nejednakosti, to jest za konveksnu funkciju vrijedi takozvana Bullenova nejednakost (za dokaz pogledati npr. [13] ili [74]):

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.40}$$

Primjenom Teorema 2.11 i Teorema 2.12 na Hermite-Hadamardovu nejednakost (2.39) dobivamo procjenu razlike između lijeve i desne granice i vrijednosti od $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ respektivno.

Teorem 2.27 Neka je $a < b$ i pretpostavimo da je funkcija f konveksna na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval $[a, b]$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \sup_{t\in\langle a,b\rangle} \Psi_f(t;a,b) - \frac{1}{4}\delta_f \\
&\leq \frac{1}{4}(b-a)(f'_-(b) - f'_+(a)) - \frac{1}{4}\delta_f \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Također imamo nejednakosti

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \Psi_f\Big(\frac{a+b}{2};a,b\Big) - \frac{1}{4}\delta_f \\
&\leq \frac{1}{4}(b-a)(f'_-(b) - f'_+(a)) - \frac{1}{4}\delta_f \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Ako je f konkavna, gornje nejednakosti su obrnute.

Dokaz. Nejednakosti (2.41) i (2.42) redom dobijemo iz (2.21) i (2.22) kad uvrstimo $A(f) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $f(t) = t$ i onda zamijenimo ϕ s f. □

Uvrštavanjem istih supstitucija u Teorem 2.12 dobijemo:

Teorem 2.28 Neka je $a < b$ i pretpostavimo da je funkcija f konveksna na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval $[a, b]$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\delta_f &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{6}(b-a)^2 \sup_{t\in\langle a,b\rangle} \Psi_f(t;a,b) \\
&\leq \frac{1}{6}(b-a)(f'_-(b) - f'_+(a)) \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Ako je f konkavna, nejednakosti u 2.43 su obrnute.

Kad uzmemo u obzir da je $\delta_f = f(a)+f(b)-2f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$, vidimo da je prva nejednakost iz (2.43) upravo Bullenova nejednakost (2.40).

Neka je $a < b$ i pretpostavimo da je funkcija f konveksna na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži interval $[a, b]$. Kombiniranjem gornjih rezultata dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{6}(b-a)(f'_-(b) - f'_+(a)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\
&\leq f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{1}{4}(b-a)(f'_-(b) - f'_+(a)) - \frac{1}{4}\delta_f. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Ako je f konkavna, nejednakosti u (2.44) su obrnute.

Slično kao u dokazu Bullenove nejednakosti, ako prvu nejednakost iz (2.44) primijenimo na funkciju f nad intervalima $[a,(a+b)/2]$ i $[(a+b)/2,b]$, redom dobijemo

$$\frac{1}{2}\Big[f(a)+f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big]-\frac{1}{12}(b-a)\Big[f'_-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-f'_+(a)\Big]\le\frac{2}{b-a}\int_a^{(a+b)/2}f(t)\mathrm{d}t$$

i

$$\frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\Big]-\frac{1}{12}(b-a)\Big[f'_-(b)-f'_+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big]\le\frac{2}{b-a}\int_{(a+b)/2}^{b}f(t)\mathrm{d}t.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobijemo obrat Bullenove nejednakosti:

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\\ \le&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{12}(b-a)\Big[f'_-(b)-f'_+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'_-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-f'_+(a)\Big],\end{aligned}$$

a ako je funkcija f još dodatno diferencijabilna u sredini intervala $(a+b)/2$, onda gornja relacija postaje:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{12}(b-a)(f'_-(b)-f'_+(a)).$$

2.3.5 Giaccardijeva i Petrovićeva nejednakost

Teorem 2.29 (Giaccardi, [77]) Neka su $\mathbf{p}$ $n-$torka nenegativnih realnih brojeva i $\mathbf{x}$ $n-$torka realnih brojeva takve da vrijedi

$$(x_i-x_0)\Big(\sum_{j=1}^n p_jx_j-x_i\Big)\ge 0, i=1,...,n;\ \sum_{k=1}^n p_kx_k\ne x_0;\ x_0,\sum_{i=1}^n p_ix_i\in[a,b]. \tag{2.45}$$

Ako je $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda

$$\sum_{i=1}^n p_if(x_i)\le Af\Big(\sum_{i=1}^n p_ix_i\Big)+B\Big(\sum_{i=1}^n p_i-1\Big)f(x_0)$$

gdje je

$$A=\frac{\sum_{i=1}^n p_i(x_i-x_0)}{\sum_{i=1}^n p_ix_i-x_0},\ B=\frac{\sum_{i=1}^n p_ix_i}{\sum_{i=1}^n p_ix_i-x_0}. \tag{2.46}$$

Idući rezultat je obrat Giaccardijeve nejednakosti, i slijedi iz Teorema 2.12:

Teorem 2.30 Neka su $\mathbf{p}$ $n-$torka nenegativnih realnih brojeva i $\mathbf{x}$ $n-$torka realnih brojeva takve da vrijedi (2.45). Neka je I interval realnih brojeva takav da njegova unutrašnjost sadrži $[a,b]$. Ako je $f\colon I\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada imamo

(i)

$$\begin{aligned}\delta_f \sum_{i=1}^n p_i \tilde{x}_i &\leq Af\Big(\sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) + B\Big(\sum_{i=1}^n p_i - 1\Big) f(x_0) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^n p_j \Big(\sum_{i=1}^n p_i x_i - x_j\Big)(x_j - x_0) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_f\Big(t; x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^n p_j (\sum_{i=1}^n p_i x_i - x_j)(x_j - x_0)}{M-m} (f'_-(M) - f'_+(m)) \\ &\leq \Big(M - \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\Big)\Big(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} - m\Big) \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m} \sum_{i=1}^n p_i \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m)) \sum_{i=1}^n p_i\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\delta_f \sum_{i=1}^n p_i \tilde{x}_i &\leq Af\Big(\sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) + B\Big(\sum_{i=1}^n p_i - 1\Big) f(x_0) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^n p_j \Big(\sum_{i=1}^n p_i x_i - x_j\Big)(x_j - x_0) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_f\Big(t; x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) \\ &\leq \Big(M - \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\Big)\Big(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} - m\Big) \sup_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_f\Big(t; x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) \sum_{i=1}^n p_i \\ &\leq \Big(M - \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\Big)\Big(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} - m\Big) \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m} \sum_{i=1}^n p_i \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m)) \sum_{i=1}^n p_i\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\delta_f \sum_{i=1}^n p_i \tilde{x}_i &\leq Af\Big(\sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) + B\Big(\sum_{i=1}^n p_i - 1\Big) f(x_0) - \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \sum_{i=1}^n p_i \Psi_f\Big(x_i; x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\Big) \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m)) \sum_{i=1}^n p_i\end{aligned}$$

gdje je $m = \min\{x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\}$, $M = \max\{x_0, \sum_{i=1}^n p_i x_i\}$, $\tilde{x}_i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{|x_i - \frac{m+M}{2}|}{M-m}$, $\delta_f = f(m) + f(M) - 2f\Big(\dfrac{m+M}{2}\Big)$ i A, B su definirani u (2.46). Ako je f konkavna, sve nejednakosti su obrnute.

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija. Gornje nejednakosti se dobiju direktno iz Teorema 2.12 za $A(\mathbf{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$ i $\phi = f$. $\square$

Dobro poznata Petrovićeva nejednakost [75] za konveksne funkcije $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ je dana sa

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + (n-1)f(0)$$

gdje su $x_i, i = 1, ..., n$ nenegativni brojevi takvi da je $x_1, ..., x_n, \sum_{i=1}^{n} x_i \in [0,a]$.

Naredni rezultat slijedi direktno kao specijalni slučaj Teorema 2.30 za $p_1 = ... = p_n = 1$ i $x_0 = 0$. Isto tako se može dobiti primjenom Teorema 2.12 na Petrovićevu nejednakost.

Teorem 2.31 Neka je f konveksna funkcija na intervalu realnih brojeva I čija unutrašnjost sadrži $[0,a]$. Ako su $x_1, ..., x_n \in [0,a]$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{n} x_i \in \langle 0,a]$, onda vrijedi

(i)

$$\begin{aligned}
\delta_f \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i &\leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + (n-1)f(0) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_j\Big) \sup_{t \in \langle 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle} \Psi_f\Big(t; 0, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \\
&\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{n} x_i - x_j)}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big) \\
&\leq \frac{n-1}{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big) \\
&\leq \frac{n}{4} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\delta_f \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i &\leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + (n-1)f(0) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_j\Big) \sup_{t \in \langle 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle} \Psi_f\Big(t; 0, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \\
&\leq \frac{n-1}{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \sup_{t \in \langle 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \rangle} \Psi_f\Big(t; 0, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \\
&\leq \frac{n-1}{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big) \\
&\leq \frac{n}{4} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\delta_f \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \leq f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) + (n-1)f(0) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\leq \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \sum_{i=1}^{n} \Psi_f\Big(x_i; 0, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$
$$\leq \frac{n}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big(f'_-\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - f'_+(0)\Big)$$

Ako je f konkavna, sve nejednakosti su obrnute.

Poglavlje 3

Obrati nejednakosti u kompaktnom Hausdorffovom prostoru

U ovom poglavlju dokazat ćemo obrate u obliku razlike Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti za unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja među C^*-algebrama operatora u kompaktnom Hausdorffovom prostoru, kao i daljnja profinjenja i poboljšanja istih. Dobivene opće rezultati primijenit ćemo na kvazi-aritmetičke operatorske sredine i na potencijalne operatorske sredina sa ciljem dobivanja što bolje procjene za razliku među tim sredinama.

3.1 Uvod

Neka je T lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i sa $\mathcal{A}$ označimo C^*-algebru. Kažemo da je polje $(x_t)_{t\in T}$ elemenata iz $\mathcal{A}$ neprekidno ako je funkcija $t \to x_t$ neprekidna u normi (neprekidna u uniformnoj topologiji) na T. Dodatno, ako je T opremljen Radonovom mjerom μ i ako je funkcija $t \to ||x_t||$ integrabilna, tada se može formirati takozvani Bochnerov integral $\int_T x_t d\mu(t)$. Preciznije, Bochnerov integral je jedinstveni element iz $\mathcal{A}$ takav da jednakost

$$\varphi\left(\int_T x_t d\mu(t)\right) = \int_T \varphi\left(x_t\right) d\mu(t)$$

vrijedi za svaki linearni funkcional φ u dualnoj normi od $\mathcal{A}^*$ (pogledati [29]).

Nadalje, pretpostavimo da postoji polje $(\phi_t)_{t\in T}$ pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ iz $\mathcal{A}$ u neku drugu C^*-algebru $\mathcal{B}$. Za takvo polje kažemo da je neprekidno ako je funkcija $t \to \phi_t(x)$ neprekidna za svaki $x \in \mathcal{A}$. Ako su C^*-algebre unitalne i ako je polje $t \to \phi_t(\mathbf{1})$ integrabilno s integralom $\mathbf{1}$, kažemo da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno. Pretpostavljamo da je takvo polje neprekidno.

Neka su x i y operatori (koji djeluju) na beskonačno dimenzionalnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Uređaj među njima definira se na način da uzimamo da je $x \leq y$ ako je $y - x$ pozitivno semi-definitan operator.

Za neprekidnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je operatorski konveksna ako

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

vrijedi za svaki $\lambda \in [0,1]$ i za svaki par hermitskih operatora x i y na beskonačno dimenzionalnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ sa spektrom u I. Kada je znak nejednakosti u gornjoj relaciji obrnut, onda kažemo da je f operatorski konkavna funkcija.

Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ operatorski konveksna funkcija, gdje je I realni interval bilo kojeg tipa, i ako je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje, onda Jensenova operatorska nejednakost (pogledati Hansen *et.al.*, [30]) kaže da

$$f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right) \leq \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \tag{3.1}$$

vrijedi za svako omeđeno neprekidno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u I. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ operatorski konkavna funkcija, onda je znak nejednakosti u (3.1) obrnut.

U istom radu, Hansen *et.al.* je dobio sljedeću nejednakost koja vrijedi za uobičajene konveksne funkcije $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ (pogledati [30], dokaz Teorema 2):

$$\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \leq \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1}. \tag{3.2}$$

Ovdje se koristi uobičajena notacija:

$$\alpha_f = \frac{f(M)-f(m)}{M-m} \quad \text{i} \quad \beta_f = \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}.$$

Nejednakost (3.2) nazivamo Edmundson-Lah-Ribaričeva operatorska nejednakost. Primijetimo da je operatorska nejednakost (3.2) dobivena primjenom funkcionalnog računa na poznatu nejednakost

$$f(t) \leq \alpha_f t + \beta_t, \tag{3.3}$$

koja vrijedi za svaku konveksnu funkciju na intervalu $[m, M]$. Prisjetimo se da je $l(t) = \alpha_f t + \beta_t$ linearna funkcija koja odozgo omeđuje konveksnu funkciju $f(t)$ na intervalu $[m, M]$ spomenutom gore.

S druge strane, Mićić, Pečarić i Perić u radu [61] su dobili sljedeće profinjenje Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti

$$\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t) \leq \alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \delta_f \underline{\mathbf{x}}, \tag{3.4}$$

gdje je

$$\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{M-m}\int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)d\mu(t) \tag{3.5}$$

i

$$\delta_f = f(m) + f(M) - 2f\left(\frac{m+M}{2}\right). \tag{3.6}$$

Budući da je $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, vrijedi $\underline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ i $\delta_f \geq 0$.

Tehnike koje se koriste u dokazima uglavnom su bazirane na klasičnom realnom i funkcionalnom računu, posebno na poznatom principu monotonosti za hermitske elemente C^*-algebre $\mathcal{A}$: Ako je $x \in \mathcal{A}$ sa spektrom $\mathrm{Sp}(x)$, onda

$$f(t) \geq g(t),\ t \in \mathrm{Sp}(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq g(x), \tag{3.7}$$

gdje su f i g realne neprekidne funkcije (za više detalja pogledati [25]). Štoviše, svi rezultati koji slijede u narednom poglavlju uključuju Bochnerov integral koji smo definirali ranije. Ako ništa drugo nije eksplicitno drugačije rečeno, $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ je omeđeno neprekidno polje hermitskih elemenata unitalne C^*-algebre čiji spektar pripada domeni odgovarajuće funkcije, a $(\phi_t)_{t\in T}$ je unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanje između odgovarajućih unitalnih C^*-algebri.

Rezultati koji slijede odnose se na uobičajene konveksne funkcije. Iako se tu radi o različitim nejednakostima, dobiveni nizovi konverzija su tijesno povezani.

3.2 Obrati Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti

Prvi rezultat dobiven je u radu [34] i predstavlja obrat u obliku razlike Jensenove operatorske nejednakosti. Analognu tvrdnju u klasičnom, realnom slučaju dokazao je Dragomir u radu [17], a poopćenje iste za linearne operatore dokazali su Jakšić i Pečarić u radu [37]. Takve nizove skalarnih nejednakosti zapravo koristimo da bi dobili njihove analogone u operatorskom obliku.

Teorem 3.1 Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, takvi da je interval $[m, M]$ sadržan u unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
&\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right) \\
&\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

vrijedi za svako neprekidno omeđeno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna na I, onda su znakovi nejednakosti u (3.8) obrnuti.

Dokaz. Uzimajući u obzir operatorsku verziju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2), slijedi

$$\begin{aligned}&\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\\ &\leq \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right). \qquad (3.9)\end{aligned}$$

S druge strane, budući da je funkcija f konveksna, imamo takozvanu gradijentnu nejednakost

$$f(t) - f(M) \geq f'_-(M)(t-M),$$

koja vrijedi za svaki $t \in [m, M]$, to jest,

$$(t-m)f(t) - (t-m)f(M) \geq f'_-(M)(t-M)(t-m), \quad t \in [m, M],$$

nakon množenja s $(t-m)$. Na analogan način dobivamo i nejednakost

$$(M-t)f(t) - (M-t)f(m) \geq f'_+(m)(M-t)(t-m), \quad t \in [m, M].$$

Zbrajanjem gornje dvije nejednakosti, i onda dijeljenjem s $(m-M)$, dobivamo

$$\alpha_f t + \beta_f - f(t) \leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}(M-t)(t-m). \qquad (3.10)$$

Štoviše, korištenjem nejednakosti među aritmetičkim i geometrijskim sredinama dobivamo da sljedeći niz nejednakosti vrijedi za sve $t \in [m, M]$ (pogledati i [17]):

$$\begin{aligned}\alpha_f t + \beta_f - f(t) &\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}(M-t)(t-m)\\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m)). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Pošto je $m\mathbf{1} \leq x_t \leq M\mathbf{1}$ za svaki $t \in T$, slijedi $m\phi_t(\mathbf{1}) \leq \phi_t(x_t) \leq M\phi_t(\mathbf{1})$, to jest, $m\mathbf{1} \leq \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) \leq M\mathbf{1}$. Stoga, primjenom funkcionalnog računa na gornji niz nejednakosti, to jest, postavljanjem $\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)$ umjesto t, dobije se

$$\begin{aligned}&\alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\\ &\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right)\\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Konačno, uspoređivanjem (3.9) i (3.12), dobije se (3.8), što je tvrdnja teorema. □

Treba primijetiti da se u iskazu Teorema 3.1 traži da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Taj uvjet osigurava konačnost jednostranih derivacija u (3.8). Bez tražene pretpostavke te bi derivacije mogle biti beskonačne.

Također ovdje treba primijetiti i da prvi izraz u nizu nejednakosti (3.8), to jest, element $\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)$, nije nužno pozitivan. Međutim, ako je dodatno funkcija f operatorski konveksna funkcija, tada iz Jensenove operatorske nejednakosti (3.1) slijedi pozitivnost tog člana.

Sljedeći rezultat se također nalazi u [34] i predstavlja konverziju Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti (3.2):

Teorem 3.2 Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$ takvi da je interval $[m, M]$ sadržan u unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
0 &\leq \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \\
&\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
&\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

vrijedi za svako neprekidno omeđeno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna na I, onda su znakovi nejednakosti u (3.13) obrnuti.

Dokaz. Prva nejednakost iz niza (3.13) vrijedi na temelju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2). Dalje, polaženjem od skalarne nejednakosti (3.10), slijedi da relacija

$$\alpha_f x_t + \beta_f \mathbf{1} - f(x_t) \leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m}(M\mathbf{1} - x_t)(x_t - m\mathbf{1})$$

vrijedi za svaki $t \in T$. Sada, primjenom pozitivnih linearnih preslikavanja ϕ_t na gornju relaciju dobije se

$$\alpha_f \phi_t(x_t) + \beta_f \phi_t(\mathbf{1}) - \phi_t(f(x_t)) \leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m}\phi_t([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]),$$

dok integracija daje

$$\begin{aligned}
&\alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \\
&\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t),
\end{aligned}$$

pa vidimo da druga nejednakost iz (3.13) vrijedi.

Ako se uzme u obzir Teorem 3.1, dovoljno je dokazati treću nejednakost iz (3.13). Da bi dokazali našu tvrdnju, primijetimo da je funkcija

$$h(t) = (M - t)(t - m) = -t^2 + (M + m)t - Mm, \quad t \in [m, M]$$

operatorski konkavna (pogledati, na primjer, [25]). Konačno, primjenom Jensenove operatorske nejednakosti (3.1) na gornju funkciju h, slijedi

$$\begin{aligned} &\int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\ &\leq \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right), \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Naredni rezultati dobiveni su u [35] i predstavljaju preciznije konverzije Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti, i profinjenja su nejednakosti (3.8) i (3.13) redom. Takve poboljšane relacije također se odnose na konveksne funkcije u klasičnom realnom smislu.

Kako bismo predočili te rezultate, definiramo

$$\Delta_f(t; m, M) = \frac{1}{M - m}\left[\frac{f(M) - f(t)}{M - t} - \frac{f(t) - f(m)}{t - m}\right], \tag{3.14}$$

gdje su $m < M$ takvi da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I, i gdje je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija. Primijetimo da je izraz (3.14) zapravo podijeljena razlika drugog reda funkcije f u točkama m, t, i M, za svaki $t \in (m, M)$.

Treba napomenuti da je funkcija f definirana na intervalu I, čija unutrašnjost sadrži interval $[m, M]$. Kao što je već ranije rečeno, taj uvjet osigurava konačnost jednostranih derivacija u točkam m i M. Tada,

$$\lim_{t \to m^+} \Delta_f(t; m, M) = \frac{1}{M - m}\left[\frac{f(M) - f(m)}{M - m} - f'_+(m)\right]$$

i

$$\lim_{t \to M^-} \Delta_f(t; m, M) = \frac{1}{M - m}\left[f'_-(M) - \frac{f(t) - f(m)}{t - m}\right],$$

pa se $\Delta_f(\cdot; m, M)$ može smatrati neprekidnom funkcijom (u parametru t) na intervalu $[m, M]$. Stoga, ako je x hermitski element iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m, M]$, tada izraz $\Delta_f(x; m, M)$ također ima smisla. Međutim, ova tvrdnja vrijedi zbog funkcionalnog računa.

Prvi rezultat daje dva niza konverzija Jensenove operatorske nejednakosti. Jedan od njih je profinjenje niza nejednakosti (3.8) iz Teorema 3.1. Klasičnu, realnu verziju dokazao je Dragomir u radu [18], i takvi skalarni nizovi nejednakosti biti će korišteni prilikom dobivanja odgovarajućih operatorskih relacija.

Teorem 3.3 Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, takvi da je interval $[m, M]$ sadržan u unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}
&\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right) \\
&\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M)\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
&\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m}\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

i

$$\begin{aligned}
&\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M - m)^2\Delta_f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t); m, M\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

vrijede za svako neprekidno omeđeno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna na I, onda su znakovi nejednakosti u (3.15) i (3.16) obrnuti.

Dokaz. Uzimajući u obzir operatorsku verziju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2), slijedi da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right) \\
&\leq \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f\mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

S druge strane, skalarna nejednakost

$$\begin{aligned}
\alpha_f t + \beta_f - f(t) &= \frac{M - t}{M - m}f(m) + \frac{t - m}{M - m}f(M) - f(t) \\
&= \frac{(M - t)(t - m)}{M - m}\left[\frac{f(M) - f(t)}{M - t} - \frac{f(t) - f(m)}{t - m}\right] \\
&= (M - t)(t - m)\Delta_f(t; m, M) \\
&\leq (M - t)(t - m) \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

vrijedi za svaki $t \in [m, M]$. Dodatno, budući da je

$$\begin{aligned}
\sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) &= \frac{1}{M-m} \sup_{m<t<M} \left[\frac{f(M)-f(t)}{M-t} - \frac{f(t)-f(m)}{t-m} \right] \\
&\leq \frac{1}{M-m} \left[\sup_{m<t<M} \frac{f(M)-f(t)}{M-t} + \sup_{m<t<M} \left(-\frac{f(t)-f(m)}{t-m} \right) \right] \\
&= \frac{1}{M-m} \left[\sup_{m<t<M} \frac{f(M)-f(t)}{M-t} - \inf_{m<t<M} \frac{f(t)-f(m)}{t-m} \right] \\
&= \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}, \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\alpha_f t + \beta_f - f(t) &\leq (M-t)(t-m) \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \\
&\leq \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}(M-t)(t-m) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m)). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Očito, zadnji znak nejednakosti u (3.20) vrijedi na račun poznate nejednakosti za aritmetičke i geometrijske sredine, to jest, $(M-t)(t-m) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2$.

Sada, pošto je $m\mathbf{1} \leq x_t \leq M\mathbf{1}$ za svaki $t \in T$, slijedi da je $m\phi_t(\mathbf{1}) \leq \phi_t(x_t) \leq M\phi_t(\mathbf{1})$, to jest, $m\mathbf{1} \leq \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \leq M\mathbf{1}$. Stoga, primjenom funkcionalnog računa na gornji niz nejednakosti, to jest, stavljanjem $\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t)$ umjesto t, dobije se

$$\begin{aligned}
&\alpha_f \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \right) \\
&\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \right) \left(\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) - m\mathbf{1} \right) \\
&\leq \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m} \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \right) \left(\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) - m\mathbf{1} \right) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Na kraju, uspoređivanjem (3.17) i (3.21), dobije se (3.15), što je prva tvrdnja teorema.

Za dokazati (3.16), treba početi sa od skalarnog niza nejednakosti

$$\begin{aligned}
\alpha_f t + \beta_f - f(t) &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \Delta_f(t; m, M) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m)), \ t \in [m, M], \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

koji očito slijedi iz (3.18), (3.19), i nejednakosti za aritmetičke i geometrijske sredine. Konačno, uvrštavanjem $\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t)$ u (3.22) i upotrebom (3.17) dobije se (3.16) i dokaz je završen. $\square$

Primijetimo da je niz nejednakosti iz (3.15) zaista profinjenje niza (3.8), pošto je $\sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \leq \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}$. Na primjer, ako uzmemo $f(t) = t^2$ and $m < M$, tada je

$$1 = \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) < \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} = 2,$$

dok za $f(t) = t^3$ imamo

$$m + 2M = \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) < \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} = 3(m + M),$$

pod pretpostavkom da vrijedi $0 < m < M$.

Ovdje treba napomenuti da prvi red nejednakosti iz (3.15) i (3.16), to jest, element $\int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)$ općenito nije pozitivan. Kao i ranije, taj element je pozitivan ako je funkcija f još dodatno operatorski konveksna, i tada pozitivnost slijedi iz Jensenove operatorske nejednakosti (3.1).

Rezultat koji slijedi daje nekoliko nizova konverzija Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti (3.2). Jedan od njih je i profinjenje niza nejednakosti (3.13).

Teorem 3.4 Pretpostavimo da je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, takvi da je interval $[m, M]$ sadržan u unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}
0 \leq & \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \\
\leq & \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
\leq & \frac{1}{4}(M - m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq & \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t) \\
\leq & \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) \\
\leq & \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M - m} \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}, \tag{3.24}$$

i

$$\begin{aligned}0 \leq &\alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f\mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t)\\ \leq &\frac{1}{4}(M-m)^2 \int_T \phi_t\left(\Delta_f(x_t;m,M)\right)d\mu(t)\\ \leq &\frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}\end{aligned} \tag{3.25}$$

vrijede za svako neprekidno omeđeno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u $[m,M]$. Ako je f konkavna na I, onda su znakovi nejednakosti u (3.23), (3.24), i (3.25) obrnuti.

Dokaz. Prva nejednakost iz (3.23) vrijedi na temelju Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2). Dalje, polazeći od skalarnih nejednakosti (3.18) i (3.19), dobije se da relacija

$$\begin{aligned}\alpha_f x_t + \beta_f\mathbf{1} - f(x_t) &\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t;m,M)(M\mathbf{1}-x_t)(x_t-m\mathbf{1})\\ &\leq \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}(M\mathbf{1}-x_t)(x_t-m\mathbf{1})\end{aligned}$$

vrijedi za svaki $t\in T$. Primjenom pozitivnih linearnih preslikavanja ϕ_t na gornju relaciju dobije se

$$\begin{aligned}\alpha_f\phi_t(x_t) + \beta_f\phi_t(\mathbf{1}) - \phi_t(f(x_t)) &\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t;m,M)\phi_t([M\mathbf{1}-x_t][x_t-m\mathbf{1}])\\ &\leq \frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}\phi_t([M\mathbf{1}-x_t][x_t-m\mathbf{1}]),\end{aligned}$$

dok integracija daje

$$\begin{aligned}&\alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f\mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t)\\ \leq &\sup_{m<t<M} \Delta_f(t;m,M) \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1}-x_t][x_t-m\mathbf{1}]\right)d\mu(t)\\ \leq &\frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m} \int_T \phi_t\left([M\mathbf{1}-x_t][x_t-m\mathbf{1}]\right)d\mu(t).\end{aligned}$$

Zbog toga vrijede druga i treća nejednakost iz (3.23).

Ako se uzme u obzir Teorem 3.3, to jest, niz nejednakosti (3.15), dovoljno je dokazati četvrtu nejednakost iz (3.23). Da bi dokazali našu tvrdnju, primijetimo da je funkcija

$$h(t) = (M-t)(t-m) = -t^2 + (M+m)t - Mm, \quad t\in[m,M]$$

operatorski konkavna (pogledati [25]). Konačno, primjenom Jensenove operatorske nejednakosti (3.1) na gornju funkciju h, slijedi da vrijedi

$$\begin{aligned}&\int_T \phi_t\left([M\mathbf{1}-x_t][x_t-m\mathbf{1}]\right)d\mu(t)\\ \leq&\left(M\mathbf{1}-\int_T\phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T\phi_t(x_t)d\mu(t)-m\mathbf{1}\right),\end{aligned}$$

čime je dokazano da nejednakosti (3.23) vrijede.

Nadalje, niz nejednakosti (3.24) dobiven je na jednak način kao i (3.23), osim što gornji funkcionalni račun se primjenjuje na nejednakosti (3.18) i onda se koristi skalarna nejednakost (3.19).

Na kraju, niz nejednakosti iz (3.25) slijedi iz gornjeg funkcionalnog računa primijenjenog na skalarni niz nejednakosti (3.22). □

Prema komentaru neposredno prije Teorema 3.4, niz nejednakosti (3.23) je zaista profinjenje niza nejednakosti (3.13) iz Teorema 3.2.

Poboljšanu verziju Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti (3.4) možemo iskoristiti kako bi dobili točnija profinjenja Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti od onih u Teoremu 3.3 i Teoremu 3.4. Rezultati koji slijede dokazani su u [36].

Teorem 3.5 Neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, takvi da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala $I \subset \mathbb{R}$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}&\int_T\phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t)-f\left(\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\\ \leq&\sup_{m<t<M}\Delta_f(t;m,M)\left(M\mathbf{1}-\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)-m\mathbf{1}\right)-\delta_f\underline{\mathbf{x}}\\ \leq&\frac{f'_-(M)-f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1}-\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)-m\mathbf{1}\right)-\delta_f\underline{\mathbf{x}}\\ \leq&\frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}-\delta_f\underline{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{3.26}$$

i

$$\begin{aligned}&\int_T\phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t)-f\left(\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\\ \leq&\frac{1}{4}(M-m)^2\Delta_f\left(\int_T\phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t);m,M\right)-\delta_f\underline{\mathbf{x}}\\ \leq&\frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}-\delta_f\underline{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{3.27}$$

gdje su $\underline{\mathbf{x}}$ i δ_f definirani redom u (3.5) i (3.6), vrijede za svaku neprekidnu konveksnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ i omeđeno neprekidno polje $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna na I, tada su znakovi nejednakosti u (3.26) i (3.27) obrnuti.

Dokaz. Koristeći poboljšanu verziju (3.4) Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti, slijedi

$$\begin{aligned}&\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\\ \leq&\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

S druge strane, lako se provjeri da se skalarni izraz $\alpha_f t + \beta_f - f(t)$ može zapisati kao $(M-t)(t-m)\Delta_f(t; m, M)$, pa slijedi da nejednakost

$$\alpha_f t + \beta_f - f(t) \leq (M-t)(t-m) \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \tag{3.29}$$

vrijedi za sve $t \in [m, M]$. Osim toga, budući da je

$$\begin{aligned}\sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) &= \frac{1}{M-m} \sup_{m<t<M} \left[\frac{f(M)-f(t)}{M-t} - \frac{f(t)-f(m)}{t-m}\right]\\ &\leq \frac{1}{M-m}\left[\sup_{m<t<M} \frac{f(M)-f(t)}{M-t} + \sup_{m<t<M}\left(-\frac{f(t)-f(m)}{t-m}\right)\right]\\ &= \frac{1}{M-m}\left[\sup_{m<t<M} \frac{f(M)-f(t)}{M-t} - \inf_{m<t<M} \frac{f(t)-f(m)}{t-m}\right]\\ &= \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m},\end{aligned} \tag{3.30}$$

i $(M-t)(t-m) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2$, zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$\begin{aligned}\alpha_f t + \beta_f - f(t) &\leq (M-t)(t-m) \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M)\\ &\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}(M-t)(t-m)\\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m)).\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sad, pošto je $m\mathbf{1} \leq \mathbf{x}_t \leq M\mathbf{1}$ za svaki $t \in T$, slijedi da je $m\phi_t(\mathbf{1}) \leq \phi_t(\mathbf{x}_t) \leq M\phi_t(\mathbf{1})$, to jest, $m\mathbf{1} \leq \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) \leq M\mathbf{1}$. kao posljedica toga, kad primijenimo funkcionalni račun na gornji niz skalarnih nejednakosti i oduzmemo $\delta_f \underline{\mathbf{x}}$, slijedi

$$\begin{aligned}&\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}}\\ &\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M)\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}}\\ &\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m))\mathbf{1}-\delta_f\underline{\mathbf{x}}. \tag{3.32}$$

Konačno, uspoređivanjem (3.28) i (3.32) dobijemo (3.26), što je prva tvrdnja teorema.

Za dokazati (3.27), krećemo sa skalarnim nizom nejednakosti

$$\begin{aligned} \alpha_f t+\beta_f-f(t) &\leq \frac{1}{4}(M-m)^2\Delta_f(t;m,M) \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M)-f'_+(m)),\ t\in[m,M], \end{aligned} \tag{3.33}$$

koji slijedi iz (3.30) i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine. Sad, uvrštavanjem $\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)$ u (3.33) i korištenjem (3.28), dobijemo (3.27). □

Primijetimo da je niz nejednakosti (3.26) poboljšanje rezultata iz Teorema 3.3 jer vrijedi $\delta_f \geq 0$ i $\underline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$. Na primjer, ako je $f(t)=t^2$ i $m<M$, tada je $\delta_f=\frac{(M-m)^2}{2}>0$.

Osim poboljšanja Edmundson-Lah-Ribaričeve operatorske nejednakosti, ključni korak u dokazu Teorema 3.5 bila je procjena skalarnog izraza $\alpha_f t+\beta_f-f(t)$ odozgo.

Treba spomenuti da je poboljšana verzija (3.4) Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti dobivena primjenom funkcionalnog računa na lijevu nejednakost u

$$\min\{p_1,p_2\}\delta_f \leq p_1 f(m)+p_2 f(M)-f(p_1 m+p_2 M) \leq \max\{p_1,p_2\}\delta_f, \tag{3.34}$$

gdje je $f:[m,M]\to\mathbb{R}$ proizvoljna konveksna funkcija i $p_1,p_2\in[0,1]$ su realni parametri takvi da je $p_1+p_2=1$. Očito, lijeva nejednakost iz (3.34) predstavlja profinjenje klasične Jensenove nejednakosti, dok druga predstavlja obrat Jensenove nejednakosti (za više detalja pogledati [69, Theorem 1, p.717]). Sada ćemo pokazati da se i ta druga nejednakost isto može iskoristiti za izvesti drugačiju gornju granica za gore spomenuti skalarni izraz, čime ćemo dobiti novi tip obrata za Jensenovu operatorsku nejednakost (3.1).

Teorem 3.6 Neka su $m,M\in\mathbb{R}$, $m<M$, takvi da interval $[m,M]$ pripada unutrašnjosti intervala $I\subset\mathbb{R}$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i neka je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Ako je $f:[m,M]\to\mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, tada

$$\begin{aligned} &\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t)-f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right) \\ \leq&\frac{\delta_f}{M-m}\left(\left|\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)-\frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|+\int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t-\frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)d\mu(t)\right) \\ \leq&\delta_f\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

vrijede za svako omeđeno neprekidno polje $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m,M]$. Ako je funkcija f konkavna, tada su znakovi nejednakosti u (3.35) obrnuti.

Dokaz. Polazna točka je relacija (3.28) iz dokaza Teorema 3.5, ali u ovom dokazu koristimo drugu metodu za procjenu izraza $\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)$. Preciznije, koristimo desnu nejednakost iz (3.34), to jest obrat klasične Jensenove nejednakosti, koja se svede na

$$\alpha_f t + \beta_f - f(t) \leq \max\left\{\frac{M-t}{M-m}, \frac{t-m}{M-m}\right\}\delta_f$$

nakon uvrštavanja $p_1 = \frac{M-t}{M-m}$ i $p_2 = \frac{t-m}{M-m}$, $t \in [m, M]$. Budući da je

$$\max\left\{\frac{M-t}{M-m}, \frac{t-m}{M-m}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{M-m}\left|t - \frac{m+M}{2}\right|,$$

imamo

$$\alpha_f t + \beta_f - f(t) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{M-m}\left|t - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_f, \tag{3.36}$$

i zbog toga slijedi,

$$\begin{aligned} &\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{M-m}\left|\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)\delta_f, \end{aligned} \tag{3.37}$$

nakon primjene funkcionalnog računa. Prva nejednakost iz (3.35) vrijedi zbog (3.28), (3.37), i definicije elementa $\underline{\mathbf{x}}$. Konačno, druga nejednakost iz (3.35) vrijedi zbog očitih nejednakosti $\left|\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right| \leq \frac{M-m}{2}\mathbf{1}$ i $\int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)d\mu(t) \leq \frac{M-m}{2}\mathbf{1}$. □

Zbog cjelovitosti, treba spomenuti da gornji rezultati vrijede i u diskretnom slučaju. Na primjer, ako je $T = \{1, 2, \ldots, n\}$ i μ mjera koja skupovima pridružuje njihov kardinalitet, onda se relacija (3.26) svede na

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \phi_i(f(\mathbf{x}_i)) - f\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_i)\right) \\ &\leq \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M)\left(M\mathbf{1} - \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_i) - m\mathbf{1}\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}} \\ &\leq \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1} - \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}_i) - m\mathbf{1}\right) - \delta_f \underline{\mathbf{x}} \\ &\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1} - \delta_f \underline{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

gdje je $\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{M-m}\sum_{i=1}^n \phi_i\left(\left|\mathbf{x}_i - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)$, f je neprekidna konveksna funkcija, $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, su hermitski elementi iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m, M]$, i ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, su pozitivna linearna preslikavanje pod uvjetom da je $\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Primijetimo da nejednakost (3.36) predstavlja obrat klasične Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.3).

Primjenom desne nejednakosti iz (3.34), možemo također uspostaviti relaciju koja je na neki način komplementarna nejednakosti (3.2). Ta komplementarna relacija predstavljati će obrat Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2). Da bi mogli iskazati odgovarajući rezultat, definiramo $\overline{\mathbf{x}}$ kao

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{M-m}\int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t),$$

gdje je $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ omeđeno neprekidno polje hermitskih elementa u unitalnoj C^*-algebri čiji spektar pripada intervalu $[m, M]$. Primijetimo da vrijedi $\frac{1}{2}\mathbf{1} \leq \overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{1}$ i $\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$.

Teorem 3.7 Neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Ako je $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija, tada

$$\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t) d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t)) d\mu(t) \leq \delta_f \overline{\mathbf{x}} \tag{3.38}$$

vrijede za svako omeđeno neprekidno polje $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna, onda je znak nejednakosti u (3.38) obrnut.

Dokaz. Dokaz započinjemo od skalarne nejednakosti (3.36) koja je dobivena u dokazu Teorema 3.6. Budući da je $m\mathbf{1} \leq \mathbf{x}_t \leq M\mathbf{1}$ za svaki $t \in T$, primjenom funkcionalnog računa na (3.36) slijedi

$$\alpha_f \mathbf{x}_t + \beta_f \mathbf{1} - f(\mathbf{x}_t) \leq \left(\frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{M-m}\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\right|\right)\delta_f,$$

to jest

$$\alpha_f \phi_t(\mathbf{x}_t) + \beta_f \phi_t(\mathbf{1}) - \phi_t(f(\mathbf{x}_t)) \leq \left[\frac{1}{2}\phi_t(\mathbf{1}) + \frac{1}{M-m}\phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\right|\right)\right]\delta_f,$$

nakon što primijenimo linearno preslikavanje ϕ_t. Konačno, integriranjem prethodne relacije i korištenjem činjenice da je $\int_T \phi_t(\mathbf{1}) d\mu(t) = \mathbf{1}$ dobijemo (3.38), čime je dokaz završen. □

Na prvi pogled čini se da nejednakost (3.38) može biti iskorištena za dobivanje profinjenja Jensenove operatorske nejednakosti (3.1). Naime, spomenuta relacija donosi nam nejednakost

$$\begin{aligned} &\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t)) d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t) d\mu(t)\right) \\ \geq &\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t) d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t) d\mu(t)\right) - \delta_f \overline{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Nažalost, ispostavilo se da metode korištene u Teoremu 3.5 i Teoremu 3.6 nisu primjenjive na dobivanje odgovarajućih profinjenja.

Točnije, budući da je $\inf_{m<t<M}\Delta_f(t;m,M) = 0$, metoda korištena u Teoremu 3.5 zajedno s relacijom (3.39) donosi nejednakost

$$\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right) \geq -\delta_f\overline{\mathbf{x}},$$

koja ne predstavlja profinjenje (3.1) zbog $-\delta_f\overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$.

S druge strane, prateći postupak iz dokaza Teorema 3.6, s lijevom nejednakosti iz (3.34) umjesto desne, slijedi da je

$$\begin{aligned}&\alpha_f \int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) + \beta_f\mathbf{1} - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\\ &\geq \left(\frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{M-m}\left|\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)\delta_f,\end{aligned}$$

što zajedno s (3.39) daje

$$\begin{aligned}&\int_T \phi_t(f(\mathbf{x}_t))d\mu(t) - f\left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t)\right)\\ \geq& -\frac{\delta_f}{M-m}\left(\left|\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t)d\mu(t) - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right| + \int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t - \frac{m+M}{2}\mathbf{1}\right|\right)d\mu(t)\right)\\ \geq& -\delta_f\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Očito, ovaj niz nejednakosti nije poboljšanje Jensenove operatorske nejednakosti zbog negativnosti člana na desnoj strani nejednakosti.

Prateći dokaz Teorema 3.4, ali ako umjesto Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti (3.2) koristimo njeno poboljšanje (3.4), dobije se sljedeći rezultat koji nam daje poboljšanje desne granice u nejednakostima iz Teorema 3.4.

Korolar 3.8 Pretpostavimo da je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna konveksna funkcija i neka su $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, takvi da je interval $[m, M]$ sadržan u unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unitalne C^*-algebre i da je $(\phi_t)_{t\in T}$ unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definirano na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ. Tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}\delta_f\underline{\mathbf{x}} \leq& \alpha_f \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) + \beta_f\mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t))d\mu(t)\\ \leq& \sup_{m<t<M}\Delta_f(t;m,M)\int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right)d\mu(t)\\ \leq& \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\int_T \phi_t\left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}]\right)d\mu(t)\\ \leq& \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m}\left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t)d\mu(t)\right)\left(\int_T \phi_t(x_t)d\mu(t) - m\mathbf{1}\right)\\ \leq& \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1},\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\delta_f \underline{\mathbf{x}} \leq & \alpha_f \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t)) d\mu(t) \\
\leq & \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \int_T \phi_t \left([M\mathbf{1} - x_t][x_t - m\mathbf{1}] \right) d\mu(t) \\
\leq & \sup_{m<t<M} \Delta_f(t; m, M) \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \right) \left(\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) - m\mathbf{1} \right) \\
\leq & \frac{f'_-(M) - f'_+(m)}{M-m} \left(M\mathbf{1} - \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) \right) \left(\int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) - m\mathbf{1} \right) \\
\leq & \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_f \underline{\mathbf{x}} \leq & \alpha_f \int_T \phi_t(x_t) d\mu(t) + \beta_f \mathbf{1} - \int_T \phi_t(f(x_t)) d\mu(t) \\
\leq & \frac{1}{4}(M-m)^2 \int_T \phi_t \left(\Delta_f(x_t; m, M) \right) d\mu(t) \\
\leq & \frac{1}{4}(M-m)(f'_-(M) - f'_+(m))\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

vrijede za svako neprekidno omeđeno polje $(x_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz $\mathcal{A}$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je f konkavna na I, onda su znakovi nejednakosti u (3.40), (3.41), i (3.42) obrnuti.

3.3 Primjena na kvazi-aritmetičke operatorske sredine

U ovom odjeljku primijenit ćemo opće rezultate dobivene u prethodnom poglavlju na takozvane kvazi-aritmetičke operatorske sredine. Generalizirana kvazi-aritmetička operatorska sredina definirana je sa

$$M_\psi(x, \phi) = \psi^{-1} \left(\int_T \phi_t(\psi(x_t)) d\mu(t) \right), \tag{3.43}$$

gdje je $(x_t)_{t\in T}$ neprekidno polje pozitivnih operatora iz $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$ za neke skalare $0 < m < M$, $(\phi_t)_{t\in T} \in P[\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{B}(\mathcal{K})]$, a $\psi : [m, M] \to \mathbb{R}$ je neprekidna i strogo monotona funkcija.

Na osnovi poznatog Gelfand-Naimarkovog teorema ([26]), proizvoljna C^*-algebra je izomorfna C^*-algebri omeđenih operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, ovdje označenom sa $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Stoga, kako bi pojednostavili daljnje izlaganje, od sada C^*-algebre promatramo kao algebre omeđenih operatora na Hilbertovom prostoru.

Dodatno, za Hilbertove prostore $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$, sa $P[\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{B}(\mathcal{K})]$ označavamo skup svih unitalnih polja $(\phi_t)_{t\in T}$ pozitivnih linearnih preslikavanja $\phi_t : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{K})$, definiranih na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru T s omeđenom Radonovom mjerom μ.

Mićić, Pečarić i Seo u radovima [64], [63] i [58] razmatrali su uređaj među kvazi-aritmetičkim sredinama $M_\psi(x,\phi)$ i $M_\chi(x,\phi)$. Takav uređaj je uspostavljen na račun operatorske konveksnosti (konkavnosti) funkcije $\chi\circ\psi^{-1}$ i operatorske monotonosti funkcija χ i $-\psi^{-1}$.

Neka je, kao do sada, $(x_t)_{t\in T}$ omeđeno, neprekidno polje operatora i $(\phi_t)_{t\in T}$ polje pozitivnih linearnih preslikavanja, te neka su $\chi,\psi : I\supset [m,M]\to\mathbb{R}$ neprekidne, strogo monotone funkcije . Ako je funkcija $\chi\circ\psi^{-1}$ operatorski konveksna i χ^{-1} operatorski monotona, ili $\chi\circ\psi^{-1}$ operatorski konkavna i $-\chi^{-1}$ operatorski monotona, ili ako je ψ^{-1} operatorski konveksna i χ^{-1} operatorski konkavna, onda vrijedi

$$M_\psi(x,\phi)\le M_\chi(x,\phi) \tag{3.44}$$

Ako je funkcija $\chi\circ\psi^{-1}$ operatorski konkavna i χ^{-1} operatorski monotona, ili $\chi\circ\psi^{-1}$ operatorski konveksna i $-\chi^{-1}$ operatorski monotona, ili ako je ψ^{-1} operatorski konkavna i χ^{-1} operatorski konveksna, onda je znak nejednakosti u (3.44) obrnut.

Za razliku od prethodno spomenutih radova koji se također odnose na uređaj među kvazi-aritmetičkim operatorskim sredinama, odgovarajući obrati ovdje izvedeni su na osnovi klasične realne konveksnosti i monotonosti.

Prije navođenja tih rezultata uvesti ćemo neke oznake koje proizlaze iz ovog konkretnog okruženja. Kroz ovo poglavlje označavamo

$$\psi_m=\min\{\psi(m),\psi(M)\},\quad \psi_M=\max\{\psi(m),\psi(M)\},$$

gdje je $\psi:[m,M]\to\mathbb{R}$ neprekidna, strogo monotona funkcija. Povrh toga, kad se bavimo kvazi-aritmetičkim operatorskim sredinama, prikladnije je koristiti precizniji oblik podijeljenih razlika drugog reda (3.14). Točnije, ako su $\chi,\psi : I\to\mathbb{R}$ neprekidne, strogo monotone funkcije takve da je $\chi\circ\psi^{-1}$ dobro definirana i konveksna na $\psi(I)$, i ako su $0<m<M$ takvi da interval $[m,M]$ pripada unutrašnjosti intervala I, onda definiramo

$$\delta_\psi^\chi(t;m,M)=\frac{1}{\psi(M)-\psi(m)}\left[\frac{\chi(M)-\chi(t)}{\psi(M)-\psi(t)}-\frac{\chi(t)-\chi(m)}{\psi(t)-\psi(m)}\right].$$

S obzirom na raspravu koja se odnosila na relaciju (3.14) u prethodnom poglavlju, izraz $\delta_\psi^\chi(\cdot;m,M)$ možemo promatrati kao neprekidnu funkciju (u parametru t) intervalu $[m,M]$. Stoga, ako je x pozitivni operator iz $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ sa spektrom sadržanim u $[m,M]\subseteq\mathbb{R}_+$, onda i izraz $\delta_\psi^\chi(x;m,M)$ ima smisla.

Konačno, sa kraticama

$$\underline{\mathbf{x}}_\psi=\frac{1}{2}\mathbf{1}-\frac{1}{\psi_M-\psi_m}\int_T\phi_t\left(\left|\psi(\mathbf{x}_t)-\frac{\psi_m+\psi_M}{2}\mathbf{1}\right|\right)d\mu(t)$$

i

$$\delta_\psi^\chi = \chi(m) + \chi(M) - 2\chi \circ \psi^{-1}\left(\frac{\psi_m + \psi_M}{2}\right),$$

imamo sljedeću posljedicu Teorema 3.5, koja nam daje dva niza obrata nejednakosti za kvazi-aritmetičke operatorske sredine (3.44).

Teorem 3.9 Neka su $\chi, \psi : I \to \mathbb{R}$ neprekidne, strogo monotone funkcije, i neka interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Ako je funkcija $\chi \circ \psi^{-1}$ dobro definirana i konveksna na $\psi(I)$, tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}
&\chi\left(M_\chi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \chi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) \\
\leq &\sup_{t\in(m,M)} \Delta_\psi^\chi(t; m, M)\left[\psi_M \mathbf{1} - \psi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right)\right]\left[\psi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \psi_m \mathbf{1}\right] - \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi \\
\leq &\frac{(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)}{\psi_M - \psi_m}\left[\psi_M \mathbf{1} - \psi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right)\right] \\
&\times\left[\psi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \psi_m \mathbf{1}\right] - \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi \\
\leq &\frac{1}{4}\left(\psi_M - \psi_m\right)\left[(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)\right]\mathbf{1} - \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi
\end{aligned} \tag{3.45}$$

i

$$\begin{aligned}
&\chi\left(M_\chi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \chi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) \\
\leq &\frac{1}{4}\left(\psi_M - \psi_m\right)^2 \Delta_\psi^\chi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi); m, M\right) - \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi \\
\leq &\frac{1}{4}\left(\psi_M - \psi_m\right)\left[(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)\right]\mathbf{1} - \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi
\end{aligned} \tag{3.46}$$

vrijede za svako neprekidno omeđeno polje $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ hermitskih elemenata iz C^*-algebre sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je $\chi \circ \psi^{-1}$ konkavna na $\psi(I)$, onda su znakovi nejednakosti u (3.45) i (3.46) obrnuti.

Dokaz. Budući da vrijedi $\psi_m \leq \psi(t) \leq \psi_M$ za sve $t \in [m, M]$, slijedi da je $\psi_m \mathbf{1} \leq \psi(\mathbf{x}_t) \leq \psi_M \mathbf{1}$ za svaki $t \in T$. To znači da je spektar polja $(\mathbf{y}_t)_{t\in T} = (\psi(\mathbf{x}_t))_{t\in T}$ sadržan u intervalu $[\psi_m, \psi_M]$. Dodatno, pošto je funkcija $\chi\circ\psi^{-1}$ neprekidna na $\psi(I)$, interval $[\psi_m, \psi_M]$ pripada unutrašnjosti intervala $\psi(I)$.

Na kraju, korištenjem nizova nejednakosti (3.26) i (3.27) sa uvrštenim ψ_m, ψ_M, $\chi\circ\psi^{-1}$, $(\mathbf{y}_t)_{t\in T}$ respektivno umjesto m, M, f, $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$, uz napomenu da je

$$\Delta_{\chi\circ\psi^{-1}}(\psi(t); \psi_m, \psi_M) = \Delta_\psi^\chi(t; m, M),$$

i sa definicijom (3.43) kvazi-aritmetičkih operatorskih sredina, dobivamo (3.45) i (3.46). □

Jasno, uz pretpostavke iz Teorema 3.9, operator $\chi\left(M_\chi(x, \phi)\right) - \chi\left(M_\psi(x, \phi)\right)$ općenito nije nužno pozitivan. Pozitivan je ako je još dodatno funkcija $\chi\circ\psi^{-1}$ operatorski konveksna na odgovarajućem intervalu.

Uz iste pretpostavke kao i u Teoremu 3.9, na analogan način dobivamo još jedan niz obrata nejednakosti za kvazi-aritmetičke operatorske sredine koji slijedi neposredno iz Teorema 3.6.

Korolar 3.10 Pretpostavimo da su $\chi, \psi : [m, M] \to \mathbb{R}$ neprekidne, strogo monotone funkcije. Ako je funkcija $\chi \circ \psi^{-1}$ dobro definirana i konveksna na $[\psi_m, \psi_M]$, tada

$$\begin{aligned} &\chi\left(M_\chi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \chi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) \\ \leq &\frac{\delta_\psi^\chi}{\psi_M - \psi_m} \left[\left| \psi\left(M_\psi(\mathbf{x}, \phi)\right) - \frac{\psi_m + \psi_M}{2} \mathbf{1} \right| \right. \\ &\left. + \int_T \phi_t \left(\left| \psi(\mathbf{x}_t) - \frac{\psi_m + \psi_M}{2} \mathbf{1} \right| \right) d\mu(t) \right] \\ \leq &\delta_\psi^\chi \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ako je funkcija $\chi \circ \psi^{-1}$ konkavna na intervalu $[\psi_m, \psi_M]$, tada su znakovi nejednakosti u (3.47) obrnuti.

Uz iste pretpostavke kao u prethodna dva rezultata, i Korolar 3.8 možemo na analogan način upotrijebiti za dobivanje obrata Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti povezane s kvazi-aritmetičkim operatorski sredinama.

Korolar 3.11 Neka su $\chi, \psi : I \to \mathbb{R}$ neprekidne, strogo monotone funkcije i neka su $0 < m < M$ takvi da interval $[m, M]$ pripada unutrašnjosti intervala I. Dalje, pretpostavimo da je funkcija $\chi \circ \psi^{-1}$ dobro definirana i konveksna $\psi(I)$. Ako je $(\phi_t)_{t \in T} \in P\left[\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{B}(\mathcal{K})\right]$, gdje su $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilbertovi prostori i T je lokalno kompaktni Hausdorffov prostor s omeđenom Radonovom mjerom μ, tada nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned} \delta_\psi^\chi \underline{\mathbf{x}}_\psi \leq &\frac{\chi(M) - \chi(m)}{\psi(M) - \psi(m)} \psi\left(M_\psi(x, \phi)\right) + \frac{\psi(M)\chi(m) - \psi(m)\chi(M)}{\psi(M) - \psi(m)} \mathbf{1} - \chi\left(M_\chi(x, \phi)\right) \\ \leq &\sup_{t \in (m, M)} \delta_\psi^\chi(t; m, M) \int_T \phi_t\left([\psi_M \mathbf{1} - \psi(x_t)][\psi(x_t) - \psi_m \mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\ \leq &\frac{(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)}{\psi_M - \psi_m} \\ &\times \int_T \phi_t\left([\psi_M \mathbf{1} - \psi(x_t)][\psi(x_t) - \psi_m \mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\ \leq &\frac{(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)}{\psi_M - \psi_m} \left[\psi_M \mathbf{1} - \psi\left(M_\psi(x, \phi)\right)\right] \\ &\times \left[\psi\left(M_\psi(x, \phi)\right) - \psi_m \mathbf{1}\right] \\ \leq &\frac{1}{4}\left(\psi_M - \psi_m\right) \left[(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi_M) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi_m)\right] \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi}^{\chi}\underline{\mathbf{x}}_{\psi} \leq & \frac{\chi(M)-\chi(m)}{\psi(M)-\psi(m)}\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)+\frac{\psi(M)\chi(m)-\psi(m)\chi(M)}{\psi(M)-\psi(m)}\mathbf{1}-\chi\left(M_{\chi}(x,\phi)\right)\\
\leq & \sup_{t\in(m,M)}\delta_{\psi}^{\chi}(t;m,M)\int_{T}\phi_t\left([\psi_M\mathbf{1}-\psi(x_t)][\psi(x_t)-\psi_m\mathbf{1}]\right)d\mu(t)\\
\leq & \sup_{t\in(m,M)}\delta_{\psi}^{\chi}(t;m,M)\left[\psi_M\mathbf{1}-\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)\right]\left[\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)-\psi_m\mathbf{1}\right]\\
\leq & \frac{(\chi\circ\psi^{-1})'_{-}(\psi_M)-(\chi\circ\psi^{-1})'_{+}(\psi_m)}{\psi_M-\psi_m}\left[\psi_M\mathbf{1}-\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)\right]\\
& \times\left[\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)-\psi_m\mathbf{1}\right]\\
\leq & \frac{1}{4}\left(\psi_M-\psi_m\right)\left[(\chi\circ\psi^{-1})'_{-}(\psi_M)-(\chi\circ\psi^{-1})'_{+}(\psi_m)\right]\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi}^{\chi}\underline{\mathbf{x}}_{\psi} \leq & \frac{\chi(M)-\chi(m)}{\psi(M)-\psi(m)}\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)+\frac{\psi(M)\chi(m)-\psi(m)\chi(M)}{\psi(M)-\psi(m)}\mathbf{1}-\chi\left(M_{\chi}(x,\phi)\right)\\
\leq & \frac{1}{4}(\psi_M-\psi_m)^2\int_{T}\phi_t\left(\delta_{\psi}^{\chi}(x_t;m,M)\right)d\mu(t)\\
\leq & \frac{1}{4}\left(\psi_M-\psi_m\right)\left[(\chi\circ\psi^{-1})'_{-}(\psi_M)-(\chi\circ\psi^{-1})'_{+}(\psi_m)\right]\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

vrijede za svako neprekidno polje $(x_t)_{t\in T}$ pozitivnih operatora iz $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ sa spektrom sadržanim u $[m, M]$. Ako je $\chi\circ\psi^{-1}$ konkavna na $\psi(I)$, tada su znakovi nejednakosti u (3.48), (3.49), i (3.50) obrnuti.

Prvu nejednakost iz (3.48) može se zapisati kao

$$\begin{aligned}
&(\psi(M)-\psi(m))\chi\left(M_{\chi}(x,\phi)\right)-(\chi(M)-\chi(m))\psi\left(M_{\psi}(x,\phi)\right)\\
\leq&(\psi(M)\chi(m)-\psi(m)\chi(M))\mathbf{1}-(\psi(M)-\psi(m))\delta_{\psi}^{\chi}\underline{\mathbf{x}}_{\psi},
\end{aligned}$$

čime se dobiva poboljšanje operatorskog analogona odgovarajuće nejednakosti za linearne funkcionale (vidjeti [74], Theorem 4.3, p. 108).

Uz oznake kao i do sada, pretpostavimo da je funkcija χ diferencijabilna u točkama m i M, te da je funkcija ψ^{-1} diferencijabilna u ψ_m and ψ_M. U tom slučaju je funkcija $\chi\circ\psi^{-1}$ duferencijabilna u točkama ψ_m i ψ_M, pa izraze ψ_m i ψ_M u nizovima nejednakosti (3.45), (3.48), i (3.49), zahvaljujući simetriji, možemo redom zamijeniti s $\psi(m)$ i $\psi(M)$. Dodatno, korištenjem pravila za derivaciju kompozicije, izraz

$$(\chi\circ\psi^{-1})'_{-}(\psi(M))-(\chi\circ\psi^{-1})'_{+}(\psi(m))$$

može biti zapisan u prikladnijem obliku, to jest,

$$(\chi \circ \psi^{-1})'_-(\psi(M)) - (\chi \circ \psi^{-1})'_+(\psi(m)) = \frac{\chi'(M)}{\psi'(M)} - \frac{\chi'(m)}{\psi'(m)}. \tag{3.51}$$

3.3.1 Primjeri s potencijalnim operatorskim sredinama

Najuobičajeniji primjer kvazi-aritmetičkih operatorskih sredina (3.43) su potencijalne operatorske sredine (pogledati npr. [63]):

$$M_r(\mathbf{x}, \phi) = \begin{cases} \left(\int_T \phi_t(\mathbf{x}_t^r) d\mu(t)\right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ \exp\left(\int_T \phi_t(\log \mathbf{x}_t) d\mu(t)\right), & r = 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Primjenom rezultata iz prethodnog odjeljka na pogodno odabrane funkcije χ i ψ želimo dobiti analogne obrate nejednakosti za potencijalne operatorske sredine. Definiramo:

$$\begin{aligned}
\Delta_r^s(t; m, M) &= \frac{1}{M^r - m^r}\left[\frac{M^s - t^s}{M^r - t^r} - \frac{t^s - m^s}{t^r - m^r}\right], \ s \in \mathbb{R}, r \neq 0, \\
\Delta_r^*(t; m, M) &= \frac{1}{M^r - m^r}\left[\frac{\log M - \log t}{M^r - t^r} - \frac{\log t - \log m}{t^r - m^r}\right], \ r \neq 0, \\
\Delta_*^s(t; m, M) &= \frac{1}{\log M - \log m}\left[\frac{M^s - t^s}{\log M - \log t} - \frac{t^s - m^s}{\log t - \log m}\right], \ s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Operatorski izrazi $\Delta_r^s(\mathbf{x}; m, M)$, $\Delta_r^*(\mathbf{x}; m, M)$, and $\Delta_*^s(\mathbf{x}; m, M)$ su dobro definirani za $m\mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{1}$.

Sada, sa kraticama

$$\underline{\mathbf{x}}_r = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{|M^r - m^r|} \int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t^r - \frac{m^r + M^r}{2}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t), & r \neq 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{1} - \frac{1}{\log M - \log m} \int_T \phi_t\left(\left|\log \mathbf{x}_t - \log \sqrt{mM}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t), & r = 0, \end{cases}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_r^s &= m^s + M^s - 2\left(\frac{m^r + M^r}{2}\right)^{\frac{s}{r}}, \ s \in \mathbb{R}, r \neq 0, \\
\delta_r^* &= \frac{2}{r} \log \frac{2\sqrt{m^r M^r}}{m^r + M^r}, \ r \neq 0, \\
\delta_*^s &= \left(\sqrt{M^s} - \sqrt{m^s}\right)^2, \ s \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

iz Teorema 3.9 dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.12 Neka je $(\mathbf{x}_t)_{t \in T}$ omeđeno neprekidno polje hermitskih elemenata C^*-algebre sa spektrom sadržanim unutar intervala $[m, M]$, $0 < m < M$.

(i) Ako vrijedi bilo koja od nejednakosti $s \leq 0 < r$, $r < 0 \leq s$, $0 < r \leq s$ ili $s \leq r < 0$, tada imamo

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^s \\
\leq &\sup_{t\in(m,M)} \Delta_r^s(t;m,M)\,[M^r\mathbf{1} - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^r]\,[[M_r(\mathbf{x},\phi)]^r - m^r\mathbf{1}] - \delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \\
\leq &\frac{s}{r}\cdot\frac{M^{s-r}-m^{s-r}}{M^r-m^r}\,[M^r\mathbf{1} - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^r]\,[[M_r(\mathbf{x},\phi)]^r - m^r\mathbf{1}] - \delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \\
\leq &\frac{s}{4r}\,(M^r-m^r)\left(M^{s-r}-m^{s-r}\right)\mathbf{1} - \delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r
\end{aligned} \tag{3.53}$$

i

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^s \leq \frac{1}{4}(M^r-m^r)^2\,\Delta_r^s(M_r(\mathbf{x},\phi);m,M) - \delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \\
\leq &\frac{s}{4r}\,(M^r-m^r)\left(M^{s-r}-m^{s-r}\right)\mathbf{1} - \delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Za $0 \leq s \leq r \neq 0$ ili $0 \neq r \leq s \leq 0$ znakovi nejednakosti u (3.53) i (3.54) su obrnuti.

(ii) Ako je $r < 0$, tada

$$\begin{aligned}
0 &\leq \log[M_0(\mathbf{x},\phi)] - \log[M_r(\mathbf{x},\phi)] \\
&\leq \sup_{t\in(m,M)} \Delta_r^*(t;m,M)\,[M^r\mathbf{1} - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^r]\,[[M_r(\mathbf{x},\phi)]^r - m^r\mathbf{1}] - \delta_r^*\underline{\mathbf{x}}_r \\
&\leq -\frac{1}{rM^rm^r}\,[M^r\mathbf{1} - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^r]\,[[M_r(\mathbf{x},\phi)]^r - m^r\mathbf{1}] - \delta_r^*\underline{\mathbf{x}}_r \\
&\leq -\frac{(M^r-m^r)^2}{4rM^rm^r}\mathbf{1} - \delta_r^*\underline{\mathbf{x}}_r
\end{aligned} \tag{3.55}$$

i

$$\begin{aligned}
0 &\leq \log[M_0(\mathbf{x},\phi)] - \log[M_r(\mathbf{x},\phi)] \\
&\leq \frac{1}{4}(M^r-m^r)^2\,\Delta_r^*(M_r(\mathbf{x},\phi);m,M) - \delta_r^*\underline{\mathbf{x}}_r \\
&\leq -\frac{(M^r-m^r)^2}{4rM^rm^r}\mathbf{1} - \delta_r^*\underline{\mathbf{x}}_r,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

dok su za $r > 0$ znakovi nejednakosti u (3.55) i (3.56) obrnuti.

(iii) Nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_0(\mathbf{x},\phi)]^s \\
\leq &\sup_{t\in(m,M)} \Delta_*^s(t;m,M)\,[\log M\mathbf{1} - \log[M_0(\mathbf{x},\phi)]]\,[\log[M_0(\mathbf{x},\phi)] - \log m\mathbf{1}] - \delta_*^s\underline{\mathbf{x}}_0 \\
\leq &\frac{s(M^s-m^s)}{\log M - \log m}\,[\log M\mathbf{1} - \log[M_0(\mathbf{x},\phi)]]\,[\log[M_0(\mathbf{x},\phi)] - \log m\mathbf{1}] - \delta_*^s\underline{\mathbf{x}}_0 \\
\leq &\frac{s}{4}(\log M - \log m)(M^s-m^s)\,\mathbf{1} - \delta_*^s\underline{\mathbf{x}}_0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

i

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_0(\mathbf{x},\phi)]^s \\
\leq &\frac{1}{4}(\log M - \log m)^2 \Delta_*^s\left(M_0(\mathbf{x},\phi); m, M\right) - \delta_*^s \underline{\mathbf{x}}_0 \\
\leq &\frac{s}{4}\left(\log M - \log m\right)\left(M^s - m^s\right)\mathbf{1} - \delta_*^s \underline{\mathbf{x}}_0 \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

vrijede za svaki $s \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Ovaj korolar je posljedica Teorema 3.9, za poseban izbor funkcija χ i ψ.

Prvo, stavimo $\chi(t) = t^s$ i $\psi(t) = t^r$, gdje su s i r realni parametri takvi da je $r \neq 0$. Funkcija $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)(t) = t^{\frac{s}{r}}$ je konveksna na $\mathbb{R}_+$ ako je $\frac{s}{r} \leq 0$ ili $\frac{s}{r} \geq 1$, što je moguće u jednom od ova četiri slučaja: $s \leq 0 < r$ ili $r < 0 \leq s$ ili $0 < r \leq s$ ili $s \leq r < 0$. Konačno, pošto je $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)'(t) = \frac{s}{r}t^{\frac{s-r}{r}}$, kad uzmemo u obzir (3.45) i (3.46) s gore definiranim funkcijama χ i ψ na intervalu $[m, M]$, dobijemo upravo (3.53) i (3.54).

Obratno, funkcija $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)(t) = t^{\frac{s}{r}}$ je konkavna na $\mathbb{R}_+$ pod uvjetom da je $0 \leq \frac{s}{r} \leq 1$, pa stoga ako je $0 \leq s \leq r \neq 0$ ili $0 \neq r \leq s \leq 0$, dobijemo relacije (3.53) i (3.54) s obrnutim znakovima nejednakosti.

Ostaje nam razmotriti netrivijalne slučajeve kad je jedan od parametara r i s jednak nuli. Ako je $s = 0$, tada, uvrštavanjem $\chi(t) = \log t$ i $\psi(t) = t^r$ slijedi da je $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)(t) = \frac{1}{r}\log t$. Očito, ova funkcija je konveksna (konkavna) za $r < 0$ ($r > 0$). Dodatno, budući da je $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{rt}$, dobivamo (3.55) i (3.56) ali bez prve nejednakosti. Prva nejednakost iz (3.55) i (3.56), kao i u odgovarajućim obratnim nejednakostima, vrijedi na račun operatorske konveksnosti (konkavnosti) funkcije $\frac{1}{r}\log t$ za $r < 0$ ($r > 0$).

Na kraju, ako je $r = 0$, tada uvrštavanjem $\chi(t) = t^s$ i $\psi(t) = \log t$ slijedi da je funkcija $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)(t) = \exp(st)$ konveksna za svaki $s \in \mathbb{R}$. Štoviše, budući da je $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)'(t) = s\exp(st)$, dobijemo (3.57) i (3.58), i dokaz je završen. □

Općenito govoreći, element $[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^s$, koji se pojavljuje u (3.53) i (3.54), nije pozitivno semi-definitan. Svakako, pozitivnost ovog elementa ovisi o operatorskoj konveksnosti funkcije potencije. Poznato je da je funkcija $f(t) = t^r$ operatorski konveksna na $\mathbb{R}_+$ ako vrijedi bilo koja od relacija $1 \leq r \leq 2$ ili $-1 \leq r \leq 0$, te da je operatorski konkavna na $\mathbb{R}_+$ kad je $0 \leq r \leq 1$ (za više detalja pogledati npr. [25]). Stoga, kad se raspravlja o operatorskoj konveksnosti funkcije $\left(\chi \circ \psi^{-1}\right)(t) = t^{\frac{s}{r}}$, kao u dokazu Korolara 3.12, dobivamo uvjete za parametre r i s pod kojima je operator $[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^s$ pozitivno semi-definitan. Preciznije, imamo

$$0 \leq [M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_r(\mathbf{x},\phi)]^s \qquad (3.59)$$

kad vrijedi bilo koji od uvjeta

$$0 < r \leq s \leq 2r \text{ ili } 2r \leq s \leq r < 0 \text{ ili } 0 \leq s + r \leq r \neq 0 \text{ ili } 0 \neq r \leq r + s \leq 0. \tag{3.60}$$

S druge strane, ako je

$$0 \neq r \leq s \leq 0 \text{ ili } 0 \leq s \leq r \neq 0, \tag{3.61}$$

tada je znak nejednakosti u (3.59) obrnut. Povrh toga, pošto operatorska konveksnost (konkavnost) funkcije potencija podrazumijeva i uobičajenu konveksnost (konkavnost), slijedi da relacije (3.53), (3.54), i (3.59) istovremeno vrijede pod uvjetima (3.60), dok obratne relacije istovremeno vrijede pod uvjetima (3.61).

Gornju diskusiju o operatorskoj konveksnosti ne može se primijeniti na relacija (3.57) i (3.58), jer eksponencijalna funkcija $f(t) = \exp t$ nije operatorski konveksna (pogledati npr. [9]).

Kad u Korolar 3.10 i Korolar 3.11 uvrstimo jednake supstitucije kao u dokazu prethodnog korolara, na analogan način redom dobivamo naredne rezultate.

Korolar 3.13 Neka je $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ omeđeno neprekidno polje hermitskih elemenata C^*-algebre sa spektrom sadržanim u intervalu $[m, M]$, $0 < m < M$.

(i) Ako vrijedi jedna od relacija $s \leq 0 < r$ ili $r < 0 \leq s$ ili $0 < r \leq s$ ili $s \leq r < 0$, tada

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x}, \phi)]^s - [M_r(\mathbf{x}, \phi)]^s \\
\leq & \frac{\delta_r^s}{|M^r - m^r|}\left[\left|[M_r(\mathbf{x}, \phi)]^r - \frac{m^r + M^r}{2}\mathbf{1}\right|\right. \\
&\left. + \int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t^r - \frac{m^r + M^r}{2}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t)\right] \\
\leq & \delta_r^s \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Štoviše, ako je $0 \leq s \leq r \neq 0$ ili $0 \neq r \leq s \leq 0$, tada su znakovi nejednakosti obrnuti.

(ii) Ako je $r < 0$, tada

$$\begin{aligned}
0 \leq & \log[M_0(\mathbf{x}, \phi)] - \log[M_r(\mathbf{x}, \phi)] \\
\leq & \frac{\delta_r^*}{|M^r - m^r|}\left[\left|[M_r(\mathbf{x}, \phi)]^r - \frac{m^r + M^r}{2}\mathbf{1}\right|\right. \\
&\left. + \int_T \phi_t\left(\left|\mathbf{x}_t^r - \frac{m^r + M^r}{2}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t)\right] \\
\leq & \delta_r^* \mathbf{1},
\end{aligned}$$

dok su za $r > 0$ znakovi nejednakosti obrnuti.

(iii) Niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
&[M_s(\mathbf{x},\phi)]^s - [M_0(\mathbf{x},\phi)]^s \\
\leq&\frac{\delta_*^s}{\log M - \log m}\left[\left|\log\left[M_0(\mathbf{x},\phi)\right] - \log\sqrt{mM}\mathbf{1}\right|\right. \\
&\left.+\int_T \phi_t\left(\left|\log \mathbf{x}_t - \log\sqrt{mM}\mathbf{1}\right|\right) d\mu(t)\right] \\
\leq&\delta_*^s\mathbf{1}
\end{aligned}$$

vrijedi za svaki $s \in \mathbb{R}$.

Korolar 3.14 Neka je $(\mathbf{x}_t)_{t\in T}$ omeđeno neprekidno polje hermitskih elemenata C^*-algebre sa spektrom sadržanim u intervalu $[m, M]$, $0 < m < M$.

(i) Ako je ili $s \leq 0 < r$ ili $r < 0 \leq s$ ili $0 < r \leq s$ ili $s \leq r < 0$, tada imamo

$$\begin{aligned}
\delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \leq&\frac{M^s - m^s}{M^r - m^r}\left[M_r(x,\phi)\right]^r + \frac{M^r m^s - m^r M^s}{M^r - m^r}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq&\sup_{t\in(m,M)}\delta_r^s(t;m,M)\int_T \phi_t\left([M^r\mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq&\frac{s}{r}\cdot\frac{M^{s-r} - m^{s-r}}{M^r - m^r}\int_T \phi_t\left([M^r\mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq&\frac{s}{r}\cdot\frac{M^{s-r} - m^{s-r}}{M^r - m^r}\left[M^r\mathbf{1} - \left[M_r(x,\phi)\right]^r\right]\left[\left[M_r(x,\phi)\right]^r - m^r\mathbf{1}\right] \\
\leq&\frac{s}{4r}\left(M^r - m^r\right)\left(M^{s-r} - m^{s-r}\right)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \leq&\frac{M^s - m^s}{M^r - m^r}\left[M_r(x,\phi)\right]^r + \frac{M^r m^s - m^r M^s}{M^r - m^r}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq&\sup_{t\in(m,M)}\delta_r^s(t;m,M)\int_T \phi_t\left([M^r\mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq&\sup_{t\in(m,M)}\delta_r^s(t;m,M)\left[M^r\mathbf{1} - \left[M_r(x,\phi)\right]^r\right]\left[\left[M_r(x,\phi)\right]^r - m^r\mathbf{1}\right] \\
\leq&\frac{s}{r}\cdot\frac{M^{s-r} - m^{s-r}}{M^r - m^r}\left[M^r\mathbf{1} - \left[M_r(x,\phi)\right]^r\right]\left[\left[M_r(x,\phi)\right]^r - m^r\mathbf{1}\right] \\
\leq&\frac{s}{4r}\left(M^r - m^r\right)\left(M^{s-r} - m^{s-r}\right)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_r^s\underline{\mathbf{x}}_r \leq&\frac{M^s - m^s}{M^r - m^r}\left[M_r(x,\phi)\right]^r + \frac{M^r m^s - m^r M^s}{M^r - m^r}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq&\frac{1}{4}\left(M^r - m^r\right)^2\int_T \phi_t\left(\delta_r^s(x_t;m,M)\right) d\mu(t) \\
\leq&\frac{s}{4r}\left(M^r - m^r\right)\left(M^{s-r} - m^{s-r}\right)\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Dodatno, ako vrijedi $0 \leq s \leq r \neq 0$ ili $0 \neq r \leq s \leq 0$, tada su svi znakovi nejednakosti u gornjim relacijama obrnuti.

(ii) Ako je $r < 0$, tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\delta_r^* \underline{\mathbf{x}}_r \leq & \frac{\log M - \log m}{M^r - m^r} \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r + \frac{M^r \log m - m^r \log M}{M^r - m^r} \mathbf{1} - \log\left[M_0(x, \phi)\right] \\
\leq & \sup_{t \in (m,M)} \delta_r^*(t; m, M) \int_T \phi_t\left([M^r \mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r \mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & -\frac{1}{r M^r m^r} \int_T \phi_t\left([M^r \mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r \mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & -\frac{1}{r M^r m^r} \left[M^r \mathbf{1} - \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r\right] \left[\left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r - m^r \mathbf{1}\right] \\
\leq & -\frac{\left(M^r - m^r\right)^2}{4 r M^r m^r} \mathbf{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_r^* \underline{\mathbf{x}}_r \leq & \frac{\log M - \log m}{M^r - m^r} \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r + \frac{M^r \log m - m^r \log M}{M^r - m^r} \mathbf{1} - \log\left[M_0(x, \phi)\right] \\
\leq & \sup_{t \in (m,M)} \delta_r^*(t; m, M) \int_T \phi_t\left([M^r \mathbf{1} - x_t^r][x_t^r - m^r \mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \sup_{t \in (m,M)} \delta_r^*(t; m, M) \left[M^r \mathbf{1} - \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r\right] \left[\left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r - m^r \mathbf{1}\right] \\
\leq & -\frac{1}{r M^r m^r} \left[M^r \mathbf{1} - \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r\right] \left[\left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r - m^r \mathbf{1}\right] \\
\leq & -\frac{\left(M^r - m^r\right)^2}{4 r M^r m^r} \mathbf{1},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_r^* \underline{\mathbf{x}}_r \leq & \frac{\log M - \log m}{M^r - m^r} \left[M_r\left(x, \phi\right)\right]^r + \frac{M^r \log m - m^r \log M}{M^r - m^r} \mathbf{1} - \log\left[M_0(x, \phi)\right] \\
\leq & \frac{1}{4} \left(M^r - m^r\right)^2 \int_T \phi_t\left(\delta_r^*(x_t; m, M)\right) d\mu(t) \\
\leq & -\frac{\left(M^r - m^r\right)^2}{4 r M^r m^r} \mathbf{1},
\end{aligned}$$

dok su za $r > 0$ svi znakovi nejednakosti u gornjim relacijama obrnuti.

(iii) Nizovi nejednakosti

$$\begin{aligned}
\delta_*^s \underline{\mathbf{x}}_0 \leq & \frac{M^s - m^s}{\log M - \log m} \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] + \frac{m^s \log M - M^s \log m}{\log M - \log m}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq & \sup_{t\in(m,M)} \delta_*^s(t;m,M) \int_T \phi_t\left([\log M\mathbf{1} - \log x_t][\log x_t - \log m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \frac{s\left(M^s - m^s\right)}{\log M - \log m} \int_T \phi_t\left([\log M\mathbf{1} - \log x_t][\log x_t - \log m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \frac{s\left(M^s - m^s\right)}{\log M - \log m} \left[\log M\mathbf{1} - \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right]\right]\left[\log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] - \log m\mathbf{1}\right] \\
\leq & \frac{s}{4}\left(\log M - \log m\right)\left(M^s - m^s\right)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_*^s \underline{\mathbf{x}}_0 \leq & \frac{M^s - m^s}{\log M - \log m} \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] + \frac{m^s \log M - M^s \log m}{\log M - \log m}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq & \sup_{t\in(m,M)} \delta_*^s(t;m,M) \int_T \phi_t\left([\log M\mathbf{1} - \log x_t][\log x_t - \log m\mathbf{1}]\right) d\mu(t) \\
\leq & \sup_{t\in(m,M)} \delta_*^s(t;m,M) \left[\log M\mathbf{1} - \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right]\right]\left[\log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] - \log m\mathbf{1}\right] \\
\leq & \frac{s\left(M^s - m^s\right)}{\log M - \log m} \left[\log M\mathbf{1} - \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right]\right]\left[\log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] - \log m\mathbf{1}\right] \\
\leq & \frac{s}{4}\left(\log M - \log m\right)\left(M^s - m^s\right)\mathbf{1},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\delta_*^s \underline{\mathbf{x}}_0 \leq & \frac{M^s - m^s}{\log M - \log m} \log\left[M_0\left(x,\phi\right)\right] + \frac{m^s \log M - M^s \log m}{\log M - \log m}\mathbf{1} - \left[M_s(x,\phi)\right]^s \\
\leq & \frac{1}{4}(\log M - \log m)^2 \int_T \phi_t\left(\delta_*^s(x_t;m,M)\right) \\
\leq & \frac{s}{4}\left(\log M - \log m\right)\left(M^s - m^s\right)\mathbf{1}
\end{aligned}$$

vrijede za svaki $s \in \mathbb{R}$.

Poglavlje 4

Obrati Andove i Davis-Choijeve nejednakosti

U ovom poglavlju dokazano je nekoliko obrata Andove nejednakosti i Davis-Choijeve nejednakosti različitog tipa, te Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost i njen obrat u obliku razlike za pozitivna linearna preslikavanja. Također je dobiven i obrat u obliku razlike za koneksije i poopćene koneksije - solidarities, te obrat u obliku kvocijenta (ili obrat operatorske Hölderove nejednakosti) za koneksije i poseban tip poopćenih koneksija. U slučaju obrata u obliku razlike, procjene su izražene preko jedne vrste varijacije uključene familije operatora. Primjenom tih rezultata dobiveni su operatorski obrati u obliku kvocijenta i razlike tipa Hölderove nejednakosti za općenite težinske potencijalne sredine.

4.1 Uvod

Neka je H Hilbertov prostor, i A linearni operator na H. Operatorsku normu od A definiramo kao

$$||A|| := \sup\{||Ax|| : ||x|| \leq 1, x \in H\}.$$

Adjungirani operator A^* od A definiran je kao jedinstveni operator na H za koji vrijedi $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ za bilo koje $x, y \in H$. Slijedi da je $||A|| = ||A^*|| = ||AA^*||^{1/2}$.

Operator A je omeđen ako vrijedi $||A|| < \infty$. Sa $\mathcal{B}(H)$ označavamo C^*-algebru svih omeđenih (to jest neprekidnih) linearnih operatora na H.

Spektar operatora A je definiran kao skup

$$\mathrm{Sp(A)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \mathbf{1}_H \text{ nije invertibilan u } \mathcal{B}(H)\}.$$

Za omeđeni linearni operator $A \in \mathcal{B}(H)$ kažemo da je hermitski ako je $A = A^*$. Operator A je hermitski ako i samo ako je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in H$. Za hermitski operator A kažemo da je pozitivno semi-definitan (ili jednostavno pozitivan) i pišemo $A \geq 0$ ako je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svaki vektor $x \in H$.

Teoriju za koneksije i sredine parova pozitivnih operatora razvili su Kubo i Ando u [51]. Koneksija σ, kao binarna operacija na skupu pozitivno definitnih operatora, karakterizirana je relacijom

$$A\sigma B = A^{1/2} f\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right) A^{1/2}, \tag{4.1}$$

gdje je f pozitivna i operatorski monotona funkcija na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ koju zovemo reprezentirajuća funkcija za σ. Aksiomatska svojstva koneksije σ su sljedeća:

(1) iz $A \leq C$, $B \leq D$ slijedi $A\sigma B \leq C\sigma D$,

(2) $C\,(A\sigma B)\,C \leq (CAC)\sigma(CBC)$,

(3) iz $A_k \downarrow A$ i $B_k \downarrow B$ slijedi $A_k\sigma B_k \downarrow A\sigma B$.

Sredina je koneksija sa svojstvom normiranosti:

(4) $I\sigma I = I$.

Binarnu operaciju σ na skupu pozitivno definitnih operatora zovemo poopćena koneksija - solidarity ako je njena reprezentirajuća funkcija f iz (4.1) samo operatorski monotona na $\langle 0, \infty\rangle$. Čitava teorija o poopćenim koneksijama razvijena je u [22]. Relativna operatorska entropija $S(A|B) = A^{1/2}\log\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)A^{1/2}$ je primjer poopćene koneksije.

Dokazi sljedećih svojstava mogu se pronaći u [22].

Teorem 4.1 ([22]) Ako je σ poopćena koneksija, onda vrijedi

- $(A+B)\sigma(C+D) \geq A\sigma C + B\sigma D$ (subaditivnost)
- $(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2)\,\sigma\,(\lambda B_1 + (1-\lambda)B_2) \geq \lambda\,(A_1\sigma B_1) + (1-\lambda)\,(A_2\sigma B_2)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ (zajednička konkavnost).

Jednostavna posljedica navedenih svojstava je sljedeća nejednakost Jensenovog tipa.

Korolar 4.2 ([22]) Neka su $p_i \geq 0$, $A_i, B_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i A_i \sigma B_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i A_i\right) \sigma \left(\sum_{i=1}^{n} p_i B_i\right) \tag{4.2}$$

za bilo koju poopćenu koneksiju σ.

Osnovni primjeri koneksija i njihovih reprezentirajućih funkcija su redom:

- Težinska aritmetička sredina

$$A\nabla_\alpha B = (1-\alpha)A + \alpha B,\ 0 \leq \alpha \leq 1,$$

s reprezentirajućom funkcijom $t \mapsto (1-\alpha) + \alpha t$.

- Težinska harmonijska sredina

$$A\,!_{\alpha}B = \left[(1-\alpha)A^{-1} + \alpha B^{-1}\right]^{-1},\ 0 \le \alpha \le 1,$$

  s reprezentirajućom funkcijom $t \mapsto \frac{t}{(1-\alpha)t+\alpha}$.

- Težinska geometrijska sredina

$$A\,\#_{\alpha}B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{\alpha}A^{1/2},\ 0 \le \alpha \le 1,$$

  s reprezentirajućom funkcijom $t \mapsto t^{\alpha}$.

- Težinska potencijalna sredina

$$A\,\#_{p,\alpha}B = A^{1/2}\left[(1-\alpha)I + \alpha\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{p}\right]^{1/p}A^{1/2},\ 0 \le \alpha \le 1,\ -1 \le p \le 1,$$

  s reprezentirajućom funkcijom $t \mapsto [(1-\alpha)+\alpha t^{p}]^{1/p}$.

Na ovaj način vrijedi Hölderova nejednakost za pozitivno definitne operatore A_i, B_i i $p_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i A_i \#_{p,\alpha} B_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i A_i\right) \#_{p,\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i B_i\right) \tag{4.3}$$

gdje je $0 \le \alpha \le 1$, $-1 \le p \le 1$.

Iako je uobičajeno da nejednakost (4.3) zovemo Hölderova nejednakost, potrebno je spomenuti da se u realnom slučaju nejednakost (4.3) svede na

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left[(1-\alpha)a_i^p + \alpha b_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^{p} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}},$$

što vrijedi za $p < 1$, obratna nejednakost vrijedi za $p > 1$. Ovo je diskretna nejednakost Minkowskog. Njena općenitija forma je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{j=1}^{m} q_j a_{i,j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{j=1}^{m} q_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_{i,j}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4.4}$$

gdje su $a_{i,j} > 0$, $p_i, q_j \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $p < 1$. Za $p > 1$ vrijedi obratna nejednakost u (4.4).

Primijetimo da je nejednakost (4.4), zbog svojstva homogenosti, ekvivalentna nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

U operatorskom slučaju jedini poznati rezultat ovog tipa dobiven je za harmonijske sredine i dokazan je u [2]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} A_{i,j}^{-1}\right)^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\right)^{-1}\right]^{-1},$$

gdje su $A_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ pozitivni invertibilni operatori.

Cilj prvog odjeljka je dobiti obratne nejednakosti za (4.2) u obliku razlike i kvocijenta za poseban tip poopćenih koneksija koji uključuje koneksije. U slučaju težinskih potencijalnih sredina izvesti će se eksplicitne procjene obratne nejednakosti od (4.3) u obliku razlike i kvocijenta. Također će se dobiti odgovarajuće nejednakosti u obliku razlike za relativnu operatorsku entropiju. Metode korištene u ovom poglavlju mogu se pronaći u monografijama [24] i [25].

Dokaz sljedećeg rezultata nalazi se u [11].

Teorem 4.3 ([11]) Neka su $A_i, B_i > 0$, $i = 1, \ldots n$ takvi da vrijedi $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke skalare $0 < m < M$. Tada, ako je $0 < \alpha < 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \#_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \frac{1}{K(m, M, \alpha)} \sum_{i=1}^{n} A_i \#_\alpha B_i, \tag{4.5}$$

gdje je

$$K(m, M, \alpha) = \frac{Mm^\alpha - mM^\alpha}{(1-\alpha)(M-m)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{M^\alpha - m^\alpha}{Mm^\alpha - mM^\alpha}\right)^\alpha$$

Kantorovicheva konstanta.

Obrat prethodnog teorema dokazan je u [23].

Teorem 4.4 ([23]) Neka su A_i, B_i pozitivno definitne matrice takve da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke skalare $0 < m \leq M$ i $i = 1, \ldots, n$. Tada za svaki $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \#_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) - \sum_{i=1}^{n} A_i \#_\alpha B_i \leq C(m, M, \alpha) \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{4.6}$$

gdje je

$$C(m, M, \alpha) = (1-\alpha)\left(\frac{M^\alpha - m^\alpha}{\alpha(M-m)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \frac{Mm^\alpha - mM^\alpha}{M-m}.$$

U istom radu, korištenjem Teorema 4.4 i $S(A|B) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{A\#_\alpha B - A}{A}$, dokazan je sljedeći korolar.

Korolar 4.5 ([23]) Neka su A_i, B_i pozitivno definitne matrice takve da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke skalare $0 < m \leq M$ i $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$S\left(\sum_{i=1}^{n} A_i | \sum_{i=1}^{n}\right) - \sum_{i=1}^{n} S\left(A_i|B_i\right) \leq \log S(h) \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{4.7}$$

gdje je

$$S(h) = \frac{(h-1)h^{\frac{1}{h-1}}}{e \log h}$$

Spechtov omjer i $h = \frac{M}{m}$.

Za preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ kažemo da je linearno ako vrijedi:

* $\Phi(X+Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$ za sve $X, Y \in \mathcal{B}(H)$ (aditivnost);
* $\Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$ za sve $X \in \mathcal{B}(H)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ (homogenost).

Linearno preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ je pozitivno ako čuva operatorski poredak, to jest ako iz $A \geq 0$ slijedi $\Phi(A) \geq 0$. Linearno preslikavanje $\Phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ je unitalno ako čuva identitetu, to jest ako vrijedi $\Phi(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_K$.

Iz definicija je očito da pozitivno linearno preslikavanje čuva operaciju adjungiranja, to jest vrijedi $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$, a ako je Φ još i unitalno, onda iz $\alpha \mathbf{1}_H \leq A \leq \beta \mathbf{1}_H$ slijedi $\alpha \mathbf{1}_K \leq \Phi(A) \leq \beta \mathbf{1}_K$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

U drugom odjeljku ćemo dobiti obrat poznate Davis-Choijeve nejednakosti, u kojoj se navodi da za operatorski konveksnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, i za pozitivno unitalno linearno preslikavanje Φ vrijedi

$$f(\Phi(A)) \leq \Phi(f(A)), \tag{4.8}$$

gdje je A hermitski operator takav da je $\mathrm{Sp}(A) \subseteq I$ (pogledati [15], [16]).

Sljedeći rezultat je opet nejednakost Jensenovog tipa, ali za koneksije (pogledati [4]).

Teorem 4.6 (Andova nejednakost, [4]) Ako je Φ pozitivno linearno preslikavanje, onda za bilo koju koneksiju σ i za bilo koje pozitivno definitne operatore A i B vrijedi

$$\Phi(A\sigma B) \leq \Phi(A)\sigma\Phi(B). \tag{4.9}$$

Iz Teorema 4.6 lako se izvede zaključak da također vrijedi i generalizacija Andove nejednakosti

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j \sigma B_j) \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big)\sigma\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(B_j)\Big), \tag{4.10}$$

gdje je σ koneksija, A_j, B_j su pozitivno definitni operatori, Φ_j su pozitivna linearna preslikavanja i vrijedi $p_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Također ćemo dobiti procjenu odozgo za i razliku generiranu Andovom nejednakošću te generalizacijom Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti pomoću jedne vrste varijacije operatora uključenih u spomenute nejednakosti. Metoda se bazira na metodama iz rada [18].

4.2 Obrati nejednakosti za koneksije i poopćene koneksije kvocijentnog tipa

Prvi rezultat je generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za specijalan tip poopćenih koneksija koji uključuje i koneksije.

Teorem 4.7 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke $0 < m \leq M$, $p_i \geq 0$, te neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je σ poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i \sigma B_i\right)\\ \geq &\frac{M \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(B_i\right)}{M-m} f(m) + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(B_i\right) - m \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i\right)}{M-m} f(M).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dokaz. Budući da je f konkavna na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$, prema Edmundson-Lah-Ribaričevoj nejednakosti (pogledati [74]) imamo

$$f(t) \geq \frac{M-t}{M-m} f(m) + \frac{t-m}{M-m} f(M), \ t \in [m, M]. \tag{4.12}$$

Iz $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ jednostavno slijedi da je $m\mathbf{1}_H \leq A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}} \leq M\mathbf{1}_H$, $i = 1, \ldots, n$. Korištenjem funkcionalnog računa i (4.12), dobijemo

$$f\left(A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \frac{M\mathbf{1}_H - A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}}}{M-m} f(m) + \frac{A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}} - m\mathbf{1}_H}{M-m} f(M), \ i = 1, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Kad nejednakost (4.13) dvaput pomnožimo s $A_i^{\frac{1}{2}}$, zatim djelujemo s Φ_i, pa pomnožimo s p_i i sumiramo, tada slijedi

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i^{\frac{1}{2}} f\left(A_i^{-\frac{1}{2}} B_i A_i^{-\frac{1}{2}}\right) A_i^{\frac{1}{2}}\right)\\ \geq &\frac{M \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(B_i\right)}{M-m} f(m) + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(B_i\right) - m \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i \left(A_i\right)}{M-m} f(M).\end{aligned}$$

□

Ekvivalent Hölderove operatorske nejednakosti u obliku razlike (4.2) dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 4.8 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da za neke skalare $0 < m \leq M$ vrijedi $mA_i \leq B_i \leq MA_i$, $p_i \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, i neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da je σ_1 poopćena koneksija generirana funkcijom f_1, a σ_2

poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f_2. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)\sigma_1\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\sigma_2 B_i\right)\\ &\leq\max_{m\leq t\leq M}\left[\lambda f_1(t)-\left(\frac{M-t}{M-m}f_2(m)+\frac{t-m}{M-m}f_2(M)\right)\right]\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Dokaz. Korištenjem (4.11) dobijemo:

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)\sigma_1\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\sigma_2 B_i\right)\\ \leq&\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &f_1\left(\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &-\left[\frac{M\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)-\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)}{M-m}f_2(m)+\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi\left(B_i\right)-m\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)}{M-m}f_2(M)\right]\\ =&\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left[f_1\left(\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right.\\ &-\left[\frac{M-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}}{M-m}f_2(m)\right.\\ &\left.\left.+\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi\left(B_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}-m}{M-m}f_2(M)\right]\right]\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq&\max_{m\leq t\leq M}\left[\lambda f_1(t)-\left(\frac{M-t}{M-m}f_2(m)+\frac{t-m}{M-m}f_2(M)\right)\right]\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right).\end{aligned}$$

□

Kao posljedicu prethodnog teorema dobivamo obrat operatorske Hölderove nejednakosti.

Korolar 4.9 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke $0 < m \leq M$, $p_i \geq 0$, te neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, $i = 1, \ldots, n$. Neka je σ_1 koneksija generirana funkcijom f_1, a σ_2 poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f_2. Tada

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi\left(A_i\sigma_2 B_i\right)\\ &\geq\min_{m\leq t\leq M}\frac{\frac{M-t}{M-m}f_2(m)+\frac{t-m}{M-m}f_2(M)}{f_1(t)}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(A_i\right)\right)\sigma_1\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\Phi_i\left(B_i\right)\right).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dokaz. Primijetimo da vrijedi $f_1 > 0$. U nejednakost (4.14) uvrstimo

$$\lambda = \min_{m \le t \le M} \frac{\frac{M-t}{M-m} f_2(m) + \frac{t-m}{M-m} f_2(M)}{f_1(t)}.$$

Primijetimo da za ovako odabrani λ slijedi:

$$\lambda f_1(t) - \frac{M-t}{M-m} f_2(m) - \frac{t-m}{M-m} f_2(M) \le 0, \ t \in [m, M].$$

Budući da je funkcija f_1 neprekidna na $[m, M]$, mora postojati $t_0 \in [m, M]$ takav da je

$$\lambda = \frac{\frac{M-t_0}{M-m} f_2(m) + \frac{t_0-m}{M-m} f_2(M)}{f_1(t_0)},$$

odakle slijedi da za taj λ vrijedi

$$\max_{m \le t \le M} \left[\lambda f_1(t) - \left(\frac{M-t}{M-m} f_2(m) + \frac{t-m}{M-m} f_2(M) \right) \right] = 0,$$

što očito daje (4.15). □

Može se dati i alternativni pristup korištenjem Mond-Pečarićeve metodode opisane u [25]. Naredni rezultati bave se obratima Davis-Choijeve i Andove nejednakosti (4.9). Dokazi obrata Hölderove nejednakosti za matrice dani u [11], [54] i [46] zasnivaju se na Gelfand-Naimark-Segalovoj konstrukciji.

Lema 4.10 Neka je A hermitski operator takav da je $\mathrm{Sp}(A) \subseteq [m, M]$ za neke $m < M$. Pretpostavimo da su $f, g \in C([m, M])$, gdje je f konkavna funkcija i Φ unitalno pozitivno linearno preslikavanje. Tada vrijedi

$$\Phi(f(A)) \ge \alpha g(\Phi(A)) + \beta \mathbf{1}_K,$$

gdje je $\beta = \min_{m \le t \le M} [\mu_f t + \nu_f - \alpha g(t)]$, $\mu_f = \frac{f(M)-f(m)}{M-m}$, $\nu_f = \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}$.

Dokaz. Budući da je f konkavna, slijedi da je $f(t) \ge \mu_f t + \nu_f$. Odatle slijedi $f(A) \ge \mu_f A + \nu_f \mathbf{1}_H$. Primjenom unitalnog pozitivnog linearnog preslikavanja Φ dobijemo

$$\Phi(f(A)) \ge \mu_f \Phi(A) + \nu_f \mathbf{1}_K,$$

što nam daje

$$\Phi(f(A)) - \alpha g(\Phi(A)) \ge \mu_f \Phi(A) + \nu_f \mathbf{1}_K - \alpha g(\Phi(A)) \ge \beta \mathbf{1}_K.$$

□

Teorem 4.11 Neka su A, B pozitivno definitni operatori takvi da je $mA \leq B \leq MA$ za neke skalare $0 < m \leq M$. Neka je σ koneksija generirana funkcijom f, a τ koneksija generirana funkcijom g. Pretpostavimo da je Φ unitalno pozitivno linearno preslikavanje i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\Phi(A\sigma B) \geq \alpha\Phi(A)\tau\Phi(B) + \beta\Phi(A),$$

gdje je $\beta = \min_{m\leq t\leq M}[\mu_f t + \nu_f - \alpha g(t)]$.

Dokaz. Definirajmo unitalno pozitivno linearno preslikavanje Ψ sa

$$\Psi(X) = \Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi\left(A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}\right)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}.$$

Korištenjem Leme 4.10 dobijemo:

$$\begin{aligned}
\Phi(A\sigma B)) &= \Phi\left(A^{\frac{1}{2}}f\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \Phi(A)^{\frac{1}{2}}\Psi\left(f\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\Phi(A)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \Phi(A)^{\frac{1}{2}}\left[\alpha g\left(\Psi\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)\right) + \beta I\right]\Phi(A)^{\frac{1}{2}} \\
&= \alpha\Phi(A)^{\frac{1}{2}}g\left(\Psi\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\Phi(A)^{\frac{1}{2}} + \beta\Phi(A) \\
&= \alpha\Phi(A)\tau\Phi(B) + \beta\Phi(A).
\end{aligned}$$

□

Korolar 4.12 Neka su A, B pozitivno definitni operatori takvi da vrijedi $mA \leq B \leq MA$ za neke $0 < m \leq M$. Neka je σ koneksija generirana funkcijom f, a τ koneksija generirana funkcijom g. Pretpostavimo da je Φ unitalno pozitivno linearno preslikavanje. Tada vrijedi

$$\Phi(A\sigma B) \geq \min_{m\leq t\leq M}\frac{\mu_f t + \nu_f}{g(t)}\Phi(A)\tau\Phi(B).$$

Dokaz. U Teoremu 4.11 stavimo $\alpha = \min_{m\leq t\leq M}\frac{\mu_f t+\nu_f}{g(t)}$. Pošto je g neprekidna funkcija, mora postojati $t_1 \in [m, M]$ takav da je $\min_{m\leq t\leq M}\frac{\mu_f t+\nu_f}{g(t)} = \frac{\mu_f t_1+\nu_f}{g(t_1)}$. Primijetimo da za ovaj α vrijedi $0 \leq \mu_f t - \nu_f - \alpha g(t)$, ali je $\mu_f t_1 + \nu_f - \alpha g(t_1) = 0$, pa je $\beta = 0$ i time je nejednakost iz korolara dokazana. □

Sljedeći teorem je generalizacija Teorema 4.3 i dobivamo ga primjenom prethodnih rezultata.

Teorem 4.13 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke $0 < m \leq M$, Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, te neka je $-1 \leq p \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Phi_i(A_i)\right)\#_{p,\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\Phi_i(B_i)\right) \leq K(M, m, p, \alpha)\sum_{i=1}^{n} p_i\Phi_i(A_i\#_{p,\alpha}B_i),$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
&K(m,M,p,\alpha)\\
=&\frac{M-m}{M\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{\frac{1}{p}}-m\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\\
&\cdot\left[(1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}}+\alpha^{\frac{1}{1-p}}\left(\frac{M\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{\frac{1}{p}}-m\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right]^{\frac{1-p}{p}}\\
=&\frac{1}{\nu_f}\left[(1-\alpha)^{\frac{1}{1-p}}+\alpha^{\frac{1}{1-p}}\left(\frac{\nu_f}{\mu_f}\right)^{\frac{p}{1-p}}\right]^{\frac{1-p}{p}},
\end{aligned}
$$

i $f(t)=[1-\alpha+\alpha t^{p}]^{1/p}$.

Dokaz. Dati ćemo samo skicu dugačkog, ali rutinskog, računa. U nejednakost (4.15) stavimo $f_1(t)=f_2(t)=(1-\alpha+\alpha t^{p})^{1/p}$. Definirajmo

$$
F(t)=\frac{(M-m)\left(1-\alpha+\alpha t^{p}\right)^{1/p}}{(M-t)\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}+(t-m)\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}}.
$$

Izravnim računanjem vidimo da je $F'(t)=0$ ekvivalentno jednadžbi

$$
\begin{aligned}
&\alpha t^{p-1}\left[(M-t)\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}+(t-m)\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}\right]\\
=&\left(1-\alpha+\alpha t^{p}\right)\left[\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}-\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}\right],
\end{aligned}
$$

koja nakon očitog skraćivanja postaje

$$
\begin{aligned}
&\alpha\left(M\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}-m\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}\right)\\
=&(1-\alpha)t^{1-p}\left(\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}-\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}\right),
\end{aligned}
$$

što nam konačno daje

$$
t=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}}\left(\frac{M\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}-m\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}}{\left(1-\alpha+\alpha M^{p}\right)^{1/p}-\left(1-\alpha+\alpha m^{p}\right)^{1/p}}\right)^{\frac{1}{1-p}}.
$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u F i sređivanjem izraza dobivamo konstantu $K(m,M,p,\alpha)$. $\square$

Sljedeći korolar je posljedica prethodnog teorema za $\alpha=-1$.

Korolar 4.14 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke skalare $0<m\leq M$, neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, te $0\leq\alpha\leq 1$ i

$p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(A_i\right)\right) !_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(B_i\right)\right) \leq K(M, m, -1, \alpha) \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(A_i !_{\alpha} B_i\right),$$

gdje je

$$K(m, M, -1, \alpha) = \frac{((1-\alpha)m + \alpha)\left((1-\alpha)M + \alpha\right)}{\left((1-\alpha)\sqrt{mM} + \alpha\right)^2}.$$

Generalizacija Teorema 4.4 je dana u sljedećem teoremu.

Teorem 4.15 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke $0 < m \leq M$, neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja, $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ i neka je $-1 \leq p \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \#_{p,\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) - \sum_{i=1}^{n} A_i \#_{p,\alpha} B_i \leq C(m, M, p, \alpha) \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

gdje je

$$C(m, M, p, \alpha) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\mu_f}{\left(\alpha^{\frac{1}{p-1}} \mu_f^{\frac{p}{1-p}} - 1\right)^{\frac{1-p}{p}}} - \nu_f,$$

i $f(t) = [1 - \alpha + \alpha t^p]^{1/p}$.

Dokaz. Koristimo Teorem 4.14 za $\lambda = 1$, $f_1(t) = f_2(t) = f(t) = [1 - \alpha + \alpha t^p]^{1/p}$. Stavimo

$$F(t) = [1 - \alpha + \alpha t^p]^{1/p} - \mu_f t - \nu_f.$$

Lako je vidjeti da iz jednakosti $F'(t) = 0$ slijedi

$$t = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\left[\alpha^{\frac{1}{p-1}} \mu_f^{\frac{p}{1-p}} - 1\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u izraz za F i sređivanjem direktno slijedi konstanta $C(m, M, p, \alpha)$. □

Sada možemo dati direktni dokaz Korolara 4.5 korištenjem Teorema 4.8.

Korolar 4.16 Neka su A_i, B_i pozitivno definitni operatori takvi da je $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke $0 < m \leq M$, neka su Φ_i pozitivna linearna preslikavanja i $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Tada

$$S\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(A_i\right) | \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(B_i\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(S\left(A_i | B_i\right)\right) \leq \log S(h) \sum_{i=1}^{n} p_i \Phi_i\left(A_i\right),$$

gdje je $S(h)$ definiran u Korolaru 4.5.

Dokaz. U Teoremu 4.8 stavimo $f_1(t) = f_2(t) = \log t$ i $\lambda = 1$. Definirajmo

$$F(t) = \log t - \frac{M-t}{M-m}\log m - \frac{t-m}{M-m}\log M.$$

Trivijalno slijedi da je $F'(t) = 0$ ekvivalentno sa

$$t = \frac{M-m}{\log M - \log m}.$$

Jednostavno se dobije da vrijedi

$$F\left(\frac{M-m}{\log M - \log m}\right) = \log S(h),$$

gdje je $h = M/m$. $\square$

4.3 Obrati Andove i Davis-Choijeve nejednakosti u obliku razlike

Sljedeći teorem dokazan je u [35] u integralnom obliku. Zbog cjelovitosti, dokazati ćemo njegovu diskretnu verziju. Riječ je o obratu u obliku razlike generalizirane Davis-Choijeve nejednakosti (4.8).

Teorem 4.17 Neka su A_j hermitski operatori takvi da je $Sp(A_j) \subseteq [m, M]$ za neke skalare $m < M$, te neka su Φ_j unitalna pozitivna linearna preslikavanja za $j = 1, \ldots, n$. Ako je f konkavna funkcija na intervalu $I \supset [m, M]$ i ako su $p_1, ..., p_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, tada vrijedi

$$\begin{aligned}
& f\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big) - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(f(A_j)) \\
\leq & -\inf_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_f(t;m,M)\Big(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K\Big) \\
\leq & \frac{f'_+(m) - f'_-(M)}{M-m}\Big(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K\Big) \\
\leq & \frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m) - f'_-(M))\mathbf{1}_K,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

gdje je $\Psi_f(\cdot;m,M)\colon \langle m,M\rangle \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\Psi_f(t;m,M) = \frac{1}{M-m}\Big(\frac{f(M)-f(t)}{M-t} - \frac{f(t)-f(m)}{t-m}\Big) = [m,t,M;f], \tag{4.17}$$

a $[m,t,M;f]$ označava podijeljenu razliku drugog reda.

Dokaz. Budući da je f konkavna, iz Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti slijedi

$$f(t) \geq \frac{M-t}{M-m} f(m) + \frac{t-m}{M-m} f(M) \tag{4.18}$$

za svaki $t \in [m, M]$, pa možemo zamijeniti t s A_j u (4.18), te onda primijeniti Φ_j:

$$\Phi_j(f(A_j)) \geq \frac{M\mathbf{1}_K - \Phi_j(A_j)}{M-m} f(m) + \frac{\Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K}{M-m} f(M).$$

Kad gornju nejednakost pomnožimo s p_j, i onda sumiramo po j, dobijemo

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(f(A_j)) \geq \frac{M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)}{M-m} f(m) + \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K}{M-m} f(M). \tag{4.19}$$

Korištenjem funkcionalnog računa i nejednakosti (4.19) dobije se relacija

$$\begin{aligned}
& f\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big) - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(f(A_j)) \\
\leq & f\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big) - \frac{M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)}{M-m} f(m) - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K}{M-m} f(M) \\
= & -\frac{1}{M-m}\Big(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K\Big) \\
& \times \Bigg[\Bigg(f(M)\mathbf{1}_K - f\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big)\Bigg) \Bigg(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Bigg)^{-1} - \\
& \Bigg(f\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big) - f(m)\mathbf{1}_K \Bigg) \Bigg(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K \Bigg)^{-1} \Bigg] \\
= & \Big(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K\Big)\Big(-\Psi_f\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j); m, M\Big)\Big) \\
\leq & -\inf_{t \in \langle m, M\rangle} (\Psi_f(t; m, M))\Big(M\mathbf{1}_K - \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) - m\mathbf{1}_K\Big),
\end{aligned}$$

zbog toga jer je $m\mathbf{1}_K < \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(A_j) < M\mathbf{1}_K$. Zadnje dvije nejednakosti u nizu (4.16) slijede direktno iz $-\inf_{t \in (m,M)} \Psi_f(t; m, M) \leq \dfrac{f'_+(m) - f'_-(M)}{M-m}$ i $(M-t)(t-m) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2$. □

Treba primijetiti da ako u Teoremu 4.17 stavimo $n = 1$ i $p_1 = 1$, dobivamo obrat u obliku razlike Davis-Choijeve nejednakosti:

$$\begin{aligned}
& f(\Phi(A)) - \Phi(f(A)) \\
\leq & -\inf_{t \in \langle m, M\rangle} \Psi_f(t; m, M)(M\mathbf{1}_K - \Phi(A))(\Phi(A) - m\mathbf{1}_K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (M\mathbf{1}_K - \Phi(A))(\Phi(A) - m\mathbf{1}_K)\frac{f'_+(m) - f'_-(M)}{M-m} \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m) - f'_-(M))\mathbf{1}_K. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Teorem 4.18 Neka su A_j, B_j, $j = 1, ..., n$, pozitivno definitni operatori takvi da vrijedi $mA_j \leq B_j \leq MA_j$ za neke skalare $0 < m < M < \infty$, te neka su $p_j \geq 0$ realni brojevi takvi da je $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Neka je σ poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f. Ako su Φ_j unitalna pozitivna linearna preslikavanja za $j = 1, ..., n$, tada imamo

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^n p_j \Phi_j\left(A_j\right)\right) \sigma \left(\sum_{j=1}^n p_j \Phi_j\left(B_j\right)\right) - \frac{M\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j) - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)}{M-m} f(m) \\
&\quad - \frac{\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j) - m\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)}{M-m} f(M) \\
&\leq - \inf_{t\in\langle m,M\rangle} \Psi_f(t;m,M)\Big(M\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j) - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-1} \\
&\quad \times \Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j) - m\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big) \\
&\leq \frac{f'_+(m) - f'_-(M)}{M-m}\Big(M\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j) - \sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-1} \\
&\quad \times \Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j) - m\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big) \\
&\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m) - f'_-(M))\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big), \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

gdje je $\Psi_f(\cdot; m, M)$ definirana sa (4.17).

Dokaz. Neka je I interval realnih brojeva takav da je $[m, M] \subset I$ i pretpostavimo da je $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Tada iz Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti jednostavno slijedi

$$
\begin{aligned}
&\phi(t) - \frac{M-t}{M-m}\phi(m) - \frac{t-m}{M-m}\phi(M) \\
&= -(M-t)(t-m)\frac{1}{M-m}\Big(\frac{\phi(M)-\phi(t)}{M-t} - \frac{\phi(t)-\phi(m)}{t-m}\Big) \\
&= -(M-t)(t-m)\Psi_\Phi(t;m,M) \leq (M-t)(t-m)\sup_{t\in\langle m,M\rangle}(-\Psi_\Phi(t;m,M)) \\
&\leq (M-t)(t-m)\frac{\phi'_+(m) - \phi'_-(M)}{M-m} \leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi'_+(m) - \phi'_-(M)) \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

za svaki $t \in \langle m, M\rangle$.

Iz relacije $mA_j \leq B_j \leq MA_j$ lako se dobije da vrijedi

$$m\mathbf{1}_K \leq \Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}} \leq M\mathbf{1}_K,$$

pa korištenjem funkcionalnog računa i niza nejednakosti (4.22) dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned}
&f\Big(\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\\
&-\frac{M\mathbf{1}_K-\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}}{M-m}f(m)\\
&-\frac{\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}-m\mathbf{1}_K}{M-m}f(M)\\
\leq&-\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M)\Big(M\mathbf{1}_K-\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\\
&\cdot\Big(\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}-m\mathbf{1}_K\Big)\\
\leq&\frac{f'_+(m)-f'_-(M)}{M-m}\Big(M\mathbf{1}_K-\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\\
&\cdot\Big(\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-\frac{1}{2}}-m\mathbf{1}_K\Big)\\
\leq&\frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m)-f'_-(M))\mathbf{1}_K.
\end{aligned}$$

Sad, ako pomnožimo gornji niz nejednakosti dvaput sa $\Big(\sum_{k=1}^n p_k\Phi_k(A_k)\Big)^{\frac{1}{2}}$, dobijemo (4.21). □

Sljedeći korolar je neposredna posljedica Teorema 4.7 i Teorema 4.18 i daje nam obrat Andove nejednakosti (4.10) u obliku razlike.

Korolar 4.19 Neka su A_j, B_j, $j = 1, ..., n$, pozitivno definitni operatori takvi da vrijedi $mA_j \leq B_j \leq MA_j$ za neke skalare $0 < m < M < \infty$, te neka su $p_j \geq 0$ realni brojevi takvi da je $\sum_{j=1}^n = 1$. Neka je σ poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f. Ako su Φ_j unitalna pozitivna linearna preslikavanja za $j = 1, ..., n$, tada imamo

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)\sigma\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)-\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j\sigma B_j)\\
\leq&-\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M)\Big(M\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)-\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)-m\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)\\
\le&\frac{f'_+(m)-f'_-(M)}{M-m}\Big(M\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)-\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)^{-1}\\
&\times\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(B_j)-m\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big)\\
\le&\frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m)-f'_-(M))\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Phi_j(A_j)\Big),
\end{aligned}
$$

gdje je $\Psi_f(\cdot;m,M)$ definirana sa (4.17).

Rezultat koji slijedi je specijalan slučaj prethodnog korolara za $n=1$ i $p_1=1$, ali mi ćemo dati alternativni dokaz korištenjem obrata Davis-Choijeve nejednakosti (4.20).

Korolar 4.20 Neka su A,B pozitivno definitni operatori takvi da je $mA\le B\le MA$ za neke skalare $0<m<M<\infty$. Neka je σ poopćena koneksija generirana operatorski monotonom i operatorski konkavnom funkcijom f. Ako je Φ unitalno pozitivno linearno preslikavanje, tada imamo

$$
\begin{aligned}
&\Phi(A)\sigma\Phi(B)-\Phi(A\sigma B)\\
\le&-\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M)(M\Phi(A)-\Phi(B))\Phi(A)^{-1}(\Phi(B)-m\Phi(A))\\
\le&(M\Phi(A)-\Phi(B))\Phi(A)^{-1}(\Phi(B)-m\Phi(A))\frac{f'_+(m)-f'_-(M)}{M-m}\\
\le&\frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m)-f'_-(M))\Phi(A),
\end{aligned}
$$

gdje je $\Psi_f(\cdot;m,M)$ definirana sa (4.17).

Dokaz. Definirajmo pomoćno linearno preslikavanje

$$\Psi(X)=\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}})\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lako se provjeri da je Ψ unitalno i pozitivno. Sada iz nejednakosti (4.20) slijedi da

$$
\begin{aligned}
&f(\Psi(X))-\Psi(f(X))\\
\le&-\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M)(M\mathbf{1}_K-\Psi(X))(\Psi(X)-m\mathbf{1}_K)\\
\le&\frac{f'_+(m)-f'_-(M)}{M-m}(M\mathbf{1}_K-\Psi(X))(\Psi(X)-m\mathbf{1}_K)\\
\le&\frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m)-f'_-(M))\mathbf{1}_K, \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

vrijedi za hermitski operator X takav da je $\mathrm{Sp}(X)\in[m,M]$. Iz relacija $mA\le B\le MA$ lako dobijemo $m\mathbf{1}_H\le A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\le M\mathbf{1}_H$, pa možemo uvrstiti $X=A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ u (4.23) i time dobiti:

$$
\begin{aligned}
& f(\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}) - \Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}})\Phi(A)^{-\frac{1}{2}} \\
\leq & -\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M)(M\mathbf{1}_K - \Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}})(\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}} - m\mathbf{1}_K) \\
\leq & \frac{f'_+(m) - f'_-(M)}{M-m}\left(M\mathbf{1}_K - \Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\Phi(A)^{-\frac{1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{-\frac{1}{2}} - m\mathbf{1}_K\right) \\
\leq & \frac{1}{4}(M-m)(f'_+(m) - f'_-(M))\mathbf{1}_K.
\end{aligned}
$$

Tražene nejednakosti dobiju se množenjem gornjeg niza nejednakosti dvaput sa $\Phi(A)^{\frac{1}{2}}$. $\square$

Primjenom Korolara 4.19 na odgovarajuće reprezentirajuće funkcije, dobijemo obrate istog tipa za osnovne primjere operatorskih sredina i relativne operatorske entropije:

Korolar 4.21 Neka su A_i, B_i, $i = 1, ..., n$, pozitivno definitni operatori takvi da vrijedi $mA_i \leq B_i \leq MA_i$ za neke skalare $0 < m < M < \infty$, te neka su $p_i \geq 0$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

- Ako su $\alpha \in [0,1]$ i $p \in [-1,1]$, tada

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)\sharp_{p,\alpha}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i\right) - \sum_{i=1}^n p_i A_i \sharp_{p,\alpha} B_i \\
\leq & -\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M) \\
& \times\left(M\sum_{i=1}^n p_i A_i - \sum_{i=1}^n p_i B_i\right)\left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i - m\sum_{i=1}^n p_i A_i\right) \\
\leq & \alpha\frac{(\alpha + (1-\alpha)m^{-p})^{\frac{1-p}{p}} - (\alpha + (1-\alpha)M^{-p})^{\frac{1-p}{p}}}{M-m} \\
& \times\left(M\sum_{i=1}^n p_i A_i - \sum_{i=1}^n p_i B_i\right)\left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i - m\sum_{i=1}^n p_i A_i\right).
\end{aligned}
$$

- Ako je $\alpha \in [0,1]$, tada

$$
\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)\sharp_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i\right) - \sum_{i=1}^n p_i A_i \sharp_{\alpha} B_i \\
\leq & -\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_\alpha(t;m,M) \\
& \times\left(M\sum_{i=1}^n p_i A_i - \sum_{i=1}^n p_i B_i\right)\left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i - m\sum_{i=1}^n p_i A_i\right) \\
\leq & \frac{\alpha(m^{\alpha-1} - M^{\alpha-1})}{M-m}\left(M\sum_{i=1}^n p_i A_i - \sum_{i=1}^n p_i B_i\right)\left(\sum_{i=1}^n p_i A_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i B_i - m\sum_{i=1}^n p_i A_i\right).
\end{aligned}
$$

- Ako je $\alpha \in [0,1]$, tada

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big)!_\alpha\Big(\sum_{i=1}^n p_iB_i\Big) - \sum_{i=1}^n p_iA_i!_\alpha B_i \\
\leq& -\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M) \\
&\times\Big(M\sum_{i=1}^n p_iA_i - \sum_{i=1}^n p_iB_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n p_iB_i - m\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big) \\
\leq& \alpha\frac{(\alpha+(1-\alpha)m)^{-2}-(\alpha+(1-\alpha)M)^{-2}}{M-m} \\
&\times\Big(M\sum_{i=1}^n p_iA_i - \sum_{i=1}^n p_iB_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n p_iB_i - m\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big).
\end{aligned}$$

- Vrijedi

$$\begin{aligned}
&S\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big|\sum_{i=1}^n p_iB_i\Big) - \sum_{i=1}^n p_iS(A_i|B_i) \\
\leq& -\inf_{t\in\langle m,M\rangle}\Psi_f(t;m,M) \\
&\times\Big(M\sum_{i=1}^n p_iA_i - \sum_{i=1}^n p_iB_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n p_iB_i - m\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big) \\
\leq& \frac{1}{Mm}\Big(M\sum_{i=1}^n p_iA_i - \sum_{i=1}^n p_iB_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n p_iB_i - m\sum_{i=1}^n p_iA_i\Big).
\end{aligned}$$

U svakom slučaju, $\Psi_f(\cdot;m,M)\colon \langle m,M\rangle \to \mathbb{R}$ je definirana sa (4.17), gdje je f odgovarajuća generirajuća funkcija.

Poglavlje 5

Zaključak

U ovom doktorskom radu dobivena je generalizacija Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti Levinsonovog tipa za matematičko očekivanje. Pokazano je da analogna generalizacija također vrijedi za hermitske operatore u Hilbertovom prostoru, kao i za njihov skalarni produkt. Dokazani su obrati Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti za pozitivne linearne funkcionale koji su dalje profinjeni i poboljšani, te primijenjeni na neke poznate nejednakosti sa ciljem dobivanja što bolje procjene razlike između desne i lijeve strane tih nejednakosti. Također je pokazano da analogni rezultati vrijede i za unitalno polje pozitivnih linearnih preslikavanja među C^*-algebrama u kompaktnom Hausdorffovom prostoru, kao i za poseban tip poopćenih koneksija, te za relativnu operatorsku entropiju.

Rezultati dobiveni u ovoj doktorskoj disertaciji predstavljaju temelje za jedno daleko opsežnije istraživanje. Tako je u radu [67] pokazano da vrijede generalizacije Levinsonovog tipa Jensenove i Edmundson-Lah-Ribaričeve nejednakosti i srodnih rezultata za realnu Stieltjesovu mjeru slične onima iz poglavlja "Nejednakosti Levinsonovog tipa".

Nejednakosti dobivene u poglavlju "Obrati Andove i Davis-Choijeve nejednakosti" dalje su korištene u radu [66] za dobivanje operatorskih nejednakosti i obrata Shannonovog tipa preko generalizirane Tsallisove relativne operatorske entropije.

Rezultati iz poglavlja "Obrati nejednakosti u obliku razlike za linearne funkcionale" dodatno su u radu [48] poboljšani pomoću linearne interpolacije konveksnih funkcija. Također je pokazano da nizovi nejednakosti slični onima iz spomenutog poglavlja vrijede i za Jensenovu i Edmundson-Lah-Ribaričevu nejednakost za realnu Stieltjesovu mjeru (pogledati [43]), skalarni produkt (pogledati [41] i [42]), te u time scale računu, koji objedinjuje integralni i diferencijalni račun s računom konačnih razlika (pogledati [6] i [7]).

Bibliografija

[1] A. Aglić Aljinović, A. Čivljak, S. Kovač, J. Pečarić, M. Ribičić Penava, *General Integral Identities and Related Inequalities Arising from Weighted Montgomery Identity*, Monographs in inequalities 5, Element, Zagreb, 2013.

[2] W. N. Anderson Jr., R. J. Duffin, *Series and parallel addition of matrices*, J. Math. Anal. Appl. **26**, (1969), 576–594.

[3] T. Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **26**, (1979), 203–241.

[4] J. S. Aujla, H. L. Vasudeva, *Inequalities involving Hadamard product and operator means*, Math. Japon. **42**, (1995), 265–272.

[5] I. A. Baloch, J. Pečarić, M. Praljak, *Generalization of Levinson's inequality*, J. Math. Inequal., **9** (2), (2015), 571–586.

[6] J. Barić, M. Bohner, R. Jakšić, J. Pečarić, *Converses of Jessen's inequality on time scales*, Math. Notes, **98** (1), (2015), 11–24.

[7] J. Barić, M. Bohner, R. Jakšić, J. Pečarić, *Converses of Jessen's inequality on time scales*, Math. Inequal. Appl., u postupku objavljivanja.

[8] P. R. Beesack, J. E. Pečarić, *On the Jessen's inequality for convex functions*, J. Math. Anal. **110**, (1985), 536–552.

[9] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg , 1997.

[10] J. R. Birge, F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag New York, 1997.

[11] J.-C. Bourin, E.-Y. Lee, M. Fujii, Y. Seo, *A matrix Hölder inequality*, Linear Algebra Appl. **431**, (2009), 2154–2159.

[12] P. S. Bullen, *An inequality of N. Levinson*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. **602-633**, (1978), 97–103.

[13] P. S. Bullen, *Error estimates for some elementary quadrature rules*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. **421-460**, (1985), 109–112.

[14] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Means and their inequalities*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Boston, Lancaster and Tokyo, 1987.

[15] M. D. Choi, *A Schwarz inequality for positive linear maps on $C^{*}-$algebras*, Ill. J. Math. **18**, (1974), 565–574.

[16] C. Davis, *A Schwarz inequality for convex operator functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, (1957), 42–44.

[17] S. S. Dragomir, *Reverses of the Jensen's inequality in terms of first derivative and application*, Acta Math. Vietnamica **38** (3), 429–446.

[18] S. S. Dragomir, *Some reverses of the Jensen inequality with application*, Bull. Aust. Math. Soc. **87** (2), 177–194.

[19] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA.

[20] H. P. Edmundson, *Bounds on the expectation of a convex function of a random variable*, The Rand Corporation, Paper No. 982 (1956), Santa Monica, California.

[21] I. Franjić, J. Pečarić, I. Perić, A. Vukelić, *Euler Integral Identity, Quadrature Formulae and Error Estimations from the Point of View of Inequality Theory*, Monographs in inequalities 2, Element, Zagreb, 2011.

[22] J. I. Fujii, M. Fujii, Yuki Seo, *An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities*, Math. Japonica **35** (2), (1990), 387–396.

[23] M. Fujii, E.-Y. Lee, Y. Seo, *A difference counterpart to a matrix Hölder inequality*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 2565–2571.

[24] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić, Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.

[25] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić, Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Element, Zagreb, 2005.

[26] I. Gelfand, M. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space*, Math. Sbornik **12**, (1943), 197–217.

[27] J. Grolous, *Un théoreme sur les fonctions*, L'Institut. Journal Universel des sciences et des Sociétés Savantes en France. Premiere section. Sciences Mathématiques, Vol. **3** (2), (1875), 401.

[28] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction consideree par Riemann*, J. Math. Pures et Appl. **58**, (1893), 171–215.

[29] F. Hansen, G. Pedersen, *Jensen's operator inequality*, Bull. London Math. Soc. **35**, (2003), 553–564.

[30] F. Hansen, J. Pečarić, I. Perić, *Jensen's operator inequality and its converses*, Math. Scand. **100**, (2007), 61–73.

[31] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 1st ed. and 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1934, 1952.

[32] C. Hermite, *Sur deux limites d'une intégrale dé finie*, Mathesis **3**, (1883), 82.

[33] S. Ivelić, A. Matković, J. Pečarić, *On a Jensen-Mercer operator inequality*, Banach J. Math. Anal. **5**, (2011), 19–28.

[34] R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *On some new converses of the Jensen and Lah-Ribarič operator inequality*, Haccetepe Journal of Mathematics and Statistics, **44** (1), (2015), 1045–1055.

[35] R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *A more accurate converses of the Jensen and Lah-Ribarič operator inequality*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, **LXII** (2), (2016), 553–562.

[36] R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *More precise estimates for the Jensen operator inequality obtained via the Lah-Ribarič operator inequality*, Appl. Math. Comput., **249**, (2014), 346-355.

[37] R. Jakšić, J. Pečarić, *New converses of the Jessen and Lah-Ribarič inequalities*, Math. Inequal. Appl. **17** (1), (2014), 197–216.

[38] R. Jakšić, J. Pečarić, *New converses of Jensen's and Lah-Ribarič's inequality II*, J. Math. Inequal. **7** (4), (2013), 617–645.

[39] R. Jakšić, J. Pečarić, *Levinson's type generalization of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality*, Mediterr. J. Math. **13** (1), (2016), 483–496.

[40] R. Jakšić, J. Pečarić, *Levinson's type generalization of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality for Hilbert space operators*, podnesen za objavljivanje.

[41] R. Jakšić, J. Pečarić, *Converses of convex inequalities in Hilbert space*, Rend. Circ. Mat. Palermo **63** (1), (2014), 1–9.

[42] R. Jakšić, J. Pečarić, *On some new converses of convex inequalities in Hilbert space*, Banach J. Math Anal. **9** (2), (2015), 63–82.

[43] R. Jakšić, J. Pečarić, M. Rodić Lipanović, *Reverses of the Jensen-type inequalities for signed measures*, Abstr. Appl. Anal. **2014** (2014), Art. ID 626359, 11 p.

[44] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1), (1906), 175–193.

[45] B. Jessen, (1931). *Bemaerkinger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier I*, Mat. Tidsskrift, B, 17–28.

[46] R. Kaur, M. Singh, J. S. Aujla, *Generalized matrix version of reverse Hölder inequality*, Linear Algebra Appl. **434**, (2011), 636–640.

[47] M. Klaričić Bakula, J. E. Pečarić, J. Perić *On the converse Jensen inequality*, Appl. Math. Comput. **218**, (2012).

[48] M. Krnić, R. Mikić, J. Pečarić, *Strengthened converses of the Jensen and Edmundson-Lah-Ribarič inequalities*, Adv. Oper. Theory **1** (1), (2016), 104–122.

[49] M. Krnić, J. Pečarić, I. Perić, P. Vuković, *Recent Advances in Hilbert-type Inequalities / A unified treatment of Hilbert-type Inequalities*, Monographs in inequalities 3, Element, Zagreb, 2012.

[50] K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, D. Pokaz, *Inequalities of Hardy and Jensen / New Hardy Type Inequalities with General Kernels*, Monographs in inequalities 6, Element, Zagreb, 2013.

[51] F. Kubo, T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246**, (1980), 205–224.

[52] D. Kuhn, *Generalized Bounds for Convex Multistage Stochastic Programs*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[53] P. Lah, M. Ribarič, *Converse of Jensen's inequality for convex functions*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. **412-460**, 201–205.

[54] E.-Y. Lee, *A matrix reverse Cauchy-Schwarz inequality*, Linear Algebra Appl. **430**, (2009), 805–810.

[55] N. Levinson, *Generalisation of an inequality of Ky Fan*, J. Math. Anal. Appl. **8**, (1964) 133–134.

[56] A. Madansky, *Bounds on the expectation of a convex function of a multivariate random variable*, Ann. Math. Stat. **30**, (1959), 743–746.

[57] A. McD. Mercer, *Short proof of Jensen's and Levinson's inequality*, Math. Gazette **94**, (2010), 492–495.

[58] J. Mićić, J. Pečarić, *Order among power means of positive operators II*, Sci. Math. Japon. **71**, (2010), 93–109.

[59] J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Extension of the refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Ann. Funct. Anal. **3**, (2012), 67–85.

[60] J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Refined Jensen's operator inequality with condition on spectra*, Oper. Matrices **7**, (2013), 293–308.

[61] J. Mićić, J. Pečarić, J. Perić, *Refined converses of Jensen's inequality for operators*, J. Inequal. Appl. **353** (2013), (2013), 1–20.

[62] J. Mičić Hot, J. Pečarić, M. Praljak, *Levinson's inequality for Hilbert space operators*, J. Math. Inequal. **9** (4), (2015), 1271–1285.

[63] J. Mićić, J. Pečarić, Y. Seo, *Converses of Jensen's operator inequality*, Oper. Matrices **4**, (2010), 385–403.

[64] J. Mićić, J. Pečarić, Y. Seo, *Order among quasi-arithmetic means of positive operators*, Math. Reports, **14** (64), (2012), 71–86.

[65] R. Mikić, J. Pečarić, I. Perić, *Reverses of Ando and Davis-Choi Inequalities*, J. Math. Inequal. **9** (2), (2015), 615–630.

[66] R. Mikić, J. Pečarić, I. Perić, Y. Seo, *The generalized Tsallis relative operator entropy via solidarity*, J. Math. Inequal. **10** (1), (2016), 269–283.

[67] R. Mikić, J. Pečarić, M. Rodić, *Levinson's type generalization of the Jensen inequality and its converse for real Stieltjes measure*, J. Inequal. Appl. **2017** (2017), 25 p.

[68] D. S. Mitrinović, I. B. Lacković, *Hermite and convexity*, Aequat. Math., **28**, 229–232.

[69] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink *Classical and New Inequalities in Analysis, Mathematics and its Applications (East European Series)*, Kluwer Academic Publishers Group, **61**, Dordrecht, 1993.

[70] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Old and new on the Hermite-Hadamard inequality*, Real Analysis Exchange, **29** (2), (2003/2004), 663–685.

[71] J. Pečarić, *On an inequality of N. Levinson*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. **678-715**, 71–74.

[72] J. E. Pečarić, P. R. Beesack, *On Jessen's inequality for convex functions II*, J. Math. Anal. Appl. **118**, (1986), 125–144.

[73] J. Pečarić, M. Praljak, A. Witkowski *Generalized Levinson's inequality and exponential convexity*, Opuscula Math. **35** (3), (2015), 397–410.

[74] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex functions, Partial orderings and statistical applications*, Academic Press Inc., San Diego 1992.

[75] M. Petrović, *Sur une fonctionnelle*, Publ. Math. Univ. Belgrade **1**, (1932), 149–156.

[76] Y. Seo, *Reverses of Ando's inequality for positive linear maps*, Math. Inequal. Appl. **14**, (2011), 905–910.

[77] P. M. Vasić, J. E. Pečarić, *On the Jensen inequality for monotone functions I*, Anal. Univ. Timişoara **1**, (1979), 95–104.

[78] A. Witkowski, *On Levinson's inequality*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. **12**, (2013), 59–67.

Kazalo pojmova

Popis odabranih stručnih pojmova s odgovarajućim engleskim prijevodom.

Indeks pojmova

Životopis

Rozarija Mikić (rođena Jakšić), znanstvena novakinja/asistentica na Tekstilno tehnološkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, rođena je 1. 8. 1985. u Splitu, gdje je 2003. završila Treću gimnaziju. Iste godine upisala je studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. U lipnju 2009. godine diplomirala je na istom fakultetu među najboljih 10% na svom smjeru, te time stekla zvanje diplomiranog inženjera matematičke statistike i računarstva. U studenom 2009. godine je upisala poslijediplomski znanstveni studij matematike – doktorski studij na Matematičkom odsjeku PMF-a, Sveučilišta u Zagrebu.

U razdoblju od 2009. do 2012. godine honorarno je radila na Fakultetu elektrotehnike i računarstva, te Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije Sveučilišta u Zagrebu. Od svibnja 2012. godine zaposlena je kao znanstvena novakinja/asistentica na Tekstilno tehnološkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Isti fakultet dodijelio joj je posebnu nagradu za izrazitu znanstvenu produktivnost u akademskoj godini 2013/2014.

14.2.2015. postala je majka sinu Vidu.

Glavno područje znanstvenog interesa Rozarije Mikić je teorija nejednakosti. Član je Seminara za nejednakosti i primjene. Do sada je sudjelovala u realizaciji dva znanstvena projekta:

1. Generalne nejednakosti i primjene (šifra projekta 117-1170889-0888), voditelj: akademik J. Pečarić, Tekstilno-tehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2012-2014.

2. Nejednakosti i primjene (HRZZ 5345), voditelj: akademik J. Pečarić, Tekstilno-tehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu, od 2014.

Znanstvenim istraživanjem se bavi pod vodstvom mentora akademika Josipa Pečarića. Do sada je objavila 18 znanstvenih radova, od kojih je 7 objavljeno u časopisima koji su indeksirani u Current Contents bazi, 6 u časopisima koji su indeksirani u SCIE bazi, te 5 u ostalim časopisima. Sudjelovala je na dvije znanstvene konferencije: 5th Croatian Mathematical Congress, Rijeka, 18.-21-06.2012., u sklopu koje je imala poster pod naslovom „New converses of the Jessen and Lah-Ribarič inequalities", te Mathematical Inequalities and Applications 2014 – One thousand papers conference, Trogir, Hrvatska, 22. – 26.06.2014., gdje je u održala izlaganje pod naslovom „Levinson's type generalization of the Edmundson-Lah-Ribarič inequality".

Popis radova

1. R. Jakšić, J. Pečarić, *New converses of the Jessen and Lah-Ribarič inequalities II*, Journal of Mathematical Inequalities **7** (4), (2013), 617–645.

2. R. Jakšić, J. Pečarić, *New converses of the Jessen and Lah-Ribarič inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications **17** (1), (2014), 197–216.

3. S. I. Butt, R. Jakšić, Lj. Kvesić, J. Pečarić, *n-exponential convexity of weighted Hermite-Hadamard's inequality*, Journal of Mathematical Inequalities **8** (2), (2014), 299–311.

4. R. Jakšić, J. Pečarić, *Converses of convex inequalities in Hilbert space*, Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo **63** (1), (2014), 1–9.

5. R. Jakšić, J. Pečarić, M. Rodić Lipanović, *Reverses of the Jensen-type inequalities for signed measures*, Abstract and Applied Analysis **2014**, (2014) Art. ID 626359, 11 str.

6. R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *More precise estimates for the Jensen operator inequality obtained via the Lah-Ribaric inequality*, Applied Mathematics and Computation **249**, (2014), 346–355.

7. R. Jakšić, Lj. Kvesić, J. Pečarić *On weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality*, Mathematical Inequalities and Applications **18** (2), (2015), 649–665.

8. R. Mikić, J. Pečarić, I. Perić, *Reverses of Ando and Davis-Choi Inequalities*, Journal of Mathematical Inequalities **9** (2), (2015), 615–630.

9. R. Jakšić, J. Pečarić, *On some new converses of convex inequalities in Hilbert space*, Banach Journal of Mathematical Analysis **9** (2), (2015), 63–82.

10. J. Barić, M. Bochner, R. Jakšić, J. Pečarić, *Converses of Jessen's inequality on time scales*, Mathematical Notes **98** (1), (2015), 11–24.

11. R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *On some new converses of the Jensen and the Lah-Ribarič operator inequality*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **44** (5), (2015), 1045–1055.

12. R. Mikić, J. Pečarić, I. Perić, Y. Seo, *The generalized Tsallis relative operator entropy via solidarity*, Journal of Mathematical Inequalities **10** (1), (2016), 269–283.

13. R. Jakšić, J. Pečarić, *Levinson's type generalization of the Edmundson- Lah- Ribarič inequality*, Mediterranean Journal of Mathematics **13** (1), (2016), 483–496.

14. R. Jakšić, M. Krnić, J. Pečarić, *More accurate converses of the Jensen and the Lah-Ribarič operator inequality*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics **LXII** (2), (2016), 553–562.

15. M. Krnić, R. Mikić, J. Pečarić, *Strengthened converses of the Jensen and Edmundson-Lah-Ribarič inequalities*, Advances in Operator Theory **1** (1), (2016), 104–122.

16. R. Mikić, J. Pečarić, M. Rodić, *Levinson's type generalization of the Jensen inequality and its converse for real Stieltjes measure*,Journal of Inequalities and Applications **2017** (2017), 25 stranica.

17. R. Mikić, J. Pečarić, *Bounds for the generalization of two mappings related to the Hermite-Hadamard inequality for convex functions*, Advances in Inequalities and Applications **2017** (2017), Art. ID 1, 9 stranica.

18. J. Barić, M. Bohner, R. Mikić, J. Pečarić, *Converses of Jessen's inequality on time scales II*, Mathematical Inequalities and Applications, u postupku objavljivanja.