Dinamika neautonomnoga Frenkel-Kontorovina modela

Rabar, Braslav

Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Braslav Rabar

Dinamika neautonomnoga Frenkel-Kontorovina modela

Disertacija

Zagreb, 2015.

Sadržaj

Uvod

Frenkel-Kontorovin (FK) model jedan je od ključnih modela teorije dinamičkih sustava i nelinearnih diferencijalnih jednadžbi, a isto tako i fizike čvrstog stanja i složenih sustava. Matematičko značenje temelji se na dvije činjenice. Prvo, generalizirani FK model može se interpretirati kao funkcional djelovanja klase dinamičkih sustava na cilindru (twist difeomorfizmi koji čuvaju površinu). To su najjednostavniji Hamiltonovi dinamički sustavi s diskretnim vremenom, te kao takvi prototipi za proučavanje pojava Hamiltonove dinamike, primjerice Kolmogorov-Arnold-Moserove teorije, Arnoldove difuzije, stabilnosti, i niza drugih problema. Proučavanjem FK modela (kao Lagrangiana pridruženog navedenim preslikavanjima) postignut je značajan napredak u proučavanju Hamiltonove dinamike. Drugo, generalizirani FK model sustav je jednadžbi istog tipa kao skalarne reakcijsko-difuzijske (i općenito semilinearne paraboličke) parcijalne diferencijalne jednadžbe. Proučavanje dinamike FK modela često je prvi korak u razumijevanju dinamike te klase parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Fizikalno značenje FK modela je da relativno realistično opisuje niz fizikalnih pojava, u prvom redu u fizici čvrstog stanja, ali i šire. Primjeri su „Charge density waves", „Josephson Junction Arrays", ali i neki modeli u biologiji poput replikacije DNK. FK model je, nadalje, vjerojatno najjednostavniji sustav jednadžbi koji pokazuje neke iznimno bitne fizikalne pojave, uključujući sinkronizaciju rješenja; netrivijalnu statističku mehaniku s nizom metastabilnih ravnotežnih točaka, te netrivijalne dinamičke fazne prijelaze već za relativno jednostavnu dinamiku poput djelovanja uniformnom silom.

Proučavana disipativna dinamika FK modela sustav je beskonačno mnogo običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, koji se može opisati kao formalni gradijent energetskog funkcionala elastičnog lanca u periodičnom sinusoidnom potencijalu. Temelj rada je Aubry-Matherova teorija koja se bavi proučavanjem skupa ravnotežnih konfiguracija s istim prosječnim razmakom [29]; tj. ponašanje FK modela bez djelovanja sile. Poznati rezultati ponašanja FK modela su dinamika s vanjskom konstantnom ili periodičnom u vremenu silom, što je proučavano u nizu radova [40, 41, 36, 37, 38, 4] gdje je konačno pokazano da Aubry-Matherova struktura ravnotežnih konfiguracija s istim prosječnim razmakom preživljava i u slučaju spomenutih vanjskih sila. Također je dokazano da uz pretpostavke analitičnosti na funkcije koje definiraju FK model postoji prostorno-vemenski atraktor koji se injektivno projicira na dvodimenzinalan prostor. Pojam sinkronizirano rješenje što je poopćenje ravnotežnih konfiguracija uvedeno je u [41] gdje je dokazano da sinkronizirana rješenja postoje te da su atraktori i stabilni u Ljapunovljevom smislu. Fokus rada je dinamika neautonomnog FK modela, gdje se dozvoljava da elastična sila reakcije ili periodični potencijal također nisu konstantni u vremenu. Do sada poznati rezultati za taj sustav jednadžbi isključivo su heuristički ili numerički [17]. Fizikalni značaj je velik, jer je to najjednostavniji model, tzv. „tresne" (ratchet) dinamike, koji pokazuje učinak transporta. Transport ovdje znači da je moguće naći rješenja s ne-nula prosječnom asimptotskom brzinom i bez pristustva vanjske sile.

Kada promatramo dinamiku neautonomnog FK sustava, prvi alat je monotonost u smislu da ako je u početnom trenutku jedno rješenje po koordinatama (strogo) veće od drugog to vrijedi za sva vremena za koja ta rješenja postoje. Prateći dokaz Qina [36] pokazuje se da zbog stroge monotonosti za neautonomni FK model postoje sinkronizirna rješenja. Drugi alat na raspolaganju je brojenje presjeka dvaju rješenja neautonomnog FK modela što je zbog svojstva da se broj presjeka dva rješenja ne može povećavati zapravo poopćenje monotonosti. Taj alat uveo je S. Slijepčević u [40] kako bi dokazao da je prostorno-vremenski atraktor dvodimenzionalan. Ako se dva rješenja sijeku netransverzalno u nekom trenutku (još kažemo da razlika ima singularnu nulu) onda broj presjeka dvaju rješenja strogo pada u tom trenutku. Problem kod brojenja presjeka dvaju rješenja je taj da taj broj može biti beskonačan. Kako bismo riješili taj problem, definiramo funkciju [40] koja mjeri prosječan broj presjeka u nosačima dvaju mjera definiranih na prostoru konfiguracija.

Drugi problem je da razlika dvaju rješenja može imati singularnu nulu beskonačnog stupnja. Može se pokazati da singularne nule konačnoga stupnja preživljavaju male perturbacije početnih uvjeta što je bitno za dokaz da je prostorno-vremenski atraktor dvodimenzionalan. Jasno je da singularne nule beskonačnog stupnja ne preživljavaju male perturbacije, no zanimljivo je pitanje: postoji li u blizini svake singularne nule beskonačnog stupnja singularna nula konačnoga stupnja? Za sada je na to pitanje odgovoreno pozitivno ako se prihvate određene pretpostavke na funkcije koje definiraju neautonomni FK sustav. Jedna od njih je realna analitičnost.

U ovome radu oslabilili smo tu pretpostavku realne analitiȩosti u slučaju vanjske periodične sile, te time poopćili poznate rezultate. Druga klasa neautonomnih FK modela za koje se pokazuje da je prostorno-vremenski atraktor dvodimenzionalan takozvani su tresni sustavi.

Može se pokazati da se prostorno-vremenski atraktor podudara sa unijom nosača svih prostorno-vremenski invarijantnih mjera. Sinkronizirna mjera svaka je prostorno-vremenski invarijantna mjera, takva, da se nikoje dvije konfiguracije iz njenog nosača ne sijeku.

Fizičari često spominju različite faze dinamike sustava, ali matematičke definicije tog pojma su rijetkost. Za neautonomni FK model kažemo da je u slobodnoj fazi za dani prosječni razmak ukoliko postoji sinkronizirnana mjera s tim prosječnim razmakom takva da projekcija iz nosača te mjere na neku koordinatu (a zbog prostorne invarijantnosti nije važno na koju) je surjekcija na 1-sferu. Pojam slobodne faze uveden je u [41]. Ako neautonomni FK model nije u slobodnoj fazi kažemo da je u zapinjajućoj fazi.

Doprinos ovog rada je primjena tehnika namjenjenih proučavanju dinamike autonomnog FK modela sa vanjskom periodičnom silom na neautonomni FK model.

U prvom poglavlju uvodimo osnovne pojmove dinamičkih sustava te iskazujemo rezultate koji se znaju o Aurby-Matherovoj teoriji koja se bavi proučavanjem ravnotežnih konfiguracija u odnosu na formalni Hamiltonijan. Iskazujemo vezu između stacionarnih konfiguracija i prvih koordinata orbite podizača twist preslikavanja.

U drugom poglavlju bavimo se postojanjem rješenja neautonomnog FK modela, monotonosti tog sustava, postojanjem polutoka te dajemo dovoljne uvjete da rješenje tog sustava bude realno-analitičko.

U trećem poglavlju definiramo sinkronizirano rješenje te dokazujemo da sinkronizirana rješenja za neautonomni FK model uvijek postoje. Također promatramo dinamiku razlike dvaju rješenja, brojimo njihove presjeke i dokazujemo da je taj broj nerastući. Definiramo prostorno-vremenski invarijantne mjere. Definiramo slabi ω-granični skup i definiramo prostorno-vremenski atraktor kao uniju svih slabih ω-graničnih skupova. Dokazujemo da se atraktor podudara sa unijom nosača prostorno-vremenski invarijantnih mjera. Definiramo slobodnu i zapinjajuću fazu dinamike.

U četvrtom poglavlju primijenjujemo rezultate prva dva poglavlja na tresnu dinamiku koja je posebna klasa neautonomnoga FK modela. Dokazujemo da su u slobodnoj fazi tresne dinamike sinkronizirana rješenja atraktori. Strogo definiramo transport te dajemo dovoljne uvjete na tresni sustav u slobodnoj fazi da transport nije nula.

1. Osnovni pojmovi

1.1. Dinamički sustavi

U ovom potpoglavlju definiramo osnovne pojmove dinamičkih sustava koje ćemo spominjati u daljnjem radu.

Neka je G monoid. To znači da je za svaka dva $g, h \in G$ dobro definiran $gh \in G$ te postoji $e \in G$ takav da $ge = eg = g$ za sve $g \in G$ i $g(hk) = (gh)k$ za sve $g, h, k \in G$. Neka je dan skup X. Djelovanje G na X je funkcija $F \colon G \times X \to X$ takva da

- $G \times X \ni (g, x) \mapsto F_g(x)$ za $g \in G, x \in X$
- $F_{gh}(x) = (F_g \circ F_h)(x)$ za $g, h \in G, x \in X$
- $F_e(x) = x$ za $x \in X$.

Skup X zajedno sa djelovanjem monoida G zovemo dinamički sustav. Dakle dinamički sustav je uređena trojka (G, X, F) monoida G, skupa na kojem monoid djeluje X i funkcije djelovanja F. Ako su X i G povrh svega i topološki prostori tada kažemo da je djelovanje F neprekidno ukoliko je F neprekidna funkcija u obje varijable.

Neka je K metrički prostor. Polutok $\varphi \colon [0, \infty) \times K \to K$ je neprekidno djelovanje monoida $([0, \infty), +)$ na K takvo da to čini dinamički sustav. Tok $\varphi \colon \mathbb{R} \times K \to K$ je neprekidno djelovanje monoida (zapravo grupe) $(\mathbb{R}, +)$ na K takvo da to čini dinamički sustav.

Kažemo da je Borelova vjerojatnostna mjera μ na X invarijantna za $T \colon X \to X$ ukoliko

$$\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

za sve izmjerive podskupove B od X.

Lema 1.1. *Neka je $\mathcal{K}$ kompaktan metrički prostor, a $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ zatvoren, neprazan podskup invarijantan za T. Tada postoji mjera invarijantna za T čiji je nosač sadržan u $\mathcal{R}$.*

Dokaz: Izaberimo bilo koju Borelovu vjerojatnostnu mjeru ν na $\mathcal{R}$. Definirajmo

$$\nu^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T_*^k \nu.$$

Ovdje je T_*^k povlačenje mjere u odonosu na T^k, to jest $(T_*^k \nu)(A) = \nu(T^{-k}(A))$. Kako je $\mathcal{R}$ kompaktan i ν^n dobro definirana vjerojatnostna mjera s nosačem u $\mathcal{R}$, to po Alaogluovom teoremu [22 teorem 5.18] imamo, ako shvatimo mjere kao linearne funkcionale na prostoru neprekidnih omeđenih funkcija, da ν^n ima slabo konvergentan podniz $\nu^{n_k} \rightharpoonup \mu$. To znači da

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} f d\mu,$$

za svaku neprekidnu omeđenu funkciju $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Primijetimo da

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_*\nu^{n_k} \to \int_{\mathcal{R}} f dT_*\mu,$$

jer

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_*\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} f \circ T d\nu^{n_k} \to \int_{\mathcal{R}} f \circ T d\mu = \int_{\mathcal{R}} f dT_*\mu.$$

Promotrimo

$$\int_{\mathcal{R}} f \circ T d\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} f dT_*\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k} + \int_{\mathcal{R}} (f \circ T - f) d\nu^{n_k}.$$

Sada imamo da

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_*\nu^{n_k} - \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} (f \circ T - f) d\nu^{n_k} =$$

$$= \frac{1}{n_k} \int_{\mathcal{R}} [(f \circ T^{n_k+1} - f \circ T^{n_k}) + (f \circ T^{n_k} - f \circ T^{n_k-1}) + \cdots + (f \circ T - f)] d\nu =$$

$$= \frac{1}{n_k} \int_{\mathcal{R}} (f \circ T^{n_k+1} - f) d\nu \to 0,$$

kada $k \to \infty$, jer je f omeđena. Dakle, dobivamo da

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_*\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{R}} f dT_*\nu^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k} = \int_{\mathcal{R}} f d\mu.$$

Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji [29, teorem A.2.7] imamo da $T_*\mu = \mu$ to jest μ je T-invarijantna. $\square$

Definicija 1.2. Neka je $\mathcal{K}$ kompaktan metrički prostor te neka su $S, T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ funkcije takve da je $T \circ S = S \circ T$. Kažemo da je skup $B \subseteq \mathcal{K}$ S,T-invarijantan ukoliko je invarijantan za S i T. Kažemo da je mjera μ S,T-invarijantna ukoliko je invarijantna za S i T. Kažemo da je S,T-invarijantna mjera μ ergodska, ako za bilo koji Borel izmjeriv S,T-invarijantan skup B imamo da je $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

Lema 1.3. *Neka je $\mathcal{K}$ kompaktan metrički prostor te pretpostavimo da je $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ zatvoren, neprazan, S, T-invarijantan skup. Tada postoji S, T-invarijantna mjera čiji je nosač sadržan u $\mathcal{R}$.*

Dokaz: Izaberimo Borelovu vjerojatnostnu mjeru ν na $\mathcal{R}$ te stavimo

$$\nu^n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} S_*^j T_*^k \nu,$$

gdje su S_*^j, T_*^k povlačenja mjera u odnosu na S^j i T^k. Kako je $\mathcal{R}$ zatvoren podskup kompaktnog prostora to je kompaktan. Budući je $\mathcal{R}$ kompaktan i ν^n su dobro definirane vjerojatnostne mjere s nosačem u $\mathcal{R}$ to imamo da postoji slabo konvergentan podniz od (ν^n) to jest postoji Borelova vjerojatnostna mjera μ takva da $\nu^{n_k} \rightharpoonup \mu$.

Može se pokazati da je μ S, T-invarijantna tako da se provjeri

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_* \nu^{n_k} \to \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k}$$

$$\int_{\mathcal{R}} f dS_* \nu^{n_k} \to \int_{\mathcal{R}} f d\nu^{n_k}.$$

Iz toga slijedi

$$\int_{\mathcal{R}} f dT_* \mu = \int_{\mathcal{R}} f d\mu$$

$$\int_{\mathcal{R}} f dS_* \mu = \int_{\mathcal{R}} f d\mu$$

za svaku neprekidnu omeđenu $f \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji dobivamo $T_*\mu = \mu$ i $S_*\mu = \mu$ to jest μ je S, T-invarijantna. $\square$

1.2. Varijacijski problem i Frenkel-Kontorovin model

U ovom potpoglavlju uvodimo autonomni FK-model i posebno promatramo konfiguracije minimalne energije. Slijedi kratki pregled ovog potpoglavlja.

- Definiramo prostorne translante konfiguracija. Prvo važno svojstvo konfiguracija minimalne energije je da se nikoja dva translanta konfiguracije minimalne energije ne sijeku.

- Svaka konfiguracija minimalne energije je orbita nekog podizanja homeomorfizma kružnice koji čuva orijentaciju. To nam omogućuje da definiramo prosječan razmak svake konfiguracije minimalne energije.

- Može se pokazati da skup konfiguracija minimalne energije s fiksnim prosječnim razmakom nije prazan.

- Dvije konfiguracije minimalne energije s različitim prosječnim razmakom sijeku se točno jednom.

- Definiramo rekurentne konfiguracije minimalne energije. Skup svih rekurentnih konfiguracija minimalne energije s fiksnim prosječnim razmakom zovemo Aurby-Matherov skup.

- Može se dokazati da je za iracionalne prosječne razmake skup konfiguracija minimalne energije s fiksnim prosječnim razamkom totalno uređen.

- Može se dokazati da se Aubry-Matherov skup za iracionalne prosječne razmake projicira na periodičan Cantorov skup ili cijeli $\mathbb{R}$.

Promatramo prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ skupa svih funkcija sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{R}$ s produktnom topologijom. Element $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ također označavamo $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ i zovemo konfiguracija.

Ako je dana funkcija $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tada proširujemo H na proizvoljne konačne segmente $(u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k)$, $j < k$ konfiguracije $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ na način da stavimo

$$H(u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k) = \sum_{i=j}^{k-1} H(u_i, u_{i+1}).$$

Kažemo da je segment $(u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k)$ minimalan u odnosu na H ukoliko

$$H(u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k) \leq H(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k)$$

za sve $(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k)$ gdje je $v_j = u_j$ i $v_k = u_k$.

Sada uvedimo potrebne uvjete na H. Pretpostavit ćemo da $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadovoljava sljedeće uvjete, prateći Bangerta [5]:

(H1) Za svaki $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ imamo da je $H(\xi + 1, \eta + 1) = H(\xi, \eta)$.

(H2) Vrijednost $H(\xi, \xi + \eta)$ teži u beskonačno kada η teži u beskonačno.

(H3) Ako je $\underline{\xi} < \overline{\xi}$ i $\underline{\eta} < \overline{\eta}$, tada je $H(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + H(\overline{\xi}, \overline{\eta}) < H(\underline{\xi}, \overline{\eta}) + H(\overline{\xi}, \underline{\eta})$.

(H4) Ako su $(u_{-1}, u_0, u_1) \neq (v_{-1}, v_0, v_1)$ oba minimalna i $u_0 = v_0$, tada je

$$(u_{-1} - v_{-1})(u_1 - v_1) < 0.$$

Definicija 1.4. Kažemo da je konfiguracija $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ minimalna u odnosu na H ukoliko je njen svaki konačan segement minimalan u odonosu na H. Skup minimalnih konfiguracija označavat ćemo s $M(H)$.

Koristit ćemo oznake kao H_{12} gdje indeksi skraćeno označavaju parcijane derivacije. Dakle H_{12} je pokrata za $\partial_1\partial_2 H$.

Lema 1.5. *Ako je H klase C^2 te zadovoljava $(H1)$ i $H_{12}(\xi,\eta) \leq -\delta < 0$ za sve $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ tada vrijede $(H2) - (H4)$.*

Dokaz: Da bi se dobilo (H2) integrira se funkcija H_{12} po području oblika trokuta s vrhovima (ξ,ξ), $(\xi,\xi+\eta)$, $(\xi+\eta,\xi+\eta)$. Da bi se dobilo (H3) integrira se po području oblika pravokutnika s vrhovima $(\underline{\xi},\underline{\eta})$, $(\overline{\xi},\underline{\eta})$, $(\underline{\xi},\overline{\eta})$,$(\overline{\xi},\overline{\eta})$. Svojstvo (H4) proizlazi iz monotonosti $\eta \to H_1(\xi,\eta)$ i $\xi \to H_2(\xi,\eta)$. $\square$

Neka je H klase C^2 takva da zadovoljava (H1)-(H4). Kažemo da je konfiguracija $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ stacionarna ukoliko za svaki $j \in \mathbb{Z}$ imamo

$$H_2(u_{j-1},u_j) + H_1(u_j,u_{j+1}) = 0.$$

Lema 1.6. *Svaka minimalna konfiguracija je stacionarna.*

Dokaz: Imamo da $H(u_j,u_{j+1},\ldots,u_k)$ je minimalna s obzirom na svaki

$$(u_{j+1},\ldots,u_{k-1})$$

gdje su u_j i u_k fiksni no to znači da gradijent od H izračunat u tim točkama izčezava. Kako je $H(u_j,\ldots,u_k) = \sum_{i=j}^{k-1} H(u_i,u_{i+1})$ to imamo

$$H_2(u_l,u_{l+1}) + H_1(u_{l+1},u_{l+2}) = 0$$

za svaki l takav da je $j \leq l \leq k-2$. Kako su j i k proizvoljni slijedi tvrdnja leme. $\square$

Obrat ne mora vrijediti to jest mogu postojati sedlaste točke.

Pretpostavit ćemo da je H funkcija klase C^2 takva da je

- $H(\xi+1,\eta+1) = H(\xi,\eta)$
- $H_{12}(\xi,\eta) \leq -\delta < 0.$

Promatramo autonomni FK-model

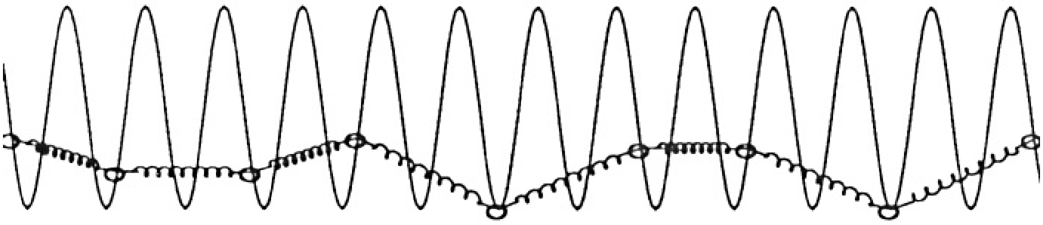
$$\frac{d}{dt}u_j(t) = H_2(u_{j-1}(t),u_j(t)) + H_1(u_j(t),u_{j+1}(t)) \tag{1.1}$$

Primjer 1.7. Standardan FK model je poseban slučaj autonomnog FK modela kada

$$H(u,v) = \frac{(u-v)^2}{2} + \frac{k\cos(2\pi u)}{2\pi}$$

Tada sustav (1.1) ima oblik

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t) - k\sin(2\pi u_j(t)).$$



Slika 1. Primjer konfiguracije u standardnom Frenkel-Kontorovinu modelu.

Vratimo se autonomnom FK modelu (1.1). Promatrat ćemo konfiguracije minimalne energije tog sustava. Kako su to minimumi pa tako i stacionarna rješenja to imamo da

$$H_2(u_{j-1}(t), u_j(t)) + H_1(u_j(t), u_{j+1}(t)) = 0.$$

No tada $\frac{d}{dt}u_j(t) = 0$, pa zaključujemo da su konfiguracije minimalne energije konstantne u vremenu obzirom na dinamiku (1.1).

Primjer 1.8. Pretpostavimo da je $H(\xi,\eta) = h(\xi-\eta)$ gdje je $h''(x) \geq \delta > 0$ za $x \in \mathbb{R}$. Tada je konfiguracija $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ stacionarna ukoliko za sve $j \in \mathbb{Z}$ imamo

$$h'(u_{j-1} - u_j) = h'(u_j - u_{j+1}).$$

Stoga za svake $u_0, \alpha \in \mathbb{R}$ postoji stacionarna konfiguracija dana sa $u_j = u_0 + j\alpha$ i sve stacionarne konfiguracije su tog oblika.

Neka su u, v dvije konfiguracije tada uvodimo parcijalne uređaje na prostor konfiguracija s

$$u \leq v \Leftrightarrow u_j \leq v_j \text{ za } j \in \mathbb{Z}$$

$$u < v \Leftrightarrow u \leq v \text{ i } u \neq v$$

$$u \ll v \Leftrightarrow u_j < v_j \text{ za } j \in \mathbb{Z}$$

Definicija 1.9. Kažemo da se dvije različite konfiguracije u i v sijeku ukoliko postoji $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $(u_j - v_j)(u_{j+1} - v_{j+1}) \leq 0$.

Imamo da se konfigurcije u i v ili sijeku, ili su usporedive to jest $u \ll v$ ili $v \ll u$ ili $u = v$.

Uvedimo operator prostornog pomaka $S_{m,n} \colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ koji je zadan sa

$$(S_{m,n}u)_j = u_{j-m} + n.$$

Definicija 1.10. Kažemo da je $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ periodična s periodom

$$(q, p) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$$

ukoliko $S_{q,p}u = u$.

Iz definicije odmah slijedi da $S_{m,n}$ preslikava konfiguracije minimalne energije u konfiguracije minimalne energije. Zbog neprekidnosti od H na svakom konačnom segmentu $(u_j, \ldots, u_k)$ imamo da je $M(H)$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ u produktnoj topologiji.

Lema 1.11. *Konfiguracije minimalne energije sijeku se najviše jednom.*

Dokaz: Pretpostavimo da se u i u^* sijeku bar dva puta i to između j i $j+1$ te između k i $k+1$ za $j < k$. Tada imamo

$$H(u_j, u^*_{j+1}, \ldots, u^*_k, u_{k+1}) + H(u^*_j, u_{j+1}, \ldots, u_k, u^*_{k+1}) =$$

$$= H(u_j, u^*_{j+1}) + H(u^*_{j+1}, \ldots, u^*_k) + H(u^*_k, u_{k+1}) +$$
$$+ H(u^*_j, u_{j+1}) + H(u_{j+1}, \ldots, u_k) + H(u_k, u^*_{k+1}),$$

što je zbog svojstva $(H3)$ strogo manje od

$$H(u^*_j, \ldots, u^*_{k+1}) + H(u_j, \ldots, u_{k+1}),$$

ali to je kontradikcija s minimalnošću od $(u^*_j, \ldots, u^*_{k+1})$ i $(u_j, \ldots, u_{k+1})$. □

Korolar 1.12. *Ako su $u, v \in M(H)$ periodične s istim periodom tada se u i v ne sijeku. Ako je $u \in M(H)$ periodična s minimalnim periodom (q, p) tada su p i q relativno prosti.*

Dokaz: Neka su u i v periodične, takve da se sijeku. Tada se sijeku beskonačno puta što je kontradikcija s predhodnom lemom. Pretpostavimo da je $u \in M(H)$ periodična s minimalnim periodom $(q, p) = n(a, b)$ gdje $n > 1$ tada $S_{a,b}u \neq u$. Budući se u i $S_{a,b}u$ ne sijeku, imamo recimo $S_{a,b}u \ll u$. Tada indukcijom dobivamo $S_{q,p}u \ll u$, što je u kontradikciji s našom hipotezom. Time je korolar dokazan. □

Teorem 1.13. *Za sve $(q, p) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$ postoji $u \in M(H)$ takva da je u periodična s periodom (q, p).*

Dokaz: Neka je $(u_0, \ldots, u_q) = 1(u)$ segment od u tada sa $n(u)$ označimo

$$n(u) = (u_0, \ldots, u_q, u_0, \ldots, u_q, \ldots, u_0, \ldots, u_q)$$

gdje se $1(u)$ ponavlja n puta. Tada je $1(u)$ minimalan za $H_{q,p}$ ako i samo ako je $n(u)$ mimalan za $H_{nq,np}$. Ako iskoristimo periodičnost od u dobivamo da su prozvoljni segmenti od u minimalni to jest $u \in M(H)$. Time je lema dokazana. □

Može se pokazati da za konfiguracije minimalne energije u^* i u ukoliko $|u^*_j - u_j| \to 0$ kada $j \to \infty$ ili $j \to -\infty$ da se tada u^* i u ne mogu sječi. Dokaz toga može se naći u [5, lema 3.9]

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [5, teorem 3.13]

Teorem 1.14. *Pretpostavimo da je $u \in M(H)$, tada se u i $S_{m,n}u$ ne sijeku za svaki $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Drugim riječima imamo da je*

$$B_u = \{S_{m,n}u : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

totalno uređen.

Dokaz sljedeće leme može se naći u [5, lema 3.14]

Lema 1.15. *Pretpostavimo da je $u \in M(H)$. Tada je zatvarač od $B_u \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ u produktnoj topologiji totalno uređen. Projekcija $p_i((u_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = u_i$ preslikava $\overline{B_u}$ homeomorfno na zatvoren podskup od $\mathbb{R}$. Iz definicije od B_u slijedi da je $p_i(\overline{B_u}) = p_j(\overline{B_u})$ za svaki $i, j \in \mathbb{Z}$.*

Neka je G_+ grupa svih homeomorfizama koji čuvaju orijentaciju kružnice $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ na samu sebe i neka je

$$\tilde{G}_+ = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{ neprekidna, strogo rastuća i } f(x+1) = f(x)+1, x \in \mathbb{R}\}$$

grupa svih podizanja sa $\mathbb{S}^1$ na $\mathbb{R}$ elemenata iz G_+.

Teorem 1.16. *Za svaki $u \in M(H)$ postoji $f \in \tilde{G}_+$ takav da je $u_{i+1} = f(u_i)$ za $i \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz: Prvo definiramo f na zatvorenom skupu $A = p_0(\overline{B_u})$ sa $f := p_1 \circ (p_0|_{\overline{B_u}})^{-1}$. Vrijedi da je f strogo rastući homeomorfizam sa A na A. Očito $f(t+1) = f(t) + 1$ za sve $t \in A$. Proširujemo f sa A na $\mathbb{R}$ na afin način, to jest za $\mathbb{R} \setminus A = \bigcup(a_n, b_n)$ stavimo $f((1-t)a_n + tb_n) = (1-t)f(a_n) + tf(b_n)$ za $t \in [0,1]$. Odmah vidimo da je $f \in \tilde{G}_+$. i $f(u_j) = u_{j+1}$. $\square$

Ukoliko je $f \in \tilde{G}_+$ tada je broj $\rho(f) = \lim_{|i|\to\infty} \frac{f^i(x)}{i}$ isti za sve $x \in \mathbb{R}$. Sljedeći korolar dokazan je u [5, korolar 3.16]

Korolar 1.17. *Postoji neprekidno preslikavanje $\rho\colon M(H) \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) Za svaki $u \in M(H)$ te $i \in \mathbb{Z}$ imamo $|u_i - u_0 - i\rho(u)| < 1$ pa posebno $\rho(u) = \lim_{|i|\to\infty} u_i/i$.

(b) Ako je $u \in M(H)$ periodična s periodom (q,p) tada $\rho(u) = p/q$.

(c) Funkcija ρ je invarijantna s obzirom na $S_{m,n}$, to jest $\rho(S_{m,n}u) = \rho(u)$.

Teorem 1.18. *Za svaki $\omega \in \mathbb{R}$, skup $M_\omega(H) = \{u \in M(H) : \rho(u) = \omega\}$ je neprazan.*

Dokaz: Znamo da $M_\omega(H) \neq \emptyset$ za $\omega \in \mathbb{Q}$ zbog teorema 1.13. Neka je $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Izaberimo niz $(q_n)_n$ u $\mathbb{Q}$ takav da je $\omega = \lim_{n\to\infty} q_n$ i niz $u^n \in M_{q_n}(H)$ gdje je $u_0^n \in [0,1]$. Tada postoji $C > 0$ takav da je $|q_n| \le C$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi $|u_j^n| \le 2 + |j|C$. Kako je $\prod_{j\in\mathbb{Z}}[-2 - |j|C, 2 + |j|C]$ kompaktan po Tihonovljevom teoremu [12, teorem 8.9] to postoji točka gomilanja $u^* \in M(H)$ niza u^n. Po neprekidnutosti od ρ, vrijedi da je $\rho(u^*) = \omega$. $\square$

Budući da svaki $u \in M_\omega(H)$ zbog korolara 1.17 (a) raste gotovo linearno s nagibom ω zaključujemo da za $u, u^* \in M(H)$, ako $\rho(u) \neq \rho(u^*)$ tada se u i u^* sijeku točno jedanput.

Definicija 1.19. Konfiguracija u naziva se rekurentnom ukoliko postoji niz $(p_i, q_i) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ takav da vrijedi

$$u = \lim_{i\to\infty} S_{p_i,q_i} u.$$

Skup svih minimizirajućih rekurentnih konfiguracija s obzirom na H označimo sa $M^{Rec}(H)$. Skup pak svih minimizirajućih rekurentnih konfiguracija s rotacijskim brojem ω označavamo sa $M_\omega^{Rec}(H)$. Skup $M_\omega^{Rec}(H)$ zove se Aubry-Matherov skup.

Skup konfiguracija A naziva se uređenim ukoliko se nikoje dvije konfiguracije iz A ne sijeku. Za dani uređeni skup A, zatvoren u produktnoj topologiji pretpostavit ćemo da su $u^- \ll u^+$ dvije konfiguracije iz A takve da nema konfiguracija u iz skupa A takvih da je $u^- \ll u \ll u^+$. Skup svih $u \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ takvih da je $u^- \ll u \ll u^+$ naziva se rupa u A i označava se s (u^-, u^+), a u^- i u^+ zovu se granice rupe, ali i susjedi. Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [5, teorem 4.1]

Teorem 1.20. *Pretpostavimo da je ω iracionalan. Tada je $M_\omega(H)$ totalno uređen.*

Za $f \in \tilde{G}_+$ označimo sa $\mathrm{Rec}(f)$ skup gomilišta od $\{f^i(x) + k : i, k \in \mathbb{Z}\}$. Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [5, tvrdnje 4.2-4.6.]

Teorem 1.21. *Za neki $u \in M_\omega(H)$, neka je $f \in \tilde{G}_+$ takva da je $u_{j+1} = f(u_j)$. Za $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ postoji f-invarijatnan skup $A_\omega \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $u \in M_\omega(H)$ ako i samo ako $u_0 \in A_\omega$. Dakle projekcija $p_0(M_\omega(H)) = A_\omega$, te vrijedi $p_0(M_\omega^{Rec}(H)) = \mathrm{Rec}(f)$. Vrijede sljedeće alternative:*

(a) $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$

(b) $\mathrm{Rec}(f)$ *je Cantorov skup.*

Za svaki $u \in M_\omega(H) \setminus M_\omega^{Rec}(H)$ postoje $\underline{u} \ll u \ll \overline{u}$ takvi da su iz M_ω^{Rec} i asimptotični.

Za $\omega = p/q \in \mathbb{Q}$ gdje su p, q relativno prosti stavimo $M_\omega^{Per}(H)$ skup svih periodičnih konfiguracija od $M_\omega(H)$. Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [5, teorem 5.1]

Teorem 1.22. *Skup $M_\omega^{Per}(H)$ je neprazan, zatvoren i totalno uređen. Svaki $u \in M_\omega(H)$ ima minimalan period (q, p). Ako je $u \in M_\omega(H)$ tada je u minimum od $H_{q,p} \colon P_{q,p} \to \mathbb{R}$. Posebno $H_{q,p}(u) = H_{q,p}^{min}$ za sve $u \in M_\omega(H)$. Gdje je $P_{q,p} = \{u \in \mathbb{R}^\mathbb{Z} : S_{q,p}u = u\}$ i $H_{q,p}(u) = H(u_0, \ldots, u_q)$.*

Definicija 1.23. Pretpostavimo da su u^- i u^+ susjedi od $M_\omega^{Per}(H)$. Tada

$$M_\omega^+(u^-, u^+) = \{u \in M_\omega(H) : u \text{ je } \alpha\text{-asimptotična sa } u^- \text{ i } \omega\text{-asimptotična sa } u^+\}$$
$$M_\omega^-(u^-, u^+) = \{u \in M_\omega(H) : u \text{ je } \omega\text{-asimptotična sa } u^- \text{ i } \alpha\text{-asimptotična sa } u^+\}$$

Označimo sa $M_\omega^+(H)$ uniju svih $M_\omega^+(u^-, u^+)$ po svim susjedima u^- i u^+ te označimo sa $M_\omega^-(H)$ uniju svih $M_\omega^-(u^-, u^+)$ po svim susjedima u^- i u^+.

Dokaz sljedećih teorema može se naći u [5, teorem 5.3 i teorem 5.8] te time upotpunjujemo opis Aubry-Matherovih skupova.

Teorem 1.24. *Ako je ω racionalan tada je $M_\omega(H)$ disjunktna unija $M_\omega^{Per}(H)$, $M_\omega^+(H)$ i $M_\omega^-(H)$.*

Teorem 1.25. *Pretposatvimo da su u^- i u^+ susjedi od $M_\omega^{Per}(H)$ tada su $M_\omega^+(u^-, u^+)$ i $M_\omega^-(u^-, u^+)$ neprazni.*

Teorem 1.26. *Po projekciji p_0 možemo poistovijetiti $M_\omega^{Per}(H)$ sa zatvorenim $A_\omega \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $A_\omega = \mathbb{R}$ tada je $M_\omega(H) = M_\omega^{Per}(H)$ potpuno uređen. Inače postoje susjedni elementi u $M_\omega^{Per}(H)$ koji su spojeni heterokliničkim orbitama u $M_\omega^+(H)$ i u $M_\omega^-(H)$. Ako $u \in M_\omega^+(H)$ i $u^* \in M_\omega^-(H)$ leže između istog para susjednih elemenata tada se sijeku i to je jedini slučaj kada se dva elementa iz $M_\omega(H)$ sijeku.*

1.3. Twist preslikavanja

U ovom potpoglavlju definiramo twist preslikavanje i twist funkciju izvodnica. Definiramo što znači da glatko podizanje twist preslikavanja ima tok nula. Dokazujemo da postoji $1-1$ korespodencija između podizanja twist preslikavanja s tokom nula i twist funkcija izvodnica. Vidjet ćemo da stacionarne konfiguracije možemo identificirati s nizom prvih koordinata orbite podizača twist preslikavanja. Ovo poglavlje prati prvo poglavlje knjige C. Golea [25].

Definicija 1.27. Definiramo preslikavanje $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dano sa $T(x,p) = (x+1,p)$. Neka je $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ difeomorfizam za koji pišemo $F(x,p) = (x'(x,p), p'(x,p))$ takav da zadovoljava

(T1) $\frac{\partial x'}{\partial p}(x,p) > 0$

(T2) $\det DF = 1$ ili ekvivalentno $dp' \wedge dx' = dp \wedge dx$

(T3) $F \circ T = T \circ F$.

Tada zbog uvjeta $(T3)$ imamo da F inducira preslikavanje $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, koje zovemo twist preslikavanje.

Za preslikavanje $\psi(x,p) = (x, x'(x,p))$ zbog uvjeta $(T1)$ vrijedi

$$\det D\psi = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial p} \end{pmatrix} > 0$$

Lema 1.28. *Preslikavanje ψ je difeomorfizam.*

Dokaz: Neka je $\psi(x_1, p_1) = \psi(x_2, p_2)$. Tada iz definicije od ψ slijedi da $x_1 = x_2$. No tada $x'(x_1, p_1) = x'(x_1, p_2)$. Zbog stroge monotonosti od $p \mapsto x'(x_1, p)$ imamo $p_1 = p_2$, te je ψ ne samo lokalni difeomorfizam nego i pravi difeomorfizam. $\square$

Neka je $\tilde{S}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ preslikavanje takvo da je

$$\tilde{S}(a, b) = \int_C p'dx' - pdx \tag{1.2}$$

gdje je C bilo koji glatki put bez samopresijecanja koji spaja neku proizvoljnu fiksnu točku $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ i $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Kako zbog $(T2)$ vrijedi

$$d(p'dx' - pdx) = dp' \wedge dx' - dp \wedge dx = 0$$

prema Stokesovom teoremu [13, teorem 3.5] dobivamo da $\tilde{S}$ ne ovisi o izboru glatkog puta C.

Lema 1.29. *Preslikavanje $\tilde{S} \circ T - \tilde{S}$ je konstanta.*

Dokaz: Neka su (a_1, b_1) i (a_2, b_2) dvije točke, i neka su C_i za $i = 1, 2$ dva glatka puta bez samopresijecanja koja spajaju redom (a_i, b_i) i $T(a_i, b_i)$ za $i = 1, 2$ i neka je β put od (a_1, b_1) do (a_2, b_2). Promatramo zatvoren put sastavljen od puteva β nakon kojeg dolazi C_2 nakon kojeg dolazi $T\beta$, ali u suprotnom smjeru i na koncu C_1 u suprotnom smjeru. Tada je $\int_\beta p'dx' - pdx = \int_{T\beta} p'dx' - pdx$. Zaključujemo da

$$\int_{C_1} p'dx' - pdx = \int_{C_2} p'dx' - pdx$$

pa je tvrdnja dokazana. $\square$

Definiramo

$$S(x, x') = \tilde{S} \circ \psi^{-1}(x, x'), \tag{1.3}$$

te zlorabeći oznake stavimo $p'(x, x') = p' \circ \psi^{-1}(x, x')$ i $p(x, x') = p \circ \psi^{-1}(x, x')$. Tada imamo $p'dx' - pdx = dS(x, x')$, pa slijedi da je

$$\begin{aligned} p &= -S_1(x, x') \\ p' &= S_2(x, x'). \end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$\psi^{-1}(x,x') = (x,p) = (x, -S_1(x,x')).$$

Definiramo:

$$\mathrm{Tok}(F) = \tilde{S} \circ T - \tilde{S}.$$

Teorem 1.30. *Neka je dana* $\tilde{S}$ *sa* (1.2) *takva da je* $\mathrm{Tok}(F) = 0$. *Tada za funkciju* S *definiranu sa* (1.3) *vrijede sljedeća svojstva*

(i) *Periodičnost:* $S(x+1, x'+1) = S(x,x')$ *za* $x, x' \in \mathbb{R}$

(ii) *Twist uvijet:* $S_{12}(x,x') < 0$ *za* $x, x' \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Dokažimo svojstvo (i). Neka je $\tilde{S}$ definirana kao gore. Stavimo

$$S(x,x') = \tilde{S}\psi^{-1}(x,x') = \tilde{S}\psi^{-1}(\psi(x,p)) = \tilde{S}(x,p) = \tilde{S}(x+1,p)$$

$$= \tilde{S}\psi^{-1}(\psi(x+1,p)) = \tilde{S}\psi^{-1}(x+1,x'+1) = S(x+1,x'+1).$$

Dokažimo svojstvo (ii). Prvo primijetimo da imamo

$$F \circ \psi^{-1}(x,x') = (x', S_2(x,x')).$$

Kako je $\det DF = 1$ i $\det D\psi^{-1} > 0$ to imamo da je $-S_{12}(x,x') > 0$ no tada je $S_{12}(x,x') < 0$. □

Teorem 1.31. *Postoji* $1-1$ *korespondencija između glatkih podizanja* F *twist preslikavanja* $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *s tokom nula i glatkih funkcija* $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *koji zadovoljavalju*

(a) $S(x+1, x'+1) = S(x,x')$

(b) $S_{12}(x,x') < 0$

(c) $S(0,0) = 0$.

Ta korespondencija implicitno je dana s

$$F(x,p) = (x',p') \Leftrightarrow \begin{cases} p = -S_1(x,x') \\ p' = S_2(x,x'). \end{cases} \tag{1.4}$$

Funkciju S *koja zadovoljava* (a) *i* (b) *zovemo twist funkcija izvodnica twist preslikavanja* f.

Dokaz: Neka je F podizanje twist preslikavanja i neka je gore opisanim procesom dobivena $S(x, x')$. Već je dokazano (a) i (b). Kako se dvije twist funkcije izvodnice razlikuju samo za konstantu, to postoji jedinstvena funkcija S sa svojstvom $S(0, 0) = 0$.

Obrnuto, neka je dana S koja zadovoljava (b). Tada možemo definirati $F(x, p) = (x'(\psi(x, p)), S_2(\psi(x, p)))$ gdje je $\psi^{-1}(x, x') = (x, -S_1(x, x'))$. Vrijedi da je F difeomorfizam kao kompozicija dvaju difeomorfizma

$$(x, p) \to (x, x') \to (x', S_2(x, x')).$$

Lako je provjeriti da par F, S zadovoljava (1.4). Iz (a) imamo da ako $F(x, p) = (x', p')$ tada

$$p = -S_1(x, x') = -S_1(x + 1, x' + 1) \text{ i } p' = S_2(x, x') = S_2(x + 1, x' + 1).$$

Zbog (1.4) vrijedi da je $F(x + 1, p) = (x' + 1, p')$ tako da imamo dokazano svojstvo $(T3)$. Kako F ima tok nula, tada $f^*(dx \wedge dp) = dx \wedge dp$ pa vrijedi i $dx' \wedge dp' = F^*(dx \wedge dp) = dx \wedge dp$ pa vrijedi i $(T2)$. Iz

$$F \circ \psi^{-1}(x, x') = (x', S_2(x, x'))$$

slijedi $S_{12}(x, x') < 0$ ako i samo ako $\det D\psi(x, p) > 0$. No kako je $\det D\psi(x, p) = \frac{\partial x'}{\partial p}(x, p)$, vrijedi $\frac{\partial x'}{\partial p}(x, p) > 0$. Dakle vrijedi $(T1)$. $\square$

Teorem 1.32. *Neka je zadan podizač F twist preslikavanja f i odgovarajuća twist funkcija izvodnica S. Slijedi da postoji $1 - 1$ korespondencija između stacionarnih konfiguracija i točaka iz $\mathbb{R}^2$. To prelikavanje $\tau \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ je definirano na slijedeći način:*

$$(u_j)_{j \in \mathbb{Z}} = u \mapsto (u_0, -S_1(u_0, u_1)) = (x_0, p_0),$$

te je konfiguracija $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ niz prvih koordinata F-orbite od (x_0, p_0). Ponekad zlorabimo terminologiju te poistovjećujemo stacionarne konfiguracije, točke iz $\mathbb{R}^2$ i njihove F-orbite. Ako pretpostavimo induciranu produktnu topolgiju na $\mathcal{S}$ onda je preslikavnje τ homeomorfizam između $\mathcal{S}$ i $\mathbb{R}^2$.

Dokaz: Neka je F podizač twist preslikavanja f i neka je $S(x, x')$ njegova generirajuća funkcija izvodnica, te neka je

$$\{(x_k, p_k) = F^k(x_0, p_0) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Kako je konfiguracija stacionarna vrijedi

$$S_1(x_k, x_{k+1}) + S_2(x_{k-1}, x_k) = 0.$$

Stavimo

$$p_k = -S_1(x_k, x_{k+1}),$$

no to je jednako $S_2(x_{k-1}, x_k)$, pa

$$F(x_{k-1}, p_{k-1}) = F \circ \psi^{-1}(x_{k-1}, x_k) = (x_k, S_2(x_{k-1}, x_k))$$

$$= (x_k, -S_1(x_k, x_{k+1})) = (x_k, p_k).$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Definiramo formalnu sumu (Hamiltonijan) s

$$H(u) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S(u_j, u_{j+1}).$$

To je formalna suma jer uglavnom ne konvergira. No ako ju (formalno) deriviramo po u_j dobivamo konačnu vrijednost

$$\nabla H(u)_j = S_2(u_{j-1}, u_j) + S_1(u_j, u_{j+1}).$$

Prisjetimo se da je $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ stacionarna konfiguracija ukoliko je $\nabla H(u)_j = 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Skup svih stacionarnih konfiguracija označavat ćemo sa $\mathcal{S}$.

Primjer 1.33. Neka je $V(u, v) = \frac{1}{2}(u - v)^2 + F(u)$ gdje je $F(u + 1) = F(u)$ periodična, tada vrijedi

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t) + F'(u_j(t)).$$

U ovom primjeru konfiguracija je stacionarna ako i samo ako

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j+1} + F'(u_j) = 0, j \in \mathbb{Z}.$$

Slijedi da se par realnih brojeva $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ može u ovom primjeru na jedinstven način proširiti do stacionarne konfiguracije jer možemo definirati preslikavanje $(u_0, u_1) \mapsto u_2$ gdje je u_2 jedinstveno rješenje od

$$u_0 - 2u_1 + u_2 + F'(u_1) = 0$$

i tako dalje te slično u suprotnom smjeru.

Vidimo da je funkcija V definirana u primjeru 1.33 twist funkcija izvodnica pa je njoj na jedinstven način pridružen podizač F twist funkcije f.

Primjer 1.34. Ako stavimo $V(x,x') = \frac{1}{2}(x-x')^2 + \frac{k}{2\pi}\cos(2\pi x)$ tada dobivamo takozvano standardno preslikavanje.

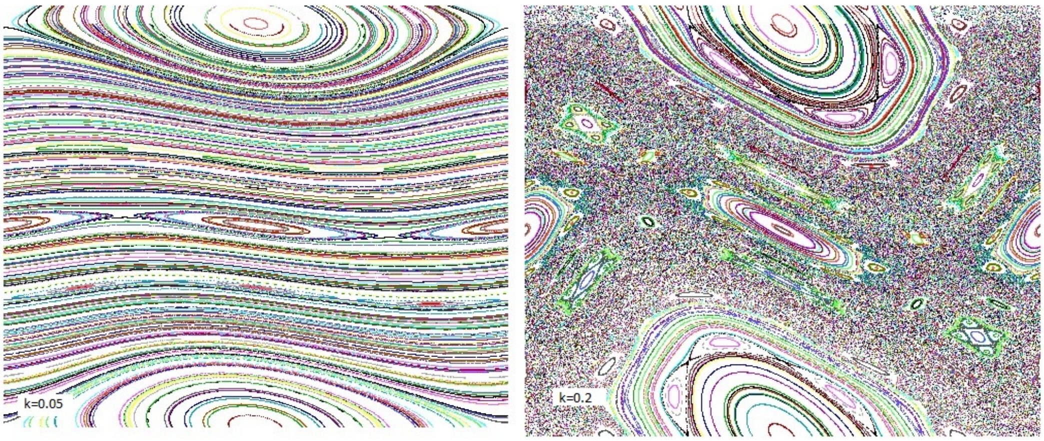
Kako je

$$p = -V_1(x,x') = -x + x' - k\sin(2\pi x) \text{ i } p' = V_2(x,x') = x' - x$$

to imamo

$$\begin{aligned} x' &= x + p + k\sin(2\pi x) \\ p' &= p + k\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Orbite standardnoga preslikavanja za $k = 0.05$ i $k = 0.2$ vidimo na slici 2.



Slika 2. Orbite standardnog preslikavanja gdje je svaka orbita bojana istom bojom. Na slici lijevo $k = 0.05$, a na slici desno $k = 0.2$.

2. Postojanje rješenja

U ovom poglavlju postavljamo glavni sustav čiju ćemo dinamiku proučavati i definiramo osnovne prostore na kojima ćemo promatrati rješenja.

Promatramo prebrojiv sustav običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = -V_2(u_{j+1}(t), u_j(t), t) - V_1(u_j(t), u_{j-1}(t), t) = f_j(t, u), j \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

gdje je $V = V(u, v, t)$ klase C^2 u varijablama u, v te neprekidna u svim varijablama i zadovoljava uvjete:

(V1) $V(u+1, v+1, t) = V(u, v, t)$ za $(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$

(V2) postoji $T > 0$ takav da je $V(u, v, t+T) = V(u, v, t)$ za $(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$

(V3) Twist uvjet: postoji konstanta $D > 0$ takva da je $V_{12}(u, v, t) \leq -D < 0$ za $(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$

(V4) Postoji $C > 0$ takav da je $\|D^2_{u,v}V(u, v, t)\| \leq C$ za $(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$ gdje je $D^2_{u,v}$ drugi diferencijal s obzirom na varijable u i v.

Promatramo sustav (2.1) uz početni uvjet

$$u(0) = u_0 \in K_n$$

gdje je K_n definiran za odabrani $n \in \mathbb{N}$ s

$$K_n = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_{k+1} - u_k| \leq n\}.$$

Definiramo

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

i za $\lambda > 0$ na njemu normu

$$\|u\|_\lambda = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| e^{-|k|\lambda}$$

koju nazovimo λ-normom.

Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Uvedimo oznaku

$$C^1(I, K_n)$$

za topološki prostor neprekidnih funkcija s I u K_n (gdje je topologija na K_n dana preko norme $\|.\|_\lambda$) koje su klase C^1 u svakoj koordinati. U ovom poglavlju pokazat ćemo:

Teorem 2.1. *Postoji neprekidan polutok* $\varphi\colon [0,+\infty) \times K_n \to K_n$ *takav da je* $u(t) = \varphi(t, u_0)$ *rješenje* (2.1) *uz početni uvjet* $u(0) = u_0$ *gdje* $u_0 \in K_n$.

Taj teorem slijedi iz lokalne jedinstvenosti rješenja i sljedećeg rezultata:

Teorem 2.2. *Za* $u_0 \in K_n$ *sustav* (2.1) *ima rješenje*

$$u \in C^1([0,+\infty), K_n)$$

takvo da je $u(0) = u_0$.

Za realnu funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiranu na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kažemo da je realno-analitička u nekoj točki $c \in \Omega$ ukoliko je jednaka svom Taylorovom redu na nekoj okolini te točke.

Za realnu funkciju definiranu na otvorenom skupu kažemo da je realno-analitička ukoliko je realno-analitička u svakoj točki tog skupa. Za funkciju $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ kažemo da je realno-analitička ukoliko je realno-analitička na nekoj otvorenoj okolini od $[0,\infty)$. S

$$C^\omega([0,\infty), K_n)$$

označimo skup svih neprekidnih preslikavanja s $[0,\infty)$ u K_n koje su realno-analitičke u svakoj koordinati. Na kraju poglavlja pokazat ćemo:

Teorem 2.3. *Pretpostavimo da je* $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *realno-analitička tada za* $u_0 \in K_n$ *sustav* (2.1) *ima rješenje*

$$C^\omega([0,\infty), K_n)$$

takvo da je $u(0) = u_0$.

To će slijediti iz prilagodbe Cauchy-Kovalevskinog teorema za prebrojiv sustav običnih diferencijalnih jednadžbi.

2.1. Svojstva topologije

Kasnije će nam biti važni još neki prostori konfiguracija:

$$X^1_\omega = \{u \in X : |u_{j+m} - u_j - m\omega| \le 1\}$$

$$X^1_{[a,b]} = \bigcup_{\omega\in[a,b]} X^1_\omega.$$

Uvedimo relaciju R na $\mathbb{R}^\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ koja će nam biti od velike koristi, jer neki prostori pocijepani po toj relaciji postaju kompaktni. Definiramo

uRv ukoliko postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $u_j - v_j = m$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$.

Stavimo $\mathcal{K}_n = K_n/R$ i $\mathcal{X} = X/R$.

Dokazujemo osnovna svojstva topologije na X, K_n, $X^1_{[a,b]}$ i $\mathcal{K}_n$ inducirane normom $\|.\|_\lambda$.

Lema 2.4. *Metrike na X inducirane λ-normom za $\lambda > 0$ induciraju istu topologiju.*

Dokaz: Neka je $0 < \lambda < \lambda'$. Tada

$$\|u - v\|_\lambda = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j - v_j| e^{-\lambda|j|} \geq \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j - v_j| e^{-\lambda'|j|} = \|u - v\|_{\lambda'}.$$

Vidimo da $\|u_k - u\|_\lambda \to 0$ povlači $\|u_k - u\|_{\lambda'} \to 0$. Kako za $u, v \in X$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $u, v \in K_n$ to postoje $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$ takavi da je $\|u - v\|_\lambda = e^{-\lambda|j_0|}|u_{j_0} - v_{j_0}|$ i $\|u - v\|_{\lambda'} = e^{-\lambda'|j_1|}|u_{j_1} - v_{j_1}|$. Kako je $|j_0| \leq 1/\lambda$ ili $j_0 = j_1$ to u prvom slučaju imamo

$$\|u - v\|_\lambda = e^{-\lambda|j_0|}|u_{j_0} - v_{j_0}| = e^{-\lambda'|j_0|}|u_{j_0} - v_{j_0}| e^{(\lambda'-\lambda)|j_0|} \leq$$

$$\leq e^{-\lambda'|j_0|}|u_{j_0} - v_{j_0}| e^{\frac{\lambda'}{\lambda}-1} \leq e^{\frac{\lambda'}{\lambda}-1} e^{-\lambda'|j_1|}|u_{j_1} - v_{j_1}| = e^{\frac{\lambda'}{\lambda}-1}\|u - v\|_{\lambda'}$$

Ukoliko je $j_0 = j_1$ tada ako $\|u_k - u\|_{\lambda'} \to 0$ tada $\|u_k - u\|_\lambda \to 0$. Time je dokazano da su te topologije iste. $\square$

Lema 2.5. *Topologija za svaki $n \in \mathbb{N}$ na omeđenim podskupovima od K_n inducirana λ-normom podudara se s topologijom konvergencije po točkama to jest s produktnom topologijom.*

Dokaz: Neka $u^k \to u$ u topologiji induciranoj normom $\|.\|_\lambda$ to jest $\|u^k - u\|_\lambda \to 0$. Tada $e^{-\lambda|j|}|u^k_j - u_j| \to 0$. Znači da $u^k_j \to u_j$.

Pretpostavimo da $u^k \to u$ konvergira po točkama to jest $u^k_j \to u_j$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo također da $\|u\|_\lambda, \|u^k\|_\lambda \leq C$ za neki $C > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Tada kako $u^k, u \in K_n$ to imamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da $|u_j|e^{-\lambda|j|}, |u^k_j|e^{-\lambda|j|} < \varepsilon$ za svaki $|j| > N$ koji ne ovisi o k, no ovisi o C. No kako je $u^k_j \to u_j$ to za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $N > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ imamo $|u^k_j - u_j| < \varepsilon$ za svaki $|j| \leq N$. Dakle $\|u^k - u\|_\lambda \to 0$.

Kako $|u_j| \leq |jn| + |u_0|$ to postoji $M > 0$ takav da $\|u\|_\lambda \leq C + M|u_0|$. Ako je $D > 0$ takav da je $|u^k_0| \leq D$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ tada se topologija konvergencije po točkama podudara s topologijom induciranom λ-normom. $\square$

Lema 2.6. *Na omeđenim podskupovima od $X^1_{[a,b]}$ topologija inducirana λ-normom podudara se s topologijom konvergencije po točkama.*

Dokaz: Neka je $u \in X^1_{[a,b]}$. Tada postoji $\omega \in [a,b]$ takav da je $u \in X^1_\omega$. Kako je $|u_{j+1} - u_j - \omega| \leq 1$, to imamo da

$$|u_{j+1} - u_j| \leq 1 + |\omega|.$$

Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|u_{j+1} - u_j| \leq n$ za svaki $u \in X^1_{[a,b]}$. Dovoljno je uzeti neki $n \geq 1 + \max\{|a|, |b|\}$. Dakle $X^1_{[a,b]} \subseteq K_n$ i lema slijedi. $\square$

Lema 2.7. *Prostor $\mathcal{K}_n$ sa topologijom induciranom λ-normom je kompaktan.*

Dokaz: Kako je

$$\mathcal{K}_n = \{u \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : u_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, u_1, u_{-1} \in [-n + u_0, u_0 + n], \dots\}$$

kompaktan u produktnoj topologiji po Tihonovljevom teoremu [12, teorem 8.9], te kako je produktna topologija na K_n za $u \in K_n$ gdje $|u_0| \leq D$ za neki $D > 0$ ista kao topologija inducirana sa $\|.\|_\lambda$ to imamo da se produktna topologija na $\mathcal{K}_n$ podudara sa topologijom induciranom sa $\|.\|_\lambda$. Dakle $(\mathcal{K}_n, \|.\|_\lambda)$ kompaktan je prostor. $\square$

2.2. Lokalno postojanje i jedinstvenost rješenja

Dokazujemo da lokalna rješenja sustava (2.1) postoje.

Teorem 2.8. *Za $u_0 \in K_n$ postoji $\delta > 0$ i jedinstveni $u \in C^1([-\delta, \delta], K_n)$ koje je rješenje* (2.1) *takvo da je $u(0) = u_0$.*

Dokaz tog teorema provodimo u pet lema. U prve dvije dokazujemo da je prostor u kojem tražimo rješenje potpun kako bi mogli primijeniti Banachov teorem o fiksnoj točki.

U trećoj lemi pokazujemo kompaktnost prostora, koja nam treba da u zadnje dvije leme dokažemo svojstvo Lipschitzove neprekidnosti koja je isto tako potrebna kod Banachovog teorema o fisknoj točki.

Lema 2.9. *Prostor $(K_n, \|.\|_\lambda)$ je potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je dan (u_j) niz u K_n takav da je Cauchyjev u normi $\|.\|_\lambda$ tada je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ niz $j \mapsto (u_j)_k$ Cauchyjev u $(\mathbb{R}, |.|)$ što je potpun prostor. Dakle za svaki $k \in \mathbb{Z}$ postoji $u_k \in \mathbb{R}$ takav da je $(u_j)_k \to u_k$. No tada je $u_j \to u = (u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ u $\|.\|_\lambda$. Kako je $|(u_j)_{k+1} - (u_j)_k| \leq n$ za svaki $k, j \in \mathbb{Z}$ tada $|u_{k+1} - u_k| \leq n$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Dakle $(K_n, \|.\|_\lambda)$ je potpun prostor. □

Definiramo skup

$$Y_{\delta,n} = C([-\delta, \delta], K_n)$$

kao skup svih neprekidnih funkcija $u\colon [-\delta, \delta] \to K_n$ gdje je na K_n topologija inducirana λ-normom i na njemu normu

$$\|u\|_Y = \max_{t\in[-\delta,\delta]} \|u(t)\|_\lambda.$$

Lema 2.10. *Prostor $(Y_{\delta,n}, \|.\|_Y)$ je potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je (u_j) Cachyjev niz u $Y_{\delta,n}$. Tada je $(u_j(t))$ Cauchyjev niz u K_n za svaki $t \in [-\delta, \delta]$. Kako je K_n potpun, to postoji $u(t) \in K_n$ takav da $u_j(t) \to u(t)$. Vidimo da za $t, s \in [-\delta, \delta]$ imamo $\|u(t) - u(s)\|_\lambda \leq \|u(t) - u_j(t)\|_\lambda + \|u_j(t) - u_j(s)\|_\lambda + \|u_j(s) - u(s)\|_\lambda$, dakle $u \in Y_{\delta,n}$ te $u_j \to u$ u $\|.\|_Y$, pa je $(Y_{\delta,n}, \|.\|_Y)$ potpun prostor. □

Uvedimo relaciju $\sim$ na $\mathbb{R}^3$ kao najmanju relaciju ekvivalancije takvu da $(x, y, t) \sim (x + 1, y + 1, t)$ te $(x, y, t) \sim (x, y, t + T)$ za svaki $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$.

Lema 2.11. *Za svaki $M > 0$ skup $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : |x - y| \leq M\}$ pocijepan po relaciji ekvivalencije $\sim$ je kompaktan.*

Dokaz: Neka je (a_j, b_j, t_j) niz u tom prostoru. Tada je t_j niz u $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ i a_j niz u $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ što je kompaktan prostor pa posjeduje podniz koji konvergira. Kako $b_j = a_j + x_j$ gdje je $x_j \in [-M, M]$, te kako je $[-M, M]$ kompaktan prostor to postoji podniz od x_j koji konvergira. Tada postoji podniz od (a_j, b_j, t_j) koji konvergira pa je prostor kompaktan. □

Lema 2.12. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $N_n > 0$ takav da je $\|f(t, u)\|_\lambda \leq N_n$ za sve $u \in K_n$*

Dokaz: Vrijedi

$$|f_j(t, u)| \leq |V_2(u_{j-1}, u_j, t)| + |V_1(u_j, u_{j+1}, t)|.$$

Kako je $u \in K_n$, to imamo da $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_{j+1} - u_j| \le n$. Dakle kako je skup $\{(x, y, t) : |x - y| \le n\}$ pocijepan po relaciji ekvivalencije $\sim$ kompaktan po lemi 2.11 proizlazi da postoji N'_n takav da je

$$|f_j(t, u)| \le N'_n$$

za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Tada očito postoji $N_n > 0$ takav da

$$\|f(t, u)\|_\lambda \le N_n.$$

Time je lema dokazana. $\square$

Lema 2.13. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji realan broj $M_n > 0$ takav da*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_\lambda \le M_n\|u - v\|_\lambda$$

za sve $u, v \in K_n$.

Dokaz: Vrijedi $|f_j(t, u) - f_j(t, v)| =$

$$= |V_2(v_{j-1}, v_j, t) - V_2(u_{j-1}, u_j, t) + V_1(v_j, v_{j+1}, t) - V_1(u_j, u_{j+1}, t)|$$

$$\le |V_2(v_{j-1}, v_j, t) - V_2(v_{j-1}, u_j, t)| + |V_2(v_{j-1}, u_j, t) - V_2(u_{j-1}, u_j, t)| +$$

$$+|V_1(v_j, v_{j+1}, t) - V_1(v_j, u_{j+1}, t)| + |V_1(v_j, u_{j+1}, t) - V_1(u_j, u_{j+1}, t)| \le$$

$$|V_{22}(v_{j-1}, \xi_1, t)||u_j - v_j| + |V_{21}(\xi_2, u_j, t)||u_{j-1} - v_{j-1}| +$$

$$+|V_{12}(v_j, \xi_3, t)||u_{j+1} - v_{j+1}| + |V_{11}(\xi_4, u_{j+1}, t)||u_j - v_j|.$$

Kako je ξ_1 između u_j i v_j to imamo $|v_{j-1} - \xi_1| \le |v_{j-1} - v_j| + |\xi_1 - v_j| \le n + |u_j - v_j|$. Kako je skup $\{(x, y, t) : |x - y| \le M\}$ pocijepan po relaciji ekvivalencije $\sim$ kompaktan po lemi 2.11 tada vrijedi da V_{22} poprima maksimum koji ovisi o n i $|u_j - v_j|$. Dakle postoji $C_n^{22} > 0$ takav da

$$|V_{22}(v_{j-1}, \xi_1, t)||u_j - v_j| \le C_n^{22}|u_j - v_j|$$

kada $|u_j - v_j| \le 1$. Dakle

$$|V_2(v_{j-1}, v_j, t) - V_2(v_{j-1}, u_j, t)| \le C_n^{22}|u_j - v_j|.$$

Po istom argumentu postoje $C_n^{21} > 0$, $C_n^{12} > 0$ i $C_n^{11} > 0$ takvi da

$$|V_2(v_{j-1}, u_j, t) - V_2(u_{j-1}, u_j, t)| \le C_n^{21}|u_{j-1} - v_{j-1}|$$

$$|V_1(v_j, v_{j+1}, t) - V_1(v_j, u_{j+1}, t)| \leq C_n^{12}|u_{j+1} - v_{j+1}|$$
$$|V_1(v_j, u_{j+1}, t) - V_1(u_j, u_{j+1}, t)| \leq C_n^{11}|u_j - v_j|.$$

Sada očito postoji $D_n > 0$ takav da

$$|f_j(t,u) - f_j(t,v)| \leq D_n(|u_{j-1} - v_{j-1}| + |u_j - v_j| + |u_{j+1} - v_{j+1}|)$$

kada je $|u_{j-1} - v_{j-1}|, |u_j - v_j|, |u_{j+1} - v_{j+1}| \leq 1$. Po dokazu predhodne leme znamo da postoji $N_n > 0$ takav da $|f_j(t,u) - f_j(t,v)| \leq |f_j(t,u)| + |f_j(t,v)| \leq 2N_n$ za sve $j \in \mathbb{Z}$. Stavimo $M_n' = \max\{2N_n, D_n\}$ tada $|f_j(t,u) - f_j(t,v)| \leq M_n'(|u_{j-1} - v_{j-1}| + |u_j - v_j| + |u_{j+1} - v_{j+1}|)$. Tada postoji $M_n > 0$ takav da $\|f(t,u) - f(t,v)\|_\lambda \leq M_n\|u - v\|_\lambda$. □

Teorem 2.14. *(Banachov teorem o fiksnoj točki) Neka je $(Z, \|.\|)$ potpun metrički prostor i $L\colon Z \to Z$ funkcija za koju postoji $K < 1$ takva da je*

$$\|Lu - Lv\| \leq K\|u - v\|.$$

Tada postoji jedinstvena fiksna točka za L.

Dokaz: Dokaz je iz [12, teorem 1.3]. Neka je $u_0 \in Z$ neka točka. Stavimo $u_1 = Lu_0$, $u_2 = Lu_1$, itd. Tada za $D = \|u_0 - Tu_0\| = \|u_0 - u_1\|$ vrijedi

$$\|u_0 - u_k\| \leq \|u_0 - u_1\| + \|u_1 - u_2\| + \cdots + \|u_{k-1} - u_k\| \leq$$

$$\leq \|u_0 - u_1\| + K\|u_0 - u_1\| + \cdots + K^{k-1}\|u_0 - u_1\| \leq D/(1-K).$$

Promatramo za $m \geq n$

$$\|u_n - x_m\| \leq K\|u_{n-1} - u_{m-1}\| \leq K^2\|u_{n-2} - u_{m-2}\| \leq \cdots \leq DK^n/(1-K)$$

pa imamo da $\|u_n - u_m\|$ teži u 0 kada $n \to \infty$ zbog $K < 1$.

Dakle $u_0, u_1, u_2, \ldots$ je Cauchyjev niz. Budući je prostor Z potpun, taj niz konvergira prema u no tada je $Lu = L(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} Lu_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u$. Neka je v neka druga fiksna točka tada je

$$\|u - v\| = \|Lu - Lv\| \leq K\|u - v\|,$$

a to je jedino moguće ako je $u = v$ pa je teorem dokazan. □

Dokaz teorema 2.8: Neka je $u_0 \in K_n$ fiksan. Definiramo

$$Z_{\delta,2n}(u_0) = \{u \in Y_{\delta,2n} = C([-\delta,\delta], K_{2n}) : u(0) = u_0\},$$

te definiramo

$$(Lu)_j(t) = u_j(0) + \int_0^t f_j(s, u(s))ds.$$

Zbog leme 2.12 znamo da postoji $N_{2n} > 0$ takav da

$$|(Lu)_{j+1}(t) - (Lu)_j(t)| \leq |\int_0^t (|f_{j+1}(s, u(s))| + |f_j(s, u(s))|)ds| \leq 2N_{2n}|t|.$$

Stoga postoji $\delta > 0$ takav da za $t \in [-\delta, \delta]$ vrijedi $(Lu)(t) \in Z_{\delta,2n}(u_0)$. Za $u, v \in Z_{\delta,2n}(u_0)$ možemo zbog leme 2.13 ocijeniti

$$\|Lu(t) - Lv(t)\|_\lambda \leq |\int_0^t M_{2n}\|u(s) - v(s)\|_\lambda ds|,$$

tako da je

$$\|Lu - Lv\|_Y \leq M_{2n}\|u - v\|_Y \delta.$$

Dakle za dovoljno mali $\delta > 0$ L je kontrakcija. Kako je $Z_{\delta,2n}$ zatvoren podskup od $Y_{\delta,2n}$, to je potpun metrički prostor. Po Banachovom teoremu o fiksnoj točki slijedi da postoji jedinstvena funkcija $u \in Z_{\delta,2n}(u_0)$ takva da je $Lu = u$. Vidi se da u zadovoljava (2.1) i da je $u(0) = u_0$. Kako je $u\colon [-\delta, \delta] \to K_{2n}$ neprekidna, imamo da su $u_j\colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ neprekidne za sve $j \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$u_j(t) = u_j(0) + \int_0^t (-V_2(u_{j-1}(s), u_j(s), s) - V_1(u_j(s), u_{j+1}(s), s))ds$$

klase C^1. Dakle u je klase C^1 u svim koordinatama. $\square$

2.3. Neprekidnost rješenja u supremum normi

Definiramo supremum normu

$$\|u\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|.$$

Lema 2.15. *Ako $\|u^n - u\|_\infty \to 0$ tada $\|u^n - u\|_\lambda \to 0$.*

Dokaz: Kako $|u_j^n - u_j| \to 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$ i kako postoji $C > 0$ takav da $|u_j^n - u_j| \leq C$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$ tada imamo da $\|u^n - u\|_\lambda \to 0$. $\square$

Stavimo

$$K_n^\infty = \{u \in K_n : \|u\|_\infty < \infty\}.$$

Promatrat ćemo $Y^{\infty}_{\delta,n} = C([-\delta,\delta], K^{\infty}_n)$ i $Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0) = u_0 + \{u \in Y^{\infty}_{\delta,n} : u(0) = 0\}$ za $u_0 \in K_n$. Definirat ćemo kontrakciju

$$L\colon Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0) \to Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0)$$

te time pokazati da je rješnje od (2.1) neprekidno i u supremum normi.

Lema 2.16. *Prostor* $(K^{\infty}_n, \|.\|_{\infty})$ *je potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je dan niz $(u^k)_k$ u K^{∞}_n takav da je Cachyjev u normi $\|.\|_{\infty}$ tada je za svaki $j \in \mathbb{Z}$ niz $(u^k_j)_k$ Cauchyjev u $(\mathbb{R}, |.|)$ pa postoji u_j takav da $(u^k_j)_k \to u_j$. No tada $u^k \to u = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, a kako je $|u^k_{j+1} - u^k_j| \leq n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ to vrijedi $|u_{j+1} - u_j| \leq n$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Dakle $(K^{\infty}_n, \|.\|_{\infty})$ je potpun metrički prostor. $\square$

Definiramo skup

$$Y^{\infty}_{\delta,n} = C([-\delta,\delta], K^{\infty}_n)$$

kao skup svih neprekidnih funkcija $u\colon [-\delta,\delta] \to K^{\infty}_n$ gdje je na K^{∞}_n topologija inducirana normom $\|.\|_{\infty}$ i na njemu normu

$$\|u\|^{\infty}_{Y} = \max_{t\in[-\delta,\delta]} \|u(t)\|_{\infty}.$$

Lema 2.17. *Prostor* $(Y^{\infty}_{\delta,n}, \|.\|^{\infty}_{Y})$ *je potpun metrički prostor.*

Dokaz: Neka je $(u^k)_k$ Cauchyjev niz u $Y^{\infty}_{\delta,n}$ tada je $(u^k(t))_k$ Cauchyjev niz u $(K^{\infty}_n, \|.\|_{\infty})$ za svaki $t \in [-\delta,\delta]$. Kako je taj prostor potpun to postoji $u(t)$ takav da $u^k(t) \to u(t)$. Kako vrijedi $\|u(t) - u(s)\|_{\infty} \leq \|u(t) - u^n(t)\|_{\infty} + \|u^n(t) - u^n(s)\|_{\infty} + \|u^n(s) - u(s)\|_{\infty}$ to imamo $u \in C([-\delta,\delta], K^{\infty}_n)$. Dakle prostor $(Y^{\infty}_{\delta,n}, \|.\|^{\infty}_{Y})$ potpun je metrički prostor. $\square$

Definiramo

$$Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0) = u_0 + \{u \in Y^{\infty}_{\delta,n} : u(0) = 0\}.$$

Teorem 2.18. *Neka je* $u_0 \in K_n$ *tada postoji* $\delta > 0$ *i jedinstveni* $u \in Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0)$ *koje je rješnje od* (2.1).

Dokaz: Kako $K_n + K^{\infty}_n \subseteq K_{2n}$ to imamo

$$|\int_0^t f_j(s, u(s))ds| \leq N_{2n}|t|.$$

Definiramo

$$(Lu)_j(t) = u_j(0) + \int_0^t f_j(s, u(s))ds.$$

Iz toga slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da za $u \in Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0)$ vrijedi da je $Lu \in Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0)$. Kako zbog dokaza leme 2.13 postoji $M_{2n} > 0$ takav da

$$\|Lu(t) - Lv(t)\|_{\infty} \leq |\int_0^t 3M_{2n}(\|u(s) - v(s)\|_{\infty})ds|,$$

to vrijedi

$$\|Lu - Lv\|^{\infty}_{Y} \leq 3M_{2n}\|u - v\|^{\infty}_{Y}\delta.$$

Po Banachovom teoremu o fiksnoj točki slijedi da postoji jedinstven $u \in Z^{\infty}_{\delta,n}(u_0)$ takav da $Lu = u$. Tada u zadovoljava (2.1) i $u(0) = u_0$. Kako je supremum topologija jača od λ-topologije to imamo da je $u \in C^1([-\delta, \delta], K_{2n})$. Tada zbog jedinstvenosti rješnja imamo da je rješenje od (2.1) neprekidno i u topologiji induciranoj normom $\|.\|_{\infty}$. $\square$

2.4. Monotonost i globalno postojanje rješenja

Pokazujemo činjenicu: ako su početni uvjeti uređeni tada rješenja od (2.1) čuvaju taj uređaj te da globalno rješenje postoji.

U ovom potpoglavlju dokazujemo teorem 2.2 tako da prvo dokažemo teorem o monotonosti sustava (2.1).

Kažemo da je sustav monoton ukoliko za svake $u(0) \leq v(0)$ imamo da je $u(t) \leq v(t)$ za svaki $t > 0$ za koje su definirane obje strane nejednakosti. Dokazujemo:

Teorem 2.19. *Sustav* (2.1) *je monoton.*

Prvo dokažimo da je sustav (2.1) lokalno monoton:

Lema 2.20. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\delta_n > 0$ takav da ako su $u, v \in C([t_0, t_0 + \delta_n], K_{2n})$ rješenja od* (2.1) *te vrijedi $u(t_0) \leq v(t_0)$, tada je $u(t) \leq v(t)$ za svaki $t \in [t_0, t_0 + \delta_n]$.*

Dokaz: Neka je $u \in C([t_0, t_0 + \delta], K_{2n})$. Promatramo sustav

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\xi_j(t) = &-V_{21}(u_{j-1}(t), u_j(t), t)\xi_{j-1}(t) - V_{22}(u_{j-1}(t), u_j(t), t)\xi_j(t) \\ &-V_{11}(u_j(t), u_{j+1}(t), t)\xi_j(t) - V_{12}(u_j(t), u_{j+1}(t), t)\xi_{j+1}(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

koji zapišemo u kompaktnijem obliku

$$\dot{\xi}(t) = A(t, u(t))\xi(t).$$

Definiramo za $\mu > 0$

$$\gamma(t) = e^{t\mu}\xi(t).$$

Tada

$$\dot{\gamma}(t) = B(t, u(t))\gamma(t),$$

gdje je $\mu > 0$ dovoljno velik takav da je

$$B(t, x(t)) = A(t, u(t)) + \mu Id$$

pozitivan. To je moguće zbog twist uvjeta $(V3)$ i činjenice da je

$$u \in C([t_0, t_0 + \delta], K_{2n})$$

pa tako $A(t, u(t))_{ij}$ omeđen za svaki $i, j \in \mathbb{Z}$. Promatramo Picardove iteracije na $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$\gamma^{n+1}(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} B(s, u(s))\gamma^n(s)ds, \quad \gamma^0(t) = \gamma(t_0).$$

Pokažimo da za dovoljno mali $\delta > 0$ te iteracije konvergiraju. Neka je $0 \leq \gamma_k(0) \leq D_k$ za neki $D_k \geq 0$ za $k \in \mathbb{Z}$. Kako je sustav (2.2) zbog relacije $(V4)$ takav da je $0 \leq B_{ij}(t, u(t)) \leq C$ za $|i - j| \leq 1$ za neku konstantu $C > 0$ te $B(t, u(t))_{ij} = 0$ za $|i - j| > 1$. Indukcijom se dobije

$$\gamma_k^{n+1}(t) \leq E_k(1 + (3C\delta) + \cdots + (3C\delta)^{n+1})$$

za svaki $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ gdje je $E_k = \max\{D_{k-1}, D_k, D_{k+1}\}$. Vidimo da za dovoljno mali $\delta > 0$ je $\gamma_k^n(t)$ ograničeno i rastuće pa konvergira. Dakle neka $\gamma^n(t) \to \gamma(t)$. Kako je $B(t, u(t))$ pozitivna to je svaka $\gamma^n(t) \geq 0$ pa je tada i $\gamma(t) \geq 0$. Prema tome i $\xi(t) \geq 0$. Neka je sada $u^\lambda(t_0) = (1-\lambda)u(t_0) + \lambda v(t_0)$ za $\lambda \in [0, 1]$ i neka je u^λ jednaka rješenju od (2.1) uz početni uvjet jednak $u^\lambda(t_0)$. Definiramo $\xi^\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}u^\lambda(t)$ tada je

$$\frac{d}{dt}\xi^\lambda(t) = A(t, u^\lambda(t))\xi^\lambda(t).$$

Kako je $\xi^\lambda(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$ to imamo $\xi^\lambda(t) \geq 0$ prema tome

$$v(t) = u(t) + \int_0^1 \xi^\lambda(t)d\lambda \geq u(t).$$

Time je lema dokazana. $\square$

Prisjetimo se operatora $S_{m,n}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ prostornog pomaka i stavimo $S = S_{-1,0}$ tada $(Su)_j = u_{j+1}$. Kako S rješenja od (2.1) šalje u rješenja od (2.1) imamo slijedeći korolar:

Korolar 2.21. *Ako je $u \in C([0,\delta], K_{2n})$ rješenje od* (2.1) *te ako je $u(0) \in K_n$ tada je $u(t) \in K_n$ za svaki $t \in [0,\delta]$. Dakle rješenje u je iz $C([0,\delta], K_n)$.*

Dokaz: Kako je $u(0)$ iz K_n to je $-n + u(0) \leq (Su)(0) \leq n + u(0)$, a kako je $u+n$, $u-n$ i Su rješenje od (2.1) kada je u rješenje od (2.1) to predhodonoj lemi postoji $\delta' > 0$ takav da $-n + u(t) \leq (Su)(t) \leq n + u(t)$ za svaki $t \in [0,\delta']$ no tada je $u(t) \in K_n$ za sve $t \in [0,\delta']$. Po dokazu predhodne leme slijedi $-n + u(\delta') \leq (Su)(\delta') \leq n + u(\delta')$.

Primjenom predhodne leme na $t_0 = \delta'$ dobivamo da je $u(t) - n \leq Su(t) \leq u(t) + n$ za sve $t \in [\delta', 2\delta']$. Argumentom kompaktnosti dolazimo do tvrdnje da $u(t) \in K_n$ za svaki $t \in [0,\delta]$. $\square$

Dokaz teorema 2.19: Neka je $u(0) \leq v(0)$ i neka $u(t)$ i $v(t)$ postoje za sve $t \in [0,\delta]$ tada po predhodnom korolaru imamo $u(0), v(0) \in K_n \Rightarrow u(t), v(t) \in K_n$ za $t \in [0,\delta]$. Sada po predhodnoj lemi postoji $\delta' > 0$ takav da je $u(t) \leq v(t)$ za svaki $t \in [0,\delta']$ no tada je $u(\delta') \leq v(\delta')$. Iz dokaza predhodne leme vidimo da za isti δ' vrijedi $u(t) \leq v(t)$ za svaki $t \in [\delta', 2\delta']$. Nastavimo li tako, dobivamo da $u(t) \leq v(t)$ za svaki $t \in [0,\delta]$. $\square$

Dokaz teorema 2.2: Neka je $u \in C([0,\delta), K_n)$ rješenje od (2.1) na maksimalnom intervalu $[0,\delta)$ tada definiramo $\tilde{u} \in C([0,\delta), \mathcal{K}_n)$. Kako je produktna topologija po dokazu leme 2.7 jednaka topologiji induciranoj normom $\|.\|_\lambda$ to je $(\mathcal{K}_n, \|.\|_\lambda)$ kompaktan prostor. Pretpostavimo da $\lim_{t\to\delta-} \tilde{u}(t)$ ne postoji. Kako je $\mathcal{K}_n$ kompaktan, tada postoje nizovi $t_k \to \delta$ i $t_l \to \delta$ takvi da

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{u}(t_k) \neq \lim_{l\to\infty} \tilde{u}(t_l).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ norma razlike ta dva limesa. Kako je $\tilde{u}\colon [0,\delta) \to \mathcal{K}_n$ neprekidno to je povratna slika kugle oko prvog limesa radiusa $\varepsilon/2$ otvoren skup u $[0,\delta)$ te vrijedi isto za drugi limes. Te povratne slike sadrže skupove (δ_1,δ) i (δ_2,δ). No to je kontradicija jer bi trebale biti disjunktne pa vidimo da su ti limesi jednaki. Dakle $\lim_{t\to\delta-} \tilde{u}(t)$ postoji pa se rješenje može proširiti i izvan intervala $[0,\delta)$. Kako je $\tilde{u}$ neprekidno imamo da se i u može proširiti, no tada se rješenje može proširiti na cijeli $[0,\infty)$.

Kako je u lokalno klase C^1 u svakoj koordinati tada je i globalno klase C^1 u svakoj koordinati. $\square$

Lema 2.22. *(Gronwallova nejednakost) Neka su* $A\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *i* $B\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ *neprekidne. Neka je* $\psi(t) \leq A(t) + \int_0^t B(s)\psi(s)ds$ *za* $t \in [0,T]$ *gdje je* $B(t) \geq 0$ *za* $t \in [0,T]$*, te neka je* $t \mapsto A(t)$ *rastuća na* $[0,T]$ *tada je* $\psi(t) \leq A(t)\exp(\int_0^t B(s)ds)$ *za* $t \in [0,T]$.

Dokaz: Definiramo $v(t) = \exp(-\int_0^t B(s)ds) \int_0^t B(s)\psi(s)ds$ tada

$$v'(t) = (\psi(t) - \int_0^t B(s)\psi(s))B(t)\exp(-\int_0^t B(s)ds)$$

$$\leq A(t)B(t)\exp(-\int_0^t B(s)ds).$$

Kada to integriramo i iskoristimo da je $A(s) \leq A(t)$ dobijemo

$$v(t) \leq A(t)\int_0^t B(s)\exp(-\int_0^s B(\tau)d\tau)ds,$$

pa nakon dijeljenja s $\exp(-\int_0^t B(s)ds)$ slijedi

$$\int_0^t \psi(s)B(s) \leq A(t)\int_0^t (B(s)\exp(\int_s^t B(\tau)d\tau))ds.$$

Primjetimo da je primitivna funkcija od

$$s \mapsto B(s)\exp(\int_s^t B(\tau)d\tau)$$

dana sa

$$s \mapsto -\exp(\int_s^t B(\tau)d\tau),$$

pa slijedi

$$\int_0^t \psi(s)B(s)ds \leq A(t)(-\exp(\int_s^t B(\tau)d\tau))\Big|_{s=0}^{s=t},$$

tako da

$$\psi(t) \leq A(t) + \int_0^t \psi(s)B(s)ds \leq A(t) + A(t)(-\exp(0) + \exp(\int_0^t B(s)ds))$$

$$= A(t)\exp(\int_0^t B(s)ds).$$

Time je lema dokazana. $\square$

Lema 2.23. *Rješenje od* (2.1) *ovisi neprekidno o početnim uvjetima u topologiji induciranoj* λ*-normom.*

Dokaz: Neka su $u(0), v(0) \in K_n$. Kako imamo

$$\|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|_\lambda \leq M_n \|u(t) - v(t)\|_\lambda$$

te ako se sjetimo da za u rješenje (2.1) vrijedi

$$u_j(t) = u_j(0) + \int_0^t f_j(s, u(s))ds$$

to imamo

$$\|u(t) - v(t)\|_\lambda \leq \|u(0) - v(0)\|_\lambda + \int_0^t M_n \|u(s) - v(s)\|_\lambda ds.$$

Po lemi 2.22 imamo

$$\|u(t) - v(t)\|_\lambda \leq \|u(0) - v(0)\|_\lambda e^{M_n t}.$$

Dakle rješenja ovise neprekidno o početnim uvjetima. $\square$

2.5. Postojanje polutoka i lokalnog toka

Znamo da je rješenje od (2.1) za svaki početni uvijet $u(0) = u_0$ neprekidno u prostoru i vremenu. No vrijedi i više. Naime, rješenje od (2.1) definira polutok i lokalan tok. Slijede defincije.

Definicija 2.24. Neka je K metrički prostor. Neprekidan polutok je neprekidno preslikavanje $\varphi\colon [0, +\infty) \times K \to K$ takvo da

(P1) $\varphi(t, \varphi(s, u)) = \varphi(t + s, u)$, za $t, s \geq 0$ i $u \in K$

(P2) $\varphi(0, u) = u$ za $u \in K$.

Definicija 2.25. Neka je X metrički prostor. Neprekidan lokalan tok je neprekidno preslikavanje $\varphi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ gdje $\tilde{X} = \bigcup_{u \in X} (-\delta_1(u), \delta_2(u)) \times \{u\}$ gdje $\overline{\mathbb{R}} \ni \delta_i(u) > 0$ za $i = 1, 2$ ovisi o $u \in X$ takvo da

(L1) $\varphi(t, \varphi(s, u)) = \varphi(t + s, u)$ za $-\delta_1(u) < t, s, t + s < \delta_2(u)$ i $u \in X$

(L2) $\varphi(0, u) = u$ za $u \in X$.

Neka je $u_0 \in K_n$. Definiramo $\varphi(t, u_0) = u(t)$ gdje je u rješenje (2.1) takvo da je $u(0) = u_0$. Na K_n promatramo topologiju induciranu normom $\|.\|_\lambda$. Dokažimo.

Teorem 2.26. *Tako definirano preslikavanje $\varphi\colon [0, \infty) \times K_n \to K_n$ je neprekidan polutok.*

Dokaz: Svojstvo (P2) je očito. Svojstvo (P1) slijedi iz jedinstvenosti rješenja. Neprekidnost u prvoj varijabli slijedi iz teorema 2.2, dok neprekidnost u drugoj varijabli slijedi iz leme 2.23. □

Teorem 2.27. *Na $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ postoji neprekidan lokalan tok φ.*

Dokaz: Po teoremu 2.8 imamo da za svaki $u_0 \in K_n$ postoji $\delta_n > 0$ i jedinstvena funkcija $u\colon (-\delta_n, \infty) \to K_n$ takva da vrijedi (2.1) te da je $u(0) = u_0$. Zbog jedinstvenosti imamo da vrijedi (L1), a očito vrijedi (L2) tako da slijedi tvrdnja teorema. Neprekidnost u prvoj varijabli slijedi iz teorema 2.2, dok neprekidnost u drugoj varijabli slijedi iz leme 2.23. □

2.6. Realna analitičnost rješenja

U ovom potpoglavlju dokazujemo:

Teorem 2.28. *Ako je $\frac{d}{dt}u_j(t) = f(t, u_{j-1}(t), u_j(t), u_{j+1}(t))$, $j \in \mathbb{Z}$ gdje je $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ realno-analitičko preslikavanje tada je $t \mapsto u(t)$ također realano-analitičko preslikavanje u svakoj koordinati za svaki t za koji je $u(t)$ definirano.*

Definicija 2.29. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Neka je $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^∞ tada kažemo da je u realno-analitičko oko $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \Omega$ ukoliko

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha u(a)$$

za sve $x = (x_1, \ldots, x_d) \in U$, gdje je U neka otvorena okolina od a. Koristili smo oznake

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$$
$$(x-a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x_d - a_d)^{\alpha_d}$$
$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_d!$$
$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d}.$$

Promatramo
$$\frac{d}{dt}u_j(t) = f_j(t, u_{j-1}(t), u_j(t), u_{j+1}(t))$$
gdje je
$$f_j(t,u) = -V_2(u_{j-1}, u_j, t) - V_1(u_j, u_{j+1}, t),$$
a V zadovoljava $(V1) - (V4)$. Pretpostavimo da je V klase C^∞ tada kako je rješenje u u svakoj koordinati klase C^1 imamo da je u zapravo u svakoj koordinati klase C^2 itd. Dakle u je u svakoj koordinati klase C^∞. Pokazat ćemo preko propozicije da ako je V povrh svega i realno-analitičko tada je u realno-analitičko u svakoj koordinati.

Prvo ćemo dati nužan i dovoljan uvjet da funkcija klase C^∞ bude realno-analitička.

Propozicija 2.30. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Funkcija $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je realno analitička u okolini od $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \Omega$ ako i samo ako postoje realni brojevi $M > 0$ i $r > 0$ takvi da $|\partial^\alpha u(x)| \leq M\frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}$ za sve $\|x-a\| < r$ gdje je $\|x - a\| = \max\{|x_i - a_i| : i = 1, \ldots, d\}$.*

Dokaz: Ako je u analitička u $a \in I$, tada postoji $r > 0$ takav da
$$u(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha u(a)$$
konvergira za $\|h\| < r$. Dakle postoji $M > 0$, takav da je
$$\frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}|\partial^\alpha u(x)| \leq M$$
za $\|x - a\| < r$ pa imamo nužnost. Pokažimo dovoljnost. Pretpostavimo da postoje takvi brojevi i uzmimo $\|x-a\| < r$. Neka je $h = (h_1, \ldots, h_d) = x - a$ tada postoji $\gamma \in [0,1]$ takva da
$$R_p(h) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha u(a + \gamma h).$$
Stavimo $|h| = (|h_1|, \ldots, |h_d|)$ pa ocijenimo
$$|R_p(h)| = \left| \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial^\alpha u(a+\gamma h)\left(\frac{h}{r}\right)^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha|=p+1} M \left(\frac{|h|}{r}\right)^\alpha.$$

Pokažimo da $\lim_{p\to\infty} R_p(h) = 0$. Primjetimo da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n} M\left(\frac{|h|}{r}\right)^{\alpha} = M\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_d=0}^{\infty}(|h_1|/r)^{\alpha_1}\dots(|h_d|/r)^{\alpha_d} =$$

$$= M\frac{1}{1-\frac{|h_1|}{r}}\cdots\frac{1}{1-\frac{|h_d|}{r}} < \infty.$$

Kako se radi o konvergentnom redu imamo da $n+1$ član ide u 0 no tada $\lim_{p\to\infty} R_p(h) = 0$ pa je funkcija realno-analitička. $\square$

Odmah slijedi lagan korolar.

Korolar 2.31. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Neka je $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞. Dovoljan uvjet da funkcija u bude realno-analitička na nekoj okolini U od točke $a \in \Omega$ je da na toj okolini postoji realno-analitička funkcija $v\colon U \to \mathbb{R}$ takva da je $|\partial^\alpha u(x)| \leq \partial^\alpha v(x)$ za svaki $x \in U$.*

Dokaz: Ocjena iz propozicije 2.30 koja je dobra za v dobra je i za u pa tvrdnja slijedi. $\square$

Dokaz teorema 2.28: Stavimo $f_j(t,u) = f(t,u_{j-1},u_j,u_{j+1})$. Budući je f_j realno-analitička to imamo

$$f_j(t,u_{j-1},u_j,u_{j+1}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n}\frac{\partial^\alpha f_j(0,0,0,0)}{\alpha!}t^{\alpha_1}u_{j-1}^{\alpha_2}u_j^{\alpha_3}u_{j+1}^{\alpha_4}$$

za $\|(t,u_{j-1},u_j,u_j)\| < \varepsilon$, gdje je $\varepsilon > 0$ dovoljno malen da gornji red konvergira.

Kako je

$$|\partial^\alpha f_j(0,0,0,0)| = |\partial^\alpha f(0,0,0,0)| \leq M\frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}},$$

stoga za $0 \leq t, u_{j-1}, u_j, u_{j+1} < \varepsilon$ vrijedi:

$$0 \leq |\partial^\beta f_j(t,u_{j-1},u_j,u_{j+1})| \leq \partial^\beta \sum_{i=1}^{4}\sum_{\alpha_i=0}^{\infty}\frac{M}{r^{|\alpha|}}t^{\alpha_1}u_{j-1}^{\alpha_2}u_j^{\alpha_3}u_{j+1}^{\alpha_4} =$$

$$= \partial^\beta F_j(t,u_{j-1},u_j,u_{j+1})$$

gdje je

$$F_j(t,u_{j-1},u_j,u_{j+1}) = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{r}\right)\left(1-\frac{u_{j-1}}{r}\right)\left(1-\frac{u_j}{r}\right)\left(1-\frac{u_{j+1}}{r}\right)}.$$

Neka je $u_j'(t) = f_j(t, u(t))$. Tada postoji polinom s pozitivnim koeficijentima $Q_{j,k}$ takav da je

$$u_j^{(k)}(t) = Q_{j,k}(\partial^\beta f(t, u(t)), u'(t), \ldots, u^{(k-1)}(t)),$$

gdje je $\partial^\beta f(t, u(t))$ pokrata za $\{\partial^\beta f_j(t, u(t)) : j \in \mathbb{Z}, |\beta| \leq k-1\}$, te gdje je $u^{(l)}(t)$ pokrata za $\{u_j^{(l)}(t) : j \in \mathbb{Z}\}$. Kako je $Q_{j,k}$ polinom s pozitivnim koeficijentima, to imamo

$$|u_j^{(k)}(t)| \leq Q_{j,k}(|\partial^\beta f(t, |u(t)|)|, |u'(t)|, \ldots, |u^{(k-1)}(t)|).$$

Promatramo sustav

$$U_j'(t) = F_j(t, U_{j-1}, U_j, U_{j+1}), \qquad U_j(0) = \varepsilon + u_j(0) \qquad j \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

Tada

$$U_j^{(k)}(t) = Q_{j,k}(\partial^\beta F(t, U(t)), U'(t), \ldots, U^{(k-1)}(t)).$$

Tvrdimo: ako je $U_j(t) \geq |u_j(t)|$ za $j \in \mathbb{Z}$, tada za svaki $k = 0, 1, \ldots$ vrijedi $U_j^{(k)}(t) \geq |u_j^{(k)}(t)|$ za $j \in \mathbb{Z}$. Dokažimo to indukcijom. Kako

$$U_j'(t) = F_j(t, U(t)) \geq |f_j(t, |u(t)|)| \geq |f_j(t, u(t))| = |u_j'(t)|$$

vrijedi tvrdnja za $k = 0, 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = 0, \ldots, n$. Kako je $Q_{j,n+1}$ polinom s pozitivnim koeficijentima i kako je $|\partial^\beta f_j(t, |u(t)|)| \leq \partial^\beta F_j(t, U(t))$ to imamo

$$U_j^{(n+1)}(t) = Q_{j,n+1}(\partial^\beta F(t, U(t))), U'(t), \ldots, U^{(n)}(t)) \geq$$

$$\geq Q_{j,n+1}(|\partial^\beta f(t, |u(t)|)|, |u'(t)|, \ldots, |u^{(n)}|) \geq |u_j^{(n+1)}(t)|.$$

Kako je $u_j(0) = 0$ i sustav (2.3) ima realno-analitičko rješenje

$$U_j(t) = r - r\sqrt[4]{4M \ln\left(1 - \frac{t}{r}\right) + (1 - \frac{\varepsilon}{r})^4}, j \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $u_j(0) = 0$ i kako je $u_j(t)$ uniformno u $j \in \mathbb{Z}$ neprekidna jer je $u(t)$ neprekidna u $\|.\|_\infty$ normi to imamo da za $\delta > 0$ dovojno malen na $(-\delta, \delta)$ vrijedi $|u_j(t)| \leq U_j(t)$. No tada je $|u_j^{(k)}(t)| \leq U_j^{(k)}(t)$ na $(-\delta, \delta)$. Slijedi da je u_j realno-analitička na $(-\delta, \delta)$. Malom modifikacijom dokaza dobivamo da za svaki t iz domene od u_j postoji $\delta_t > 0$ takav da je u_j realno-analitička na $(t - \delta_t, t + \delta_t)$. No tada je u_j realno-analitička na svojoj domeni. $\square$

Jednostavna posljedica predhodnog teorema je teorem 2.3.

3. Prostorno vremenska invarijantna mjera

U prvom potpoglavlju definiramo sinkronizirano rješenje i pokazujemo da sinkronizirano rješenje ima dobro definiran prosječan razmak.

U drugom potpoglavlju dokazujemo da za svaki prosječan razmak postoji sinkronizirano rješenje s tim prosječnim razmakom.

U trećem i četvrtom potpoglavlju promatramo razlike dvaju rješenja dinamike (2.1). Promatramo prostorno invarijantne Borelove vjerojatnostne mjere i promatramo funkciju koja mjeri prosjek presijecanja konfiguracija iz nosača dvaju takvih mjera. Dokazujemo da je ta funkcija nerastuća i da strogo pada u slučaju netransverzalnog presjeka.

U petom potpoglavlju definiramo prostorno-vremenski invarijatne mjere, slabi ω-granični skup i prostorno-vremenski atraktor kao uniju slabih ω-graničnih skupova.

U šestom potpoglavlju definiramo slobodnu i zapinjajuću fazu.

U prvom poglavlju definirali smo parcijalne uređaje na prostoru konfiguracija: $u \leq v$, $u < v$ i $u \ll v$ te prostorni pomak $S_{m,n}$.

Propozicija 3.1. *Rješenja* (2.1) *komutiraju s* $S_{m,n}$ *točnije ako je* $t \mapsto u(t)$ *rješenje* (2.1) *onda je i* $t \mapsto S_{m,n}u(t)$ *rješenje* (2.1).

Dokaz: Najprije pretpostavimo da za svaki $j \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\frac{d}{dt}u_j = -V_2(u_{j-1}, u_j, t) - V_1(u_j, u_{j+1}, t).$$

Tada ta jednakost vrijedi i za $j - m$, a kako je $V(u, v, t) = V(u+1, v+1, t)$, to za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\frac{d}{dt}(u_{j-m} + n) = -V_2(u_{j-1-m} + n, u_{j-m} + n, t) - V_1(u_{j-m} + n, u_{j-m+1} + n, t).$$

Dakle tvrdnja slijedi. $\square$

Definicija 3.2. Za konfiguraciju $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ kažemo da je slabo rotacijski uređena ako za proizvoljne $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $S_{m,n}u \leq u$ ili $u \leq S_{m,n}u$. Nadalje, kažemo da je rotacijski uređena ako za proizvoljne $m, n \in \mathbb{Z}$ imamo $S_{m,n}u \ll u$ ili $S_{m,n}u = u$ ili $u \ll S_{m,n}u$.

Prisjetimo se da se dvije različite konfiguracije u i v sijeku ukoliko je $(u_{j+1} - v_{j+1})(u_j - v_j) \leq 0$ za neki $j \in \mathbb{Z}$.

Propozicija 3.3. *Ili se $S_{m,n}u$ i u sijeku za neke $m, n \in \mathbb{Z}$ ili je u rotacijski uređena.*

Dokaz: Ako je u rotacijski uređena tada se očito $S_{m,n}u$ i u ne sijeku ni za koji $m, n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Definiramo $S_m \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sa $(S_m u)_j = u_{j-m}$ te $T_1 \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sa $T_1(u) = \varphi(T, u)$ gdje je $T > 0$ temeljni period sustava (2.1), a φ polutok dinamike (2.1). Stavimo $T_n = T_{n-1} \circ T_1$. Tada S_m i T_n komutiraju s rješenjima (2.1). Za vjerojatnostnu Borelovu mjeru μ na prostoru konfiguracija s obzirom na λ-topologiju kažemo da je S, T-invarijantna ukoliko $S_* \mu = \mu$ i $T_* \mu = \mu$, gdje je $S = S_1$ i $T = T_1$.

3.1. Definicija i primjer sinkroniziranih rješenja

Definiramo sinkronizirana rješenja i prosječan razmak i dokazujemo da sinkronizirano rješenje u svakom trenutku ima isti prosječan razmak.

Definicija 3.4. Kažemo da je rješenje u (2.1) sinkronizirano ukoliko postoji za sve trenutke $t \in \mathbb{R}$ i ako se $S_{m,n}u(t + l)$ i $u(t)$ ne sijeku za svaki $t \in \mathbb{R}$ i svake $m, n, l \in \mathbb{Z}$.

Definicija 3.5. Konfiguracija $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ima prosječan razmak $\rho(u)$ ukoliko postoji limes

$$\rho(u) = \lim_{|j-i| \to \infty} \frac{u_j - u_i}{j - i}.$$

Dokazujemo preko lema 3.9 i 3.10:

Propozicija 3.6. *Ako je u sinkronizirano rješenje. Tada $\rho(u(t))$ postoji i ne ovisi o $t \in \mathbb{R}$.*

Navedimo prvo primjer:

Primjer 3.7. Neka je $V = V(u, v)$ klase C^2 koja zadovoljava (H1)-(H4) iz potpoglavlja 1.2. Promatramo konfiguracije minimalne energije od

$$\frac{d}{dt} u_j(t) = -V_2(u_{j-1}(t), u_j(t)) - V_1(u_j(t), u_{j+1}(t)).$$

Kako Aubry-Matherova teorija, točnije teorem 1.14 kaže da se nikoja dva prostorna translanta konfiguracija minimalne energije ne sijeku, a konfiguracije minimalne energije su konstantne u vremenu imamo primjer sinkroniziranih rješenja.

Lema 3.8. *Limes* $\lim\limits_{|i|\to\infty} \frac{u_i}{i}$ *postoji ako i samo ako postoji limes* $\lim\limits_{|j-i|\to\infty} \frac{u_j-u_i}{j-i}$ *i tada su jednaki.*

Dokaz: Jasno je ako vrijedi desna strana tada možemo staviti $i = 0$ pa slijedi i lijeva strana. Obrnuto, ako vrijedi lijeva strana, tada napišimo

$$\frac{u_j - u_i}{j - i} = \frac{u_j}{j}\frac{j}{j-i} + \frac{u_i}{i}\frac{-i}{j-i},$$

pa vrijedi i desna strana. □

Lema 3.9. *Neka je* $u(t)$ *sinkronizirano rješenje. Tada za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *postoji* $\omega(t) \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\omega(t) = \rho(u(t))$.

Dokaz: Fiksiramo $t \in \mathbb{R}$ i stavimo $u = u(t)$ pa definiramo

$$A(u) = \left\{\frac{p}{q} : S_{q,p}u \ll u, q > 0\right\},$$

$$B(u) = \left\{\frac{p}{q} : S_{q,p}u \gg u, q > 0\right\}.$$

Imamo za svaki $p/q \in \mathbb{Q}$ da je $p/q \in A(u)$ ili $p/q \in B(u)$ ili $S_{q,p}u = u$. Dokažimo ako je $p'/q' \geq p/q$ tada

$$p'/q' \in A(u) \Rightarrow p/q \in A(u),$$

$$p/q \in B(u) \Rightarrow p'/q' \in B(u).$$

Pretpostavimo da je $p'/q' \in A(u)$ to jest $S_{q',p'}u \ll u$. Slijedi

$$S^q_{q',p'}u = S_{qq',qp'}u \ll u.$$

Iz relacije $p/q \leq p'/q'$ slijedi $pq' \leq p'q$ pa iz toga i definicije od S slijedi

$$S_{qq',pq'}u \ll u.$$

Ne može biti $S_{q,p}u = u$ ili $S_{q,p}u \gg u$, pa mora biti $S_{q,p}u \ll u$. Tada $p/q \in A(u)$. Pretpostavimo da je $p/q \in B(u)$ to jest $S_{q,p}u \gg u$. Imamo

$$S^{q'}_{q,p}u = S_{q'q,q'p}u \gg u.$$

Iz relacije $p/q \leq p'/q'$ slijedi $pq' \leq p'q$. Iz toga i definicije od S slijedi

$$S_{q'q,p'q}u \gg u.$$

Ne može biti $S_{q',p'}u = u$ ili $S_{q',p'}u \ll u$, pa mora biti $S_{q',p'}u \gg u$ no tada $p'/q' \in B(u)$.

Definiramo $\rho(u) = \inf B(u) = \sup A(u)$. Dokažimo da za $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$|u_n - u_m - (n-m)\rho(u)| < 1.$$

Pretpostavimo da je $n > m$ i definiramo $q = n - m$ i neka je p najmanji cijeli broj strogo veći od $\rho(u)q$. Tada je $p/q > \rho(u)$ te imamo da je $p/q \in B(u)$ i $S_{q,p}u \gg u$. Stoga vrijedi

$$u_n < (S_{q,p}u)_n = u_{n-(n-m)} + p \leq u_m + (n-m)\rho(u) + 1$$

to jest

$$u_n - u_m - (n-m)\rho(u) < 1.$$

Neka je p najveći cijeli broj strogo manji od $\rho(u)q$. Tada je $p/q < \rho(u)$. Imamo da je $p/q \in A(u)$ i $S_{q,p}u \ll u$. Stoga vrijedi

$$u_n > (S_{q,p}u)_n = u_{n-(n-m)} + p \geq u_m + (n-m)\rho(u) - 1$$

To jest

$$u_n - u_m - (n-m)\rho(u) > -1,$$

što zajedno daje

$$|u_n - u_m - \rho(u)(n-m)| < 1.$$

Time je lema dokazana. $\square$

Lema 3.10. *Neka je u sinkronizirano rješenje. Tada je preslikavanje $t \mapsto \rho(u(t))$ diferencijabilno.*

Dokaz: Kako imamo da $\rho(u(t))$ postoji tada je $u(t) \in K_n$ za dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$. Po definiciji je $\rho(u(t)) = \lim_{|j|\to\infty} u_j(t)/j$ pa tada

$$\frac{d}{dt}\rho(u(t)) = \lim_{|j|\to\infty} \dot{u}_j(t)/j = \rho(\dot{u}(t)) = \rho(f(t, u(t))).$$

Kako je $u(t) \in K_n$ to imamo da postoji $N_n > 0$ takav da je $|f_j(t, u(t))| \leq N_n$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Tada $\rho(f(t, u(t))) = 0$ te smo pokazali da je $t \mapsto \rho(u(t))$ diferencijabilno. Time je lema dokazana. $\square$

Dokaz teorema 3.6: Primjetimo da iz leme 3.10 odmah slijedi da je $\rho(u(t))$ konstanta jer je $\frac{d}{dt}\rho(u(t)) = 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. $\square$

3.2. Postojanje sinkroniziranih rješenja

Dokazujemo da postoje sinkronizirana rješenja. Potpoglavlje prati i prilagođuje tehniku Wen-Xin Qina [36]. Dokazujemo

Teorem 3.11. *Za svaki $\omega \in \mathbb{R}$ postoji bar jedno sinkronizirano rješenje u dinamike* (2.1)*, takvo, da je prosječan razmak $\rho(u(t)) = \omega$ za sve $t \in \mathbb{R}$.*

Najprije ćemo dokazati da je sustav (2.1) strogo monoton. Zatim ćemo uvesti pojam uređenog kruga i strogo uređenog kruga i dokazati da za svaki realni broj postoji strogo uređen krug s tim brojem kao prosječnim razmakom. Vidjet ćemo da je skup strogo uređenih krugova s fiksnim brojem za prosječan razmak nizovno kompaktan iz čega odmah slijedi postojanje sinkroniziranoga rješenja.

Prisjetimo se da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Neka $\varphi(t, t_0)u$ označava rješenje sa početnom vrijednošću $u \in X$ u $t = t_0$, te neka je $\varphi_T = \varphi(T, 0)$ Poincaréovo preslikavanje dinamike (2.1). Kažemo da je sustav (2.1) monoton ukoliko $u \leq v$ povlači $\varphi(t, t_0)u \leq \varphi(t, t_0)v$ za svaki $t > t_0$ za koje su definirane obije strane nejednakosti. Strogo je monoton ukoliko $u < v$ povlači $\varphi(t, t_0)u \ll \varphi(t, t_0)v$ za svaki $t > t_0$ za koje su definirane obje strane nejednakosti.

Lema 3.12. *Sustav* (2.1) *je strogo monoton.*

Dokaz: Neka je $u \in C([0, \delta], K_n)$. Promatramo sustav $\dot{\xi}(t) = A(t, u(t))\xi(t)$. Za $\mu > 0$ definiramo $\gamma(t) = e^{t\mu}\xi(t)$. Tada je $\dot{\gamma}(t) = B(t, u(t))\gamma(t)$ gdje je $\mu > 0$ dovoljno velik da je $B(t, u(t)) = A(t, u(t)) + \mu Id$ strogo pozitivna u smislu da postoji $D > 0$ takav da $B(t, u(t))_{ij} \geq D$ za sve $|i - j| \leq 1$ i $B(t, u(t))_{ij} = 0$ za $|i - j| > 1$ i sve $t \in [0, \delta]$.

Promatramo Picardove iteracije na $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$\gamma^{n+1}(t) = \gamma(0) + \int_0^t B(s, u(s))\gamma^n(s)ds, \quad \gamma^0(t) = \gamma(0).$$

Kako postoji $i \in \mathbb{Z}$ takav da je $\gamma_i^0(t) > 0$ to je indukcijom $\gamma_j^n(t) > 0$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$ takav da $|i - j| \leq n$ i $t > 0$ dakle imamo da je tada $0 \ll \gamma(t)$ za $t > 0$. Prema tome $0 \ll \xi(t)$ za $t > 0$. Neka je $u^\lambda(0) = (1 - \lambda)u(0) + \lambda v(0)$ za $\lambda \in [0, 1]$ i neka je u^λ jednako rješenju od (2.1) uz početni uvijet jednak $u^\lambda(0)$. Definiramo $\xi^\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}u^\lambda(t)$, tada je $\frac{d}{dt}\xi^\lambda(t) = A(t, u^\lambda(t))\xi^\lambda(t)$. Kako je $\xi^\lambda(0) = v(0) - u(0) > 0$ to imamo $0 \ll \xi^\lambda(t)$ prema tome $u(t) \ll u(t) + \int_0^1 \xi^\lambda(t)d\lambda = v(t)$. $\square$

Primjetimo da $\varphi(t, t_0)$ i $S_{m,n}$ komutiraju to jest za $u \in X$

$$S_{m,n}\varphi(t, t_0)u = \varphi(t, t_0)S_{m,n}u. \tag{3.1}$$

Promatramo prostorno periodične konfiguracije koje zadovoljavaju

$$u_{j+q} = u_j + p. \tag{3.2}$$

Definiramo:

$X_{p,q} = \{u \in X : u_{j+q} = u_j + p\}$

$X_\omega = \{u \in X : \sup_m |u_m - m\omega| < \infty\}$

$n^+(m) = \inf\{n \in \mathbb{Z} : S_{m,n}u \geq u\}$

$n^-(m) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : S_{m,n}u \leq u\}$

$w(u) = \sup\{n^+(m) - n^-(m) : m \in \mathbb{Z}\} \in [0, \infty]$.

Lema 3.13. *Neka je $u \in X$. Tada imamo $w(u) \leq 1$ ako i samo ako za svaki $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $S_{m,n}u \leq u$ ili $S_{m,n}u \geq u$.*

Dokaz: Ako je $w(u) \leq 1$ to znači da $n^+(m) - n^-(m) \leq 1$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$. Tada $S_{m,n}u \geq u$ ukoliko $n \geq n^+(m)$ i $S_{m,n}u \leq u$ ukoliko $n \leq n^-(m)$ no uvijek je $n \geq n^+(m)$ ili $n \leq n^-(m)$ jer je njihova razlika 1.

Obrnuto ako $S_{m,n}u \leq u$ ili $S_{m,n}u \geq u$ za svaki $m, n \in \mathbb{Z}$ tada $n^+(m) - n^-(m) \leq 1$. Pa je lema dokazana. □

Lema 3.14. *Za rješenje u (2.1) takvo da $u(0) = u_0 \in X$ i $w(u_0) < \infty$ imamo $w(u(t)) \leq w(u_0)$.*

Dokaz: Znamo da za svaki $m \in \mathbb{Z}$ postoje $n^+(m)$ i $n^-(m)$ takvi da $n^+(m) - n^-(m) \leq w(u)$. Kako

$$S_{m,n^-(m)}u \leq u \leq S_{m,n^+(m)}u$$

i kako $\varphi(t, 0)$ komutira sa $S_{m,n}$, to vrijedi

$$S_{m,n^-(m)}u(t) \leq u(t) \leq S_{m,n^+(m)}u(t)$$

to jest $w(u(t)) \leq w(u(0))$. □

U potpoglavlju 2.1. definirali smo X^1_ω, $X^1_{[a,b]}$. Sada definiramo:

$$X^1_{p,q} = X^1_{p/q} \cap X_{p,q}$$

Lema 3.15. *Neka je $\omega \in \mathbb{R}$ tada $\varphi_t X^1_\omega \subseteq X^1_\omega$.*

Dokaz: Neka je $|u_{j+m} - u_j - m\omega| \leq 1$ tada je

$$u_{j+m} - m\omega - 1 \leq u_j \leq u_{j+m} - m\omega + 1$$

tako da je

$$w(u) \leq \lceil 1 - m\omega \rceil - \lfloor -1 - m\omega \rfloor \leq 3.$$

Prvo pretpostavimo da je ω iracionalan i uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Želimo pokazati da ako $|u_{j+m}(t) - u_j(t) - m\omega|$ nije manje od $1+\varepsilon$, da tada $w(u(t)) \geq 4$ što je kontradikcija. Neka je k takav da je $m\omega + \varepsilon > k$ i $m\omega - \varepsilon > k - 1$. Takvi k i m postoje jer je ω iracionalan. No tada je $w(u(t)) \geq 4$. Dakle zaključujemo da $u(t) \in X^1_\omega$.

Pokažimo to za racionalni ω. Neka je $(\omega_k)_k$ niz iracionalnih brojeva koji konvergiraju k racionalanom ω. Neka je $u \in X^1_\omega$ proizvoljan i neka je $(u^k)_k$ niz iz $X^1_{[a,b]}$ takav da je $u^k \in X^1_{\omega_k}$ i takav da $u^k \to u$. Uzmimo na primjer $u^k_j = u_j + j(\omega_k - \omega)$. Kako imamo da $\|u^k - u\|_\lambda \to 0$ tada zbog neprekidnosti rješnja od (2.1) o početnim uvjetima vrijedi $u^k_j(t) \to u_j(t)$ za sve $j \in \mathbb{Z}$ no kako $|u^k_{j+m}(t) - u^k_j(t) - m\omega_k| \leq 1$ za $t > 0$ to imamo $|u_{j+m}(t) - u_j(t) - m\omega| \leq 1$. Time je lema dokazana. $\square$

Sjetimo se da je uRv ukoliko postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da $u_j - v_j = m$ za $j \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.16. *Prostor $X^1_{[a,b]}/R$ je kompaktan.*

Dokaz: Kako je $X^1_{[a,b]} \subseteq K_n$ za proizvoljan $n \geq 1 + \max\{|a|, |b|\}$ to imamo da je $X^1_{[a,b]}/R \subseteq K_n/R = \mathcal{K}_n$ Kako je $(\mathcal{K}_n, \|.\|_\lambda)$ kompaktan dovoljno je dokazati da je $X^1_{[a,b]}/R$ zatvoren.

Neka je u^k niz u $X^1_{[a,b]}/R$ takav da konvergira prema $u \in \mathcal{K}_n$. Imamo da je $|u^k_m - u^k_n - \omega_k(m-n)| \leq 1$ gdje je $\omega_k \in [a,b]$ tada kako je $[a,b]$ kompaktan to postoji podniz $\omega_{n_k} \to \omega$ imamo da je $\omega \in [a,b]$ i $u^{n_k} \to u$ tako da je $|u_m - u_n - \omega(m-n)| \leq 1$ pa je $u \in X^1_\omega$. Time je lema dokazana. $\square$

Definiramo Hausdorffovu metriku

$$d(A,B) = \sup\{d(x,B) : x \in A\} + \sup\{d(A,y) : y \in B\}$$

Lema 3.17. *Hausdorffova metrika na zatvorenim skupovima kompaktnog prostora definira kompaktnu topologiju.*

Dokaz: [29 lema 13.2.2] $\square$

Definicija 3.18. Sliku ℓ neprekidne funkcije $h\colon \mathbb{R} \to X$ zovemo uređen krug (UK) ukoliko $h(s_1) < h(s_2)$ za $s_1 < s_2$ i $h(s+1) = h(s)+1$ te zovemo strogo uređen krug ukoliko $h(s_1) \ll h(s_2)$ za $s_1 < s_2$. Kažemo da je UK ℓ invarijantan za grupu transformacija $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ ukoliko za sve $\alpha \in A$ imamo $T_\alpha \ell = \ell$.

Posebno $T_\alpha\colon \ell \to \ell$ je surjekcija za sve $\alpha \in A$. Definiramo $\varphi_T = \varphi(T, 0)$.

Lema 3.19. *Preslikavanje $\varphi_T\colon K_n \to K_n$ je injekcija.*

Dokaz: Slijedi iz jedinstvenosti lokalnog rješenja (teorem 2.8). $\square$

Koji put zlorabimo terminologiju te kažemo da je h UK gdje je zapravo $\ell = h(\mathbb{R})$ UK. Definiramo za fiksne $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\Omega = \{h\colon \mathbb{R} \to X^1_{p,q} : h \text{ je UK }, \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} h_j(s) = s, s \in \mathbb{R} \text{ inv. za } \{S_{m,n}\}\}. \tag{3.3}$$

Skup Ω je neprazan jer primjerice $h \in \Omega$ gdje

$$h_j(s) = s + j\frac{p}{q} - \frac{p(q+1)}{2q}, s \in \mathbb{R}.$$

Tada $\ell = \{(h_j(s))_j : s \in \mathbb{R}\}$ je UK invarijantan za $\{S_{m,n}\}$ jer $S_{m,n}h(s) = h(s + mp/q + n)$. Također imamo $\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} h_j(s) = s$ za svaki $s \in \mathbb{R}$.

Uvodimo na Ω metriku. Definiramo prvo

$$\|u\| = |u_1| + \cdots + |u_q|,$$

pa za $h \in \Omega$ stavimo

$$|||h||| = \sup_{s\in[0,1]} \|h(s)\|,$$

te

$$d(h, g) = |||h - g|||.$$

Tada je (Ω, d) metrički prostor, jer neka $d(h, g) = 0$ tada $h = g$ na $[0, 1]$ no tada iz definicije od Ω imamo $h = g$ na $\mathbb{R}$. Jasno je da vrijedi nejednakost trokuta. U knjizi [13, teorem 9.62] je dokazan:

Teorem 3.20. *(Arzela-Ascoli) Neka je X kompaktan metrički prostor. Neka je $\Omega \subseteq C(X)$ zatvoren podskup od skupa svih neprekidnih funckija sa X u $\mathbb{R}$ tada je Ω kompaktan ako i samo ako je uniformno omeđen i ekvineprekidan.*

Lema 3.21. *Prostor* (Ω, d) *je kompaktan*

Dokaz: Primjetimo da je $h(s) \in X^1_{p,q}$ te da je tada

$$|h_{j+m}(s) - h_j(s) - mp/q| \leq 1$$

za $m, j \in \mathbb{Z}$ i $s \in \mathbb{R}$ što implicira

$$|h_{j+1}(s) - h_j(s)| \leq 1 + p/q \tag{3.4}$$

te

$$|h_1(s) - h_j(s)| \leq 1 + (j-1)p/q.$$

Za posljedicu imamo

$$|qh_1(s) - (h_1(s) + \cdots + h_q(s))| = |h_1(s) + \cdots + h_1(s) - (h_1(s) + \cdots + h_q(s))| \leq$$

$$|h_1(s) - h_2(s)| + \cdots + |h_1(s) - h_q(s)| \leq q - 1 + \frac{q(q-1)p}{2q}.$$

Stoga

$$|h_1(s) - s| = | \leq \frac{q-1}{q} + \frac{pq(q-1)}{2q^2} \leq 1 + p/2.$$

Tako da dolazimo do

$$\sup_{s \in [0,1]} |h_1(s)| \leq 2 + p/2.$$

Tada iz (3.4) slijedi da postoji $R > 0$ takav da je $\|h(s)\| \leq R$ za svaki $h \in \Omega$ i za svaki $s \in [0,1]$. Pokažimo da je Ω ekvineprekidan. Neka je $h \in \Omega$ tada $h_1(s) + \cdots + h_q(s) = qs$ te su $h_1, \ldots, h_q$ nepadajuće funkcije. Definiramo $\Delta_\rho f(s) = (f(s+\rho) - f(s))/\rho$. Sada imamo da je $\Delta_\rho h_j(s) \geq 0$ za svaki $j = 1, \ldots, q$ i

$$\Delta_\rho h_1(s) + \cdots + \Delta_\rho h_q(s) = q.$$

Slijedi da je $\Delta_\rho h_j(s) \leq q$ za svaki $\rho > 0$ i svaki s. Dakle neka je $t > s$ tada

$$|h_j(t) - h_j(s)| \leq \Delta_{t-s} h_j(s)|t-s| \leq q|t-s|.$$

Tada $\|h(s) - h(t)\| = |h_1(s) - h_1(t)| + \cdots + |h_q(s) - h_q(t)| \leq q^2|t-s|$. Neka je f_n niz u Ω i neka je $\hat{f}_n = f_n|_{[0,1]}$ tada $\|\hat{f}_n(s)\| \leq R$ za svaki $s \in [0,1]$ i $\|\hat{f}_n(s) - \hat{f}_n(t)\| \leq q^2|t-s|$. Po Arzela Ascolijevom teoremu 3.20 za $X = [0,1]$ postoji $\hat{f}$ i podniz $\hat{f}_{n_k} \to \hat{f}$ u normi $|||.|||$. Tada se $\hat{f}_{n_k}$ i $\hat{f}$ proširuje na jedinstven način do funkcije $f_{n_k} \to f$ iz Ω pa je (Ω, d) kompaktan. $\square$

Lema 3.22. *Prostor* Ω *je konveksan.*

Dokaz: Neka su $h_1, h_2 \in \Omega$. Prvo jer su $X_{p,q}$ i $X^1_{p/q}$ konveksni s obzirom na zbrajanje slijedi da je $X^1_{p,q}$ konveksan pa imamo da je $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \colon \mathbb{R} \to X^1_{p,q}$ dobro definirano za $\lambda \in [0,1]$. Neka je $\ell_1 = h_1(\mathbb{R})$ i $\ell_2 = h_2(\mathbb{R})$ tada $S_{m,n}\ell_i = \ell_i$ za $i = 1,2$ no tada je $S_{m,n}(\lambda\ell_1 + (1-\lambda)\ell_2) = \lambda S_{m,n}\ell_1 + (1-\lambda)S_{m,n}\ell_2 = \lambda\ell_1 + (1-\lambda)\ell_2$. Jasno je da

$$\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}(\lambda h_1(s) + (1-\lambda)h_2(s)) = s.$$

Dakle Ω je konveksan. $\square$

Neka je

$$L_q = \{u \in X : \text{ postoji } c \in \mathbb{R} \text{ takav da } u_{j+q} = u_j + c, \text{ za svaki } j \in \mathbb{Z}\}.$$

Lema 3.23. *Neka je B skup svih neprekidnih preslikavanja $h\colon \mathbb{R} \to L_q$ takvih da je $h(s+1) = h(s) + 1$ i takvih da je $|||h||| = \sup_{s\in[0,1]} \|h(s)\| < \infty$. Tada je $(B, |||.|||)$ Banachov vektorski prostor.*

Dokaz: Prvo ako je $|||h - \tilde{h}||| = 0$ tada je $h = \tilde{h}$ na $[0,1]$ pa zbog periodičnosti i na $\mathbb{R}$. Jasno je da $|||\mu h||| = |\mu||||h|||$. Subaditivnost $|||h + \tilde{h}||| \leq |||h||| + |||\tilde{h}|||$ slijedi iz subaditivnisti od $\|.\|$. Neka je $(h_n)_n$ Cauchyjev niz u B tada je $(h_n(t))_n$ Cauchyjev niz u $(L_q, \|.\|)$ što je Banachov prostor dakle postoji $h^*(t)$ takva da je $h_n(t) \to h^*(t)$ no tada $|||h_n - h^*||| \to 0$ kada $n \to \infty$. Neka su h_k neprekidne i $|||h_k - h||| \to 0$ kada $k \to \infty$. Želimo pokazati da je h neprekidna. To slijedi iz $\|h(t) - h(s)\| \leq \|h(t) - h_k(t)\| + \|h_k(t) - h_k(s)\| + \|h_k(s) - h(s)\|$. Time je lema dokazana. $\square$

Teorem 3.24. *(Schauderov teorem o fiksnoj točki) Neka je B Banachov vektorski prostor i neka je $\Omega \subseteq B$ neprazan, kompakatan i konveksan skup. Tada za svako neprekidno preslikavanje $f\colon \Omega \to \Omega$ postoji $x \in \Omega$ takav da je $f(x) = x$.*

Dokaz: Za dani $\varepsilon > 0$ primjetimo da je familija otvorenih skupova $\{B_\varepsilon(h) : h \in \Omega\}$ otvoren pokrivač od Ω. Kako je Ω kompaktan to postoje $h_1, \ldots, h_N \in \Omega$ takve da $\{B_\varepsilon(h_i) : i = 1, \ldots, N\}$ je otvoren pokrivač od Ω. Neka je V_ε afini $N-1$ dimenzionalni prostor razapet s $h_1, \ldots, h_N$. Stavimo $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap V_\varepsilon$.

Promotrimo projekciju $\pi_\varepsilon\colon B \to V_\varepsilon$. Tada je $\|\pi_\varepsilon(h) - \pi_\varepsilon(g)\| \leq \|h - g\|$ i definiramo

$$f_\varepsilon\colon \Omega_\varepsilon \to \Omega_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(h) = \pi_\varepsilon(f(h)).$$

Kako je to neprekidna funkcija definirana na konveksnom kompaktnom podskupu Ω_ε konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V_ε to po Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki [12, korolar 11.12] imamo da postoji $h_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ takva da je $f_\varepsilon(h_\varepsilon) = h_\varepsilon$.

Kako je Ω nizovno kompaktan to možemo naći niz $\varepsilon_k \to 0$ takav da $h_k = h_{\varepsilon_k}$ konvergira prema točki $\overline{h} \in \Omega$.

Tvrdimo da je $f(\overline{h}) = \overline{h}$.

Očito $f_{\varepsilon_k}(h_k) = h_k \to \overline{h}$. Da bi završili dokaz trebamo samo pokazati $f_{\varepsilon_k}(h_k) \to f(\overline{h})$. Imamo

$$\|f_{\varepsilon_k}(h_k) - f(\overline{h})\| = \|\pi_{\varepsilon_k} f(h_k) - f(\overline{h})\| \leq$$

$$\leq \|\pi_{\varepsilon_k} f(h_k) - f(h_k)\| + \|f(h_k) - f(\overline{h})\| \leq$$
$$\leq \varepsilon_k + \|f(h_k) - f(\overline{h})\| \to 0$$

kada $k \to \infty$ gdje smo koristili činjenicu da je $\|\pi_\varepsilon(h) - h\| \leq \varepsilon$ jer je $h \in \Omega$ sadržana u nekoj kugli centriranoj u Ω_ε. $\square$

Lema 3.25. *Za svake $p, q \in \mathbb{Z}$ postoji strogo uređen krug $\ell \subseteq X^1_{p,q}$ invarijatnan za φ_T i $\{S_{m,n}\}$.*

Dokaz: Fiksiramo p, q te definiramo Ω kao u (3.3). Prisjetimo se da je Ω neprazan. Za svaki $h \in \Omega$ definiramo $\eta(s) = \varphi_T h(s)$ tada je $\eta(s_1) \ll \eta(s_2)$ za $s_1 < s_2$ budući je φ_T strogo monotona. Neka je $\bar{\eta}(s) = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} \eta_j(s)$ tada je $s \mapsto \bar{\eta}(s)$ strogo rastuća. Pišemo $\tau = \bar{\eta}(s)$ i neka je $s = s(\tau)$ inverz. Definiramo

$$\xi(\tau) = \eta(s(\tau)).$$

Sada $\xi(\tau_1) \ll \xi(\tau_2)$ za $\tau_1 < \tau_2$ i $\xi(\tau + 1) = \xi(\tau) + 1$ te $\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} \xi_j(\tau) = \tau$ te je ξ invarijatnan za $\{S_{m,n}\}$ zbog (3.1) tako da je $\xi \in \Omega$. Stavimo sada $\hat{\varphi}_T \colon \Omega \to \Omega$ dana sa $\hat{\varphi}_T h = \xi$ tada je to neprekidno preslikavanje jer je φ_T neprekidno (φ je polutok) pa prema Schauderovom teoremu ima fiksnu točku $\hat{\varphi}_T h = h$. Neka ℓ označava sliku od h tada je $\ell \subseteq X^1_{p,q}$ strogo uređen krug invarijantan za φ_T i $\{S_{m,n}\}$. $\square$

Lema 3.26. *Za svaki iracionalni ω postoji strogo uređen krug $\ell \subseteq X^1_\omega$ invarijatnan za φ_T i $\{S_{m,n}\}$.*

Dokaz: Neka je $\omega_k = p_k/q_k \in [a, b]$ niz racionalnih brojeva koji konvergiraju prema $\omega \in [a, b]$. Neka ℓ_k i $\hat{\ell}_k$ označavaju odgovarajuće UK dobivene iz predhodne leme u $X^1_{p_k,q_k}$ odnosno $X^1_{p_k,q_k}/R$. Tada je Hausdorffova topologija na $X^1_{[a,b]}/R$ je kompaktna pa možemo pretpostaviti $\hat{\ell}_k \to \hat{\ell}$. Tada je $\hat{\ell}$ zatvoren u $X^1_{[a,b]}/R$ i za svaki $u \in \hat{\ell}$ postoji niz točaka $u_k \in \hat{\ell}_k$ takav da $u_k \to u$.

Primjetimo da je ℓ_k periodična s periodom 1 i $\hat{\ell}_k$ je segment u ℓ_k. Ako proširimo $\hat{\ell}$ do ℓ po periodičnosti tada $\ell_k \to \ell$ u Hausdorffovoj topologiji i za svaki $u \in \ell$ postoji niz $u_k \in \ell_k$ takav da $u_k \to u$.

Budući su $S_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ i φ_T neprekidni u $X^1_{[a,b]}$ slijedi da je ℓ invarijantan za $\{S_{m,n}\}$ i φ_T. Neka $u \neq v$, $u, v \in \ell$ tada postoji $i \in \mathbb{Z}$ takav $u_i \neq v_i$ pa možemo pretpostaviti da je $u_i < v_i$ no kako $u_k \to u$ i $v_k \to v$ to imamo da $(u_k)_i < (v_k)_i$ za dovoljno velik k, no tada $u_k \ll v_k$ jer je ℓ_k strogo uređen.

Iz činjenice da je ℓ_k invarijantan za φ_T i toga da je φ_T injekcija dobivamo da postoji inverz $\varphi_T^{-1} = \varphi_{-T}$ takav da

$$\varphi_{-T} u_k \ll \varphi_{-T} v_k.$$

Uzimanjem $k \to \infty$ dolazimo do $\varphi_{-T} u < \varphi_{-T} v$ pa tako do $u \ll v$ zbog stroge monotonosti.

Trebamo još pokazati da je ℓ uređen krug, to jest da postoji neprekidna funkcija h takva da je $\ell = h(\mathbb{R})$. Znamo da za svaki $s \in \mathbb{R}$ postoji $h(s) \in \ell$ takav da $\|h_k(s) - h(s)\| \to 0$. Pretpostavimo da h nije neprekidna tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $\|h(s) - h(t)\| \geq \varepsilon$ za sve $t \to s$ no kako $h_k(s) \to h(s)$ i $h_k(t) \to h(t)$ imamo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $\|h_k(s) - h_k(t)\| \geq \varepsilon/2$ za $t \to s$ no to je kontradicija s neprekidnošću od h_k. Time pak dobivamo da je $\ell = h(\mathbb{R})$ povezan.

Kako je $[u, v] = \{w \in X : u \leq w \leq v\}$ povezan to imamo da je $\ell \cap [u, v]$ povezan.

Definiramo $P_0 u = u_0$ gdje je $u = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Tada P_0 inducira homomorfizam od ℓ i $\mathbb{R}$. Ako za $u, v \in \ell$ imamo $u \neq v$ tada $u \ll v$ ili $v \ll u$ pa $u_0 \neq v_0$ tako da je P_0 injekcija. Za $r \in \mathbb{R}$ uzmimo $u \in \ell$ takav da je $P_0(u) < r < P_0(u + k)$ za dovoljno veliki $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $P_0(\ell \cap [u, u + k])$ interval pa prema tome $r \in P_0(\ell)$ tako da je P_0 surjekcija. Stoga je $h = P_0^{-1}$ neprekidna i zadovoljava $h(s+1) = h(s)+1$ te $h(s_1) \ll h(s_2)$ kada su $s_1 < s_2$. Prema tome ℓ je strogo uređen krug.

Ostaje pokazati da je prosječan razmak za svaki element iz ℓ zapravo ω. Sada kako za $u \in \ell$ postoji $u_k \in \ell_k$ takav niz da $u_k \to u$ sada imamo

$$|(u_k)_{m+j} - (u_k)_j - m\omega_k| \leq 1$$

pa puštanjem $k \to \infty$ dobivamo

$$|u_{m+j} - u_j - m\omega| \leq 1$$

dakle prosječan razmak je ω. $\square$

Lema 3.27. *Za svaki $\omega \in \mathbb{R}$ i $T > 0$ postoji strogo uređen krug $\ell \subseteq X^1_\omega$ takav da je invarijantan za φ_T i $\{S_{m,n}\}$.*

Dokaz: Za racionalan ω tvrdnja slijedi iz leme 3.25, a za iracionalan ω tvrdnja slijedi iz leme 3.26. $\square$

Dokaz teorema 3.11: Definiramo $\mathfrak{X} = \{\ell \subseteq X^1_\omega : \ell \text{ je strogo UK }\}$. Pokažimo da je $\mathfrak{X}$ nizovno kompaktan.

Neka je $(\ell_k)_k$ niz u $\mathfrak{X}$ tada postoji odgovarajući niz $(\hat{\ell}_k)_k$ u $\widehat{X^1_\omega/R}$ no kako je taj prostor kompaktan to imamo da postoji podniz niza $(\hat{\ell}_k)_k$ koji konvergira prema $\hat{\ell}$ no tada podniz niza $(\ell_k)_k$ konvergira prema ℓ gdje je ℓ proširenje po periodičnosti od $\hat{\ell}$ na cijeli $\mathbb{R}$. Kako je ℓ strogo uređen krug to imamo da je $\mathfrak{X}$ nizovno kompaktan.

Zbog predhodne leme 3.27 znamo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji strogo uređen krug ℓ_k takav da $\varphi_{1/2^k}\ell_k = \ell_k$. No zbog nizovne kompaktnosti imamo da postoji podniz od $(\ell_k)_k$ takav da konvergira prema nekom $\ell \in \mathfrak{X}$. Tada zbog neprekidnosti od $\varphi_{1/2^k}$ imamo da je $\varphi_{1/2^k}\ell = \ell$ no tada je $\varphi_t\ell = \ell$ za sve $t \geq 0$ pa ako stavimo $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ to imamo da i za sve $t \in \mathbb{R}$. Dakle za $u_0 \in \ell$ imamo da je $u(t) = \varphi_t u_0 \in \ell$ no tada je $\rho(u(t)) = \omega$. Kako je ℓ strogo uređen krug imamo da se $S_{m,n}u(t+l)$ i $u(t)$ ne sijeku za svaki $m, k, l \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{R}$. Time je teorem dokazan. $\square$

3.3. Nule razlike dvaju rješenja i njihova dinamika

Definiramo što znači da se dva rješenja dinamike (2.1) sijeku i brojimo njihove presjeke. Pokazujemo da je broj njihovih presjeka nerastuća funkcija.

Stavimo na razmatranje sustav jednadžbi koji dolazi iz problema razlike dvaju sustava (2.1).

$$\frac{d}{dt}w_j(t) = a_j(t)w_{j+1}(t) + b_j(t)w_{j-1}(t) + c_j(t)w_j(t), \quad j \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

gdje pretpostavljamo da za $T_0 < T_1$ i za neke konstante $C, D > 0$ vrijedi

$$\begin{gathered} a_j, b_j, c_j \text{ neprekidne takve da } |a_j(t)|, |b_j(t)|, |c_j(t)| \leq C \\ a_j(t), b_j(t) \geq D \text{ za } j \in \mathbb{Z} \text{ i } t \in [T_0, T_1] \end{gathered} \tag{3.6}$$

Propozicija 3.28. *Neka su $u^1, u^2 \colon [T_0, T_1] \to K_n$ rješenja od (2.1) tada $w = u^2 - u^1$ je rješenje od (3.5) za neke a_j, b_j, c_j koji zadovoljavaju (3.6).*

Dokaz: Za $i = 1, 2$ imamo

$$\frac{d}{dt}u_j^i(t) = -V_2(u_{j-1}^i(t), u_j^i(t), t) - V_1(u_j^i(t), u_{j+1}^i(t), t).$$

Stavimo $w = u^2 - u^1$ tada po teoremu srednje vrijednosti

$$\frac{d}{dt}w_j = \frac{d}{dt}(u_j^2 - u_j^1) =$$

$$= -V_2(u_{j-1}^2, u_j^2, t) - V_1(u_j^2, u_{j+1}^2, t) + V_2(u_{j-1}^1, u_j^1, t) + V_1(u_j^1, u_{j+1}^1, t)$$

$$= V_2(u_{j-1}^1, u_j^1, t) - V_2(u_{j-1}^2, u_j^1, t) + V_2(u_{j-1}^2, u_j^1, t) - V_2(u_{j-1}^2, u_j^2, t) +$$

$$+ V_1(u_j^1, u_{j+1}^1, t) - V_1(u_j^2, u_{j+1}^1, t) + V_1(u_j^2, u_{j+1}^1, t) - V_1(u_j^2, u_{j+1}^2, t) =$$

$$= -V_{12}(\xi_{j-1}^1, u_j^1, t)(u_{j-1}^2 - u_{j-1}^1) - V_{22}(u_{j-1}^2 \xi_j^2, t)(u_j^2 - u_j^1) -$$

$$-V_{11}(\xi_j^3, u_{j+1}^1, t)(u_j^2 - u_j^1) - V_{12}(u_j^2, \xi_{j+1}^4, t)(u_{j+1}^2 - u_{j+1}^1).$$

Stavimo

$$\begin{array}{rcll} a_j & = & -\ V_{12}(u_j^2, \xi_{j+1}^4, t) & \\ b_j & = & -\ V_{12}(\xi_{j-1}^1, u_j^1, t) & \\ c_j & = & -\ V_{22}(u_{j-1}^2, \xi_j^2, t) & -\ V_{11}(\xi_j^3, u_{j+1}^1, t). \end{array}$$

Zbog twist uvjeta (V3) i uvjeta (V4) tvrdnja slijedi. $\square$

Definirat ćemo singularne i regularne nule. Osnovna razlika je da se regularne nule dobro ponašaju s obzirom na male perturbacije, to jest mala perturbacija regularne nule je regularna nula. Naprotiv mala perturbacija singularne nule ne treba uopće biti nula.

Ključni rezultat je propozicija 3.40 za singularne nule konačnoga stupnja kojega dokazujemo u idućem potpoglavlju. Singularne nule beskonačnoga stupnja moraju se tretirati posebno.

Definiramo $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ kao skup svih $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ takvih da

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\ln(|w_j| + 1)}{|j|} = 0$$

Lema 3.29. *Skup Y je Frécheov prostor generiran familijom normi*

$$\|u\|_{n,\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \exp(-|j|/n)|u_j|.$$

Dokaz: Definiramo $Z = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \|u\|_{n,\infty} < \infty \text{ za sve } n \in \mathbb{N}\}$. Želimo pokazati da je $Y = Z$. Pretpostavimo da je $u \in Z$ i da $u \notin Y$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $j_0 \in \mathbb{N}$ postoji $|j| \geq j_0$ takav da je $\frac{\ln(|u_j|+1)}{|j|} \geq \varepsilon$. Tada je $\ln(|u_j| + 1) \geq \varepsilon|j|$, odnosno $(|u_j| + 1) \geq e^{\varepsilon|j|}$ to jest $|u_j|e^{-|j|/n} \geq e^{|j|(\varepsilon - \frac{1}{n})} - e^{-|j|/n}$. Kako to vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ tada vrijedi i za $\varepsilon > 1/n$ no tada je supremum po j desne strane jednak ∞, a to je kontradikcija.

Pretpostavimo da je $u \in Y$ i da $u \notin Z$ tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|u\|_{n,\infty} = \infty$ to jest $\sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|e^{-|j|/n} = \infty$ no tada za svaki $C > 1$ postoji beskonačno j_0 takvih da $(|u_{j_0}|+1)e^{-|j_0|} > C$. Slijedi $\ln(|u_{j_0}|+1)-|j_0| > \ln C$. To jest $\ln(|u_{j_0}| + 1) \geq \ln C + |j_0|$. Iz čega je razvidno

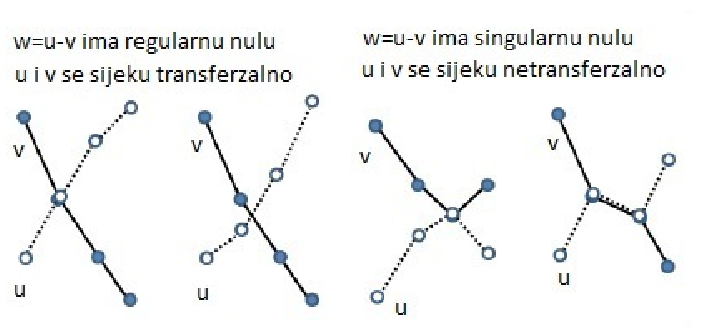
$$\frac{\ln(|u_{j_0}| + 1)}{|j_0|} \geq \frac{\ln C}{|j_0|} + 1.$$

To znači da $\limsup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\ln(|u_j|+1)}{|j|} \geq 1$, što je kontradikcija. Pa vrijedi $Y \subseteq Z$. Tako imamo $Z = Y$ i time je lema dokazana. $\square$

Za $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ kažemo da w ima nulu na mjestu $j \in \mathbb{Z}$ ukoliko

$$w_j + (w_{j+1} - w_j)x = 0$$

za neki $x \in [0, 1)$. Kažemo da w ima singularnu nulu na mjestu j ukoliko $w_j = 0$ te $w_{j-1} = 0$ ili $w_{j+1} = 0$ ili $w_{j-1}w_{j+1} > 0$. Ako nula nije singularna tada kažemo da je regularna.



Slika 3. Regularne i singularne nule.

Kažemo da je singularna nula od w na mjestima $i, i + 1, \ldots, i + k - 1$ stupnja k ukoliko postoji i takav da w nema nule na mjestu $i - 1$ i mjestu $i + k$, a da je singularna nula od w na svakom mjestu $i, i + 1, \ldots, i + k - 1$. Kažemo da w ima na mjestima $i, i + 1, i + 2, \ldots$ singularnu nulu stupnja

∞ kada postoji i takav da w na mjestu $i-1$ nema nule, dok je na svim mjestima $i, i+1, i+2, \ldots$ singularna nula. Kažemo da w ima singularnu nulu na mjestima $\ldots, i-2, i-1, i$ ukoliko w na mjestu $i+1$ nema nule, dok je na svim mjestima $\ldots, i-2, i-1, i$ singularna nula. Postoje dvije vrste singularnih nula konačnoga stupnja k. Neka je $w_i = w_{i+1} = w_{i+k-1} = 0$ singularna nula stupnja k. Tada

$$\begin{array}{cc} \text{Vrsta I} & \text{ukoliko } w_{i-1}w_{i+k} < 0, \\ \text{Vrsta II} & \text{ukoliko } w_{i-1}w_{i+k} > 0 \end{array}$$

Za dani $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ definiramo $z_j(w) = 1$ ukoliko w ima nulu na mjestu j, a inače 0. Neka je $z_{m,n} \colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkcija brojanja nula

$$z_{m,n}(w) = \sum_{j=m}^{n-1} z_j(w)$$

gdje su $m < n$ cijeli brojevi. Kažemo da je rješenje od (3.5) klase C^1 ukoliko je klase C^1 u svakoj koordinati.

Za fikasan $w \colon [T_1, T_2] \to Y$ definiramo skup nula $Z(w) = \{(i,t) \in \mathbb{Z} \times [T_1, T_2] : w(t) \text{ ima nulu na mjestu } i\}$.

Lema 3.30. *Neka je $w \in Y$ i neka je $\lambda \in (0,1)$. Tada za svaki $R \in \mathbb{R}$ vrijedi da*

$$\sum_{j \geq R} \lambda^j w_j^2$$

konvergira.

Dokaz: Dovoljno je dokazati da $\sum_{j\geq 0} \lambda^j w_j^2$ konvergira. Kako je $w \in Y$ to imamo da postoje $C_n \geq 0$ takvi da

$$C_n \geq \|w\|_{n,\infty}^2 = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \exp(-2|j|/n)|w_j|^2 \geq \exp(-2|j|/n)|w_j|^2,$$

stoga $|w_j|^2 \leq C_n(\sqrt[n]{e^2})^j$ za $j \geq 0$. Kako je $\lambda < 1$ i kako imamo da $\sqrt[n]{e^2}\lambda \to \lambda$ kada $n \to \infty$, tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $\rho = \sqrt[m]{e^2}\lambda < 1$. Tada je

$$\sum_{j \geq 0} w_j^2 \lambda^j \leq C_m \sum_{j \geq 0} \rho^j < \infty.$$

Time je lema dokazana. $\square$

Lema 3.31. *Neka je* $0 = w_1(0) = w_2(0) = w_3(0) = \ldots$ *nula beskonačnog stupnja. Tada za* $j = 1, 2, \ldots$ *postoje* $d_j \in \mathbb{R}$ *brojevi takvi da imaju isti predznak i takvi da*

$$w_j(t) = d_j t^j + o(t^j)$$

Dokaz: Dokazujemo indukcijom. Lako se pokaže da $\frac{d}{dt} w_k(0) = 0$ za sve $k \geq 2$. Pretpostavimo da $\left(\frac{d}{dt}\right)^i w_k(0) = 0$ za sve $k \geq i+1$. Raspisujemo $\left(\frac{d}{dt}\right)^i w_{k+1}(0) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} (w_{k+2}(0) a_{k+1}(0) + w_k(0) b_{k+1}(0) + w_{k+1}(0) c_{k+1}(0)) = 0$ Dakle po Taylorovom teoremu imamo da postoje d_j takvi da

$$w_j(t) = d_j t^j + o(t^j).$$

Pokažimo da d_j imaju svi isti predznak. Kako je $d_j = \left(\frac{d}{dt}\right)^j w_j(0)$ to imamo

$$d_{j+1} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{j+1} w_{j+1}(0) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{j} (w_{j+2}(0) a_{j+1}(0) + w_j(0) b_{j+1}(0) + w_{j+1}(0) c_{j+1}(0)) = b_{j+1}(0) d_j.$$

Kako $d_1 \neq 0$ i $b_{j+1}(0) > 0$ imamo tvrdnju. $\square$

Lema 3.32. *Neka je* $w\colon [T_1, T_2] \to Y$ *te neka je* $(i, t) \in Z(w)$. *Tada postoji neprekidna funkcija* $\gamma\colon [T_1, t] \to \mathbb{R}$ *takva da* $(\lfloor \gamma(s) \rfloor, s) \in Z(w)$ *za sve* $s \in [T_1, t]$ *te takva da* $\lfloor \gamma(t) \rfloor = i$.

Dokaz: Vidimo da postoji $t_0 < t$ takav da postoji $\gamma\colon (t_0, t] \to \mathbb{R}$ gdje je $(\lfloor \gamma(s) \rfloor, s) \in Z(w)$ za sve $s \in (t_0, t]$. Nije odmah jasno da $\lim_{t \to t_0+} \gamma(t)$ ne može biti $\pm\infty$.

Dokažimo da je $\lim_{s \to t_0+} \gamma(s) = +\infty$ nemoguće. Pokazat ćemo da je $w(s)$ identički nula na $G(s) = \{j \geq \gamma(s)\}$ za sve $s \in (t_0, t]$ i tada izvući kontradikciju. Fiksiramo neki $0 < \lambda < 1$. Neka je $M(s)$ za $s \in (t_0, t]$ definiran s

$$M(s) = \sum_{j \geq \gamma(s)} \lambda^j w_j^2 \exp(-D(s - t_0))$$

gdje je $D = 6C/\lambda$ gdje je C iz (3.6).

Neka je $j_0 = \lfloor \gamma(s) \rfloor$. Deriviranjem $M(s)$ dobivamo

$$\frac{d}{ds} M(s) = \exp(-D(s - t_0)) \sum_{j \geq \gamma(s)} \lambda^j (2 w_j \frac{d}{ds} w_j - D w_j^2).$$

Stavljamo $\frac{d}{ds}w_j = a_j w_{j+1} + b_j w_{j-1} + c_j w_j$ te primjenom $ab \leq (a^2+b^2)/2$ dobivamo

$$\frac{d}{ds}M(s) \leq \exp(-D(s-t_1))\lambda^{j_0} a_{j_0+1}(s) w_{j_0}(s) w_{j_0+1}(s),$$

jer su svi ostali članovi ≤ 0 zbog izbora D. Kako je (j_0, t_0) nula to vrijedi da je $w_{j_0+1}w_{j_0} \leq 0$ pa je $\frac{d}{ds}M(s) \leq 0$.

Iz definicije od $M(s)$ imamo da $\lim_{s \to t_0+} M(s) = 0$ tako da $M(s) = 0$ za svaki $s \in (t_0, t]$, to jest w isčezava na G.

Kontradikcija sada slijedi jer kako w izčezava na G to ima nule tipa ∞ za svaki $s \in (t_0, t]$. Dokažimo da je to nemoguće. Pretpostavimo da $w(s)$ ima nulu beskonačnog stupnja $w_0(s) \neq 0$ i $w_i(s) = 0$ za $i \geq 1$. Kako imamo da $w_j(s) = d_j s^j + o(s^j)$ za d_j s istim predznakom. Vidimo da nije moguće da w ima nulu tipa ∞ za svaki $s \in (t_0, t]$. $\square$

Lema 3.33. *Pretpostavimo da je $w_1(0) = \cdots = w_k(0) = 0$ singularna nula stupnja k. Tada postoje realni brojevi $d_1, \ldots, d_k$ takvi da za sve $j = 1, \ldots, k$ imamo*

$$w_j(t) = d_j t^{j^*} + o(t^{j^*})$$

gdje je $j^* = \min\{j, k+1-j\}$. Gdje za $j < k/2$ imamo $\operatorname{sign}(d_j) = \operatorname{sign} w_0(0)$, *a za $j > k/2$ imamo* $\operatorname{sign}(d_j) = \operatorname{sign} w_{k+1}(0)$.

Dokaz: Dokazujemo induktivno u l gdje $1 \leq l \leq (k+1)/2$ da za svaki j koji zadovoljava $l \leq j \leq k+1-l$ vrijedi

$$w_j(t) = d_{j,l} t^l + o(t^l). \tag{3.7}$$

Za $l = 1$ i $1 \leq j \leq k$ kako je w_j klase C^1 i $w_j(0) = 0$ pa po Taylorovoj formuli imamo

$$w_j(t) = \frac{dw_j(0)}{dt} t + o(t).$$

Tako je $d_{j,1} = dw_j(0)/dt$. Sada pretpostavimo (3.7) za neki $l-1$ tada imamo

$$\frac{d}{dt}w_j(t) = (a_j(t) d_{j+1,l-1} + b_j(t) d_{j-1,l-1} + c_j(t) d_{j,l-1}) t^{l-1} + o(t^{l-1}) =$$

$$= (a_j(0) d_{j+1,l-1} + b_j(0) d_{j-1,l-1} + c_j(0) d_{j,l-1}) t^{l-1} + o(t^{l-1}).$$

Integriranjem i primjenom $w_j(0) = 0$ dobivamo (3.7) za l te dobivamo

$$d_{j,l} = \frac{1}{l}(a_j(0) d_{j+1,l-1} + b_j(0) d_{j-1,l-1} + c_j(0) d_{j,l-1}).$$

Dobivamo

$$d_{1,1} = dw_1(0)/dt = b_1(0)w_0(0),$$
$$d_{k,1} = dw_k(0)/dt = a_k(0)w_k(0),$$
$$d_{j,1} = 0 \text{ za } j = 2, \dots, k-1.$$

Iterativno koristeći $j^* = \min\{j, k+1-j\}$ dobivamo

$$d_j = w_0(0) \prod_{i=1}^{j} b_i(0)/j^*! \text{ za } j < k/2,$$

$$d_j = w_k(0) \prod_{i=j}^{k} a_i(0)/j^*! \text{ za } j > k/2,$$

$$d_j = w_0(0) \prod_{i=1}^{j} b_i(0)/j^*! + w_k(0) \prod_{i=j}^{k} a_i(0)/j^*! \text{ za } j = k/2,$$

pa je dokaz gotov. □

Lema 3.34. *Neka je* $w\colon [T_0, T_1] \to Y$ *rješenje klase* C^1 *od* (3.5) *koje zadovoljava* (3.6). *Pretpostavimo da* $w_j(t) \neq 0$ *za* $(j, t) \in \{m, n\} \times [T_0, T_1]$. *Tada:*

(1) Broj nula $z_{m,n}(w(t))$ *je nerastuća funkcija.*

(2) Ako $w(t_0)$ *ima singularnu nulu između* m *i* n *tada* $t \mapsto z_{m,n}(w(t))$ *strogo pada kada* $t = t_0$.

(3) Ako $w(t_0)$ *ima singularnu nulu između* m *i* n, *tada postoji* $\delta_0 > 0$ *takav da za sve* $0 < |\delta| \leq \delta_0$ *imamo da* $w(t_0+\delta)$ *nema singularnu nulu između* m *i* n.

Dokaz: Jedini način da se nula pojavi između m i n je da dođe s lijeva ili s desna kao slika krivulje nula $(\lfloor \gamma(t) \rfloor, t)$ ili po neprekidnosti da se pojavi prvo singularna nula. Prvo nije moguće jer nikakva nula ne može proći preko m i n zbog pretpostavke. No pojavom singularne nule broj nula strogo pada, a ne raste kao što se vidi iz leme 3.33 iz te leme slijedi i (3). □

Lema 3.35. *Za fiksni* $w\colon [T_0, T_1] \to Y$ *skup nula* $Z(w)$ *može biti prikazan kao unija slika* $(\lfloor \gamma(t) \rfloor, t)$ *od najviše prebrojive familije neprekidnih krivulja* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ *gdje vrijedi jedno od sljedećeg:*
(i) $I = [T_0, T_1]$,
(ii) $I = [T_0, T_2]$, $T_0 \leq T_2 < T_1$ *gdje je* $(\gamma(T_2), T_2)$ *singularna nula,*
(iii) $I = [T_0, T_2)$ *gdje* $T_0 \leq T_2 \leq T_1$ *i* $\lim_{t \to T_2-} \gamma(t) = -\infty$ *ili* ∞.

Dokaz: Znamo da krivulja nula ne može „pobjeći” u $\pm\infty$ kada idemo unazad u vremenu zbog leme 3.32. Time dobivamo da ako je krivulja nula definirana u nekom trenutku da je onda definirana za sva prošla vremena. Moguće je da krivulja nula nestane zbog pojave singularne nule što se vidi iz lema 3.31 i 3.34. Moguće je da krivulja nula pobjegne u $\pm\infty$. $\square$

Propozicija 3.36. *Pretpostavimo da su $u^1(0), u^2(0) \in K_n$ takve da $u^1(0) - u^2(0)$ ima singularnu nulu konačnog stupnja na $m+1, \dots, m+k$. Tada za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ postoje otvorne okoline U^1 i U^2 od $u^1(-\varepsilon)$ i $u^2(-\varepsilon)$ takve da za sve $(v^1(-\varepsilon), v^2(-\varepsilon)) \in U^1 \times U^2$ imamo da $v^1 - v^2$ ima singularnu nulu negdje u $\{m+1, \dots, m+k\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Dokaz: Zbog neprekidnosti i jer $u^1(0) - u^2(0)$ nije nula na m i $m+k+1$ postoji $\delta > 0$ takav da $w(t) = u^1(t) - u^2(t)$ nije nula na $\{m, m+k+1\} \times [-\delta, \delta]$. Iz leme 3.34 postoji $\delta \geq \varepsilon > 0$ takav da su nule od $w(-\varepsilon)$ i $w(\varepsilon)$ između m i $m+k+1$ regularne. Zbog neprekidnosti postoje male okoline U_1 i U_2 od $u^1(-\varepsilon)$ i $u^2(-\varepsilon)$ takve da za $(v^1(-\varepsilon), v^2(-\varepsilon)) \in U^1 \times U^2$. Kako vrijedi

$$z_{m,m+k+1}(u^1(-\varepsilon) - u^2(-\varepsilon)) = z_{m,m+k+1}(v^1(-\varepsilon) - v^2(-\varepsilon)) \tag{3.8}$$

$$z_{m,m+k+1}(u^1(\varepsilon) - u^2(\varepsilon)) = z_{m,m+k+1}(v^1(\varepsilon) - v^2(\varepsilon)), \tag{3.9}$$

te kako je po lemi 3.34 (2) lijeva strana od (3.8) strogo veća od lijeve strane od (3.9) to vrijedi i za desne strane. Po lemi 3.35 primjenjenoj na $v^1 - v^2$ dobivamo da je (ii) jedina mogućnost sa singularnom nulom u $\gamma(T_2) \in \{m+1, \dots, m+k\}$, $-\varepsilon \leq T_2 \leq \varepsilon$. Budući da nema nula na rubu $\{m, m+k+1\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ tvrdnja slijedi. $\square$

3.4. Broj presjeka invarijantnih mjera

Definiramo

$$z_i(u, v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} z_i(u - v + r),$$

$$z_{i,j}(u, v) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} z_{i,j}(u - v + r).$$

gdje je $z_i(w)$ s desne strane definirana u prošlom potpoglavlju kao 1 ili 0 ovisno ima li w nulu u i ili ne. Primjetimo prvo da su te funkcije konačne za $u, v \in \mathcal{X}$ jer tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $u, v \in \mathcal{K}_n$ no tada $z_i(u, v) \leq 2n+1$ i $z_{i,j}(u, v) \leq (2n+1)(j-i)$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ fikasn tada sa $\mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$ označimo

S-invarijantne Borelove vjerojatnostne mjere na $\mathcal{K}_n$ gdje je $S = S_{-1,0}$ to jest $(Su)_j = u_{j+1}$. Stavimo $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$.

Neka su $\mu^1, \mu^2 \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$. Definiramo

$$Z(\mu^1, \mu^2) = \int\int z_0(u,v) d\mu^1(u) d\mu^2(v)$$

funkciju koja broji prosječan broj presjecanja s obzirom na dvije mjere.

Lema 3.37. *Konveksan skup $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ je izmjeriv.*

Dokaz: Neka je C konveksan skup. Pretpostavimo da je $0 \in C$ i da je C omeđen. Ako $0 \notin C$ i $C \neq \emptyset$ tada postoji $u \in C$ pa promatramo $C' = C - u$. Ako C nije omeđen tada promatramo rastuću familiju omeđenih konveksnih izmjerivih skupova $(B_n)_n$ i gledamo $C_n = C \cap B_n$. Ako je C_n izmjeriv za svaki n tada je i C izmjeriv.

Neka je $p \in \partial C$ tada kako je $0 \in C$ to imamo da $q = (1-\varepsilon)p \in \mathrm{Int}(C)$ no tada imamo da $p = q/(1-\varepsilon) \in \frac{1}{1-\varepsilon}\mathrm{Int}(C)$ Dakle $\partial C \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon}\mathrm{Int}(C) \setminus \mathrm{Int}(C)$ pa imamo

$$\lambda(\partial C) \leq \lambda(\frac{1}{1-\varepsilon}\mathrm{Int}(C)) - \lambda(\mathrm{Int}(C)) \to 0$$

kada $\varepsilon \to 0$. Time je lema dokazana. $\square$

Lema 3.38. *Skup*

$$F_{r,n,m} = \{(u^1(t_0), u^2(t_0)) : w(t) = u^2(t) - u^1(t) + r \text{ ima krivulju nula } \gamma(t)$$
$$\text{takvu da } \lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n \text{ i } \lfloor \gamma(t_1) \rfloor = m\}$$

je izmjeriv.

Dokaz: Kažemo da je $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ padajuć u j ukoliko $w_j \geq w_{j+1}$, te kažemo da je $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ rastuć u j ukoliko $w_j \leq w_{j+1}$. Neka je $A_{r,n,m}$ jednak skupu svih $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ takvih da $w(t) = u^1(t) - u^2(t) + r$ ima krivulju nula, $\gamma(t)$ takvu, da $\lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n$ i $\lfloor \gamma(t_1) \rfloor = m$ te da vrijedi (A). Slično su definirani skupovi $B_{r,n,m}$, $C_{r,n,m}$ i $D_{r,n,m}$ koji imaju sve zajedničko sa $A_{r,n,m}$ samo se zahtjeva da umjesto (A) redom vrijedi (B), (C) i (D). Kako su $A_{r,n,m}$, $B_{r,n,m}$, $C_{r,n,m}$, $D_{r,n,m}$ konveksni to su izmjerivi pa kako je $F_{r,n,m} = A_{r,n,m} \cup B_{r,n,m} \cup C_{r,n,m} \cup D_{r,n,m}$ to imamo da je izmjeriv. Gdje smo koristili pokarate:

(A) $w(t_0)$ je padajuć u n i $w(t_1)$ padajuć u m

(B) $w(t_0)$ je rastuć u n i $w(t_1)$ padajuć u m

(C) $w(t_0)$ je padajuć u n i $w(t_1)$ je rastuć u m

(D) $w(t_0)$ je rastuć u n i $w(t_1)$ je rastuć u m

Time je lema dokazana. $\square$

Neka je μ vjerojatnostna Borelova mjera na $\mathcal{K}_n$ tada $\mu(t) = \varphi_*^t \mu$ jest povlačenje mjere μ s obzirom na preslikavanje $\varphi^t \colon \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ gdje je φ polutok dinamike (2.1).

Propozicija 3.39. *Pretpostavimo $\mu^1(0), \mu^2(0) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$. Tada*

$$t \mapsto Z(\mu^1(t), \mu^2(t))$$

je nerastuća funkcija.

Dokaz: Uvijek ćemo birati reprezentanta $u \in \mathcal{K}_n$ tako da je $u_0 \in [0,1)$. Fiksirajmo $t_0 < t_1$ i promatramo nule od $w = u^1 - u^2 + r$ za $t \in [t_0, t_1]$ gdje je $r \in \mathbb{Z}$ fiksan. Definiramo izmjeriv skup $F_{r,n,m} \subseteq \mathcal{K}_n \times \mathcal{K}_n$ koji se sastoji od svih $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ takvih da $w(t) = u^1(t) - u^2(t) + r$ sadrži krivulju nula $\gamma(t)$ takvu da je $\lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n$ i $\lfloor \gamma(t_1) \rfloor = m$. Neka se $E_{r,n}$ sastoji od svih $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ takvih da $w(t) = u^1(t) - u^2(t) + r$ sadrži krivulju nula $\gamma(t)$ takvu da je $\lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n$. Nije teško pokazati prateći dokaz leme 3.38 da je $E_{r,n}$ izmjeriv.

Nadalje neka je $D_{r,n} \subseteq \mathcal{K}_n \times \mathcal{K}_n$ skup svih $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ takvih da postoji krivulja nula $\gamma(t)$ takva da je $\lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n$ koja se ne da proširiti do $t = t_1$ (to jest ona za koju vrijede alternative (ii) i (iii) iz leme 3.35). Kako je $D_{r,n} = E_{r,n} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} F_{r,n,m}$ to je izmjeriv skup.

Ako je $\zeta(t) = \mu^1(t) \times \mu^2(t)$ mjera na $\mathcal{K}_n \times \mathcal{K}_n$ tada iz definicije od Z imamo

$$Z(\mu^1(t_0), \mu^2(t_0)) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (\zeta(t_0)(D_{r,0}) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \zeta(t_0)(F_{r,0,m}))$$

i

$$Z(\mu^1(t_1), \mu^2(t_1)) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \zeta(t_1)(\varphi_{t_1 - t_0} F_{r,n,0}) =$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \zeta(t_1)(\varphi_{t_0 - t_1}^{-1} F_{r,n,0}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_*^{t_0 - t_1} \varphi_*^{t_1} \zeta(0)(F_{r,n,0})$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \zeta(t_0)(F_{r,n,0}).$$

Po translacijskoj invarijantnosti od μ^1 i μ^2 imamo

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} \zeta(t_0)(F_{r,-n,0}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \zeta(t_0)(F_{r,0,n}).$$

Stoga

$$Z(\mu^1(t_1), \mu^2(t_1)) - Z(\mu^1(t_0), \mu^2(t_0)) = -\sum_{r\in\mathbb{Z}} \zeta(t_0)(D_{r,0}) \leq 0.$$

Time je lema dokazana. $\square$

Kažemo da nerastuća funkcija $t \mapsto f(t)$ strogo pada u $t = t_0$ ukoliko za svaki $\varepsilon > 0$ imamo $f(t_0 + \varepsilon) < f(t_0 - \varepsilon)$.

Propozicija 3.40. *Pretpostavimo da $\mu^1(T), \mu^2(T) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$ imaju u^1 i u^2 u svojim odgovarajućim nosačima tako da $u^1 - u^2 + r$ ima singularnu nulu konačnoga stupnja za neki $r \in \mathbb{Z}$. Tada je $t \mapsto Z(\mu^1(t), \mu^2(t))$ strogo padajuća u $t = T$.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $T = 0$. Promotrimo slučaj kada $u^1 - u^2 + r$ ima singularnu nulu konačnog stupnja k i to na mjestima $(m+1, 0), \ldots, (m+k, 0)$. Po lemi 3.36 možemo naći otvorene okoline U^1 i U^2 od $u^1(-\varepsilon)$ i $u^2(-\varepsilon)$ tako da za svake $v^1(-\varepsilon) \in U^1$ i $v^2(-\varepsilon) \in U^2$ imamo da $v^1 - v^2 + r$ ima singularnu nulu u $\{m+1, \ldots, m+k\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ za $\varepsilon > 0$ dovoljno mali. Sada primjetimo da

$$U^1 \times U^2 \subseteq D_{r,m+1} \cup \cdots \cup D_{r,m+k}$$

gdje je $D_{r,n} \subseteq \mathcal{K}_n \times \mathcal{K}_n$ skup svih $(u^1(t_0), u^2(t_0))$ takvih da postoji krivulja nula $\gamma(t)$ takva da je $\lfloor \gamma(t_0) \rfloor = n$ koja se ne da proširiti do $t = t_1$ (to jest ona za koju vrijede alternative (ii) i (iii) iz leme 3.35). Kako su $u^1(0)$ i $u^2(0)$ u nosaču od $\mu^1(0)$ i $\mu^2(0)$ respektivno tada su $u^1(-\varepsilon)$ i $u^2(-\varepsilon)$ u nosaču od $\mu^1(-\varepsilon)$ i $\mu^2(-\varepsilon)$. Kako $(\mu^1(-\varepsilon) \times \mu^2(-\varepsilon))(U^1 \times U^2) > 0$ slijedi da ne mogu svi $D_{r,l}$ za $l = m+1, \ldots, m+k$ biti mjere nula. Stavimo

$$d(t_0, t_1) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \zeta(t_0)(D_{r,i}).$$

Po translacijskoj invarijantnosti imamo da $d(t_0, t_1)$ ne ovisi o i pa slijedi da je $d(-\varepsilon, \varepsilon) > 0$. No kako za $t_0 = -\varepsilon$ i $t_1 = \varepsilon$ vrijedi

$$Z(\mu^1(t_1), \mu^2(t_1)) - Z(\mu^1(t_0), \mu^2(t_0)) = -d(t_0, t_1) < 0.$$

Zaključujemo da funkcija $t \mapsto Z(\mu^1(t), \mu^2(t))$ strogo pada u $t = 0$. $\square$

Definiramo $Z(\mu) = Z(\mu, \mu)$.

Propozicija 3.41. *Pretpostavimo da* $\mu(T) \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_n)$ *ima* u^1 *i* u^2 *u svom nosaču tako da* $u^1 - u^2 + r$ *ima singularnu nulu konačnoga stupnja za neki* $r \in \mathbb{Z}$. *Tada je* $t \mapsto Z(\mu(t))$ *strogo padajuća u* $t = T$

Dokaz. Uvrstimo $\mu = \mu^1 = \mu^2$ u predhodnu propoziciju. □

3.5. Prostorno vremenski atraktor

Definiramo prostorno-vremenski atraktor $\mathcal{A}$ te dokazujemo da se uz neke pretpostavke taj atraktor injektivno preslikava na dvodimenzionalan prostor. Sa $\mathcal{X}_\rho$ označimo skup svih elemenata iz $\mathcal{X}$ za koje je dobro definiran prosječan razmak i jednak ρ. Dokazujemo:

Teorem 3.42. *Prostorno vremenski atraktor* $\mathcal{A}$ *podudara se sa unijom nosača svih* S, T*-invarijatnih mjera na* $\mathcal{X}$. *Štoviše za svaki* $\rho \in \mathbb{R}$ *imamo da* $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{X}_\rho \cap \mathcal{A}$ *nije prazan.*

Kažemo da se nula $u(0) - v(0)$ beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja ukoliko za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $|t_0|, |t_1| < \varepsilon$ takvi da $u(t_0) - v(t_1)$ ili $u(t_0) - u(t_1)$ ima singularnu nulu konačnoga stupnja. Definiramo $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sa

$$\pi(u) = (u_0, u_1 - u_0).$$

Dokazujemo:

Teorem 3.43. *Ako se svaka nula beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja tada se* $u, v \in \mathcal{A}$ *ne mogu sječi netransverzalno i imamo da je* $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *injekcija.*

Dokaz: Zbog teorema 3.42 možemo pretpostaviti da su u, v u nosaču neke S, T-invarijatne mjere (ako nisu u nosaču iste mjere tada možemo uzeti njihovu konveksnu kombinaciju $\mu = \mu^1/2 + \mu^2/2$ i ponovo dobiti S, T-invarijatnu mjeru). Pretpostavimo da $u \neq v$ i $\pi(u) = \pi(v)$ tada $u_0 = v_0$ i $u_1 - u_0 = v_1 - v_0$, dakle $u_0 = v_0$ i $u_1 = v_1$, no to znači da $u - v$ ima singularnu nulu. Ako je ta nula konačnog stupnja tada $t \mapsto Z(\mu(t))$ strogo pada u $t = t_0$. To je nemoguće pa imamo da $u = v$.

Zato pretpostavimo da je beskonačnog stupnja. Zbog pretpostavke da se svaka nula beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja imamo da postoji $v^1(t_0) - v^2(t_1)$ sa singularnom nulom konačnoga stupnja tako da je $v^1(0), v^2(0) \in \text{supp}\mu$. Zaključujemo da je $t \mapsto Z(\mu(t+t_0), \mu(t+t_1))$ nerastuća sa periodom 1 dakle konstantna što je kontradikcija sa $v^1(t_0) \in$

supp($\mu(t_0)$), $v^2(t_1) \in$ supp($\mu(t_1)$). Time je teorem dokazan. $\square$

Sada ćemo dati neke dovoljne uvjete na sustav jednadžbi (2.1), takve da se svaka nula beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja.

Neka je $w = u(0) - v(0)$. Definiramo neke slučajeve:

(A1) postoji $i \in \mathbb{Z}$ takav da $w_i \neq 0$, $0 = w_{i+1} = w_{i+2} = w_{i+3} = \ldots$,

(A2) postoji $i \in \mathbb{Z}$ takav da $w_i \neq 0$, $0 = w_{i-1} = w_{i-2} = w_{i-3} = \ldots$,

(B1) postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $j \geq j_0$ postoji $\delta_j > 0$ takav da $\frac{du_j}{dt} \neq 0$ na $(-\delta_j, 0) \cup (0, \delta_j)$,

(B2) postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $j \leq j_0$ postoji $\delta_j > 0$ takav da $\frac{du_j}{dt} \neq 0$ na $(-\delta_j, 0) \cup (0, \delta_j)$.

Dokazujemo:

Lema 3.44. *Pretpostavimo da $u(0), v(0) \in K_n$ tako da $w = u(0) - v(0)$ ima nulu beskonačnoga stupnja. Ta nula može biti oblika (A1) ili (A2). Pretpostavimo u slučaju (A1) da vrijedi (B1), a u slučaju (A2) da vrijedi (B2). Tada imamo da se nula $u(0) - v(0)$ beskonačnoga stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja.*

Dokaz: Pretpostavimo da $u(0) - v(0) \neq 0$ te da je $u_j(0) - v_j(0) = 0$ za $j \geq j_0$ za neki j_0. Promotrimo nekoliko slučajeva

1 Postoje $j_1, \ldots, j_4$ takve da za mala pozitivna vremena $\frac{d}{dt}u_{j_i}$ za $i = 1, \ldots, 4$ imaju predzank $+, -, +, -$ ili $-, +, -, +$. Kako su vremena mala pozitivna to imamo da $u_{j_i}(t) - v_{j_i}(t)$ raste ili pada za sve $i = 1, \ldots, 4$. Pretpostavimo da raste, fiksiramo $0 < t_0 < \varepsilon$ i predznak $+, -, +, -$ tada kako $u_{j_3}(t)$ raste to možemo pronaći $0 < t_2 < t_0$ takav da je $u_{j_3}(t_2) - v_{j_3}(t_0) = 0$. Definiramo da je $t_1 \in [t_2, t_0)$ najveći takav da je $u_k(t_1) - v_k(t_0) \geq 0$ za $k = j_2 + 1, \ldots, j_4 - 1$ tada je barem jedna nejednakost zapravo jednakost, te imamo $u_{j_2}(t_1) - v_{j_2}(t_0) > 0$ i $u_{j_4}(t_0) - v_{j_4}(t_0) > 0$.

2 Pretpostavimo da je za mala pozitivna vremena predznak od $\frac{d}{dt}u_{j_1}, \ldots, \frac{d}{dt}u_{j_1+k}$ uvijek $-, -, \ldots, -$ te da za negativna vremena $-, +, +, \ldots, +, -$ ili slučaj u kojem zamijenimo $+$ sa $-$. U tom slučaju fiksiramo $0 < t_0 < \varepsilon$ i nađemo $-\varepsilon < t_1 < 0$ kao najveći $t < 0$ takav da je $u_j(t) \geq u_j(t_0)$ za sve $j = j_1 + 1, \ldots, j_1 + k - 1$ tada je barem jedna nejednakost zapravo jednakost te je $u_{j_1}(t_1) > u_{j_1}(t_0)$ i $u_{j_1+k}(t_1) > u_{j_1+k}(t_0)$ tako da $u(t_1) - u(t_0)$ ima singularnu nulu konačnog stupnja.

3 Pretpostavimo da za neki j_1 predznaci od $\frac{d}{dt}u_{j_1}, \ldots, \frac{d}{dt}u_{j_1+3}$ su $+,+,+,+$ ili $-,-,-,-$ za mala negativna vremena. Sada imamo $u_{j_1}(t_0) > v_{j_1}(t_0)$, $u_{j_1+1}(t_0) < v_{j_1+1}(t_0)$, $u_{j_1+2}(t_0) > v_{j_1+2}(t_0)$ ili $u_{j_1+1}(t_0) > v_{j_1+1}(t_0)$, $u_{j_1+2}(t_0) < v_{j_1+2}(t_0)$, $u_{j_1+3}(t_0) > v_{j_1+3}(t_0)$. Razmotrimo samo prvu mogućnost, fiksiramo $0 > t_0 > -\varepsilon$. Sada nađimo $0 > t_1 > t_0$ takav da je $u_{j_1+1}(t_1) = u_{j_1+1}(t_0)$. Po pretpostavci $u_{j_1}(t_1) > v_{j_1}(t_0)$ i $u_{j_1+2}(t_1) > v_{j_1+2}(t_0)$ tako da $u(t_1) - v(t_0)$ ima singularnu nulu konačnog stupnja.

Time je lema dokazana. $\square$

Propozicija 3.45. *Neka je $j \in \mathbb{Z}$ fiksan te neka su $t_0 \in \mathbb{R}$ i $u_0 \in K_n$ takvi da je $f_j(t_0, u_0) = 0$ tada (A3) povlači (B3) gdje*

(A3) postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $f_j(s, u_0) \neq 0$ za $s \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \cup (t_0, t_0 + \varepsilon)$.

(B3) postoji $\delta > 0$ takav da rješenje u (2.1) takvo da je $u(t_0) = u_0$ zadovoljava $f_j(t, u(t)) \neq 0$ na $(t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$.

Dokaz: Kako je $f_j(t_0, u_0) = 0$ te za $s \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ imamo $f_j(s, u_0) \neq 0$ to zbog neprekidnosti od f_j možemo pretpostaviti da postoji $\delta > 0$ tako da $f_j(s, u_0) > 0$ na $(t_0, t_0 + 2\delta)$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da $1/k < \delta$ imamo da postoji $C_k > 0$ takav da je $f_j(s, u_0) \geq C_k$ za $s \in [t_0 + 1/k, t_0 + \delta]$. Kako je f_j neprekidna to imamo da postoji okolina U od t_0 i okolina W od u_0 tako da je $|f_j(s, w) - f_j(s, u_0)| < C_k/2$ za $(s, w) \in U \times W$. Neka je $\delta > 0$ tako malen da je $(t_0, t_0 + \delta) \subseteq U$. Tada imamo da je $f_j(s, w) \geq C_k/2$ za $s \in [t_0 + 1/k, t_0 + \delta]$ i $w \in W$.

Definiramo $h^0(s) = u_0$,

$$h_j^{m+1}(s) = (u_0)_j + \int_t^s f_j(\tau, h^m(\tau))d\tau.$$

Za dovoljno mali $\delta > 0$ imamo da je $h_j^m(s) \in W$ za svaki $s \in [t_0, t_0 + \delta]$ i svaki $m \in \mathbb{N}$ jer $|h_j^{m+1}(s) - (u_0)_j| \leq M_n\delta$. Kako $f_j(s, h^m(s)) \geq C_k/2$ za svaki $s \in [t_0 + 1/k, t_0 + \delta]$ i svaki $m \in \mathbb{N}$ uzimanjem limesa dobivamo $f_j(s, u(s)) \geq C_k/2$ za $s \in [t_0 + 1/k, t_0 + \delta]$ no tada $f_j(s, u(s)) > 0$ za $s \in (t_0, t_0 + \delta)$ pa tako $\dot{u}_j(s) \neq 0$ za $s \in (t_0, t_0 + \delta)$. $\square$

Teorem 3.46. *Neka je $\mathcal{A}$ prostorno-vremenski atraktor dinamike*

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = f_j(t, u) = -V_2(u_{j+1}, u_j) - V_1(u_j, u_{j-1}) + F(t)$$

gdje je $F(t+T) = F(t)$ za neki temeljni period $T > 0$ takva da ni na jednom otvorenom intervalu nije konstanta. Tada je $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ injekcija.

Dokaz: Kako su uvjeti propozicije 3.45 zadovoljeni pa tada i uvjeti leme 3.44, to imamo da se svaka nula beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja. No tada je π injekcija. $\square$

Neka je $u \in \mathcal{X}_\rho$ tada slabi ω-granični skup u oznaci $\tilde{\omega}(u)$ definiramo kao najmanji zatvoren skup takav da za svaku njegovu okolinu U imamo da

$$\frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_U(T_n S_m u) \to 1$$

kada $N \to \infty$.

Lema 3.47. *Konfiguracija v je iz $\tilde{\omega}(u)$ ako i samo ako za svaku okolinu V od v postoji $\delta > 0$ i niz $N_k \to \infty$ takav da*

$$\frac{1}{N_k+1}\frac{1}{2N_k+1}\sum_{n=0}^{N_k}\sum_{m=-N_k}^{N_k} 1_V(T_n S_m v) \geq \delta$$

Dokaz: Pretpostavimo suprotno to jest da postoji okolina V od v takva da

$$\frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_V(T_n S_m u) \to 0$$

kada $N \to \infty$. Stavimo $u_N \sim v_N$ ukoliko $\lim_{N\to\infty} u_N = \lim_{N\to\infty} v_N$. Stavimo $C = \tilde{\omega}(u) \setminus V$. Tada je C zatvoren skup i stogi podskup od $\tilde{\omega}(u)$ takav da za svaku okolinu U od C:

$$\frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_U(T_n S_m u) \sim \frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_{U\cup V}(T_n S_m u).$$

No kako je $U \cup V$ okolina od $\tilde{\omega}(u)$, to vrijedi

$$\frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_U(T_n S_m u) \to 1.$$

To je kontradikcija s činjenicom da je $\tilde{\omega}(u)$ najmanji zatvoren skup s tim svojstvom. $\square$

Sada definiramo prostorno-vremenski atraktor kao skup

$$\mathcal{A} = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{u\in\mathcal{X}} \tilde{\omega}(u)\right).$$

Dokaz teorema 3.42: Prvo pokažimo da je svaki $v \in \tilde{\omega}(u)$ u nosaču neke S, T-invarijantne mjere. Ako $v \in \tilde{\omega}(u)$ za neki $u \in \mathcal{X}_\rho$, iz leme 3.47 slijedi da za svaku okolinu V od v postoji $\delta > 0$ i niz $N_k \to \infty$ takav da je

$$\frac{1}{N_k+1}\frac{1}{2N_k+1}\sum_{n=0}^{N_k}\sum_{m=-N_k}^{N_k} 1_V(T_n S_m u) \geq \delta.$$

Konstruiramo niz mjera na $\mathcal{X}_\rho$ sa

$$\mu_k = \frac{1}{(N_k+1)(2N_k+1)}\sum_{n=0}^{N_k}\sum_{m=-N_k}^{N_k} \delta_{T_n S_m u}$$

gdje je δ_u Diracova mjera s nosačem u. Kako je po Alaogluovom teoremu [22 teorem 5.18] skup vjerojatnostnih mjera na $\mathcal{X}_\rho$ kompaktan u slaboj-$*$ topologiji to postoji podniz takav da $\mu_{p_k} \rightharpoonup \nu$ označimo ga sa μ_k.

Provjerimo da je mjera ν takva da je S, T-invarijatna. Po definiciji slabe konvergencije imamo

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} f d\mu_k = \int_{\mathcal{X}_\rho} f d\nu$$

za sve neprekidne omeđene funkcije. Kako je

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} f d\delta_{T_n S_m u} = \int_{\mathcal{X}_\rho} f \circ T_n \circ S_m d\delta_u$$

tada

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} (f \circ T - f) d\mu_k =$$

$$= \frac{1}{n_k+1}\frac{1}{2n_k+1}\sum_{j=-n_k}^{n_k}\int_{\mathcal{X}_\rho} [(f \circ T^{n_k+1} \circ S^j - f \circ T^{n_k} \circ S^j) +$$

$$+(f \circ T^{n_k} \circ S^j - f \circ T^{n_k-1} \circ S^j) + \cdots + (f \circ T \circ S^j - f \circ S^j)] d\delta_u =$$

$$= \frac{1}{n_k+1}\int_{\mathcal{X}_\rho}\sum_{j=-n_k}^{n_k}\frac{1}{2n_k+1}(f \circ T^{n_k+1} - f) \circ S^j d\delta_u \to 0$$

kada $k \to \infty$ jer je f omeđena. Slično

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} (f \circ S - f) d\mu_k \to 0$$

kada $k \to \infty$. Dakle

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} f dT_* \nu = \int_{\mathcal{X}_\rho} f d\nu$$

$$\int_{\mathcal{X}_\rho} f dS_*\nu = \int_{\mathcal{X}_\rho} f d\nu.$$

Po Riezovom teoremu [29, teorem A.2.7] imamo da $T_*\nu = \nu$ i $S_*\nu = \nu$ to jest ν je S, T-invarijantna.

Izaberimo niz $(V_n)_n$ smanjujućih otvorenih okolina od v takvih da $\{v\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ i konstruiramo niz pridruženih S, T-invarijantnih mjera ν_n kao ranije. Tada je v u nosaču od S, T-invarijantne mjere $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1/2^n)\nu_n$.

Obrnuto neka je v u nosaču neke S, T-invarijantne mjere μ tada za svaku okolinu U od v imamo da je $\mu(U) > 0$. Možemo pretpostaviti da je μ ergodska jer u suprotnom napravimo ergodsku dekompoziciju [29, teorem 4.1.12]. Po poopćenom Birkhoffovom ergodskom teoremu koji je dokazan u [6] za skoro svaki $u \in \mathcal{X}_\rho$ imamo da

$$\frac{1}{N+1}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-N}^{N} 1_U(T_n S_m u) \to \int 1_U d\mu.$$

Dakle $v \in \tilde{\omega}(u)$ za skoro svaki $u \in \mathcal{X}_\rho$.

Treba još pokazati da je unija nosača S, T-invarinatnih mjera zatvoren skup. Pretpostavimo da je $(u_n)_n$ niz u tom skupu te pretpostavimo da $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ u λ-normi. Svaki u_n je u tom skupu pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji S, T-invarijantna mjera μ_n takva da je $u_n \in \text{supp}\mu_n$. Definiramo $\mu = \mu_1/2 + \mu_2/4 + \mu_3/8 + \dots$.

Kako je

$$u \in \text{supp}\mu \Leftrightarrow \forall U \ni u \text{ otvorenu okolinu } \mu(U) > 0,$$

pretpostavimo da $u \notin \text{supp}\mu$ tada postoji otvorena okolina $U \ni u$ takva da $\mu(U) = 0$. Sada kako $u_n \to u$ to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $u_n \in U$ za sve $n \geq n_0$ no tada $\mu_n(U) > 0$ pa tako i $\mu(U) > 0$.

Skup $\mathcal{A}_\rho$ je neprazan jer je $\mathcal{X}_\rho$ kompaktan i S, T-invarijatan pa po lemi 1.3 postoji S, T-invarijanta mjera na $\mathcal{X}_\rho$ to jest $\mathcal{A}_\rho \neq \emptyset$. $\square$

3.6. Dinamičke faze i fazni prijelazi

Definiramo slobodnu i zapinjajuću fazu te dajemo nekoliko karakterizacija tog pojma.

Definicija 3.48. Kažemo da je S, T-invarijantna mjera μ sinkronizirna ukoliko se nikoje dvije konfiguracije iz njenog nosača ne sijeku.

Definicija 3.49. Kažemo da je $\rho \in \mathbb{R}$ u slobodnoj fazi dinamike jednadžbe (2.1) ukoliko postoji sinkronizirana mjera μ takva da je $p_0(\mathrm{supp}\mu) = \mathbb{S}^1$ i takva da je $\mathrm{supp}\mu \subseteq \mathcal{X}_\rho$.

Definicija 3.50. Označimo sa $\mathcal{S}_\rho$ uniju nosača svih sinkroniziranih mjera na prostoru konfiguracija $\mathcal{X}_\rho$.

Teorem 3.51. *(Poincaréov teorem) Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor konačne mjere i neka je $f\colon X \to X$ preslikavanje koje čuva mjeru to jest $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ i neka je $U \subseteq X$ takav da $\mu(U) > 0$ tada postoji beskonačno $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.*

Dokaz: Stavimo $V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} f^{-k}(U)$. Jasno je da je $U \subseteq V_0$ i $V_i \subseteq V_j$ kada $j \leq i$. Također $V_i = f^{j-i}V_j$ tako da $\mu(V_i) = \mu(V_j)$ za sve $i, j \geq 0$ jer f čuva mjeru. Sada za svaki $n > 0$ vrijedi $U \setminus V_n \subseteq V_0 \setminus V_n$ tako da

$$\mu(U \setminus V_n) \leq \mu(V_0 \setminus V_n) = \mu(V_0) - \mu(V_n) = 0.$$

Dakle $\mu(U \setminus V_n) = 0$ za sve $n > 0$ tako da

$$\mu(U \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U \setminus V_n)) = 0.$$

No $U \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ je točno skup svih $x \in U$ takav da za neki n i sve $k > n$ imamo da $f^k(x) \notin U$. $\square$

Ako se nule beskonačnog stupnja mogu aproksimirati nulama konačnoga stupnja tada se svaki $u, v \in \mathcal{A}$ ne mogu sijeći netransverzalno. U tom slučaju reči ćemo da je atraktor transverzalan. U potpoglavlju 3.5. dali smo niz dovoljnih uvjeta za transferzalnost atraktora. Slutnja je da je svaki atraktor dinamike (2.1) transverzalan.

Lema 3.52. *Ako je $\mathcal{A}$ transverzalan tada za $u, v \in \mathcal{A}_\rho$ vrijedi da ako se u i v sijeku, tada postoje $u', v' \in \mathcal{A}_\rho$ koji se sijeku barem dva puta.*

Dokaz: Neka se u i v sijeku, tada kako se sijeku transverzalno to postoje otvoreni skupovi U oko u i V oko v takvi da svaki element iz U sječe svaki element iz V. Kako preslikavanje $S \times S\colon \mathcal{A}_\rho \times \mathcal{A}_\rho \to \mathcal{A}_\rho \times \mathcal{A}_\rho$ čuva mjeru to imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $(S \times S)^n(U \times V) \cap (U \times V) \neq \emptyset$ no tada postoje u', v' takvi da se sijeku barem dva puta. $\square$

Teorem 3.53. *Ako je atraktor $\mathcal{A}$ transverzalan tada imamo da je $\rho \in \mathbb{R}$ u slobodnoj fazi ako i samo ako vrijede slijedeća dva uvjeta:*

(i) svaka konfiguracija $u \in \mathcal{A}_\rho$ siječe svaku drugu konfiguraciju $v \in \mathcal{A}$ najviše jednom

(ii) $p_0(\mathcal{A}_\rho)$ je gust ili otvoren podskup od $\mathbb{S}^1$ gdje $p_0(u) = u_0$.

Dokaz: Pokažimo prvo samo ako smjer. Neka je μ iz definicije slobodne faze. Stavimo $C = \mathrm{supp}(\mu)$. Tada kako je $p_0\colon C \to \mathbb{S}^1$ injekcija (jer je μ sinkronizirana mjera) te kako je surjekcija zbog slobodne faze, to vrijedi da je bijekcija. Zaključujemo da je C slika neprekidne krivulje $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathcal{A}$, gdje smo poistovjetili konfiguracije u i $u+n$. Neka je $G\colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ podizanje od γ. Tada je C (u kojem ne poistovjećujemo u i $u+n$) slika od G gdje je G rastuća u svakoj koordinati te $G(0) = u$. Pretpostavimo da $v \in \mathcal{A}$ siječe u dvaput, recimo između $j, j+1$ i $k, k+1$. Možemo pretpostaviti da $v_j \leq u_j$, $v_{j+1} > u_{j+1}, \ldots, v_{k-1} > u_{k-1}$, $v_k \leq u_k$, $v_{k+1} < u_{k+1}$. Neka je $s \in \mathbb{R}$ najveći takav da se $G(s)$ i v sijeku između $j, \ldots, k+1$ tada se $G(s)$ i v sijeku netransverzalno što je nemoguće po pretpostavci na atraktor.

Pokažimo sada ako smjer, ako se u i v iz $\mathcal{A}_\rho$ sijeku tada postoje $u', v' \in \mathcal{A}_\rho$ koje se sijeku barem dvaput. To je kontradikcija s pretpostavkom, dakle $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{S}_\rho$. Stoga postoji jedinstvena sinkronizirana mjera μ takva da je $\mathrm{supp}\mu = \mathcal{S}_\rho$. Kako je $\mathcal{A}_\rho$ zatvoren to je $p_0(\mathcal{A}_\rho)$ zatvoren. Kako je po pretposatavci $p_0(\mathcal{A}_\rho)$ gust ili otvoren potskup od $\mathbb{S}^1$ to je $p_0(\mathrm{supp}\mu) = \mathbb{S}^1$, no tada je ρ u slobodnoj fazi. Time je lema dokazana. □

Slutnja je da teorem 3.53 vrijedi bez pretpostavke (ii).

Teorem 3.54. *Neka je atraktor $\mathcal{A}$ transverzalan. Tada je za bilo koji prosječni razmak $\rho \in \mathbb{R}$ skup $\mathcal{S}_\rho$ neprazan. U slobodnoj fazi $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{S}_\rho$.*

Dokaz. Neka je $\rho \in \mathbb{R}$. Izaberimo sinkronizirano rješenje u u $\mathcal{X}_\rho$. Neka je B najmanji zatvoren S, T-invarijantan skup koji sadrži u. Vidimo da je $B \subseteq \mathcal{X}_\rho$ tako da je B kompaktan. Po definiciji i neprekidnosti ako se dvije konfiguracije u B sijeku tada se sijeku netransverzalno. Zbog S, T-invarijantnosti i kompaktnosti od B imamo da postoji S, T-invarijantna mjera μ s nosčem u B. Neka je $\tilde{B}$ nosač te S, T-invarijantne mjere μ tada kako u $\tilde{B}$ ne postoje transverzalni presjeci (jer ne postoje u B), a kako je $\tilde{B} \subseteq \mathcal{A}$ po pretpostavci imamo da u $\tilde{B}$ ne postoje netransverzalni presjeci tako da u $\tilde{B}$ nema presjeka no onda je po definiciji μ sinkronizirana tako da je $\mathcal{S}_\rho$ neprazan.

Da bi pokazali $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{S}_\rho$, dovojno je pokazati da je $\mathcal{A}_\rho = C$ gdje je $C = \mathrm{supp}\mu$ iz definicije slobodne faze. Izaberimo bilo koji $v \in \mathcal{A}_\rho$ tada je v

u nosaču neke S, T-invarijantne mjere ζ, po definiciji od μ možemo naći u u nosaču od μ takava da $u_0 = v_0$. Ako $u \neq v$ imamo da se u i v sijeku točno jednom i to transverzalno. Sada je $\mu \times \zeta$ vjerojatnostna mjera na $\mathcal{A}_\rho \times \mathcal{A}$ invarijantna za $S \times S$. Ako su U i V dovoljno male okoline od u i v respektivno u $\mathcal{A}_\rho$ takve da se svake dvije konfiguracije iz U odnosno iz V sijeku jednom i to transverzalno. Zbog teorema 3.51 primjenjenog za $S \times S$ na $U \times V$ znamo da postoji beskonačno $n \in \mathbb{N}$ tako da je $(S \times S)^n(U \times V) \cap U \times V \neq \emptyset$ no tada postoji $(u, v) \in U \times V$ tako da je $(S^n u, S^n v) = (u', v')$ gdje su $u, u' \in U$ te $v, v' \in V$ no tada kako se u' i v' sijeku jednom tada se $S^n u$ i $S^n v$ sijeku no sada se u, v sijeku i $S^n u$ i $S^n v$ sijeku pa imamo da se u i v sijeku dvaput. No to je u kontradikciji s teoremom 3.53.

4. Tresna dinamika

4.1. Sustav tresnih jednadžbi

Tresni (ratchet) sustav često u literaturi znači sustav u kojem postoji makroskopski transport, makar u prosjeku ne djeluje nikakva vanjska sila. Promatrat ćemo poseban slučaj sustava (2.1) koji ćemo zvati tresni sustav

$$\frac{d}{dt}u_j = W'(u_{j-1} - u_j) - W'(u_j - u_{j+1}) + F'(u_j)K(t), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

To je poseban oblik jednadžbe (2.1) gdje je $V(u, v, t) = W(u-v)+F(u)K(t)$. Pretpostavljamo da vrijedi

(R0) W, F, K su realno-analitičke, te F i K nisu konstante

(R1) $F(u + 1) = F(u)$ za $u \in \mathbb{R}$

(R2) postoji $T > 0$ takav da $K(t + T) = K(t)$ za $t \in \mathbb{R}$

(R3) postoji $D > 0$ takav da je $W''(x) \geq D$ za $x \in \mathbb{R}$.

Prisjetimo se da je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

gdje je

$$K_n = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1} - u_j| \leq n\}.$$

Kako je (2.1) poseban oblik jednadžbe (2.1) i kako su W, F i K realno-analitičke funkcije tada po teoremu 2.3 imamo:

Teorem 4.1. *Za $u_0 \in K_n$ jednadžba* (4.1) *ima rješenje*

$$C^{\omega}([0, \infty), K_n)$$

takvo da je $u(0) = u_0$.

Neka je $\mathcal{X}_\rho$ kao prije skup svih elemenata iz $\mathcal{X}$ koji imaju prosječan razmak ρ. Neka je $\mathcal{A}$ prostorno vremenski atraktor jednadžbe (4.1). Kako je to poseban oblik jedadžbe (2.1) to po teoremu 3.42 imamo:

Teorem 4.2. *Prostorno vremenski atraktor $\mathcal{A}$ podudara se sa unijom nosača svih S, T-invarijatnih mjera na $\mathcal{X}$. Štoviše za svaki $\rho \in \mathbb{R}$ imamo da $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{X}_\rho \cap \mathcal{A}$ nije prazan.*

Dokazat ćemo u nekoliko lema da se nule $u - v$ beskonačnoga stupnja, u slučaju tresne dinamike, mogu aproksimirati nulama konačnoga stupnja ukoliko u ili v nije konstantno rješenje. Dokaz toga može se naći u sljedećem potpogavlju. Iz toga rezulata slijedi:

Teorem 4.3. *Atraktor jednadžbe* (4.1) *je transverzalan.*

Dokaz: Pretpostavimo da $\mathcal{A}$ nije transverzalan. Tada postoje $u, v \in \mathcal{A}$ takvi da $u - v$ ima singularnu nulu. Zbog teorema 4.2 imamo da su u, v u nosaču neke S, T-invarijantne mjere μ.

Ako je nula $u - v$ konačnoga stupnja tada iz propozicicije 3.41 slijedi da $t \mapsto Z(\mu(t))$ stogo pada u $t = 0$ gdje je $\mu(t) = T_t^* \mu$, no μ je T-invarijantna pa bi trebala biti konstanta.

Pretpostavimo da $u-v$ nije konačnoga stupnja. Pretpostavimo uz to da u nije konstantno. Tada iz leme 4.9 imamo da se da se svaka nula beskonačnog stupnja može aproksimirati nulama konačnoga stupnja. Tako imamo da postoji $v^1(t_0) - v^2(t_1)$ singularna nula konačnoga stupnja tako da je $v^1(0) = u$ i $v^2(0) = v$. Sada imamo da je

$$t \mapsto Z(\mu(t + t_0), \mu(t + t_1))$$

strogo padajuća u $t = 0$. S druge strane ta funkcija je nerastuća sa periodom jedan, dakle konstantna.

Uvedimo oznaku

$$\mathcal{C} = \{(a + \rho j)_{j \in \mathbb{Z}} : F'(a) = 0, \rho \in \mathbb{Z}\}/R$$

te stavimo $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$. Ako $u - v$ ima singularnu nulu i pretpostavimo da je $u \in \mathcal{B}$ i $v \in \mathcal{A}$ tada u nije konstantno pa $u = v$. Dakle ili su oba u, v iz $\mathcal{B}$ ili su oba iz $\mathcal{C}$. No ako $u-v$ ima singularnu nulu i $u, v \in \mathcal{C}$ tada $u = v$. □

Zbog prethodnog teorema i teorema 3.53 zaključujemo

Teorem 4.4. *Vrijedi da je $\rho \in \mathbb{R}$ u slobodnoj fazi ako i samo ako su ispunjena slijedeća dva uvjeta:*

(i) svaka konfiguracija $u \in \mathcal{A}_\rho$ siječe svaku drugu konfiguraciju $v \in \mathcal{A}$ najviše jednom,

(ii) $p_0(\mathcal{A}_\rho)$ je gust ili otvoren podskup od $\mathbb{S}^1$ gdje $p_0(u) = u_0$.

Teorem 3.54 povlači

Teorem 4.5. *Ako je tresni sustav u slobodnoj fazi za prosječan razmak $\rho \in \mathbb{R}$ tada vrijedi $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{S}_\rho$.*

4.2. Aproksimacija nula beskonačnoga stupnja

Da bi dokazali da je atraktor jednadžbe (4.1) transverzalan, potrebno je dokazati da se nultočke konačnoga stupnja mogu aproksimirati nulama beskonačnoga stupnja. To ćemo dokazati u nekoliko lema. No prvo uvedimo konvenciju da $f_j(t,u)$ od sada nadalje znači slijedeće:

$$f_j(t,u) = W'(u_{j-1} - u_j) - W'(u_j - u_{j+1}) + F'(u_j)K(t).$$

Lema 4.6. *Neka je u rješenje od* (4.1). *Tada je u konstantno rješenje ili postoji $j \in \mathbb{Z}$ tako da je $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta,0) \cup (0,\delta)$ za neki $\delta > 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da ne postoje $j \in \mathbb{Z}$ i $\delta > 0$ takavi da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta,0) \cup (0,\delta)$. Kako je u analitičko, to imamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\frac{d^n}{dt^n}u_j(0) = 0$ jer u suprotnom bi postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{d^n}{dt^n}u_j(0) \neq 0$ no tada bi $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta,0) \cup (0,\delta)$ za neki $\delta > 0$. Dakle vrijedi da ili postoji $j \in \mathbb{Z}$ i $\delta > 0$ tako da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta,0) \cup (0,\delta)$ ili je $\frac{d^n}{dt^n}u_j(0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $j \in \mathbb{Z}$ no tada $u(t) = u(0)$ je konstantno rješenje. □

Lema 4.7. *Pretpostavimo da u nije konstantno rješenje. Tada postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $j \geq j_0$ imamo da postoji $\delta_j > 0$ takav da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta_j,0) \cup (0,\delta_j)$ ili postoje međusobno različiti $j_4 > j_3 > j_2 > j_1 \geq j_0$ takvi da $\frac{d}{dt}u_{j_i}$ ima predznak $+,-,+,-$ za $i = 1,2,3,4$. Štoviše mogu se izabrati j_i tako da budu svi parni ili svi neparni za $i = 1,2,3,4$.*

Dokaz: Kako u nije konstantno to postoji $k \in \mathbb{Z}$ i $\delta_k > 0$ takav da $\frac{d}{dt}u_k \neq 0$ na $(-\delta_k,0) \cup (0,\delta_k)$. Pretpostavimo da ne postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za sve $j \geq j_0$ postoji $\delta_j > 0$ takav da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta_j,0) \cup (0,\delta_j)$. To je jedino moguće ukoliko za svaki $j_1 \in \mathbb{Z}$ postoji $j_2 \geq j_1$ takav da $\frac{d}{dt}u_{j_2} = 0$. Neka je $l \in \mathbb{Z}$ najmanji cijeli broj veći od k takav da $\frac{d}{dt}u_l = 0$. Takav sigurno postoji zbog pretpostavke. Tada

$$0 = \frac{d}{dt}u_l(t) = W'(u_{l-1}(t) - u_l(t)) - W'(u_l(t) - u_{l+1}(t)) + F'(u_l(t))K(t) \quad (4.2)$$

Uočimo da $F'(u_l(0)) = 0$. U suprotnom primijenimo propozijciju 3.45 pa dobijemo $\frac{d}{dt}u_l \neq 0$ na maloj okolini od 0. No tada $F'(u_l) = 0$. Kako $\frac{d}{dt}u_{l-1} \neq 0$ na $(-\delta_{l-1},0) \cup (0,\delta_{l-1})$ to imamo da u_{l-1} raste ili pada. No tada u_{l+1} pada ili raste respektivno zbog stroge konveksnosti od W. Pokažimo to strogo. Deriviramo (4.2) i dobijemo

$$0 = W''(u_{l-1} - u_l)\frac{d}{dt}u_{l-1} + W''(u_l - u_{l+1})\frac{d}{dt}u_{l+1}.$$

sada kako $W''(x) > 0$, vrijedi da $\frac{d}{dt}u_{l-1}$ i $\frac{d}{dt}u_{l+1}$ imaju suprotan predznak. Uzmimo da j_1 bude onaj iz $\{l-1, l+1\}$ tako da je taj predznak pozitivan.

Po pretpostavci znamo da postoji $m \in \mathbb{Z}$ najmanji cijeli broj veći od $l+1$ takav da je $\frac{d}{dt}u_m = 0$. No tada po dokazanom vrijedi da $\frac{d}{dt}u_{m-1}$ i $\frac{d}{dt}u_{m+1}$ imaju suprotan predznak. Označimo s $j_2 \in \{m-1, m+1\}$ indeks za koji je taj predznak negativan.

Taj postupak se očito može nastaviti dok ne dobijemo j_1, j_2, j_3, j_4 iz tvrdnje leme. Iz dokaza vidimo da je nemoguće da postoji j_0 takav da za sve $j \geq j_0$ imamo $\frac{d}{dt}u_j = 0$. U potonjem slučaju predznaci idu naprimjer $+, 0, -, \ldots, +, 0, -, \ldots, -, 0, +, \ldots$. Sada jednostavnom kombinatorikom dobivamo da se mogu j_i izabrati tako da budu svi parni ili svi neparni. Time je lema dokazana. $\square$

Koristeći iste argumente može se dokazati:

Lema 4.8. *Pretpostavimo da u nije konstantno rješenje. Tada postoji $j_0 \in \mathbb{Z}$ takav da za svaki $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $j \leq j_0$ imamo da postoji $\delta_j > 0$ takav da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta_j, 0) \cup (0, \delta_j)$, ili postoje međusobno različiti $j_4 < j_3 < j_2 < j_1 \leq j_0$ takvi da $\frac{d}{dt}u_{j_i}$ ima predznak $+, -, +, -$ za $i = 1, 2, 3, 4$.*

Lema 4.9. *Pretpostavimo da je barem jedno od u, v nekonstantno rješenje od* (4.1)*, te da $u(0) - v(0)$ ima singularnu nulu beskonačnog stupnja. Tada se nula $u(0) - v(0)$ može aproksimirati nulama konačnog stupnja.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je u nekonstantno rješenje. Sada vrijedi ili
(A) postoji j_0 takav da za svaki $j \geq j_0$ vrijedi da postoji $\delta_j > 0$ tako da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta_j, 0) \cup (0, \delta_j)$ ili
(B) postoje $j_i \geq j_0$ takvi da su ili svi parni ili svi neparni za $i = 1, 2, 3, 4$ takvi da imaju predznak $+, -, +, -$.

Te vrijedi ili
(A') postoji j_0 takav da za svaki $j \leq j_0$ vrijedi da postoji $\delta_j > 0$ tako da $\frac{d}{dt}u_j \neq 0$ na $(-\delta_j, 0) \cup (0, \delta_j)$ ili
(B') postoje $j_i \leq j_0$ takvi da su ili svi parni ili svi neparni za $i = 1, 2, 3, 4$ takvi da imaju predznak $+, -, +, -$.

Pretpostavimo da je nula beskonačnog stupnja na $w = u(0) - v(0)$ takva da je $w_i \neq 0$, $w_{i+1} = w_{i+2} = w_{i+3} = \cdots = 0$. U tom slučaju promatramo dihotomiju (A) ili (B).

Slično se pokaže za nulu $w_i \neq 0$, $w_{i-1} = w_{i-2} = w_{i-3} = \cdots = 0$. U kojem slučaju promatramo dihotomiju (A') ili (B'). Pa nastavimo s dokazom.

Ako vrijedi (A) tvrdnja slijedi iz leme 3.44. Ako vrijedi (B) i ako promatramo mala pozitivna vremena tvrdnja slijedi iz leme 3.44, slučaj 1. Zato promotrimo slučaj malih po modulu negativnih vremena. Kako su vremena mala negativna te $j_1, \ldots, j_4$ svi parni ili svi neparni, to $u_{j_i} - v_{j_i}$ raste ili pada za sve $i = 1, \ldots, 4$ pa pretpostavimo da pada. Uzmimo $-\varepsilon < t_0 < 0$ tada u_{j_3} raste pa postoji $t_0 < t_2 < 0$ tako da je $u_{j_3}(t_2) - u_{j_3}(t_0) = 0$. Definiramo $t_1 \in (t_0, t_2]$ kao najveći takav da je $u_k(t_1) - u_k(t_0) \geq 0$ za sve $k = j_2 + 1, \ldots, j_4 - 1$. Tada je barem jedna nejednakost zapravo jednakost te vrijedi $u_{j_2}(t_1) - v_{j_2}(t_0) < 0$ i $u_{j_4}(t_1) - v_{j_4}(t_0) < 0$. Dakle postoji singularna nula konačnoga stupnja. □

Teorem 4.10. *Funkcija* $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *je injektivna.*

Dokaz: Pretpostavimo da $\pi(u) = \pi(v)$. Tada $u - v$ ima singularnu nulu što je nemoguće po teoremu 4.3. Zaključujemo da je $u = v$ no tada je π injekcija. □

Projekcija π omogućava nam da vizualiziramo i analiziramo $\mathcal{A}$ u 2D. Neka je $h = \pi \circ S \circ \pi^{-1}$. Kako poistovjećujemo orbite u i $u+n$ za cijele n, preslikavanje h je dobro definirano na cilindru $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

4.3. Transport

Precizno definirajmo transport. Kažemo da je transport nula ukoliko za svaku S, T-invarijantnu mjeru μ imamo da je

$$0 = \overline{v}(\mu) = \int ((T_1 u)_0 - u_0) d\mu(u).$$

Dokazujemo:

Teorem 4.11. *Ukoliko je jednadžba* (4.1) *u slobodnoj fazi i ukoliko* T_1 *nije konstantna funkcija, tada transport nije nula.*

Dokaz: Kako je jednadžba u slobodnoj fazi to postoji sinkronizirana mjera μ. Pa kako T_1 nije konstanta to postoji $u \in \operatorname{supp}(\mu)$ tako da je recimo $(T_1 u)_0 - u_0 > 0$. Tada jer je μ sinkronizirna vrijedi $(T_1 u)_0 - u_0 > 0$ za sve $u \in \operatorname{supp}(\mu)$ pa je tada $\overline{v}(\mu) \neq 0$ to jest transport nije nula. □

Sažetak

U radu promatramo disipativnu dinamiku Frenkel-Kontorovina (FK) modela, kao jednog od najbitnijih fizikalnih modela, primjerice u fizici čvrstog stanja. FK model je poopćenje jednodimenzionalnog niza elastično povezanih čestica u periodičnom potencijalu s konstantnom ili periodičnom uniformnom silom. Rad se usredotočuje na razvoj teorije za neautonomni FK, tj. za slučaj gdje jednadžbe ovise o vremenu. Posebno promatramo slučaj tresne dinamike (neautonomna dinamika bez vanjske sile), s nizom otvorenih pitanja poput postojanja transporta.

U radu prvo pokazujemo postojanje rješenja u odgovarajućim prostorima funkcija. Pokazujemo i postojanje polutoka, te glatkoću i analitičnost rješenja ovisno o početnim uvjetima i vektorskom polju. Zatim definiramo sinkronizirano rješenje, te pokazajemo da za svaki prosječan razmak postoji bar jedno sinkronizirano rješenje.

Ključan pojam za opis dinamike su nule razlike rješenja. Razlikujemo singularnu odnosno regularnu nulu (netransverzalni odnosno transverzalni presjek rješenja), te pokazujemo da je broj nula razlike dvaju rješnja neautonomnog FK model nerastuć.

Posebno promatramo prostorno-vremenski invarijantne mjere, te slabi ω-granični skup i prostorno vremenski atraktor kao uniju svih slabih ω-graničnih skupova. Dokazujemo da se prostorno vremenski atraktor podudara sa unijom nosača svih prostorno vremenski invarijantnih mjera. Uvodimo pojam transverzalnog prostorno-vremenskog atraktora, kao atraktora takvog da se dvije konfiguracije u atraktoru ne mogu sijeći netransverzalno. Ključan rezultat su dovoljni, provjerljivi uvjeti za transverzalnost atraktora, primjerice realna analitičnost za tresni sustav.

Razlikujemo dvije faze dinamike: slobodnu i zapinjajuću fazu, te strogo uvodimo pojam transporta (za tresni sustav). Za transverzalne prostorno-vremenske atraktore dajemo slab, općenit dovoljan uvjet za postojanje transporta. Slutnja da transport postoji za određene sustave ostaje otvoren problem; no uveden dovoljni uvjet daje mogućnost brze numeričke provjere za konkretan sustav.

Konačno, pokazujemo da su za tresni sustav sinkronizirana rješenja stabilna u ergodsko-teoretskom smislu.

Summary

In this thesis we consider dissipative dynamics of Frenkel-Kontorova (FK) models, one of the most important physical models, for example in the solid state physics. FK model generalizes one-dimensional elastically connected chains of particles in a periodic potential, with a constant or periodic uniform force. The thesis focuses on development of the theory for non-autonomous FK model, that means in the case when the equations depend on time. In particular we consider the case of Ratchet dynamics (non-autonomous dynamics without an external force); with a number of open problems, for example existence of transport.

We first show in the thesis existence of solutions on appropriate function spaces. We demonstrate existence of a semi-flow, smoothness and analyticity of the solution depending on the initial condition and the vector field. We then define a synchronized solution, and show that for every mean spacing there exist at least one synchronized solution.

The key idea needed to describe the dynamics is zeroes of a difference of two solutions. We distinguish regular and singular zeroes (transversal and non-transversal intersections of solutions), and show that the number of zeroes of a difference of two solutions of a non-autonomous FK model is non-increasing.

In particular we consider space-time invariant measures, weak ω-limit sets, and space time attractors as unions of weak ω-limit sets. We show that the space-time attractor is equal to the union of supports of space-time invariant measures. We introduce the notion of a transversal space-time attractor, as the attractor for which any two configurations in the attractor can not intersect non-transversally. The key result are sufficient, verifiable conditions for an attractor to be transversal, for example analyticity for the Ratchet system.

We distinguish two dynamical phase: depinned and pinned phase, and rigorously introduce the notion of transport (for the Ratchet system). For transversal space-time attractors, we give a weak, general sufficient condition for the existence of transport. The conjecture that transport exists for specific systems remains open; however the sufficient condition gives a possibility of fast numerical verification of it for a specific system.

Finally, we show that for the Ratchet system, the synchronized solutions are stable in an ergodic-theoretical sense.

Literatura

[1] S. Angenent and B. Fiedler, *The dynamics of rotating waves in scalar reaction diffusion equations*, Trans. Am. Math. Soc. 307 (1988), 545-568.

[2] S. Aubry and P. Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel- Kontovora model and its extensions*, Physica D 8 (1983), 381.422.

[3] C. Baesens, *Spatially extended systems with monotone dynamics (continuous time). Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*, 241- 263, Lecture Notes in Phys. 671, Springer (2005).

[4] C. Baesens, R.S. Mackay *Gradient dynamics of tilted Frenkel-Kontorova models* Nonlinearity 11 (1998) 949-964

[5] V.Bangert *Mather Sets for Twist Maps and Geodesics on Tori* Dynamics Reported, volumen 1 (1988) 1-56

[6] T. Bewley *Exstension of the Birkhoff and von Neumann ergodic theorems to general semi-groups* Ann Inst. Henri Poincaré 7 (1971) 283-291

[7] Patric Billingsley *Convergence of Probability Measures*, New York 1999.

[8] Raoul Bott, Loring W.Tu *Differential Forms in Algebraic Topology* Springer 1999.

[9] Philip L. Boyland, Glen R. Hall *Invariant Circles and the Order Structure of Periodic Orbits in Monotone Twist Maps* Topology, volumen 26 (1987) 21-35

[10] Philip L. Boyland *Invariant Circles and Rotation Bands in Monotone Twist Maps* Communications in Mathematical Physics, volumen 113 (1987) 67-77

[11] O. M. Braun and Y. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova Model. Concepts, methods, applications.* Springer- Verlag, Berlin, 2004.

[12] Glen E. Bredon *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

[13] Andrew M.Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson *Real Analysis* Prentice Hall 1997.

[14] L. Bunimovich and Y. Sinai, *Spacetime chaos in coupled map lattices*, Nonlinearity 1 (1988), 491-516.

[15] D.K. Campbell, S. Flach, and Yu. S. Kivshar, Phys. Tod. 57, 43 (2004). 211

[16] P.M. Chaikin and T.C. Lubensky *Principles of condensed matter physics* (Cambridge University Press, Cambridge 1995). 210

[17] J.R.Chazottes, B.Fernandez *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems* 241-263, Lecture Notes in Phys. 671, Springer (2005)

[18] B.A. Duborovin, A.T.Fomenko, S.P.Novikov *Modern Geometry-Methods and Applications, Part II. The Geometry and Topology of Manifolds* Springer-Verlag 1985.

[19] J.-P. Eckmann and J. Rougemont, *Coarsening by Ginzburg-Landau dynamics*, Comm. Math. Phys. 199 (1998), 441-470.

[20] B. Fiedler, J.Mallet-Paret *A Poincaré-Bendixon theorem for scalar reaction diffusion equations* Arch. Rational Mech. Anal. 107 (1989), 325-345

[21] L.M.Floria, J.J.Mazo *Dissipative dynamics of the Frenkel-Kontorova model* Advances in Physics 45 (1996) 505-598

[22] Gerald B. Folland *Real analysis Modern Techniques and Their Applications*, Wiley-Interscience 1999.

[23] Th. Gallay, A.Scheel *Diffusive stability of oscilations in reaction-diffusion equations* Trans. Am. Math. Soc. 363 (2011) 2571-2598

[24] R.W.Ghirst, R.C.Vandervorst *Scalar parabolic PDEs and braids* Trans.Am. Math. Soc. 361 (2009) 2755-2788

[25] Christophe Gole *Symplectic twist maps* Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 2001.

[26] J. M. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. 20 (1979), 1183.

[27] B.Hu,W.Qin, Z.Zheng *Rotation number of the overdamped Frenkel-Kontorova model with ac-driving* Physica D, 208 (2005),172-190

[28] R. Joly, G.Raugel *Generic Morse-Smale property for the parabolic equation on the circle* Ann. Inst. H. Poincaré 27 (2010) 1397-1440

[29] A. Katok, B. Hasselblatt *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* Cambridge University Press, 1995.

[30] T.W.Körner *Fourier Analysis* Cambridge University Press 1989.

[31] G. Krantz, R. Parks *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser, 2002.

[32] R. de la Llave, E. Valdinoci *A generalization of Aubry-Mather theory to partaial differenatial equations and pseudo-differentaial equations* Ann. I. H. Poincaré 26 (2009) 1309-1344

[33] J.Mather *Minimal measures* Comm. Math. Helvetici 64 (1989) 375-394

[34] J.J. Mazo, in *Energy Localisation and transver*, edited by T. Dauxois, A. LitvakHinenzon, R.S. Mackay and A. Spanoudaki (Singapore: World Scientific) 2003. 211, 212

[35] A. Mielke, S. Zelik *Multi-pulse evolutionand space-time chaos in dissipative systems* Mem. Am. Math. Soc. 198 (2009) 97pp

[36] Wen-Xin Qin *Existance of dynamical hull functions with two variables for the ac-driven Frenkel-Kontorova model* Jurnal of Differential Equations, volumen 255 (2013) 3472-3490

[37] Wen-Xin Qin *Dynamics of Frenkel-Kontorova model with irrational mean spacing* Nonlinearity 23 (2010) 1873-1886

[38] Wen-Xin Qin *Existance and Modulation of Uniform Sliding States in Driven and Overdamped Particle Chains* Communications in Mathematical Physics, volumen 311 (2012) 513-538

[39] S.Slijepčević *The energy flow of discrete extended gradient systems* Nonlinearity 26 (2013) 2051-2079

[40] Siniša Slijepčević *The Aubry-Mather theorem for driven generalized elastic chains* Disc. Cont. Dyn. Systems A 34 (2014),2983-3011

[41] Siniša Slijepčević *Stability of synchronization in dissipatively driven Frenkel-Kontorova models*

[42] H. L. Smith, *Monotone dynamical systems, Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 41, AMS, Providence, 1996.

[43] Terence Tao *Poincaré's Legacies* Am. Math. Soc. 2009.

[44] S. Zelik *Formally gradient reaction-diffusion systems in* $\mathbb{R}^n$ *have zero spatio-temporal entropy* Discrete Contin. Dyn. Sys, 2003, suppl. 960-966

Životopis

Rođen 31. prosinca 1984. u Zagrebu gdje pohađa osnovnu i srednju školu.

Upisuje Prirodoslovno-matematiki fakultet Matematiki odsjek 2003. godine.

Studij završava u lipnju 2009. godine kada diplomira teorijsku matematiku s temom diplomske radnje „Uvod u Morseovu teoriju".

Zapošljava se kao honorarni asistent na Fakultetu elektronike i računarstva u zimskom semestru akademske godine 2009./2010.

Doktorski studij upisuje u prosincu 2009. godine.

Mjesto asistenta na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Matematičkom odsjeku dobiva 1. ožujka 2010. godine.

Do sada u kolaboraciji s dr. sc. Marinom Ninčević i prof. dr. sc. Sinišom Slijepčevićem ima jedan znanstveni rad.