Upotpunjeni Hopfovi algebroidi

Stojić, Martina

Sveučilište u Zagrebu
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Stojić

Upotpunjeni Hopfovi algebroidi

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2017.

Sveučilište u Zagrebu
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Stojić

Upotpunjeni Hopfovi algebroidi

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Zoran Škoda

Zagreb, 2017.

University of Zagreb
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Martina Stojić

Completed Hopf algebroids

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
doc. dr. sc. Zoran Škoda

Zagreb, 2017

Mentor
doc. dr. sc. Zoran Škoda
Sveučilište u Zadru
Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja
Ulica dr. Franje Tuđmana 24
23000 Zadar, Hrvatska
e-mail adresa: zskoda@irb.hr

Supervisor
doc. dr. sc. Zoran Škoda
University of Zadar
Department of Teachers' Education
Ulica dr. Franje Tuđmana 24
23000 Zadar, Croatia
e-mail address: zskoda@irb.hr

Sažetak

Ključne riječi: Hopfov algebroid, formalno upotpunjenje, filtrirani vektorski prostor, kofiltrirani vektorski prostor, filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor, strogi ind-objekt, strogi pro-objekt, strogi ind-pro-objekt, formalna suma, formalna baza, univerzalna omotačka algebra, upotpunjeni tenzorski produkt, unutarnji bialgebroid, dualne Hopfove algebre, Yetter-Drinfeldov modul, skalarno proširenje, Heisenbergovo udvojenje

U ovoj disertaciji uvodimo prirodno poopćenje pojma Hopfovog algebroida unutar simetrične monoidalne kategorije s koujednačiteljima koji komutiraju s monoidalnim produktom. U radu također konstruiramo simetričnu monoidalnu kategoriju $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora, čiji morfizmi su linearna preslikavanja koja u slabom smislu poštuju filtracije i kofiltracije, a monoidalni produkt je obični tenzorski produkt vektorskih prostora formalno upotpunjen i s odgovarajućom filtracijom kofiltracija. Za tu kategoriju u radu dokazujemo da zadovoljava gore navedene uvjete za postojanje unutarnjeg Hopfovog algebroida. Ona kao potkategorije sadrži kategoriju $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ filtriranih vektorskih prostora i njoj dualnu kategoriju $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ kofiltriranih vektorskih prostora. Njen monoidalni produkt objedinjuje obični tenzorski produkt i upotpunjeni tenzorski produkt.

Jednu od važnijih klasa običnih Hopfovih algebroida nad nekomutativnom bazom čine poludirektni produkti $H\sharp A$ Hopfove algebre H i pleteničasto-komutativne algebre A u kategoriji Yetter-Drinfeldovih modula nad H. Tu klasu Hopfovih algebroida zovemo skalarnim proširenjima. U ovom radu dokazujemo da poludirektni produkti u kojima su Hopfova algebra H i Yetter-Drinfeldova modulna algebra A zamijenjene svojim unutarnjim analogonima u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ imaju strukturu Hopfovih algebroida u toj monoidalnoj kategoriji. Time među ostalim postavljamo temelj za proučavanje poopćenja Heisenbergovih udvojenja $A^*\sharp A$, ona u kojima je A beskonačno-dimenzionalna Hopfova algebra umjesto konačno-dimenzionalna, te postojanje strukture poopćenog Hopfovog algebroida na njima.

U disertaciji su zatim proučavana Hopfova sparivanja filtriranih Hopfovih algebri A i kofiltriranih Hopfovih algebri H koja su nedegenerirana u H, te su nađeni dovoljni uvjeti uz

koje A postaje pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u kategoriji $\mathrm{indproVect}$. Proučavana je također manja klasa primjera, u kojima je A Hopfova algebra filtrirana konačno-dimenzionalnim komponentama. Tu su nađeni nužni i dovoljni uvjeti na Hopfove algebre A i A^*, odnosno A i H, u vidu konačne dimenzionalnosti adjungiranih orbita od A te postojanja određenih kanonskih elemenata unutar $H\sharp A$. Time je dakle inducirana konstrukcija nekih filtrirano-kofiltriranih Hopfovih algebroida tipa skalarnog proširenja. Važni primjeri takvih skalarnih proširenja su oni u kojima je A univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ konačno-dimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Ako je H njen algebarski dual $U(\mathfrak{g})^*$ s induciranom kofiltracijom, pripadno skalarno proširenje, koje je poopćeno Heisenbergovo udvojenje od $U(\mathfrak{g})$, može se identificirati s algebrom diferencijalnih operatora na formalnoj okolini jedinice pripadne Liejeve grupe što sugerira neke od primjena u geometriji i matematičkoj fizici.

Summary

Keywords: Hopf algebroid, formal completion, filtered vector space, cofiltered vector space, filtered-cofiltered vector space, strict ind-object, strict pro-object, strict ind-pro-object, formal sum, formal basis, universal enveloping algebra, completed tensor product, internal bialgebroid, dual Hopf algebra, Yetter-Drinfeld module, scalar extension, Heisenberg double

In this thesis, a natural generalization of the definition of a Hopf algebroid is introduced, internal to any symmetric monoidal category with coequalizers that commute with the monoidal product. In this thesis we also construct a symmetric monoidal category $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ of filtered-cofiltered vector spaces, whose morphisms are linear maps which in a weak sense respect the filtrations and cofiltrations, and whose monoidal product is the usual tensor product of vector spaces formally completed and with a corresponding filtration of cofiltrations. We prove that this category satisfies the above conditions for the existence of internal Hopf algebroids. It contains two dual subcategories, the category $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ of filtered vector spaces and the category $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ of cofiltered vector spaces. The monoidal product in it combines the ordinary tensor product and a completed tensor product.

An important class of Hopf algebroids over a noncommutative base is comprised of smash products of a Hopf algebra H and a braided-commutative algebra A in the category of Yetter-Drinfeld modules over H. Such Hopf algebroids are called scalar extensions. In this thesis, we prove that the smash products in which H and A are replaced by their analogues in the monoidal category of filtered-cofiltered vector spaces have the structure of Hopf algebroids in that monoidal category. By doing this, we set the basis for studying the Heisenberg doubles $A^*\sharp A$ in which A is an infinite-dimensional Hopf algebra instead of a finite-dimensional one, among other examples, and the existence of the Hopf algebroid structure on them internal to the category $\mathrm{indproVect}$.

We then study Hopf pairings of a filtered Hopf algebra A and a cofiltered Hopf algebra H which are non-degenerate in the variable in H, and find sufficient conditions for A to be a braided-commutative Yetter-Drinfeld module algebra over H in the $\mathrm{indproVect}$ category. A smaller class of examples is also studied, for which A is a Hopf algebra countably filtered by

finite-dimensional vector spaces. Here we find necessary and sufficient conditions on Hopf algebras A and A^*, or A and H, in the form of finite dimensionality of the adjoint orbits of A and the existence of certain canonical elements in $H\sharp A$. Thus a construction of some filtered-cofiltered Hopf algebroids of scalar extension type is obtained. Important examples of such scalar extensions are the ones with A the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ of a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$. When H is equal to its algebraic dual $U(\mathfrak{g})^*$ with induced cofiltration, the corresponding scalar extension, that is the Heisenberg double of $U(\mathfrak{g})$, can be identified as an algebra with the algebra of differential operators on the formal neighborhood of the unit of a Lie group integrating $\mathfrak{g}$, suggesting applications in geometry and mathematical physics.

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Motivacija . . . 1

1.1.1 Grupoidi i komutativni Hopfovi algebroidi . . . 1

1.1.2 Bialgebroidi i Hopfovi algebroidi nad nekomutativnom bazom . . . 2

1.1.3 Skalarna proširenja . . . 3

1.1.4 Problem formalnih upotpunjenja . . . 4

1.2 Pregled rezultata . . . 4

1.2.1 Simetrična monoidalna kategorija $\mathrm{indproVect}$ . . . 7

1.2.2 Definicija unutarnjeg Hopfovog algebroida. Teorem o unutarnjem skalarnom proširenju . . . 11

1.2.3 Heisenbergova udvojenja filtriranih Hopfovih algebri i poopćenja. Primjeri skalarnih proširenja . . . 11

2 Neke opće činjenice iz teorije kategorija **15**

2.1 Osnovna kategorijska terminologija . . . 15

2.2 Simetrične monoidalne kategorije . . . 19

2.3 Kategorija vektorskih prostora $(\mathrm{Vect}, \otimes, k)$ . . . 22

2.4 Limesi i filtrirani kolimesi u Set i Vect . . . 24

2.4.1 Limesi u Set i Vect . . . 24

2.4.2 Filtrirane i usmjerene kategorije . . . 25

2.4.3 Filtrirani kolimesi u kategorijama Set i Vect . . . 26

2.5 Usmjereni sustavi i inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$ . . . 26

2.5.1 Usmjereni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$ . . . 27

2.5.2 Inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$ . . . 28

2.5.3 Kofinalnost . . . 30

3 Kategorija $\mathrm{proVect}$ kofiltriranih vektorskih prostora **31**

3.1 Definicije . . . 31

3.1.1 Kategorija $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ kofiltracija u $\mathcal{V}$ 31
3.1.2 Kategorija $\mathrm{proVect}$ kofiltriranih vektorskih prostora 34
3.1.3 Upotpunjenje vektorskog prostora po kofiltraciji 38
3.1.4 Kategorija proSet kofiltriranih skupova 40
3.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{proVect}$ 41
3.2.1 Proširenje tenzorskog produkta s $\mathcal{V}$ na kategoriju $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ 41
3.2.2 Univerzalno svojstvo tenzorskog produkta kofiltracija 46
3.2.3 Upotpunjeni tenzorski produkt 47
3.2.4 Univerzalno svojstvo upotpunjenog tenzorskog produkta 48
3.3 Formalne sume i formalne baze 49
3.3.1 Formalne sume i neprekidna preslikavanja 49
3.3.2 Formalne sume i upotpunjeni tenzorski produkt 51
3.3.3 Računanje s formalnim sumama 52
3.3.4 Formalne baze i upotpunjeni tenzorski produkt 54
3.3.5 Obični i upotpunjeni tenzorski produkt 58
3.3.6 Računanje sa zapisima u formalnoj bazi 59
3.4 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{proVect}$ 61
3.4.1 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ i tenzorski produkt 61
3.4.2 Potprostori, jezgre i kvocijenti 65
3.4.3 Monomorfizmi i epimorfizmi 74
3.4.4 Koprodukti i kolimesi u kategorijama $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ i $\mathrm{proVect}$ 75
3.4.5 Tenzorski produkt monomorfizama je monomorfizam 84

4 Kategorija $\mathrm{indVect}$ filtriranih vektorskih prostora **86**
4.1 Definicije 86
4.1.1 Kategorija $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ filtracija u $\mathcal{V}$ 86
4.1.2 Kategorija $\mathrm{indVect}$ filtriranih vektorskih prostora 87
4.1.3 Kategorija filtriranih skupova 92
4.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indVect}$ 93
4.2.1 Proširenje tenzorskog produkta s $\mathcal{V}$ na kategoriju $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ 93
4.2.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indVect}$ 97
4.3 Konačne sume i filtrirane baze 100
4.4 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{indVect}$ 101
4.4.1 Monomorfizmi i epimorfizmi 101
4.4.2 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathrm{Vect}$ i tenzorski produkt 102
4.4.3 Potprostori, jezgre, slike i kvocijenti 110

5 Kategorija $\mathrm{indproVect}$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora **114**
5.1 Definicije 114
5.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indproVect}$ 117
5.2.1 Proširenja preslikavanja 119
5.3 Dualnost u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ 122
5.4 Formalne sume u $\mathrm{indproVect}$ 125
5.4.1 Računanje s formalnim sumama 126
5.5 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ 128
5.5.1 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ i tenzorski produkt 128
5.5.2 Ujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ 137

6 Algebra u monoidalnim kategorijama **141**
6.1 Algebra, koalgebra, bialgebra, Hopfova algebra 141
6.1.1 Definicija monoida (algebre) i morfizma monoida 141
6.1.2 Definicija komonoida (koalgebre) i morfizma komonoida 142
6.1.3 Sweedlerova notacija i apstraktna Sweedlerova notacija 143
6.1.4 Konvolucijsko množenje i dualne gebre u Vect 144
6.1.5 Definicija bialgebre 145
6.1.6 Definicija Hopfove algebre i primjeri 146
6.2 Moduli i komoduli 152
6.3 Hopfovo djelovanje i poludirektni produkt 155
6.4 Hopfovo sparivanje, Heisenbergovo udvojenje 157
6.5 Yetter-Drinfeldovi moduli i modulne algebre 158
6.6 Tenzorski produkti nad unutrašnjim monoidom 162
6.6.1 Tenzorski produkt nad bazom 162
6.6.2 Unutrašnji bimoduli 162
6.6.3 Tenzorski produkt unutrašnjih bimodula 163

7 Unutarnji bialgebroid i Hopfov algebroid **165**
7.1 Grupoidi i unutarnji grupoidi 165
7.2 Unutarnji bialgebroid 168
7.2.1 Pripremne leme 168
7.2.2 Definicija unutrašnjeg bialgebroida 175
7.3 Unutarnji Hopfov algebroid 178
7.3.1 Pripremne leme 178
7.3.2 Definicija unutrašnjeg Hopfovog algebroida 181

8 Konstrukcija unutrašnjeg skalarnog proširenja **184**
8.1 Teorem o skalarnom proširenju . . . 184
8.1.1 Lijepi lijevi i desni bialgebroidi . . . 186
8.1.2 Izomorfizam lijevog i desnog poludirektnog produkta . . . 193
8.1.3 Nelijepi bialgebroidi pomoću lijepih . . . 198
8.1.4 Hopfovi algebroidi . . . 203

9 Dualne Hopfove algebre, Yetter-Drinfeldove modulne algebre i skalarna proširenja u $\mathrm{indproVect}$ **209**
9.1 Pregled rezultata i metoda . . . 209
9.1.1 Hopfove algebre iz potkategorija $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$ . . . 210
9.1.2 Heisenbergovo udvojenje Hopfove algebre iz $\mathrm{indVectFin}$ . . . 212
9.1.3 Hopfove algebre iz potkategorija $\mathrm{indVectFin}$ i $\mathrm{proVect}$ . . . 213
9.2 Reprezentacije . . . 214
9.3 Injektivnost reprezentacija . . . 216
9.3.1 Injektivnost $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ . . . 216
9.3.2 Pripremne propozicije . . . 219
9.3.3 Injektivnost $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ . . . 223
9.3.4 Teorem o Yetter-Drinfeldovoj modulnoj algebri . . . 231
9.4 Dualne Hopfove algebre u $\mathrm{indproVectFin}$ . . . 236
9.5 Kanonski elementi i Luina formula . . . 239
9.5.1 Heisenbergovo udvojenje $R^*\sharp R$ za R iz $\mathrm{indVectFin}$ . . . 239
9.5.2 Upotpunjenje Heisenbergovog udvojenja . . . 240
9.5.3 Dualne baze . . . 242
9.5.4 Kanonski elementi $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ . . . 243
9.5.5 Dvostruki kanonski element $\mathcal{M}$ . . . 251
9.5.6 Luina formula . . . 256
9.5.7 Hopfove algebre R i H u Hopfovom sparivanju . . . 258
9.6 Primjeri s univerzalnom omotačkom algebrom $U(\mathfrak{g})$ . . . 261
9.6.1 Pregled dijagrama s $U(\mathfrak{g})^*$, $U(\mathfrak{g})^{min}$, $U(\mathfrak{g})^\circ$, $\mathcal{O}^{min}(G)$, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ . . . 261
9.6.2 Dual $U(\mathfrak{g})^*$ . . . 262
9.6.3 Minimalna Hopfova algebra $U(\mathfrak{g})^{min} \subseteq U(\mathfrak{g})^*$ i $U(\mathfrak{g})^\circ$ . . . 263
9.6.4 Sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$ sa $C^\infty(G)$ . . . 267
9.6.5 Sparivanje $U(\mathfrak{g})$ i algebre formalnih funkcija $J^\infty(G,e)$ . . . 269
9.6.6 Formalni diferencijalni operatori $J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g})$ . . . 270
9.6.7 Nekomutativni fazni prostor tipa Liejeve algebre . . . 271

9.6.8 Hopfova algebra $\mathcal{O}^{min}(G)$ funkcija na G 273
9.6.9 Hopfova algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ 278
9.6.10 Veza Hopfovih algebri $U(\mathfrak{g})^{min}$, $\mathcal{O}^{min}(G)$ i $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ 286
9.6.11 Hopfova algebra $\mathrm{Rep}(G)$ 287
9.6.12 Primjeri Hopfovih algebroida nad $U(\mathfrak{g})$ koji su skalarna proširenja . . . 288
9.6.13 Formule za skalarna proširenja nad $U(\mathfrak{g})$ 289
9.7 Primjeri s filtriranom Hopfovom algebrom s bijektivnim antipodom i konačno-dimenzionalnim adjungiranim orbitama 291
9.8 Primjeri s filtriranom povezanom Hopfovom algebrom 292
9.8.1 Koradikalna filtracija 292
9.8.2 Povezana koalgebra 293
9.9 Primjeri s kvantnom grupom $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ za q korijen iz jedinice 294

Indeks pojmova **300**

Bibliografija **303**

Životopis **306**

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Motivacija

1.1.1 Grupoidi i komutativni Hopfovi algebroidi

Simetrije nekog objekta ili sustava (npr. u fizici) su operacije koje možemo provoditi na objektu, a koje čuvaju njegova (unaprijed određena) bitna svojstva. Taj pogled sugerira da se možemo vratiti u prijašnje stanje, da možemo asocijativno komponirati simetrije i da je identička transformacija simetrija, dakle da simetrije čine grupu. Nije, međutim, nužno da iz svakog stanja možemo prijeći u svako drugo stanje objekta, tako da su osnovne matematičke strukture koje opisuju simetrije ne samo grupe nego i (Brandt-Ehresmannovi) grupoidi (vidi 7.1). U glatkom slučaju to su Liejevi grupoidi, koji lokalno generiraju svoje infinitezimalne varijante, Liejeve algebre i Liejeve algebroide.

Opišimo sada primjer transformacijskog grupoida. Za djelovanje $\triangleright\colon G \times M \to M$ grupe G s jedinicom e na skup M (koji će u generalizacijama biti prostor u nekom smislu) pripadni transformacijski grupoid je definiran ugrubo ovako: skup morfizama je $\mathcal{G}_1 = G \times M$, skup objekata $\mathcal{G}_0 = M$, preslikavanje domene je $\mathrm{dom}\colon (g, m) \mapsto m$, preslikavanje kodomene $\mathrm{cod}\colon (g, m) \mapsto g \triangleright m$, kompozicija je dana sa $(g', m') \circ (g, m) = (g'g, m)$ ako $m' = g \triangleright m$, identitete su $\mathrm{id}_m = (e, m)$ i inverz morfizma $(g, m)^{-1} = (g^{-1}, g \triangleright m)$.

Svako preslikavanje skupova $f\colon A \to B$ inducira preslikavanje algebri funkcija u polje, pretkompoziciju s f, tj. $-\circ f\colon \mathrm{Fun}(B) \to \mathrm{Fun}(A)$, što daje kontravarijantni funktor iz kategorije skupova u kategoriju komutativnih algebri nad danim poljem. Postoje varijante tog funktora u prisustvu dodatnih struktura (npr. ako su skupovi topološki prostori, funkcije su neprekidne funkcije) koje u nekim slučajevima daju antiekvivalenciju kategorija. Ako dopustimo nekomutativne algebre, time smo dakle prenijeli algebre funkcija u potkategoriju neke kategorije nekomutativnih algebri, koje su dakle dualne poopćenim, nekomutativnim prostorima. Po kontravarijantnosti, dijagram strukturnih preslikavanja koja čine grupoid

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_1 \times_M \mathcal{G}_1 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] \arrow[r, shift right=4] & \mathcal{G}_1 \arrow[loop above] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & M \end{tikzcd}$$

inducira dualni dijagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \arrow[r, shift left=4, leftarrow] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=4, leftarrow] & \mathcal{H} \arrow[loop above, "\tau"] \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & A \end{tikzcd}$$

u simetričnoj monoidalnoj kategoriji komutativnih algebri, pri čemu je povlak $\mathcal{G}_1 \times_M \mathcal{G}_1$ zamijenjen tenzorskim produktom nad baznom algebrom $A = \mathrm{Fun}(M)$,

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{G}_1 \times_M \mathcal{G}_1) \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{G}_1) \otimes_{\mathrm{Fun}(M)} \mathrm{Fun}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}.$$

Kako dobiveni dijagram zadovoljava i dualne aksiome, time po definiciji dobivamo kogrupoid u kategoriji vektorskih prostora, drugim riječima komutativni Hopfov algebroid $\mathcal{H} = \mathrm{Fun}(\mathcal{G}_1)$ nad komutativnom baznom algebrom $A = \mathrm{Fun}(M)$. Morfizam dualan množenju je koprodukt $\Delta\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$, preslikavanjima domene i kodomene dualna su preslikavanja izvora i ponora $\alpha, \beta\colon \mathcal{H} \to A$, a preslikavanje $\tau\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ koje je dualno uzimanju inverza, $\tau(f)(g) = f(g^{-1})$, zove se antipod. Ukoliko u definiciji Hopfovog algebroida izostavimo antipod, dobivamo malo jednostavniju strukturu, (asocijativni) bialgebroid.

Komutativni Hopfovi algebroidi imaju niz klasičnih primjena u stabilnoj teoriji homotopije [Ravenel]. Primjeri i opća razmatranja u nekomutativnoj geometriji i matematičkoj fizici vode na nekomutativna poopćenja. Za fiziku je osobito bitno da kategorije modula nad bialgebroidima imaju tenzorski produkt koji dolazi od koprodukta, jer će tada, naprimjer, ako se jednočestična stanja ponašaju kao stanja u prostoru reprezentacije bialgebroida, višečestična stanja također biti u nekoj reprezentaciji tog bialgebroida.

1.1.2 Bialgebroidi i Hopfovi algebroidi nad nekomutativnom bazom

Standardni pojam asocijativnog bialgebroida i prva varijanta pojma Hopfovog algebroida nad nekomutativnom bazom uvedeni su u radu J-H. Lu [Lu]. Za razliku od situacije kod Hopfovih algebri [Majid, MilnorMoore], poopćenje Hopfovog algebroida s komutativnom baznom algebrom na nekomutativnu baznu algebru je netrivijalno. Naime, ako je A nekomutativna algebra, onda A-bimodul $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$ nije nužno algebra, pa aksiom multiplikativnosti koprodukta $\Delta\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$ iz definicije komutativnog Hopfovog algebroida nema smisla bez suptilne adaptacije teorije, npr. uz pomoć konstrukcije Takeuchijevog produkta [BohmHAlg, BrzMil, Takeuchi]. Za razliku od pojma bialgebroida koji je u radu J-H. Lu [Lu] zadovoljavajući, pojam antipoda u njenom radu ima nedostatke jer uključuje izbor nekog prereza $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ koji nije kanonski. Ti nedostaci su razriješeni simetričnom definicijom G. Böhm [BohmHAlg] koja se koristi i poopćava u ovoj disertaciji.

1.1.3 Skalarna proširenja

Ako Hopfova algebra H djeluje slijeva na algebru A Hopfovim djelovanjem (na određeni način kompatibilan sa strukturom algebre na A i koalgebre na H), u teoriji Hopfovih algebri definira se nova algebra, poludirektni produkt (engl. *smash product*) $A\sharp H$, koja je kao k-modul tenzorski produkt $A \otimes H$, s množenjem izvedenim na određeni način iz tog Hopfovog djelovanja. Ako je djelovanje desno Hopfovo djelovanje, poludirektni produkt je $H\sharp A$.

Za konačno-dimenzionalnu Hopfovu algebru H može se definirati Drinfeldovo udvojenje $\mathcal{D}(H)$ koje je također Hopfova algebra, a kao k-modul jednaka je $H \otimes H^*$. U spomenutom radu [Lu] uvedena je klasa primjera Hopfovih A-algebroida koji su analogoni transformacijskih grupoida. Njihova je totalna algebra poludirektni produkt oblika $A\sharp H$ gdje je H Hopfova algebra, a A pleteničasto-komutativna algebra u monoidalnoj kategoriji modula nad Drinfeldovim udvojenjem $\mathcal{D}(H)$.

Teorem 1.1.1. *(Lu [Lu]) Neka je H konačno-dimenzionalna Hopfova algebra. Ako je A pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji lijevih modula nad $\mathcal{D}(H)$, onda je $A\sharp H$ s formulama za skalarno proširenje (Luin) Hopfov algebroid nad A.*

Yetter-Drinfeldovi moduli nad Hopfovom algebrom H su H-moduli sa strukturom H-komodula takvi da djelovanje i kodjelovanje zadovoljavaju određeni Yetter-Drinfeldov uvjet kompatibilnosti. Ako je H konačno-dimenzionalna Hopfova algebra, onda su pleteničaste monoidalne kategorije Yetter-Drinfeldovih modula nad H i običnih modula nad Drinfeldovim udvojenjem $\mathcal{D}(H)$ pleteničasto monoidalno ekvivalentne. Brzeziński i Militaru su u [BrzMil] pokazali da je pojam bialgebroida ekvivalentan (mada formalno različit) ranijem pojmu Takeuchijeve $\times$-bialgebre [Takeuchi] te definiciji bialgebroida sa sidrom u smislu Ping Xua [Xu]. Oni su također modificirali konstrukciju Luinih transformacijskih Hopfovih algebroida zamijenivši module nad Drinfeldovim udvojenjem Yetter-Drinfeldovim modulima.

Teorem 1.1.2. *(Brzeziński-Militaru [BrzMil]) Ako je A pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji lijevo-desnih Yetter-Drinfeldovih modula nad H, onda je $A\sharp H$ s formulama za skalarno proširenje (Luin) Hopfov algebroid nad A.*

Tu varijantu konstrukcije transformacijskih Hopfovih algebroida u terminima Yetter-Drinfeldovih modula zovemo *skalarnim proširenjima* [BohmHAlg]. Ključan korak konstrukcije skalarnih proširenja je da Yetter-Drinfeldovo kodjelovanje $A \to A \otimes H$ kao linearno preslikavanje postaje morfizmom ponora $\beta\colon A^{\mathrm{op}} \to A\sharp H = \mathcal{H}$ iz definicije Hopfovog algebroida.

Ove teoreme htjeli bismo poopćiti iz razloga koji će biti objašnjeni u sljedećem odjeljku. Pritom ćemo Luinu definiciju Hopfovog algebroida prvo zamijeniti modernijom definicijom Hopfovog algebroida od G. Böhm.

1.1.4 Problem formalnih upotpunjenja

Poseban slučaj Yetter-Drinfeldovog modula dolazi od djelovanja konačno-dimenzionalne Hopfove algebre A na svojem dualu. Pripadajući poludirektni produkt $A\sharp A^*$ zovemo *Heisenbergovo udvojenje*. Heisenbergova udvojenja su analogon strukture (Heisenberg-)Weylove algebre. U radu [Skoda] pokazano je da određeni poludirektni umnošci oblika $U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$, u kojima je $U(\mathfrak{g})$ univerzalna omotačka algebra shvaćena kao Hopfova algebra, a $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ algebra formalnih funkcija oko $0 \in \mathfrak{g}$ na koju $U(\mathfrak{g})$ djeluje Hopfovim djelovanjem, imaju identičnu strukturu algebre kao i poludirektni produkti $U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ u kojima ulogu Hopfove algebre preuzima $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ kao topološka Hopfova algebra s nekim deformiranim koproduktom koji je zapravo čini izomorfnom kofiltriranoj Hopfovoj algebri dualnoj filtriranoj Hopfovoj algebri $U(\mathfrak{g})$. Dakle, to je varijanta Heisenbergovog udvojenja, pa se očekivalo da ima i strukturu Hopfovog algebroida tipa skalarnog proširenja, pri čemu je trebalo razjasniti pitanja formalnih upotpunjenja.

Formalizacija upotpunjene varijante Hopfovog algebroida koja kao primjer dozvoljava algebru $U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ izložena je u radu Meljanac, Škoda, Stojić, *Lie algebra type non-commutative phase spaces are Hopf algebroids*, Letters in Mathematical Physics, 2017. [MSS]. Tu je $U(\mathfrak{g})$ shvaćena kao filtrirana Hopfova algebra, a njen algebarski dual $U(\mathfrak{g})^*$ je shvaćen kao kofiltrirana Hopfova algebra koja je kao algebra identificirana s $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$. Tenzorski produkti upotpunjavani su koristeći inducirane kofiltracije. Iako je konzistentan pristup nađen, ta formalizacija nije sasvim zadovoljavajuća: neka preslikavanja poštuju kofiltraciju samo na slabi način (distribuiraju po formalnim sumama), a neka preslikavanja nisu ni definirana na cijelom upotpunjenju tenzorskog produkta. Nije bilo jasno koji princip diktira koji će tenzorski produkti u aksiomatici biti upotpunjeni, a računski dokazi su otežani potrebom da se provjerava u koracima da su sve manipulacije s formalnim sumama opravdane. S druge strane, mnogi računi su formalno identični provjerama iz teorije diskretnih skalarnih proširenja i činilo se da se mogu prevesti u dijagramatski jezik ako bi svi morfizmi i tenzorski produkti bili u istoj monoidalnoj kategoriji.

1.2 Pregled rezultata

U ovoj disertaciji predložen je sustavni pristup formalnim upotpunjenjima u primjerima sličnim gore navedenima koji vodi i na drugu, prirodniju, definiciju upotpunjenih Hopfovih algebroida, konstrukciju skalarnih proširenja u toj općenitosti i, uz neke dodatne uvjete, konstrukciju varijante Heisenbergovog udvojenja.

Radi toga je konstruirana simetrična monoidalna kategorija $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ čiji objekti su vektorski prostori s dodatnom strukturom u kojoj su na određeni način kombinirane filtracije i kofiltracije, a morfizmi linearna preslikavanja koja na određeni način poštuju tu strukturu. Njene su pune monoidalne potkategorije kategorije $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ vektorskih prostora na kojima je ta dodatna struktura filtracija odnosno kofiltracija. Pritom su indeksne kategorije filtracija i kofiltracija usmjereni skupovi (najviše) prebrojive kofinalnosti, a morfizmi u tim kategorijama poštuju filtracije i kofiltracije na način slabiji od uobičajenog. To će biti podrobnije objašnjeno u pododjeljku 1.2.1 koji slijedi nakon ovog skraćenog pregleda.

Definirana kategorija $\mathrm{indproVect}$ ekvivalentna je kategoriji strogih ind-objekata u kategoriji strogih pro-objekata u kategoriji vektorskih prostora takvih da su indeksne kategorije ind-objekata i pro-objekata kofinalnosti najviše $\aleph_0$,

$$\mathrm{indproVect} \cong \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}.$$

Ovi nazivi odnose se na ind-objekte i pro-objekte u smislu Grothendiecka [SGA4.1], a naziv strogi na to da su vezni morfizmi monomorfizmi za ind-objekte, a epimorfizmi za pro-objekte. Prednost rada s kategorijom $\mathrm{indproVect}$ je u tome što radimo s vektorskim prostorima s dodatnom strukturom i linearnim preslikavanjima koja poštuju tu strukturu, umjesto s apstraktnim ind-objektima i pro-objektima. Kategorija ind-objekata i kategorija pro-objekata ekvivalentne su redom kategoriji usmjerenih sustava i kategoriji inverznih sustava, s kojima smo radili u ovoj disertaciji. Umjesto naziva usmjereni sustav ćemo radi jednostavnosti poslije u tekstu nekad pisati ind-objekt, a umjesto naziva inverzni sustav pro-objekt.

Svaki je objekt kategorije $\mathrm{indproVect}$ ugrubo vektorski prostor V zajedno s iscrpnom filtracijom potprostorima V_i, $i \in I$ na svakom od kojih je usklađeno odabrana potpuna kofiltracija V_i^k, $k \in K_i$ njegovim kvocijentnim prostorima. Iscrpnost filtracije ovdje znači $V \cong \operatorname{colim}_{i \in I} V_i$, a potpunost kofiltracije $V_i \cong \lim_{k \in K_i} V_i^k$. Tenzorski produkt $V \otimes W$ upotpunjava se na svakoj filtrirajućoj komponenti $V_i \otimes W_j$,

$$V_i \hat{\otimes} W_j = \lim_{(k,l)} V_i^k \otimes W_j^l$$

i ukupno je tenzorski produkt dva filtrirano-kofiltrirana vektorska prostora

$$V \tilde{\otimes} W = \operatorname*{colim}_{(i,j) \in I \times J} V_i \hat{\otimes} W_j = \operatorname*{colim}_{(i,j) \in I \times J} \lim_{(k,l)} V_i^k \otimes W_j^l,$$

što daje ukupno manje upotpunjenje nego kad se radi s globalnom kofiltracijom na običnom tenzorskom produktu. Naprimjer, za V iz $\mathrm{indVect}$ i W iz $\mathrm{proVect}$ vrijedi

$$\overset{(ind)}{V} \otimes W \hookrightarrow \overset{(ind)}{V} \,\tilde{\otimes}\, \overset{(pro)}{W} \hookrightarrow V \hat{\otimes} \overset{(pro)}{W},$$

gdje je nad simbolima V i W ovdje naglašeno gledamo li ih kao vektorske prostore sa zaboravljenom dodatnom strukturom ili filtrirane vektorske prostore i kofiltrirane vektorske prostore. Uz to, taj tenzorski produkt omogućava kombiniranje običnog i upotpunjenog tenzorskog produkta na sustavan način, jer je za objekte u $\mathrm{indVect}$ jednak običnom tenzorskom produktu $\otimes$, a za objekte u $\mathrm{proVect}$ upotpunjenom tenzorskom produktu $\hat{\otimes}$. Za usporedbu, svi relevantni morfizmi iz primjera $U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ su automatski definirani na tom novom tenzorskom produktu i morfizmi su u kategoriji $\mathrm{indproVect}$, te ne postoje problemi s formalnim upotpunjenjima i kompozicijama preslikavanja. Na temelju daljnjih rezultata vidjet će se da za taj primjer u ovoj formalizaciji ne postoje problemi niti s definicijama algebarskih struktura koje je bilo komplicirano (upotpunjeni Hopfov algebroid) ili nemoguće (Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$) formalizirati u članku [MSS].

Zatim opisujemo i dokazujemo da konstruirana monoidalna kategorija $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ ima koujednačitelje i da oni komutiraju s tenzorskim produktom, pri čemu koristimo rezultate o raznim konstrukcijama u kategoriji $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ dokazane u disertaciji, među kojima su opis monomorfizama, potpunih potprostora, kvocijenata, te složenije dokaze postojanja i opisa koujednačitelja, koprodukata i filtriranih kolimesa. To činimo da bismo omogućili uvođenje tenzorskih produkata $\otimes_A$ nad unutarnjim monoidom A koji su nužni za definiciju unutrašnjeg bialgebroida u $\mathrm{indproVect}$. Naime, G. Böhm je pokazala da se definicija i neki osnovni elementi teorije asocijativnih bialgebroida mogu internalizirati u proizvoljnim monoidalnim kategorijama koje imaju koujednačitelje na taj način kompatibilne s tenzorskim produktom. Nakon što smo razradili njenu definiciju unutarnjeg bialgebroida u takvim monoidalnim kategorijama na direktan način u definiciju dodajemo simetrizaciju i antipod te, uz dokaze dobre definiranosti, time dobivamo (novu) definiciju unutarnjeg Hopfovog algebroida.

Dalje dokazujemo teorem o konstrukciji unutrašnjeg skalarnog proširenja iz dane unutrašnje pleteničasto-komutativne Yetter-Drinfeldove modulne algebre. Taj teorem je poopćenje rezultata Brzezińskog i Militaru iz [BrzMil], ali i nadopuna nepotpunog dokaza u tom članku (uz dodatni uvjet bijektivnosti antipoda) u kojem nije dokazano ključno svojstvo da je definirani antipod antihomomorfizam.

Na kraju dokazujemo teorem o postojanju strukture Hopfovog algebroida na Heisenbergovom udvojenju $R^*\sharp R$ unutrašnje Hopfove algebre R u kategoriji $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$ koja ima bijektivan antipod i određeno svojstvo konačne dimenzionalnosti adjungiranih orbita, koristeći uvedene kanonske elemente. Ta svojstva imaju univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ i kvantizirana univerzalna omotačka algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Također dokazujemo dva općenitija rezultata o dovoljnim uvjetima za postojanje strukture Hopfovog algebroida na poludirektnim produktima $H\sharp R$ Hopfovih algebri u Hopfovom sparivanju u kategoriji $\mathrm{indproVect}$, jedan poopćavanjem prije navedenog rezultata, a drugi drugačijom metodom, koristeći određena kvocijentiranja po anihilatorima. Do rezultata dolazimo tako da za Hopfove algebre R i H nađemo neke dovoljne uvjete da R bude pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H i koristimo prethodno dokazan teorem o skalarnom proširenju. Nakon toga opisujemo nekoliko novih primjera Hopfovih algebroida nad nekomutativnom bazom. U nastavku je detaljniji pregled definicija i rezultata.

1.2.1 Simetrična monoidalna kategorija $\mathrm{indproVect}$

U drugom poglavlju dan je pregled osnovne kategorijske terminologije koju koristimo, te definicije usmjerenih i inverznih sustava i morfizama među njima. U ovoj disertaciji usmjereni sustav čiji su svi vezni morfizmi monomorfizmi (strogi ind-objekt) nazivamo *filtracija*, a inverzni sustav čiji su svi vezni morfizmi epimorfizmi (strogi pro-objekt) *kofiltracija*. Filtracija na vektorskom prostoru ovdje je dakle indeksirana usmjerenim skupom i poopćenje je standardnog pojma filtracije potprostorima indeksirane skupom $\mathbb{N}_0$, a morfizmi među vektorskim prostorima koji poštuju filtracije ovdje to čine na način slabiji od uobičajenog. Naprimjer, umjesto standardnog preslikavanja po nivoima, ovdje linearno preslikavanje poštuje filtraciju ako svaku filtrirajuću komponentu domene preslika u neku filtrirajuću komponentu kodomene. Kofiltracija je pojam dualan filtraciji, u kojem potprostore zamjenjuju kvocijentni prostori i vezna preslikavanja su obrnutog smjera.

U trećem, četvrtom i petom poglavlju bavimo se izgradnjom simetrične monoidalne kategorije $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora, čije su pune monoidalne potkategorije dvije dualne kategorije, kategorija $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ kofiltriranih vektorskih prostora i kategorija $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ filtriranih vektorskih prostora, te određenim potrebnim konstrukcijama u tim kategorijama i njihovim svojstvima.

Filtrirani vektorski prostor definiramo kao vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{V}$ u kategoriji Vect takvom da je $V \cong \mathrm{colim}\, \boldsymbol{V}$, a kofiltrirani vektorski prostor kao vektorski prostor W zajedno s $\aleph_0$-kofiltracijom $\boldsymbol{W}$ u kategoriji Vect takvom da je $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Morfizme među njima definiramo kao linearna preslikavanja koja na određeni jednostavan način poštuju tu dodatnu strukturu. Ograničili smo se na ind-objekte (odnosno pro-objekte) koji su strogi i kofinalnosti najviše $\aleph_0$ jer su nam ti zahtjevi bili potrebni da dokažemo da su naša preslikavanja koja poštuju strukturu filtracije (odnosno kofiltracije) u kanonskoj bijekciji s morfizmima među pripadnim ind-objektima (odnosno pro-objektima). Tako umjesto da radimo s apstraktnim ind-objektima i pro-objektima, možemo raditi s vektorskim prostorima s dodatnom strukturom i linearnim preslikavanjima koja poštuju tu strukturu: s objektima i mofizmima definiranih kategorija

$$\mathrm{indVect} \cong \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}, \qquad \mathrm{proVect} \cong \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}.$$

Kod općenitijih pro-objekata naime različiti morfizmi među pro-objektima mogu inducirati isto linearno preslikavanje među njihovim limesima, pa ne bismo mogli raditi s morfizmima kao s linearnim preslikavanjima i primjeniti dobiveno na primjere koje želimo opisati. Definiramo i kategoriju $\mathrm{indproVect}$ koja sadrži kao svoje potkategorije $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$. Njeni su objekti vektorski prostori U zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{U}$ u kategoriji $\mathrm{proVect}$ takvom da je $U \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{U}$ u Vect, a morfizmi su linearna preslikavanja koja na određeni način poštuju tu strukturu, te za nju pokazazujemo da je ekvivalentna kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$.

Mogućnost rada s vektorskim prostorima s dodatnom strukturom umjesto s apstraktnim ind-objektima, pro-objektima i ind-pro-objektima omogućuje među ostalim definiciju formalne sume i formalne baze te izvrijednjavanje preslikavanja na elementima, zatim primjenu teorije na postojeće primjere, te prenošenje konstrukcija s kategorije ind-pro-objekata na definiranu kategoriju čiji objekti imaju elemente i obratno. Ove prednosti će biti objašnjene u daljnjem tekstu.

U kategoriji $\mathrm{indproVect}$ dakle objekti imaju elemente i možemo po potrebi promatrati izvrijednjavanje preslikavanja na elementima, što nemamo na raspolaganju kod apstraktnih ind-pro-objekata. S time u vezi uveden je pojam formalne sume u $\mathrm{proVect}$ i njene vrijednosti, te razvijen račun s formalnim sumama. (Moguće beskonačna) suma $\sum_\lambda v_\lambda$ elemenata kofiltriranog vektorskog prostora je *formalna suma* ako projekcija na njegovu proizvoljnu kofiltrirajuću komponentu šalje sve osim konačno mnogo sumanada u 0. Te projekcije zajedno čine nit limesa, dakle element tog kofiltriranog vektorskog prostora, koju zovemo *vrijednost formalne sume* $\sum_\lambda v_\lambda$. Pokazujemo da su linearna preslikavanja A koja *distribuiraju po formalnim sumama*, tj. takva da prevode po članovima formalne sume u formalne sume i vrijedi

$$A(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda A(v_\lambda),$$

upravo morfizmi u kategoriji $\mathrm{proVect}$, što daje još jedan način rada s tim preslikavanjima. Na temelju toga razvijen je račun s formalnim sumama koji koristimo u dokazima, te određene formule i preslikavanja možemo zadavati formalnim sumama. Pojam formalne sume jednostavno proširujemo do pojma formalne sume u $\mathrm{indproVect}$, kojim su tako obuhvaćene konačne sume u objektima kategorije $\mathrm{indVect}$ i formalne sume u objektima kategorije $\mathrm{proVect}$. Definiramo i u dokazima koristimo pojam *formalne baze* kofiltriranog vektorskog prostora, uz jednostavniji pojam filtrirane baze filtriranog vektorskog prostora. Pokazujemo da svaki kofiltrirani vektorski prostor posjeduje formalnu bazu.

Definirana su također upotpunjenja vektorskih prostora po kofiltraciji i upotpunjenja linearnih preslikavanja. Pokazano je da se svaki element upotpunjenja $\hat{V}$ vektorskog prostora V može prikazati kao formalna suma čiji su sumandi unutar V i da je vektorski potprostor V kofiltriranog vektorskog prostora potpun ako sadrži vrijednosti svih formalnih suma sa sumandima u V.

Pokazano je da su kanonska preslikavanja $V \otimes W \hookrightarrow V \hat{\otimes} W$ i $V \otimes W \hookrightarrow V \tilde{\otimes} W$ injekcije. Dani su nužni i dovoljni uvjeti za postojanje proširenja (upotpunjenja) linearnog preslikavanja do morfizma u $\mathrm{proVect}$, te u složenijoj propoziciji, za postojanje proširenja do morfizma u $\mathrm{indproVect}$. Na temelju toga, za linearna preslikavanja u primjerima je lako provjeriti pripadaju li potkategoriji $\mathrm{indVect}$, jesu li ili se mogu proširiti do upotpunjenih morfizama u potkategoriji $\mathrm{proVect}$, te u kategoriji $\mathrm{indproVect}$. Pokazali smo da su potkategorije $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$ dualne, te da se naprimjer sparivanje V iz $\mathrm{indVect}$ i njegovog duala V^* iz $\mathrm{proVect}$ uvijek proširuje do sparivanja $V \tilde{\otimes} V^* \to k$ u kategoriji $\mathrm{indproVect}$.

U kategoriji $\mathrm{proVect}$ opisani su monomorfizmi i epimorfizmi, dane su strukture kofiltriranog prostora na potpunim potprostorima i kvocijentima po potpunim potprostorima i pokazano je da je jezgra linearnog preslikavanja potpuni potprostor. Dokazano je da $\mathrm{proVect}$ posjeduje koujednačitelje i da oni komutiraju s tenzorskim produktom. U složenijim propozicijama dokazano je postojanje i dana konstrukcija i opis koprodukta i filtiranog kolimesa u $\mathrm{proVect}$. Neke od tih konstrukcija prvo su dane na kategoriji $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i zatim prenesene na kategoriju $\mathrm{proVect}$ i opisane tamo, kao što su konstrukcija tenzorskog produkta, te koujednačitelja, koprodukta i filtriranog kolimesa. Druge su profinjene s vektorskih prostora na vektorske prostore sa strukturom, kao naprimjer definicija potpunog potprostora s potprostornom kofiltracijom, kvocijenta s kvocijentnom kofiltracijom, te jezgre i slike preslikavanja.

Tenzorski produkti su konstruirani tako da su prošireni s kategorije $(\mathrm{Vect}, \otimes, k)$ na jednostavan kanonski način na kategorije ind-objekata $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$, pro-objekata $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ te ind-pro-objekata $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$, a onda preneseni po prije dokazanoj ekvivalenciji na kategorije $\mathrm{indVect}$, $\mathrm{proVect}$ i $\mathrm{indproVect}$. Dobra definiranost tenzorskog produkta na $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i time na kategoriji $\mathrm{indproVect}$ ovisila je o dokazu da je tenzorski produkt monomorfizama u $\mathrm{proVect} \cong \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ monomorfizam, u kojem je korišten pojam formalne baze. Dokazali smo da su one simetrične monoidalne kategorije, pri čemu su kategorije $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ monoidalne potkategorije kategorije $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$.

$$
\begin{tikzcd}
& (\mathrm{indVect}, \otimes, k) \arrow[dr, hook] & \\
(\mathrm{Vect}, \otimes, k) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & (\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k) \\
& (\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Tako je omogućen naprimjer rad s morfizmima $A \otimes B \to C \otimes D$ filtriranih vektorskih prostora i njima dualnim morfizmima $C^* \hat{\otimes} D^* \to A^* \hat{\otimes} B^*$ kofiltriranih vektorskih prostora unutar iste monoidalne kategorije, te sustavno izvedeno kombiniranje običnog i upotpunjenog tenzorskog produkta. Kategorije $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$ su dualne monoidalne kategorije.

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k) \arrow[d, bend left, "*"] \\
(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k) \arrow[u, bend left, "*"]
\end{tikzcd}$$

Po tome naprimjer dual $U(\mathfrak{g})^* \cong \hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ beskonačno-dimenzionalne Hopfove algebre $U(\mathfrak{g})$, promatrane kao Hopfova algebra u kategoriji $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$, postaje Hopfova algebra u kategoriji $(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$ i moguće je definirati pojam djelovanja te topološke Hopfove algebre $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ na običnu Hopfovu algebru $U(\mathfrak{g})$ jednostavno dijagramatski, unutar kategorije $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$. Slično je moguće definirati neke druge potrebne algebarske strukture koje moraju kombinirati običan i upotpunjeni tenzorski produkt.

Među najsloženijim rezultatima iz ovog dijela je teorem o postojanju koujednačitelja u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ i teorem da koujednačitelji u $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ komutiraju s tenzorskim produktom. Dokazi ta dva teorema koriste mnoge propozicije o konstrukcijama u kategoriji $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$, kao što su opis monomorfizama, potpunih potprostora, kvocijenata i kvocijentnih preslikavanja, te složenije dokaze postojanja i opisa koujednačitelja, koprodukata i filtriranih kolimesa. Od propozicija iz poglavlja o kategoriji $\mathrm{proVect}$ izdvajamo dokaz postojanja i opis koprodukata i filtriranih kolimesa u kategoriji $\mathrm{proVect}$, u kojima je kombinirana metoda prenošenja konstrukcija koprodukta i filtriranog kolimesa s $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ na $\mathrm{proVect}$ po ekvivalenciji kategorija i s druge strane upotreba pojma i svojstava formalnih suma u kofiltriranim vektorskim prostorima.

Uz uvedene pojmove formalne baze objekata iz $\mathrm{proVect}$ i filtrirane baze objekata iz $\mathrm{indVect}$, dokazano je da je skup funkcionala $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dualnih u odnosu na filtriranu bazu $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ objekta V u kategoriji $\mathrm{indVectFin}$ formalna baza duala V^* kao objekta u kategoriji $\mathrm{proVectFin}$. Tako je moguće bilo definirati određene kanonske elemente kao formalne sume

$$\mathcal{K}(\phi) = \sum_{\alpha} e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha), \qquad \mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha),$$

za $\phi \in \mathrm{End}(V)$, koji su korišteni onda u zadnjem poglavlju za dokaz strukture Hopfovog algebroida na Heisenbergovom udvojenju Hopfovih algebri iz $\mathrm{indVectFin}$ koje imaju bijektivan antipod i svojstvo konačne-dimenzionalnosti adjungiranih orbita. Time je među ostalim primjerima dobiveno da je $U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ zaista Hopfov algebroid u kategoriji $\mathrm{indproVectFin}$.

1.2.2 Definicija unutarnjeg Hopfovog algebroida. Teorem o unutarnjem skalarnom proširenju

U drugom dijelu disertacije najprije u šestom poglavlju navodimo pomoćne algebarske konstrukcije (tenzorski produkti unutarnjih modula i bimodula, Yetter-Drinfeldovi moduli itd.) i navodimo nekoliko standardnih primjera Hopfovih algebri koji će biti relevantni za primjere Hopfovih algebroida u zadnjem poglavlju. U sedmom poglavlju razrađujemo pojam unutarnjeg bialgebroida u proizvoljnoj monoidalnoj kategoriji s koujednačiteljima koji komutiraju s tenzorskim produktom, te zatim na temelju toga i konstrukcija iz prethodnog poglavlja definiramo pojam unutarnjeg Hopfovog algebroida u takvoj kategoriji i dokazujemo da je definicija dobra.

Nakon toga u osmom poglavlju dokazujemo teorem o konstrukciji unutrašnjeg skalarnog proširenja: da svaka unutrašnja pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra R nad unutrašnjom Hopfovom algebrom H u $\mathrm{indproVect}$ s bijektivnim antipodom definira određenu strukturu unutrašnjeg Hopfovog algebroida na poludirektnom produktu $H\sharp R$ u kategoriji $\mathrm{indproVect}$, koju zovemo skalarno proširenje. Pritom koristimo apstraktni Sweedlerov račun i novu definiciju unutrašnjeg Hopfovog algebroida, a strukturu lijevog i desnog bialgebroida opisujemo na jednostavan način na poludirektnim produktima $R^{\mathrm{op}}\sharp H$ i $H\sharp R$ koji su izomorfne algebre po konstruiranom izomorfizmu Φ. Svi teoremi vrijede naravno posebno za vektorske prostore, filtrirane vektorske prostore, kofiltrirane vektorske prostore te njihove kombinacije.

1.2.3 Heisenbergova udvojenja filtriranih Hopfovih algebri i poopćenja. Primjeri skalarnih proširenja

U zadnjem poglavlju proučavamo jednu klasu primjera skalarnih proširenja, one koji dolaze od poludirektnih produkata $H\sharp R$ Hopfove algebre H i Hopfove algebre R koje su u Hopfovom sparivanju, a sve unutar monoidalne kategorije $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$. Primjer takvog poludirektnog produkta bilo bi Heisenbergovo udvojenje $R^*\sharp R$ za Hopfove algebre R filtrirane konačno-dimenzionalnim komponentama, poopćenje Heisenbergovog udvojenja koje je definirano za konačno-dimenzionalne Hopfove algebre.

Dokazujemo da svaka unutrašnja Hopfova algebra R u kategoriji $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$ koja ima bijektivan antipod i zadovoljava dodatni uvjet konačne-dimenzionalnosti adjungiranih orbita ima kanonsku strukturu pleteničasto-komutativne Yetter-Drinfeldove modulne algebre nad svojim dualom R^*, unutrašnjom Hopfovom algebrom u kategoriji $(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$. Ključan korak ovdje je upotreba određenih kanonskih elemenata od kojih je jedan beskonačno-dimenzionalno poopćenje Luine formule povezane s morfizmom ponora u [Lu]. Ovdje je taj kanonski element

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha), \qquad \phi \in \mathrm{End}(R)$$

formalna suma u upotpunjenom tenzorskom produktu $R^* \hat{\otimes} R$ (gdje smo na R zaboravili filtraciju). Linearno preslikavanje $\mathcal{L}\colon \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} R$ je bijekcija s inverzom

$$\mathcal{T}_1\colon R^* \hat{\otimes} R \to \mathrm{End}(R), \qquad \mathcal{T}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)\colon r \mapsto \sum_\lambda (r \blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda,$$

što je poopćenje rezultata iz [Lu], koje je naravno dosta teže dokazati nego u konačno-dimenzionalnom slučaju, jer se ne može koristiti argument s rangom i defektom. Pokazali smo da ako se izvedeno preslikavanje

$$\mathrm{Lu}\colon R \to R^* \hat{\otimes} R, \qquad \mathrm{Lu}(Y) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta Y D_\alpha,$$

može korestringirati do morfizma $R \to R^* \otimes R$ (ovdje R opet ima filtraciju), onda je uz njega kao kodjelovanje algebra R Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad R^*. Dokazali smo da ta korestrikcija postoji ako i samo ako R zadovoljava određeni uvjet konačne-dimenzionalnosti adjungiranih orbita. Tom konstrukcijom je dakle omogućeno da Heisenbergovo udvojenje $R^* \sharp R$ filtrirane Hopfove algebre R sa spomenutim svojstvima opremimo strukturom unutarnjeg Hopfovog algebroida u našoj kategoriji. U primjerima dokazujemo da $U(\mathfrak{g})$ i $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ imaju to svojstvo konačne-dimenzionalnosti adjungiranih orbita, čime dobivamo dva primjera Heisenbergovih udvojenja koja su unutarnji Hopfovi algebroidi, $U(\mathfrak{g})^* \sharp U(\mathfrak{g})$ nad baznom algebrom $U(\mathfrak{g})$ te $U_q(\mathfrak{sl}_2)^* \sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$ nad baznom algebrom $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Općenitije zatim promatramo Hopfova sparivanja unutrašnje Hopfove algebre R u kategoriji $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$ s bijektivnim antipodom i unutrašnje Hopfove algebre H u kategoriji $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ koje je nedegenerirano u drugoj varijabli. Takva sparivanja induciraju morfizam $H \hookrightarrow R^*$ u kategoriji $\mathrm{indproVect}$, pa i morfizam algebri $H \sharp R \hookrightarrow R^* \sharp R$. Na temelju prethodnog rezultata dobivamo da R ima strukturu Yetter-Drinfeldove modulne algebre nad H ako i samo ako se preslikavanje Lu korestringira do preslikavanja $R \to H \sharp R$. Na temelju toga računamo minimalnu Hopfovu podalgebru $U(\mathfrak{g})^{min}$ od $U(\mathfrak{g})^*$ takvu da je $\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g})) \subseteq U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g})$ i dobivamo primjere Hopfovih algebroida nad $U(\mathfrak{g})$, skalarno proširenje $U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g})$ i Heisenbergovo udvojenje s reduciranim dualom $U(\mathfrak{g})^\circ \sharp U(\mathfrak{g})$.

Također, promatramo Hopfova sparivanja unutrašnjih Hopfovih algebri R i H iz dualnih potkategorija $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ redom koja su nedegenerirana u drugoj varijabli. Ovdje nije moguće koristiti kanonske elemente jer komponente nisu konačno-dimenzionalne, već se dokaz analognog teorema provodi složenije kroz nekoliko propozicija s kvocijentima kofiltriranih vektorskih prostora po anihilatorima i uz dodatni uvjet na koprodukt Hopfove algebre R.

Na kraju navodimo i opisujemo neke nove primjere Hopfovih algebroida nad nekomutativnom bazom $U(\mathfrak{g})$, te jedan nad $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, od kojih su prva tri unutrašnji Hopfovi algebroidi u $\mathrm{indproVect}$, a ostali standardni Hopfovi algebroidi u Vect. Heisenbergovo udvojenje

$$U(\mathfrak{g})^*\sharp U(\mathfrak{g}) \cong J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$$

je unutarnji Hopfov algebroid u $\mathrm{indproVect}$ nad $U(\mathfrak{g})$, kao algebra izomorfan algebri $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)$ formalnih diferencijalnih operatora u okolini jedinice na Liejevoj grupi G. Nekomutativni fazni prostor

$$U(\mathfrak{g})\sharp\hat{S}(\mathfrak{g}^*) \cong U(\mathfrak{g}^L)\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$$

o kojem je bilo govora u članku [MSS] je Hopfov algebroid nad $U(\mathfrak{g})$ u $\mathrm{indproVect}$. U tom članku su elementi $x_1, \ldots, x_n$ baze od $\mathfrak{g}$ interpretirani kao nekomutativne koordinate, a dualna baza od $\mathfrak{g}^*$ kao operatori $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Zatim, Heisenbergovo udvojenje

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)^*\sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

je unutrašnji Hopfov algebroid u $\mathrm{indproVect}$ nad kvantnom grupom $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Dalje,

$$U(\mathfrak{g})^{min}\sharp U(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^*\sharp U(\mathfrak{g})$$

je eksplicitno opisano minimalno skalarno proširenje (takvo da je dobiveno iz Hopfovog sparivanja) nad $U(\mathfrak{g})$. Heisenbergovo udvojenje s reduciranim dualom

$$U(\mathfrak{g})^\circ\sharp U(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^*\sharp U(\mathfrak{g})$$

je Hopfov algebroid nad $U(\mathfrak{g})$. Geometrijski definiran Hopfov algebroid

$$\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g}^L) \subseteq \mathrm{Diff}(G)$$

nad $U(\mathfrak{g}^L)$ dan je pomoću adjungirane reprezentacije i on je najmanja podalgebra algebre diferencijalnih operatora koja sadrži i lijevo invarijantna i desno invarijantna vektorska polja, te Hopfov algebroid

$$\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g})$$

nad $U(\mathfrak{g})$ čija je struktura izvedena iz određenog sparivanja $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ i $U(\mathfrak{g})$, koje se može definirati geometrijski kad je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra Liejeve grupe, ali i čisto algebarski nad bilo kojim poljem. Struktura Hopfovog algebroida u zadnja dva primjera pokazana je direktno koristeći generatore algebri $\mathcal{O}^{min}(G)$ (nekih) funkcija na Liejevoj grupi G i algebri regularnih funkcija

$\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ na algebarskoj grupi $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ zajedno s nekim identitetima koje ti generatori zadovoljavaju. Na kraju, za povezanu kompaktnu algebarsku grupu G, skalarno proširenje

$$\mathrm{Rep}(G)\sharp U(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$$

je unutrašnji Hopfov algebroid u $\mathrm{indproVect}$ nad $U(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$, gdje je $\mathrm{Rep}(G)$ algebra reprezentativnih funkcija na G. Svi ovdje navedeni primjeri postoje i u drugačijim zapisima istih algebri,

$$H\sharp U(\mathfrak{g}^L) \cong U(\mathfrak{g}^R)\sharp H \cong H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R) \cong U(\mathfrak{g}^L)\sharp H^{\mathrm{co}}.$$

Oni su (unutarnji) Hopfovi algebroidi nad $U(\mathfrak{g}^L)$, tj. nad parom baznih algebri $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$.

Poglavlje 2

Neke opće činjenice iz teorije kategorija

2.1 Osnovna kategorijska terminologija

Podrazumijevamo poznavanje definicije kategorije, funktora, (prirodnih) transformacija funktora, ekvivalencije kategorija, potkategorije, pune potkategorije i poznavanje dijagramatske notacije. Identitetu objekta V kategorije $\mathcal{V}$ označavamo $\mathrm{id}_V\colon V \to V$. Kategoriju skupova i preslikavanja označavamo sa Set, a kategoriju vektorskih prostora (nad fiksnim poljem) i linearnih preslikavanja s Vect. Kategoriju ćemo zvati malom ako su joj klasa objekata i klasa morfizama skupovi.

Definicija 2.1.1. Morfizam $f\colon B \to C$ u kategoriji $\mathcal{V}$ je

(i) *izomorfizam* ako postoji $f^{-1}\colon C \to B$ takav da je $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_C$,

(ii) *monomorfizam* ako za sve $g, h\colon A \to B$ jednakost $f \circ g = f \circ h$ povlači $g = h$,

(iii) *epimorfizam* ako za sve $k, l\colon C \to D$ jednakost $k \circ f = l \circ f$ povlači $k = l$.

Svaki izomorfizam je monomorfizam i epimorfizam, a u Set i Vect vrijedi i obrat te tvrdnje. Dva su objekta $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ *izomorfna* i pišemo $V \cong W$ ako postoji izomorfizam $V \to W$.

Suprotna kategorija $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ kategoriji $\mathcal{V}$ je kategorija čija je klasa objekata jednaka klasi objekata kategorije $\mathcal{V}$ (koje ponekad pišemo s gornjim indeksom $^{\mathrm{op}}$ u notaciji), za sve $V, W \in \mathcal{V}$ vrijedi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}^{\mathrm{op}}}(V^{\mathrm{op}}, W^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(W, V)$ i $\mathrm{id}_{V^{\mathrm{op}}} = (\mathrm{id}_V)^{\mathrm{op}}$, a kompozicija je zadana sa

$$f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} := (g \circ f)^{\mathrm{op}}.$$

Kontravarijantni funktor F iz $\mathcal{V}$ u $\mathcal{W}$ je (kovarijantni) funktor $F\colon \mathcal{V}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{W}$ iz suprotne kategorije. *Endofunktor* je svaki funktor $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ kojem se domena i kodomena podudaraju. Podsjećamo da je (Kartezijev) *produkt kategorija* $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ kategorija $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ s klasom objekata

$\mathrm{Ob}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{W})$, klasom morfizama $\mathrm{Mor}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{W})$, identitetama $\mathrm{id}_{(V,W)} = (\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W)$, a čija domena, kodomena i kompozicija morfizama se evaluiraju po komponentama. *Bifunktor* je funktor $G\colon \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$ definiran na Kartezijevom produktu dviju kategorija. Posebno važan bifunktor je Hom-bifunktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{V} \to \mathrm{Set}$$

koji je na objektima dan s $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(A, B)$, a na morfizmima na sljedeći način. Za morfizam $(f, g)\colon (A, C) \to (B, D)$, njegova slika

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(f, g)\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(A, D)$$

šalje $h\colon B \to C$ u $g \circ h \circ f$, tj. u kompoziciju morfizama $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{g} D$. Ako fiksiramo neki objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ kao prvi argument u bifunktoru $F\colon \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$ dobivamo obični funktor

$$F(A, -)\colon \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$$

na objektima dan formulom $W \mapsto F(A, W)$ i na morfizmima formulom $d \mapsto F(\mathrm{id}_A, d) =: F(A, d)$. Slično definiramo funktor $F(-, B)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ za $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.

Definicija 2.1.2. Za objekt $e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ kažemo da je

(i) *inicijalni objekt* ako za svaki $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ postoji točno jedan morfizam $f\colon e \to V$,

(ii) *terminalni objekt* ako za svaki $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ postoji točno jedan morfizam $g\colon V \to e$.

Lako se vidi da su svaka dva inicijalna objekta e, $e' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ izomorfna preko jedinstvenog izomorfizma $e \to e'$. Inicijalni objekt ne mora postojati u kategoriji. Terminalni objekt u kategoriji $\mathcal{V}$ možemo promatrati kao inicijalni objekt u suprotnoj kategoriji $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$. Za objekt V u kategoriji $\mathcal{V}$ *konstantni funktor* $\mathrm{const}_V = \mathrm{const}_V^I\colon I \to \mathcal{V}$ dan je pravilom $\mathrm{const}_V\colon i \mapsto V$, za sve $i \in \mathrm{Ob}(I)$, $\mathrm{const}_V\colon f \mapsto \mathrm{id}_V$ za sve $f \in \mathrm{Mor}(I)$. Notacija I dolazi od termina *indeksna kategorija*.

Definicija 2.1.3. Neka je $F\colon I \to \mathcal{V}$ funktor. *Konus* nad F s vrhom $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ je prirodna transformacija $\alpha\colon \mathrm{const}_V^I \Rightarrow F$. Drugim riječima, konus je zadan komponentama

$$\alpha_i\colon V \to F(i), \quad i \in I$$

i za svaki morfizam $g\colon i \to j$ u I vrijedi $\alpha_j = F(g) \circ \alpha_i$. *Morfizam konusa* $\alpha \to \beta$ nad F s vrhovima V_α i V_β je morfizam $f\colon V_\alpha \to V_\beta$ u $\mathcal{V}$ za koji vrijedi

$$\beta_i \circ f = \alpha_i, \qquad \text{za sve } i \in \mathrm{Ob}(I).$$

Kompozicija morfizama konusa dana je kompozicijom pripadnih morfizama u $\mathcal{V}$ među vrhovima konusa. Konusi nad F i njihovi morfizmi, dakle, čine kategoriju. *Granični konus* (univerzalni konus) ili *limes* funktora F je terminalni objekt kategorije konusa nad F (ako postoji) i označuje se s $\lim F$ ili $\lim_{i\in I} F(i)$. Ista oznaka se koristi ponekad i za vrh limesa, osobito u notaciji s jednakosti $V = \lim_i F(i)$ ili $V \cong \lim_i F(i)$. Komponentu graničnog konusa $\lim_{i\in I} F(i) \to F(j)$ zovemo i projekcijom na $F(j)$.

Definicija 2.1.4. Neka je $F\colon I \to \mathcal{V}$ funktor. *Kokonus* nad F s vrhom $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ je prirodna transformacija $\alpha\colon F \Rightarrow \mathrm{const}^I_V$. Ekvivalentno, kokonus nad F je konus u suprotnoj kategoriji $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$. Očito kokonusi nad F čine kategoriju. Terminalni objekt te kategorije je, ako postoji, *granični kokonus* ili *kolimes* funktora F i označuje se s $\mathrm{colim}\, F$ ili $\mathrm{colim}_{i\in I} F(i)$.

Ako je I mala kategorija, funktore $I \to \mathcal{V}$ zovemo i *dijagrami*. U ovoj disertaciji promatrat ćemo samo limese i kolimese dijagrama. Ako limesi (odnosno kolimesi) svih funktora $I \to \mathcal{V}$ postoje u $\mathcal{V}$, kažemo da $\mathcal{V}$ *dopušta* limese (odnosno kolimese) funktora oblika I.

Paralelni par morfizama u kategoriji $\mathcal{V}$ je par morfizama $f, g\colon i \to j$ u kategoriji $\mathcal{V}$ s istom domenom i istom kodomenom. Morfizam $b\colon j \to j'$ *koujednačuje* paralelni par f, g ako vrijedi $b\circ f = b\circ g$. Morfizam $a\colon i' \to i$ *ujednačuje* paralelni par f, g ako vrijedi $f\circ a = g\circ a$. Paralelni par morfizama možemo promatrati kao funktor iz kategorije s dva objekta $0, 1$ i dva različita morfizma $0 \to 1$ u kategoriju $\mathcal{V}$. Lako se vidi da su konusi (odnosno kokonusi) paralelnog para u bijekciji s morfizmima koji ujednačuju (odnosno koujednačuju) taj par. *Ujednačitelj paralelnog para* je po definiciji granični konus (tj. limes) pripadnog funktora. *Koujednačitelj paralelnog para* je po definiciji granični kokonus (tj. kolimes) pripadnog funktora.

Kategorija je *diskretna* ako su joj svi morfizmi identitete. Svaki skup I možemo promatrati kao malu diskretnu kategoriju na očiti način, koju označavamo istom oznakom. Pri tome familije $\{V_i\}_{i\in I}$ objekata u nekoj kategoriji $\mathcal{V}$ odgovaraju funktorima $V\colon I \to \mathcal{V}$. (Kategorijski) *produkt* $\prod_{i\in I} V_i$ familije objekata $\{V_i\}_{i\in I}$ je tada limes funktora $V\colon I \to \mathcal{V}$, pri čemu komponente univerzalnog konusa

$$\pi_k\colon \prod_{i\in I} V_i \to V_k$$

zovemo projekcijama (iako one nisu nužno epimorfizmi). *Koprodukt* $\coprod_{i\in I} V_i$ familije objekata $\{V_i\}_{i\in I}$ je kolimes funktora $V\colon I \to \mathcal{V}$, pri čemu komponente univerzalnog konusa

$$\iota_k\colon V_k \to \coprod_{i\in I} V_i$$

zovemo injekcijama (iako one nisu nužno monomorfizmi).

Promatrajmo kategoriju I koja ima tri objekta i, j, k i dva različita morfizma $i \to k$, $j \to k$.

Povlak (ili fibrirani produkt) $V \times_Z W = V\,{}_f\!\times_g W$ je limes dijagrama $d\colon I \to \mathcal{V}$

$$\begin{tikzcd} V \times_Z W \arrow[r, dashed, "f^*(g)"] \arrow[d, dashed, "g^*(f)"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

gdje je $V = d(i)$, $W = d(j)$, $Z = d(k)$. Ako je $d(i \to k) = f$ i $d(j \to k) = g$, onda projekciju $V \times_Z W \to V$ zovemo i povlak $f^*(g)$ morfizma g uzduž f, a projekciju $V \times_Z W \to W$ zovemo i povlak $g^*(f)$ morfizma f uzduž g. Pišemo i $f^*(W) = g^*(V) = V \times_Z W$.

Jezgra $\ker f\colon \operatorname{Ker} f \to f$ *morfizma* $f\colon V \to W$ u kategoriji $\mathcal{V}$ koja posjeduje inicijalni objekt 0 je povlak $\operatorname{Ker} f \to V$ jedinstvenog morfizma $0 \to W$ uzduž f.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, dashed, "\ker f"] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Kojezgra morfizma f je suprotan morfizam jezgri suprotnog morfizma f^{op} u suprotnoj kategoriji, tj. $\operatorname{coker} f = (\ker f^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\colon W \to \operatorname{Coker} f = (\operatorname{Ker} f^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$. Ako je 0 *nulobjekt* (objekt koji je istovremeno inicijalan i terminalan) tada je za svaka dva objekta V i W *nulmorfizam* $0\colon V \to W$ kompozicija $V \to 0 \to W$ i ona ne ovisi o izboru nulobjekta 0. Oznaka za nulmorfizam se slaže s oznakama u slučaju Abelovih grupa i vektorskih prostora. U kategorijama Abelovih grupa, vektorskih prostora i općenitije u svakoj Abelovoj kategoriji je jezgra (odnosno kojezgra) morfizma $f\colon V \to W$ jednaka ujednačitelju (odnosno koujednačitelju) para $f, 0\colon V \to W$,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, dashed] & V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & W \arrow[r, dashed] & \operatorname{Coker} f \end{tikzcd}$$

Slika morfizma $f\colon V \to W$ u kategoriji $\mathcal{V}$ je monomorfizam $\operatorname{Im} f \hookrightarrow W$ zajedno s razlaganjem

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] & \operatorname{Im} f \arrow[r, dashed, hook] & W \end{tikzcd}$$

koje je univerzalno s obzirom na sva takva razlaganja:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Im} f \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & W \\ & U \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

U svakoj Abelovoj kategoriji je slika $\operatorname{Im} f \hookrightarrow W$ jezgra kojezgre morfizma f.

2.2 Simetrične monoidalne kategorije

U ovom odjeljku proučavamo limese i kolimese s posebnom pažnjom na usmjerene i inverzne sustave te osnovne definicije vezane uz monoidalne kategorije. Većina objekata u disertaciji su vektorski prostori s dodatnom strukturom, pa se osvrćemo i na posebne slučajeve kategorijskih konstrukcija u slučaju kategorije skupova i kategorije vektorskih prostora.

Definicija 2.2.1. *Monoidalna kategorija* je šestorka $(\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$ u kojoj je $\mathcal{V}$ kategorija, $\otimes\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je bifunktor koji zovemo *monoidalni produkt*, k je istaknuti objekt u $\mathcal{V}$ koji zovemo *jedinični objekt*, $a\colon\ \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}) \Rightarrow \otimes \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \times \otimes)$ je prirodni izomorfizam funktora $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ koji zovemo *asocijator*, $l\colon (k \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ i $r\colon (\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \otimes k) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ prirodni izomorfizmi endofunktora $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ koje zovemo *lijevi unitor* i *desni unitor* takvi da za svaka četiri objekta $U, V, W, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ peterokut

$$\begin{tikzcd}
 & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes Z \arrow[dl, "a_{U,V,W} \otimes \mathrm{id}_Z"'] \arrow[dr, "a_{U \otimes V, W, Z}"] & \\
(U \otimes (V \otimes W)) \otimes Z \arrow[d, "a_{U, V \otimes W, Z}"'] & & (U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) \arrow[d, "a_{U,V,W \otimes Z}"] \\
U \otimes ((V \otimes W) \otimes Z) \arrow[rr, "\mathrm{id}_U \otimes a_{V,W,Z}"'] & & U \otimes (V \otimes (W \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

komutira i za svaka dva objekta $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ trokut

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes k) \otimes W \arrow[rr, "a_{V,k,W}"] \arrow[dr, "r_V \otimes \mathrm{id}_W"'] & & V \otimes (k \otimes W) \arrow[dl, "\mathrm{id}_V \otimes l_W"] \\
 & V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

također komutira.

Kombiniranjem zahtjeva u definiciji pokazuje se da za sve $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ trokuti

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes k \arrow[rr, "a_{V,W,k}"] \arrow[dr, "r_{V \otimes W}"'] & & V \otimes (W \otimes k) \arrow[dl, "\mathrm{id}_V \otimes r_W"] \\
 & V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(k \otimes V) \otimes W \arrow[rr, "a_{k,V,W}"] \arrow[dr, "l_V \otimes \mathrm{id}_W"'] & & k \otimes (V \otimes W) \arrow[dl, "l_{V \otimes W}"] \\
 & V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

također komutiraju [Kelly].

Definicija 2.2.2. *Simetrična monoidalna kategorija* je šestorka $(\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r, \sigma)$ u kojoj je petorka $(\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$ monoidalna kategorija, a $\sigma = \{\sigma_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V\}_{V,W \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}}$ je familija izomorfizama prirodna u oba argumenta (drugim riječima, $\sigma \colon \mathrm{Id}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} \to T$ je prirodni izomorfizam funktora, gdje je $T \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ funktor zamjene argumenata) takva da za sve V, W, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$ vrijedi

$$\sigma_{W,V} \circ \sigma_{V,W} = \mathrm{id}_{V \otimes W}$$

i komutativni su dijagrami sljedeći šesterokut i trokut.

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes Z \arrow[r, "a_{V,W,Z}"] \arrow[d, "\sigma_{V,W} \otimes \mathrm{id}_Z"'] & V \otimes (W \otimes Z) \arrow[r, "\sigma_{V,W \otimes Z}"] & (W \otimes Z) \otimes V \arrow[d, "a_{W,Z,V}"] \\
(W \otimes V) \otimes Z \arrow[r, "a_{W,V,Z}"'] & W \otimes (V \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes \sigma_{V,Z}"'] & W \otimes (Z \otimes V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes V \arrow[rr, "\sigma_{k,V}"] \arrow[dr, "l_V"'] & & V \otimes k \arrow[dl, "r_V"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

2.2.3. (Kartezijeve monoidalne kategorije.) Osnovna klasa primjera simetrične monoidalne kategorije su one čiji monoidalni produkt je kategorijski produkt, a jedinični objekt terminalni objekt. Neka je $\mathcal{V}$ kategorija s konačnim produktima. Neka je izabran terminalni objekt I u $\mathcal{V}$ i za svaka dva objekta $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$ izabran kategorijski produkt $V \times W$ s projekcijama

$$p_1^{V\times W} \colon V \times W \to V, \qquad p_2^{V\times W} \colon V \times W \to W.$$

Za svaka dva morfizma $f \colon V \to V'$, $g \colon W \to W'$ kompozicije $f \circ p_1^{V\times W} \colon V \times W \to V'$ i $g \circ p_2^{V\times W} \colon V \times W \to W'$ prema univerzalnom svojstvu produkta $V' \times W'$ induciraju morfizam $f \times g \colon V \times W \to V' \times W'$ čime $\times$ s danim odabirima postaje bifunktor $\times \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd}
& V \times W \arrow[d, dashed, "f \times g"] \arrow[ddl, bend right, "f \circ p_1^{V\times W}"'] \arrow[ddr, bend left, "g \circ p_2^{V\times W}"] & \\
& V' \times W' \arrow[dl, "p_1^{V'\times W'}"] \arrow[dr, "p_2^{V'\times W'}"'] & \\
V' & & W'
\end{tikzcd}$$

Za svaka tri objekta V, W, U u kategoriji $\mathcal{V}$ morfizam

$$p_{23} \colon (V \times W) \times U \xrightarrow{p_2^{V\times W} \times \mathrm{id}_U} W \times U,$$

zajedno s kompozicijom projekcija

$$p_1 \colon (V \times W) \times U \xrightarrow{p_1^{V\times W} \times \mathrm{id}_U} V \times U \longrightarrow V,$$

definira po univerzalnom svojstvu produkta neki morfizam

$$a_{V,W,U} \colon (V \times W) \times U \to V \times (W \times U).$$

Za produkte $V \times W$, $W \times V$ definiramo $\sigma_{V,W} \colon V \times W \to W \times V$ koristeći univerzalno svojstvo kodomene $W \times V$ s obzirom na projekcije s domene $V \times W \to V$, $V \times W \to W$:

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[d, dashed, "\sigma_{V,W}"] \arrow[ddl, bend right, "p_1^{V\times W}"'] \arrow[ddr, bend left, "p_2^{V\times W}"] & \\
 & W \times V \arrow[dl, "p_2^{W\times V}"] \arrow[dr, "p_1^{W\times V}"'] & \\
V & & W
\end{tikzcd}$$

Definiramo morfizme $l_V \colon I \times V \to V$ i $r_V \colon V \times I \to V$ kao projekcije produkata s terminalnim objektom. Inverzi $l_V^{-1} \colon V \to I \times V$ i $r_V^{-1} \colon V \to V \times I$ su dani univerzalnim svojstvom produkata $I \times V$ i $V \times I$ i u oba slučaja inducirani parom morfizama id_V i $V \to I$ (jedinstveni morfizam u terminalni objekt). Tim podacima je definirana simetrična monoidalna kategorija $(\mathcal{A}, \times, I, a, l, r, \sigma)$. Kako se kategorijski produkt $\times$ naziva i Kartezijevim produktom, takve simetrične monoidalne kategorije zovemo *Kartezijeve monoidalne kategorije*.

Definicija 2.2.4. Neka su $\tilde{C} = (C, \otimes, k, a, l, r)$, $\tilde{D} = (D, \otimes', k', a', l', r')$ monoidalne kategorije. *Monoidalni funktor* iz $\tilde{C}$ u $\tilde{D}$ je trojka (F, ϕ, η) u kojoj je $F \colon C \to D$ funktor, $\eta \colon k' \to F(k)$ morfizam u D i $\phi \colon F \otimes' F \to F \circ (- \otimes -)$ prirodna transformacija funktora s komponentama

$$\phi_{X,Y} \colon F(X) \otimes' F(Y) \to F(X \otimes Y), \qquad X, Y \in \mathrm{Ob}(C),$$

takva da za sve $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ sljedeći dijagrami komutiraju.

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "\phi_{X,Y} \otimes' \mathrm{id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' \phi_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "\phi_{X \otimes Y, Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "\phi_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k' \otimes' F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "\eta \otimes' \mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(X) \\ F(k) \otimes' F(X) \arrow[r, "\phi_{k,X}"'] & F(k \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes' k' \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' \eta"'] & F(X) \\ F(X) \otimes' F(k) \arrow[r, "\phi_{X,k}"'] & F(X \otimes k) \arrow[u, "F(l_X)"'] \end{tikzcd}$$

Jaki monoidalni funktor je monoidalan funktor (F, ϕ) u kojem je ϕ izomorfizam.

Definicija 2.2.5. Neka je $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$ monoidalna kategorija koja dopušta koujednačitelje, tj. u kojoj svaki par morfizama ima koujednačitelj. Kažemo da *koujednačitelji u $\mathcal{V}$ komutiraju s tenzorskim produktom* $\otimes$ ako za svaki paralelni par morfizama $f, g\colon X \to Y$ vrijedi sljedeća tvrdnja. Ako je $\xi\colon Y \to Z$ koujednačitelj para f, g

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\quad\xi\quad} Z,$$

onda je za svaki objekt W u kategoriji $\mathcal{V}$ morfizam $\xi \otimes \mathrm{id}_W$ koujednačitelj para $f \otimes \mathrm{id}_W$, $g \otimes \mathrm{id}_W\colon X \otimes W \to Y \otimes W$

$$X \otimes W \overset{f \otimes \mathrm{id}_W}{\underset{g \otimes \mathrm{id}_W}{\rightrightarrows}} Y \otimes W \xrightarrow{\xi \otimes \mathrm{id}_W} Z \otimes W,$$

i morfizam $\mathrm{id}_W \otimes \xi$ koujednačitelj para $\mathrm{id}_W \otimes f, \mathrm{id}_W \otimes g\colon W \otimes X \to W \otimes Y$.

2.3 Kategorija vektorskih prostora $(\mathrm{Vect}, \otimes, k)$

Neka je k fiksirano polje. Objekti kategorije Vect vektorskih prostora su k-vektorski prostori, a morfizmi su k-linearna preslikavanja. Prostor morfizama $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ ima i sam strukturu vektorskog prostora i kompozicija $\circ\colon\ \mathrm{Hom}_k(V, W) \circ \mathrm{Hom}_k(Z, V) \to \mathrm{Hom}_k(Z, W)$ je k-bilinearna, dakle i sama morfizam u Vect. Kategorija Vect ima sve limese i kolimese, a vrhovi konačnih produkata i koprodukata su izomorfni, štoviše ako su $p_i\colon\ \prod_{l=1}^N V_l \to V_i$ kanonske projekcije i $j_i\colon V_i \to \coprod_{l=1}^N V_l$ kanonske injekcije, tada je kompozicija

$$V_i \xrightarrow{j_i} \coprod_{l=1}^{N} V_l \cong \prod_{l=1}^{N} \to V_k$$

jednaka id_{V_i} ako je $i = k$ i nulmorfizmu 0 ako $i \neq k$; kažemo da Vect ima biprodukte i uz identifikaciju vrh $\coprod_{l=1}^N V_l \cong \prod_{l=1}^N V_l$ označavamo s $\oplus_{l=1}^N V_l$. Nulobjekt 0 je inicijalni objekt u

Vect i k je terminalni objekt u Vect. Ukoliko za kategorijski produkt $V \times W$ u Vect izaberemo uobičajenog predstavnika, naime skup svih uređenih parova sa standardnom linearnom strukturom, tada je simetrija $\sigma^{\times}_{V,W}$ produkta $V \times W \to W \times V$ dana s $(v, w) \mapsto (w, v)$.

Definicija 2.3.1. *Tenzorski produkt vektorskih prostora* V i W je vektorski prostor $V \otimes W$ zajedno s k-bilinearnim preslikavanjem $V \times W \to V \otimes W$ takav da za svako k-bilinearno preslikavanje $V \times W \to Z$ postoji jedinstveno k-linearno preslikavanje $f\colon V \otimes W \to Z$ takvo da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
V \otimes W \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

To svojstvo zovemo univerzalno svojstvo tenzorskog produkta. Često i sam prostor $V \otimes W$ zovemo tenzorski produkt. Element od $V \otimes W$ koji je slika od (v, w) pri kanonskom preslikavanju $V \times W \to V \otimes W$ označavamo s $v \otimes w$. Takve elemente od $V \otimes W$ zovemo *jednostavni tenzori*.

Tenzorski produkt bilo koja dva vektorska prostora V i W postoji. Možemo ga realizirati kao kvocijent slobodnog vektorskog prostora $k\,V \times W$ čija je baza skup $V \times W$ po najmanjoj relaciji ekvivalencije takvoj da $\lambda(v, w) \sim (\lambda v, w) \sim (v, \lambda w)$, $(v + v', w) \sim (v, w) + (v', w)$, $(v, w + w') \sim (v, w) + (v, w')$ zajedno s kanonskim bilinearnim preslikavanjem $V \times W \to V \otimes W$ koje je kompozicija tautološkog ulaganja $V \times W \hookrightarrow k\,V \times W$ baze u slobodni vektorski prostor i kvocijentnog preslikavanja $k\,V \times W \to V \otimes W$.

Tenzorski produkt $V \otimes W$ (zajedno s bilinearnim preslikavanjem $V \times W \to V \otimes W$) je univerzalnim svojstvom određen do na jedinstveni izomorfizam. Svaki takav izomorfizam $V \otimes W \to V \otimes' W$ preslikava $v \otimes w$ u $v \otimes' w$.

Ukoliko smo za svaka dva vektorska prostora V, W izabrali neki njihov tenzorski produkt $V \times W \to V \otimes W$, tada je tenzorski produkt linearnih preslikavanja $f\colon V \to V'$ i $g\colon W \to W'$ linearno preslikavanje $f \otimes g\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ koje čini dijagram

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d] & V' \times W' \arrow[d] \\
V \otimes W \arrow[r, dashed, "f \otimes g"'] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

komutativnim; takvo preslikavanje je jedinstveno po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta $V \times W \to V \otimes W$. Lako se vidi da ako su parovi morfizama g_2, g_1 i f_2, f_1 kompozabilni, tada ima smisla i vrijedi $(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1)$.

Definicija 2.3.2. Kategorija $\mathrm{VectFin}$ konačno-dimenzionalnih k-vektorskih prostora je puna potkategorija kategorije Vect čiji objekti su konačno-dimenzionalni k-vektorski prostori.

Propozicija 2.3.3. *Ukoliko su u kategoriji* Vect *ili kategoriji* $\mathrm{VectFin}$ *za svaka dva objekta* V, W *izabrani predstavnici produkta* $(V \times W, p_V, p_W)$ *i tenzorskog produkta* $V \times W \to V \otimes W$ *tada koherencije pripadne Kartezijeve simetrične monoidalne kategorije* $(V, \times, k, a^\times, l^\times, r^\times, \sigma^\times)$ *po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta induciraju koherencije pripadne monoidalne kategorije s obzirom na tenzorski produkt* $V \otimes W$ *na nivou prostora. Dakle, kategorije* Vect *i* $\mathrm{VectFin}$ *imaju kanonsku* $(\mathrm{Vect}, \otimes, k, a, l, r, \sigma)$ *i* $(\mathrm{VectFin}, \otimes, k, a, l, r, \sigma)$ *strukturu simetrične monoidalne kategorije, pri čemu je komponenta simetrije* $\sigma_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V$ *jedinstveno* k*-linearno preslikavanje koje čini dijagram*

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\sigma^\times_{V,W}"] \arrow[d] & W \times V \arrow[d] \\
V \otimes W \arrow[r, "\sigma_{V,W}"'] & W \otimes V
\end{tikzcd}$$

komutativnim. Slično tome, asocijator je induciran asocijatorom $a^\times$*,*

$$\begin{tikzcd}
(V \times W) \times U \arrow[r, "a^\times_{V,W,U}"] \arrow[d] & V \times (W \times U) \arrow[d] \\
(V \otimes W) \times U \arrow[d] & V \times (W \otimes U) \arrow[d] \\
(V \otimes W) \otimes U \arrow[r, "a_{V,W,U}"'] & V \otimes (W \otimes U)
\end{tikzcd}$$

gdje su kanonski neoznačeni morfizmi evidentni ili inducirani univerzalnim svojstvom i funktorijalnošću. Slično se definiraju lijevi i desni unitor koristeći množenje skalarom.

2.4 Limesi i filtrirani kolimesi u Set i Vect

2.4.1 Limesi u Set i Vect

Propozicija 2.4.1. *(i) Neka je* $\boldsymbol{V} \colon I^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ *dijagram u kategoriji skupova. Za vrh limesa* $\lim \boldsymbol{V}$ *možemo izabrati skup čiji elementi su uređene* I*-torke* $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \boldsymbol{V}(i)$ *takve da za svaki morfizam* $s \colon i \to j$ *u* I*, vrijedi* $\boldsymbol{V}(s)(v_j) = v_i$*.*

$$\lim \boldsymbol{V} = \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \boldsymbol{V}(i) \;\middle|\; \forall (i \xrightarrow{s} j) \in I,\ \boldsymbol{V}(s)(v_j) = v_i \right\}$$

Svaku takvu I-torku nazivamo nit *(engl. thread) dijagrama $\boldsymbol{V}$ ili nit limesa* $\lim \boldsymbol{V}$. *Projekcije konusa $\pi_k\colon \lim \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}(k)$ dane su sa*

$$\pi_k((v_i)_{i\in I}) = v_k.$$

(ii) U kategoriji vektorskih prostora za vrh limesa dijagrama možemo uzeti potprostor produkta vektorskih prostora koji se sastoji od niti tog dijagrama promatranog kao dijagram skupova. Uvijek postoji barem jedna nit, ona čije su komponente nulvektori.

2.4.2 Filtrirane i usmjerene kategorije

U opisu limesa u Set nismo koristili nikakve pretpostavke na malu kategoriju I. Za jednostavan opis kolimesa u kategoriji skupova i kategoriji vektorskih prostora u propoziciji 2.4.3 trebamo pretpostaviti da je dijagram filtriran.

Definicija 2.4.2. Kategorija I je *filtrirana* ako ima sljedeća svojstva:

(i) I je neprazna, tj. ima barem jedan objekt

(ii) za svaki paralelni par morfizama $f, g\colon i \to j$ postoji objekt k i morfizam $h\colon j \to k$ koji ih koujednačuje, tj. takav da je $h \circ g = h \circ f$

(iii) za svaka dva morfizma $f\colon i \to j$ i $g\colon i \to l$ s istom domenom postoji objekt k i morfizmi $f'\colon j \to k$ i $g'\colon l \to k$ tako da vrijedi $f' \circ f = g' \circ g$.

Kategorija J je *kofiltrirana* ako je njena suprotna kategorija J^{op} filtrirana.

Parcijalni uređaj na skupu I je binarna relacija na I koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Parcijalno uređen skup $(I, \leqslant)$ je *usmjeren skup* ako svaka dva njegova elementa imaju gornju među, tj. ako za svaki $i, j \in I$ postoji $k \in I$ takav da je $i \leqslant k$ i $j \leqslant k$. Svaki parcijalno uređen skup $(I, \leqslant)$ može se promatrati kao kategorija čiji objekti su elementi od I i čija se klasa morfizama sastoji od po jednog morfizma $i \to j$ za svaki par $i \leqslant j$ u I. Takva kategorija zove se *kategorija uređaja* (engl. *order category*). Mi ćemo po potrebi slobodno govoriti o parcijalno uređenim skupovima kao o pripadnim kategorijama uređaja.

Mala usmjerena kategorija je kategorija uređaja koja odgovara usmjerenom skupu. Svaka usmjerena kategorija je očito filtrirana.

Dakle, kategorija je mala usmjerena kategorija ako je klasa njenih objekata skup, za svaka dva objekta $i, j \in I$ je $\mathrm{Hom}(i, j)$ jednočlan ili prazan skup i za svaka dva objekta $i, j \in I$ postoji $k \in I$ i morfizmi $i \to k$ i $j \to k$.

2.4.3 Filtrirani kolimesi u kategorijama Set i Vect

Propozicija 2.4.3. *(i) Neka je I mala filtrirana kategorija i neka je $\boldsymbol{V}: I \to \mathcal{V}$ dijagram u kategoriji* Set. *Tada za vrh kolimesa* $\operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ *možemo uzeti kvocijent disjunktne unije $\coprod_{i \in I} \boldsymbol{V}(i)$ po relaciji ekvivalencije zadanoj sa: $\boldsymbol{V}(i) \ni v \sim w \in \boldsymbol{V}(j)$ ako postoji $k \in I$ i morfizmi $i \xrightarrow{r} k$, $j \xrightarrow{s} k$ u I takvi da je $\boldsymbol{V}(r)(v) = \boldsymbol{V}(s)(w)$.*

$$\operatorname{colim} \boldsymbol{V} \cong \coprod_{i \in I} \boldsymbol{V}(i) \Big/ \sim$$

$$v \sim w \;\Leftrightarrow\; \exists\, r, s \in \operatorname{Mor}(I),\; \boldsymbol{V}(r)(v) = \boldsymbol{V}(s)(w)$$

Ako je I usmjerena kategorija, onda su r i s jedinstveni pa pišemo i $v|_k = w|_k$. Komponente graničnog kokonusa $\iota_i \colon \boldsymbol{V}(i) \to \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ dane su sa

$$\iota_i(v) = [v].$$

(ii) U kategoriji vektorskih prostora vrh kolimesa filtriranog dijagrama je kao skup jednak kolimesu dijagrama shvaćenog kao dijagrama u Set, *sa strukturom vektorskog prostora zadanom na sljedeći način: za $v \in \boldsymbol{V}(i)$ i $w \in \boldsymbol{V}(j)$ i skalare α, $\beta \in k$ nađemo objekt m u I i morfizme $r\colon i \to m$ i $s\colon j \to m$ u I te definiramo*

$$\alpha[v] + \beta[w] := [\alpha \boldsymbol{V}(r)(v) + \beta\, \boldsymbol{V}(s)(w)],$$

što ne ovisi o izboru m, r i s. Ako je I usmjerena kategorija, desnu stranu jednakosti možemo pisati $[\alpha v|_m + \beta w|_m]$.

2.5 Usmjereni sustavi i inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$

Svakom dijagramu $\boldsymbol{V}: I \to \mathcal{V}$ kojem je domena usmjerena kategorija možemo pridružiti njegov kolimes, ukoliko postoji, a objekti $\boldsymbol{V}(i)$ intuitivno aproksimiraju vrh tog kolimesa. Dijagrami kojima su domene sve moguće male usmjerene kategorije organiziraju se u kategoriju $\operatorname{Ind} \mathcal{V}$ usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$ koja proširuje $\mathcal{V}$ u smislu da svaki objekt u $\mathcal{V}$ možemo gledati kao konstantni dijagram (dakle, jednak svom kolimesu) i izomorfni usmjereni sustavi imaju izomorfne kolimese (ali ne nužno i obratno). Naravno, moguće je da neki usmjereni sustavi ni nemaju kolimes u $\mathcal{V}$. Ako objektima $\boldsymbol{V}(i)$ pridružimo konstantne dijagrame, dijagramu $\boldsymbol{V}: I \to \mathcal{V}$ možemo pridružiti dijagram u kategoriji usmjerenih sustava. U kategoriji usmjerenih sustava on nužno ima kolimes čiji vrh je izomorfan $\boldsymbol{V}$. Kategorija $\mathcal{V}$ se tako uloži kao puna potkategorija u kategoriju $\operatorname{Ind} \mathcal{V}$ usmjerenih sustava u kategoriji $\mathcal{V}$, koja dopušta sve filtrirane kolimese [SGA4-1]. Slično definiramo kategoriju inverznih sustava $\operatorname{Pro} \mathcal{V}$ u kategoriji $\mathcal{V}$, čiji objekti profinjuju limese funktora s domenom koja je suprotna maloj usmjerenoj kategoriji.

U ovoj disertaciji značajnu ulogu će imati određena puna potkategorija $\mathrm{Ind}^s\,\mathcal{V}$ kategorije usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$ koju ćemo zvati kategorija filtracija u $\mathcal{V}$ i određena puna potkategorija $\mathrm{Pro}^s\,\mathcal{V}$ kategorije inverznih sustava u $\mathcal{V}$ koju ćemo zvati kategorija kofiltracija u $\mathcal{V}$.

2.5.1 Usmjereni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$

Definicija 2.5.1. *Usmjereni sustav* u kategoriji $\mathcal{V}$ je funktor $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathcal{V}$ iz male usmjerene kategorije I u kategoriju $\mathcal{V}$.

Usmjereni sustav $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathcal{V}$ dan je dakle ovim podacima: za svaki objekt $i \in I$ usmjerene kategorije dan je objekt $V_i := \boldsymbol{V}(i)$ kategorije $\mathcal{V}$ i za svaki par $i, j \in I$ za koje je $i \leqslant j$ morfizam $\phi_{ji} := \boldsymbol{V}(i \to j)$ tako da vrijedi $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$ za svaki $i \in I$ i $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$ za svaku trojku $i \leqslant j \leqslant k$ u I. Objekte V_i zovemo *komponentama* usmjerenog sustava, a morfizme ϕ_{ji} *veznim morfizmima*. Možemo pisati

$$\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\colon V_i \to V_j\}_{(i\to j)\in \mathrm{Mor} I})$$

ili kraće $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$.

Definicija 2.5.2. Neka su $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_k\}_{k\in J}, \{\psi_{lk}\})$ usmjereni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$. *Predmorfizam* usmjerenih sustava $f\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ je par oblika $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})$ gdje je $\lambda\colon I \to J$ funkcija i $\{f_i\colon V_i \to W_{\lambda(i)}\}_{i\in I}$ familija morfizama u $\mathcal{V}$ takva da vrijedi sljedeći uvjet: za svaki morfizam $i \to j$ u I postoje morfizmi $\lambda(i) \to k$ i $\lambda(j) \to k$ u J takvi da je dijagram

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[r, "f_j"] & W_{\lambda(j)} \arrow[dr, dashed, "\psi_{k\lambda(j)}"] & \\
 & & W_k \\
V_i \arrow[uu, "\phi_{ji}"] \arrow[r, "f_i"] & W_{\lambda(i)} \arrow[ur, dashed, "\psi_{k\lambda(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

komutativan.

Na skupu predmorfizama s istom domenom i kodomenom uvodi se relacija ekvivalencije $\sim$ definirana sa: $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I}) \sim (\mu, \{g_i\}_{i\in I})$ ako za svaki $i \in I$ postoje morfizmi $\lambda(i) \to k$ i $\mu(i) \to k$ u J takvi da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
 & W_{\lambda(i)} \arrow[dr, dashed, "\psi_{k\lambda(i)}"] & \\
V_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & W_k \\
 & W_{\mu(i)} \arrow[ur, dashed, "\psi_{k\lambda(j)}"'] &
\end{tikzcd}$$

To je zaista relacija ekvivalencije. Dokaz je poznat i dualan dokazu analogne činjenice za inverzne sustave [MardSegal], I.1.1.

Definicija 2.5.3. *Morfizam usmjerenih sustava* je klasa ekvivalencije predmorfizama po gore navedenoj relaciji ekvivalencije.

Ako su indeksne kategorije I i J jednake, za morfizam usmjerenih sustava kažemo da je *po nivoima* ako postoji njegov predstavnik $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})$ takav da je $\lambda = \mathrm{id}$.

Teorem 2.5.4. *Svaki morfizam $f\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ usmjerenih sustava $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathcal{V}$ i $\boldsymbol{W}\colon J \to \mathcal{V}$ ekvivalentan je nekom morfizmu po nivoima u smislu da postoji usmjerena kategorija K, usmjereni sustavi $\boldsymbol{V'}\colon K \to \mathcal{V}$ i $\boldsymbol{W'}\colon K \to \mathcal{V}$, izomorfizmi usmjerenih sustava $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V'}$ i $\boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{W'}$ i morfizam po nivoima $\bar{f}\colon \boldsymbol{V'} \to \boldsymbol{W'}$ tako da je kompozicija $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V'} \xrightarrow{\bar{f}} \boldsymbol{W'} \cong \boldsymbol{W}$ jednaka morfizmu $f\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$.*

Dokaz. Dokaz je dualan dokazu u knjizi [MardSegal], I.1.3, Theorem 3. □

Neka su $f = (\lambda, \{f_i\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $g = (\mu, \{g_j\}_{j\in J})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ predmorfizmi usmjerenih sustava. Tada je

$$g \circ f := (\mu \circ \lambda, \{g_{\lambda(i)} \circ f_i\colon V_i \to Z_{\mu(\lambda(i))}\}_{i\in I})$$

predmorfizam usmjerenih sustava $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{Z}$ i zovemo ga *kompozicijom predmorfizama* f i g. (Dokaz poznat.)

Kompozicije ekvivalentnih predmorfizama su ekvivalentni predmorfizmi pa

Lema 2.5.5. *Kompozicija predmorfizama inducira dobro definiranu asocijativnu kompoziciju na klasama ekvivalencije predmorfizama, tj. na morfizmima usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$.*

Time je definirana kategorija usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$ koju ćemo označiti $\mathrm{Ind}\mathcal{V}$.

2.5.2 Inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$

Definicija 2.5.6. *Inverzni sustav* u kategoriji $\mathcal{V}$ je kontravarijantni funktor $\boldsymbol{V}\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ iz male usmjerene kategorije I u kategoriju $\mathcal{V}$.

Inverzni sustav $\boldsymbol{V}\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ dan je dakle ovim podacima: za svaki objekt $i \in I$ usmjerene kategorije dan je objekt $V_i := \boldsymbol{V}(i)$ kategorije $\mathcal{V}$ i za svaki par $i, j \in I$ za koje je $i \geqslant j$ morfizam $\phi_{ji} := \boldsymbol{V}(i \to j)$ tako da vrijedi $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{V_i}$ za svaki $i \in I$ i $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$ za svaku trojku $i \geqslant j \geqslant k$ u I. Objekte V_i zovemo *komponentama* inverznog sustava, a morfizme ϕ_{ji} *veznim morfizmima*. Možemo pisati

$$\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\colon V_i \to V_j\}_{(i\to j)\in \mathrm{Mor} I^{\mathrm{op}}})$$

ili kraće $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$.

Definicija 2.5.7. Neka su $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_k\}_{k\in J}, \{\psi_{lk}\})$ inverzni sustavi u kategoriji $\mathcal{V}$. *Predmorfizam* inverznih sustava $f\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ je par oblika $(\lambda, \{f_j\}_{j\in J})$ gdje je $\lambda\colon J \to I$ funkcija i $\{f_j\colon V_{\lambda(j)} \to W_j\}_{j\in J}$ familija morfizama u $\mathcal{V}$ takva da vrijedi sljedeći uvjet: za svaki morfizam $j \to i$ u J^{op} postoje morfizmi $k \to \lambda(i)$ i $k \to \lambda(j)$ u I^{op} takvi da je dijagram

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(j)} \arrow[r, "f_j"] & W_j \arrow[dd, "\psi_{ij}"] \\
V_k \arrow[ur, dashed, "\phi_{\lambda(j)k}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\lambda(i)k}"'] & & \\
& V_{\lambda(i)} \arrow[r, "f_i"] & W_i
\end{tikzcd}$$

komutativan.

Na skupu predmorfizama s istom domenom i kodomenom uvodi se relacija ekvivalencije $\sim$ definirana sa: $(\lambda, \{f_j\}_{j\in J}) \sim (\mu, \{g_j\}_{j\in J})$ ako za svaki $j \in J$ postoje morfizmi $k \to \lambda(j)$ i $k \to \mu(j)$ u I^{op} takvi da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(j)} \arrow[dr, "f_j"] & \\
V_k \arrow[ur, dashed, "\phi_{\lambda(j)k}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\mu(j)k}"'] & & W_j \\
& V_{\mu(j)} \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

To je zaista relacija ekvivalencije, [MardSegal], I.1.1.

Definicija 2.5.8. *Morfizam inverznih sustava* je klasa ekvivalencije predmorfizama po gore navedenoj relaciji ekvivalencije.

Ako su indeksne kategorije I i J jednake, za morfizam inverznih sustava kažemo da je *po nivoima* ako postoji njegov predstavnik $(\lambda, \{f_j\}_{j\in J})$ takav da je $\lambda = \mathrm{id}$.

Neka su $f = (\lambda, \{f_j\}_{j\in J})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $g = (\mu, \{g_k\}_{k\in K})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ predmorfizmi inverznih sustava. Tada je

$$g \circ f := (\lambda \circ \mu, \{g_k \circ f_{\mu(k)}\colon V_{\lambda(\mu(k))} \to Z_k\}_{k\in K})$$

predmorfizam inverznih sustava $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{Z}$ ([MardSegal], I.1.1). Zovemo ga *kompozicijom predmorfizama* f i g.

Kompozicije ekvivalentnih predmorfizama su ekvivalentni predmorfizmi pa vrijedi lema.

Lema 2.5.9. *Kompozicija predmorfizama inducira dobro definiranu asocijativnu kompoziciju na klasama ekvivalencije predmorfizama, tj. na morfizmima inverznih sustava u $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Dokaz je raspisan npr. u [MardSegal], I.1.1. □

Time je definirana kategorija inverznih sustava u $\mathcal{V}$ koju ćemo označiti $\mathrm{Pro}\mathcal{V}$.

2.5.3 Kofinalnost

Definicija 2.5.10. Podskup K parcijalno uređenog skupa $(I, \leqslant)$ je kofinalan u I ako za svaki $i \in I$ postoji $k \in K$ takav da je $i \leqslant k$. Kažemo da je parcijalno uređen skup kofinalnosti λ ako sadrži kofinalan podskup kardinaliteta λ i ne sadrži kofinalan podskup manjeg kardinaliteta.

Propozicija 2.5.11. *Neka je $I \to \mathcal{V}$ usmjeren sustav i neka je K kofinalan u I. Tada je usmjeren sustav $K \hookrightarrow I \to \mathcal{V}$ izomorfan usmjerenom sustavu $I \to \mathcal{V}$. Analogna tvrdnja vrijedi za inverzne sustave.*

Dokaz. Vidi u [MardSegal] ili, u terminima filtriranih kategorija, u [SGA4-1]. □

Poglavlje 3

Kategorija $\mathrm{proVect}$ kofiltriranih vektorskih prostora

3.1 Definicije

U prethodnom poglavlju definirani su inverzni sustav u $\mathcal{V}$, predmorfizmi inverznih sustava i njihova kompozicija, morfizmi inverznih sustava i njihova kompozicija, te kategorija inverznih sustava u $\mathcal{V}$. Kategorija inverznih sustava u $\mathcal{V}$ je ekvivalentna kategoriji poopćenih inverznih sustava u $\mathcal{V}$, a ona je ekvivalentna kategoriji pro-objekata u $\mathcal{V}$, pa je označavamo s $\mathrm{Pro}\mathcal{V}$.

3.1.1 Kategorija $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ kofiltracija u $\mathcal{V}$

Definicija 3.1.1. *Kofiltracija* je inverzni sustav kod kojeg su sva vezna preslikavanja epimorfizmi. *Morfizam kofiltracija* je morfizam inverznih sustava.

Kategorija kofiltracija u kategoriji $\mathcal{V}$, u oznaci $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$, je puna potkategorija kategorije inverznih sustava u $\mathcal{V}$, u oznaci $\mathrm{Pro}\mathcal{V}$.

Definicija 3.1.2. $\aleph_0$-*kofiltracija* je kofiltracija kod koje je indeksna kategorija kofinalnosti najviše $\aleph_0$.

Kategoriju $\aleph_0$-kofiltracija u kategoriji $\mathcal{V}$ označavamo s $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$.

3.1.3. Kategorija $\mathcal{V}$ je puna potkategorija kategorije kofiltracija u $\mathcal{V}$. Imamo sljedeći niz ulaganja kategorija,

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Pro}\mathcal{V},$$

pri čemu je prvo ulaganje pridruživanje odgovarajuće konstantne kofiltracije objektu iz $\mathcal{V}$.

Napomena 3.1.4. U definiciji kofiltriranih vektorskih prostora morat ćemo uzeti limese $\aleph_0$-kofiltracija vektorskih prostora, jer tada će sigurno vrijediti da su projekcije iz vrha limesa epimorfizmi. Za općenite kofiltracije u Vect to ne vrijedi, kao što ćemo uskoro vidjeti.

Lema 3.1.5. *Svaki usmjeren skup kofinalnosti $\aleph_0$ posjeduje kofinalan podskup izomorfan s $\mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je I usmjeren skup kofinalnosti $\aleph_0$. Označimo s K neki njegov prebrojiv podskup koji je u njemu kofinalan. Skup K je prebrojiv pa možemo njegove elemente poredati u niz $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Induktivno ćemo definirati strogo rastući niz elemenata u K na sljedeći način.

Za početak definiramo $j_1 := k_1$. Zatim pretpostavimo da nakon n-tog koraka imamo definiran strogo rastući niz $j_1, j_2, \ldots, j_n$ u K takav da je $j_i \geqslant k_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. U sljedećem koraku definiramo j_{n+1} kao najmanji element u K takav da je $j_{n+1} \geqslant k_{n+1}$ i $j_{n+1} > j_n$. Gornja međa za $\{k_{n+1}, j_n\}$ postoji jer je K usmjeren skup, a takva gornja međa strogo veća od j_n postoji jer bi u protivnom postojao najveći element j_N i $\{j_N\}$ bi bio kofinalan podskup od K kardinaliteta 1 što je u kontradikciji s činjenicama da je najmanji kardinalitet kofinalnog podskupa od I jednak $\aleph_0$ i da je kofinalan podskup kofinalnog podskupa kofinalan podskup. Sada je očito $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo rastući niz u K koji je, zbog $j_n \geqslant k_n$ za svaki n, kofinalan u K. Dokaz se može vidjeti i u [BourbakiSet]. $\square$

Propozicija 3.1.6. *Svaka $\aleph_0$-kofiltracija nepraznih skupova ima neprazan limes.*

Dokaz. Neka je kofiltracija dana sa $(\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ij}\})$. Indeksni usmjereni skup te kofiltracije ima najveći element m ili posjeduje kofinalni podskup K izomorfan s $\mathbb{N}$. U prvom slučaju limes kofiltracije je jednostavno izomorfan s V_m, dakle neprazan, a u drugom slučaju postojanje niti u limesu dobit ćemo primjenom Zornove leme.

Za svaki $A \subseteq K$ definiramo skup niti na A kao skup svih familija $\{v_a\}_{a\in A}$ takvih da je $v_a \in V_a$ za svaki $a \in A$ i da za svaki usporedivi par $a \leqslant b$ u A vrijedi $\phi_{ab}(v_b) = v_a$. Označimo skup niti na A s F_A. Na uniji $F = \bigcup_{A\in\mathcal{P}(K)} F_A$ definiramo parcijalni uređaj:

$$\{v_a\}_{a\in A} \leqslant \{v'_b\}_{b\in B} \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge (\forall a \in A)(v_a = v'_a),$$

a elemente te unije F zovemo parcijalne niti na K. Skup F je očito neprazan. Svaki lanac u parcijalno uređenom skupu F ima gornju među, naime, jedna gornja međa konstruira se tako da se za indeksni skup A uzme unija indeksnih skupova komponenti lanca, a za nit na A unija niti na komponentama lanca. Po Zornovoj lemi iz toga slijedi da postoji maksimalan element skupa F, parcijalna nit $\{v_m\}_{m\in M}$, $M \subseteq K$. Sada preostaje dokazati da je $M = K$. Za ovaj korak dokaza je nužno da postoji takav kofinalan K izomorfan $\mathbb{N}$, tj. da je I kofinalnosti $\aleph_0$.

Pretpostavimo suprotno, da je $M \neq K$. Tada postoji $k \in K$ koji nije element od M. Ako postoji $n \in M$ veći od k, onda proširimo nit sa $v_k := \phi_{kn}(v_n)$. Ako pak ne postoji, onda je k

gornja međa za cijeli M pa uzmimo za n najveći element od M i proširimo nit s nekim $v_k \in V_k$ takvim da je $\phi_{nk}(v_k) = v_n$. Takav postoji jer je vezno preslikavanje surjekcija. Lako se vidi da je u oba slučaja $\{v_m\}_{m \in M \cup \{k\}}$ zaista parcijalna nit, čime dolazimo do kontradikcije. Dakle, $M = K$. Nit definirana na kofinalnom podskupu K se na jedinstven način proširuje do niti na cijelom I. Dakle, limes je neprazan. Dokaz se može vidjeti i u [BourbakiSet].

□

3.1.7. Kofiltracija skupova čije su sve komponente neprazne, a čija indeksna kategorija nije kofinalnosti najviše $\aleph_0$, ne mora imati neprazan limes. Štoviše, Henkin je dokazao u [Henkin] sljedeći teorem.

Teorem 3.1.8. *Svaki usmjereni skup neprebrojive kofinalnosti indeksira neki inverzni sustav nepraznih skupova i surjektivnih veznih preslikavanja čiji je limes prazan skup.*

Propozicija 3.1.9. *Svaka kofiltracija u* Vect *ima limes u* Vect. *Ako je kofiltracija* $\aleph_0$*-kofiltracija, sve su komponente tog limesa epimorfizmi.*

Dokaz. Za prvu tvrdnju vidi propoziciju 2.4.1 o egzistenciji limesa u kategoriji Vect. Dokazujemo sada drugu tvrdnju. Neka je $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ij}\})$ $\aleph_0$-kofiltracija u Vect. Ako je usmjeren skup I kofinalnosti 1, onda posjeduje najveći element m, pa je projekcija $\lim \boldsymbol{V} \to V_m$ izomorfizam. Kako su vezna preslikavanja ϕ_{im} epimorfizmi za svaki $i \in I$, to je i svaka projekcija $\pi_i^V = \phi_{im} \circ \pi_m^V$ epimorfizam. Preostaje dokazati tvrdnju za I kofinalnosti $\aleph_0$.

Pretpostavimo dakle da je I kofinalnosti $\aleph_0$. Neka je V_n proizvoljna komponenta kofiltracije $\boldsymbol{V}$ i $v_n \in V_n$ proizvoljan element. Dokazat ćemo da postoji nit $v \in \lim \boldsymbol{V}$ takva da je $\pi_n(v) = v_n$. Neka je $K \subseteq I$ skup svih $k \in I$ takvih da je $k \geqslant n$. Očito je K kofinalan u I i kofinalnosti $\aleph_0$. Definiramo sada za svaki $k \in K$ skup $S_k \subseteq V_k$ sa $S_k := \phi_{nk}^{-1}(v_n)$. Budući da k tome za svaku trojku usporedivih $k \geqslant l \geqslant m$ u K vrijedi $\phi_{ml} \circ \phi_{lk} = \phi_{mk}$, to je za svaki par $k \geqslant l$ u K sa $\psi_{lk}(s) = \phi_{lk}(s)$ dobro definirano preslikavanje $\psi_{lk} \colon S_k \to S_l$ i ono je surjekcija. Za definirana preslikavanja očito također vrijedi $\psi_{ml} \circ \psi_{lk} = \psi_{mk}$. Budući da su vezna preslikavanja ϕ_{nk} surjekcije, to su svi skupovi S_k za $k \in K$ neprazni. Iz svega toga slijedi da je $\boldsymbol{S} = (\{S_k\}_{k \in K}, \{\psi_{lk}\})$ $\aleph_0$-kofiltracija nepraznih skupova, pa po propoziciji 3.1.6 ona ima neprazan limes u Set. Postoji dakle nit $(v_k)_{k \in K}$ u $\lim \boldsymbol{S}$, tj. parcijalna nit definirana na kofinalnom podskupu K u kofiltraciji $\boldsymbol{V}$, a ta se proširuje do niti u limesu $\lim \boldsymbol{V}$.

□

Napomena 3.1.10. Ako kofiltracija u kategoriji Vect nije $\aleph_0$-kofiltracija, ne mora biti da su projekcije iz limesa u komponente dijagrama epimorfizmi, vidi sljedeći primjer.

Primjer 3.1.11. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{B} = (\{B_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ kofiltracija u Set čije su sve komponente neprazne i pretpostavimo da je $\lim \boldsymbol{S}$ prazan skup. Takva postoji po 3.1.8. Definirajmo sada kofiltraciju $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$ u Vect čije su komponente slobodni vektorski prostori generirani komponentama kofiltracije $\boldsymbol{B}$, $V_i = \mathrm{Free}(B_i)$, i vezna preslikavanja inducirana veznim preslikavanjima kofiltracije $\boldsymbol{B}$, $\psi_{ji}|_{B_i} = \phi_{ji}$. To je kofiltracija, limes te kofiltracije je $\lim \boldsymbol{V} = \{0\}$ i projekcije nisu surjekcije.

3.1.2 Kategorija $\mathrm{proVect}$ kofiltriranih vektorskih prostora

Definicija 3.1.12. *Kofiltrirani vektorski prostor* je vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-kofiltracijom $\boldsymbol{V}$ u kategoriji Vect takvom da je $V \cong \lim \boldsymbol{V}$.

Kofiltrirani vektorski prostor $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ zadan je dakle komponentama $V_i := \boldsymbol{V}(i)$ u Vect, veznim preslikavanjima $\phi_{ij} \colon V_j \to V_i := \boldsymbol{V}(i \to j)$ kofiltracije u Vect, vrhom univerzalnog konusa V u Vect nad tom kofiltracijom i komponentama konusa $\pi_i^V \colon V \to V_i$ koje zovemo projekcije. Iz propozicije 3.1.9 izlazi da su sve projekcije π_n^V epimorfizmi.

Kad pišemo "kofiltrirani vektorski prostor $V \cong \lim \boldsymbol{V}$" podrazumijevamo da je zadan taj izomorfizam s limesom ili, ekvivalentno, da su zadane komponente π_i^V univerzalnog konusa s vrhom V.

Definicija 3.1.13. *Morfizam kofiltriranih vektorskih prostora* $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$, gdje su kofiltracije dane s $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$, je svako linearno preslikavanje $f \colon V \to W$ takvo da za svaki $j \in J$ postoji $i \in I$ i linearno preslikavanje $f_{ji} \colon V_i \to W_j$ za koje je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, twoheadrightarrow, "\pi_i^V"] & W \arrow[d, twoheadrightarrow, "\pi_j^W"] \\ V_i \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \end{tikzcd}$$

to jest, simbolima, takvo da vrijedi $(\forall j \in J)(\exists i \in I)(\exists f_{ji} \colon V_i \to W_j)(\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V)$.

Očito je kompozicija $g \circ f$ morfizama kofiltriranih vektorskih prostora f i g morfizam kofiltiranih vektorskih prostora. Time smo definirali kategoriju kofiltriranih vektorskih prostora $\mathrm{proVect}$. Njenu punu potkategoriju čiji su objekti kofiltrirani vektorski prostori čije kofiltracije imaju konačno-dimenzionalne komponente označit ćemo s $\mathrm{proVectFin}$.

Sljedeća propozicija koristi propoziciju 3.1.9 koja kaže da su sve projekcije iz limesa $\aleph_0$-kofiltracije u kategoriji Vect epimorfizmi.

Propozicija 3.1.14. *Svaki morfizam kofiltriranih vektorskih prostora inducira jedinstveni morfizam odgovarajućih $\aleph_0$-kofiltracija vektorskih prostora i obratno na sljedeći način:*

(i) Neka je $f\colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora, na kojima su kofiltracije dane s $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$. Definiramo skup

$$H(f) := \{f_{ji}\colon V_i \to W_j \mid j \in J,\, i \in I,\, \pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V\}.$$

Tada svaki izbor podfamilije oblika $\{f_{j\lambda(j)}\colon V_{\lambda(j)} \to W_j\}_{j\in J} \subseteq H(f)$ definira predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i svaka dva takva izbora definiraju ekvivalentne predmorfizme. Pridruživanje koje morfizmu f kofiltriranih vektorskih prostora na ovaj način pridruži morfizam kofiltracija poštuje kompoziciju.

(ii) Svaki predmorfizam $\aleph_0$-kofiltracija $\{f_{j\lambda(j)}\colon V_{\lambda(j)} \to W_j\}_{j\in J}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ određuje jedinstveno preslikavanje $f\colon V \to W$ među limesima $V \cong \lim \boldsymbol{V}$, $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ tih kofiltracija takvo da je za svaki $j \in J$

$$\pi_j^W \circ f = f_{j\lambda(j)} \circ \pi_{\lambda(j)}^V.$$

Ekvivalentni predmorfizmi određuju isto preslikavanje f. Pridruživanje koje morfizmu kofiltracija na ovaj način pridruži morfizam kofiltriranih vektorskih prostora poštuje kompoziciju.

Ta dva pridruživanja su međusobno inverzna.

Dokaz. (i) Za svaki $j \in J$ označimo s $K(j)$ skup indeksa $i \in I$ za koje postoji linearno preslikavanje $f_{ji}\colon V_i \to W_j$ takvo da je $\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V$. Svaki skup $K(j)$ je neprazan jer je f morfizam kofiltriranih vektorskih prostora. Svako preslikavanje f_{ji} je jedinstveno određeno parom (i, j) jer su projekcije π_i^V epimorfizmi. Dokazujemo da za svako vezno preslikavanje $\psi_{lj}\colon W_j \to W_l$ vrijedi da za svaka dva preslikavanja f_{ji} i f_{lk} iz skupa $H(f)$ s kodomenama W_j i W_l postoji $n \in I$ takav da je sljedeći peterokut komutativan:

$$\begin{tikzcd}
 & V_i \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[dd, "\psi_{lj}"] \\
V_n \arrow[ur, dashed, "\phi_{in}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{kn}"'] & & \\
 & V_k \arrow[r, "f_{lk}"] & W_l
\end{tikzcd}$$

Neka je $n \in I$ takav da je $n \geqslant i$ i $n \geqslant k$. Na sljedećem dijagramu su komutativni oba lijeva bočna trokuta (konus s vrhom V), desni bočni trokut (konus s vrhom W), prednji i stražnji četverokut i π_n^V je epimorfizam, pa je i donji peterokut komutativan.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_i^V"] \arrow[ddl, "\pi_n^V"'] \arrow[ddd, bend right, "\pi_k^V"'] & W \arrow[d, "\pi_j^W"] \arrow[ddd, bend left, "\pi_l^W"] \\
 & V_i \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[dd, "\psi_{lj}"] \\
V_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & V_k \arrow[r, "f_{lk}"] & W_l
\end{tikzcd}$$

Opširnije, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\psi_{lj} \circ f_{ji} \circ \phi_{in} \circ \pi_n^V &= \psi_{lj} \circ f_{ji} \circ \pi_i^V \\
&= \psi_{lj} \circ \pi_j^W \circ f \\
&= \pi_l^W \circ f \\
&= f_{ik} \circ \pi_k^V \\
&= f_{ik} \circ \phi_{kn} \circ \pi_n^V
\end{aligned}$$

iz čega slijedi, zbog toga što je projekcija π_n^V epimorfizam,

$$\psi_{lj} \circ f_{ji} \circ \phi_{in} = f_{ik} \circ \phi_{kn}.$$

Za svaki $j \in J$ odaberimo $\lambda(j) \in K(j)$. Iz prethodno dokazanog slijedi da je $(\lambda, \{f_{\lambda(j)j}\})$ predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i da su svaka takva dva predmorfizma ekvivalentna, pa je time morfizmu f kofiltriranih vektorskih prostora pridružen na kanonski način morfizam odgovarajućih kofiltracija.

Dokazujemo da to pridruživanje poštuje kompoziciju. Neka su $f\colon V \to W$ i $g\colon W \to Z$ morfizmi kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$, $W \cong \lim \boldsymbol{W}$, $Z \cong \lim \boldsymbol{Z}$. Za predmorfizme $(\lambda, \{f_{j\lambda(j)}\})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $(\mu, \{g_{j\mu(j)}\})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ odabrane na prethodni način vrijedi da je njihova kompozicija

$$(\lambda \circ \mu, g_{j\mu(j)} \circ f_{\mu(j)\lambda(\mu(j))})$$

predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ takav da za svaki $j \in J$ vrijedi

$$g_{j\mu(j)} \circ f_{\mu(j)\lambda(\mu(j))} \circ \pi^V_{\lambda(\mu(j))} = g_{j\mu(j)} \circ \pi^W_{\mu(j)} \circ f = \pi_j^Z \circ g \circ f.$$

Svaka komponenta te kompozicije dakle leži u skupu

$$H(g \circ f) = \{h_{jk}\colon V_k \to Z_j \mid \pi_j^Z \circ g \circ f = h_{jk} \circ \pi_k^V\}$$

pa je predmorfizam pridružen kompoziciji $g \circ f$ ekvivalentan kompoziciji predmorfizama pridruženih f i g.

(ii) Obratno, neka je predmorfizmom $(\lambda, \{f_j \colon V_{\lambda(j)} \to W_j\}_{j \in J})$ zadan morfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$. Dokazujemo prvo da je tada s $\{f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)}\}_{j \in J}$ definiran konus nad $\boldsymbol{W}$ s vrhom V. Za svaki vezni morfizam $\psi_{lj} \colon W_j \to W_l$ postoji gornja međa n para $\lambda(l)$, $\lambda(j)$ u I takva da je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\lambda(j)} \arrow[r, "f_j"] & W_j \arrow[dd, "\psi_{lj}"] \\
V_n \arrow[ur, dashed, "\phi_{\lambda(j)n}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\lambda(l)n}"'] & & \\
 & V_{\lambda(l)} \arrow[r, "f_l"] & W_l
\end{tikzcd}$$

Budući da su π^V_n komponente konusa nad $\boldsymbol{V}$ iz prethodnog slijedi

$$\psi_{lj} \circ f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)} = \psi_{lj} \circ f_j \circ \phi_{\lambda(j)n} \circ \pi^V_n = f_l \circ \phi_{\lambda(l)n} \circ \pi^V_n = f_l \circ \pi^V_{\lambda(l)}.$$

Dakle, familijom $\{f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)}\}_{j \in J}$ je definiran konus nad $\boldsymbol{W}$ s vrhom V pa po univerzalnom svojstvu limesa on određuje jedinstveno linearno preslikavanje $f \colon V \to \lim \boldsymbol{W} \cong W$ takvo da je $\pi^W_j \circ f = f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)}$ za svaki $j \in J$. Dokazujemo zatim da ekvivalentni predmorfizmi na ovaj način definiraju isti konus pa time i isto preslikavanje f. Neka je $(\mu, \{g_j \colon V_{\mu(j)} \to W_j\})$ predmorfizam ekvivalentan gornjem predmorfizmu $(\lambda, \{f_j\})$. Za svaki $j \in J$ postoji gornja međa $n \in I$ para $\lambda(j)$, $\mu(j)$ takva da je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\lambda(j)} \arrow[dr, "f_j"] & \\
V_n \arrow[ur, dashed, "\phi_{\lambda(j)n}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\mu(j)n}"'] & & W_j \\
 & V_{\mu(j)} \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

pa vrijedi $f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)} = f_j \circ \phi_{\lambda(j)n} \circ \pi^V_n = g_j \circ \phi_{\mu(j)n} \circ \pi^V_n = g_j \circ \pi^V_{\mu(j)}$.

Dokazujemo sada da to pridruživanje poštuje kompoziciju. Neka su $(\lambda, \{f_j\}_{j \in J}) \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $(\mu, \{g_k\}_{k \in K}) \colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ dva predmorfizma kofiltracija. Oni određuju jedinstvena preslikavanja f i g takva da vrijedi $\pi^W_j \circ f = f_j \circ \pi^V_{\lambda(j)}$ za svaki $j \in J$ i $\pi^Z_k \circ g = g_k \circ \pi^W_{\mu(k)}$ za svaki $k \in K$. Slijedi da za njihovu kompoziciju

$$(\lambda \circ \mu, \{g_k \circ f_{\mu(k)}\}_{k \in K})$$

za svaki $k \in K$ vrijedi

$$\pi^Z_k \circ g \circ f = g_k \circ \pi^W_{\mu(k)} \circ f = g_k \circ f_{\mu(k)} \circ \pi^V_{\lambda(\mu(k))}$$

Pridruženo jedinstveno linearno preslikavanje $h\colon V \to Z$ takvo da je

$$\pi_k^Z \circ h = g_k \circ f_{\mu(k)} \circ \pi_{\lambda(\mu(k))}^V$$

za svaki $k \in K$ nužno je tada jednako $g \circ f$. Dakle, kompoziciji dva predmorfizma kofiltracija pridružena je kompozicija odgovarajućih morfizama kofiltriranih vektorskih prostora.

Očito je da su pridruživanja međusobno inverzna. □

Za dva međusobno pridružena morfizma kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i kofiltriranih vektorskih prostora $V \to W$ iz prethodne propozicije kažemo da su inducirani jedan drugim, a elemente skupa $H(f)$ zovemo komponente tog morfizma kofiltracija odnosno tog morfizma kofiltriranih vektorskih prostora.

Napomena 3.1.15. Tvrdnja prethodne propozicije ne vrijedi ako umjesto kofiltracija promatramo inverzne sustave vektorskih prostora, tj. objekte u $\mathrm{Pro}_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ ili $\mathrm{ProVect}$, i njihove limese u Vect. Bez uvjeta da su vezni morfizmi epimorfizmi, ne bi nužno vrijedilo niti da su projekcije iz limesa epimorfizmi, pa ne bismo mogli na ovaj način zaključiti da su svaka dva predmorfizma ekvivalentna. Tada bi bilo moguće da jednom morfizmu kofiltriranih vektorskih prostora odgovara više neekvivalentnih predmorfizama, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 3.1.16. Neka je $\boldsymbol{B}$ inverzni sustav u Set s komponentama $S_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{N}$ i veznim morfizmima $\phi_{ji}\colon S_i \to S_j$ definiranim sa $\phi_{ji}(n) = n$, $n \in S_i$. Očito je $\boldsymbol{S} := (\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\phi_{ji}\})$ inverzni sustav čiji je limes $\lim \boldsymbol{S}$ prazan skup. Neka je sada $\boldsymbol{V}$ inverzni sustav u Vect čije su komponente slobodni vektorski prostori razapeti komponentama kofiltracije $\boldsymbol{B}$ i vezna preslikavanja inducirana veznim preslikavanjima kofiltracije $\boldsymbol{B}$. Tada je $\lim \boldsymbol{V}$ trivijalni vektorski prostor $\{0\}$. Jedino linearno preslikavanje $\lim \boldsymbol{V} \to \lim \boldsymbol{V}$ je identiteta. No, postoji puno neekvivalentnih predmorfizama kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, naprimjer, predmorfizmi $f^{(k)} := (\mathrm{id}, \{f_i^{(k)}\colon V_i \to V_i\})$ definirani na elementima baza sa $f_i^{(k)}(n) = kn$, $n \in B_i$.

Korolar 3.1.17. *Pridruživanje koje svakoj $\aleph_0$-kofiltraciji $\boldsymbol{V}$ u Vect pridruži njen limes $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ u Vect, a svakom morfizmu $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ $\aleph_0$-kofiltracija njime inducirani morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $\lim \boldsymbol{V} \to \lim \boldsymbol{W}$ je funktor koji je ekvivalencija kategorije $\aleph_0$-kofiltracija vektorskih prostora i kategorije kofiltriranih vektorskih prostora:*

$$\mathrm{Pro}_{\aleph_0}^s\mathrm{Vect} \cong \mathrm{proVect}.$$

3.1.3 Upotpunjenje vektorskog prostora po kofiltraciji

Definicija 3.1.18. Neka je $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ kofiltracija u Vect i neka je zadan konus $\{\pi_i^V\colon V \to V_i\}$ nad $\boldsymbol{V}$ u Vect s vrhom V čije su sve komponente epimorfizmi. Tada kažemo da je $\boldsymbol{V}$ *kofiltracija na vektorskom prostoru* V.

Neka je $\boldsymbol{V}$ kofiltracija na V iz Vect. Budući da je V vrh konusa nad $\boldsymbol{V}$, postoji kanonsko linearno preslikavanje

$$V \to \lim \boldsymbol{V} =: \hat{V}.$$

Ako je kofiltracija $\boldsymbol{V}$ $\aleph_0$-kofiltracija , $\hat{V}$ je kofiltrirani vektorski prostor koji zovemo onda *upotpunjenje vektorskog prostora V po kofiltraciji $\boldsymbol{V}$*.

Propozicija 3.1.19. *Neka su na vektorskim prostorima V i W dane kofiltracije $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$. Neka je $f\colon V \to W$ morfizam vektorskih prostora. Definiramo skup*

$$H(f) := \{f_{ji}\colon V_i \to W_j \mid j \in J,\, i \in I,\, \pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V\}.$$

Ako f ima svojstvo

$$(\forall j \in J)(\exists i \in I)(\exists f_{ji}\colon V_i \to W_j)(\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V), \tag{3.1}$$

onda svaki izbor podfamilije oblika $\{f_{j\lambda(j)}\colon V_{\lambda(j)} \to W_j\}_{j\in J} \subseteq H(f)$ definira predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i svaka dva takva izbora definiraju ekvivalentne predmorfizme.

Dokaz. Dokaz je identičan dokazu prvog dijela propozicije 3.1.14 jer nije nužno da su prostori V i W potpuni po kofiltracijama, samo da su komponente konusa iz njih u komponente kofiltracija epimorfizmi. □

3.1.20. Dakle, ako linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ vektorskih prostora na kojima su dane kofiltracije $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$ kao u propoziciji ima svojstvo (3.1), onda inducira morfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ koji zatim po propoziciji 3.1.14 (ii) inducira morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $\lim \boldsymbol{V} \to \lim \boldsymbol{W}$. To preslikavanje zovemo *upotpunjenje preslikavanja f* po tim kofiltracijama:

$$\hat{f}\colon \hat{V} \cong \lim \boldsymbol{V} \to \hat{W} \cong \lim \boldsymbol{W}.$$

Lako se provjeri da to pridruživanje $V \mapsto \hat{V}$, $f \mapsto \hat{f}$ poštuje kompoziciju i identitetu preslikava u identitetu. Također, sljedeći dijagram je komutativan.

$$\begin{tikzcd}
\hat{V} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{W} \\
V \arrow[u] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dokažimo sada tu tvrdnju. Za svaki $j \in J$ postoji $i \in I$ i preslikavanje $f_{ji}\colon V_i \to W_j$ takvo da je donji kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan. Desni trokut i lijevi trokut su komutativni jer su $\kappa_V : V \to \hat{V}$ i $\kappa_W : W \to \hat{W}$ kanonski morfizmi vrha konusa u limes, a vanjski četverokut je komutativan po prvom dijelu ove napomene i konstrukciji $\hat{f}$ u propoziciji 3.1.14.

$$\begin{tikzcd}
\hat{V} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi_i^{\hat{V}}"'] & \hat{W} \arrow[dd, bend left=60, "\pi_j^{\hat{W}}"] \\
V \arrow[u, "\kappa_V"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_i^V"'] & W \arrow[u, "\kappa_W"] \arrow[d, "\pi_j^W"'] \\
V_i \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je tada i gornji kvadrat komutativan, tj. da vrijedi $\kappa_W \circ f = \hat{f} \circ \kappa_V$. To će slijediti ako dokažemo da za svaki $j \in J$ vrijedi $\pi_j^{\hat{W}} \circ \kappa_W \circ f = \pi_j^{\hat{W}} \circ \hat{f} \circ \kappa_V$, budući da je preslikavanje u limes $\hat{W}$ jedinstveno određeno komponentama konusa nad $\boldsymbol{W}$. Zbog navedenih komutativnosti kvadrata i trokuta na dijagramu vrijedi

$$\pi_j^{\hat{W}} \circ \kappa_W \circ f = \pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V = f_{ji} \circ \pi_i^{\hat{V}} \circ \kappa_V = \pi_j^W \circ f = \pi_j^{\hat{W}} \circ \hat{f} \circ \kappa_V.$$

Tvrdnja je dokazana.

3.1.4 Kategorija proSet kofiltriranih skupova

Analogne propozicije vrijede i za $\aleph_0$-kofiltracije u Set i kofiltrirane skupove. Ove definicije su potrebne da bismo mogli definirati bilinearni morfizam kofiltracija u Vect i onda iskazati univerzalno svojstvo tenzorskog produkta kofiltracija u $\mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}$ i $\mathrm{proVect}$.

Definicija 3.1.21. *Kofiltrirani skup* je skup S zajedno s $\aleph_0$-kofiltracijom $\boldsymbol{S}$ u Set takvom da je $S \cong \lim \boldsymbol{S}$. *Morfizam kofiltriranih skupova* $S \cong \lim \boldsymbol{S}$ i $T \cong \lim \boldsymbol{T}$, gdje su kofiltracije dane s $\boldsymbol{S} = (\{S_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{T} = (\{T_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$, je svako preslikavanje $f \colon S \to T$ skupova sa svojstvom

$$(\forall j \in J)(\exists i \in I)(\exists f_{ji} \colon S_i \to T_j)(\pi_j^T \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^S).$$

Propozicija 3.1.22. *Svaka komponenta limesa $\aleph_0$-kofiltracije skupova je epimorfizam.*

Propozicija 3.1.23. *Svaki morfizam $\aleph_0$-kofiltracija $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{T}$ skupova inducira jedinstveni morfizam $S \to T$ kofiltriranih skupova $S \cong \lim \boldsymbol{S}$ i $T \cong \lim \boldsymbol{T}$ i obratno. Pridruživanja su međusobno inverzna i poštuju kompoziciju.*

Dokaz. Dokaz je potpuno analogan dokazu propozicije 3.1.14 za kategoriju Vect. □

Korolar 3.1.24. *Pridruživanje koje svakom kofiltriranom skupu $S \cong \lim \boldsymbol{S}$ pridruži njegovu kofiltraciju $\boldsymbol{S}$, a svakom morfizmu kofiltriranih skupova $f\colon S \to T$ inducirani morfizam njihovih kofiltracija $(\lambda, \{f_i\})$ je funktor koji je ekvivalencija kategorije kofiltriranih skupova i kategorije $\aleph_0$-kofiltracija skupova:*

$$\mathrm{proSet} \cong \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Set}.$$

Definicija 3.1.25. *Kartezijev produkt kofiltracija $\boldsymbol{S} = (\{S_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$* i *$\boldsymbol{T} = (\{T_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$* u kategoriji Set je kofiltracija $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} := (\{S_i \times T_j\}_{(i,j)\in I\times J}, \{\phi_{ki} \times \psi_{lj}\})$.

Lako se provjeri da je prethodna definicija dobra, tj. da je kartezijev produkt epimorfizama opet epimorfizam.

Definicija 3.1.26. Neka su $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{Z}$ kofiltracije u Vect. Za morfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ u Set kažemo da je *bilinearni morfizam kofiltracija* ako je svaka komponenta tog morfizma bilinearno preslikavanje.

Dovoljno je da sve komponente nekog predmorfizma budu bilinearna preslikavanja, tada su sve komponente svakog predmorfizma bilinearna preslikavanja.

Propozicija 3.1.27. *Svaki bilinearni morfizam $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ $\aleph_0$-kofiltracija vektorskih prostora inducira jedinstveno bilinearno preslikavanje iz $V \times W \cong \lim \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$ u $Z \cong \lim \boldsymbol{Z}$ koje je morfizam kofiltriranih skupova i obratno. Pridruživanja su međusobno inverzna i poštuju kompoziciju.*

Dokaz. Analogan dokazu propozicije 3.1.14 za morfizme u $\mathrm{proVect}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ uz dodatnu provjeru da su inducirani morfizmi bilinearni. □

Bilinearno preslikavanje $V \times W \cong \lim \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to Z \cong \lim \boldsymbol{Z}$ koje je morfizam kofiltriranih skupova nazivamo još i *neprekidno bilinearno preslikavanje*.

3.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{proVect}$

3.2.1 Proširenje tenzorskog produkta s $\mathcal{V}$ na kategoriju $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$

Definicija 3.2.1. Neka je $(\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija u kojoj je tenzorski produkt svaka dva epimorfizma epimorfizam. Za dvije kofiltracije $\boldsymbol{V}\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $\boldsymbol{W}\colon J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ definiramo *tenzorski produkt kofiltracija* $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}\colon I^{\mathrm{op}} \times J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ kao kompoziciju

$$I^{\mathrm{op}} \times J^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{V}.$$

Tenzorski produkt morfizama kofiltracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ i $\boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$, čiji su predstavnici redom predmorfizmi $(\lambda, \{f_i\}_{i \in I'})$ i $(\mu, \{g_j\}_{j \in J'})$, je morfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V'} \otimes \boldsymbol{W'}$ zadan predmorfizmom $(\lambda \times \mu, \{f_i \otimes g_j\}_{(i,j) \in I' \times J'})$.

Dakle, tenzorski produkt kofiltracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$ zadan je komponentama

$$\{V_i \otimes W_j\}_{(i,j) \in I \times J}$$

i veznim morfizmima

$$\{\phi_{ki} \otimes \psi_{lj} \colon V_i \otimes W_j \to V_k \otimes W_l\}_{(i \to k, j \to l) \in \mathrm{Mor}(I^{\mathrm{op}} \times J^{\mathrm{op}})}$$

Tezorski produkt moguće je na isti način definirati na cijeloj kategoriji $\mathrm{Pro}\,\mathcal{V}$ inverznih sustava u $\mathcal{V}$. Mi ćemo pokazati da je prethodna definicija dobra i da je $(\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija, a dijelovi dokaza koji slijede impliciraju isto za kategoriju $(\mathrm{Pro}\mathcal{V}, \otimes, k)$.

Propozicija 3.2.2. *Definicija tenzorskog produkta kofiltracija i tenzorskog produkta morfizama kofiltracija je dobra, tj. vrijedi sljedeće.*

(i) Tenzorski produkt kofiltracija je kofiltracija.

(ii) Tenzorski produkt morfizama kofiltracija je dobro definiran morfizam kofiltracija.

Dokaz. (i) Očito je time zadan inverzni sustav, a svaki vezni morfizam je epimorfizam jer je tenzorski produkt dva epimorfizma u $\mathcal{V}$ epimorfizam.

(ii) Tvrdnja slijedi iz funktorijalnosti tenzorskog produkta. Detaljnije, neka su dane kofiltracije $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$ te $\boldsymbol{V'} = (\{V'_i\}_{i \in I'}, \{\phi'_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W'} = (\{W'_j\}_{j \in J'}, \{\psi'_{lj}\})$ i predmorfizmi $f = (\lambda, \{f_i\}_{i \in I'}) \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ i $g = (\mu, \{g_j\}_{j \in J'}) \colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$. Dokazujemo da je tada $f \otimes g = (\lambda \times \mu, \{f_i \otimes g_j\}_{(i,j) \in I' \times J'})$ predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V'} \otimes \boldsymbol{W'}$.

Budući da su f i g predmorfizmi kofiltracija, za svaki par $i \geqslant k$ u I' postoji gornja međa p od $\lambda(i)$ i $\lambda(k)$ u I i za svaki par $j \geqslant l$ u J' postoji gornja međa r od $\mu(j)$ i $\mu(l)$ u J takve da su sljedeća dva peterokuta komutativna:

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(i)} \arrow[r, "f_i"] & V'_i \arrow[dd, "\phi'_{ki}"] \\
V_p \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& V_{\lambda(k)} \arrow[r, "f_k"'] & V'_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& W_{\mu(j)} \arrow[r, "g_j"] & W'_j \arrow[dd, "\psi'_{lj}"] \\
W_r \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& W_{\mu(l)} \arrow[r, "g_l"'] & W'_l
\end{tikzcd}$$

Zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta slijedi da je i sljedeći peterokut komutativan:

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(i)} \otimes W_{\mu(j)} \arrow[r, "f_i \otimes g_j"] & V'_i \otimes W'_j \arrow[dd, "\phi'_{ki} \otimes \psi'_{lj}"] \\
V_p \otimes W_r \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& V_{\lambda(k)} \otimes W_{\mu(l)} \arrow[r, "f_k \otimes g_l"'] & V'_k \otimes W'_l
\end{tikzcd}$$

Dakle, za svaki par $(i, j) \geqslant (k, l)$ u $I' \times J'$ postoji (p, r) u $I \times J$ tako da je prethodni dijagram komutativan, pa je dokazano da je $f \otimes g$ predmorfizam tenzorskog produkta kofiltracija.

Neka su sada dana još dva predmorfizma $f' = (\lambda', \{f'_i\}_{i \in I'})$ i $g' = (\mu', \{g'_j\}_{j \in J'})$ ekvivalentna redom predmorfizmima f i g. Dokazujemo da je tada predmorfizam $f' \otimes g' = (\lambda' \times \mu', \{f'_i \otimes g'_j\}_{(i,j) \in I' \times J'})$ ekvivalentan predmorfizmu $f \otimes g$.

Budući da je $f \sim f'$ i $g \sim g'$, za svaki $i \in I'$ postoji gornja međa p od $\lambda(i)$ i $\lambda'(i)$ u I i za svaki $j \in J'$ postoji gornja međa r od $\mu(j)$ i $\mu'(j)$ u J takve da su sljedeća dva četverokuta komutativna:

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(i)} \arrow[dr, "f_i"] & \\
V_p \arrow[ur, "\phi_{\lambda(i)p}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda'(i)p}"'] & & V'_i \\
& V_{\lambda'(i)} \arrow[ur, "f'_i"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& W_{\mu(j)} \arrow[dr, "g_j"] & \\
W_r \arrow[ur, "\psi_{\mu(j)r}"] \arrow[dr, "\psi_{\mu'(j)r}"'] & & W'_j \\
& W_{\mu'(j)} \arrow[ur, "g'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta iz toga slijedi komutativnost ovog četverokuta:

$$\begin{tikzcd}
& V_{\lambda(i)} \otimes W_{\mu(j)} \arrow[dr, "f_i \otimes g_j"] & \\
V_p \otimes W_r \arrow[ur, "\phi_{\lambda(i)p} \otimes \psi_{\mu(j)r}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda'(i)p} \otimes \psi_{\mu'(j)r}"'] & & V'_i \otimes W'_j \\
& V_{\lambda'(i)} \otimes W_{\mu'(j)} \arrow[ur, "f'_i \otimes g'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Za svaki (i, j) u $I' \times J'$ postoji dakle gornja međa (p, r) od $(\lambda(i), \mu(j))$ i $(\lambda'(i), \mu'(j))$ u $I \times J$ takva da je prethodni dijagram komutativan, tj. $f' \otimes g'$ je predmorfizam ekvivalentan predmorfizmu $f \otimes g$.

□

Propozicija 3.2.3. *Tenzorski produkt kofiltracija u $\mathcal{V}$ je bifunktor*

$$\otimes \colon \mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \times \mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Pro}^s\mathcal{V}.$$

Dokaz. Dokaz je jednostavna provjera da tenzorski produkt morfizama kofiltracija poštuje kompoziciju i paru identiteta pridružuje identitetu. Detaljnije, neka su $f = (\lambda, \{f_i\}_{i \in I'})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$, $g = (\mu, \{g_i\}_{i \in I''})\colon \boldsymbol{V'} \to \boldsymbol{V''}$, $d = (\nu, \{d_j\}_{j \in J'})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$ i $h = (\kappa, \{h_j\}_{j \in J''})\colon \boldsymbol{W'} \to \boldsymbol{W''}$ predmorfizmi kofiltracija. Dokazujemo da vrijedi

$$(g \circ f) \otimes (h \circ d) = (g \otimes h) \circ (f \otimes d).$$

Kompozicije predmorfizama su $g \circ f = (\lambda \circ \mu, \{g_i \circ f_{\mu(i)}\})$ i $h \circ d = (\nu \circ \kappa, \{h_j \circ d_{\kappa(j)}\})$ pa je $(g \circ f) \otimes (h \circ d) = ((\lambda \circ \mu, \nu \circ \kappa), \{(g_i \circ f_{\mu(i)}) \otimes (h_j \circ d_{\kappa(j)})\})$ što je jednako predmorfizmu $((\lambda, \nu) \circ (\mu, \kappa), \{(g_i \otimes h_j) \circ (f_{\mu(i)} \otimes d_{\kappa(j)})\}) = (g \otimes h) \circ (f \otimes d)$ po funktorijalnosti tenzorskog produkta na Vect. Na kraju, tenzorski produkt dvije identitete je očito identiteta:

$$(\mathrm{id} \times \mathrm{id}, \{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\colon V_i \otimes W_j \to V_i \otimes W_j\}_{(i,j) \in I \times J}).$$

□

Propozicija 3.2.4. *Neka je $(\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija u kojoj je tenzorski produkt svaka dva epimorfizma epimorfizam. Tada je kategorija kofiltracija u $\mathcal{V}$, $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$, uz tenzorski produkt kofiltracija $\otimes$ simetrična monoidalna kategorija:*

$$(\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}, \otimes, k).$$

Njena puna potkategorija $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ je također simetrična monoidalna kategorija. Kanonska ulaganja

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$$

su jaki monoidalni funktori.

Dokaz. Neka su $\{\alpha_{VWZ}\}$, $\{\lambda_V\}$, $\{\rho_V\}$ i $\{\sigma_{VW}\}$ asocijator, lijevi unitor, desni unitor i simetrizator za simetričnu monoidalnu kategoriju $(\mathcal{V}, \otimes, k)$. Asocijator α je prirodni izomorfizam funktora pa definira izomorfizam kofiltracija $\boldsymbol{\alpha_{VWZ}}$ po nivoima predmorfizmom $(\mathrm{id}, \{\alpha_{V_iW_jZ_k}\})$:

$$\begin{tikzcd}
(V_i \otimes W_j) \otimes Z_k \arrow[r, "\alpha_{V_iW_jZ_k}"] \arrow[d, "(\phi_{li}\otimes\psi_{mj})\otimes\sigma_{nl}"] & V_i \otimes (W_j \otimes Z_k) \arrow[d, "\phi_{li}\otimes(\psi_{mj}\otimes\sigma_{nl})"] \\
(V_l \otimes W_m) \otimes Z_n \arrow[r, "\alpha_{V_lW_mZ_n}"] & V_l \otimes (W_m \otimes Z_n)
\end{tikzcd}$$

i familija $\{\boldsymbol{\alpha_{VWZ}}\}$ je prirodna transformacija funktora:

$$\begin{tikzcd}
(V_{\lambda(i)} \otimes W_{\mu(j)}) \otimes Z_{\nu(k)} \arrow[r, "\alpha_{V_{\lambda(i)}W_{\mu(j)}Z_{\nu(k)}}"] \arrow[d, "(f_i\otimes g_j)\otimes h_k"] & V_{\lambda(i)} \otimes (W_{\mu(j)} \otimes Z_{\nu(k)}) \arrow[d, "f_i\otimes(g_j\otimes h_k)"] \\
(V'_i \otimes W'_j) \otimes Z'_k \arrow[r, "\alpha_{V'_iW'_jZ'_k}"] & V'_i \otimes (W'_j \otimes Z'_k)
\end{tikzcd}$$

Na isti način lijevi unitor, desni unitor i simetrizator definiraju prirodne izomorfizme $\{\boldsymbol{\lambda_V}\}$, $\{\boldsymbol{\rho_V}\}$ i $\{\boldsymbol{\sigma_{VW}}\}$. Provjera da komutiraju pentagon asocijatora, trokut unitora i asocijatora, šesterokut simetrizatora i asocijatora i trokut simetrizatora i unitora svodi se na provjeru komutativnosti na svakom nivou, a na svakom nivou dijagram je komutativan jer je jednak odgovarajućem dijagramu u kategoriji $\mathcal{V}$.

□

3.2.5. Tenzorski produkt $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ dviju kofiltracija u kategoriji Vect dolazi zajedno s još jednim podatkom: kanonskim bilinearnim morfizmom kofiltracija $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$.

Lema 3.2.6. *Tenzorski produkt dvaju epimorfizama u* Vect *(odnosno* $\mathrm{VectFin}$*) je epimorfizam.*

Dokaz. Svaki element od $V' \otimes W'$ može se zapisati kao konačna suma jednostavnih tenzora $\sum v'_k \otimes w'_k$. Budući da su $f\colon V \to V'$ i $g\colon W \to W'$ epimorfizmi, za svaki k postoje $v_k \in V$ i $w_k \in W$ takvi da je $f(v_k) = v'_k$ i $g(w_k) = w'_k$. Očito je $(f \otimes g)(\sum v_k \otimes w_k) = \sum v'_k \otimes w'_k$.

Slijedi drugi dokaz, iz univerzalnog svojstva.

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "f\otimes g"] & V' \otimes W' \arrow[r, bend left, "d"] \arrow[r, bend right, "h"'] & Z \\
V \times W \arrow[u] \arrow[r, "f\times g"'] & V' \times W' \arrow[u] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Ako $f \otimes g$ ujednačuje par d, h, onda i $V \times W \to V \otimes W \to V' \otimes W'$ ujednačuje par d, h, dakle $V \times W \to V' \times W' \to V' \otimes W'$ ujednačuje par d, h. Za epimorfizme f, g vrijedi da je $f \times g$ epimorfizam pa slijedi i da $V' \times W' \to V' \otimes W'$ ujednačuje par d, h, tj. da postoji bilinearno preslikavanje $V' \times W' \to Z$ takvo da je desni trokutić komutativan i za d i za h. Po univerzalnom svojstvu tenzorskog produkta proizlazi $d = h$. □

Korolar 3.2.7. *Kategorija kofiltracija u* Vect, $\mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}$, *je uz tenzorski produkt kofiltracija simetrična monoidalna kategorija. Njene pune potkategorije* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ *i* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ *su također simetrične monoidalne kategorije. Kanonski funktori ulaganja*

$$(\mathrm{Vect}, \otimes, k) \hookrightarrow (\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}, \otimes, k)$$

$$(\mathrm{VectFin}, \otimes, k) \hookrightarrow (\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}, \otimes, k)$$

dani konstrukcijom konstantne kofiltracije su jaki monoidalni funktori.

3.2.2 Univerzalno svojstvo tenzorskog produkta kofiltracija

Propozicija 3.2.8. *Neka su $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$ kofiltracije u kategoriji* Vect. *Tenzorski produkt kofiltracija $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ je kofiltracija u* Vect, *zajedno s bilinearnim morfizmom kofiltracija $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}\to\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$, takva da za svaki bilinearni morfizam kofiltracija iz $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}$ u $\boldsymbol{Z}$ postoji jedinstveni morfizam kofiltracija iz $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ u $\boldsymbol{Z}$ za koji je sljedeći dijagram komutativan.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W} \arrow[r, dashed] & \boldsymbol{Z} \\
\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Egzistencija. Očito kanonska preslikavanja na sljedećem dijagramu čine predmorfizam kofiltracija $t\colon \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}\to\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ u Set i svako kanonsko preslikavanje je bilinearno.

$$\begin{tikzcd}
V_j\times W_l \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{ij}\times\psi_{kl}"] & V_j\otimes W_l \arrow[d, "\phi_{ij}\otimes\psi_{kl}"] \\
V_i\times W_k \arrow[r] & V_i\otimes W_k
\end{tikzcd}$$

Neka je $g=(\lambda\times\mu,\{g_n\colon V_{\lambda(n)}\times W_{\mu(n)}\to Z_n\})$ bilinearni predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}\to\boldsymbol{Z}$. Za svaki $n\in K$, po univerzalnom svojstvu običnog tenzorskog produkta, postoji jedinstveni morfizam $h_n\colon V_{\lambda(n)}\otimes W_{\mu(n)}\to Z_n$ takav da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
V_{\lambda(n)}\times W_{\mu(n)} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g_n"] & V_{\lambda(n)}\otimes W_{\mu(n)} \arrow[r, dashed, "h_n"] & Z_n
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da skup $\{h_n\}_{n\in K}$ definira predmorfizam kofiltracija. Zadani morfizam g je morfizam kofiltracija pa za svaki par $m<n$ u K postoji (k,l) u $I\times J$ takav da je $(k,l)\geqslant(\lambda(n),\mu(n))$ i $(k,l)\geqslant(\lambda(m),\mu(m))$ i vanjski peterokut na sljedećem dijagramu komutira.

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\lambda(n)}\times W_{\mu(n)} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g_n"] & V_{\lambda(n)}\otimes W_{\mu(n)} \arrow[r, "h_n"] & Z_n \arrow[d, "\sigma_{mn}"] \\
V_k\times W_l \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & V_k\otimes W_l \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & V_{\lambda(m)}\times W_{\mu(m)} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g_m"'] & V_{\lambda(m)}\otimes W_{\mu(m)} \arrow[r, "h_m"] & Z_m
\end{tikzcd}$$

Komutiraju također gornji i donji trokut (definicija h_n i h_m) i dva lijeva četverokuta (kanonski morfizam t je morfizam kofiltracija), a preslikavanje $V_k \times W_l \to V_k \otimes W_l$ je epimorfizam pa slijedi i da unutrašnji peterokut komutira. Dakle, $h = (\lambda \times \mu, \{h_n\}_{n \in K})$ je predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ za koji vrijedi $h \circ t = g$.

Jedinstvenost. Dokazujemo sada da je svaki drugi predmorfizam s tim svojstvom ekvivalentan ovome. Neka je $k = (\alpha \times \beta, \{k_n : V_{\alpha(n)} \times W_{\beta(n)} \to Z_n\})$ jedan takav predmorfizam. Budući da je $k \circ t = g$, za svaki $n \in K$ postoji $(p, r) \in I \times J$ koji je gornja međa od $(\lambda(n), \mu(n))$ i $(\alpha(n), \beta(n))$ takav da je na sljedećem dijagramu vanjski peterokut komutativan.

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\lambda(n)} \times W_{\mu(n)} \arrow[r] \arrow[rrd, bend left, "g_n"] & V_{\lambda(n)} \otimes W_{\mu(n)} \arrow[dr, "h_n"] & \\
V_p \times W_r \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & V_p \otimes W_r \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z_n \\
 & V_{\alpha(n)} \times W_{\beta(n)} \arrow[r] & V_{\alpha(n)} \otimes W_{\beta(n)} \arrow[ur, "k_n"] &
\end{tikzcd}$$

Unutrašnji desni četverokut je komutativan jer je vanjski peterokut komutativan, gornji trokut je komutativan, dva lijeva četverokuta su komutativna i preslikavanje $V_p \times W_r \to V_p \otimes W_r$ je epimorfizam. Dakle, predmorfizam k je ekvivalentan predmorfizmu h. $\square$

3.2.3 Upotpunjeni tenzorski produkt

Definicija 3.2.9. *Tenzorski produkt kofiltriranih vektorskih prostora* $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ je kofiltrirani vektorski prostor $V \hat{\otimes} W := \lim \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ s kofiltracijom $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$, zajedno s kanonskim morfizmom kofiltracija $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$. *Tenzorski produkt morfizama f i g kofiltriranih prostora*, u oznaci $f \hat{\otimes} g$, je jedinstveno linearno preslikavanje među limesima tenzorskih produkata kofiltracija koje je inducirano tenzorskim produktom morfizama kofiltracija induciranih s f i g.

Tenzorski produkt $V \hat{\otimes} W$ kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ zovemo još i *upotpunjeni tenzorski produkt vektorskih prostora V i W s obzirom na kofiltracije $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$.*

Napomena 3.2.10. Skup jednostavnih tenzora. Neka su $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ kofiltrirani vektorski prostori, uz kofiltracije $\boldsymbol{V} : I \to \mathrm{Vect}$ i $\boldsymbol{W} : J \to \mathrm{Vect}$. Zamijetimo da je tada $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ $\aleph_0$-kofiltracija na vektorskom prostoru $V \otimes W$ i da je $V \hat{\otimes} W$ upotpunjenje vektorskog prostora $V \otimes W$ po kofiltraciji $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$. Neka je $\iota : V \otimes W \to V \hat{\otimes} W$ kanonsko preslikavanje u upotpunjenje. Vrijedi dakle

$$\pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W} \circ \iota = \pi_i^V \otimes \pi_j^W.$$

Sljedeći dijagram je komutativan

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[rr, "\iota"] & & V \hat{\otimes} W \\ & V \times W \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

jer su preslikavanja u njemu inducirana morfizmima kofiltracija, a kofiltracije na $V \otimes W$ i $V \hat{\otimes} W$ su jednake i ti morfizmi kofiltracija očito čine komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \\ & \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dakle, jednostavan tenzor $v \otimes w$ u $V \otimes W$ preslika se po ι u jednostavan tenzor $v \otimes w$ u $V \hat{\otimes} W$. Skup jednostavnih tenzora u $V \hat{\otimes} W$ je slika skupa jednostavnih tenzora u $V \otimes W$ po ι. Slijedi da za svaki jednostavan tenzor $v \otimes w$ u $V \hat{\otimes} W$ vrijedi

$$\pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W}(v \otimes w) = \pi_i^V(v) \otimes \pi_j^W(w).$$

Propozicija 3.2.11. *Kategorija kofiltriranih vektorskih prostora je simetrična monoidalna kategorija i ekvivalencija s kategorijom $\aleph_0$-kofiltracija u* Vect *je jaki monoidalni funktor*

$$(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \cong (\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}, \otimes, k).$$

Dokaz. Kategorija kofiltriranih vektorskih prostora ekvivalentna je kategoriji $\aleph_0$-kofiltracija u Vect. Funktor koji je ekvivalencija među njima pridružuje tenzorskom produktu objekata u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ tenzorski produkt objekata u $\mathrm{proVect}$ i tenzorskom produktu morfizama u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ tenzorski produkt morfizama u $\mathrm{proVect}$. Komponente simetrizatora, asocijatora, lijevog i desnog unitora u $\mathrm{proVect}$ su upotpunjenja istih u kategoriji Vect. □

3.2.4 Univerzalno svojstvo upotpunjenog tenzorskog produkta

Korolar 3.2.12. *Neka su $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ kofiltrirani vektorski prostori. Tada je $V \hat{\otimes} W$ kofiltrirani vektorski prostor, zajedno s neprekidnim bilinearnim preslikavanjem $V \times W \to V \hat{\otimes} W$, takav da za svako neprekidno bilinearno preslikavanje iz $V \times W$ u kofiltrirani vektorski prostor $Z \cong \lim \boldsymbol{Z}$ postoji jedinstveni morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $V \hat{\otimes} W \to Z$ za koji je sljedeći dijagram komutativan.*

$$\begin{tikzcd} V \hat{\otimes} W \arrow[r, dashed] & Z \\ V \times W \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ovim univerzalnim svojstvom određen je i upotpunjeni tenzorski produkt morfizama:

$$\begin{tikzcd} V \hat{\otimes} W \arrow[r, dashed, "f \hat{\otimes} g"] & V' \hat{\otimes} W' \\ V \times W \arrow[u] \arrow[r, "f \times g"'] & V' \times W' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dokaz. Egzistencija i jedinstvenost izlaze iz univerzalnog svojstva tenzorskog produkta u kategoriji $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i ekvivalencije monoidalnih kategorija $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \cong (\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}, \otimes, k)$. □

3.3 Formalne sume i formalne baze

3.3.1 Formalne sume i neprekidna preslikavanja

Definicija 3.3.1. Neka je $\boldsymbol{V}\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}$ kofiltracija u kategoriji Vect. *Formalna suma u $\boldsymbol{V}$* je izraz oblika $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ gdje je preslikavanje $\Lambda \to \lim \boldsymbol{V}$, $\lambda \mapsto v_\lambda$, familija niti u $\lim \boldsymbol{V}$ takva da je za svaki $i \in I$ skup $\{\lambda \in \Lambda \,|\, \pi_i(v_\lambda) \neq 0\}$ konačan.

Slično, neka je $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i neka su $\pi_i^V\colon V \to V_i$ komponente univerzalnog konusa s vrhom V nad kofiltracijom $\boldsymbol{V}$. *Formalna suma u $V \cong \lim \boldsymbol{V}$* je izraz oblika $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ gdje je preslikavanje $\Lambda \to V$, $\lambda \mapsto v_\lambda$, familija u V takva da je za svaki $i \in I$ skup $\{\lambda \in \Lambda \,|\, \pi_i^V(v_\lambda) \neq 0\}$ konačan.

Sljedeća tvrdnja je očigledna.

Propozicija 3.3.2. *Ako je $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ formalna suma u $\boldsymbol{V}$, onda postoji jedinstvena nit $z = (z_i)_{i\in I}$ u $\lim \boldsymbol{V}$ takva da za svaki $i \in I$ vrijedi*

$$z_i = \bar{\sum_{\lambda\in\Lambda}} \pi_i(v_\lambda) \in V_i,$$

gdje je suma na desnoj strani, s oznakom $\bar{\sum}$, shvaćena kao konačna suma po svim $\lambda \in \Lambda$ za koje je $\pi_i(v_\lambda) \neq 0$. Tu nit zovemo vrijednost formalne sume $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$*, a aproksimacije $z_i \in V_i$ zovemo parcijalne sume formalne sume $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ te pišemo $z = \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$.*

Slično za formalnu sumu u $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ definiramo vrijednost formalne sume i aproksimacije formalne sume. Ako je vrijednost formalne sume $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ u $V \cong \lim V$ jednaka $v \in V$, pišemo dakle kratko: $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda = v$.

Definicija 3.3.3. Neka su $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$ dvije kofiltracije u Vect i neka je $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Kažemo da linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ *distribuira po formalnim sumama* ako je za svaku formalnu sumu $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ u V izraz $\sum_{\lambda\in\Lambda} A(v_\lambda)$ formalna suma u W i preslikavanje A vrijednost formalne sume $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ u V šalje u vrijednost formalne sume $\sum_{\lambda\in\Lambda} A(v_\lambda)$ u W, što pišemo kratko

$$A(\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} A(v_\lambda).$$

Napomena 3.3.4. Definicija linearnog preslikavanja koje distribuira po formalnim sumama je dana za sve kofiltracije, ali sljedeća propozicija vrijedi samo za $\aleph_0$-kofiltracije u Vect kako piše u iskazu.

Propozicija 3.3.5. *Neka su $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ kofiltrirani vektorski prostori. Linearna preslikavanja $V \to W$ koja distribuiraju po formalnim sumama su točno ona linearna preslikavanja koja su morfizmi kofiltriranih vektorskih prostora $V \to W$.*

Dokaz. Neka je $f\colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora i neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ proizvoljna formalna suma u V. Dokazujemo da je izraz $\sum_\lambda f(v_\lambda)$ formalna suma u W i da vrijedi $f(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda f(v_\lambda)$. Označimo s I i J redom indeksne kategorije kofiltracija $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$.

Za fiksirani proizvoljan $j \in J$ postoji $i \in I$ i linearno preslikavanje f_{ji} takvo da je

$$\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V.$$

Skup $\{\lambda \in \Lambda \mid \pi_i^V(v_\lambda) \neq 0\}$ je konačan skup i za svaki λ vrijedi

$$\pi_j^W(f(v_\lambda)) = f_{ji}(\pi_i^V(v_\lambda)),$$

pa je i skup $\{\lambda \in \Lambda \mid \pi_j^W(f(v_\lambda)) \neq 0\}$ konačan skup. Dakle, izraz $\sum_\lambda f(v_\lambda)$ je formalna suma. Zatim vrijedi

$$\pi_j^W(f(\sum_\lambda v_\lambda)) = f_{ji}(\pi_i^V(\sum_\lambda v_\lambda)) = f_{ji}(\bar{\sum_\lambda} \pi_i^V(v_\lambda)),$$

gdje je sa $\bar{\sum}_\lambda$ označena konačna suma svih pribrojnika koji su različiti od nule. Dalje vrijedi

$$f_{ji}(\bar{\sum_\lambda} \pi_i^V(v_\lambda)) = \bar{\sum_\lambda} f_{ji}(\pi_i^V(v_\lambda)) = \bar{\sum_\lambda} \pi_j^W(f(v_\lambda)) = \pi_j^W(\sum_\lambda f(v_\lambda)).$$

Dakle, za svaki $j \in J$ je $\pi_j^W(f(\sum_\lambda v_\lambda)) = \pi_j^W(\sum_\lambda f(v_\lambda))$, tj. vrijedi

$$f(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda f(v_\lambda).$$

Obratno, neka je $f\colon V \to W$ linearno preslikavanje koje distribuira po formalnim sumama. Dokazujemo da tada za svaki $j \in J$ postoji $i \in I$ i linearno preslikavanje $f_{ji}\colon V_i \to W_j$ takvo da je

$$\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V.$$

Ako je I kofinalnosti 1, za svaki j možemo odabrati isti najveći element i u I, jer je π_i^V tada izomorfizam. Preostaje dokazati tvrdnju za I kofinalnosti $\aleph_0$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $j \in J$ takav da za svaki $i \in I$ i svako linearno preslikavanje $f_{ji}\colon V_i \to W_j$ vrijedi $\pi_j^W \circ f \neq f_{ji} \circ \pi_i^V$. Fiksirajmo taj j. Za svaki $i \in I$ tada postoji $v_i \in V$ takav da je

$$\pi_i^V(v_i) = 0 \quad \text{i} \quad (\pi_j^W \circ f)(v_i) \neq 0.$$

U protivnom bi za svaka dva elementa v', $v'' \in (\pi_i^V)^{-1}(v)$ zbog $\pi_i^V(v' - v'') = 0$ vrijedilo $\pi_j^W(f(v' - v'')) = 0$, pa bi s $f_{ji}(v) := \pi_j^W(f(v'))$ za $v' \in (\pi_i^V)^{-1}(v)$ bilo dobro definirano preslikavanje s gornjim svojstvom $\pi_j^W \circ f = f_{ji} \circ \pi_i^V$.

Neka je sada K kofinalan podskup od I izomorfan s $\mathbb{N}$; takav postoji po propoziciji 3.1.5. Za svaki $i \in I$ postoji $k_i \in K$ takav da je $k_i \geqslant i$, dakle, najviše konačno mnogo elemenata od K je manje od ili neusporedivo s i. Za svaki $k > i$ vrijedi da je $\pi_i^V(v_k) = 0$, pa slijedi da je za svaki i najviše konačno mnogo $\pi_i^V(v_k)$ različito od nule. Dakle, suma $\sum_{k\in K} v_k$ je formalna suma u V. No, suma $\sum_{k\in K} f(v_k)$ nije formalna suma u W jer je $\pi_j^W(f(v_k)) \neq 0$ za svaki k. To je u kontradikciji s pretpostavkom da f distribuira po formalnim sumama. □

Preslikavanja iz prethodne propozicije zovemo još i *neprekidnim preslikavanjima*.

3.3.6. Mogu se definirati i neprekidna preslikavanja i formalne sume za vektorske prostore V na kojima je zadana $\aleph_0$-kofiltracija. Tada vrijednosti formalnih suma nisu nužno u V, već su u upotpunjenju $\hat{V}$. Ako za takve prostore neko linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ poštuje kofiltracije na domeni i kodomeni kao u 3.1.20, što je ekvivalentno tome da formalne sume član po član preslikava u formalne sume, onda ga je moguće proširiti do upotpunjenja $\hat{A}\colon \hat{V} \to \hat{W}$. Kanonska preslikavanja u upotpunjenje $V \to \hat{V}$ i $W \to \hat{W}$ nisu nužno injekcije, ali to ne smeta. U primjerima su često injekcije.

3.3.2 Formalne sume i upotpunjeni tenzorski produkt

Propozicija 3.3.7. *Neka su $\sum_\lambda v_\lambda$ i $\sum_\mu w_\mu$ formalne sume u kofiltriranim vektorskim prostorima V i W redom. Tada je $\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$ formalna suma u $V \hat{\otimes} W$ i njena vrijednost jednaka je tenzorskom produktu vrijednosti formalnih suma $\sum_\lambda v_\lambda$ u V i $\sum_\mu w_\mu$ u W što možemo pisati kratko:*

$$\sum_\lambda v_\lambda \otimes \sum_\mu w_\mu = \sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$$

Dokaz. Po napomeni 3.2.10 za jednostavne tenzore u $V \hat{\otimes} W$ vrijedi

$$\pi_{i,j}^{V \hat{\otimes} W}(v \otimes w) = \pi_i^V(v) \otimes \pi_j^W(w).$$

Za svaki $(i,j) \in I \times J$ vrijedi da je skup $\{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M \mid \pi_i^V(v_\lambda) \otimes \pi_j^W(w_\mu) \neq 0\}$ jednak skupu $\{\lambda \in \Lambda \mid \pi_i^V(v_\lambda) \neq 0\} \times \{\mu \in M \mid \pi_j^W(w_\mu) \neq 0\}$. Dakle, suma $\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$ je formalna ako su sume $\sum_\lambda v_\lambda$ i $\sum_\mu w_\mu$ formalne, i za svaki (i,j) vrijedi:

$$\begin{aligned}
\pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W}(\textstyle\sum_\lambda v_\lambda \otimes \sum_\mu w_\mu) &= \pi_i^V(\textstyle\sum_\lambda v_\lambda) \otimes \pi_j^W(\sum_\mu w_\mu) \\
&= \bar{\textstyle\sum}_\lambda \pi_i^V(v_\lambda) \otimes \bar{\textstyle\sum}_\mu \pi_j^W(w_\mu) \\
&= \bar{\textstyle\sum}_{\lambda,\mu} \pi_i^V(v_\lambda) \otimes \pi_j^W(w_\mu) \\
&= \bar{\textstyle\sum}_{\lambda,\mu} \pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W}(v_\lambda \otimes w_\mu) \\
&= \pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W}(\textstyle\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu)
\end{aligned}$$

gdje su sume s oznakom $\bar{\sum}$ shvaćene kao konačne sume svih pribrojnika koji su različiti od nule. Dakle, $\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$ je formalna suma i njena vrijednost jednaka je tenzorskom produktu vrijednosti formalnih suma $\sum_\lambda v_\lambda$ i $\sum_\mu w_\mu$.

□

3.3.3 Računanje s formalnim sumama

Formalne sume možemo zbrajati (odnosno činiti njihove linearne kombinacije) tako da napravimo disjunktnu uniju indeksnih skupova ili, ako su indeksni skupovi jednaki, po članovima. Jasno je da je linearna kombinacija formalnih suma (bilo po uniji indeksnih skupova ili zbrajanju član po član) formalna suma i da je njena vrijednosti jednaka linearnoj kombinaciji vrijednosti početnih formalnih suma s istim koeficijentima.

Lema 3.3.8. *(Lema o računanju s formalnim sumama u kategoriji* $\mathrm{proVect}$*.)*

(i) (Tenzorski produkt formalnih suma.) Neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma u V vrijednosti v i $\sum_\mu w_\mu$ formalna suma u W vrijednosti w. Tada je $\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$ formalna suma u $V \hat{\otimes} W$ i vrijednost joj je jednaka $v \otimes w$. Možemo računati:

$$\sum_\lambda v_\lambda \otimes \sum_\mu w_\mu = \sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu.$$

(ii) (Grupiranje sumanada.) Neka je $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v. Tada je svaka podsuma $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ formalna suma i, označimo li njihove vrijedosti s $v_\lambda := \sum_\mu v_{\lambda\mu}$, izraz $\sum_\lambda v_\lambda$ je formalna suma vrijednosti v. Možemo računati:

$$\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu} = \sum_\lambda (\sum_\mu v_{\lambda\mu}) = \sum_\lambda v_\lambda.$$

(ii') *(Ekspanzija sumanada.) Obratno, neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma vrijednosti v. Neka je za svaki λ izraz $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v_λ. Tada, ako je $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma, njena vrijednost jednaka je v. Možemo računati:*

$$\sum_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda (\sum_\mu v_{\lambda\mu}) \doteq \sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$$

Točkica predstavlja dodatnu provjeru je li suma s desne strane također formalna.

Ako, dodatno, za svaki λ formalna suma $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ ima svojstvo da iz $\pi_i^V(v_\lambda) = 0$ slijedi $\pi_i^V(v_{\lambda\mu}) = 0$ za svaki μ, onda je odmah $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v pa ekspanziju sumanada možemo napraviti bez te provjere. To jest, označimo li to svojstvo

$$(\forall i)(\forall\lambda)\big(\pi_i^V(v_\lambda) = 0 \Rightarrow (\forall\mu)(\pi_i^V(v_{\lambda\mu}) = 0)\big) \qquad (*)$$

možemo računati

$$\sum_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda (\sum_\mu v_{\lambda\mu}) \overset{(*)}{=} \sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}.$$

(iii) *Ako je $\sum_\lambda (v_\lambda \otimes w)$ formalna suma i $w \neq 0$, onda je i $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma. Označimo li njenu vrijednost s v, vrijednost početne sume je tada $v \otimes w$. Možemo pisati*

$$\sum_\lambda (v_\lambda \otimes w) \overset{w\neq 0}{=} (\sum_\lambda v_\lambda) \otimes w = v \otimes w.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za formalnu sumu $\sum_\lambda (v \otimes w_\mu)$ i $v \neq 0$.

(iv) *(Slika po morfizmu u* proVect.*) Neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma vrijednosti v. Neka je A morfizam u* proVect. *Tada je $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ formalna suma i njena vrijednost jednaka je $A(v)$. Možemo računati:*

$$A(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda A(v_\lambda)$$

(iv') *Obratno, neka je A morfizam u* proVect *i neka je $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ formalna suma. Ako je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma vrijednosti v, onda je vrijednost sume $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ jednaka $A(v)$. Možemo računati:*

$$\sum_\lambda A(v_\lambda) \doteq A(\sum_\lambda v_\lambda)$$

Točkica predstavlja dodatnu provjeru je li suma s desne strane također formalna.

Dokaz. Tvrdnja (i) je dokazana u propoziciji 3.3.7. Tvrdnje (ii), (ii'), (iv), (iv') se lako dokažu koristeći definiciju formalne sume u proVect.

(iii) Ako je w različit od 0, postoji $j \in J$ takav da je $\pi_j^W(w) \neq 0$. Na jednostavnim tenzorima je $\pi_{i,j}^{V\hat{\otimes}W}$ jednak $\pi_i^V \otimes \pi_j^W$ po napomeni 3.2.10. Za svaki $i \in I$ i taj j iz konačnosti skupa $\{\lambda \in \Lambda \mid \pi_i^V(v_\lambda) \otimes \pi_j^W(w) \neq 0\}$ i $\pi_j^W(w) \neq 0$ slijedi konačnost skupa $\{\lambda \in \Lambda \mid \pi_i^V(v_\lambda)\}$. Time je dokazano da je izraz $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma. □

3.3.4 Formalne baze i upotpunjeni tenzorski produkt

Definicija 3.3.9. Neka je V kofiltrirani vektorski prostor s komponentama $\{V_i\}_{i\in I}$ i projekcijama $\{\pi_i^V : V \to V_i\}_{i\in I}$. Za skup $B \subseteq V\backslash\{0\}$ kažemo da je *formalna baza od* V ako postoji podskup $K \subseteq I$ kofinalan u I takav da za svaki $k \in K$ projekcija π_k^V bijektivno preslikava skup $B_k := B\backslash \operatorname{Ker} \pi_k$ u bazu vektorskog prostora V_k.

Propozicija 3.3.10. *Neka je $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ kofiltrirani vektorski prostor i neka je B formalna baza od V. Tada se svaki element $v \in V$ može na jedinstven način zapisati kao formalna suma elemenata iz B. Taj zapis zovemo zapis elementa v u bazi B.*

Dokaz. Neka je kofiltracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ i neka je $K \subseteq I$ podskup kofinalan u I takav da za svaki $k \in K$ projekcija $\pi_k : V \to V_k$ bijektivno preslikava $B_k := B\backslash \operatorname{Ker} \pi_k$ u bazu vektorskog prostora V_k.

Uzmimo proizvoljan $v \in V$. Za $k \in K$ i $b \in B_k$ označimo s $t_b^{(k)}$ koeficijent uz $\pi_k(b)$ zapisa vektora $\pi_k(v)$ u bazi $\pi_k(B_k)$:

$$\pi_k(v) = \sum_{b\in B_k}^{-} t_b^{(k)} \pi_k(b),$$

gdje je sa $\bar{\sum}$ kao i dalje u dokazu označena konačna suma svih pribrojnika različitih od nule. Dokazat ćemo da vrijednost koeficijenta $t_b^{(k)}$ ne ovisi o k, već samo o b i v.

Označimo za svaki $b \in B$ sa K_b skup

$$K_b := \{k \in K \mid \pi_k(b) \neq 0\}.$$

Očito je $b \in B_k$ ako i samo ako je $k \in K_b$. Za svaki $b \in B$ skup K_b je neprazan. Doista, u protivnom bi za neki $b \in B$ vrijedilo $\pi_k(b) = 0$ za svaki $k \in K$, što bi zbog kofinalnosti skupa K u I povlačilo $\pi_i(b) = 0$ za svaki $i \in I$, a budući da je $V \cong \lim \boldsymbol{V}$, iz toga bi slijedilo $b = 0$ što je u suprotnosti s $B \subseteq V\backslash\{0\}$.

Fiksirajmo proizvoljan $b_0 \in B$ i neka su $k, k' \in K_{b_0}$ proizvoljni. Dokazujemo da vrijedi $t_{b_0}^{(k)} = t_{b_0}^{(k')}$. Za $k, k' \in K_{b_0}$ postoji $l \in K$ takav da je $l \geqslant k$ i $l \geqslant k'$. Zbog $\pi_k = \phi_{kl} \circ \pi_l$ slijedi da je i $l \in K_{b_0}$ i vrijedi

$$\pi_k(v) = \phi_{kl}(\pi_l(v)) = \phi_{kl}(\sum_{b\in B_l}^{-} t_b^{(l)} \pi_l(b)) = \sum_{b\in B_l}^{-} t_b^{(l)} \pi_k(b) = \sum_{b\in B_k}^{-} t_b^{(l)} \pi_k(b).$$

Zadnja jednakost vrijedi jer za $l \geqslant k$ vrijedi $\operatorname{Ker} \pi_k \supseteq \operatorname{Ker} \pi_l$, pa je $B_k \subseteq B_l$, i vrijedi $\pi_k(b) = 0$ za $b \in B_l\backslash B_k$. Budući da je zapis u bazi jedinstven slijedi $t_b^{(k)} = t_b^{(l)}$ za sve $b \in B_k$ pa i za $b = b_0$. Analogno se dokaže da za $l \geqslant k'$ vrijedi $t_b^{(k')} = t_b^{(l)}$ za $b = b_0$. Slijedi da je za svaki $b \in B$

$$t_b^{(k)} = t_b^{(k')} \text{ za svaka dva } k, k' \in K_b$$

pa je dobro definiran koeficijent t_b sa

$$t_b := t_b^{(k)} \text{ za neki } k \in K_b.$$

Očito je sada $\bar{\sum}_{b\in B} t_b\pi_k(b) = \pi_k(v)$ za svaki $k \in K$. Budući da je za svaki $k \in K$ skup $\{b \in B \mid t_b\pi_k(b) \neq 0\}$ konačan i K je kofinalan u I, slijedi da je za svaki $i \in I$ skup $\{b \in B \mid t_b\pi_i(b) \neq 0\}$ konačan, tj. izraz $\sum_{b\in B} t_b b$ je formalna suma u V. Za svaki $k \in K$ njena se k-ta asproksimacija podudara s $\pi_k(v)$ iz čega zbog kofinalnosti K u I slijedi da im se sve aproksimacije podudaraju, tj. da je njena vrijednost jednaka v:

$$\sum_{b\in B} t_b b = v.$$

Prikaz je jedinstven jer je koeficijent uz $b \in B$ određen projekcijom na bilo koju komponentu V_k za $k \in K_b$. □

3.3.11. Očito je svaka formalna baza linearno nezavisan skup. (U protivnom bi 0 mogli zapisati na dva različita načina kao formalnu sumu vektora.)

Lema 3.3.12. *Neka je $\phi\colon Z \to Z'$ epimorfizam vektorskih prostora i Λ skup kardinalnosti strogo veće od $\dim Z$. Neka je $f\colon \Lambda \to Z'$ funkcija takva da njena restrikcija $f|_{\mathrm{supp} f}$ parametrizira neku bazu od Z'. Tada postoji funkcija $g\colon \Lambda \to Z$ takva da njena restrikcija $g|_{\mathrm{supp}\, g}\colon \mathrm{supp}\, g \to Z$ parametrizira neku bazu od Z i vrijedi $\phi \circ g = f$. Za parametrizacije baza podrazumijevamo da su bijektivne.*

Dokaz. Kako su svi objekti vektorski prostori, kratki egzaktni niz $0 \to \mathrm{Ker}\,\phi \subseteq Z \to Z' \to 0$ se cijepa; to znači da postoji prerez $s\colon Z' \to Z$ od ϕ, tj. preslikavanje takvo da je $\phi \circ s = \mathrm{id}_Z$. Iz toga slijedi da je korestrikcija od s na sliku izomorfizam i da $s(Z') \oplus \mathrm{Ker}\,\phi = Z$. Stoga za svaku bazu $\{f(\lambda)\}_{f(\lambda)\neq 0}$ od Z', unija baze $\{s(f(\lambda))\}_{f(\lambda)\neq 0}$ od $s(Z')$ i proizvoljne baze $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ od $\mathrm{Ker}\,\phi$ je baza od Z. Iz pretpostavke leme, $\mathrm{card}\,(\Lambda\backslash \mathrm{supp} f) > \dim \mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{card}\, A$, pa bez smanjenja općenitosti možemo izabrati $A \subseteq \Lambda\backslash\mathrm{supp} f$. Definiramo $g\colon \Lambda \to Z$ s

$$g(\lambda) = \begin{cases} s(f(\lambda)), & f(\lambda) \neq 0, \\ v_\lambda, & \lambda \in A, \\ 0, & f(\lambda) = 0 \text{ i } \lambda \notin A \end{cases}$$

Funkcija g realizira zahtjeve iz iskaza leme. □

Propozicija 3.3.13. *Svaki kofiltrirani vektorski prostor $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ posjeduje formalnu bazu B.*

Dokaz. Neka je kofiltracija $\boldsymbol{V}$ dana sa $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$. U slučaju da je usmjeren skup I kofinalnosti 1, za formalnu bazu od V može se uzeti praslika baze vektorskog prostora V_m po izomorfizmu π_m^V za m maksimalan element od I. U slučaju da je usmjeren skup I kofinalnosti $\aleph_0$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je I izomorfan s $\mathbb{N}$, vidi lemu 3.1.5 i propoziciju 2.5.11. Neka je Λ skup kardinaliteta $\operatorname{card}\Lambda > \dim V$. Taj kardinalitet je dovoljno velik da se svaka baza vektorskog prostora V i svakog vektorskog prostora V_i može prikazati kao familija $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Za svaki $i \in I$ definirajmo skup indeksiranih baza od V_i,

$$S_i := \{f\colon \Lambda \to V_i \mid \text{ familija } \{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda, f(\lambda)\neq 0} \text{ je baza od } V_i\}.$$

Induktivno definiramo niz skupova $T_i \subseteq S_i$ na sljedeći način:

$$T_1 := S_1$$

$$T_{i+1} := \{f \in S_{i+1} \mid \phi_{i(i+1)} \circ f \in T_i\}.$$

Kako je $\phi_{i(i+1)}$ surjekcija, po lemi 3.3.12 izlazi da je $(\phi_{i(i+1)} \circ -)\colon S_{i+1} \to S_i$ također surjekcija. Dakle $T_{i+1} = (\phi_{i(i+1)} \circ -)^{-1}(T_i)$ je neprazan ako je T_i neprazan. Budući da je $T_1 = S_1$ neprazan, indukcijom dakle slijedi da je svaki T_i neprazan. Za svaki usporedivi par $i \geqslant j$ u I definirajmo vezni morfizam $\psi_{ji} := \phi_{ji} \circ -\colon T_i \to T_j$,

$$\psi_{ji}(f)(\lambda) := \phi_{ji}(f(\lambda)).$$

Morfizmi $\psi_{i(i+1)}$ su očito dobro definirani (slika je unutar kodomene) i surjekcije su, pa su dobro definirani i surjekcije su svi vezni morfizmi ψ_{ji} kao njihove kompozicije. Uz to, očito vrijedi $\psi_{kj} \circ \psi_{ji} = \psi_{ki}$. Dakle

$$\boldsymbol{T} := (\{T_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$$

je $\aleph_0$-kofiltracija u kategoriji Set.

Po propoziciji 3.1.6 o nepraznom limesu $\aleph_0$-kofiltracije nepraznih skupova sada slijedi da postoji nit $(f_i)_{i\in I} \in \lim \boldsymbol{T}$. Svaka takva nit zapravo definira konus nad $\boldsymbol{V}$ u Set i time jedinstveno preslikavanje $f\colon \Lambda \to V$ takvo da je $\pi_i^V \circ f = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, "\pi_i^V"] \\
 & V_i \arrow[dd, "\phi_{ji}"] \\
\Lambda \arrow[uur, dashed, bend left, "f"] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & V_j
\end{tikzcd}$$

Očito je familija $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda, f(\lambda)\neq 0}$ formalna baza od V.

$\square$

Propozicija 3.3.14. *Ako je B formalna baza kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i B' formalna baza kofiltriranog vektorskog prostora $W \cong \lim \boldsymbol{W}$, onda je familija*

$$\{b \otimes b'\}_{b \in B, b' \in B'}$$

formalna baza kofiltriranog vektorskog prostora $V \hat{\otimes} W \cong \lim \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$.

Dokaz. Neka su kofiltracije dane komponentama i veznim morfizmima $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$ i neka su projekcije univerzalnih konusa $\lim \boldsymbol{V}$ i $\lim \boldsymbol{W}$ označene standardno s $\{\pi_i^V\}_{i \in I}$ i $\{\pi_j^W\}_{j \in J}$. Postoje usmjereni skupovi K i L koji su redom kofinalni podskupovi od I i J takvi da za svaki $k \in K$ projekcija π_k^V preslikava $B \backslash \operatorname{Ker} \pi_k^V$ bijektivno u bazu od V_k i za svaki $l \in L$ projekcija π_l^W preslikava $B' \backslash \operatorname{Ker} \pi_l^W$ bijektivno u bazu od W_l. Očito je tada $K \times L$ kofinalan podskup od $I \times J$. Budući da su formalne baze B i B' linearno nezavisni skupovi, familija $\{b \otimes b'\}_{b \in B, b' \in B'}$ ima sve različite elemente pa možemo radi jednostavnosti dalje umjesto o familiji govoriti o skupu. Dokazujemo da za taj skup

$$B \otimes B' := \{b \otimes b' \mid b \in B, b' \in B'\}$$

vrijedi da za svaki $(k, l) \in K \times L$ projekcija $\pi_{k,l}^{V \hat{\otimes} W}$ preslikava bijektivno skup

$$B \otimes B' \backslash \operatorname{Ker}(\pi_{k,l}^{V \hat{\otimes} W})$$

u bazu vektorskog prostora $V_k \otimes W_l$. Po napomeni 3.2.10 za jednostavne tenzore u $V \hat{\otimes} W$ vrijedi $\pi_{k,l}^{V \hat{\otimes} W}(v \otimes w) = \pi_k^V(v) \otimes \pi_l^W(w)$. Skup $B \otimes B' \backslash \operatorname{Ker}(\pi^{V \hat{\otimes} W})$ jednak je zbog toga skupu

$$\{b \otimes b' \in B \otimes B' \mid \ b \in B \backslash \operatorname{Ker} \pi_k^V, \ b' \in B' \backslash \operatorname{Ker} \pi_l^W\}.$$

Budući da su familije $\{\pi_k^V(b)\}_{b \in B \backslash \operatorname{Ker} \pi_k^V}$ i $\{\pi_l^W(b')\}_{b' \in B' \backslash \operatorname{Ker} \pi_l^W}$ redom baze vektorskih prostora V_k i W_l, familija

$$\{\pi_k^V(b) \otimes \pi_l^W(b')\}_{b \in B \backslash \operatorname{Ker} \pi_k^V, \ b' \in B' \backslash \operatorname{Ker} \pi_l^W}$$

je baza tenzorskog produkta $V_k \otimes W_l$. Tvrdnja je dokazana. □

Elementi upotpunjenog tenzorskog produkta su formalne sume jednostavnih tenzora.

Teorem 3.3.15. *Svaki element upotpunjenog tenzorskog produkta $V \hat{\otimes} W = \lim \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ kofiltriranih vektorskih prostora može se prikazati kao formalna suma jednostavnih tenzora, tj. formalna suma oblika*

$$\sum_{\lambda} v_\lambda \otimes w_\lambda.$$

Tvrdnja vrijedi i za tenzorske produkte $V^{(1)} \hat{\otimes} V^{(2)} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} V^{(k)}$ konačno mnogo kofiltriranih vektorskih prostora.

Dokaz. Posljedica prethodne tri propozicije. Napomena: tvrdnja vrijedi jer je kofinalnost indeksnih skupova najviše $\aleph_0$.

$\square$

3.3.5 Obični i upotpunjeni tenzorski produkt

Propozicija 3.3.16. *Neka su $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ kofiltrirani vektorski prostori, uz kofiltracije $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathrm{Vect}$ i $\boldsymbol{W}\colon J \to \mathrm{Vect}$. Tada je kanonsko preslikavanje ι vrha $V \otimes W$ konusa nad kofiltracijom $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ u limes $V \hat{\otimes} W$ te kofiltracije injekcija:*

$$V \otimes W \hookrightarrow V \hat{\otimes} W.$$

Dokaz. Proizvoljan element tenzorskog produkta $V \otimes W$ može se zapisati kao konačna suma $\sum_{k=1}^{n} v_k \otimes w_k$, gdje je svaki v_k u V, svaki w_k u W i vektori $v_1, \ldots, v_n$ su različiti i čine linearno nezavisan skup vektora u V. Po napomeni 3.2.10 jednostavni se tenzori po ι preslikaju u odgovarajuće jednostavne tenzore, pa je $\iota(\sum_k v_k \otimes w_k) = \sum_k v_k \otimes w_k \in V \hat{\otimes} W$. Pretpostavimo da je

$$\sum_k v_k \otimes w_k = 0 \in V \hat{\otimes} W.$$

Neka je za svaki k, $v_k = \sum_\alpha a_{\alpha k} e_\alpha$ zapis vektora v_k u formalnoj bazi od V i $w_k = \sum_\beta b_{\beta k} f_\beta$ zapis vektora w_k u formalnoj bazi od W. Po propoziciji 3.3.7 tada je za svaki k

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha k} b_{\beta k} e_\alpha \otimes f_\beta$$

formalna suma vrijednosti $v_k \otimes w_k$, pa je i njihova konačna suma formalna suma i vrijedi

$$\sum_k v_k \otimes w_k = \sum_{k,\alpha,\beta} a_{\alpha k} b_{\beta k} e_\alpha \otimes f_\beta.$$

Za svaki (α, β) je podsuma $\sum_k a_{\alpha k} b_{\beta k} e_\alpha \otimes f_\beta$ formalna (konačna) suma i suma $\sum_k a_{\alpha k} b_{\beta k}$ konačna suma. Grupiranjem sumanada imamo sada da je vrijednost početne sume u $V \hat{\otimes} W$ jednaka vrijednosti formalne sume

$$\sum_{\alpha,\beta} (\sum_k a_{\alpha k} b_{\beta k}) e_\alpha \otimes f_\beta.$$

Pretpostavili smo da je ta suma vrijednosti 0. Budući da je po propoziciji 3.3.14 $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{\alpha,\beta}$ formalna baza od $V \hat{\otimes} W$, iz prethodnog slijedi da je za svaki (α, β) koeficijent

$$\sum_k a_{\alpha k} b_{\beta k} = 0.$$

Slijedi da je za svaki β vrijednost sume $\sum_k b_{\beta k} v_k$ u kofiltriranom vektorskom prostoru V jednaka vrijednosti sljedećih formalnih suma:

$$\sum_k b_{\beta k} v_k = \sum_k b_{\beta k} (\sum_\alpha a_{\alpha k} e_\alpha) = \sum_{\alpha, k} b_{\beta k} a_{\alpha k} e_\alpha = \sum_\alpha (\sum_k b_{\beta k} a_{\alpha k}) e_\alpha = \sum_\alpha 0 \cdot e_\alpha = 0.$$

Budući da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ različiti i čine linearno nezavisan skup vektora u V, iz te jednakosti slijedi da za svaki β i svaki k vrijedi $b_{\beta k} = 0$. Tada za svaki k imamo $w_k = \sum_\beta b_{\beta k} f_\beta = 0$ u W, pa je početna konačna suma $\sum_k v_k \otimes w_k$ jednaka 0 u $V \otimes W$. $\square$

3.3.6 Računanje sa zapisima u formalnoj bazi

Propozicija 3.3.17. *Neka je $B = \{e_\alpha\}_\alpha$ formalna baza kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$. Neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ neka formalna suma u V vrijednosti v. Neka su $v_\lambda = \sum_\alpha s_{\lambda\alpha} e_\alpha$ zapisi sumanada te formalne sume pomoću elemenata formalne baze B. Tada je*

$$\sum_{\lambda, \alpha} s_{\lambda\alpha} e_\alpha$$

formalna suma u V i njena vrijednost je v. Nadalje, za svaki α je samo konačno mnogo pribrojnika sume $\sum_\lambda s_{\lambda\alpha}$ različito od nule i izraz

$$\sum_\alpha (\bar{\sum_\lambda} s_{\lambda\alpha}) e_\alpha$$

je formalna suma u V vrijednosti v, koju zovemo zapis elementa v u formalnoj bazi B.

Dakle, sve sume elemenata od V koje se pojavljuju u sljedećem izrazu su formalne sume, sve sume koeficijenata koje se pojavljuju su konačne sume i sve jednakosti vrijede.

$$v = \sum_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda (\sum_\alpha s_{\lambda\alpha} e_\alpha) = \sum_{\lambda, \alpha} s_{\lambda\alpha} e_\alpha = \sum_\alpha (\bar{\sum_\lambda} s_{\lambda\alpha}) e_\alpha$$

Ovdje smo s $\bar{\sum}$ opet označavali konačnu sumu svih pribrojnika različitih od 0.

Dokaz. Neka je K kofinalan podskup indeksnog usmjerenog skupa I kofiltracije $\boldsymbol{V}$ takav da se za svaki $k \in K$ svi elementi od $B \setminus \operatorname{Ker} \pi_k^V$ bijektivno projiciraju u bazu komponente V_k.

Za svaki $i \in I$ je skup $\{\lambda \mid \pi_i^V(v_\lambda) \neq 0\} = \{\lambda \mid \bar{\sum}_\alpha s_{\lambda\alpha} \pi_i^V(e_\alpha) \neq 0\}$ konačan. Za svaki $k \in K \subseteq I$ i svaki λ vrijedi

$$\bar{\sum_\alpha} s_{\lambda\alpha} \pi_k^V(e_\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; (\forall \alpha)\, s_{\lambda\alpha} \pi_k^V(e_\alpha) = 0,$$

jer projekcija π_k^V za $k \in K$ skup elemenata formalne baze B koje ne preslika u 0 preslika u linearno nezavisne elemente u V_k. Iz toga slijedi da je za svaki $k \in K$ skup

$$\{(\lambda, \alpha) \mid s_{\lambda\alpha} \pi_k^V(e_\alpha) \neq 0\} =: S_k$$

konačan skup. Usmjereni skup K je kofinalan u I pa ista tvrdnja vrijedi i za sve $i \in I$, tj. izraz $\sum_{\lambda,\alpha} s_{\lambda\alpha} e_\alpha$ je formalna suma u V. Lako se vidi da je vrijednost te formalne sume jednaka v.

Za svaki e_α postoji $k \in K$ takav da je $\pi_k(e_\alpha) \neq 0$. Iz konačnosti gornjeg skupa S_k tada slijedi konačnost skupa $\{\lambda \mid s_{\lambda\alpha} \neq 0\}$ za svaki $\alpha \in A$. Dakle, za svaki α suma $\sum_\lambda s_{\lambda\alpha}$ ima konačno mnogo pribrojnika različitih od 0 i očito je suma $\sum_\alpha (\bar{\sum}_\lambda s_{\lambda\alpha}) e_\alpha$ koja je nastala grupiranjem sumanada formalna i vrijednosti v. □

Korolar 3.3.18. *(Promjena formalne baze.) Neka su $B = \{e_\alpha\}_\alpha$ i $B' = \{e'_\beta\}_\beta$ dvije formalne baze kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$. Neka su*

$$e_\alpha = \sum_\beta u_{\alpha\beta} e'_\beta$$

zapisi elemenata formalne baze B pomoću elemenata formalne baze B' i neka je

$$v = \sum_\alpha t_\alpha e_\alpha$$

zapis proizvoljnog $v \in V$ pomoću elemenata formalne baze B. Tada vrijedi sljedeći niz jednakosti, u kojem su sve sume elemenata od V formalne i sve sume koeficijenata konačne.

$$v = \sum_\alpha t_\alpha e_\alpha = \sum_\alpha t_\alpha (\sum_\beta u_{\alpha\beta} e'_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} t_\alpha u_{\alpha\beta} e'_\beta = \sum_\beta (\bar{\sum_\alpha} t_\alpha u_{\alpha\beta}) e'_\beta$$

Dokaz. Posljedica prethodne propozicije 3.3.17. □

Korolar 3.3.19. *(Zapis neprekidnog linearnog operatora u paru formalnih baza.) Neka su $B = \{e_\alpha\}_\alpha$ i $B' = \{e'_\beta\}_\beta$ redom formalne baze kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Neka je $A\colon V \to W$ neprekidno linearno preslikavanje. Neka je $(A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ zapis od A u tom paru baza, tj. neka za svaki α i β vrijedi*

$$A(e_\alpha) = A_{\alpha\beta} e'_\beta.$$

Tada je za svaki vektor $v = \sum_\alpha t_\alpha e_\alpha$ i za svaki β skup $\{\alpha \mid A_{\alpha\beta} t_\alpha \neq 0\}$ konačan i

$$\sum_\beta (\bar{\sum_\alpha} A_{\alpha\beta} t_\alpha) e'_\beta$$

je formalna suma u W s vrijednosti $A(v)$.

Opširnije, sve su sume vektora u sljedećem izrazu formalne, sve sume koeficijenata konačne i sve jednakosti vrijede.

$$A(v) = A(\sum_\alpha t_\alpha e_\alpha) = \sum_\alpha t_\alpha A(e_\alpha) = \sum_\alpha t_\alpha (\sum_\beta A_{\alpha\beta} e'_\beta) = \sum_{\alpha,\beta} t_\alpha A_{\alpha\beta} e'_\beta = \sum_\beta (\bar{\sum_\alpha} A_{\alpha\beta} t_\alpha) e'_\beta$$

Dokaz. Druga jednakost u nizu je distributivnost od A po formalnim sumama, a zadnje dvije jednakosti su posljedica prethodne propozicije. □

3.4 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{proVect}$

3.4.1 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ i tenzorski produkt

Propozicija 3.4.1. *Neka kategorija $\mathcal{V}$ ima koujednačitelje. Tada kategorija $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ ima koujednačitelje i vrijedi da je koujednačitelj paralelnog para morfizama kofiltracija upravo kofiltracija čije su komponente koujednačitelji paralelnih parova komponentnih preslikavanja. Za potkategoriju $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ vrijedi isto.*

Dokaz. Neka su zadane dvije proizvoljne kofiltracije

$$\boldsymbol{A} = \{(A_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\}), \quad \boldsymbol{B} = (\{(B_n\}_{n\in J}, \{\psi_{mn}\})$$

i neka je zadan paralelan par morfizama kofiltracija predmorfizmima

$$f = (\lambda, \{f_n \colon A_{\lambda(n)} \to B_n\}_{n\in J}), \quad g = (\lambda, \{g_n \colon A_{\lambda(n)} \to B_n\}_{n\in J}).$$

Predmorfizme smo odabrali tako da funkcije λ budu jednake, što možemo jer je I usmjerena kategorija. Odgovarajuće morfizme kofiltracija označavat ćemo također s f i g.

Kategorija $\mathcal{V}$ ima koujednačitelje pa za svaki paralelan par f_n, g_n postoji njihov koujednačitelj $h_n \colon B_n \to C_n$.

$$\begin{tikzcd} A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, dashed, "h_n"] & C_n \end{tikzcd}$$

Neka je $\psi_{mn} \colon B_n \to B_m$ proizvoljan vezni morfizam kofiltracije $\boldsymbol{B}$. Dokazujemo da kompozicija $h_m \circ \psi_{mn}$ koujednačuje par f_n, g_n. Budući da su f i g predmorfizmi kofiltracija, postoji $k \in I$ takav da je $\psi_{mn} \circ f_n \circ \phi_{\lambda(n)k} = f_m \circ \phi_{\lambda(m)k}$ i $\psi_{mn} \circ g_n \circ \phi_{\lambda(n)k} = g_m \circ \phi_{\lambda(m)k}$, tj. takav da je peterokut na sljedećem dijagramu sekvencijalno komutativan. Zajednički indeks k smo ovdje mogli odabrati opet jer je I usmjerena kategorija.

$$\begin{tikzcd} & A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[dd, "\psi_{mn}"] & C_n \\ A_k \arrow[ur, dashed, "\phi_{\lambda(n)k}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_{\lambda(m)k}"'] & & & \\ & A_{\lambda(m)} \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[r, "h_m"] & C_m \end{tikzcd}$$

Morfizam h_m koujednačuje f_m i g_m, pa vrijedi

$$h_m \circ f_m \circ \phi_{\lambda(m)k} = h_m \circ g_m \circ \phi_{\lambda(m)k}$$

iz čega zbog prethodnog slijedi

$$h_m \circ \psi_{mn} \circ f_n \circ \phi_{\lambda(n)k} = h_m \circ \psi_{mn} \circ g_n \circ \phi_{\lambda(n)k}.$$

Vezni morfizam $\phi_{\lambda(n)k}$ je epimorfizam pa iz toga slijedi tražena jednakost

$$h_m \circ \psi_{mn} \circ f_n = h_m \circ \psi_{mn} \circ g_n.$$

Dakle, za svaki vezni morfizam ψ_{mn} vrijedi da $h_m \circ \psi_{mn}$ koujednačuje par f_n, g_n pa po univerzalnom svojstvu koujednačitelja h_n slijedi da za svaki vezni morfizam ψ_{mn} postoji jedinstveno preslikavanje $\tau_{mn}\colon C_n \to C_m$ takvo da je sljedeći kvadrat komutativan.

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\psi_{mn}"] & C_n \arrow[d, dashed, "\tau_{mn}"] \\ B_m \arrow[r, "h_m"] & C_m \end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je $\boldsymbol{C} = (\{C_n\}_{n\in J}, \{\tau_{mn}\})$ kofiltracija. Kompozicija $\tau_{ml} \circ \tau_{ln}$ jednaka je τ_{mn} jer je odgovarajući kvadrat za τ_{mn} komutativan i za kompoziciju vrijedi

$$\tau_{ml} \circ \tau_{ln} \circ h_n = \tau_{ml} \circ h_l \circ \psi_{ln} = h_m \circ \psi_{ml} \circ \psi_{ln} = h_m \circ \psi_{mn},$$

a preslikavanje s tim svojstvom je jedinstveno. Svaki vezni morfizam τ_{mn} je epimorfizam jer su ψ_{mn} i h_m epimorfizmi: ψ_{mn} je epimorfizam jer je vezni morfizam kofiltracije, a h_m je epimorfizam jer je koujednačitelj.

Zbog komutativnosti dijagrama očito je $h = (\mathrm{id}, \{h_n\colon B_n \to C_n\}_{n\in J})$ predmorfizam kofiltracija $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$. Njime određen morfizam kofiltracija označimo također s h.

Sada dokazujemo da je konstruirana kofiltracija $\boldsymbol{C}$ zajedno s morfizmom $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ koujednačitelj paralelnog para morfizama kofiltracija $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$. Uzmimo bilo koju kofiltraciju $\boldsymbol{D} = (\{D_n\}_{n\in K}, \{\sigma_{mn}\})$ i predmorfizam kofiltracija

$$e = (\mu\colon K \to J, \{e_n\colon B_{\mu(n)} \to D_n\}_{n\in K})\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{D}$$

takav da je $e \circ f = e \circ g$. Budući da za svaki $n \in K$ komponenta e_n koujednačuje $f_{\mu(n)}$ i $g_{\mu(n)}$, postoji jedinstveno preslikavanje $d_n\colon C_{\mu(n)} \to D_n$ takvo da je $d_n \circ h_{\mu(n)} = e_n$.

$$\begin{tikzcd} A_{\lambda(\mu(n))} \arrow[r, shift left, "f_{\mu(n)}"] \arrow[r, shift right, "g_{\mu(n)}"'] & B_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] \arrow[rr, bend left, "e_n"] & C_{\mu(n)} \arrow[r, dashed, "d_n"] & D_n \end{tikzcd}$$

Na sljedećem dijagramu gornji i donji trokut su komutativni, lijevi i vanjski kvadrat su komutativni i preslikavanje $h_{\mu(n)}$ je epimorfizam, pa je komutativan i desni kvadrat.

$$
\begin{tikzcd}
B_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] \arrow[d, "\psi_{\mu(m)\mu(n)}"] \arrow[rr, bend left, "e_n"] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\tau_{\mu(m)\mu(n)}"] & D_n \arrow[d, "\sigma_{mn}"] \\
B_{\mu(m)} \arrow[r, "h_{\mu(m)}"] \arrow[rr, bend right, "e_m"'] & C_{\mu(m)} \arrow[r, "d_m"] & D_m
\end{tikzcd}
$$

Dakle preslikavanja $d_n\colon C_{\mu(n)} \to D_n$, $n \in K$ čine predmorfizam kofiltracija

$$d := (\mu, \{d_n\}_{n\in K})\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$$

i vrijedi $d \circ h = e$. Dokazujemo sada da je bilo koji drugi predmorfizam

$$b = (\kappa\colon K \to J, \{b_n\colon C_{\kappa(n)} \to D_n\})$$

s tim svojstvom ekvivalentan d. Uzmimo komponentu b_n. Budući da je $b \circ h = e$ postoji $k \in J$ i vezni morfizmi $\psi_{\mu(n)k}$ i $\psi_{\kappa(n)k}$ takvi da je na sljedećem dijagramu vanjski peterokut komutativan. Vanjski trokut je također komutativan, pa slijedi i da je unutrašnji šesterokut komutativan.

$$
\begin{tikzcd}
 & B_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] \arrow[rr, bend left, "e_n"] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "d_n"] & D_n \\
B_k \arrow[ur, dashed, "\psi_{\mu(n)k}"] \arrow[dr, dashed, "\psi_{\kappa(n)k}"'] & & & \\
 & B_{\kappa(n)} \arrow[r, "h_{\kappa(n)}"] & C_{\kappa(n)} \arrow[uur, "b_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Komutativnost desnog četverokuta na sljedećem dijagramu slijedi iz komutativnosti vanjskog šesterokuta, komutativnosti dva lijeva četverokuta i činjenice da je h_k epimorfizam.

$$
\begin{tikzcd}
 & B_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "d_n"] & D_n \\
B_k \arrow[ur, "\psi_{\mu(n)k}"] \arrow[r, "h_k"] \arrow[dr, "\psi_{\kappa(n)k}"'] & C_k \arrow[ur, "\tau_{\mu(n)k}"'] \arrow[dr, "\tau_{\kappa(n)k}"] & & \\
 & B_{\kappa(n)} \arrow[r, "h_{\kappa(n)}"] & C_{\kappa(n)} \arrow[uur, "b_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Dakle, predmorfizmi b i d su ekvivalentni i univerzalno svojstvo za $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ je dokazano.

Koujednačitelj paralelnog para morfizama kofiltracija f, g zadan je dakle koujednačiteljima $h_n\colon B_n \to C_n$ komponentnih preslikavanja f_n, g_n i jedinstvenim morfizmima $\tau_{mn}\colon C_n \to C_m$ koji proizlaze iz univerzalnog svojstva tih koujednačitelja.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\psi_{mn}"] & C_n \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\
A_{\lambda(m)} \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[r, "h_m"] & C_m
\end{tikzcd}$$

□

Kategorije $\mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}$, $\mathrm{Pro}^s\mathrm{VectFin}$, $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ dakle imaju koujednačitelje i oni se konstruiraju na prethodno opisani način, jer Vect i $\mathrm{VectFin}$ imaju koujednačitelje.

Propozicija 3.4.2. *Neka je $(\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija u kojoj je tenzorski produkt svaka dva epimorfizma epimorfizam. Tada je kategorija $(\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija i vrijedi sljedeće: ako $\mathcal{V}$ ima koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom, onda i kategorija $(\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}, \otimes, k)$ ima koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom. Za kategoriju $(\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}, \otimes, k)$ vrijedi isto.*

Dokaz. Sve tvrdnje su prethodno dokazane u propozicijama 3.2.7 i 3.4.1 osim tvrdnje da tenzorski produkt u $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ komutira s koujednačiteljima čim tenzorski produkt u $\mathcal{V}$ komutira s koujednačiteljima. Dokažimo sada tu tvrdnju.

Neka je $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ koujednačitelj paralelnog para morfizama kofiltracija $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ konstruiran kao u propoziciji 3.4.1, uz iste oznake kao u dokazu te propozicije, za $n \geqslant m$,

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\psi_{mn}"] & C_n \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\
A_{\lambda(m)} \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[r, "h_m"] & C_m
\end{tikzcd}$$

Tenzorski produkt koujednačitelja $h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ s identitetom $\mathrm{id}\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$ na kofiltraciji $\boldsymbol{D}$ ima dakle komponente u sljedećem komutativnom dijagramu, za $n \geqslant m$ i $l \geqslant k$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda(n)} \otimes D_l \arrow[r, shift left, "f_n \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_n \otimes \mathrm{id}"'] & B_n \otimes D_l \arrow[r, "h_n \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\psi_{mn} \otimes \sigma_{kl}"] & C_n \otimes D_l \arrow[d, "\tau_{mn} \otimes \sigma_{kl}"] \\
A_{\lambda(m)} \otimes D_k \arrow[r, shift left, "f_m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_m \otimes \mathrm{id}"'] & B_m \otimes D_k \arrow[r, "h_m \otimes \mathrm{id}"] & C_m \otimes D_k
\end{tikzcd}$$

Svaki redak na tom dijagramu je koujednačitelj u $\mathcal{V}$, a vezni morfizmi kofiltracije $\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}$ čine komutativne kvadrate s veznim morfizmima kofiltracije $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D}$ i komponentama predmorfizma $h \otimes \mathrm{id}$. Dakle, po konstrukciji u propoziciji 3.4.1, $h \otimes \mathrm{id}$ je koujednačitelj u $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ paralelnog para $f \otimes \mathrm{id}, g \otimes \mathrm{id}$. Isti dokaz vrijedi za punu potkategoriju $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$.

□

Korolar 3.4.3. *Simetrične monoidalne kategorije* $\mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}$ *i* $\mathrm{Pro}^s\mathrm{VectFin}$ *imaju koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom. Simetrične monoidalne kategorije* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ *i* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ *također.*

Dokaz. Kategorije Vect i $\mathrm{VectFin}$ imaju koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom. □

Korolar 3.4.4. *Simetrična monoidalna kategorija* $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ *dopušta koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom.*

Dokaz. Kategorije $\mathrm{proVect}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ su ekvivalentne simetrične monoidalne kategorije, a tvrdnja vrijedi u kategoriji $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$. □

3.4.2 Potprostori, jezgre i kvocijenti

Ovi rezultati će nam biti potrebni poslije da dokažemo da kategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ posjeduje koujednačitelje, te da oni komutiraju s tenzorskim produktom.

Propozicija 3.4.5. *(Potprostorna kofiltracija) Neka je* $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ *kofiltrirani vektorski prostor,* $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ij}\})$. *Neka je* $W \leqslant V$ *njegov vektorski potprostor. Tada kofiltracija na* V *inducira kanonsku kofiltraciju* $\boldsymbol{W}$ *s kofiltrirajućim komponentama* $\{\pi_i^V(W)\}_{i \in I}$ *i veznim preslikavanjima koja su odgovarajuće korestrikcije restrikcija veznih preslikavanja* $\{\phi_{ij}\}$. *Kofiltraciju* $\boldsymbol{W}$ *zovemo* potprostorna kofiltracija *inducirana kofiltracijom na* V.

Označimo $\hat{W} \cong \lim \boldsymbol{W}$. *Preslikavanje* $\hat{W} \to \lim \boldsymbol{V} \cong V$ *inducirano po univerzalnom svojstvu limesa konusom* $\hat{W} \to \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$ *je injekcija i morfizam kofiltriranih vektorskih prostora. Slika te injekcije je dakle izomorfna vektorskom prostoru* $\hat{W} \cong \lim \boldsymbol{W}$ *i time čini kanonski izbor upotpunjenja vektorskog potprostora* W *po potprostornoj kofiltraciji, onog koje je vektorski* *potprostor od V. Tu sliku ćemo onda označavati s $\hat{W} \subseteq V$ i vrijedit će dakle $W \subseteq \hat{W} \subseteq V$. Potprostorna kofiltracija na $\hat{W} \subseteq V$ inducirana kofiltracijom na V jednaka je $\boldsymbol{W}$ i preslikavanje $\hat{W} \hookrightarrow V$ je morfizam kofiltriranih vektorskih prostora.*

Ako su Z i W vektorski potprostori od V takvi da je $Z \subseteq W \subseteq V$, onda je potprostorna kofiltracija na Z inducirana kofiltracijom $\boldsymbol{V}$ na V jednaka potprostornoj kofiltraciji na Z induciranoj kofiltracijom $\boldsymbol{W}$ na $\hat{W}$ i vrijedi $\hat{Z} \subseteq \hat{W} \subseteq V$.

Dokaz. Neka je dakle $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ kofiltrirani vektorski prostor, $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ij}\})$. Neka je $W \subseteq V$ njegov vektorski potprostor i $\iota\colon W \hookrightarrow V$ odgovarajuća inkluzija. Definirajmo $W_i := \pi_i^V(W) \subseteq V_i$ i označimo s $\iota_i\colon W_i \hookrightarrow V_i$ kanonske inkluzije. Budući da je $\pi_i^V(W) = W_i$ i ι_i je injekcija, postoji jedinstveno preslikavanje $\pi_i^W\colon W \to W_i$ takvo da je sljedeći dijagram na lijevoj strani komutativan i ono je epimorfizam.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "\pi_i^W"] & V \arrow[d, "\pi_i^V"] \\ W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] & V_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, dashed, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[d, "\phi_{ji}"] \\ W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \end{tikzcd}$$

Za svaki usporedivi par $i \geqslant j$ je $\phi_{ji}(W_i) = \phi_{ji}(\pi_i^V(W)) = \pi_j^V(W) = W_j$ pa postoji jedinstveno preslikavanje $\psi_{ji}\colon W_i \to W_j$ takvo da je gornji dijagram na desnoj strani komutativan i ono je epimorfizam. Na sljedećem dijagramu na lijevoj strani su komutativni gornji, donji i vanjski četverokut, komutativan je desni trokut i ι_j je injekcija, pa je komutativan i lijevi trokut, tj. vrijedi jednakost $\psi_{ji} \circ \pi_i^W = \pi_j^W$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] \arrow[dd, bend right, "\pi_j^W"'] & V \arrow[d, "\pi_i^V"] \arrow[dd, bend left, "\pi_j^V"] \\ W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[d, "\phi_{ji}"] \\ W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[d, "\phi_{ji}"] \arrow[dd, bend left, "\phi_{ki}"] \\ W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] \arrow[d, "\psi_{kj}"] & V_j \arrow[d, "\phi_{kj}"] \\ W_k \arrow[r, hook, "\iota_k"] & V_k \end{tikzcd}$$

Neka je sada $i \geqslant j \geqslant k$ trojka u I. Na gornjem dijagramu na desnoj strani komutativna su oba kvadrata i desni trokut, pa je komutativan i vanjski peterokut, a zbog jedinstvenosti preslikavanja ψ_{ki} sa svojstvom $\iota_k \circ \psi_{ki} = \phi_{ki} \circ \iota_i$ iz toga slijedi jednakost: $\psi_{kj} \circ \psi_{ji} = \psi_{ki}$.

Dakle, $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\psi_i\})$ je kofitracija u Vect i familija $\{\pi_i^W \colon W \to W_i\}_{i\in I}$ definira konus nad kofiltracijom $\boldsymbol{W}$ s vrhom W.

Neka familija $\{\pi_i^U \colon U \to W_i\}_{i\in I}$ definira univerzalni konus nad $\boldsymbol{W}$. Po univerzalnom svojstvu limesa $U \cong \lim \boldsymbol{W}$ postoji jedinstveno preslikavanje $\psi \colon W \to U$ takvo da je $\pi_i^U \circ \psi = \pi_i^W$ za svaki $i \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\pi_i^U"'] & W \arrow[l, dashed, "\psi"'] \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] & V \arrow[d, "\pi_i^V"] \\
& W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] & V_i
\end{tikzcd}
$$

Iz komutativnosti lijevog donjeg trokuta i donjeg kvadrata na sljedećem dijagramu slijedi $\phi_{ji} \circ \iota_i \circ \pi_i^U = \iota_j \circ \pi_j^U$, pa zaključujemo da familija preslikavanja $\{\iota_i \circ \pi_i^U \colon U \to V_i\}$ definira konus nad $\boldsymbol{V}$. Iz toga po univerzalnom svojstvu limesa $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ slijedi da postoji jedinstveno preslikavanje $\phi \colon U \to V$ takvo da je $\pi_i^V \circ \phi = \iota_i \circ \pi_i^U$ za svaki $i \in I$.

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, dashed, bend left, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_i^U"] \arrow[ddr, "\pi_j^U"'] & W \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] & V \arrow[d, "\pi_i^V"] \arrow[dd, bend left, "\pi_j^V"] \\
& W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[d, "\phi_{ji}"] \\
& W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j
\end{tikzcd}
$$

Budući da je $\phi \circ \psi \colon W \to V$ tada preslikavanje za koje vrijedi

$$\pi_i^V \circ \phi \circ \psi = \iota_i \circ \pi_i^U \circ \psi = \iota_i \circ \pi_i^W,$$

iz jedinstvenosti preslikavanja s tim svojstvom slijedi $\iota = \phi \circ \psi$. Dakle, ψ mora biti injekcija. Dokazujemo da je ϕ injekcija. Pretpostavimo da je slika niti $w = (w_i)_{i\in I} \in U$ jednaka $0 \in V$. Tada je $\iota_i(w_i) = 0 \in V_i$ za svaki $i \in I$. Budući da su sve komponente ι_i injekcije, to mora biti $w_i = 0$ za svaki $i \in I$, tj. $w = 0$ u U. Dakle, ϕ je injekcija.

Injekcija $\phi \colon U \hookrightarrow V$ je morfizam kofiltriranih vektorskih prostora predstavljen po nivoima injekcijama $W_i \hookrightarrow V_i$. Sliku $\phi(U) \subseteq V$, $\phi(U) \cong U$, označimo s $\hat{W}$. Ta slika ne ovisi o izboru limesa U. Kofiltracija na $\hat{W}$ inducirana po izomorfizmu $\hat{W} \cong U$ je očito $\boldsymbol{W}$ i ona je ista kao potprostorna kofiltracija na $\hat{W}$ inducirana kofiltracijom na V. Vrijedi $W \subseteq \hat{W} \subseteq V$ u Vect i $\hat{W} \hookrightarrow V$ je morfizam u $\mathrm{proVect}$.

Zadnja tvrdnja iz iskaza propozicije lako se provjeri: komponente i vezna preslikavanja kofiltracije na Z kao potprostora od $\hat{W}$ podudaraju se s komponentama i veznim preslikavanjima kofiltracije na Z kao potprostora od V. □

Definicija 3.4.6. Za vektorski prostor V na kojem je dana kofiltracija $\boldsymbol{V}$ kažemo da je *potpun* ako je kanonsko linearno preslikavanje $V \to \hat{V}$ u njegovo upotpunjenje $\hat{V} \cong \lim \boldsymbol{V}$ po toj kofiltraciji izomorfizam. Ako je vektorski potprostor $W \leqslant V$ kofiltriranog vektorskog prostora V jednak svom upotpunjenju $\hat{W}$ u V, onda kažemo da je W *potpun potprostor kofiltriranog vektorskog prostora* V.

Propozicija 3.4.7. *Svaki element upotpunjenja $\hat{W} \cong \lim \boldsymbol{W}$ vektorskog prostora W po $\aleph_0$-kofiltraciji $\boldsymbol{W}$ je vrijednost neke formalne sume u $\hat{W}$ čiji sumandi su u slici kanonskog linearnog preslikavanja $W \to \hat{W}$.*

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ i označimo s $\eta\colon W \to \hat{W}$ kanonsko preslikavanje u upotpunjenje. Za svaki $i \in I$ vrijedi $\pi_i^{\hat{W}} \circ \eta = \pi_i^W$. Proizvoljan element $v \in \hat{W}$ je nit

$$v = (v_i)_{i\in I} \in \hat{W},$$

gdje je svaki $v_i \in W_i$. Neka je K kofinalan podskup od I izomorfan $\mathbb{N}$, dakle $K = \{k_1, k_2, \ldots\}$ uz $k_n < k_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Radi jednostavnijeg zapisa, uzmimo da $\mathbb{N}$ ne sadrži niti jedan indeks iz I i označimo za $n, m \in \mathbb{N}$ komponente $V_n := V_{k_n}$, vezna preslikavanja $\phi_{nm} := \phi_{k_n k_m}$ i projekcije $\pi_n^W := \pi_{k_n}^W$, $\pi_n^{\hat{W}} := \pi_{k_n}^{\hat{W}}$.

Dokazat ćemo koristeći Zornovu lemu da postoji niz $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata od W takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\pi_n^W(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \pi_n^{\hat{W}}(v)$. Za takav niz će naime vrijediti da je $\sum_n \eta(w_n)$ formalna suma u $\hat{W}$ vrijednosti v.

(i) Dokazujemo prvo da postoji niz $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata od W sa svojstvom

$$\pi_n^W(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \pi_n^{\hat{W}}(v),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neka je S skup svih nizova $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata u W za koje vrijedi to svojstvo i T skup svih konačnih nizova $(w_n)_{n=1}^t$ elemenata u W za koje vrijedi

$$\pi_n^W(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \pi_n^{\hat{W}}(v),\ \forall n \leqslant t.$$

Skup $S \cup T$ je neprazan jer je π_1^W surjekcija. Na skupu $S \cup T$ je definiran parcijalni uređaj

$$(w_n)_{n\in A} \leqslant (w_n')_{n\in B} \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (\forall n \in A)(w_n = w_n').$$

Očito svaki lanac u $S \cup T$ ima gornju među pa po Zornovoj lemi postoji maksimalan element u $S \cup T$. Taj element mora biti u S, jer kad bi on bio konačan niz $(w_n)_{n=1}^t \in T$, konstruirali bismo niz veći od njega tako da odaberemo: $w_{t+1} \in W$ za koji vrijedi

$$\pi_{t+1}^W(w_{t+1}) = \pi_{t+1}^{\hat{W}}(v) - \pi_{t+1}^W(w_1 + w_2 + \ldots + w_t),$$

što možemo jer je π_{t+1}^W surjekcija.

(ii) Dokazujemo da za niz u W sa svojstvom $\pi_n^W(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \pi_n^{\hat{W}}(v), \forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\sum_n \eta(w_n)$ formalna suma u $\hat{W}$ vrijednosti v.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\pi_n^W(w_{n+1}) &= \phi_{n(n+1)}(\pi_{n+1}^W(w_{n+1}))\\ &= \phi_{n(n+1)}(\pi_{n+1}^{\hat{W}}(v) - \pi_{n+1}^W(\textstyle\sum_{j=1}^n w_j))\\ &= \pi_n^{\hat{W}}(v) - \pi_n^W(\textstyle\sum_{j=1}^n w_j)\\ &= 0.\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\pi_n^W(w_N) = \phi_{n(N-1)}(\pi_{N-1}^W(w_N)) = 0, \text{ za svaki } N > n.$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je skup $\{\pi_n^W(w_j) \neq 0 \mid j \in \mathbb{N}\}$ konačan i vrijedi

$$\bar{\sum_j} \pi_n^{\hat{W}}(\eta(w_j)) = \bar{\sum_j} \pi_n^W(w_j) = \pi_n^{\hat{W}}(v),$$

a budući da je K kofinalan u I, lako se vidi da je to dovoljno da zaključimo da je $\sum_n \eta(w_n)$ formalna suma u $\hat{W}$ vrijednosti v. □

Propozicija 3.4.8. *Neka je W vektorski potprostor kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$. Tada je W potpun potprostor ako i samo ako svaka formalna suma u V čiji su svi sumandi u $W \subseteq V$ ima vrijednost u W.*

Slično, vektorski prostor W na kojem je zadana $\aleph_0$-kofiltracija $\boldsymbol{W}$ je potpun ako i samo ako sve formalne sume u $\hat{W}$ čiji su svi sumandi u slici kanonskog preslikavanja $W \to \hat{W}$ u upotpunjenje imaju vrijednost u toj slici i kanonsko preslikavanje $W \to \hat{W}$ je injekcija.

Dokaz. Po propoziciji 3.4.7 svaki element upotpunjenja $\hat{W} \subseteq V$ može se zapisati kao formalna suma u V čiji su svi sumandi u W. Ako svaka takva formalna suma ima vrijednost u W, onda je po tome $\hat{W} \subseteq W$ pa je W potpun potprostor. Obratno, ako je W potpun potprostor, onda očito svaka formalna suma u W ima vrijednost u W.

□

Korolar 3.4.9. *Presjek $\bigcap_{k \in K} V^{(k)}$ potpunih potprostora kofiltriranog vektorskog prostora V je potpuni potprostor od V i inkluzija $\bigcap_{k \in K} V^{(k)} \hookrightarrow V$ je morfizam kofiltriranih vektorskih prostora.*

Propozicija 3.4.10. *Neka je $f\colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Tada je njegova jezgra kao linearnog preslikavanja*

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

potpuni potprostor od V. To je dakle kofiltrirani vektorski prostor uz potprostornu kofiltraciju i ulaganje $\operatorname{Ker} f \hookrightarrow V$ je morfizam u kategoriji $\operatorname{proVect}$.

Dokaz. Budući da preslikavanje f distribuira po formalnim sumama, formalnu sumu u V čiji su sumandi u jezgri f će također preslikati u nulu. Po prethodnoj propoziciji slijedi da je $\operatorname{Ker} f$ potpun potprostor od V.

□

Napomena 3.4.11. Neka je $f\colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Tada slika

$$\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\}$$

ne mora biti potpuni potprostor od W. Po propoziciji 3.4.5 za upotpunjenje slike se može izabrati vektorski potprostor

$$\widehat{\operatorname{Im} f} \subseteq W$$

i to je potpuni potprostor. Inkluzija $\widehat{\operatorname{Im} f} \hookrightarrow W$ i korestrikcija $V \to \widehat{\operatorname{Im} f}$ su morfizmi u $\operatorname{proVect}$.

Propozicija 3.4.12. *(Kvocijentna kofiltracija.) Kvocijent kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ po njegovom potpunom potprostoru W je kofiltrirani vektorski prostor uz niže opisanu kanonsku kofiltraciju i kvocijentno preslikavanje $q\colon V \to V/W$ je morfizam kofiltriranih vektorskih prostora. Nadalje, to kvocijentno preslikavanje je koujednačitelj para koji se sastoji od nul-preslikavanja $0\colon W \to V$ i inkluzije $\iota\colon W \hookrightarrow V$ u kategoriji* $\operatorname{proVect}$.

Kanonska kofiltracija inducirana na kvocijentu V/W jednaka je

$$(\{V_i/W_i\}_{i\in I}, \{\tau_{ji}\}),$$

gdje je $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$ potprostorna kofiltracija na W koja je inducirana kofiltracijom $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ na V, a vezna preslikavanja $\{\tau_{ji}\}$ su jedinstvena preslikavanja među kvocijentima $\{V_i/W_i\}_{i\in I}$ inducirana veznim preslikavanjima $\{\phi_{ji}\}$. Tu kofiltraciju zovemo kvocijentna kofiltracija *na V/W.*

Dokaz. Neka je dakle $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ kofiltrirani vektorski prostor, $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$, i neka je W njegov potpuni potprostor, s induciranom kofiltracijom $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$. Označimo s $\iota\colon W \hookrightarrow V$ inkluziju i neka je $(\mathrm{id}, \{\iota_i\}_{i\in I})$ odgovarajući predmorfizam $\boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] \arrow[dd, bend right, "\pi_j^W"'] & V \arrow[d, "\pi_i^V"'] \arrow[dd, bend left, "\pi_j^V"] \\
W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[d, "\phi_{ji}"] \\
W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j
\end{tikzcd}$$

Kao u dokazu propozicije 3.4.1 koujednačitelj para morfizama kofiltracija $(\mathrm{id}, \{\iota_i\})$ i $(\mathrm{id}, \{0\})$ je kofiltracija čije su komponente koujednačitelji q_i parova $\iota_i, 0$ i čija su vezna preslikavanja jedinstvena preslikavanja među vrhovima tih koujednačitelja kao univerzalnih kokonusa. Označimo tu kofiltraciju s

$$\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W} := (\{V_i/W_i\}_{i\in I}, \{\tau_{ji}\}).$$

$$\begin{tikzcd}
W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "\phi_{ji}"] & V_i/W_i \arrow[d, "\tau_{ji}"] \\
W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[r, "q_j"] & V_j/W_j
\end{tikzcd}$$

Neka je q kvocijentno preslikavanje $V \to V/W$, tj. koujednačitelj u Vect para $\iota, 0$. Za svaki $i \in I$ preslikavanje q_i koujednačuje par $\iota_i, 0\colon W_i \to V_i$ pa, jer je lijevi gornji kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan, slijedi da $q_i \circ \pi_i^V$ koujednačuje par $\iota, 0$:

$$q_i \circ \pi_i^V \circ \iota = q_i \circ \iota_i \circ \pi_i^W = q_i \circ 0 \circ \pi_i^W = 0 = q_i \circ \pi_i^V \circ 0.$$

Po univerzalnom svojstvu koujednačitelja V/W, za svaki $i \in I$ zbog toga postoje i jedinstvena su preslikavanja $\tau_i\colon V/W \to V_i/W_i$ takva da je $\tau_i \circ q = q_i \circ \pi_i^V$. Zbog jedinstvenosti ona čine konus nad kofiltracijom $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$. Budući da su q_i i π_i^V epimorfizmi, to je i svaki τ_i epimorfizam.

Dakle, $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ je kofiltracija na V/W.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] & V \arrow[r, dashed, "q"] \arrow[d, "\pi_i^V"] & V/W \arrow[d, dashed, "\tau_i"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\tau_j"] \\
W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "\phi_{ji}"] & V_i/W_i \arrow[d, "\tau_{ji}"] \\
W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[r, "q_j"] & V_j/W_j
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je taj konus s vrhom V/W univerzalan. Neka je sa $\{\pi_i^U : U \to V_i/W_i\}_{i\in I}$ zadan univerzalan konus nad $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ u Vect. Po univerzalnom svojstvu limesa

$$U \cong \lim \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$$

postoji jedinstveno preslikavanje $\phi\colon V/W \to U$ takvo da je $\pi_i^U \circ \phi = \tau_i$ za svaki $i \in I$. Zbog ekvivalentnosti kategorija $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i $\mathrm{proVect}$, kofiltrirani vektorski prostor $U \cong \lim \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ je koujednačitelj paralelnog para $\iota, 0$ u kategoriji $\mathrm{proVect}$ i očito je upotpunjenje od V/W po kofiltraciji $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$. Dokazat ćemo da je ϕ injekcija i surjekcija.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_i^W"] & V \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi_i^V"] & V/W \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "\tau_i"] & U \arrow[dl, "\pi_i^U"'] \arrow[ddl, "\pi_j^U"] \\
W_i \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[d, "\psi_{ji}"] & V_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "\phi_{ji}"] & V_i/W_i \arrow[d, "\tau_{ji}"] & \\
W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[r, "q_j"] & V_j/W_j &
\end{tikzcd}$$

Preslikavanje ϕ pridružuje elementu $v + W \in V/W$ nit $(\pi_i^V(v) + W_i)_{i\in I}$. Ako je $v + W \neq 0$ u V/W, tj. $v \notin W$, onda mora biti i $\phi(v + W) \neq 0$ u U. Zaista, kad bi bilo $\phi(v + W) = 0$, onda bi $q_i(\pi_i^V(v)) = \tau_i(q(v)) = \tau_i(v + W) = \pi_i^U(\phi(v + W)) = 0$ pa bi svaki $\pi_i^V(v)$ bio unutar W_i, tj. v bi bio u W, jer je $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Dakle, ϕ je injekcija. Preostaje dokazati da je surjekcija.

Proizvoljan element u limesa U je nit oblika $u = (v_i + W_i)_{i\in I}$, gdje je svaki $v_i \in V_i$ i vrijedi $\tau_{ji}(v_i + W_i) = v_j + W_j$, tj. $\phi_{ji}(v_i) - v_j \in W_j$. Ako dokažemo da postoji nit $v' = (v'_i)_{i\in I}$ u

$V \cong \lim \boldsymbol{V}$ takva da je $v'_i \in v_i + W_i$ za svaki $i \in I$, pronašli smo prasliku $v' + W$ po ϕ od niti u. Za $u = (v_i + W_i)_{i \in I} \in U$ definiramo kofiltraciju skupova

$$\boldsymbol{S}^u = (\{v_i + W_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ji}|_{v_i + W_i}\}).$$

Svaka komponenta $v_i + W_i$ te kofiltracije je neprazan skup i svako vezno preslikavanje je surjekcija. Zaista, $\phi_{ji}|_{W_i} = \psi_{ji}$ je surjekcija W_i na W_j i $\phi_{ji}(v_i) - v_j =: w'_j \in W_j$ pa za svaki $w_j \in W_j$ postoji w_i takav da je $\phi_{ji}(v_i + w_i) = v_j + w_j$, to je $w_i \in \phi_{ji}^{-1}(w_j - w'_j)$. Sada po propoziciji 3.1.6 o nepraznom limesu $\aleph_0$-kofiltracije sa surjektivnim veznim preslikavanjima i nepraznim komponentama slijedi tvrdnja. Dakle, ϕ je surjekcija. Slijedi: $V/W \cong U$ je kofiltrirani vektorski prostor i $V \to V/W$ je morfizam kofiltriranih vektorskih prostora.

U dokazu je vidljivo da je kofiltracija na kvocijentu kofiltriranog vektorskog prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ po njegovom potpunom potprostoru $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ koujednačitelj paralelnog para 0, $\iota \colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$, jer je koujednačitelj u propoziciji 3.4.1 u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ konstruiran upravo uzimanjem koujednačitelja paralelnih komponenata po nivoima, s induciranim preslikavanjima među njihovim vrhovima, a koujednačitelj od $0, \iota_i \colon W_i \to V_i$ u Vect jest kvocijent V_i/W_i. Dakle, zbog ekvivalencije kategorija $\mathrm{proVect}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$, kvocijent kofiltriranog vektorskog prostora po potpunom potprostoru je koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{proVect}$ para $0, \iota \colon W \to V$. $\square$

Napomena 3.4.13. Neka su Z i W potpuni potprostori od V takvi da je $Z \subseteq W$. Tada je Z potpun potprostor od W i lako je provjeriti da se kvocijentna kofiltracija na W/Z podudara s potprostornom kofiltracijom na $W/Z \subseteq V/Z$ koja je induciranom kvocijentnom kofiltracijom na V/Z.

Propozicija 3.4.14. *Neka je $f \colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Neka su $U \subseteq V$ i $T \subseteq W$ njihovi potpuni potprostori takvi da je $f(U) \subseteq T$. Tada je inducirano preslikavanje $\bar{f} \colon V/U \to W/T$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora, gdje na domeni i kodomeni podrazumijevamo kvocijentne kofiltracije inducirane kofiltracijama na V i W.*

Dokaz. Neka su dane kofiltracije na V odnosno W redom sljedeće: $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ji}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i \in I}, \{\psi_{ji}\})$. Po prethodnoj propoziciji 3.4.12 kvocijenti V/U i W/T su kofiltrirani vektorski prostori. Kao u dokazu te propozicije kvocijentna kofiltracija na V/U ima komponente V_i/U_i, $i \in I$, gdje je $U_i = \pi_i^V(U)$ i projekcija $\pi_i^{V/U} \colon V/U \to V_i/U_i$ je inducirano preslikavanje među koujednačiteljima, $\pi_i^{V/U}(v + U) = \pi_i^V(v) + U_i$. Analogno, komponente kvocijentne kofiltracije na W/T su W_j/T_j, $j \in J$, gdje je $T_j = \pi_j^W(T)$ i projekcija $\pi_j^{W/T} \colon W/T \to W_j/T_j$ je inducirano preslikavanje među koujednačiteljima, $\pi_j^{W/T}(w + T) = \pi_j^W(w) + T_j$. Neka je morfizam f zadan predmorfizmom $(\lambda, \{f_j \colon V_{\lambda(j)} \to W_j\})$. Za svaki $j \in J$ je sljedeći dijagram komutativan.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi^V_{\lambda(j)}"] & W \arrow[d, "\pi^W_j"] \\
V_{\lambda(j)} \arrow[r, "f_j"] & W_j
\end{tikzcd}
$$

Budući da je $f(U) \subseteq T$ slijedi

$$f_j(U_{\lambda(j)}) = f_j(\pi^V_{\lambda(j)}(U)) = \pi^W_j(f(U)) \subseteq \pi^W_j(T) = T_j$$

pa je dobro definirano linearno preslikavanje $\bar{f}_j\colon V_{\lambda(j)}/U_{\lambda(j)} \to W_j/T_j$ sa

$$\bar{f}_j(v_j + U_{\lambda(j)}) = f_j(v_j) + T_j$$

i sljedeći dijagram komutira, jer su sva preslikavanja među kvocijentima inducirana preslikavanjima na prethodnom komutativnom dijagramu.

$$
\begin{tikzcd}
V/U \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi^{V/U}_{\lambda(j)}"] & W/T \arrow[d, "\pi^{W/T}_j"] \\
V_{\lambda(j)}/U_{\lambda(j)} \arrow[r, dashed, "\bar{f}_j"] & W_j/T_j
\end{tikzcd}
$$

Dokazali smo dakle da za svaki $j \in J$ postoji $\bar{f}_j$ takav da je prethodni dijagram komutativan, što znači da je $\bar{f}$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora. $\square$

3.4.3 Monomorfizmi i epimorfizmi

Ova propozicija je bitna za dokaz tvrdnje da je tenzorski produkt filtracija u kategoriji $\mathrm{proVect}$ opet filtracija, što će nam biti potrebno za dobru definiranost tenzorskog produkta u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathrm{proVect}$.

Propozicija 3.4.15. *Morfizam u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *je monomorfizam u* $\mathrm{proVect}$ *ako i samo ako je monomorfizam kao preslikavanje u* Vect.

Dokaz. Pretpostavimo da je $i\colon V \to W$ morfizam kofiltriranih vektorskih prostora koje je injekcija kao preslikavanje vektorskih prostora. Bilo koja dva morfizma kofiltriranih vektorskih prostora $f, g\colon U \to V$ su ujedno i preslikavanja vektorskih prostora, pa ako za njih vrijedi $i \circ f = i \circ g$ onda slijedi $f = g$ jer je i monomorfizam vektorskih prostora. Obratno, neka je $i\colon V \to W$ monomorfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$. Dokazujemo da je i injekcija. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje elementi $v, w \in V$ takvi da je $v \neq w$ i $i(v) = i(w)$. Neka su $f, g\colon k \to V$ linearna preslikavanja definirana s $f(1) = v$ i $g(1) = w$. Ona su očito morfizmi u kategoriji $\mathrm{proVect}$ i različiti su, a vrijedi $i \circ f = i \circ g$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je i monomorfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$. □

Ova propozicija nije bitna za dalje izlaganje, ovdje je samo zbog potpunosti.

Propozicija 3.4.16. *Morfizam u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *je epimorfizam u* $\mathrm{proVect}$ *ako i samo ako je upotpunjenje njegove slike u* Vect *jednako cijeloj njegovoj kodomeni.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $p\colon V \to W$ morfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$ i $\widehat{p(V)} = W$. Neka je $f, g\colon W \to Z$ paralelan par morfizama u kategoriji $\mathrm{proVect}$ za koji vrijedi $f \circ p = g \circ p$. Svaki element v upotpunjenja $\widehat{p(V)} = W$ može se prikazati kao formalna suma elemenata u $p(V)$, $v = \sum_\lambda v_\lambda$, po propoziciji 3.4.7. Budući da preslikavanja f i g distribuiraju po formalnim sumama, ako se podudaraju na $p(V)$ moraju se podudarati na cijelom $\widehat{p(V)}$, tj. mora biti $f = g$.

Obratno, pretpostavimo da je $p\colon V \to W$ epimorfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$. Dokazat ćemo da je $\widehat{p(V)} = W$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $\widehat{p(V)} \neq W$. Tada je kvocijent $W/\widehat{p(V)}$ netrivijalan vektorski prostor. Po propoziciji 3.4.12 to je kofiltrirani vektorski prostor i kvocijentno preslikavanje $q\colon W \to W/\widehat{p(V)}$ je morfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$. Očito je $q \circ p = 0$. Par $f := \mathrm{id} \circ q$, $g := 0 \circ q\colon W \to W/\widehat{p(V)}$ su tada morfizmi u $\mathrm{proVect}$ za koje vrijedi $f \neq g$ i $f \circ p = g \circ p$ što je u kontradikciji s time da je p epimorfizam u kategoriji $\mathrm{proVect}$. □

3.4.4 Koprodukti i kolimesi u kategorijama $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ i $\mathrm{proVect}$

Postojanje i konstrukcija kolimesa dijagrama u kategoriji $\mathrm{proVect}$ čija je domena usmjeren skup kofinalnosti $\aleph_0$ bit će potrebni za dokaz da kategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ dopušta koujednačitelje i da oni komutiraju s tenzorskim produktom koji ćemo na toj kategoriji definirati.

Propozicija 3.4.17. *(Koprodukt u* $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$*.) Neka kategorija* $\mathcal{V}$ *posjeduje koprodukte. Tada kategorija* $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ *posjeduje koprodukte i kategorija* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ *posjeduje koprodukte familija indeksiranih skupom kardinaliteta* $\leqslant \aleph_0$.

Detaljnije, koprodukt familije $\{\boldsymbol{V}^{(k)}\}_{k\in K}$ *u* $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$, $\boldsymbol{V}^{(k)} = (\{V_i^{(k)}\}_{i\in I_k}, \{\phi_{ji}^{(k)}\})$, $k \in K$, *je kofiltracija* $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ *konstruirana na sljedeći način. Indeksni usmjereni skup je*

$$I := \prod_{k\in K} I_k,$$

komponente kofiltracije su

$$V_i := \coprod_{k\in K} V_{i_k}^{(k)}, \ \textit{za } i = (i_k)_{k\in K} \in I$$

i vezna preslikavanja su $\phi_{ji}\colon V_i \to V_j$,

$$\phi_{ji} := \coprod_{k\in K} \phi^{(k)}_{j_k i_k}, \ \textit{za usporedive } i = (i_k)_{k\in K} \geqslant j = (j_k)_{k\in K} \textit{ u } I.$$

Komponente $\iota^{(k)}\colon \boldsymbol{V}^{(k)} \to \boldsymbol{V}$ *univerzalnog kokonusa dane su predmorfizmima kofiltracija sastavljenima od kanonskih preslikavanja u koprodukte*

$$\iota^{(k)} = (\pi_k\colon I \to I_k, \{\iota^{(k)}_i\colon V^{(k)}_{i_k} \to \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{i_k}\}_{i\in I}),$$

gdje je $\pi_k\colon I \to I_k$ *projekcija iz produkta u komponentu,* $\pi_k(i) = i_k$ *za* $i = (i_k)_{k\in K} \in I$.

Dokaz. Očito je $\boldsymbol{V}$ usmjereni sustav u $\mathcal{V}$, a kofiltracija je jer je koprodukt epimorfizama epimorfizam. Zaista, pretpostavimo da imamo dva preslikavanja α i β koje $\coprod_{k\in K} f_k$ ujednačuje i da je svaki f_k epimorfizam.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{k\in K} A_k \arrow[r, "\coprod_{k\in K} f_k"] & \coprod_{k\in K} B_k \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & C \\
A_k \arrow[u, "\iota_k^A"] \arrow[r, "f_k"] & B_k \arrow[u, "\iota_k^B"'] &
\end{tikzcd}$$

Tada za svaki $k \in K$ vrijedi da $\coprod_{k\in K} f_k \circ \iota_k^A = \iota_k^B \circ f_k$ ujednačuje α i β. Budući da je svaki f_k epimorfizam, slijedi da ι_k^B ujednačuje α i β za svaki $k \in K$. Po univerzalnom svojstvu koprodukta, postoji jedinstveno preslikavanje $\coprod_{k\in K} B_k \to C$ takvo da je na komponentama jednako $\alpha \circ \iota_k^B = \beta \circ \iota_k^B$. Dakle, α mora biti jednako β. Time je dokazano da je koprodukt epimorfizama epimorfizam i da je $\boldsymbol{V}$ kofiltracija.

Sada dokazujemo da je konstruirana kofiltracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ zajedno s preslikavanjima $\iota^{(k)}\colon \boldsymbol{V}^{(k)} \to \boldsymbol{V}$, $k \in K$,

$$\iota^{(k)} = (\pi_k\colon I \to I_k, \{\iota^{(k)}_i\colon V^{(k)}_{i_k} \to \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{i_k}\}_{i\in I})$$

koprodukt u $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ danih kofiltracija. Preslikavanja $\iota^{(k)}$ su očito predmorfizmi kofiltracija. Neka je dana kofiltracija $\boldsymbol{Z} = (\{Z_n\}_{n\in J}, \{\tau_{mn}\})$ i neka je za svaki $k \in K$ dan predmorfizam $g^{(k)}\colon \boldsymbol{V}^{(k)} \to \boldsymbol{Z}$

$$g^{(k)} = (\lambda_k, \{g^{(k)}_n\colon V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \to Z_n\})$$

Po univerzalnom svojstvu koprodukta za svaki $n \in J$ postoji jedinstveno preslikavanje

$$h_n\colon \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \to Z_n$$

takvo da za svaki $k \in K$ komutira sljedeći dijagram

$$\begin{tikzcd}
& \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[dr, dashed, "h_n"] & \\
V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[ur] \arrow[rr, "g_n^{(k)}"] & & Z_n
\end{tikzcd}$$

Familija morfizama $\{h_n\}_{n\in J}$ čini predmorfizam kofiltracija $h\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{Z}$ što je vidljivo iz sljedećeg dijagrama. Za svaki vezni morfizam τ_{mn} i svaki $k \in K$ postoji komponenta $V^{(k)}_{\mu_k(n,m)}$ kofiltracije $\boldsymbol{V}^{(k)}$ takva da je unutrašnji peterokut komutativan. Vanjska iscrtkana preslikavanja su koprodukti iscrtkanih preslikavanja među komponentama. Slijedi komutativnost vanjskog peterokuta.

$$\begin{tikzcd}
& & & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[dr, "h_n"] & \\
& & V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[ur] \arrow[rr, "g_n^{(k)}"] & & Z_n \arrow[dd, "\tau_{mn}"] \\
\coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\mu_k(n,m)} \arrow[uurrr, dashed, bend left] \arrow[ddrrr, dashed, bend right] & V^{(k)}_{\mu_k(n,m)} \arrow[l] \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & & & \\
& & V^{(k)}_{\lambda_k(m)} \arrow[dr] \arrow[rr, "g_m^{(k)}"] & & Z_m \\
& & & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\lambda_k(m)} \arrow[ur, "h_m"'] &
\end{tikzcd}$$

Očito vrijedi da je $h \circ \iota^{(k)} = g^{(k)}$ za svaki $k \in K$.

Sada dokazujemo jedinstvenost takvog morfizma. Pretpostavimo da postoji još jedan predmorfizam $e\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{Z}$ za koji vrijedi $e \circ \iota^{(k)} = g^{(k)}$ za svaki $k \in K$. Neka je e zadan familijom

$$\{e_n\colon \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\gamma_k(n)} \to Z_n\}_{n\in J}.$$

Promotrimo sljedeći dijagram. Budući da je $e \circ \iota^{(k)} = h \circ \iota^{(k)}$ to postoji za svaki k komponenta $V^{(k)}_{\eta_k(n)}$ i iscrtkana preslikavanja iz nje na dijagramu tako da komutira vanjski šesterokut. Koprodukt svih tih preslikavanja su iscrtkana preslikavanja iz $\coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\eta_k(n)}$. Budući da komutira vanjski šesterokut, komutiraju gornji lijevi i donji lijevi četverokut za svaki $k \in K$ i preslikavanje iz koprodukta jedinstveno je određeno preslikavanjima iz svih komponenti koprodukta, slijedi da komutira i unutrašnji četverokut. Dakle, predmorfizmi h i e su ekvivalentni.

$$
\begin{tikzcd}
 & V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[r] & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\lambda_k(n)} \arrow[dr, "h_n"] & \\
V^{(k)}_{\eta_k(n)} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\eta_k(n)} \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & & Z_n \\
 & V^{(k)}_{\gamma_k(n)} \arrow[r] & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{\gamma_k(n)} \arrow[ur, "e_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ako su zadane kofiltracije s indeksnim skupom kofinalnosti najviše $\aleph_0$ i ako je K prebrojiv, onda je očito I kofinalnosti najviše $\aleph_0$, pa je konstruirana kofiltracija unutar potkategorije $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$. $\square$

Propozicija 3.4.18. *(Koprodukt u* $\mathrm{proVect}$.*)* *Neka je K skup kardinaliteta $\leqslant \aleph_0$ i neka je $\{V^{(k)}\}_{k\in K}$ familija u kategoriji* $\mathrm{proVect}$, *$V^{(k)} \cong \lim \boldsymbol{V}^{(k)}$, $\boldsymbol{V}^{(k)} = (\{V^{(k)}_i\}_{i\in I_k}, \{\phi_{ji}\})$, uz projekcije $\{\pi^{(k)}_i \colon V^{(k)} \to V^{(k)}_i\}_{i\in I_k}$, $k \in K$. Tada je koprodukt u* Vect

$$V := \coprod_{k\in K} V^{(k)}, \quad \{\iota^{(k)} \colon V^{(k)} \to V\}_{k\in K}$$

uz kofiltraciju $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ koja je koprodukt u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ *familije $\{\boldsymbol{V}^{(k)}\}_{k\in K}$:*

$$I := \prod_{k\in K} I_k,$$

$$V_i := \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{i_k}, \ \textit{za } i = (i_k)_{k\in K} \in I$$

$$\phi_{ji} := \coprod_{k\in K} \phi^{(k)}_{j_k i_k}, \ \textit{za usporedive } i = (i_k)_{k\in K} \geqslant j = (j_k)_{k\in K} \ \textit{u } I,$$

i uz projekcije

$$\pi^V_i = \coprod_{k\in K} \pi^{(k)}_{i_k} \colon V \to V_i, \ \textit{za } i = (i_k)_{k\in K} \in I$$

koprodukt u kategoriji $\mathrm{proVect}$ *familije $\{V^{(k)}\}_{k\in K}$. Kofiltracija na $V^{(k)}$ jednaka je induciranoj kofiltraciji na $V^{(k)}$ kao potprostoru od V pa $V^{(k)}$ možemo gledati kao potpun potprostor kofiltriranog vektorskog prostora V.*

Dokaz. Po propoziciji 3.4.17 $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ zaista jest kofiltracija i koprodukt u kategoriji $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ familije $\{\boldsymbol{V}^{(k)}\}_{k\in K}$. Budući da su kategorije $\mathrm{proVect}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ ekvivalentne, preostaje dokazati da je $\lim \boldsymbol{V}$ zaista V i da su kanonska preslikavanja $\iota^{(k)} \colon V^{(k)} \to V$ u koprodukt u Vect inducirana kanonskim predmorfizmima $\boldsymbol{V}^{(k)} \to \boldsymbol{V}$ u koprodukt u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$.

Kanonsko preslikavanje $V \to \hat{V}$ u upotpunjenje je injekcija jer za svaki element $v \in V$ različit od 0 postoji komponenta V_i u koju se on po projekciji π_i^V preslika u element različit od 0. Možemo dakle gledati V kao potprostor od $\hat{V}$. Svaku komponentu $V^{(k)}$ možemo gledati kao potprostor od V i time kao potprostor od $\hat{V}$. Pritom je očito kofiltracija $\boldsymbol{V}^{(k)}$ na $V^{(k)}$ jednaka induciranoj kofiltraciji na $V^{(k)}$ kao potprostoru od $\hat{V}$, pa je $V^{(k)}$ potpun potprostor od $\hat{V}$.

Neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma u $\hat{V}$ čiji su svi sumandi u V. Prvo ćemo zamijeniti tu formalnu sumu formalnom sumom iste vrijednosti čiji je svaki sumand unutar neke komponente $V^{(k)}$ i svi sumandi su iz različitih komponenti i zatim zaključiti da je takva suma nužno konačna, dakle s vrijednosti unutar V. Početna suma je formalna pa je skup $\{\lambda \mid \pi_i(v_\lambda) \neq 0\}$ konačan za svaki $i \in I$. Svaki sumand v_λ može se zapisati kao direktna (konačna) suma elemenata komponenti $V^{(k)} \subseteq V$,

$$v_\lambda = \bar{\sum_{k \in K}} v_\lambda^{(k)}.$$

U ovom dokazu kao inače sa $\bar{\sum}$ označavamo konačnu sumu pribrojnika različitih od 0. Za svaki $i = (i_k)_{k \in K} \in I$ je

$$\pi_i^V(v_\lambda) = \pi_i^V(\bar{\sum_k} v_\lambda^{(k)}) = \bar{\sum_k} \pi_{i_k}^{(k)}(v_\lambda^{(k)}),$$

što je direktna suma elemenata komponenti $V_{i_k}^{(k)}$ koprodukta $\coprod_{k \in K} V_{i_k}^{(k)}$. Budući da je ta suma direktna imamo:

$$\pi_i^V(v_\lambda) = 0 \Rightarrow (\forall k)(\pi_{i_k}^{(k)}(v_\lambda^{(k)}) = 0).$$

Slijedi da je za svaki $i \in I$ skup $\{(\lambda, k) \mid \pi_i^V(v_\lambda^{(k)}) \neq 0\}$ konačan, to jest suma $\sum_{\lambda,k} v_\lambda^{(k)}$ je formalna suma iste vrijednosti kao $\sum_\lambda v_\lambda$, a čiji su svi sumandi elementi komponenti $V^{(k)}$. Svaka podsuma formalne sume je formalna suma pa je za svaki k suma $\sum_\lambda v_\lambda^{(k)}$ formalna suma u $\hat{V}$ i njeni su sumandi svi unutar jedne komponente $V^{(k)}$. Označimo li njenu vrijednost s $v^{(k)}$, budući da je svaki $V^{(k)}$ potpun, vrijedi $v^{(k)} \in V^{(k)}$. Sada grupiranjem sumanada dobivamo da je suma $\sum_k v^{(k)}$ formalna suma vrijednosti jednake prethodnima,

$$\sum_\lambda v_\lambda = \sum_{k,\lambda} v_\lambda^{(k)} = \sum_k (\sum_\lambda v_\lambda^{(k)}) = \sum_k v^{(k)}.$$

Formalna suma $\sum_k v^{(k)}$ sadrži netrivijalne sumande iz najviše konačno mnogo komponenti $V^{(k)}$, jer u protivnom bismo mogli pronaći komponentu $V_i = \coprod_{k \in K} V_{i_k}^{(k)}$ kofiltracije tako da se beskonačno mnogo sumanada te formalne sume projicira u netrivijalne elemente te komponente. Dakle, to je konačna suma elemenata od V i time je njena vrijednost unutar $V = \coprod_k V^{(k)}$, pa slijedi da je vrijednost početne formalne sume u V.

Dokazali smo time da $V \subseteq \hat{V}$ sadrži vrijednosti svih formalnih suma sa sumandima u V, pa je po propoziciji 3.4.8 V potpun. Time je dokazano $V \cong \lim \boldsymbol{V}$. Nadalje, iako se vidi da su kanonska preslikavanja $\iota^{(k)}\colon V^{(k)} \to V$ u koprodukt u Vect inducirana kanonskim predmorfizmima $\boldsymbol{V}^{(k)} \to \boldsymbol{V}$,

$$\begin{tikzcd}
V^{(k)} \arrow[r, "\iota^{(k)}"] \arrow[d, "\pi^{(k)}_{i_k}"] & \coprod_{k\in K} V^{(k)} \arrow[d, "\coprod_{k\in K}\pi^{(k)}_{i_k}"] \\
V^{(k)}_{i_k} \arrow[r, "\iota^{(k)}_{i_k}"] & \coprod_{k\in K} V^{(k)}_{i_k}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Napomena 3.4.19. Za koprodukt familije indeksirane skupom kardinaliteta $\leqslant \aleph_0$ u kategoriji $\mathrm{proVect} \cong \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ može se uzeti i sljedeći kofiltrirani vektorski prostor. Neka je $\{V^{(k)} \cong \lim \boldsymbol{V}^{(k)}\}_{k\in K}$ familija u $\mathrm{proVect}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je indeksna kategorija svake kofiltracije izomorfna s $\mathbb{N}$. Indeksnu kategoriju iz prethodnog dokaza zatim također možemo zamijeniti s u njoj kofinalnom $\mathbb{N}$. Definiramo:

$$V := \coprod_{k\in K} V^{(k)} \text{ u Vect}, \quad \{\iota^{(k)}\colon V^{(k)} \to V\}$$

$$V_n := \coprod_{k\in K} V^{(k)}_n$$

$$\phi_{mn}\colon V_n \to V_m, \quad \phi_{mn} = \coprod_{k\in K} \phi^{(k)}_{mn}$$

Tada je V uz kofiltraciju $(\{V_n\}, \{\phi_{mn}\})$ i komponente $\{\iota^{(k)}\}$ koprodukt u kategoriji $\mathrm{proVect}$ familije $\{V^{(k)}\}_{k\in K}$.

Korolar 3.4.20. *Neka kategorija $\mathcal{V}$ ima kolimese svih dijagrama. Tada kategorija $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ ima kolimese svih dijagrama, a kategorija $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ ima kolimese svih dijagrama čija je domena I usmjeren skup kofinalnosti najviše $\aleph_0$, te kolimese svih dijagrama čija domena I ima prebrojiv skup morfizama $\mathrm{Mor}I$.*

Dokaz. Prva tvrdnja je posljedica propozicija 3.4.1 i 3.4.17 i poznate činjenice da kategorija ima sve koujednačitelje i koprodukte ako i samo ako ima sve kolimese, [MacLane]. Naime, kolimes funktora $F\colon I \to \mathcal{V}$ (u našem slučaju iz male kategorije I) konstruira se kao koujednačitelj u sljedećem dijagramu:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{(s\colon i\to j)\in \mathrm{Mor}I} F(i) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_{i\in I} F(i) \arrow[r, dashed] & C
\end{tikzcd}$$

U tom dijagramu preslikavanja α i β su jedinstvena preslikavanja iz koprodukta inducirana po univerzalnom svojstvu sljedećim preslikavanjima iz komponenti koprodukta: za $s\colon i \to j$ morfizam u I

$$\alpha_s\colon F(i) \stackrel{\mathrm{id}}{\to} F(i) \to \coprod_{i\in I} F(i)$$

$$\beta_s\colon F(i) \stackrel{F(s)}{\to} F(j) \to \coprod_{i\in I} F(i)$$

Lako je provjeriti da je koujednačitelj tog dijagrama upravo kolimes dijagrama F.

Za dokaz druge tvrdnje treba samo dodatno zamijetiti da su oba koprodukta u gornjem dijagramu indeksirana prebrojivim skupom čim se usmjeren skup I kofinalnosti najviše $\aleph_0$ zamijeni svojim kofinalnim podskupom izomorfnim s $\mathbb{N}$ ili čim je $\mathrm{Mor} I$ prebrojiv skup. Oba koprodukta su tada unutar $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ pa je i koujednačitelj unutar $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$. □

Poznato je i lako se pokaže da je koujednačitelj u kategoriji vektorskih prostora paralelnog para $f, g\colon A \to B$ jednak kvocijentnom preslikavanju $B \to B/W$ za $W = \mathrm{Im}(f - g)$.

Propozicija 3.4.21. *(Koujednačitelj u* $\mathrm{proVect}$.*) Neka su* $f, g\colon A \to B$ *dva morfizma u kategoriji* $\mathrm{proVect}$. *Neka je* $B \to B/W$ *njihov koujednačitelj u* Vect, $W = \mathrm{Im}(f - g)$. *Tada je njihov koujednačitelj u* $\mathrm{proVect}$ *jednak kvocijentnom preslikavanju* $B \to B/\hat{W}$.

Dokaz. Neka su kofiltracije na A i B dane s $\boldsymbol{A} = \{(A_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\})$ i $\boldsymbol{B} = (\{(B_n\}_{n\in J}, \{\psi_{mn}\})$ redom i neka su predmorfizmi $(\lambda, \{f_n\}_{n\in J})$ i $(\lambda, \{g_n\}_{n\in J})$ redom inducirani morfizmima f i g. Predmorfizmi su odabrani tako da funkcije λ budu jednake, što je moguće jer je I usmjerena kategorija. Koujednačitelj u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ ta dva predmorfizma je dokazu propozicije 3.4.1 konstruiran po nivoima: za svaki $n \in J$ je $h_n\colon B_n \to C_n$ koujednačitelj u Vect para f_n, g_n i za svaki usporedivi par $m \leqslant n$ je $\tau_{mn}\colon C_n \to C_m$ jedinstveni morfizam koji proizlazi iz univerzalnog svojstva koujednačitelja h_n, tj. jedinstveni morfizam takav da je desni kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\psi_{mn}"] & C_n \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\
A_{\lambda(m)} \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[r, "h_m"] & C_m
\end{tikzcd}$$

Projekcija $\pi^A_{\lambda(n)}$ je epimorfizam pa je koujednačitelj h_n para f_n, g_n jednak koujednačitelju tog para pretkomponiranog s $\pi^A_{\lambda(n)}$ na sljedećem dijagramu: $f_n \circ \pi^A_{\lambda(n)}$, $g_n \circ \pi^A_{\lambda(n)}$. Taj je par zbog sekvencijalne komutativnosti lijevog kvadrata na dijagramu jednak paru $\pi^A_n \circ f$, $\pi^A_n \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\pi^A_{\lambda(n)}"] & B \arrow[d, "\pi^B_n"] & \\
A_{\lambda(n)} \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n
\end{tikzcd}$$

Koujednačitelj u Vect tog para jednak je kvocijentnom preslikavanju

$$B_n \to B_n/\mathrm{Im}(\pi^A_n \circ f - \pi^A_n \circ g),$$

a vrijedi $\mathrm{Im}(\pi^A_n \circ f - \pi^A_n \circ g) = \mathrm{Im}(\pi^A_n \circ (f - g))$ što je jednako $\pi^A_n(\mathrm{Im}(f - g))$. Dakle, konstruirani koujednačitelj u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ po nivoima je dan kvocijentnim preslikavanjima

$$h_n \colon B_n \to B_n/\pi^B_n(\mathrm{Im}(f - g))$$

i preslikavanjima τ_{mn} induciranim među kvocijentima preslikavanjima ψ_{mn}. Po konstrukciji kofiltracije na upotpunjenju potprostora kofiltriranog vektorskog prostora u propoziciji 3.4.5 i po konstrukciji kofiltracije na kvocijentu kofiltriranog vektorskog prostora po svom potpunom potprostoru u propoziciji 3.4.12 vidimo da je dobivena kofiltracija $(\{B_n/\pi^B_n(\mathrm{Im}(f-g))\}_{n\in J}, \{\tau_{mn}\})$ kvocijentna kofiltracija kofiltriranog vektorskog prostora $B/\widehat{\mathrm{Im}(f - g)}$ i da je predmorfizam $(\{h_n\}_{n\in J})$ upravo predmorfizam kofiltracija induciran kvocijentnim preslikavanjem

$$h \colon B \to B/\widehat{\mathrm{Im}(f - g)}.$$

Dakle, kvocijentno preslikavanje h je, uz kvocijentnu kofiltraciju na kodomeni, koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{proVect}$ para f, g. □

Propozicija 3.4.22. *(Filtrirani kolimes u* $\mathrm{proVect}$.*) Neka je* $\boldsymbol{C} = (\{C^{(n)}\}_{n\in K}, \{\phi_{mn}\})$ *usmjereni sustav u kategoriji* $\mathrm{proVect}$, *gdje je* K *usmjeren skup kofinalnosti najviše* $\aleph_0$. *Neka je* W *vektorski potprostor od* $\coprod_{n\in K} C^{(n)}$ *generiran elementima skupa*

$$\{c - e \mid i, j \in K, c \in C^{(i)}, e \in C^{(j)}, (\exists\, k \geqslant i, j)(\phi_{ki}(c) = \phi_{kj}(e))\}.$$

Tada je potprostor W *potpun u* $\coprod_{n\in K} C^{(n)}$, $W = \hat{W}$, *i kolimes u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *tog usmjerenog sustava jednak je* $\coprod_{n\in K} C^{(n)}/W$ *uz kanonsku kvocijentnu kofiltraciju i kanonske komponente univerzalnog kokonusa koje su kompozicija inkluzije i kvocijentnog preslikavanja,*

$$C^{(i)} \hookrightarrow \coprod_{n\in K} C^{(n)} \to \coprod_{n\in K} C^{(n)}/W.$$

Dakle, kolimes usmjerenog sustava u kategoriji $\mathrm{proVect}$ *jednak je kao vektorski prostor kolimesu tog usmjerenog sustava u kategoriji* Vect. *Ako je* $\boldsymbol{C}$ *filtracija u kategoriji* $\mathrm{proVect}$, *komponente univerzalnog kokonusa u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *nad filtracijom* $\boldsymbol{C}$ *su monomorfizmi.*

Dokaz. U dokazu propozicije 3.4.20 objašnjeno je da se kolimes u $\mathrm{proVect}$ konstruira kao koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$

$$\coprod_{(i\leqslant j)} C^{(i)} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \coprod_{k\in K} C^{(k)} \dashrightarrow \coprod_{k\in K} C^{(k)}/\widehat{\mathrm{Im}(\alpha-\beta)}$$

Pritom koristimo činjenicu da je koprodukt u $\mathrm{proVect}$ kao vektorski prostor jednak koproduktu u Vect, koja je dokazana u propoziciji 3.4.18, i opis koujednačitelja u $\mathrm{proVect}$ koji je dan u propoziciji 3.4.21. Preslikavanja α i β dana su komponentama: za svaki par $i \leqslant j$ u K

$$\alpha_{i\leqslant j}\colon C^{(i)} \overset{\mathrm{id}}{\to} C^{(i)} \hookrightarrow \coprod_{k\in K} C^{(k)}, \qquad \beta_{i\leqslant j}\colon C^{(i)} \overset{\phi_{ji}}{\to} C^{(j)} \hookrightarrow \coprod_{k\in K} C^{(k)}$$

Potprostor $\mathrm{Im}(\alpha-\beta)$ generiran je dakle skupom

$$\{c-e \mid i,j\in K, i\leqslant j, c\in C^{(i)}, e\in C^{(j)}, \phi_{ji}(c)=e\}.$$

Lako se vidi da je taj potprostor onda generiran i nešto većim skupom

$$\{c-e \mid i,j\in K, c\in C^{(i)}, e\in C^{(j)}, (\exists\, k\geqslant i,j)(\phi_{ki}(c)=\phi_{kj}(e))\}$$

to jest jednak W.

Dokazujemo sada da je $W=\mathrm{Im}(\alpha-\beta)$ potpun ako je $\boldsymbol{C}$ usmjeren sustav u $\mathrm{proVect}$. S tom svrhom pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je indeksni usmjereni skup tog usmjerenog sustava jednak $\mathbb{N}$, za slučaj da je kofinalnost od K jednaka $\aleph_0$. U slučaju da je manja, tvrdnja slijedi trivijalno. Neka je $\sum_\lambda w_\lambda$ formalna suma u $\hat{W}$ čiji su svi sumandi u W. Lako se vidi da je potprostor W generiran skupom

$$\{c^{(k)}-e^{(k+1)} \mid k\in\mathbb{N}, c^{(k)}\in C^{(k)}, e^{(k+1)}\in C^{(k+1)}, \phi_{(k+1)k}(c^{(k)})=e^{(k+1)}\}.$$

Svaki sumand w_λ je konačna suma takvih generatora, pri čemu generatore koji dolaze iz istog para $C^{(k)}, C^{(k+1)}$ možemo zbrojiti zbog jedinstvenosti veznog morfizma $\phi_{(k+1)k}$. Dakle, svaki sumand w_λ možemo zapisati kao ovakvu konačnu sumu takvih generatora:

$$w_\lambda = (c_\lambda^{(1)}-e_\lambda^{(2)}) + (c_\lambda^{(2)}-e_\lambda^{(3)}) + \ldots + (c_\lambda^{(N_\lambda)}-e_\lambda^{(N_\lambda+1)}).$$

Kao u dokazu propozicije 3.4.18 o koproduktu u $\mathrm{proVect}$ zaključujemo: (i) iz $\pi_i(w_\lambda)=0$ slijedi $\pi_i(c_\lambda^{(1)})=0$, $\pi_i(-e_\lambda^{(2)}+c_\lambda^{(2)})=0$, …, $\pi_i(-e_\lambda^{(N_\lambda)}+c_\lambda^{(N_\lambda)})=0$, $\pi_i(e_\lambda^{(N_\lambda+1)})=0$, (ii) iz toga zatim slijedi da je sljedeća suma formalna i vrijednosti jednake početnoj:

$$\sum_{\lambda,k}(-e_\lambda^{(k)}+c_\lambda^{(k)}),$$

pri čemu je svaki $e_\lambda^{(1)} = 0$, a iz toga (iii) da su sljedeće podsume formalne:

$$\sum_\lambda c_\lambda^{(1)}, \; \sum_\lambda(-e_\lambda^{(2)} + c_\lambda^{(2)}), \ldots, \; \sum_\lambda(-e_\lambda^{(k)} + c_\lambda^{(k)}), \ldots$$

te da je ovo formalna suma vrijednosti jednake početnoj:

$$\sum_k(\sum_\lambda(-e_\lambda^{(k)} + c_\lambda^{(k)})).$$

Označimo vrijednost formalne sume $\sum_\lambda c_\lambda^{(1)}$ s $c^{(1)} \in C^{(1)}$. Vezni morfizam ϕ_{21} distribuira po formalnim sumama pa je i $\sum_\lambda e_\lambda^{(2)} = \sum_\lambda \phi_{21}(c_\lambda^{(1)}) = \phi_{21}(c^{(1)})$ formalna suma. Označimo njenu vrijednost s $e^{(2)}$. Očito je $c^{(1)} - e^{(2)} \in W$. Dalje zaključujemo da je $\sum_\lambda c_\lambda^{(2)}$ formalna suma jer je jednaka zbroju po članovima formalnih suma $\sum_\lambda(-e_\lambda^{(2)} + c_\lambda^{(2)})$ i $\sum_\lambda(e_\lambda^{(2)})$. Daljim analognim zaključivanjem na kraju dobivamo da je početna formalna suma vrijednosti

$$\sum_\lambda w_\lambda = (c^{(1)} - e^{(2)}) + (c^{(2)} - e^{(3)}) + \ldots + (c^{(k)} - e^{(k+1)}) + \ldots$$

pri čemu je svaka razlika $c^{(k)} - e^{(k+1)}$ u W, a iz toga, slično kao u dokazu propozicije 3.4.18 o koproduktu u $\mathrm{proVect}$, da ta suma mora biti konačna. Dakle, početna formalna suma ima vrijednost u W. Po propoziciji 3.4.8 W je potpun potprostor od $\coprod_{n\in\mathbb{N}} C^{(n)}$.

Budući da je tada kolimes u $\mathrm{proVect}$ kao vektorski prostor jednak kolimesu u Vect, komponente univerzalnog kokonusa su injekcije, jer su u Vect injekcije po propoziciji 3.1.9. Te komponente su onda monomorfizmi u $\mathrm{proVect}$ po propoziciji 3.4.15.

□

3.4.5 Tenzorski produkt monomorfizama je monomorfizam

Propozicija 3.4.23. *Upotpunjeni tenzorski produkt dvaju monomorfizama u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *odnosno* $\mathrm{proVectFin}$ *je monomorfizam. Jezgra upotpunjenog tenzorskog produkta* $f \hat{\otimes} g$ *morfizma* f *i monomorfizma* g *u* $\mathrm{proVect}$ *odnosno* $\mathrm{proVectFin}$ *je upotpunjeni tenzorski produkt jezgre morfizma* f *i domene monomorfizma* g.

Dokaz. Neka su $f\colon V \to Z$ i $g\colon W \to T$ monomorfizmi kofiltriranih vektorskih prostora. Dokazat ćemo da je $f \hat{\otimes} \mathrm{id}$ monomorfizam, gdje je $\mathrm{id}\colon W \to W$ identiteta. Analogno bi se dokazalo da je $\mathrm{id} \hat{\otimes} g$ monomorfizam, iz čega bi slijedilo da je $f \hat{\otimes} g = (f \hat{\otimes} \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \hat{\otimes} g)$ monomorfizam.

Neka su $\{e_\alpha\}_\alpha$, $\{e'_\beta\}_\beta$ formalne baze redom za V i W. Tada je $\{e_\alpha \otimes e'_\beta\}_{(\alpha,\beta)}$ formalna baza za $V \hat{\otimes} W$ po propoziciji 3.3.14. Pretpostavimo da je $v \in V \hat{\otimes} W$ takav da je $(f \hat{\otimes} \mathrm{id})(v) = 0$ i neka je izraz $\sum_{\alpha,\beta} t_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e'_\beta$ formalna suma s vrijednosti v.

Tada je za svaki β izraz $\sum_\alpha t_{\alpha\beta}e_\alpha$ također formalna suma. Zaista, za proizvoljan fiksirani β postoji j takav da je $\pi_j^W(e'_\beta) \neq 0$. Za svaki $i \in I$ je skup $\{\alpha \mid t_{\alpha\beta}\pi_i^V(e_\alpha) \otimes \pi_j^W(e'_\beta) \neq 0\}$ konačan, pa jer je $\pi_j^W(e'_\beta) \neq 0$ mora biti skup $\{\alpha \mid t_{\alpha\beta}\pi_i^V(e_\alpha) \neq 0\}$ konačan.

Označimo sada za svaki β s v_β vrijednost te formalne sume $\sum_\alpha t_{\alpha\beta}e_\alpha$. Tada je $\sum_\beta v_\beta \otimes e'_\beta$ također formalna suma i vrijednost joj je jednaka vrijednosti početne sume. Preslikavanje $f \hat{\otimes} \mathrm{id}$ distribuira po formalnim sumama pa je $0 = \sum_\beta f(v_\beta) \otimes e'_\beta$. Postoji j takav da bazu od W_j čine slike po π_j^W elemenata baze $\{e_\beta\}_\beta$ koji se ne preslikaju u 0 i takav da je $\pi_j^W(e'_\beta) \neq 0$. Budući da je tada

$$\bar{\sum_\beta} \pi_k^V(f(v_\beta)) \otimes \pi_j^W(e'_\beta) = 0,$$

a skup svih $\pi_j^W(e'_\beta) \neq 0$ je linearno nezavisan, proizlazi da je $\pi_k^V(f(v_\beta)) = 0$. To vrijedi za svaki k, pa je $f(v_\beta) = 0$. Iz toga slijedi $v_\beta = 0$ jer je f monomorfizam i monomorfizmi u $\mathrm{proVect}$ su injekcije po propoziciji 3.4.15.

Slično se dokazuje druga tvrdnja propozicije. Neka je f morfizam $V \to Z$ u $\mathrm{proVect}$ i g monomorfizam $W \to T$ u $\mathrm{proVect}$. Dokazujemo da je

$$\mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} g) = \mathrm{Ker}(f) \hat{\otimes} W.$$

Vrijedi $f \hat{\otimes} g = \mathrm{id} \hat{\otimes} g \circ f \hat{\otimes} \mathrm{id}$, a po prethodnome dokazanom $\mathrm{id} \hat{\otimes} g$ je monomorfizam. Jezgra monomorfizma je trivijalna pa je $\mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} g) = \mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} \mathrm{id})$. Dovoljno je dakle dokazati $\mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f) \hat{\otimes} W$. Očito je $\mathrm{Ker}(f) \hat{\otimes} W \subseteq \mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} \mathrm{id})$. Dokazujemo $\mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \hat{\otimes} W$. Jednako kao u dokazu prethodne tvrdnje zaključi se da za svaki $v \in V \hat{\otimes} W$, $v = \sum_\beta v_\beta \otimes e'_\beta$, takav da je $(f \hat{\otimes} \mathrm{id})(v) = 0$ vrijedi $f(v_\beta) = 0$ za svaki β. Dakle, vrijedi $\mathrm{Ker}(f \hat{\otimes} \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \hat{\otimes} W$.

□

Poglavlje 4

Kategorija $\mathrm{indVect}$ filtriranih vektorskih prostora

4.1 Definicije

U poglavlju prije prethodnog definirani su usmjereni sustav u $\mathcal{V}$, predmorfizmi usmjerenih sustava i njihova kompozicija, morfizmi usmjerenih sustava i njihova kompozicija, te kategorija usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$. Kategorija usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$ je ekvivalentna kategoriji poopćenih usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$, a ona je ekvivalentna kategoriji ind-objekata u $\mathcal{V}$, pa je označavamo s $\mathrm{Ind}\mathcal{V}$.

4.1.1 Kategorija $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ filtracija u $\mathcal{V}$

Definicija 4.1.1. *Filtracija* je usmjereni sustav kod kojeg su sva vezna preslikavanja monomorfizmi. *Morfizam filtracija* je morfizam usmjerenih sustava.

Kategorija filtracija u kategoriji $\mathcal{V}$ je puna potkategorija kategorije usmjerenih sustava $\mathrm{Ind}\mathcal{V}$ čiji su objekti filtracije u $\mathcal{V}$. Označavamo je s $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$.

Definicija 4.1.2. $\aleph_0$-*filtracija* je filtracija čija je indeksna kategorija kofilnalnosti najviše $\aleph_0$.

Kategoriju $\aleph_0$-filtracija u kategoriji $\mathcal{V}$ označavamo s $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$.

4.1.3. Kategorija $\mathcal{V}$ je puna potkategorija kategorije filtracija u $\mathcal{V}$. Imamo sljedeći niz ulaganja kategorija

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Ind}\mathcal{V},$$

pri čemu je prvo ulaganje pridruživanje odgovarajuće konstantne filtracije objektu iz $\mathcal{V}$.

Propozicija 4.1.4. *Svaka filtracija u* Vect *(odnosno* $\mathrm{VectFin}$*) ima kolimes u* Vect. *Sve su komponente kolimesa filtracije monomorfizmi.*

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ filtracija u Vect. Za prvu tvrdnju vidi propoziciju 2.4.3 o egzistenciji filtriranih kolimesa u Set i Vect. Dokazujemo drugu tvrdnju. Označimo s $\iota_i \colon V_i \to \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ komponente univerzalnog kokonusa. Pretpostavimo da za $v, w \in V_i$ vrijedi $\iota_i(v) = \iota_i(w)$. Po propoziciji 2.4.3 to vrijedi ako i samo ako postoji $k \in I$ takav da je $\phi_{ki}(v) = \phi_{ki}(w)$. Budući da je svaki vezni morfizam filtracije injekcija, slijedi $v = w$. Dakle, svaka je komponenta univerzalnog kokonusa injekcija. □

4.1.4.1. Često pišemo za $\iota_i(v) \in \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ umjesto $[v]$ jednostavno v.

4.1.2 Kategorija $\mathrm{indVect}$ filtriranih vektorskih prostora

Definicija 4.1.5. *Filtrirani vektorski prostor* je vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{V}$ u Vect takvom da je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$.

Filtrirani vektorski prostor $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ zadan je dakle komponentama $V_i := \boldsymbol{V}(i)$, veznim preslikavanjima $\phi_{ji} \colon V_i \to V_j := \boldsymbol{V}(i \to j)$ filtracije, vrhom univerzalnog kokonusa V nad tom filtracijom i komponentama kokonusa $\iota_i^V \colon V_i \to V$. Po propoziciji 4.1.4 sve su te komponente kokonusa monomorfizmi, a zovemo ih injekcije.

4.1.5.1. Ovdje nije nužno da se ograničimo u definiciji na $\aleph_0$-filtracije. Svi teoremi u ovom poglavlju vrijede za cijelu kategoriju filtracija u Vect. Ograničenja su tu samo zbog toga što su takva ograničenja nužna za kategoriju kofiltriranih vektorskih prostora. Naime, bez ograničavanja na $\aleph_0$-kofiltracije ne vrijedi nužno da je limes kofiltracije neprazan i ne vrijede mnogi nužni teoremi. Ograničenja su ovdje u svrhu simetrije: dual filtriranog vektorskog prostora bit će kofiltrirani vektorski prostor i obratno. Za sve te kategorije vrijedit će teoremi koje priželjkujemo.

Definicija 4.1.6. *Morfizam filtriranih vektorskih prostora* $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$, gdje su filtracije dane sa $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{V_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$, je svako linearno preslikavanje $f \colon V \to W$ takvo da za svaki $i \in I$ postoji $j \in J$ i linearno preslikavanje $f_{ji} \colon V_i \to W_j$ za koje je sljedeći dijagram komutativan:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
V_i \arrow[u, hook, "\iota_i^V"] \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[u, hook, "\iota_j^W"']
\end{tikzcd}
$$

to jest, simbolima, takvo da vrijedi $(\forall i \in I)(\exists j \in J)(\exists f_{ji} \colon V_i \to W_j)(\iota_j^W \circ f_{ji} = f \circ \iota_i^V)$.

Očito je kompozicija $g \circ f$ morfizama filtriranih vektorskih prostora f i g morfizam filtriranih vektorskih prostora. Kategoriju filtriranih vektorskih prostora i morfizama filtriranih vektorskih prostora označavamo s $\mathrm{indVect}$. Njenu punu potkategoriju filtriranih vektorskih prostora čije filtracije su objekti kategorije $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$, tj. imaju konačno-dimenzionalne komponente, označavamo s $\mathrm{indVectFin}$.

Propozicija 4.1.7. *Svaki morfizam filtriranih vektorskih prostora inducira jedinstveni morfizam odgovarajućih $\aleph_0$-filtracija vektorskih prostora i obratno na sljedeći način:*

(i) Neka je $f\colon V \to W$ morfizam filtriranih vektorskih prostora i neka su filtracije na njima dane s $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$. Definiramo skup

$$H(f) := \{f_{ji}\colon V_i \to W_j \mid i \in I, j \in J, \iota^W_j \circ f_{ji} = f \circ \iota^V_i\}.$$

Tada svaki izbor podfamilije oblika $\{f_{\lambda(i)i}\colon V_i \to W_{\lambda(i)}\}_{i\in I} \subseteq H(f)$ definira predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i svaka dva takva izbora definiraju ekvivalentne predmorfizme. Pridruživanje koje morfizmu f filtriranih vektorskih prostora na ovaj način pridruži morfizam filtracija poštuje kompoziciju.

(ii) Svaki predmorfizam $\aleph_0$-filtracija $\{f_{\lambda(i)i}\colon V_i \to W_{\lambda(i)}\}_{i\in I}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ određuje jedinstveno preslikavanje $f\colon V \to W$ među kolimesima $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$, $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ tih filtracija takvo da je za svaki $i \in I$

$$\iota^W_{\lambda(i)} \circ f_{\lambda(i)i} = f \circ \iota^V_i.$$

Ekvivalentni predmorfizmi određuju isto preslikavanje f. Pridruživanje koje morfizmu filtracija na ovaj način pridruži morfizam filtriranih vektorskih prostora poštuje kompoziciju.

Ta dva pridruživanja su međusobno inverzna.

Dokaz. (i) Za svaki $i \in I$ označimo s $K(i)$ skup indeksa $j \in J$ za koje postoji linearno preslikavanje $f_{ji}\colon V_i \to W_j$ takvo da je $\iota^W_j \circ f_{ji} = f \circ \iota^V_i$. Svaki skup $K(i)$ je neprazan jer je f morfizam filtriranih vektorskih prostora. Svako preslikavanje f_{ji} je jedinstveno određeno parom (i, j) jer su komponente kokonusa ι^W_j monomorfizmi. Dokazujemo da za svako vezno preslikavanje $\phi_{ki}\colon V_i \to V_k$ vrijedi da za svaka dva preslikavanja f_{ji} i f_{lk} koja pripadaju skupu $H(f)$ s domenama V_i i V_k postoji $n \in J$ takav da je sljedeći peterokut komutativan:

$$\begin{tikzcd}
V_k \arrow[r, "f_{lk}"] & W_l \arrow[dr, dashed, "\psi_{nj}"] & \\
 & & W_n \\
V_i \arrow[uu, "\phi_{ki}"] \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[ur, dashed, "\psi_{nl}"'] &
\end{tikzcd}$$

Neka je $n \in J$ takav da je $n \geqslant j$ i $n \geqslant l$. Na sljedećem dijagramu su komutativna oba desna bočna trokuta (kokonus s vrhom W), lijevi bočni trokut (konus s vrhom V), prednji i stražnji četverokut i ι_n^W je monomorfizam, pa je i donji peterokut komutativan.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W & \\
V_k \arrow[u, "\iota_k^V"'] \arrow[r, "f_{lk}"] & W_l \arrow[u, "\iota_l^W"] \arrow[dr, "\psi_{nl}"] & \\
& & W_n \arrow[uul, "\iota_n^W"'] \\
V_i \arrow[uu, "\phi_{ki}"'] \arrow[uuu, bend left, "\iota_i^V"] \arrow[r, "f_{ji}"] & W_j \arrow[ur, "\psi_{nj}"'] \arrow[uuu, bend right, "\iota_j^W"'] &
\end{tikzcd}$$

Opširnije, vrijedi

$$\begin{aligned}
\iota_n^W \circ \psi_{nl} \circ f_{lk} \circ \phi_{ki} &= \iota_l^W \circ f_{lk} \circ \phi_{ki} \\
&= f \circ \iota_k^V \circ \phi_{ki} \\
&= f \circ \iota_i^V \\
&= \iota_j^W \circ f_{ji} \\
&= \iota_n^W \circ \psi_{nj} \circ f_{ji}
\end{aligned}$$

i ι_n^W je monomorfizam pa slijedi

$$\psi_{nl} \circ f_{lk} \circ \phi_{ki} = \psi_{nj} \circ f_{ji}.$$

Za svaki $i \in I$ odaberimo $\lambda(i) \in K(i)$. Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi da je $(\lambda, \{f_{\lambda(i)i}\})$ predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$. Također, prethodno dokazana tvrdnja za $k = i$ pokazuje da su svaka takva dva predmorfizma ekvivalentna. Time je morfizmu f filtriranih vektorskih prostora pridružen na kanonski način morfizam odgovarajućih filtracija. Dokazujemo sada da to pridruživanje poštuje kompoziciju. Neka su $f\colon V \to W$ i $g\colon W \to Z$ morfizmi filtriranih vektorskih prostora $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$, $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ i $Z \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{Z}$. Za predmorfizme $(\lambda, \{f_{\lambda(i)i}\})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $(\mu, \{g_{\mu(k)k}\})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ odabrane na prethodni način vrijedi da je njihova kompozicija

$$(\mu \circ \lambda, \{g_{\mu(\lambda(i))\lambda(i)} \circ f_{\lambda(i)i}\})$$

predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{Z}$ takav da za svaki $i \in I$ vrijedi

$$\iota^Z_{\mu(\lambda(i))} \circ g_{\mu(\lambda(i))\lambda(i)} \circ f_{\lambda(i)i} = g \circ \iota^W_{\lambda(i)} \circ f_{\lambda(i)i} = g \circ f \circ \iota_i^V.$$

Komponente tog predmorfizma nalaze se dakle unutar skupa

$$H(g \circ f) = \{\, h_{ki}\colon V_i \to Z_k \mid \iota_k^Z \circ h_{ki} = g \circ f \circ \iota_i^V \},$$

pa je predmorfizam pridružen kompoziciji $g \circ f$ ekvivalentan kompoziciji predmorfizama pridruženih f i g. Dakle, kompoziciji morfizama filtriranih vektorskih prostora $g \circ f$ bit će pridružena kompozicija odgovarajućih morfizama filtracija.

(ii) Obratno, neka je dan morfizam $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ filtracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$ svojim predstavnikom $(\lambda, \{f_i \colon V_i \to W_{\lambda(i)}\})$. Dokazujemo da je tada s

$$\{\iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i \colon V_i \to W\}_{i \in I}$$

definiran kokonus nad $\boldsymbol{V}$ s vrhom W. Za svaki vezni morfizam $\phi_{ki} \colon V_i \to V_k$ postoji gornja međa n para $\lambda(i)$, $\lambda(k)$ u J takva da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
V_k \arrow[r, "f_k"] & W_{\lambda(k)} \arrow[dr, dashed, "\psi_{n\lambda(k)}"] & \\
 & & W_n \\
V_i \arrow[uu, "\phi_{ki}"] \arrow[r, "f_i"] & W_{\lambda(i)} \arrow[ur, dashed, "\psi_{n\lambda(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Budući da su ι^W_i komponente kokonusa nad $\boldsymbol{W}$ iz prethodnog slijedi

$$\iota^W_{\lambda(k)} \circ f_k \circ \phi_{ki} = \iota^W_n \circ \psi_{n\lambda(k)} \circ f_k \circ \phi_{ki} = \iota^W_n \circ \psi_{n\lambda(i)} \circ f_i = \iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i.$$

Dakle, familijom $\{\iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i\}_{i \in I}$ je definiran kokonus nad $\boldsymbol{V}$ s vrhom W pa po univerzalnom svojstvu kolimesa ona određuje jedinstveno linearno preslikavanje $f \colon V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V} \to W$ takvo da je za svaki $i \in I$

$$f \circ \iota^V_i = \iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i.$$

Očito je f morfizam filtriranih vektorskih prostora. Uz to, vrijedi da je $f_i \in H(f)$ za svaki $i \in I$ pa iz toga i jedinstvenosti preslikavanja f s tim svojstvom slijedi da je ovo pridruživanje inverzno prethodnom pridruživanju.

Dokazujemo sada da ekvivalentni predmorfizmi na ovaj način definiraju isti kokonus i time isto preslikavanje f. Neka je $(\mu, \{g_i \colon V_i \to W_{\mu(i)}\})$ predmorfizam ekvivalentan f. Za svaki $i \in I$ postoji gornja međa n para $\lambda(i)$, $\mu(i) \in J$ takva da je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{tikzcd}
 & W_{\lambda(i)} \arrow[dr, dashed, "\psi_{n\lambda(i)}"] & \\
V_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & W_n \\
 & W_{\mu(i)} \arrow[ur, dashed, "\psi_{n\mu(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

pa vrijedi

$$\iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i = \iota^W_n \circ \psi_{n\lambda(i)} \circ f_i = \iota^W_n \circ \psi_{n\mu(i)} \circ g_i = \iota^W_{\mu(i)} \circ g_i.$$

Dakle, ekvivalentni predmorfizmi filtracija definiraju isto preslikavanje filtriranih prostora. Time je na kanonski način svakom morfizmu filtracija pridružen morfizam odgovarajućih filtriranih vektorskih prostora.

Dokazujemo sada da to pridruživanje poštuje kompoziciju. Neka su $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i $(\mu, \{g_j\}_{j\in J})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ dva predmorfizma filtracija. Oni određuju jedinstvena preslikavanja f i g takva da vrijedi $f \circ \iota^V_i = \iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i$ i $g \circ \iota^W_j = \iota^Z_{\mu(j)} \circ g_j$. Slijedi da za njihovu kompoziciju

$$(\mu \circ \lambda, \{g_{\lambda(i)} \circ f_i\}_{i\in I})$$

za svaki $i \in I$ vrijedi

$$\iota^Z_{\mu(\lambda(i))} \circ g_{\lambda(i)} \circ f_i = g \circ \iota^W_{\lambda(i)} \circ f_i = g \circ f \circ \iota^V_i.$$

Pridruženo jedinstveno linearno preslikavanje $h\colon V \to Z$ takvo da je $\iota^Z_{\mu(\lambda(i))} \circ g_{\lambda(i)} \circ f_i = h \circ \iota^V_i$ za svaki $i \in I$ nužno je tada jednako $g \circ f$. Dakle, kompoziciji dva predmorfizma filtracija pridružena je kompozicija odgovarajućih morfizama filtriranih vektorskih prostora.

Pridruživanja su očito inverzna. $\square$

Za dva međusobno pridružena morfizma filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i filtriranih vektorskih prostora $V \to W$ iz prethodne propozicije kažemo da su inducirani jedan drugim. Elemente skupa $H(f)$ zovemo komponente tog morfizma filtracija odnosno tog morfizma filtriranih vektorskih prostora.

Korolar 4.1.8. *Pridruživanje koje svakoj $\aleph_0$-filtraciji $\boldsymbol{V}$ u* Vect *pridruži njen kolimes* $\mathrm{colim}\,\boldsymbol{V}$ *u* Vect*, a svakom morfizmu $\aleph_0$-filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ njime induciran morfizam filtriranih vektorskih prostora* $\mathrm{colim}\,\boldsymbol{V} \to \mathrm{colim}\,\boldsymbol{W}$ *je funktor koji je ekvivalencija kategorije $\aleph_0$-filtracija vektorskih prostora i kategorije filtriranih vektorskih prostora:*

$$\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect} \cong \mathrm{indVect}.$$

Potkategorija $\aleph_0$-filtracija u $\mathrm{VectFin}$ *ekvivalentna je potkategoriji filtriranih vektorskih prostora s konačno-dimenzionalnim komponentama,*

$$\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin} \cong \mathrm{indVectFin}.$$

4.1.9. Zamijetimo da postoji kanonsko ulaganje kategorija $\mathrm{Vect} \hookrightarrow \mathrm{indVect}$ (vektorski prostor s konstantnom filtracijom) i zaboravni funktor $\mathrm{indVect} \to \mathrm{Vect}$ (zaboravlja filtraciju). Oba funktora su vjerna, tj. injekcije na skupovima morfizama. Slično je s ulaganjem $\mathrm{VectFin} \hookrightarrow \mathrm{indVectFin}$ i zaboravnim funktorom $\mathrm{indVectFin} \to \mathrm{Vect}$.

4.1.3 Kategorija filtriranih skupova

Analogne propozicije vrijede i za $\aleph_0$-filtracije u Set i filtrirane skupove. Ove definicije su potrebne da bismo mogli definirati bilinearni morfizam filtracija u Vect.

Definicija 4.1.10. *Filtrirani skup* je skup S zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{S}$ u Set takvom da je $S \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{S}$. *Morfizam filtriranih skupova* $S \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{S}$ i $T \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{T}$, gdje su filtracije dane s $\boldsymbol{S} = (\{S_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{T} = (\{T_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$, je svako preslikavanje $f \colon S \to T$ skupova sa svojstvom

$$(\forall i \in I)(\exists j \in J)(\exists f_{ji} \colon S_i \to T_j)(f \circ \iota_i^S = \iota_j^T \circ f_{ji}).$$

Propozicija 4.1.11. *Svaka filtracija skupova ima kolimes u* Set. *Svaka komponenta kolimesa filtracije skupova je monomorfizam.*

Propozicija 4.1.12. *Svaki morfizam $\aleph_0$-filtracija $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{T}$ skupova inducira jedinstveni morfizam $S \to T$ filtriranih skupova $S \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{S}$ i $T \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{T}$ i obratno. Pridruživanja su međusobno inverzna i poštuju kompoziciju.*

Dokaz. Dokaz je potpuno analogan dokazu propozicije 4.1.7 za kategoriju Vect. $\square$

Korolar 4.1.13. *Pridruživanje koje svakom filtriranom skupu $S \cong \lim \boldsymbol{S}$ pridruži njegovu filtraciju $\boldsymbol{S}$, a svakom morfizmu filtriranih skupova $f \colon S \to T$ inducirani morfizam njihovih filtracija je funktor koji je ekvivalencija kategorije filtriranih skupova i kategorije $\aleph_0$-filtracija skupova,*

$$\mathrm{indSet} \cong \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Set}.$$

Definicija 4.1.14. *Kartezijev produkt filtracija* $\boldsymbol{S} = (\{S_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{T} = (\{T_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$ u kategoriji Set je filtracija $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} := (\{S_i \times T_j\}_{(i,j) \in I \times J}, \{\phi_{ki} \times \psi_{lj}\})$.

Lako se provjeri da je prethodna definicija dobra, tj. da je kartezijev produkt monomorfizama opet monomorfizam.

Definicija 4.1.15. Neka su $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ i $\boldsymbol{Z}$ filtracije u kategoriji Vect. Za morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}$ u Set kažemo da je *bilinearan* ako su sve njegove komponente bilinearna preslikavanja.

Dovoljno je da sve komponente nekog predmorfizma budu bilinearne da bi komponente svakog predmorfizma bile bilinearne.

4.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indVect}$

4.2.1 Proširenje tenzorskog produkta s $\mathcal{V}$ na kategoriju $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$

Definicija 4.2.1. Neka je $(\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija u kojoj je tenzorski produkt svaka dva monomorfizma monomorfizam. Za dvije filtracije $\boldsymbol{V}\colon I \to \mathcal{V}$, $\boldsymbol{W}\colon J \to \mathcal{V}$ definiramo *tenzorski produkt filtracija* $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}\colon I \times J \to \mathcal{V}$ kao kompoziciju

$$I \times J \xrightarrow{(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{V}.$$

Tenzorski produkt morfizama filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ i $\boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$, čiji su predstavnici redom predmorfizmi $f = (\lambda, \{f_i\}_{i\in I})$ i $g = (\mu, \{g_j\}_{j\in J})$, je morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V'} \otimes \boldsymbol{W'}$ zadan predmorfizmom $f \otimes g := (\lambda \times \mu, \{f_i \otimes g_j\}_{(i,j)\in I\times J})$.

Dakle, tenzorski produkt $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ filtracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$ zadan je komponentama

$$\{V_i \otimes W_j\}_{(i,j)\in I\times J}$$

i veznim morfizmima

$$\{\phi_{ki} \otimes \psi_{lj}\colon V_i \otimes W_j \to V_k \otimes W_l\}_{(i\to k, j\to l)\in \mathrm{Mor}(I\times J)}.$$

Na isti način može se definirati tenzorski produkt na cijeloj kategoriji $\mathrm{Ind}\,\mathcal{V}$ usmjerenih sustava u $\mathcal{V}$. Mi ćemo pokazati da je prethodna definicija dobra i da je $(\mathrm{Ind}^s\,\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija, a dijelovi dokaza koji slijede impliciraju isto za kategoriju $(\mathrm{Ind}\,\mathcal{V}, \otimes, k)$.

Propozicija 4.2.2. *Definicija tenzorskog produkta filtracija i morfizama filtracija je dobra, tj. vrijedi sljedeće.*

(i) Tenzorski produkt filtracija je filtracija.

(ii) Tenzorski produkt morfizama filtracija je dobro definiran morfizam filtracija.

Dokaz. (i) Očito je time zadan usmjereni sustav, a svaki vezni morfizam je monomorfizam jer je tenzorski produkt dva monomorfizma u $\mathcal{V}$ monomorfizam.

(ii) Tvrdnja slijedi direktno iz funktorijalnosti tenzorskog produkta. Detaljnije, neka su dane filtracije $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$ te filtracije $\boldsymbol{V'} = (\{V'_i\}_{i\in I'}, \{\phi'_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W'} = (\{W'_j\}_{j\in J'}, \{\psi'_{lj}\})$. Neka su dana dva predmorfizma $f = (\lambda, \{f_i\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ i $g = (\mu, \{g_j\}_{j\in J})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$. Dokazujemo da je tada $f \otimes g = (\lambda \times \mu, \{f_i \otimes g_j\}_{(i,j)\in I\times J})$ predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V'} \otimes \boldsymbol{W'}$.

Budući da su f i g predmorfizmi filtracija, za svaki par $i \leqslant k$ u I postoji gornja međa p od $\lambda(i)$ i $\lambda(k)$ u I' i za svaki par $j \leqslant l$ u J postoji gornja međa r od $\mu(j)$ i $\mu(l)$ u J' takve da su sljedeća dva peterokuta komutativna:

$$
\begin{tikzcd}
V_k \arrow[r, "f_k"] & V'_{\lambda(k)} \arrow[dr, "\phi'_{p\lambda(k)}"] & \\
& & V'_p \\
V_i \arrow[uu, "\phi_{ki}"] \arrow[r, "f_i"'] & V'_{\lambda(i)} \arrow[ur, "\phi'_{p\lambda(i)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W_l \arrow[r, "g_l"] & W'_{\mu(l)} \arrow[dr, "\psi'_{r\mu(l)}"] & \\
& & W'_r \\
W_j \arrow[uu, "\psi_{lj}"] \arrow[r, "g_j"'] & W'_{\mu(j)} \arrow[ur, "\psi'_{r\mu(j)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta iz toga slijedi komutativnost ovog peterokuta:

$$
\begin{tikzcd}
V_k \otimes W_l \arrow[r, "f_k \otimes g_l"] & V'_{\lambda(k)} \otimes W'_{\mu(l)} \arrow[dr, "\phi'_{p\lambda(k)} \otimes \psi'_{r\mu(l)}"] & \\
& & V'_p \otimes W'_r \\
V_i \otimes W_j \arrow[uu, "\phi_{ki} \otimes \psi_{lj}"] \arrow[r, "f_i \otimes g_j"'] & V'_{\lambda(i)} \otimes W'_{\mu(j)} \arrow[ur, "\phi'_{p\lambda(i)} \otimes \psi'_{r\mu(j)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Za svaki par (i, j) i (k, l) u $I \times J$ postoji dakle gornja međa (p, r) od $(\lambda(i), \mu(j))$ i $(\lambda(k), \mu(l))$ u $I' \times J'$ takva da je prethodni dijagram komutativan, tj. dokazano je da je $f \otimes g$ predmorfizam filtracija.

Neka su sada dana još dva predmorfizma $f' = (\lambda', \{f'_i\}_{i \in I})$ i $g' = (\mu', \{g'_j\}_{j \in J})$ ekvivalentna redom predmorfizmima f i g. Dokazujemo da je tada predmorfizam $f' \otimes g' = (\lambda' \times \mu', \{f'_i \otimes g'_j\}_{(i,j) \in I \times J})$ ekvivalentan predmorfizmu $f \otimes g$.

Budući da je $f \sim f'$ i $g \sim g'$, za svaki $i \in I$ postoji gornja međa p od $\lambda(i)$ i $\lambda'(i)$ u I' i za svaki $j \in J$ postoji gornja međa r od $\mu(j)$ i $\mu'(j)$ u J' takve da su sljedeća dva četverokuta komutativna:

$$
\begin{tikzcd}
& V'_{\lambda(i)} \arrow[dr, "\phi'_{p\lambda(i)}"] & \\
V_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f'_i"'] & & V'_p \\
& V'_{\lambda'(i)} \arrow[ur, "\phi'_{p\lambda'(i)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& W'_{\mu(j)} \arrow[dr, "\psi'_{r\mu(j)}"] & \\
W_j \arrow[ur, "g_j"] \arrow[dr, "g'_j"'] & & W'_r \\
& W'_{\mu'(j)} \arrow[ur, "\psi'_{r\mu'(j)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta iz toga slijedi komutativnost ovog četverokuta:

$$\begin{tikzcd}
 & V'_{\lambda(i)} \otimes W'_{\mu(j)} \arrow[dr, "\phi'_{p\lambda(i)} \otimes \psi'_{r\mu(j)}"] & \\
V_i \otimes W_j \arrow[ur, "f_i \otimes g_j"] \arrow[dr, "f'_i \otimes g'_j"'] & & V'_p \otimes W'_r \\
 & V'_{\lambda'(i)} \otimes W'_{\mu'(j)} \arrow[ur, "\phi'_{p\lambda'(i)} \otimes \psi'_{r\mu'(j)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Za svaki par (i, j) $I \times J$ postoji dakle gornja međa (p, r) od $(\lambda(i), \mu(j))$ i $(\lambda'(i), \mu'(j))$ takva da je prethodni dijagram komutativan, tj. $f' \otimes g'$ je predmorfizam ekvivalentan predmorfizmu $f \otimes g$.

□

Propozicija 4.2.3. *Tenzorski produkt filtracija u $\mathcal{V}$ je bifunktor*

$$\otimes \colon \mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \times \mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Ind}^s\mathcal{V}.$$

Dokaz. Dokaz je jednostavna provjera da tenzorski produkt morfizama filtracija poštuje kompoziciju i paru identiteta pridružuje identitetu. Detaljnije, neka su $f = (\lambda, \{f_i\}_{i \in I}) \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$, $g = (\mu, \{g_i\}_{i \in I'}) \colon \boldsymbol{V'} \to \boldsymbol{V''}$, $d = (\nu, \{d_j\}_{j \in J}) \colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$ i $h = (\kappa, \{h_j\}_{j \in J'}) \colon \boldsymbol{W'} \to \boldsymbol{W''}$ predmorfizmi filtracija. Dokazujemo da vrijedi

$$(g \circ f) \otimes (h \circ d) = (g \otimes h) \circ (f \otimes d).$$

Kompozicije predmorfizama su $g \circ f = (\mu \circ \lambda, \{g_{\lambda(i)} \circ f_i\})$ i $h \circ d = (\kappa \circ \nu, \{h_{\nu(j)} \circ d_j\})$ pa je $(g \circ f) \otimes (h \circ d) = ((\mu \circ \lambda, \kappa \circ \nu), \{(g_{\lambda(i)} \circ f_i) \otimes (h_{\nu(j)} \circ d_j)\})$ što je jednako predmorfizmu $((\mu, \kappa) \circ (\lambda, \nu), \{(g_{\lambda(i)} \otimes h_{\nu(j)}) \circ (f_i \otimes d_j)\}) = (g \otimes h) \circ (f \otimes d)$.

Na kraju, tenzorski produkt dvije identitete je očito identiteta,

$$(\mathrm{id} \times \mathrm{id}, \{\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \colon V_i \otimes W_j \to \ V_i \otimes W_j\}_{(i,j) \in I \times J}).$$

□

Propozicija 4.2.4. *Neka je $(\mathcal{V}, \otimes, k)$ simetrična monoidalna kategorija u kojoj je tenzorski produkt svaka dva monomorfizma monomorfizam. Tada je kategorija filtracija u $\mathcal{V}$, $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$, uz tenzorski produkt filtracija $\otimes$ simetrična monoidalna kategorija:*

$$(\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}, \otimes, k).$$

Njena puna potkategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ je također simetrična monoidalna kategorija. Kanonska ulaganja

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V} \hookrightarrow \mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$$

su jaki monoidalni funktori.

Dokaz. Neka su $\{\alpha_{VWZ}\}$, $\{\lambda_V\}$, $\{\rho_V\}$ i $\{\sigma_{VW}\}$ asocijator, lijevi unitor, desni unitor i simetrizator za simetričnu monoidalnu kategoriju $(\mathcal{V}, \otimes, k)$. Asocijator α je prirodni izomorfizam funktora pa definira izomorfizam filtracija $\boldsymbol{\alpha_{VWZ}}$ po nivoima predmorfizmom $(\mathrm{id}, \{\alpha_{V_iW_jZ_k}\})$:

$$\begin{tikzcd}
(V_l \otimes W_m) \otimes Z_n \arrow[r, "\alpha_{V_lW_mZ_n}"] & V_l \otimes (W_m \otimes Z_n) \\
(V_i \otimes W_j) \otimes Z_k \arrow[u, "(\phi_{li}\otimes\psi_{mj})\otimes\tau_{nl}"] \arrow[r, "\alpha_{V_iW_jZ_k}"] & V_i \otimes (W_j \otimes Z_k) \arrow[u, "\phi_{li}\otimes(\psi_{mj}\otimes\tau_{nl})"]
\end{tikzcd}$$

i familija $\{\boldsymbol{\alpha_{VWZ}}\}$ je prirodna transformacija funktora:

$$\begin{tikzcd}
(V_i' \otimes W_j') \otimes Z_k' \arrow[r, "\alpha_{V_i'W_j'Z_k'}"] \arrow[d, "(f_i\otimes g_j)\otimes h_k"] & V_i' \otimes (W_j' \otimes Z_k') \arrow[d, "f_i\otimes(g_j\otimes h_k)"] \\
(V_{\lambda(i)} \otimes W_{\mu(j)}) \otimes Z_{\nu(k)} \arrow[r, "\alpha_{V_{\lambda(i)}W_{\mu(j)}Z_{\nu(k)}}"] & V_{\lambda(i)} \otimes (W_{\mu(j)} \otimes Z_{\nu(k)})
\end{tikzcd}$$

Na isti način lijevi unitor, desni unitor i simetrizator definiraju prirodne izomorfizme $\{\boldsymbol{\lambda_V}\}$, $\{\boldsymbol{\rho_V}\}$ i $\{\boldsymbol{\sigma_{VW}}\}$. Provjera da komutiraju pentagon asocijatora, trokut unitora i asocijatora, šesterokut simetrizatora i asocijatora i trokut simetrizatora i unitora svodi se na provjeru komutativnosti na svakom nivou, a na svakom nivou dijagram je komutativan jer je jednak odgovarajućem dijagramu u $\mathcal{V}$.

□

4.2.5. Tenzorski produkt $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ dviju filtracija u kategoriji Vect dolazi zajedno s još jednim podatkom: kanonskim bilinearnim morfizmom filtracija $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$.

Lema 4.2.6. *Tenzorski produkt dva monomorfizma u* Vect *(odnosno* $\mathrm{VectFin}$*) je monomorfizam.*

Dokaz. Neka su $f\colon V \to V'$ i $g\colon W \to W'$ monomorfizmi u Vect. Pokazat ćemo da su $f \otimes \mathrm{id}$ i $\mathrm{id} \otimes g$ monomorfizmi, iz čega će slijediti da je i $f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes g)$ monomorfizam. Dovoljno je dokazati da je $f \otimes \mathrm{id}$ monomorfizam, dokaz za $\mathrm{id} \otimes g$ je analogan.

Neka je $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ baza vektorskog prostora V i $\{e'_\beta\}_{\beta\in B}$ baza vektorskog prostora W. Dakle, $\{e_\alpha \otimes e'_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ je baza od $V \otimes W$. Neka je v proizvoljan element od $V \otimes W$,

$$v = \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e'_\beta = \sum_\beta (\sum_\alpha s_{\alpha\beta} e_\alpha) \otimes e'_\beta = \sum_\beta v_\beta \otimes e'_\beta.$$

Pretpostavimo da je $(f \otimes \mathrm{id})(v) = 0$. Dokazujemo da tada vrijedi $v = 0$. Vrijedi

$$0 = (f \otimes \mathrm{id})(v) = \sum_\beta f(v_\beta) \otimes e'_\beta = \sum_\beta \sum_\gamma t_{\beta\gamma} e''_\gamma \otimes e'_\beta$$

gdje je $\sum_\gamma t_{\beta\gamma} e''_\gamma$ zapis od $f(v_\beta)$ u bazi $(e''_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ vektorskog prostora V'. Budući da je onda $\{e''_\gamma \otimes e'_\beta\}_{(\beta,\gamma)\in B\times\Gamma}$ baza vektorskog prostora $V' \otimes W$ slijedi da je za svaki (β, γ) koeficijent $t_{\beta\gamma} = 0$. Dakle, za svaki β je $f(v_\beta) = \sum_\gamma t_{\beta\gamma} e''_\gamma = 0$. Budući da je f monomorfizam, iz toga slijedi da je svaki v_β nulvektor pa je i početni vektor $v = \sum_\beta v_\beta \otimes e'_\beta$ nulvektor. □

Korolar 4.2.7. *Kategorija filtracija u* Vect*,* $\mathrm{Ind}^s\mathrm{Vect}$*, je uz tenzorski produkt filtracija simetrična monoidalna kategorija. Njene pune potkategorije* $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ *i* $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ *također. Kanonski funktori ulaganja*

$$(\mathrm{Vect}, \otimes, k) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}, \otimes, k)$$

$$(\mathrm{VectFin}, \otimes, k) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}, \otimes, k)$$

dani konstrukcijom konstantne filtracije su jaki monoidalni funktori.

4.2.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indVect}$

Lema 4.2.8. *Neka su* $\boldsymbol{V}$ *i* $\boldsymbol{W}$ *usmjereni sustavi u kategoriji* Vect *i* $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$*,* $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ *njihovi kolimesi u* Vect*. Tada je*

$$\operatorname{colim}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}) \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V} \otimes \operatorname{colim} \boldsymbol{W}.$$

Posebno, ako su $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$*,* $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ *filtrirani vektorski prostori, tj.* $\boldsymbol{V}$ *i* $\boldsymbol{W}$ $\aleph_0$*-filtracije, vrijedi* $\operatorname{colim}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}) \cong V \otimes W$*.*

Dokaz. Neka su usmjereni sustavi dani sa $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$. Tenzorski produkti komponenti univerzalnih kokonusa

$$\{\iota^V_i \otimes \iota^W_j : V_i \otimes W_j \to V \otimes W\}_{(i,j)\in I\times J}$$

definiraju kokonus s vrhom $V \otimes W$ nad usmjerenim sustavom

$$\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} := (\{V_i \otimes W_j\}_{(i,j)\in I\times J}, \{\phi_{ki} \otimes \psi_{lj}\}),$$

pa određuju jedinstveno preslikavanje $\phi\colon \operatorname{colim}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}) \to V \otimes W$ takvo da je

$$\phi \circ \iota_{ij} = \iota^V_i \otimes \iota^W_j,$$

gdje su sa ι_{ij} označene komponente kolimesa $V_i \otimes W_j \to \operatorname{colim}(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W})$.

Dalje u dokazu koristimo propoziciju 2.4.3 u kojoj je opisan filtrirani kolimes u kategoriji Vect. Svaki element kolimesa $\operatorname{colim} \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ je klasa ekvivalencije oblika $[\sum v_k \otimes w_k]$ za neki vektor $\sum v_k \otimes w_k$ iz neke komponente $V_i \otimes W_j$. Budući da je $\phi \circ \iota_{ij} = \iota_i^V \otimes \iota_j^W$ vrijedi da je

$$\phi([\sum v_k \otimes w_k]) = \sum [v_k] \otimes [w_k],$$

gdje su $[v_k]$ i $[w_k]$ s desne strane klase ekvivalencija od v_k i w_k kao elementi $\operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $\operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ redom. Dokazat ćemo da je ϕ injekcija i surjekcija.

Pretpostavimo da je $\sum [v_k] \otimes [w_k] = 0$. Zapišimo svaki $[w_k]$ kao linearnu kombinaciju linearno nezavisnih vektora koji razapinju ljusku skupa $\{[w_k]\}_k$,

$$[w_k] = \sum_t \alpha_{kt}[z_t].$$

Tada je

$$\sum [v_k] \otimes [w_k] = \sum_k \sum_t \alpha_{kt}[v_k] \otimes [z_t] = 0$$

iz čega zbog linearne nezavisnosti vektora $\{[z_t]\}_t$ slijedi da je za svaki t

$$\sum_k \alpha_{kt}[v_k] = 0.$$

Dakle, postoji komponenta $V_{i'}$ i predstavnici $v'_k \in V_{i'}$ klasa $[v_k]$ redom takvi da je

$$\sum_k \alpha_{kt} v'_k = 0.$$

Neka su z'_t predstavnici klasa $[z_t]$, svi u istoj komponenti $W_{j'}$. Tada slijedi da je u $V_{i'} \otimes W_{j'}$

$$\sum_t \sum_k \alpha_{kt} v'_k \otimes z'_t = 0.$$

Označimo za svaki k s w'_k sumu $\sum_t \alpha_{kt} z'_t$. Tada je $[w'_k] = [w_k]$ i vrijedi

$$\sum_k v'_k \otimes w'_k = 0.$$

Uz otprije poznato $[v_k] = [v'_k]$ slijedi $[v_k \otimes w_k] = [v'_k \otimes w'_k]$ i

$$[\sum_k v_k \otimes w_k] = [\sum_k v'_k \otimes w'_k] = 0.$$

Dakle, ϕ je injekcija.

Sada dokazujemo da je preslikavanje ϕ surjekcija. Svaki element tenzorskog produkta $\operatorname{colim} \boldsymbol{V} \otimes \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ je oblika $\sum [v_k] \otimes [w_k]$, gdje sve reprezentante v_k možemo pronaći u istom V_i i sve reprezentante w_k u istom W_j. Očito je ovaj element tada slika po ϕ klice $[\sum v_k \otimes w_k]$. $\square$

Lema 4.2.9. *Neka su $f\colon V \to V'$ i $g\colon W \to W'$ morfizmi filtriranih vektorskih prostora inducirani predmorfizmima njihovih filtracija $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V'}$ i $(\mu, \{g_j\}_{j\in J})\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W'}$. Tada je morfizam filtriranih vektorskih prostora $V\otimes W \to V'\otimes W'$ induciran tenzorskim produktom predmorfizama filtracija $(\lambda\times\mu, \{f_i\otimes g_j\})$ jednak $f\otimes g$.*

Dokaz. Za svaki $(i,j) \in I\times J$ postoji $(\lambda(i),\mu(j)) \in I'\times J'$ takav da postoji preslikavanje $f_i\otimes g_j$ za koje je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
V\otimes W \arrow[r, "f\otimes g"] & V'\otimes W' \\
V_i\otimes W_j \arrow[u, "\iota_i^V\otimes\iota_j^W"] \arrow[r, "f_i\otimes g_j"] & V'_{\lambda(i)}\otimes W'_{\mu(j)} \arrow[u, "\iota_i^{V'}\otimes\iota_j^{W'}"']
\end{tikzcd}$$

Zaista, za svaki $i\in I$ postoji $\lambda(i)\in I'$ i za svaki $j\in J$ postoji $\mu(j)\in J'$ takvi da postoje preslikavanja f_i i g_j za koja su sljedeća dva dijagrama komutativna:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V' \\
V_i \arrow[u, "\iota_i^V"] \arrow[r, "f_i"] & V'_{\lambda(i)} \arrow[u, "\iota_i^{V'}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "g"] & W' \\
W_j \arrow[u, "\iota_j^W"] \arrow[r, "g_j"] & W'_{\mu(j)} \arrow[u, "\iota_j^{W'}"']
\end{tikzcd}$$

i po funktorijalnosti tenzorskog produkta slijedi komutativnost gornjeg dijagrama. Iz jedinstvenosti morfizma induciranog na filtiranim vektorskim prostorima s tim svojstvom, slijedi da je taj morfizam jednak $f\otimes g$. $\square$

Definicija 4.2.10. *Tenzorski produkt filtriranih vektorskih prostora* $V \cong \operatorname{colim}\boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim}\boldsymbol{W}$ je filtrirani vektorski prostor

$$V\otimes W \cong \operatorname{colim}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$$

s filtracijom $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$, zajedno s kanonskim morfizmom filtracija $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}\to\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$. *Tenzorski produkt morfizama f i g filtriranih vektorskih prostora* je $f\otimes g$, jedinstveno linearno preslikavanje među kolimesima filtracija koje je inducirano tenzorskim produktom morfizama filtracija induciranih s f i g.

Definicija je dobra zbog prethodne dvije leme.

Propozicija 4.2.11. *Kategorija filtriranih vektorskih prostora je uz tenzorski produkt filtriranih vektorskih prostora simetrična monoidalna kategorija*

$$(\mathrm{indVect}, \otimes, k).$$

Njena puna potkategorija $\mathrm{indVectFin}$ *je njena simetrična monoidalna potkategorija. Kanonski funktori ulaganja*

$$\mathrm{Vect} \hookrightarrow \mathrm{indVect}$$

$$\mathrm{VectFin} \hookrightarrow \mathrm{indVectFin}$$

su jaki monoidalni funktori. Kanonski zaboravni funktori

$$(\mathrm{indVect}, \otimes, k) \to (\mathrm{Vect}, \otimes, k)$$

$$(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k) {\to} (\mathrm{Vect}, \otimes, k)$$

su jaki monoidalni funktori.

Dokaz. Kategorija filtriranih vektorskih prostora ekvivalentna je kategoriji $\aleph_0$-filtracija u kategoriji Vect. Funktor koji je ekvivalencija među njima preslikava tenzorski produkt filtriranih vektorskih prostora u tenzorski produkt odgovarajućih filtracija i tenzorski produkt morfizama filtriranih vektorskih prostora u tenzorski produkt morfizama filtracija. Tenzorski produkt filtriranih vektorskih prostora je obični tenzorski produkt vektorskih prostora, a komponente simetrizatora, asocijatora, lijevog i desnog unitora u $\mathrm{indVect}$ su iste kao u Vect. □

4.3 Konačne sume i filtrirane baze

Definicija 4.3.1. Neka je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ filtrirani vektorski prostor, $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$. Neka su $\iota_i^V : V_i \to V$ injekcije u vrh univerzalnog kokonusa. Kažemo da je podskup $B \subseteq V$ *filtrirana baza* od V ako postoji kofinalan podskup K usmjerenog skupa I takav da za svaki $k \in K$ vrijedi da je $(\iota_k^V)^{-1}(B)$ baza vektorskog prostora V_k.

4.3.1.1. Očito je filtrirana baza filtriranog vektorskog prostora $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ ujedno i baza vektorskog prostora V.

Propozicija 4.3.2. *Svaki filtrirani vektorski prostor posjeduje filtriranu bazu.*

Dokaz. Neka je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ filtrirani vektorski prostor, $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$. Neka je S_i skup baza vektorskog prostora V_i, za $i \in I$. Na skupu

$$\bigcup_{i\in I} S_i =: S$$

definiramo parcijalni uređaj: za $B_i \in S_i$ i $B_j \in S_j$ kažemo da je $B_i \leqslant B_j$ ako je $i \leqslant j$ i baza B_j je proširenje linearno nezavisnog skupa $\phi_{ji}(B_i)$. Za dvije usporedive baze po tom parcijalnom uređaju kažemo da su kompatibilne.

Usmjeren skup I je kofinalnosti 1 ili $\aleph_0$. U prvom slučaju tvrdnja propozicije lako slijedi. Promotrimo sada drugi slučaj. Po propoziciji 3.1.5 postoji kofinalan podskup K od I izomorfan s $\mathbb{N}$, dakle $K = \{k_1, k_2, \ldots\}$, gdje je $k_n < k_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Promotrimo skup uređenih parova

$$T := \{(L, f\colon L \to S) \mid L \subseteq K, (\forall \lambda \in L)(f(\lambda) \in S_\lambda), (\forall \lambda, \mu \in L)(f(\lambda) \text{ i } f(\mu) \text{ kompatibilne})\}.$$

Svaki uređeni par $(L, f) \in T$ predstavlja izbor međusobno kompatibilnih baza nekih komponenti iz skupa komponenti $\{V_k \mid k \in K\}$.

Na skupu T definiramo parcijalan uređaj: $(L, f) \leqslant (N, g)$ ako je $L \subseteq N$ i za svaki $\lambda \in L$ vrijedi $f(\lambda) = g(\lambda)$. Skup T je očito neprazan i vrijedi da svaki lanac u T ima gornju među. Naime, za lanac $\{(L_j, f_j) \mid j \in J\}$ njegova gornja međa je (L, f), gdje je $L = \bigcup_{j \in J} L_j$ i funkcija $f\colon L \to S$ zadana je s $f(\lambda) = f_j(\lambda)$ za $\lambda \in L_j$. Lako se vidi da je f dobro definirana i da je $(L, f) \in T$. Po Zornovoj lemi iz toga slijedi da postoji maksimalan element skupa T, $(M, h\colon M \to S)$. Skup $M \subseteq K$ je beskonačan, jer u protivnom bi imao najveći element $k_n \in M$ i linearno nezavisan skup $\phi_{k_{n+1}k_n}(h(k_n))$ mogli bismo proširiti do baze $B_{k_{n+1}}$ te time naći element veći od maksimalnog elementa (M, h). Dakle, M je beskonačan podskup skupa K izomorfnog s $\mathbb{N}$, iz čega slijedi da je M kofinalan u K, a budući da je K kofinalan u I, to je i M kofinalan u I.

Označimo s B_m bazu $h(m)$ vektorskog prostora V_m za $m \in M$. Neka je $B := \bigcup_{m \in M} \iota_m^V(B_m)$. Lako se vidi da je tada B filtrirana baza od V. $\square$

4.4 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{indVect}$

4.4.1 Monomorfizmi i epimorfizmi

Ove dvije propozicije nisu nužne za daljnje izlaganje, ovdje su zbog potpunosti.

Propozicija 4.4.1. *Morfizam u kategoriji* $\mathrm{indVect}$ *je monomorfizam u* $\mathrm{indVect}$ *ako i samo ako je monomorfizam kao preslikavanje u* Vect.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $i\colon V \to W$ morfizam u kategoriji $\mathrm{indVect}$ koji je monomorfizam kao preslikavanje u Vect. Neka je $f, g\colon Z \to V$ paralelan par morfizama u kategoriji $\mathrm{indVect}$ takav da vrijedi $i \circ f = i \circ g$. Budući da je svako to preslikavanje ujedno i morfizam u kategoriji Vect, slijedi da mora biti $f = g$. Obratno, pretpostavimo da je $i\colon V \to W$ monomorfizam u kategoriji $\mathrm{indVect}$. Dokazat ćemo da je i injekcija kao preslikavanje u Vect. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dva različita elementa $v, w \in W$ takva da je $i(v) = i(w)$. Definiramo paralelan par linearnih preslikavanja $f, g\colon k \to W$ sa $f(1) = v$ i $g(1) = w$. Ta preslikavanja su očito morfizmi u $\mathrm{indVect}$ i vrijedi $f \neq g$, što je u kontradikciji s $i \circ f = i \circ g$ i činjenicom da je i monomorfizam u $\mathrm{indVect}$. □

Propozicija 4.4.2. *Morfizam u kategoriji* $\mathrm{indVect}$ *je epimorfizam u* $\mathrm{indVect}$ *ako i samo ako je epimorfizam kao preslikavanje u* Vect.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $p \colon V \to W$ morfizam u $\mathrm{indVect}$ koji je epimofizam kao preslikavanje u Vect. Neka je $f, g \colon W \to Z$ paralelan par morfizama u $\mathrm{indVect}$ takav da vrijedi $f \circ p = g \circ p$. Budući da je svako to preslikavanje ujedno i morfizam u Vect, slijedi da mora biti $f = g$. Obratno, pretpostavimo da je $p \colon V \to W$ epimorfizam u kategoriji $\mathrm{indVect}$. Neka je $f, g \colon W \to Z$ paralelan par morfizama u Vect takav da vrijedi $f \circ p = g \circ p$. Prostor Z možemo shvatiti kao filtrirani vektorski prostor s trivijalnom filtracijom i, budući da je on kodomena preslikavanja f i g, preslikavanja f i g očito definiraju morfizme u kategoriji $\mathrm{indVect}$. Slijedi da je $f = g$.

□

4.4.2 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathrm{Vect}$ i tenzorski produkt

Propozicija 4.4.3. *Za svaka dva morfizma* $f, g \colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ $\aleph_0$*-filtracija* $\boldsymbol{V} \colon I \to \mathcal{V}$, $\boldsymbol{W} \colon J \to \mathcal{V}$ *postoji usmjeren skup* K *i filtracije* $\boldsymbol{V}'' \colon K \to \mathcal{V}$ *i* $\boldsymbol{W}'' \colon K \to \mathcal{V}$ *zajedno s izomorfizmima filtracija* $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V}''$, $\boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{W}''$ *tako da je oba morfizma filtracija* $\boldsymbol{V}'' \cong \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{W}''$ *moguće predstaviti predmorfizmima po nivoima.*

Dokaz. Po propoziciji 3.1.5 moguće je pronaći kofinalne podskupove usmjerenih skupova I i J izomorfne s $\mathbb{N}$. Tako dobivamo filtracije $\boldsymbol{V}' \colon \mathbb{N} \hookrightarrow I \to \mathcal{V}$ i $\boldsymbol{W}' \colon \mathbb{N} \hookrightarrow J \to \mathcal{V}$ koje su po propoziciji 2.5.11 izomorfne filtracijama $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{W}$, a čiji je indeksni usmjereni skup $\mathbb{N}$. Komponente i vezna preslikavanja dobivenih filtracija neka su

$$\boldsymbol{V}' = (\{V'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\phi_{mn}\}), \quad \boldsymbol{W}' = (\{W'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\psi_{mn}\}).$$

Neka su morfizmi filtracija f', $g' \colon \boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{W}'$ dobiveni od morfizama f i g pretkomponiranjem i postkomponiranjem s izomorfizmima filtracija $\boldsymbol{V}' \cong \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{W}'$. Predstavimo za početak morfizme f' i g' redom nekim predmorfizmima

$$(\lambda, \{f'_n \colon V'_n \to W'_{\lambda(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}), \quad (\mu, \{g'_n \colon V'_n \to W'_{\mu(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}).$$

Sada induktivno nalazimo paralelne komponente f''_n, g''_n morfizama f' i g' na sljedeći način. U prvom koraku neka je $\eta(1)$ najmanja gornja međa za $\lambda(1)$ i $\mu(1)$ i definiramo paralelan par komponenti

$$f''_1 := \psi_{\eta(1)\lambda(1)} \circ f'_1, \quad g''_1 := \psi_{\eta(1)\mu(1)} \circ g'_1.$$

Pretpostavimo sada da imamo već odabrane paralelne parove f_i'', $g_i''\colon V_i' \to W_{\eta(i)}'$ za sve $i = 1, 2, \dots, n-1$, takve da je $\eta(i) > \eta(j)$ čim je $i > j$, za $i, j = 1, 2, \dots, n-1$. Za $n \in \mathbb{N}$ postoji najmanja gornja međa $\eta(n)$ od $\mu(n), \lambda(n)$ takva da je $\eta(n) > \eta(n-1)$ pa definiramo sljedeći par paralelnih komponenti sa

$$f_n'' := \psi_{\eta(n)\lambda(n)} \circ f_n', \quad g_n'' := \psi_{\eta(n)\mu(n)} \circ g_n'.$$

Tako smo dobili par predmorfizama

$$(\eta, \{f_n''\colon V_n' \to W_{\eta(n)}'\}_{n\in\mathbb{N}}), \quad (\eta, \{g_n''\colon V_n' \to W_{\eta(n)}'\}_{n\in\mathbb{N}})$$

koji predstavljaju f' i g', a imaju paralelne komponente i funkcija $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je strogo rastuća funkcija. Strogo rastućoj funkciji usmjerenih skupova odgovara funktor pripadnih usmjerenih kategorija. Funkcija η dakle definira kofinalni podskup indeksnog usmjerenog skupa filtracije $\boldsymbol{W}'$, pa možemo filtraciju $\boldsymbol{W}'$ zamijeniti izomorfnom filtracijom $\boldsymbol{W}'' = \boldsymbol{W}' \circ \eta \cong \boldsymbol{W}'$. Postkomponiranjem konstruiranih predmorfizama $(\eta, \{f_n''\}_{n\in\mathbb{N}})$ i $(\eta, \{g_n''\}_{n\in\mathbb{N}})$ s tim izomorfizmom $\boldsymbol{W}' \cong \boldsymbol{W}''$, dobivamo tražene predmorfizme po nivoima

$$(\mathrm{id}, \{f_n'''\colon V_n' \to W_n''\}_{n\in\mathbb{N}}), \quad (\mathrm{id}, \{g_n'''\colon V_n' \to W_n''\}_{n\in\mathbb{N}})$$

koji predstavljaju paralelne morfizme filtracija $\boldsymbol{V}'' = \boldsymbol{V}' \cong \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W} \cong \boldsymbol{W}' \cong \boldsymbol{W}''$.

□

Propozicija 4.4.4. *Neka je $\mathcal{V}$ kategorija Vect ili $\mathrm{VectFin}$. Tada kategorija $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ ima koujednačitelje. Ako je paralelni par morfizama filtracija predstavljen paralelnim parom predmorfizama po nivoima, koujednačitelj tog paralelnog para morfizama filtracija je filtracija čije su komponente kvocijenti koujednačitelja paralelnih parova komponentnih preslikavanja po jezgrama preslikavanja u kolimes koujednačitelja. Tvrdnja vrijedi i za punu potkategoriju $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$.*

Dokaz. Po propoziciji 4.4.3 dovoljno je dokazati da koujednačitelj postoji za dvije proizvoljne filtracije s jednakom indeksnom kategorijom I i paralelnim parom morfizama predstavljenim predmorfizmima po nivoima.

Neka su zadane dvije filtracije u kategoriji $\mathcal{V}$,

$$\boldsymbol{A} = (\{A_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\}), \quad \boldsymbol{B} = (\{B_n\}_{n\in I}, \{\psi_{mn}\})$$

i neka je zadan paralelan par morfizama filtracija predmorfizmima po nivoima

$$f = (\mathrm{id}, \{f_n\colon A_n \to B_n\}_{n\in I}), \quad g = (\mathrm{id}, \{g_n\colon A_n \to B_n\}_{n\in I}).$$

Kategorija $\mathcal{V}$ ima koujednačitelje pa za svaki $n \in I$ za paralelan par f_n, g_n postoji koujednačitelj $h_n \colon B_n \to C_n$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, dashed, "h_n"] & C_n \end{tikzcd}$$

Neka je $m \leqslant n$ proizvoljan par usporedivih elemenata u I. Dokazujemo da kompozicija $h_m \circ \psi_{nm}$ koujednačuje par f_m, g_m. Morfizam h_n koujednačuje par f_n, g_n pa vrijedi

$$h_n \circ f_n \circ \phi_{nm} = h_n \circ g_n \circ \phi_{nm},$$

iz čega, jer su f i g predmorfizmi filtracija, slijedi $h_n \circ \psi_{nm} \circ f_m = h_n \circ \psi_{nm} \circ g_m$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \\ A_m \arrow[u, "\phi_{nm}"] \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"'] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, dashed, "\tau_{nm}"'] \end{tikzcd}$$

Za svaki vezni morfizam ψ_{nm} dakle vrijedi da $h_n \circ \psi_{nm}$ koujednačuje par f_m, g_m pa po univerzalnom svojstvu koujednačitelja h_m slijedi da za svaki ψ_{mn} postoji jedinstveno preslikavanje $\tau_{nm} \colon C_m \to C_n$ takvo da je desni kvadrat na prethodnom dijagramu komutativan.

Dokazujemo da je $(\{C_n\}_{n \in I}, \{\tau_{nm}\})$ usmjereni sustav u $\mathcal{V}$ (ali nije nužno i filtracija). Na sljedećem dijagramu su komutativni lijevi trokut i oba kvadrata pa je komutativan i vanjski peterokut. Zbog jedinstvenosti preslikavanja τ_{kn} sa svojstvom $\tau_{nk} \circ h_k = h_n \circ \psi_{nk}$ iz toga slijedi jednakost $\tau_{kn} \circ \tau_{nm} = \tau_{kn}$.

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \\ B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"'] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"] \\ B_k \arrow[u, "\psi_{mk}"'] \arrow[uu, bend left=50, "\psi_{nk}"] \arrow[r, "h_k"] & C_k \arrow[u, "\tau_{mk}"] \end{tikzcd}$$

Sada ćemo usmjereni sustav zamijeniti filtracijom. Neka je $C \cong \operatorname{colim}_n C_n$ u Vect. Označimo s $\kappa_n^C \colon C_n \to C$ komponente tog univerzalnog kokonusa. Tada su $\operatorname{Ker} \kappa_n^C \in \mathcal{V}$, kvocijenti $C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C \in \mathcal{V}$ i sva preslikavanja $\operatorname{Ker} \kappa_n^C \hookrightarrow C_n$ i $q_n \colon C_n \to C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C$ su morfizmi u $\mathcal{V}$. Očito tada za svaki $n \in I$ postoji jedinstveno preslikavanje $\iota_n^C \colon C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C \to C$ u Vect takvo da je sljedeći dijagram komutativan i to preslikavanje je injekcija.

$$\begin{tikzcd}
C & \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[ul, dashed, "\iota_n^C"']
\end{tikzcd}$$

Budući da je $\tau_{nm}(\operatorname{Ker}\kappa_m^C) \subseteq \operatorname{Ker}\kappa_n^C$ postoji jedinstveno preslikavanje γ_{nm} takvo da kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan, a budući da vrijedi štoviše $\operatorname{Ker}\kappa_m^C = \tau_{nm}^{-1}(\operatorname{Ker}\kappa_n^C)$ ono je injekcija.

$$\begin{tikzcd}
C & \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"'] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[uu, bend left, "\kappa_m^C"] \arrow[r, "q_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, dashed, "\gamma_{nm}"']
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Vrijedi $\gamma_{kn} \circ \gamma_{nm} = \gamma_{km}$, jer je zbog komutativnosti lijevog trokuta i oba kvadrata na sljedećem dijagramu komutativan i cijeli vanjski peterokut, a γ_{km} je jedinstveno preslikavanje sa svojstvom $\gamma_{km} \circ q_m = q_k \circ \tau_{km}$.

$$\begin{tikzcd}
C_k \arrow[r, "q_k"'] & C_k/\operatorname{Ker}\kappa_k^C \\
C_n \arrow[u, "\tau_{kn}"'] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[u, "\gamma_{kn}"'] \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[uu, bend left, "\tau_{km}"] \arrow[r, "q_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"']
\end{tikzcd}$$

Dakle, $\boldsymbol{C} := (\{C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C\}, \{\gamma_{nm}\})$ je filtracija u $\mathcal{V}$.

Na sljedećem dijagramu je komutativan gornji kvadrat, donji kvadrat i lijevi trokut, pa slijedi da je $\kappa_m^C = \iota_n^C \circ \gamma_{nm} \circ q_m$ što zbog jedinstvenosti preslikavanja ι_m^C sa svojstvom $\kappa_m^C = \iota_m^C \circ q_m$

povlači $\iota_n^C \circ \gamma_{nm} = \iota_m^C$. Dakle, $\{\iota_n^C\}$ su komponente kokonusa s vrhom C nad tom filtracijom.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] & C \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[u, "\iota_n^C"'] \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"] \arrow[r, "q_m"'] \arrow[uu, bend left=40, "\kappa_m^C"] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"'] \arrow[uu, bend right=40, "\iota_m^C"']
\end{tikzcd}
$$

Dokazujemo da je taj kokonus univerzalan. Neka je $(G, \{\iota_n^G\})$ drugi kokonus u Vect nad filtracijom $(\{C_n/\operatorname{Ker}\iota_n^C\}, \{\gamma_{nm}\})$. Tada je $(G, \{\iota_n^G \circ q_n\})$ kokonus nad filtracijom $(\{C_n\}, \{\tau_{nm}\})$ pa postoji jedinstveno preslikavanje $z\colon C \to G$ takvo da je $z \circ \kappa_n^C = \iota_n^G \circ q_n$. Budući da je $\kappa_n^C = \iota_n^C \circ q_n$ i q_n je epimorfizam slijedi $z \circ \iota_n^C = \iota_n^G$. Dakle, postoji preslikavanje $z\colon C \to G$ takvo da je $z \circ \iota_n^C = \iota_n^G$. Takvo preslikavanje je jedinstveno, jer svako preslikavanje $z'\colon C \to G$ za koje vrijedi $z' \circ \iota_n^C = \iota_n^G$ vrijedi i $z' \circ \kappa_n^C = \iota_n^G \circ q_n$ pa ono mora biti jednako jedinstvenom takvom preslikavanju z.

Očito je $q := (\mathrm{id}, \{q_n\})$ predmorfizam usmjerenih sustava, pa je $q \circ h = (\mathrm{id}, \{q_n \circ h_n\})$ predmorfizam filtracija. Dokazat ćemo da je $q \circ h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ koujednačitelj paralelnog para $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

$$
\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C
\end{tikzcd}
$$

Uzmimo bilo koju filtraciju $\boldsymbol{D} = (\{D_n\}_{n \in J}, \{\sigma_{mn}\})$ u $\mathcal{V}$ i predmorfizam kofiltracija

$$e = (\mu\colon I \to J, \{e_n\colon B_n \to D_{\mu(n)}\}_{n \in I})\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{D}$$

takav da je $e \circ f = e \circ g$. Budući da za svaki $n \in I$ komponenta e_n koujednačuje par f_n, g_n postoji jedinstveno preslikavanje $d_n\colon C_n \to D_{\mu(n)}$ takvo da je $d_n \circ h_n = e_n$.

$$
\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[rrr, bend right=30, "e_n"'] & C_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend right=20, "d_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C & D_{\mu(n)}
\end{tikzcd}
$$

Neka je $d\colon C \to D$ preslikavanje među kolimesima inducirano predmorfizmom $(\mu, \{d_n\})$. Svaki element od $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \subseteq C_n$ se preslikavanjem $d \circ \kappa_n^C$ preslika u $0 \in D$, pa je, zbog komutativnosti vanjskog četverokuta na sljedećem dijagramu, $d_n(\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \subseteq \operatorname{Ker}\iota_{\mu(n)}^D$, a to je $\{0\}$

jer je $\boldsymbol{D}$ filtracija. Dakle, postoji i jedinstveno je preslikavanje $r_n\colon C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \to D_{\mu(n)}$ takvo da je donji trokut na sljedećem dijagramu komutativan. Preslikavanje r_n je morfizam u $\mathcal{V}$.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr] & & D \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"] \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend right, "d_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, dashed, "r_n"] & D_{\mu(n)} \arrow[u, "\iota^D_{\mu(n)}"']
\end{tikzcd}
$$

Dokazujemo da je $r := (\mu, \{r_n\})$ je predmorfizam filtracija. Za svaki usporedivi par $m \leqslant n$, na sljedećem dijagramu su vanjski četverokut, lijevi kvadrat, gornji i donji trokut komutativni i preslikavanje q_m je epimorfizam, pa je i desni kvadrat komutativan.

$$
\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend left, "d_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, "r_n"] & D_{\mu(n)} \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[r, "q_m"] \arrow[rr, bend right, "d_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"'] \arrow[r, "r_m"] & D_{\mu(m)} \arrow[u, "\sigma_{nm}"']
\end{tikzcd}
$$

Očito je $r \circ q \circ h = e$. Dokažimo sada da je svaki drugi takav predmorfizam ekvivalentan r. Neka je $p = (\nu, \{p_n\})$ neki drugi predmorfizam takav da je $p \circ q \circ h = e$. Tada postoji gornja međa $l \in J$ od $\mu(n), \nu(n)$ takva da je $\sigma_{l\mu(n)} \circ e_n = \sigma_{l\nu(n)} \circ p_n \circ q_n \circ h_n$, tj. vanjski šesterokut na sljedećem dijagramu je komutativan.

$$
\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "h_n"'] \arrow[rrr, bend left, "e_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, "r_n"'] \arrow[ddr, "p_n"'] & D_{\mu(n)} \arrow[dr, "\sigma_{l\mu(n)}"] & \\
 & & & & D_l \\
 & & & D_{\nu(n)} \arrow[ur, "\sigma_{l\nu(n)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Gornji četverokut na dijagramu je komutativan i $q_n \circ h_n$ je epimorfizam pa iz prethodnoga slijedi da je komutativan i desni četverokut. Dakle, predmorfizmi r i p su ekvivalentni. Time je dokaz dovršen.

$\square$

Propozicija 4.4.5. *Neka je kategorija* $\mathcal{V}$ *jednaka* Vect *ili* $\mathrm{VectFin}$. *Tada u simetričnoj monoidalnoj kategoriji* $(\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}, \otimes, k)$ *koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom. Za njenu potkategoriju* $(\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}, \otimes, k)$ *vrijedi isto.*

Dokaz. Neka je filtracija $\boldsymbol{C} = (\{C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C\}, \{\gamma_{nm}\})$ zajedno s predmorfizmom

$$q \circ h = (\mathrm{id}, \{q_n \circ h_n\}) \colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$$

koujednačitelj paralelnog para $f, g \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ morfizama filtracija koji su predstavljeni predmorfizmima po nivoima konstruiran kao u dokazu propozicije 4.4.4. Pritom su C_n vrhovi koujednačitelja paralelnih komponenata f_n, g_n, preslikavanja τ_{nm} su preslikavanja inducirana među koujednačiteljima, κ_n^C su preslikavanja iz C_n u kolimes C usmjerenog sustava $(\{C_n\}, \{\tau_{nm}\})$ u kategoriji Vect, a γ_{nm} su preslikavanja inducirana među kvocijentima.

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \\
A_m \arrow[u, "\phi_{nm}"] \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"] \arrow[r, "q_m"] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"]
\end{tikzcd}$$

Tenzorirajmo taj dijagram s identitetom na proizvoljnoj filtraciji $\boldsymbol{D} = (\{D_l\}, \{\sigma_{lk}\})$. Želimo pokazati da je dobivena filtracija

$$\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D} = (\{(C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \otimes D_l\}, \{\gamma_{nm} \otimes \sigma_{lk}\})$$

zajedno s predmorfizmom $(q \circ h) \otimes \mathrm{id} = (\mathrm{id}, \{(q_n \otimes \mathrm{id}) \circ (h_n \otimes \mathrm{id})\})$ koujednačitelj paralelnog para $f \otimes \mathrm{id}, g \otimes \mathrm{id} \colon \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D}$.

$$\begin{tikzcd}
A_n \otimes D_l \arrow[r, shift left, "f_n\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_n\otimes\mathrm{id}"'] & B_n \otimes D_l \arrow[r, "h_n\otimes\mathrm{id}"] & C_n \otimes D_l \arrow[r, "q_n\otimes\mathrm{id}"] & (C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \otimes D_l \\
A_m \otimes D_k \arrow[u, "\phi_{nm}\otimes\sigma_{lk}"] \arrow[r, shift left, "f_m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_m\otimes\mathrm{id}"'] & B_m \otimes D_k \arrow[u, "\psi_{nm}\otimes\sigma_{lk}"] \arrow[r, "h_m\otimes\mathrm{id}"] & C_m \otimes D_k \arrow[u, "\tau_{nm}\otimes\sigma_{lk}"] \arrow[r, "q_m\otimes\mathrm{id}"] & (C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C) \otimes D_k \arrow[u, "\gamma_{nm}\otimes\sigma_{lk}"]
\end{tikzcd}$$

Budući da u kategoriji $\mathcal{V}$ koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom, prva tri člana u svakom redu opet čine dijagram za koujednačitelj u $\mathcal{V}$. Kolimes usmjerenog sustava s komponentama $\{C_n \otimes D_l\}$ je $C \otimes D$, gdje je D kolimes filtracije $(\{D_l\}, \{\sigma_{lk}\})$, po propoziciji 4.2.8. Po konstrukciji u propoziciji 4.4.4 vrh koujednačitelja paralelnog para $f \otimes \mathrm{id}$, $g \otimes \mathrm{id}$ bila bi filtracija

$$(\{(C_n \otimes D_l)/\operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{C\otimes D}\}, \{\gamma'_{nm,lk}\})$$

zajedno s predmorfizmom $\{q'_{n,l} \circ (h_n \otimes \mathrm{id})\}$ kao na sljedećem dijagramu.

$$\begin{tikzcd}
A_n \otimes D_l \arrow[r, shift left, "f_n \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_n \otimes \mathrm{id}"'] & B_n \otimes D_l \arrow[r, "h_n \otimes \mathrm{id}"] & C_n \otimes D_l \arrow[r, "q'_{n,l}"] & (C_n \otimes D_l)/\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{n,l} \\
A_m \otimes D_k \arrow[u, "\phi_{nm} \otimes \sigma_{lk}"] \arrow[r, shift left, "f_m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_m \otimes \mathrm{id}"'] & B_m \otimes D_k \arrow[u, "\psi_{nm} \otimes \sigma_{lk}"] \arrow[r, "h_m \otimes \mathrm{id}"] & C_m \otimes D_k \arrow[u, "\tau_{nm} \otimes \sigma_{lk}"] \arrow[r, "q'_{m,k}"] & (C_m \otimes D_k)/\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{m,k} \arrow[u, "\gamma'_{nm,lk}"]
\end{tikzcd}$$

Preslikavanje $\kappa^{C\otimes D}_{n,l}$ u kolimes $C \otimes D$ jednako je $\kappa^C_n \otimes \iota^D_l$, gdje je $\iota^D_l \colon D_l \to D$ komponenta univerzalnog kokonusa nad filtracijom $\boldsymbol{D}$. Zbog toga što su komponente univerzalnog kokonusa u kolimes filtracije u Vect monomorfizmi, zaključujemo da je

$$\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{n,l} = \operatorname{Ker} \kappa^C_n \otimes D_l.$$

Budući da u Vect koujednačitelji komutiraju s tenzoriranjem, a kvocijent je poseban oblik koujednačitelja, to je $(C_n/\operatorname{Ker} \kappa^C_n) \otimes D_l$ kanonski izomorfno s

$$(C_n \otimes D_l)/(\operatorname{Ker} \kappa^C_n \otimes D_l) = (C_n \otimes D_l)/\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{n,l}.$$

$$\begin{tikzcd}
C_n \otimes D_l \arrow[r, "q_n \otimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend left, "q'_{n,l}"] & (C_n/\operatorname{Ker} \kappa^C_n) \otimes D_l \arrow[r, "\cong"] & (C_n \otimes D_l)/\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{n,l} \\
C_m \otimes D_k \arrow[u, "\tau_{nm} \otimes \sigma_{lk}"] \arrow[r, "q_m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "q'_{m,k}"'] & (C_m/\operatorname{Ker} \kappa^C_m) \otimes D_k \arrow[u, "\gamma_{nm} \otimes \sigma_{lk}"] \arrow[r, "\cong"] & (C_m \otimes D_k)/\operatorname{Ker} \kappa^{C\otimes D}_{m,k} \arrow[u, "\gamma'_{nm,lk}"]
\end{tikzcd}$$

Direktnom provjerom na elementima vidi se da ti izomorfizmi među komponentama zajedno čine izomorfizam filtracija koji komutira u trokutu s predmorfizmima filtracija $\{q'_{n,l}\}$ i $\{q_n \otimes \mathrm{id}\}$. Budući da tada taj izomorfizam komutira u trokutu s predmorfizmima

$$\{q'_{n,l} \circ (h_n \otimes \mathrm{id})\}, \quad (q \circ h) \otimes \mathrm{id} = \{(q_n \otimes \mathrm{id}) \circ (h_n \otimes \mathrm{id})\}$$

zaključujemo da je i filtracija $\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D} = (\{(C_n/\operatorname{Ker} \kappa^C_n) \otimes D_l\}, \{\gamma_{nm} \otimes \sigma_{lk}\})$ zajedno s predmorfizmom $(q \circ h) \otimes \mathrm{id}$ koujednačitelj paralelnog para $f \otimes \mathrm{id}$, $g \otimes \mathrm{id} \colon \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D}$.

$\square$

Korolar 4.4.6. *Simetrična monoidalna kategorija* $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ *posjeduje koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom.*

Dokaz. Kategorije $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ su ekvivalentne simetrične monoidalne kategorije, a tvrdnja vrijedi u kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$. $\square$

4.4.3 Potprostori, jezgre, slike i kvocijenti

Ove propozicije nisu potrebne u daljnjem izlaganju, ovdje su zbog potpunosti. Dokazivane su na način koji bi se mogao poopćiti na kategoriju $\mathrm{indproVect}$, ali u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ ove konstrukcije nisu bile nužne za dalje rezultate.

Propozicija 4.4.7. *Neka je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ filtrirani vektorski prostor i neka je $W \subseteq V$ njegov vektorski potprostor. Tada je na W inducirana kanonska potprostorna filtracija $\boldsymbol{W}$ uz koju je $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ filtrirani vektorski prostor i injekcija $W \hookrightarrow V$ je morfizam filtriranih vektorskih prostora.*

Dokaz. Neka je filtracija na V dana sa $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$. Injekcije u vrh kokonusa označene su s $\{\iota_i^V : V_i \to V\}_{i\in I}$. Definirajmo komponente

$$W_i := (\iota_i^V)^{-1}(W) \subseteq V_i$$

i označimo pripadne inkluzije sa $\iota_i \colon W_i \hookrightarrow V_i$, te inkluziju W u V s $\iota \colon W \hookrightarrow V$.

Budući da je za svaki i po konstrukciji $\iota_i^V(W_i) \subseteq W$ dobro je definirano preslikavanje $\iota_i^W : W_i \to W$ za koje je sljedeći kvadrat komutativan i takvo preslikavanje je jedinstveno jer je ι injekcija. Ono je također injekcija, jer su ι_i^V i ι_i injekcije.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\iota"] & V \\ W_i \arrow[u, dashed, "\iota_i^W"] \arrow[r, hook, "\iota_i"] & V_i \arrow[u, "\iota_i^V"'] \end{tikzcd}$$

Za svaki usporedivi par $i \leqslant j$ u I vrijedi

$$W_i = (\iota_i^V)^{-1}(W) = (\iota_j^V \circ \phi_{ji})^{-1}(W) = \phi_{ji}^{-1}((\iota_j^V)^{-1}(W)) = \phi_{ji}^{-1}(W_j)$$

iz čega slijedi $\phi_{ji}(W_i) \subseteq W_j$. Zbog toga su dobro definirana preslikavanja $\psi_{ji} \colon W_i \to W_j$ takva da su sljedeći kvadrati komutativni:

$$\begin{tikzcd} W_j \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \\ W_i \arrow[u, dashed, "\psi_{ji}"] \arrow[r, hook, "\iota_i"] & V_i \arrow[u, "\phi_{ji}"'] \end{tikzcd}$$

Takva preslikavanja su jedinstvena jer je ι_j injekcija i očito su injekcije, jer su preslikavanja ι_i i ϕ_{ji} injekcije. Za kompoziciju $\psi_{kj} \circ \psi_{ji}$ vrijedi

$$\iota_k \circ \psi_{kj} \circ \psi_{ji} = \phi_{kj} \circ \iota_j \circ \psi_{ji} = \phi_{kj} \circ \phi_{ji} \circ \iota_i = \phi_{ki} \circ \iota_i$$

pa zbog jedinstvenosti preslikavanja ψ_{ki} s istim svojstvom slijedi $\psi_{kj} \circ \psi_{ji} = \psi_{ki}$. Dakle, $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$ je filtracija u Vect. Na sljedećem dijagramu su komutativni gornji, donji i vanjski četverokut, komutativan je desni trokut i ι je injekcija, pa je komutativan i lijevi trokut, tj. W je vrh kokonusa $\{\iota_i^W : W_i \to W\}_{i\in I}$ nad filtracijom $\boldsymbol{W}$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook, "\iota"] & V \\
W_j \arrow[u, "\iota_j^W"] \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[u, "\iota_j^V"'] \\
W_i \arrow[u, "\psi_{ji}"] \arrow[r, hook, "\iota_i"] \arrow[uu, bend left=60, "\iota_i^W"] & V_i \arrow[u, "\phi_{ji}"'] \arrow[uu, bend right=60, "\iota_i^V"']
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je taj kokonus univerzalan. Neka je U vrh univerzalnog kokonusa nad $\boldsymbol{W}$, s komponentama $\{\iota_i^U : W_i \to U\}_{i\in I}$. Iz univerzalnog svojstva kolimesa slijedi da tada postoji preslikavanje $\phi\colon U \to W$ takvo da je $\phi \circ \iota_i^U = \iota_i^W$. To preslikavanje je nužno injekcija. Zaista, pretpostavimo da je $\phi(u) = \phi(u')$ za dva elementa $u, u' \in U$. Postoji indeks $i \in I$ takav da su u i u' u slici komponente W_i po ι_i^U, tj. postoje $w, w' \in W_i$ takvi da je $\iota_i^U(w) = u$ i $\iota_i^U(w') = u'$. No tada je jednakost $\phi(u) = \phi(u')$ jednaka $\phi(\iota_i^U(w)) = \phi(\iota_i^U(w'))$, tj. $\iota_i^W(w) = \iota_i^W(w')$. Budući da je ι_i^W injekcija, slijedi $w = w'$ pa i $u = u'$. Preslikavanje ϕ je i surjekcija. Zaista, za svaki element $w \in W$ vrijedi da je $\iota(w) \in V$, pa budući da je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$, postoji $i \in I$ takav da je $\iota(w)$ u slici komponente V_i po ι_i^V. Po definiciji je tada w u slici komponente W_i po ι_i^W, a budući da je $\phi \circ \iota_i^U = \iota_i^W$ slijedi da je w u slici od ϕ.

Dakle, $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ je filtrirani vektorski prostor. Na kraju iz ranije pokazanoga slijedi da je ι morfizam filtriranih vektorskih prostora, jer mu odgovara morfizam filtracija $(\mathrm{id}, \{\iota_i\})$.

□

Korolar 4.4.8. *Jezgra* $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ *i slika* $\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\}$ *morfizma* $f\colon V \to W$ *filtriranih vektorskih prostora su filtrirani vektorski prostori uz potprostorne filtracije i inkluzije* $\operatorname{Ker} f \hookrightarrow V$ *i* $\operatorname{Im} f \hookrightarrow W$ *su morfizmi filtriranih vektorskih prostora. Korestrikcija* $f|\colon V \to \operatorname{Im} f$ *je morfizam filtriranih vektorskih prostora.*

Propozicija 4.4.9. *Kvocijent filtriranog vektorskog prostora po njegovom vektorskom potprostoru je uz induciranu kanonsku kvocijentnu filtraciju filtrirani vektorski prostor i kvocijentno preslikavanje je morfizam filtriranih vektorskih prostora.*

Dokaz. Neka je $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ filtrirani vektorski prostor, $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$. Neka je W njegov potprostor, s poprostornom filtracijom $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in I}, \{\psi_{ji}\})$. Označimo s $\iota\colon W \to V$ inkluziju i neka je $(\mathrm{id}, \{\iota_i\}_{i\in I})$ inducirani predmorfizam $\boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$.

Po propoziciji 4.4.4 koujednačitelj para morfizama filtracija $\iota = (\mathrm{id}, \{\iota_i\})$ i $0 = (\mathrm{id}, \{0\})$ je filtracija čije su komponente kvocijenti koujednačitelja parova $\iota_i, 0$ po jezgrama preslikavanja u kolimes tih koujednačitelja i vezna preslikavanja jedinstvena preslikavanja među tim kvocijentima. Slijedeći dokaz te propozicije označimo inducirani usmjereni sustav čije su komponente kvocijenti s

$$\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W} := (\{V_i/W_i\}_{i\in I}, \{\tau_{ji}\})$$

i filtraciju koja je vrh koujednačitelja s

$$\boldsymbol{K} := (\{K_i\}_{i\in I}, \{\gamma_{ji}\}).$$

Ovdje je $K_i = (V_i/W_i)/\operatorname{Ker} \kappa_i^K$, a preslikavanja $\kappa_i^K\colon K_i \to K$ su preslikavanja u kolimes $K = \operatorname{colim} \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ u kategoriji Vect.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook, "\iota"] & V & & K \\
W_j \arrow[u, "\iota_j^W"] \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[u, "\iota_j^V"'] \arrow[r, "h_j"] & V_j/W_j \arrow[ur, "\kappa_j^K"'] \arrow[r, "q_j"] & K_j \arrow[u, "\iota_j^K"'] \\
W_i \arrow[u, "\psi_{ji}"] \arrow[r, hook, "\iota_i"] & V_i \arrow[u, "\phi_{ji}"'] \arrow[r, "h_i"] & V_i/W_i \arrow[u, "\tau_{ji}"'] \arrow[r, "q_i"] & K_i \arrow[u, "\gamma_{ji}"']
\end{tikzcd}$$

Neka je h kvocijentno preslikavanje $V \to V/W$, tj. koujednačitelj u Vect para $\iota, 0$. Za svaki $j \in I$, zbog gornjeg lijevog komutativnog kvadrata na dijagramu, kompozicija $\iota_j^V \circ h$ koujednačuje par $\iota_j, 0$ pa postoje i jedinstvena su preslikavanja $\tau_j\colon V_j/W_j \to V/W$ takva da je $\tau_j \circ h_j = h \circ \iota_j^V$. Zbog jedinstvenosti ona čine kokonus nad usmjerenim sustavom $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ pa po univerzalnom svojstvu kolimesa postoji jedinstveno preslikavanje $\phi\colon K \to V/W$ takvo da je $\phi \circ \kappa_j^K = \tau_j$ za svaki $j \in I$. Označimo s $e\colon V \to K$ inducirani morfizam između kolimesa: e je morfizam filtriranih vektorskih prostora i za svaki $j \in I$ vrijedi

$$e \circ \iota_j^V = \iota_j^K \circ q_j \circ h_j = \kappa_j^K \circ h_j.$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\iota"] & V \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, dashed, bend left, "e"] & V/W \arrow[r, dashed, bend left, "\psi"] & K \arrow[l, dashed, bend left, "\phi"] \\
W_j \arrow[u, hook, "\iota_j^W"] \arrow[r, hook, "\iota_j"] & V_j \arrow[u, hook, "\iota_j^V"] \arrow[r, "h_j"] & V_j/W_j \arrow[u, dashed, "\tau_j"] \arrow[ur, "\kappa_j^K"] \arrow[r, "q_j"] & K_j \arrow[u, hook, "\iota_j^K"]
\end{tikzcd}$$

Zbog ekvivalentnosti kategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$ i $\mathrm{indVect}$, filtrirani vektorski prostor $K \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{K}$ je zajedno s morfizmom e koujednačitelj paralelnog para $\iota, 0$ u kategoriji $\mathrm{indVect}$. Budući da onda e koujednačuje par $\iota, 0$ u Vect, a $h\colon V \to V/W$ je koujednačitelj tog para u kategoriji Vect, postoji jedinstveno preslikavanje $\psi\colon V/W \to K$ takvo da je $\psi \circ h = e$. Za svaki $j \in I$ vrijedi

$$\psi \circ \phi \circ \kappa_j^K \circ h_j = \psi \circ \tau_j \circ h_j = \psi \circ h \circ \iota_j^V = e \circ \iota_j^V = \kappa_j^K \circ h_j,$$

što povlači

$$\psi \circ \phi \circ \kappa_j^K = \kappa_j^K \text{ za svaki } j \in I,$$

jer je svaki h_j epimorfizam. Budući da je inducirano preslikavanje iz vrha kokonusa u vrh kolimesa jedinstveno, slijedi $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Za svaki $j \in I$ također vrijedi

$$\phi \circ \psi \circ h \circ \iota_j^V = \phi \circ e \circ \iota_j^V = \phi \circ \kappa_j^K \circ h_j = \tau_j \circ h_j = h \circ \iota_j^V,$$

tj. vrijedi

$$\phi \circ \psi \circ h \circ \iota_j^V = \tau_j \circ h_j = h \circ \iota_j^V \text{ za svaki } j \in I.$$

Budući da je inducirano preslikavanje iz vrha V kolimesa u vrh V/W kokonusa nad $\boldsymbol{V}$ jedinstveno, slijedi $\phi \circ \psi \circ h = h$, a budući da je h epimorfizam, slijedi $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$. Dakle, vrijedi $V/W \cong K = \operatorname{colim} \boldsymbol{K}$.

□

Napomena 4.4.10. Moguće je da je usmjereni sustav $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ u dokazu već filtracija i da nije potrebno koristiti kvocijentiranje po jezgrama, ali ovako je izložen zbog lakšeg poopćavanja na kategoriju $\mathrm{indproVect}$. Naravno, postoji mogućnost i da u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ kvocijentiranje nije nužno.

Poglavlje 5

Kategorija $\mathrm{indproVect}$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora

Cilj ovog poglavlja je izgraditi simetričnu monoidalnu kategoriju $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ koja će kao pune potkategorije sadržavati kategorije $(\mathrm{indVect}, \otimes, k)$ i $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$. Tako ćemo moći na sustavan način kombinirati običan tenzorski produkt s upotpunjenim tenzorskim produktom i definirati naprimjer djelovanja topoloških algebri na obične algebre. Dokazat ćemo da kategorija $\mathrm{indproVect}$ dopušta koujednačitelje i da oni komutiraju s tenzorskim produktom, za što će nam biti potrebne mnoge prethodno dokazane propozicije o osnovnim konstrukcijama u kategoriji $\mathrm{proVect}$.

5.1 Definicije

Prisjetimo se da je zaboravni funktor $\mathrm{proVect} \to \mathrm{Vect}$ vjeran, to jest

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{proVect}}(V, W) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, W)$$

je injekcija za svaka dva kofiltrirana vektorska prostora $V \cong \lim \boldsymbol{V}$ i $W \cong \lim \boldsymbol{W}$. Linearna preslikavanja u slici tog funktora zovemo neprekidnim linearnim preslikavanjima, ili kažemo za njih da poštuju kofiltraciju na domeni i kodomeni.

Definicija 5.1.1. *Filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor* je vektorski prostor V zajedno s $\aleph_0$-filtracijom $\boldsymbol{V}$ u kategoriji $\mathrm{proVect}$ takvom da je $V \cong \mathrm{colim}\, \boldsymbol{V}$ u kategoriji Vect, gdje smo pri uzimanju kolimesa filtraciju u $\mathrm{proVect}$ shvatili kao filtraciju u Vect.

5.1.2. Po propoziciji 3.4.15 monomorfizmi u kategoriji $\mathrm{proVect}$ su monomorfizmi u Vect, pa filtraciju u $\mathrm{proVect}$ možemo gledati kao filtraciju u Vect. Po propoziciji 4.1.4 slijedi da su sve injekcije u kolimes ovakve filtracije monomorfizmi u Vect i time i u $\mathrm{proVect}$.

5.1.3. Po propoziciji 3.4.22 kolimes filtracije $\boldsymbol{V}$ u $\mathrm{proVect}$ jednak je kao vektorski prostor kolimesu u Vect, pa bismo ovdje mogli definirati V kao kolimes u $\mathrm{proVect}$. Time bismo osim zadane filtracije kofiltracija na V dobili i kofiltraciju na V, no ta nam informacija neće biti potrebna, jer će morfizmi među filtrirano-kofiltriranim vektorskim prostorima automatski poštivati tu kofiltraciju. To će biti vidljivo nakon dokaza propozicije 5.1.5.

Filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ zadan je dakle filtrirajućim komponentama $V_i := \boldsymbol{V}(i)$ u kategoriji $\mathrm{proVect}$, veznim preslikavanjima $\phi_{ji} \colon V_i \to V_j := \boldsymbol{V}(i \to j)$ filtracije koja su monomorfizmi u $\mathrm{proVect}$, vrhom univerzalnog kokonusa V u kategoriji Vect i komponentama tog kokonusa $\pi_i^V \colon V \to V_i$ koje su morfizmi u Vect.

Svaka od komponenti V_i je kofiltrirani vektorski prostor, to jest ima kofiltrirajuće komponente V_i^k, $k \in K_i$ i vezna preslikavanja $\psi_i^{lk} \colon V_i^k \to V_i^l$ koja su epimorfizmi u kategoriji Vect. Dakle, ukratko,

$$V = \operatorname*{colim}_{i \in I} V_i = \operatorname*{colim}_{i \in I} \lim_{k \in K_i} V_i^k$$

gdje su i kolimes i limes uzeti u Vect, a vezna preslikavanja u filtraciji među komponentama V_i su neprekidna preslikavanja i injekcije.

Definicija 5.1.4. *Morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora* $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$, gdje su filtracije dane s $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\}), bmW = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$, je svako linearno preslikavanje $f \colon V \to W$ takvo da

$$(\forall i \in I)(\exists j \in J)(\exists f_{ji} \colon V_i \to W_j \text{ neprekidno linearno preslikavanje})(f \circ \iota_i^V = \iota_j^W \circ f_{ji}).$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
V_i \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "f_{ji}"] \arrow[d, two heads] & W_j \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] \\
V_i^l \arrow[r, dashed, "f_{ji}^{kl}"] & W_j^k
\end{tikzcd}$$

Sjetimo se da je linearno preslikavanje f_{ji} neprekidno onda kad

$$(\forall k \in K_j)(\exists l \in L_i)(\exists f_{ji}^{kl} \colon V_i^l \to W_j^k)(f_{ji}^{kl} \circ \pi_l^{V_i} = \pi_k^{W_j} \circ f_{ji})$$

gdje smo s K_j i L_i označili indeksne kategorije kofiltracija na W_j odnosno V_i.

Time smo definirali kategoriju filtriranih-kofiltriranih vektorskih prostora i označit ćemo je s $\mathrm{indproVect}$. Dalje dokazujemo da je $\mathrm{indproVect}$ ekvivalentna kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$.

Propozicija 5.1.5. *Svaki morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora inducira jedinstveni morfizam odgovarajućih $\aleph_0$-filtracija kofiltriranih vektorskih prostora i obratno na sljedeći način:*

(i) Neka je $f\colon V \to W$ morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$, na kojima su filtracije u kategoriji $\mathrm{proVect}$ dane sa $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$, $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$. Definiramo skup

$$H'(f) := \{f_{ji} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{proVect}}(V_i, W_j) \mid i \in I, j \in J, f \circ \iota_i^V = \iota_j^W \circ f_{ji}\}.$$

Tada svaki izbor podfamilije oblika $\{f_{\lambda(i)i}\colon V_i \to W_{\lambda(i)}\}_{i\in I} \subseteq H'(f)$ definira predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ u $\mathrm{proVect}$ i svaka dva takva izbora definiraju ekvivalentne predmorfizme. Pridruživanje koje morfizmu f u $\mathrm{indproVect}$ na ovaj način pridruži morfizam filtracija u $\mathrm{proVect}$ poštuje kompoziciju.

(ii) Svaki predmorfizam $\aleph_0$-filtracija $(\lambda, \{f_{\lambda(i)i}\colon V_i \to W_{\lambda(i)}\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ kofiltriranih vektorskih prostora određuje jedinstveno preslikavanje $f\colon V \to W$ među kolimesima $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$, $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ tih filtracija u kategoriji Vect takvo da je za svaki $i \in I$

$$f \circ \iota_i^V = \iota_{\lambda(i)}^W \circ f_{\lambda(i)i}.$$

Ekvivalentni predmorfizmi određuju isto preslikavanje f. Pridruživanje koje morfizmu filtracija u $\mathrm{proVect}$ na ovaj način pridruži morfizam u $\mathrm{indproVect}$ poštuje kompoziciju.

Ta dva pridruživanja su međusobno inverzna.

Dokaz. Dokaz je istovjetan dokazu propozicije 4.1.7 za kategoriju $\mathrm{indVect}$. Jedina razlika je što su ovdje sve komponente predmorfizama filtracije neprekidna linearna preslikavanja. □

5.1.6. Propozicija bi vrijedila i kad bismo definirali filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor kao kolimes u kategoriji $\mathrm{proVect}$, pa bismo filtrirano-kofiltrirane vektorske prostore mogli gledati kao objekte u kategoriji $\mathrm{proVect}$ na kojima je zadana filtracija u $\mathrm{proVect}$ i morfizme filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora kao morfizme u $\mathrm{proVect}$ koji poštuju tu filtraciju. Tako ne gledamo jer je na temelju iskaza prethodne propozicije vidljivo da je skup morfizama među dva objekta u oba slučaja jednak, pa su kategorije jednake i informacija o kofiltraciji na V nam je nepotrebna.

Za međusobno pridružene morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ kofitriranih vektorskih prostora i morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora $V \to W$ iz prethodne propozicije kažemo da su inducirani jedan drugim. Elemente skupa $H'(f)$ zovemo komponente tog morfizma filtracija odnosno tog morfizma filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora.

Korolar 5.1.7. *Pridruživanje koje svakoj $\aleph_0$-filtraciji $\boldsymbol{V}$ u* $\mathrm{proVect}$ *pridruži njen kolimes* $\mathrm{colim}\,\boldsymbol{V}$ *u kategoriji* Vect*, a svakom morfizmu $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ $\aleph_0$-filtracija u* $\mathrm{proVect}$ *njime induciran morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora* $\mathrm{colim}\,\boldsymbol{V} \to \mathrm{colim}\,\boldsymbol{W}$ *je funktor koji je ekvivalencija kategorije $\aleph_0$-filtracija kofiltriranih vektorskih prostora i kategorije filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora:*

$$\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect} \cong \mathrm{indproVect}.$$

Potkategorija čiji su objekti $\aleph_0$-filtracije u kategoriji $\mathrm{proVectFin}$ *ekvivalentna je potkategoriji filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora s komponentama koje su kofiltrirane konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima:*

$$\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVectFin} \cong \mathrm{indproVectFin}.$$

5.1.8. Zamijetimo da postoji kanonsko ulaganje kategorija

$$\mathrm{indVect} \hookrightarrow \mathrm{indproVect}$$

(filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor s trivijalno kofiltriranim komponentama), kanonsko ulaganje kategorija

$$\mathrm{proVect} \hookrightarrow \mathrm{indproVect}$$

(filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor koji je trivijalno filtriran) i zaboravni funktori

$$\mathrm{indproVect} \to \mathrm{indVect} \to \mathrm{Vect}$$

(prvi zaboravlja kofiltracije na komponentama, a sljedeći zaboravlja filtraciju) koji su vjerni, tj. injekcije na skupovima morfizama. Kategorije $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$ su dakle pune potkategorije od $\mathrm{indproVect}$. Slično je s ulaganjima kategorija $\mathrm{indVectFin} \hookrightarrow \mathrm{indproVectFin}$, $\mathrm{proVectFin} \hookrightarrow \mathrm{indproVectFin}$ i zaboravnim funktorom $\mathrm{indproVectFin} \to \mathrm{indVect} \to \mathrm{Vect}$.

5.2 Tenzorski produkt na kategoriji $\mathrm{indproVect}$

Tenzorski produkt filtracija u $\mathrm{proVect}$ i morfizama filtracija u $\mathrm{proVect}$ dan je u definiciji 4.2.1 gdje je opisan tenzorski produkt filtracija u simetričnoj monoidalnoj kategoriji u kojoj je tenzorski produkt svaka dva monomorfizma monomorfizam, nakon čega je pokazano da je on dobro definiran i da je bifunktor. U $\mathrm{proVect}$ je tenzorski produkt svaka dva monomorfizma monomorfizam po propoziciji 3.4.23. Slijede podsjetnik i oznake. Tenzorski produkt filtracija $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j\in J}, \{\psi_{lj}\})$ u kategoriji $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ je filtracija

$$\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W} := (\{V_i \hat{\otimes} W_j\}_{(i,j)\in I\times J}, \{\phi_{ki} \hat{\otimes} \psi_{lj}\}).$$

Tenzorski produkt morfizama filtracija $f\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ i $g\colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}'$ zadanih redom predmorfizmima $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})$ i $(\mu, \{g_j\}_{j\in J})$ je morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{W} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}'$ zadan predmorfizmom

$$(\lambda \times \mu, \{f_i \hat{\otimes} g_j\}_{(i,j)\in I\times J}).$$

Propozicija 5.2.1. *Kategorija filtracija u* $\mathrm{proVect}$*,* $\mathrm{Ind}^s\mathrm{proVect}$*, je uz tenzorski produkt filtracija* $\hat{\otimes}$ *simetrična monoidalna kategorija:*

$$(\mathrm{Ind}^s\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k).$$

Njena puna potkategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ *je također simetrična monoidalna kategorija. Kanonska ulaganja*

$$(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}^s\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$$

su jaki monoidalni funktori.

Dokaz. U propoziciji 3.4.23 je dokazano da je tenzorski produkt monomorfizama u $\mathrm{proVect}$ monomorfizam, pa po propoziciji 4.2.4 slijedi da se tenzorski produkt $\hat{\otimes}$ na $\mathrm{proVect}$ proširuje do tenzorskog produkta na $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ i ulaganje $(\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \hookrightarrow (\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k)$ je jaki monoidalni funktor. □

Definicija 5.2.2. Tenzorski produkt filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ je filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor

$$V \tilde{\otimes} W := \operatorname{colim} \boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$$

s filtracijom $\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$ u $\mathrm{proVect}$. Tenzorski produkt morfizama f i g filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora je $f \tilde{\otimes} g$, preslikavanje među filtrirano-kofiltriranim vektorskim prostorima inducirano tenzorskih produktom odgovarajućih predmorfizama.

Propozicija 5.2.3. *Kategorija filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora je uz tenzorski produkt filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora simetrična monoidalna kategorija*

$$(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k).$$

Njena puna potkategorija $\mathrm{indproVectFin}$ *je njena simetrična monoidalna potkategorija. Kanonski funktori ulaganja*

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{proVect}, \hat{\otimes}, k) \arrow[dr, hook] & \\
(\mathrm{Vect}, \otimes, k) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & (\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k) \\
 & (\mathrm{indVect}, \otimes, k) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

su jaki monoidalni funktori.

Dokaz. Kategorija $\mathrm{indproVect}$ ekvivalentna je kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$. Funktor koji je ekvivalencija među njima preslikava tenzorski produkt filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora u tenzorski produkt odgovarajućih filtracija i tenzorski produkt morfizama filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora u tenzorski produkt morfizama filtracija. Komponente simetrizatora, asocijatora, lijevog i desnog unitori u $\mathrm{indproVect}$ inducirane su predmorfizmima čije su komponente odgovarajući simetrizatori, asocijatori, lijevi unitori i desni unitori u $\mathrm{proVect}$. Lako se vidi da su navedena ulaganja kategorija jaki monoidalni funktori. □

5.2.1 Proširenja preslikavanja

Sljedeće propozicije govore o proširenju linearnih preslikavanja među običnim tenzorskim produktima koja poštuju filtracije i kofiltracije do preslikavanja među tenzorskim produktima filtrirano-kofiltriranih prostora.

Propozicija 5.2.4. *Neka su $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ i $W \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{W}$ objekti u* $\mathrm{indproVect}$. *Kanonski morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$ u* Vect *inducira linearno preslikavanje $V \otimes W \to V \tilde{\otimes} W$ koje je injekcija, kanonski morfizam filtriranih vektorskih prostora:*

$$V \otimes W \hookrightarrow V \tilde{\otimes} W.$$

Slika jednostavnog tenzora $v \otimes w \in V \otimes W$ je jednostavni tenzor $v \otimes w \in V \tilde{\otimes} W$.

Dokaz. Neka su filtracije zadane s $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i \in I}, \{\phi_{ki}\})$ i $\boldsymbol{W} = (\{W_j\}_{j \in J}, \{\psi_{lj}\})$. Kanonski morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$ u Vect je određen predmorfizmom čije su komponente kanonska preslikavanja tenzorskog produkta u upotpunjeni tenzorski produkt:

$$\begin{tikzcd}
V_k \otimes W_l \arrow[r, hook, "\iota_{k,l}"] & V_k \hat{\otimes} W_l \\
V_i \otimes W_j \arrow[u, "\phi_{ki} \otimes \psi_{lj}"] \arrow[r, hook, "\iota_{i,j}"] & V_i \hat{\otimes} W_j \arrow[u, "\phi_{ki} \hat{\otimes} \psi_{lj}"']
\end{tikzcd}$$

Prethodni dijagram je komutativan po 3.1.20 jer su $\phi_{ki} \hat{\otimes} \psi_{lj}$ upotpunjenja preslikavanja $\phi_{ki} \otimes \psi_{lj}$, dakle to je zaista predmorfizam filtracija. Sada taj predmorfizam filtracija inducira odgovarajući morfizam filtriranih vektorskih prostora koji je injekcija jer je induciran među filtriranim kolimesima u Vect i sve komponente predmorfizma su injekcije:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, hook] & V \tilde{\otimes} W \\
V_i \otimes W_j \arrow[u, "\iota_i^V \otimes \iota_j^W"] \arrow[r, hook, "\iota_{i,j}"] & V_i \hat{\otimes} W_j \arrow[u, "\iota_{i,j}^{V \tilde{\otimes} W}"']
\end{tikzcd}$$

Zadnja tvrdnja je posljedica činjenice da je slika jednostavnog tenzora $v \otimes w \in V' \otimes W'$ po kanonskoj inkluziji $V' \otimes W' \hookrightarrow V' \hat{\otimes} W'$ jednostavni tenzor $v \otimes w \in V' \hat{\otimes} W'$ koja je dokazana u 3.2.10. □

U napomeni 3.1.20 dana je definicija kofiltracije na vektorskom prostoru, upotpunjenja vektorskog prostora po kofiltraciji i upotpunjenja preslikavanja među takvim vektorskim prostorima koja poštuju kofiltracije na domeni i kodomeni, što će biti potrebno za sljedeću propoziciju.

Propozicija 5.2.5. *Neka su V, W, U, T objekti u* $\mathrm{indproVect}$. *Ako linearno preslikavanje $f\colon V \otimes W \to U \otimes T$ poštuje filtracije i kofiltracije na sljedeći način: za svaku komponentu $V_i \otimes W_j$ filtracije na domeni postoji komponenta $U_k \otimes T_l$ filtracije na kodomeni i preslikavanje $f_{i,j}$ među njima za koje sljedeći dijagram komutira*

$$\begin{tikzcd} V \otimes W \arrow[r, "f"] & U \otimes T \\ V_i \otimes W_j \arrow[u, hook, "\iota_i^V \otimes \iota_j^W"] \arrow[r, "f_{i,j}"] & U_k \otimes T_l \arrow[u, hook, "\iota_k^U \otimes \iota_l^T"'] \end{tikzcd}$$

i takvo da poštuje kofiltracije na domeni $V_i \otimes W_j$ i kodomeni $U_k \otimes T_l$, tada se f proširuje do preslikavanja $\tilde{f}$ u $\mathrm{indproVect}$

$$\begin{tikzcd} V \tilde{\otimes} W \arrow[r, "\tilde{f}"] & U \tilde{\otimes} T \\ V \otimes W \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & U \otimes T \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Preslikavanje $\tilde{f}$ je inducirano predmorfizmom čije su komponente upotpunjenja gore navedenih komponenti $f_{i,j}$ preslikavanja f koje poštuju kofiltracije:

$$\begin{tikzcd} V \tilde{\otimes} W \arrow[r, "\tilde{f}"] & U \tilde{\otimes} T \\ V_i \hat{\otimes} W_j \arrow[u, hook, "\iota_{i,j}^{V \tilde{\otimes} W}"] \arrow[r, "\hat{f}_{i,j}"] & U_k \hat{\otimes} T_l \arrow[u, hook, "\iota_{k,l}^{U \tilde{\otimes} T}"'] \end{tikzcd}$$

Analogna tvrdnja vrijedi za domenu i kodomenu koje su obični tenzorski produkti konačno mnogo faktora.

Dokaz. Označimo filtracije u $\mathrm{proVect}$ na V, W, U, T redom sa $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{T}$. Promatrajući te filtracije kao filtracije u Vect, vektorske prostore $V \otimes W$ i $U \otimes T$ možemo gledati kao filtrirane vektorske prostore. Preslikavanje f je tada očito morfizam filtriranih vektorskih prostora i takvo da postoji predmorfizam $(\lambda \times \mu, \{f_{i,j} \colon V_i \otimes W_j \to U_{\lambda(i,j)} \otimes T_{\mu(i,j)}\}) \colon \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{T}$ koji ga predstavlja, a čije sve komponente poštuju kofiltracije na domeni i kodomeni.

$$
\begin{tikzcd}
V_{i'} \hat{\otimes} W_{j'} \arrow[rrr, "\hat{f}_{i',j'}"] & & & U_{k'} \hat{\otimes} T_{l'} \\
& V_{i'} \otimes W_{j'} \arrow[ul, hook] \arrow[r, "f_{i',j'}"] & U_{k'} \otimes T_{l'} \arrow[ur, hook] & \\
& V_i \otimes W_j \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{i,j}"] \arrow[dl, hook] & U_k \otimes T_l \arrow[u, hook] \arrow[dr, hook] & \\
V_i \hat{\otimes} W_j \arrow[uuu, hook] \arrow[rrr, "\hat{f}_{i,j}"] & & & U_k \hat{\otimes} T_l \arrow[uuu, hook]
\end{tikzcd}
$$

Sve te komponente moguće je po 3.1.20 upotpuniti i vezna preslikavanja filtracija $\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W}$ i $\boldsymbol{U} \hat{\otimes} \boldsymbol{T}$ u $\mathrm{proVect}$ su upotpunjenja odgovarajućih veznih preslikavanja filtracija $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$ i $\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{T}$ u Vect. Budući da upotpunjavanje poštuje kompoziciju,

$$(\lambda \times \mu, \{\hat{f}_{i,j} \colon V_i \hat{\otimes} W_j \to U_{\lambda(i,j)} \hat{\otimes} T_{\mu(i,j)}\})$$

je predmorfizam filtracija $\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{U} \hat{\otimes} \boldsymbol{T}$ u $\mathrm{proVect}$. Taj predmorfizam inducira preslikavanje $\tilde{f}$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora $V \tilde{\otimes} W \to U \tilde{\otimes} T$. Na sljedećem dijagramu za svaki par $(i, j) \in I \times J$ komutativni su lijevi i desni (po prethodnoj propoziciji 5.2.4), te donji, unutrašnji i vanjski četverokut.

$$
\begin{tikzcd}
V \tilde{\otimes} W \arrow[rrr, "\tilde{f}"] & & & U \tilde{\otimes} T \\
& V \otimes W \arrow[ul, hook] \arrow[r, "f"] & U \otimes T \arrow[ur, hook] & \\
& V_i \otimes W_j \arrow[u, hook, "\iota_i^V \otimes \iota_j^W"] \arrow[r, "f_{i,j}"] \arrow[dl, hook] & U_k \otimes T_l \arrow[u, hook, "\iota_k^U \otimes \iota_l^T"'] \arrow[dr, hook] & \\
V_i \hat{\otimes} W_j \arrow[uuu, hook, "\iota_{i,j}^{V \tilde{\otimes} W}"] \arrow[rrr, "\hat{f}_{i,j}"] & & & U_k \hat{\otimes} T_l \arrow[uuu, hook, "\iota_{k,l}^{U \tilde{\otimes} T}"']
\end{tikzcd}
$$

Preslikavanja u donjem četverokutu na prethodnom dijagramu su komponente morfizama filtracija na sljedećem dijagramu. Dakle ti morfizmi filtracija na sljedećem dijagramu također čine komutativni četverokut, pa inducirani morfizmi među kolimesima tih filtracija čine komutativan četverokut, gornji četverokut na prethodnom dijagramu.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W} \arrow[r, "f"] \arrow[dl] & \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{T} \arrow[dr] & \\
\boldsymbol{V} \hat{\otimes} \boldsymbol{W} \arrow[rrr, "\hat{f}"] & & & \boldsymbol{U} \hat{\otimes} \boldsymbol{T}
\end{tikzcd}$$

□

5.3 Dualnost u kategoriji $\mathrm{indproVect}$

Pridruživanje koje svakom objektu V iz Vect pridružuje njegov dual, tj. vektorski prostor njegovih linearnih funkcionala $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, k)$, a svakom morfizmu $A\colon V \to W$ vektorskih prostora dualni morfizam $A^*\colon W^* \to V^*$, $A(f) = f \circ A$, je kontravarijantan funktor

$$(\ )^*\colon \mathrm{Vect} \to \mathrm{Vect}.$$

Za svaki V iz $\mathrm{VectFin}$ vrijedi $V^{**} \cong V$ i taj izomorfizam je prirodni izomorfizam. Slijedi da je korestrikcija restrikcije tog funktora na kategoriju konačno-dimenzionalnih vektorskih prostora

$$(\ )^*\colon \mathrm{VectFin} \to \mathrm{VectFin}$$

antiekvivalencija kategorija.

Lako se provjeri da funktori $(\ )^*\colon \mathrm{Vect} \to \mathrm{Vect}$, $(\ )^*\colon \mathrm{VectFin} \to \mathrm{VectFin}$ prevode svaki monomorfizam u epimorfizam i svaki epimorfizam u monomorfizam.

Propozicija 5.3.1. *Neka je $D\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ kontravarijantan funktor koji prevodi monomorfizme u epimorfizme i epimorfizme u monomorfizme. Tada su formulom $D \circ -$ definirani kontravarijantni funktori $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$ i $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$. Ako je k tome $D \circ D$ prirodno izomorfan id, onda su obje kompozicije ovih funktora, $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ i $\mathrm{Pro}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Ind}^s\mathcal{V} \to \mathrm{Pro}^s\mathcal{V}$, prirodno izomorfne identiteti. Analogna tvrdnja vrijedi za $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ i $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$.*

Dokaz. Očito se svaka filtracija preslika u kofiltraciju i obratno. Lako se vidi da se svaki predmorfizam filtracija preslika u predmorfizam kofiltracija i obratno, te da se ekvivalentni predmorfizmi preslikaju u ekvivalentne predmorfizme i da se poštuje kompozicija predmorfizama. Dalje, ako je $D \circ D$ prirodno izomorfan identiteti, onda za svaki morfizam filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ izomorfizmi filtracija $D \circ D \circ \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $D \circ D \circ \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$, koji dolaze od prirodne transformacije $D \circ D \Rightarrow \mathrm{id}$, čine komutativan četverokut s morfizmom filtracija $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ i morfizmom filtracija $D \circ D \circ \boldsymbol{V} \to D \circ D \circ \boldsymbol{W}$ dobivenim po funktoru $D \circ D$. Slično vrijedi za kofiltracije. □

Korolar 5.3.2. *Pridruživanje koje filtraciji* $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\})$ *pridruži kofiltraciju*

$$\boldsymbol{V}^* := (\{V_i^*\}_{i\in I}, \{\phi_{ij}^* := (\phi_{ji})^*\})$$

i predmorfizmu filtracija $(\lambda, \{f_i\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *pridruži predmorfizam kofiltracija*

$$(\lambda, \{f_i^*\}_{i\in I})\colon \boldsymbol{W}^* \to \boldsymbol{V}^*$$

je kontravarijantan funktor

$$\mathrm{Ind}^s\mathrm{Vect} \xrightarrow{*\circ-} \mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}.$$

Analogno se definira kontravarijantan funktor

$$\mathrm{Ind}^s\mathrm{Vect} \xleftarrow[*\circ-]{} \mathrm{Pro}^s\mathrm{Vect}.$$

Obje kompozicije sljedeća dva kontravarijantna funktora su prirodno izomorfne identiteti.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}^s\mathrm{VectFin} \arrow[r, shift left, "*\circ-"] & \mathrm{Pro}^s\mathrm{VectFin} \arrow[l, shift left, "*\circ-"] \end{tikzcd}$$

Propozicija 5.3.3. *Za filtrirani vektorski prostor* $V \cong \operatorname{colim} \boldsymbol{V}$ *vrijedi*

$$\lim \boldsymbol{V}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(V, k)$$

i za kofiltrirani vektorski prostor $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ *vrijedi*

$$\operatorname{colim} \boldsymbol{W}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{proVect}}(W, k).$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{V} = (\{V_i\}_{i\in I}, \{\phi_{ji}\colon V_i \to V_j\})$. Vezna preslikavanja ϕ_{ji} su inkluzije. Tada je $\boldsymbol{V}^* = (\{V_i^*\}_{i\in I}, \{\phi_{ij}^*\colon V_j^* \to V_i^*\})$ i vezna preslikavanja su operatori restrikcije funkcionala. Očito svaki funkcional $f\colon V \to k$ definira nit $(f_i)_{i\in I}$ u $\lim_i V_i^*$ svojim restrikcijama $f_i\colon V_i \hookrightarrow V \to k$. Obratno, svaka nit $(f_i)_{i\in I}$ u $\lim_i V_i^*$ definira funkcional $f\colon V \to k$ na sljedeći način: za $v \in V$ postoji V_i takav da je $v \in V_i$ i definiramo $f(v) := f_i(v)$. To pridruživanje ne ovisi o izboru komponente V_i. Pridruživanja su međusobno inverzna. Dakle,

$$\lim \boldsymbol{V}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, k) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(V, k).$$

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka je $\boldsymbol{W} = (\{W_i\}_{i\in J}, \{\psi_{ij}\colon W_j \to W_i\})$. Vezna preslikavanja ψ_{ij} su surjekcije. Tada je $\boldsymbol{W}^* = (\{W_i^*\}_{i\in J}, \{\psi_{ji}^*\colon W_i^* \to W_j^*\})$ i vezna preslikavanja su injekcije. Svaki funkcional $f\colon W \to k$ koji je morfizam u proVect ima svojstvo da postoji $i \in J$ takav da je f jednak kompoziciji $W \to W_i \to k$ projekcije π_i^W i nekog funkcionala

$f_i \colon W_i \to k$. Time funkcional f definira element nekog W_i^*, dakle i kolimesa $\operatorname{colim}_i W_i^*$. Element kolimesa pritom ne ovisi o odabiru komponente W_i. Obratno, svaki element kolimesa je funkcional $f_i \colon W_i \to k$ na nekoj komponenti W_i i kompozicijom $W \to W_i \to k$ definira funkcional f koji je očito morfizam u $\mathrm{proVect}$. Definirani funkcional ne ovisi o odabiru komponente W_i. Ta pridruživanja su međusobno inverzna pa zaključujemo da je

$$\operatorname{colim} \boldsymbol{W}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{proVect}}(W, k).$$

$\square$

Lema 5.3.4. *Kontravarijantan funktor* $(\ )^* \colon \mathrm{VectFin} \to \mathrm{VectFin}$ *je jaki monoidalni funktor simetričnih monoidalnih kategorija.*

Dokaz. Postoji prirodan izomorfizam $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ te izomorfizam $k^* \cong k$ koji zadovoljavaju koherencije s asocijatorom te lijevom i desnom jedinicom. $\square$

Propozicija 5.3.5. *(Dualnost monoidalnih kategorija* $\mathrm{indVectFin}$ *i* $\mathrm{proVectFin}$.*) Kontravarijantni funktori*

$$(\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}, \otimes, k) \underset{*\circ -}{\overset{*\circ -}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}, \otimes, k)$$

i njima inducirani kontravarijantni funktori

$$(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k) \underset{\text{"} \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(-,k)\text{"}}{\overset{\text{"} \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(-,k)\text{"}}{\rightleftarrows}} (\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$$

su jaki monoidalni funktori. Kompozicije tih funktora (koje imaju smisla) su izomorfne identiteti i definiraju dualnost kategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ *i* $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$ *te kategorija* $\mathrm{indVectFin}$ *i* $\mathrm{proVectFin}$.

Dokaz. Funktori iz iskaza propozicije su kontravarijantni po propoziciji 5.3.2. Neka su dani objekti $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ u $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$. Budući da su komponente $\{V_i\}_{i \in I}$ i $\{W_j\}_{j \in J}$ tih filtracija konačno-dimenzionalne, to su konačno-dimenzionalne i komponente $\{V_i \otimes W_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ filtracije $\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W}$. Po prethodnoj lemi postoje prirodni izomorfizmi komponenti $(V_i \otimes W_j)^* \cong V_i^* \otimes W_j^*$, a oni zajedno čine izomorfizam kofiltracija $(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W})^* \cong \boldsymbol{V}^* \otimes \boldsymbol{W}^*$. Lako se vidi da su ti izomorfizmi kofiltracija komponente prirodnog izomorfizma i da on zadovoljava koherencije s asocijatorom i lijevom i desnom jedinicom. Ti prirodni izomorfizmi dalje induciraju prirodne izomorfizme među odgovarajućim kofiltriranim vektorskim prostorima koji također zadovoljavaju te koherencije.

S druge strane, krenuvši od dva objekta $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ u $\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin}$, na isti način se pokaže da postoji prirodni izomorfizam filtracija $(\boldsymbol{V} \otimes \boldsymbol{W})^* \cong \boldsymbol{V}^* \otimes \boldsymbol{W}^*$ i da oni induciraju prirodne morfizme među odgovarajućim filtriranim vektorskim prostorima.

Inducirani funktori među $\mathrm{indVectFin}$ i $\mathrm{proVectFin}$ označeni su sa " $\mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}$ " u svjetlu propozicije 5.3.3 u kojoj je pokazano da za filtrirani vektorski prostor $V \cong \mathrm{colim}\, \boldsymbol{V}$ vrijedi $\lim \boldsymbol{V}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(V, k)$ i za kofiltrirani vektorski prostor $W \cong \lim \boldsymbol{W}$ vrijedi $\mathrm{colim}\, \boldsymbol{W}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{proVect}}(W, k)$. $\square$

U odjeljku 9.4 ćemo dokazati da je dual $R^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(R, k)$ unutrašnje Hopfove algebre u $\mathrm{indVectFin}$ unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$ i da se kanonsko sparivanje među njima proširuje do sparivanja $R^* \tilde{\otimes} R \to k$ u $\mathrm{indproVect}$.

5.4 Formalne sume u $\mathrm{indproVect}$

U 4.3.1 je definirana filtrirana baza, u 4.3.2 je dokazano da svaki filtrirani vektorski prostor posjeduje filtriranu bazu, u 3.3.1 je definirana formalna suma u $\mathrm{proVect}$ i u 3.3.9 formalna baza u $\mathrm{proVect}$, te je u 3.3.13 dokazano da svaki kofiltrirani vektorski prostor posjeduje formalnu bazu.

Definicija 5.4.1. Izraz $\sum_\alpha T_\alpha$ je *formalna suma* u V iz $\mathrm{indproVect}$, $V \cong \mathrm{colim}_{n \in I} V_n$, ako postoji $n \in I$ takav da: za svaki α vrijedi $T_\alpha \in \iota_n^V(V_n)$ i izraz $\sum_\alpha (\iota_n^V)^{-1}(T_\alpha)$ je formalna suma u kofiltriranom vektorskom prostoru V_n. Tada kažemo da je formalna suma $\sum_\alpha T_\alpha$ unutar komponente V_n.

Očito svaka formalna suma u V iz $\mathrm{indproVect}$ ima vrijednost u V, jer ima vrijednost u V_n.

Definicija 5.4.2. Kažemo da linearno preslikavanje $A\colon V \to W$ *distribuira po formalnim sumama* u V iz $\mathrm{indproVect}$ ako je za svaku formalnu sumu $\sum_\alpha T_\alpha$ u V, izraz $\sum_\alpha A(T_\alpha)$ formalna suma u W i vrijednost joj je jednaka $A(\sum_\alpha T_\alpha)$.

Lema 5.4.3. *Ako je A morfizam u* $\mathrm{indproVect}$*, onda A distribuira po formalnim sumama.*

Dokaz. Očito. $\square$

5.4.4. Obrat prethodne leme ne vrijedi.

5.4.5. Vektorski prostor V možemo gledati kao trivijalno kofiltrirani vektorski prostor. Izraz $\sum_\lambda v_\lambda$ je formalna suma u vektorskom prostoru V ako je konačno mnogo sumanada različito od 0. Izraz $\sum_\lambda v_\lambda$ je formalna suma u filtriranom vektorskom prostoru W ako postoji komponenta W_n koja sadrži sve sumande i izraz je formalna suma u W_n, a to je opet ako je konačno mnogo sumanada početne sume različito od 0. Dakle, formalne sume u $\mathrm{indproVect}$ generaliziraju konačne sume u Vect, konačne sume u $\mathrm{indVect}$ i formalne sume u $\mathrm{proVect}$.

Propozicija 5.4.6. *Svaki element tenzorskog produkta $M_1 \tilde{\otimes} M_2 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} M_k$ konačno mnogo filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora je formalna suma jednostavnih tenzora.*

Dokaz. Jednostavna posljedica analogne propozicije 3.3.15 za tenzorski produkt u kategoriji $\mathrm{proVect}$. □

5.4.1 Računanje s formalnim sumama

Lako se vidi da lema 3.3.8 o računanju s formalnim sumama u kategoriji $\mathrm{proVect}$ vrijedi i za formalne sume u kategoriji $\mathrm{indproVect}$.

Lema 5.4.7. *(Lema o računanju s formalnim sumama u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$.*)*

(i) *(Tenzorski produkt formalnih suma.) Neka $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma u V vrijednosti v i $\sum_\mu w_\mu$ formalna suma u W vrijednosti w u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$. *Tada je $\sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu$ formalna suma u $V \tilde{\otimes} W$ i vrijednost joj je jednaka $v \otimes w$. Možemo računati:*

$$\sum_\lambda v_\lambda \otimes \sum_\mu w_\mu = \sum_{\lambda,\mu} v_\lambda \otimes w_\mu.$$

(ii) *(Grupiranje sumanada.) Neka je $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v. Tada je svaka podsuma $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ formalna suma i, označimo li njihove vrijednosti s $v_\lambda := \sum_\mu v_{\lambda\mu}$, izraz $\sum_\lambda v_\lambda$ je formalna suma vrijednosti v. Možemo računati:*

$$\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu} = \sum_\lambda (\sum_\mu v_{\lambda\mu}) = \sum_\lambda v_\lambda.$$

(ii') *(Ekspanzija sumanada.) Obratno, neka je $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma vrijednosti v. Neka je za svaki λ izraz $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v_λ. Tada, ako je $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma, njena vrijednost jednaka je v. Možemo računati:*

$$\sum_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda (\sum_\mu v_{\lambda\mu}) \doteq \sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$$

Točkica predstavlja dodatnu provjeru je li suma s desne strane također formalna.

Ako, dodatno, za svaki λ formalna suma $\sum_\mu v_{\lambda\mu}$ ima svojstvo da iz $\pi_i^V(v_\lambda) = 0$ slijedi $\pi_i^V(v_{\lambda\mu}) = 0$ za svaki μ, onda je odmah $\sum_{\lambda,\mu} v_{\lambda\mu}$ formalna suma vrijednosti v pa ekspanziju sumanada možemo napraviti bez te provjere.

(iii) *Ako je $\sum_\lambda (v_\lambda \otimes w)$ formalna suma i $w \neq 0$, onda je i $\sum_\lambda v_\lambda$ formalna suma. Označimo li njenu vrijednost s v, vrijednost početne sume je tada $v \otimes w$. Možemo pisati*

$$\sum_\lambda (v_\lambda \otimes w) \overset{w \neq 0}{=} (\sum_\lambda v_\lambda) \otimes w = v \otimes w.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za formalnu sumu $\sum_\lambda (v \otimes w_\mu)$ i $v \neq 0$.

(iv) (Slika po morfizmu u $\mathrm{indproVect}$*.) Neka je* $\sum_\lambda v_\lambda$ *formalna suma vrijednosti* v*. Neka je* A *morfizam u* $\mathrm{indproVect}$*. Tada je* $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ *formalna suma i njena vrijednost jednaka je* $A(v)$*. Možemo računati:*

$$A(\sum_\lambda v_\lambda) = \sum_\lambda A(v_\lambda)$$

(iv') Obratno, neka je A *morfizam u* $\mathrm{indproVect}$ *i neka je* $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ *formalna suma. Ako je* $\sum_\lambda v_\lambda$ *formalna suma vrijednosti* v*, onda je vrijednost sume* $\sum_\lambda A(v_\lambda)$ *jednaka* $A(v)$*. Možemo računati:*

$$\sum_\lambda A(v_\lambda) \doteq A(\sum_\lambda v_\lambda)$$

Točkica predstavlja dodatnu provjeru je li suma s desne strane također formalna.

Dokaz. (i) Lako slijedi iz analogne propozicije 3.3.7 o tenzorskom produktu formalnih suma u kategoriji $\mathrm{proVect}$ i definicije formalne sume u kategoriji $\mathrm{indproVect}$.

(ii), (ii'), (iii), (iv), (iv') Lako slijede iz leme 3.3.8 o računanju s formalnim sumama u $\mathrm{proVect}$, definicije formalne sume u $\mathrm{indproVect}$, činjenice da morfizmi u $\mathrm{indproVect}$ poštuju filtracije i da su komponente tih morfizama morfizmi u $\mathrm{proVect}$ koji zbog toga distribuiraju po formalnim sumama. □

Primjer 5.4.8. Neka je $\sum_{\lambda,\mu} A(v_\lambda)B(w_\mu)$ formalna suma u unutrašnjoj algebri (R, μ_R, ν_R) u $\mathrm{indproVect}$, gdje je konkatenacija skraćeni zapis za asocijativni produkt μ_R elemenata. Neka su A i B neki morfizmi u $\mathrm{indproVect}$ čija je kodomena R. Promotrimo sljedeći račun.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\lambda,\mu} A(v_\lambda)B(w_\mu) &= \textstyle\sum_\mu(\sum_\lambda A(v_\lambda)B(w_\mu)) && \text{(grupiranje)}\\
&\doteq \textstyle\sum_\mu(\sum_\lambda A(v_\lambda))B(w_\mu) && \text{(distributivnost } \mu \text{ i dokaz } \textstyle\sum_\lambda A(v_\lambda) \text{ f.s.)}\\
&\doteq \textstyle\sum_\mu A(\sum_\lambda v_\lambda)B(w_\mu) && \text{(distributivnost } A \text{ i dokaz } \textstyle\sum_\lambda v_\lambda \text{ f.s.)}\\
&\doteq A(\textstyle\sum_\lambda v_\lambda)\sum_\mu B(w_\mu) && \text{(distributivnost } \mu \text{ i dokaz } \textstyle\sum_\mu B(w_\mu) \text{ f.s.)}\\
&\doteq A(\textstyle\sum_\lambda v_\lambda)B(\sum_\mu w_\mu) && \text{(distributivnost } B \text{ i dokaz } \textstyle\sum_\mu w_\mu \text{ f.s.)}
\end{aligned}$$

Ukratko, dovoljno je dokazati da su $\sum_\mu w_\mu$ i $\sum_\lambda v_\lambda$ formalne sume, tada formalnost svih ostalih suma slijedi iz toga što su A, B i μ_R morfizmi u $\mathrm{indproVect}$.

5.4.9. Mi nećemo definirati pojam baze općenito za objekte u $\mathrm{indproVect}$, ali za tenzorski produkt objekta R u $\mathrm{indVect}$ i objekta H u $\mathrm{proVect}$ može se definirati skup takav da se svaki element objekta $R \tilde{\otimes} H$ može prikazati na jedinstven način pomoću elemenata tog skupa kao formalna suma u $R \tilde{\otimes} H$ u $\mathrm{indproVect}$. Naime, lako se vidi da je za filtriranu bazu $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ od R i kofiltriranu bazu $\{e_\beta\}_{\beta\in B}$ od H skup $\{D_\alpha \otimes e_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ takav skup za $R \tilde{\otimes} H$. Analogno vrijedi naravno za tenzorski produkt $H \tilde{\otimes} R$.

5.5 Osnovne konstrukcije u kategoriji $\mathrm{indproVect}$

5.5.1 Koujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ i tenzorski produkt

Dokaz sljedećeg teorema je sličan dokazu teorema 4.4.4 s istom tvrdnjom za $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}$, samo ovdje treba pažljivije provjeravati jesu li konstruirani morfizmi u kategoriji $\mathrm{proVect}$ i koristiti propozicije o osnovnim kategorijskim konstrukcijama u $\mathrm{proVect}$.

Teorem 5.5.1. *Neka je $\mathcal{V}$ kategorija* $\mathrm{proVect} \cong \mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect}$. *Tada kategorija $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathcal{V}$ ima koujednačitelje. Ako je paralelni par morfizama filtracija predstavljen paralelnim parom predmorfizama po nivoima, koujednačitelj tog paralelnog para morfizama filtracija je filtracija čije su komponente kvocijenti koujednačitelja paralelnih parova komponentnih preslikavanja po jezgrama preslikavanja u kolimes tih koujednačitelja.*

Dokaz. Zbog propozicije 4.4.3 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da dvije proizvoljne filtracije imaju jednaku indeksnu kategoriju I i da je paralelni par morfizama predstavljen predmorfizmima po nivoima.

Neka su dakle zadane dvije filtracije u kategoriji $\mathcal{V}$,

$$\boldsymbol{A} = (\{A_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\}), \quad \boldsymbol{B} = (\{B_n\}_{n\in I}, \{\psi_{mn}\})$$

i neka je zadan paralelan par morfizama filtracija predmorfizmima po nivoima

$$f = (\mathrm{id}, \{f_n \colon A_n \to B_n\}_{n\in I}), \quad g = (\mathrm{id}, \{g_n \colon A_n \to B_n\}_{n\in I}).$$

Kategorija $\mathcal{V}$ ima koujednačitelje po korolaru 3.4.4 pa za svaki paralelan par f_n, g_n možemo odabrati koujednačitelj $h_n \colon B_n \to C_n$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, dashed, "h_n"] & C_n \end{tikzcd}$$

Neka je $m \leqslant n$ proizvoljan par usporedivih elemenata od I. Dokazujemo da kompozicija $h_m \circ \psi_{nm}$ koujednačuje par f_m, g_m. Morfizam h_n koujednačuje par f_n, g_n pa vrijedi

$$h_n \circ f_n \circ \phi_{nm} = h_n \circ g_n \circ \phi_{nm},$$

iz čega, jer su f i g predmorfizmi kofiltracija, slijedi $h_n \circ \psi_{nm} \circ f_m = h_n \circ \psi_{nm} \circ g_m$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \\ A_m \arrow[u, "\phi_{nm}"] \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, dashed, "\tau_{nm}"'] \end{tikzcd}$$

Dakle, za svaki vezni morfizam ψ_{nm} vrijedi da $h_n \circ \psi_{nm}$ koujednačuje par f_m, g_m pa po univerzalnom svojstvu koujednačitelja h_m slijedi da za svaki ψ_{mn} postoji jedinstveno preslikavanje $\tau_{nm} \colon C_m \to C_n$ takvo da je desni kvadrat na prethodnom dijagramu komutativan.

Dokazujemo da je $(\{C_n\}_{n \in I}, \{\tau_{nm}\})$ usmjereni sustav u $\mathcal{V}$ (ali nije nužno i filtracija). Na sljedećem dijagramu lijevi trokut, gornji i donji kvadrat su komutativni pa je $\tau_{mk} \circ \tau_{kn} \colon C_k \to C_n$ preslikavanje za koje je vanjski kvadrat komutativan, a budući da je takvo preslikavanje jedinstveno, slijedi $\tau_{kn} \circ \tau_{nm} = \tau_{kn}$.

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \\
B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"] \\
B_k \arrow[u, "\psi_{mk}"] \arrow[r, "h_k"] \arrow[uu, bend left, "\psi_{nk}"] & C_k \arrow[u, "\tau_{mk}"] \arrow[uu, bend right, "\tau_{nm} \circ \tau_{mk}"']
\end{tikzcd}$$

Sada ćemo usmjereni sustav zamijeniti filtracijom. Neka je $C \cong \operatorname{colim}_n C_n$ u kategoriji $\mathcal{V} = \mathrm{proVect}$, on postoji prema propoziciji 3.4.22. Označimo s $\kappa_n^C \colon C_n \to C$ komponente tog univerzalnog kokonusa. Tada su potprostori $\operatorname{Ker} \kappa_n^C \leqslant C_n$ i kvocijenti $C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C$ objekti u $\mathcal{V}$ i preslikavanja $\operatorname{Ker} \kappa_n^C \hookrightarrow C_n$ i $q_n \colon C_n \to C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C$ su morfizmi u $\mathcal{V}$, prema lemi 3.4.10 i propoziciji 3.4.12. Za svaki $n \in I$ sada postoji jedinstveno preslikavanje

$$\iota_n^C \colon C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C \to C$$

takvo da je sljedeći dijagram komutativan i to preslikavanje je morfizam u $\mathcal{V}$ (vidi propoziciju 3.4.14) i injekcija.

$$\begin{tikzcd}
C & \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"] \arrow[r, "q_n"'] & C_n / \operatorname{Ker} \kappa_n^C \arrow[ul, dashed, "\iota_n^C"']
\end{tikzcd}$$

Budući da je $\tau_{nm}(\operatorname{Ker} \kappa_m^C) \subseteq \operatorname{Ker} \kappa_n^C$, postoji jedinstveno preslikavanje γ_{nm} takvo da je kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan, a budući da vrijedi štoviše $\operatorname{Ker} \kappa_m^C = \tau_{nm}^{-1}(\operatorname{Ker} \kappa_n^C)$, ono je injekcija.

$$\begin{tikzcd}
C & \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"'] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[uu, bend left, "\kappa_m^C"] \arrow[r, "q_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, dashed, "\gamma_{nm}"']
\end{tikzcd}$$

Inducirano preslikavanje γ_{nm} je također morfizam u $\mathcal{V}$, prema propoziciji 3.4.14. Vrijedi jednakost $\gamma_{kn} \circ \gamma_{nm} = \gamma_{km}$, jer je zbog komutativnosti lijevog trokuta i oba kvadrata na sljedećem dijagramu komutativan i cijeli vanjski peterokut, a γ_{km} je jedinstveno preslikavanje sa svojstvom $\gamma_{km} \circ q_m = q_k \circ \tau_{km}$.

$$\begin{tikzcd}
C_k \arrow[r, "q_k"'] & C_k/\operatorname{Ker}\kappa_k^C \\
C_n \arrow[u, "\tau_{kn}"'] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[u, "\gamma_{kn}"'] \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[uu, bend left, "\tau_{km}"] \arrow[r, "q_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"']
\end{tikzcd}$$

Dakle, $\boldsymbol{C} := (\{C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C\}, \{\gamma_{nm}\})$ je filtracija u $\mathcal{V}$.

Na sljedećem dijagramu je komutativan gornji kvadrat, donji kvadrat i lijevi trokut, pa slijedi da je $\kappa_m^C = \iota_n^C \circ \gamma_{nm} \circ q_m$ što zbog jedinstvenosti preslikavanja ι_m^C sa svojstvom $\kappa_m^C = \iota_m^C \circ q_m$ povlači $\iota_n^C \circ \gamma_{nm} = \iota_m^C$. Dakle, $\{\iota_n^C\}$ su komponente kokonusa s vrhom C nad tom filtracijom.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] & C \\
C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"'] \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[u, "\iota_n^C"'] \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[uu, bend left, "\kappa_m^C"] \arrow[r, "q_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"'] \arrow[uu, bend right, "\iota_m^C"']
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je taj kokonus univerzalan. Neka je $(G, \{\iota_n^G\})$ drugi kokonus u $\mathcal{V}$ nad filtracijom $(\{C_n/\operatorname{Ker}\iota_n^C\}, \{\gamma_{nm}\})$. Tada je $(G, \{\iota_n^G \circ q_n\})$ kokonus nad filtracijom $(\{C_n\}, \{\tau_{nm}\})$ pa postoji jedinstveno preslikavanje $z\colon C \to G$ takvo da je $z \circ \kappa_n^C = \iota_n^G \circ q_n$. Budući da je $\kappa_n^C = \iota_n^C \circ q_n$ i q_n je epimorfizam slijedi $z \circ \iota_n^C = \iota_n^G$. Dakle, postoji preslikavanje $z\colon C \to G$ takvo da je $z \circ \iota_n^C = \iota_n^G$. Takvo preslikavanje je jedinstveno, jer svako preslikavanje $z'\colon C \to G$ za koje vrijedi $z' \circ \iota_n^C = \iota_n^G$ vrijedi i $z' \circ \kappa_n^C = \iota_n^G \circ q_n$ pa ono mora biti jednako jedinstvenom takvom preslikavanju z.

Očito je $q := (\mathrm{id}, \{q_n\})$ predmorfizam usmjerenih sustava, pa je $q \circ h = (\mathrm{id}, \{q_n \circ h_n\})$ predmorfizam filtracija. Dokazat ćemo da je $q \circ h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ koujednačitelj paralelnog para $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \end{tikzcd}$$

Uzmimo bilo koju filtraciju $\boldsymbol{D} = (\{D_n\}_{n\in J}, \{\sigma_{mn}\})$ u $\mathcal{V}$ i predmorfizam kofiltracija

$$e = (\mu\colon I \to J, \{e_n\colon B_n \to D_{\mu(n)}\}_{n\in I})\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{D}$$

takav da je $e \circ f = e \circ g$. Budući da za svaki $n \in I$ komponenta e_n koujednačuje par f_n, g_n postoji jedinstveno preslikavanje $d_n\colon C_n \to D_{\mu(n)}$ takvo da je $d_n \circ h_n = e_n$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[rrr, bend right, "e_n"'] & C_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend right, "d_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C & D_{\mu(n)} \end{tikzcd}$$

Neka je $d\colon C \to D$ preslikavanje među kolimesima u $\mathrm{proVect}$ inducirano predmorfizmom $(\mu, \{d_n\})$. Svaki element od $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \subseteq C_n$ se preslikavanjem $d \circ \kappa_n^C$ preslika u $0 \in D$, pa je, zbog komutativnosti vanjskog četverokuta, $d_n(\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \subseteq \operatorname{Ker}\iota_{\mu(n)}^D$. Po propoziciji 3.4.22 komponente $\iota_{\mu(n)}^D\colon D_{\mu(n)} \to D$ univerzalnog kokonusa u $\mathrm{proVect}$ nad filtracijom $\boldsymbol{D}$ u $\mathrm{proVect}$ su monomorfizmi, pa je $\operatorname{Ker}\iota_{\mu(n)}^D = \{0\}$. Dakle, postoji i jedinstveno je preslikavanje $r_n\colon C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \to D_{\mu(n)}$ takvo da je donji trokut na sljedećem dijagramu komutativan. Preslikavanje r_n je morfizam u $\mathcal{V}$ po lemi 3.4.14.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] & & D \\ C_n \arrow[u, "\kappa_n^C"] \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend right, "d_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, dashed, "r_n"] & D_{\mu(n)} \arrow[u, "\iota_{\mu(n)}^D"'] \end{tikzcd}$$

Sada dokazujemo da je $r := (\mu, \{r_n\})$ predmorfizam filtracija. Za svaki usporedivi par $m \leqslant n$, na sljedećem dijagramu su vanjski četverokut, lijevi kvadrat, gornji i donji trokut komutativni i preslikavanje q_m je epimorfizam, pa je i desni kvadrat komutativan.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[rr, bend left, "d_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, "r_n"] & D_{\mu(n)} \\
C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"] \arrow[r, "q_m"] \arrow[rr, bend right, "d_m"'] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"] \arrow[r, "r_m"] & D_{\mu(m)} \arrow[u, "\sigma_{nm}"]
\end{tikzcd}$$

Očito je $r \circ q \circ h = e$. Dokažimo sada da je svaki drugi takav predmorfizam ekvivalentan r. Neka je $p := (\nu, \{p_n\})$ neki drugi predmorfizam takav da je $p \circ q \circ h = e$. Tada postoji gornja međa $l \in J$ od $\mu(n), \nu(n)$ takva da je $\sigma_{l\mu(n)} \circ e_n = \sigma_{l\nu(n)} \circ p_n \circ q_n \circ h_n$, tj. vanjski šesterokut na sljedećem dijagramu je komutativan.

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "h_n"'] \arrow[rrr, bend left, "e_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"'] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, "r_n"'] \arrow[dr, "p_n"'] & D_{\mu(n)} \arrow[dr, "\sigma_{l\mu(n)}"] & \\
 & & & & D_l \\
 & & & D_{\nu(n)} \arrow[ur, "\sigma_{l\nu(n)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Gornji četverokut na dijagramu je komutativan i $q_n \circ h_n$ je epimorfizam pa iz prethodnoga slijedi da je komutativan i desni četverokut. Dakle, predmorfizmi r i p su ekvivalentni. Time je dokaz dovršen. $\square$

Teorem 5.5.2. *U kategoriji* $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{Vect} \cong \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ *i kategoriji* $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{Pro}^s_{\aleph_0}\mathrm{VectFin} \cong \mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVectFin}$ *tenzorski produkt komutira s koujednačiteljima.*

Dokaz. Neka je $f, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ paralelni par morfizama filtracija u $\mathrm{proVect}$. Kao u dokazu propozicije 5.5.1, pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da su indeksne kategorije te dvije filtracije jednake: $\boldsymbol{A} = (\{A_n\}_{n \in I}, \{\phi_{mn}\})$, $\boldsymbol{B} = (\{B_n\}_{n \in I}, \{\psi_{mn}\})$ i morfizmi su predstavljeni paralelnim morfizmima po nivoima: $f = (\mathrm{id}, \{f_n\colon A_n \to B_n\}_{n \in I})$, $g = (\mathrm{id}, \{g_n\colon A_n \to B_n\}_{n \in I})$. Neka je filtracija $\boldsymbol{C} = (\{C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C\}_{n \in I}, \{\gamma_{nm}\})$ zajedno s predmorfizmom $(\mathrm{id}, \{q_n \circ h_n\}_{n \in I})$ koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$ paralelnog para f, g konstruiran kao u dokazu te propozicije. Pritom su $h_n\colon B_n \to C_n$ koujednačitelji paralelnih komponenti $f_n, g_n\colon A_n \to B_n$, preslikavanja

$\tau_{nm}\colon C_m \to C_n$ su preslikavanja inducirana među vrhovima tih koujednačitelja, $\kappa_n^C\colon C_n \to C$ su komponente univerzalnog kokonusa nad usmjerenim sustavom $(\{C_n\}_{n\in I}, \{\tau_{nm}\})$ u $\mathrm{proVect}$, $q_n\colon C_n \to C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C$ su kvocijentna preslikavanja, a γ_{nm} preslikavanja inducirana među kvocijentima, uz sljedeći komutativni dijagram iz dokaza te propozicije.

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[r, "h_n"] & C_n \arrow[r, "q_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \\
A_m \arrow[u, "\phi_{nm}"] \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \arrow[u, "\psi_{nm}"'] \arrow[r, "h_m"] & C_m \arrow[u, "\tau_{nm}"'] \arrow[r, "q_m"] & C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C \arrow[u, "\gamma_{nm}"']
\end{tikzcd}$$

(i) Tenzorirajmo taj dijagram s identitetom na proizvoljnoj filtraciji $\boldsymbol{D} = (\{D_l\}_{l\in J}, \{\sigma_{lk}\})$ u $\mathrm{proVect}$. Želimo pokazati da je dobivena filtracija

$$\boldsymbol{C}\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{D} = (\{(C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C)\,\hat{\otimes}\,D_l\}_{(n,l)\in I\times J}, \{\gamma_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}\})$$

u $\mathrm{proVect}$ zajedno s predmorfizmom

$$(q\circ h)\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id} = (\mathrm{id}, \{(q_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\circ(h_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\colon B_n\,\hat{\otimes}\,D_l \to (C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C)\,\hat{\otimes}\,D_l\})$$

koujednačitelj paralelnog para $f\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}, g\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}\colon \boldsymbol{A}\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}\,\hat{\otimes}\,\boldsymbol{D}$.

$$\begin{tikzcd}
A_n\,\hat{\otimes}\,D_l \arrow[r, shift left, "f_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"'] & B_n\,\hat{\otimes}\,D_l \arrow[r, "h_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] & C_n\,\hat{\otimes}\,D_l \arrow[r, "q_n\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] & (C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C)\,\hat{\otimes}\,D_l \\
A_m\,\hat{\otimes}\,D_k \arrow[u, "\phi_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}"] \arrow[r, shift left, "f_m\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_m\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"'] & B_m\,\hat{\otimes}\,D_k \arrow[u, "\psi_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}"'] \arrow[r, "h_m\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] & C_m\,\hat{\otimes}\,D_k \arrow[u, "\tau_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}"'] \arrow[r, "q_m\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}"] & (C_m/\operatorname{Ker}\kappa_m^C)\,\hat{\otimes}\,D_k \arrow[u, "\gamma_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}"']
\end{tikzcd}$$

(ii) Konstruirajmo sada koujednačitelj paralelnog para $f\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}$, $g\,\hat{\otimes}\,\mathrm{id}$ morfizama filtracija slijedeći korake konstrukcije iz dokaza propozicije 5.5.1.

Budući da po korolaru 3.4.4 propozicije 3.4.2 u $\mathrm{proVect}$ koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom, prva tri člana u svakom redu na prethodnom dijagramu opet čine koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$. Lako se vidi, zbog komutativnosti tog dijagrama, da su preslikavanja $\tau_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}$ jednaka jedinstvenim preslikavanjima induciranim među vrhovima koujednačitelja. Time je prvi dio konstrukcije koujednačitelja morfizama filtracija dovršen i imamo usmjereni sustav

$$(\{C_n\,\hat{\otimes}\,D_l\}_{(n,l)\in I\times J}, \{\tau_{nm}\,\hat{\otimes}\,\sigma_{lk}\})$$

u $\mathrm{proVect}$ koji nije nužno filtracija. Dalje, označimo s $\operatorname{colim}_{n,l} C_n \hat{\otimes} D_l$ vrh kolimesa u $\mathrm{proVect}$ tog usmjerenog sustava. On je po propoziciji 3.4.22 jednak vrhu kolimesa u Vect tog usmjerenog sustava, pa ova oznaka neće izazvati zabune. Označimo komponente tog univerzalnog kokonusa sa

$$\kappa^{CD}_{n,l} : C_n \hat{\otimes} D_l \to \operatorname*{colim}_{n,l} C_n \hat{\otimes} D_l,$$

komponente su naravno morfizmi u $\mathrm{proVect}$. Po konstrukciji koju slijedimo, vrh koujednačitelja paralelnog para $f \hat{\otimes} \mathrm{id}$, $g \hat{\otimes} \mathrm{id}$ je dakle filtracija

$$(\{(C_n \hat{\otimes} D_l)/ \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l}\}_{(n,l)\in I\times J}, \{\gamma'_{nm,lk}\})$$

u $\mathrm{proVect}$ zajedno s predmorfizmom $(\mathrm{id}, \{q'_{n,l} \circ (h_n \otimes \mathrm{id})\}_{(n,l)\in I\times J})$ kao na sljedećem dijagramu. Pritom su $q'_{n,l}$ kvocijentna preslikavanja, a $\gamma'_{nm,lk}$ preslikavanja inducirana među kvocijentima u $\mathrm{proVect}$.

$$\begin{tikzcd}
A_n \hat{\otimes} D_l \arrow[r, shift left, "f_n \hat{\otimes} \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_n \hat{\otimes} \mathrm{id}"'] & B_n \hat{\otimes} D_l \arrow[r, "h_n \hat{\otimes} \mathrm{id}"] & C_n \hat{\otimes} D_l \arrow[r, "q'_{n,l}"] & (C_n \hat{\otimes} D_l)/ \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l} \\
A_m \hat{\otimes} D_k \arrow[u, "\phi_{nm} \hat{\otimes} \sigma_{lk}"] \arrow[r, shift left, "f_m \hat{\otimes} \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g_m \hat{\otimes} \mathrm{id}"'] & B_m \hat{\otimes} D_k \arrow[u, "\psi_{nm} \hat{\otimes} \sigma_{lk}"] \arrow[r, "h_m \hat{\otimes} \mathrm{id}"] & C_m \hat{\otimes} D_k \arrow[u, "\tau_{nm} \hat{\otimes} \sigma_{lk}"] \arrow[r, "q'_{m,k}"] & (C_m \hat{\otimes} D_k)/ \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{m,k} \arrow[u, "\gamma'_{nm,lk}"]
\end{tikzcd}$$

Sva navedena preslikavanja su morfizmi u $\mathrm{proVect}$, kako je objašnjeno u samoj konstrukciji koujednačitelja koju slijedimo.

(iii) Usporedimo sada komponente dva predmorfizma po kojima se prethodne dvije konstrukcije razlikuju: kvocijentna preslikavanja u (ii)

$$q'_{n,l} \colon C_n \hat{\otimes} D_l \to (C_n \hat{\otimes} D_l)/ \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l}$$

i tenzorske produkte kvocijentnih preslikavanja s identitetom u (i)

$$q_n \otimes \mathrm{id} \colon C_n \hat{\otimes} D_l \to (C_n/ \operatorname{Ker} \kappa^{C}_{n}) \hat{\otimes} D_l.$$

Po propoziciji 3.4.12 kvocijent kofiltriranog vektorskog prostora po potpunom potprostoru je koujednačitelj inkluzije i nul-preslikavanja. Dakle, kvocijentno preslikavanje $q'_{n,l}$ je koujednačitelj paralelnog para: nul-preslikavanja 0 i inkluzije $\eta^{CD}_{n,l} \colon \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l} \to C_n \hat{\otimes} D_l$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l} \arrow[r, shift left, "\eta^{CD}_{n,l}"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C_n \hat{\otimes} D_l \arrow[r, "q'_{n,l}"] & (C_n \hat{\otimes} D_l)/ \operatorname{Ker} \kappa^{CD}_{n,l}
\end{tikzcd}$$

Iz istog razloga kvocijentno preslikavanje q_n je koujednačitelj paralelnog para: nul-preslikavanja 0 i inkluzije $\eta_n^C\colon\ \operatorname{Ker}\kappa_n^C \to C_n$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\kappa_n^C \arrow[r, shift left, "\eta_n^C"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C_n \arrow[r, "q_n"] & C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C \end{tikzcd}$$

Po korolaru 3.4.4 tenzorski produkt komutira s koujednačiteljima u $\mathrm{proVect}$ pa iz prethodnog slijedi da je $q_n \hat{\otimes} \mathrm{id}$ koujednačitelj od $\eta_n^C \hat{\otimes} \mathrm{id}$, 0:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l \arrow[r, shift left, "\eta_n^C \hat{\otimes} \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C_n \hat{\otimes} D_l \arrow[r, "q_n \hat{\otimes} \mathrm{id}"] & (C_n/\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \hat{\otimes} D_l \end{tikzcd}$$

Dokazat ćemo da je

$$\operatorname{Ker}(\kappa_n^C) \hat{\otimes} D_l = \operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD}$$

iz čega će slijediti da su preslikavanja $q'_{n,l}$ i $q_n \hat{\otimes} \mathrm{id}$ koujednačitelji istog para morfizama: $\eta_{n,l}^{CD} = \eta_n^C \hat{\otimes} \mathrm{id}$, 0. Time će onda biti jasno da su filtracije konstruirane u (i) i (ii) izomorfne.

(iv) Dokazujemo prvo $\operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD} \subseteq \operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$. Označimo s $D = \operatorname{colim}_l D_l$ vrh, a s $\iota_k^D\colon D_k \to D$ komponente univerzalnog kokonusa u $\mathrm{proVect}$ nad filtracijom $\boldsymbol{D} = (\{D_l\}_{l\in J}, \{\sigma_{lk}\})$. Već smo s $C = \operatorname{colim}_n C_n$ označili vrh i s $\kappa_n^C\colon C_n \to C$ komponente univerzalnog kokonusa u $\mathrm{proVect}$ nad usmjerenim sustavom $(\{C_n\}_{n\in I}, \{\tau_{nm}\})$. Tenzorski produkt $C \hat{\otimes} D$ je tada vrh kokonusa nad usmjerenim sustavom $(\{C_n \hat{\otimes} D_l\}_{(n,l)\in I\times J}, \{\tau_{nm} \hat{\otimes} \sigma_{lk}\})$ i komponente tog kokonusa su $\{\kappa_n^C \hat{\otimes} \iota_l^D\}$. Po univerzalnom svojstvu kolimesa nad tim usmjerenim sustavom postoji jedinstveno preslikavanje θ u $\mathrm{proVect}$ takvo da je sljedeći dijagram komutativan za svaki $(n,l) \in I \times J$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{colim}_{n,l} C_n \hat{\otimes} D_l \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & (\operatorname{colim}_n C_n) \hat{\otimes} (\operatorname{colim}_l D_l) \\ & C_n \hat{\otimes} D_l \arrow[ul, "\kappa_{n,l}^{CD}"] \arrow[ur, "\kappa_n^C \hat{\otimes} \iota_l^D"'] & \end{tikzcd}$$

Iz toga slijedi da je $\operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD} \subseteq \operatorname{Ker}(\kappa_n^C \hat{\otimes} \iota_l^D)$. Po propoziciji 3.4.22, komponente ι_l^D univerzalnog kokonusa nad filtracijom u $\mathrm{proVect}$ su injekcije, pa po propoziciji 3.4.23 slijedi

$$\operatorname{Ker}(\kappa_n^C \hat{\otimes} \iota_l^D) = (\operatorname{Ker}\kappa_n^C) \hat{\otimes} D_l.$$

Dakle vrijedi $\operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD} \subseteq \operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$. Preostaje dokazati da je $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l \subseteq \operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD}$.

(v) Dokazujemo sada $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l \subseteq \operatorname{Ker}\kappa_{n,l}^{CD}$. Proizvoljan element tenzorskog produkta $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$ može se zapisati kao formalna suma jednostavnih tenzora u $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$. Zbog toga i distributivnosti $\kappa_{n,l}^{CD}$ po formalnim sumama dovoljno je dokazati da za svaki jednostavni tenzor $c \otimes d$ u $\operatorname{Ker}\kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$ vrijedi $\kappa_{n,l}^{CD}(c \otimes d) = 0$. U sljedeće dvije tvrdnje koristimo propoziciju 3.4.22 u kojoj je opisan filtrirani kolimes u $\mathrm{proVect}$. Komponenta κ_n^C je sljedeća kompozicija inkluzije $\nu_n^C\colon C_n \hookrightarrow \coprod_n C_n$ i kvocijentnog preslikavanja:

$$\kappa_n^C\colon C_n \hookrightarrow \coprod_n C_n \to (\coprod_n C_n)/W = \operatorname*{colim}_n C_n$$

gdje je $W = \hat{W}$ vektorski potprostor od $\coprod_n C_n$ generiran skupom

$$\{\nu_n^C(e) - \nu_m^C(e') \mid n, m \in I, e \in C_n, e' \in C_m, (\exists p \geqslant n, m)(\tau_{pn}(e) = \tau_{pm}(e')\}.$$

Vrijedi da je $c \in \operatorname{Ker} \kappa_n^C$ ako i samo ako je $\nu_n^C(c) \in W$. Slično ćemo označiti injekcije $\nu_l^D\colon D_l \hookrightarrow \coprod_l D_l$.

Analogno, komponenta $\kappa_{n,l}^{CD}$ je kompozicija inkluzije $\nu_{n,l}^{CD}\colon C_n \hat{\otimes} D_l \hookrightarrow \coprod_{n,l}(C_n \hat{\otimes} D_l)$ i kvocijentnog preslikavanja:

$$\kappa_{n,l}^{CD}\colon C_n \hat{\otimes} D_l \hookrightarrow \coprod_{n,l}(C_n \hat{\otimes} D_l) \to (\coprod_{n,l}(C_n \hat{\otimes} D_l)/W' = \operatorname*{colim}_{n,l}(C_n \hat{\otimes} D_l)$$

gdje je $W' = \hat{W}'$ vektorski potprostor od $\coprod_{n,l}(C_n \hat{\otimes} D_l)$ generiran skupom

$$\{\nu_{n,l}^{CD}(e) - \nu_{m,k}^{CD}(e') \mid n, m \in I, k, l \in J, e \in C_n \hat{\otimes} D_l, e' \in C_m \hat{\otimes} D_k,$$
$$(\exists p \geqslant n, m)(\exists r \geqslant k, l)((\tau_{pn} \hat{\otimes} \sigma_{rl})(e) = (\tau_{pm} \hat{\otimes} \sigma_{rk})(e'))\}.$$

Očito je $c \otimes d \in \operatorname{Ker} \kappa_{n,l}^{CD}$ ako i samo ako je $\nu_{n,l}^{CD}(c \otimes d) \in W'$.

Neka je $c \otimes d$ dakle proizvoljan jednostavni tenzor u $\operatorname{Ker} \kappa_n^C \hat{\otimes} D_l$. Dalje u dokazu nekoliko puta koristimo činjenicu da je običan tenzorski produkt uložen u upotpunjeni tenzorski produkt što je dokazano u propoziciji 3.3.16. Zamijetimo da je

$$c \otimes d \in C_n \otimes D_l \subseteq C_n \hat{\otimes} D_l.$$

Vrijedi $c \in \operatorname{Ker} \kappa_n^C$ pa je $\nu_n^C(c)$ jednak konačnoj sumi generatora od W:

$$\nu_n^C(c) = \sum_{s=1}^{N}(\nu_{n_s}^C(e_s) - \nu_{m_s}^C(e_s')) \in \coprod_n C_n,$$

tj. takvih da za svaki s postoje $p_s \geqslant n_s, m_s$ takvi da je $\tau_{p_s n_s}(e_s) = \tau_{p_s m_s}(e_s')$. Dalje je

$$\nu_n^C(c) \otimes \nu_l^D(d) = (\sum_{s=1}^{N}(\nu_{n_s}^C(e_s) - \nu_{m_s}^C(e_s')) \otimes \nu_l^D(d) \in \coprod_n C_n \otimes \coprod_l D_l$$

i vrijedi

$$\coprod_n C_n \otimes \coprod_l D_l = \coprod_{n,l} C_n \otimes D_l \subseteq \coprod_{n,l} C_n \hat{\otimes} D_l,$$

pa pišemo

$$\nu_n^C(c) \otimes \nu_l^D(d) = \sum_{s=1}^{N} (\nu_{n_s}^C(e_s) \otimes \nu_l^D(d) - \nu_{m_s}^C(e'_s) \otimes \nu_l^D(d)) \in \coprod_{n,l} C_n \otimes D_l.$$

Za svaki $n \in I$, $l \in J$ je korestrikcija restrikcije

$$\nu_{n,l}^{CD} \,|_{C_n \otimes D_l}^{\coprod_{n,l} C_n \otimes D_l} : C_n \otimes D_l \to \coprod_{n,l} C_n \otimes D_l$$

jednaka tenzorskom produktu

$$\nu_n^C \otimes \nu_l^D : C_n \otimes D_l \to \coprod_n C_n \otimes \coprod_l D_l = \coprod_{n,l} C_n \otimes D_l.$$

Zbog toga možemo prethodnu jednakost zapisati:

$$\nu_{n,l}^{CD}(c \otimes d) = \sum_{s=1}^{N} (\nu_{n_s,l}^{CD}(e_s \otimes d) - \nu_{m_s,l}^{CD}(e'_s \otimes d)) \in \coprod_{n,l} C_n \otimes D_l \subseteq \coprod_{n,l} C_n \hat{\otimes} D_l.$$

Sada se vidi da je $(\tau_{p_s n_s} \otimes \sigma_{ll})(e_s \otimes d) = (\tau_{p_s m_s} \otimes \sigma_{ll})(e'_s \otimes d)$ za svaki s pa je svaki sumand u toj sumi generator od W'. Slijedi $\nu_{n,l}^{CD}(c \otimes d) \in W'$, to jest $c \otimes d \in \operatorname{Ker} \kappa_{n,l}^{CD}$. Dokaz je dovršen. □

Korolar 5.5.3. *Simetrična monoidalna kategorija* $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ *posjeduje koujednačitelje i oni komutiraju s tenzorskim produktom.*

Dokaz. Kategorije $\mathrm{indproVect}$ i $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$ su ekvivalentne simetrične monoidalne kategorije, a tvrdnja vrijedi u kategoriji $\mathrm{Ind}^s_{\aleph_0}\mathrm{proVect}$.

□

5.5.2 Ujednačitelj u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$

Ova propozicija nije nužna za daljnje izlaganje.

Propozicija 5.5.4. *Neka kategorija $\mathcal{V}$ dopušta ujednačitelje. Tada kategorija $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$ dopušta ujednačitelje i ujednačitelj paralelnog para morfizama je filtracija čije su komponente ujednačitelji komponenti tog paralelnog para i vezni morfizmi jedinstvena inducirana preslikavanja među njima.*

Dokaz. Zbog propozicije 4.4.3 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da dvije proizvoljne filtracije imaju jednaku indeksnu kategoriju I i da je paralelni par morfizama predstavljen predmorfizmima po nivoima. Neka su dakle zadane dvije filtracije u kategoriji $\mathcal{V}$,

$$\boldsymbol{A} = (\{A_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\}), \quad \boldsymbol{B} = (\{B_n\}_{n\in I}, \{\psi_{mn}\})$$

i neka je zadan paralelan par morfizama filtracija predmorfizmima po nivoima

$$f = (\mathrm{id}, \{f_n \colon A_n \to B_n\}_{n \in I}) \;\text{ i }\; g = (\mathrm{id}, \{g_n \colon A_n \to B_n\}_{n \in I}).$$

Za svaki paralelan par f_n, g_n možemo odabrati ujednačitelj $h_n \colon C_n \to A_n$ u kategoriji $\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, dashed, "h_n"] & A_n \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \end{tikzcd}$$

Neka je $m \leqslant n$ proizvoljan par usporedivih elemenata od I. Budući da tada $\phi_{mn} \circ h_n$ ujednačuje par f_m, g_m, vrijedi

$$f_m \circ \phi_{mn} \circ h_n = \psi_{mn} \circ f_n \circ h_n = \psi_{mn} \circ g_n \circ h_n = g_m \circ \phi_{mn} \circ h_n,$$

pa po univerzalnom svojstvu ujednačitelja postoji jedinstveni morfizam $\tau_{mn} \colon C_n \to C_m$ u kategoriji $\mathcal{V}$ takav da je $\phi_{mn} \circ h_n = h_m \circ \tau_{mn}$.

$$\begin{tikzcd} C_m \arrow[r, "h_m"] & A_m \arrow[r, shift left, "f_m"] \arrow[r, shift right, "g_m"'] & B_m \\ C_n \arrow[u, dashed, "\tau_{mn}"] \arrow[r, "h_n"] & A_n \arrow[u, "\phi_{mn}"] \arrow[r, shift left, "f_n"] \arrow[r, shift right, "g_n"'] & B_n \arrow[u, "\psi_{mn}"'] \end{tikzcd}$$

Budući da je svaki ujednačitelj h_n monomorfizam i vezna preslikavanja ϕ_{mn} filtracija su monomorfizmi, slijedi da je i τ_{mn} monomorfizam u $\mathcal{V}$. Na sljedećem dijagramu su dva unutrašnja kvadrata komutativna i desni trokut je komutativan, pa je komutativan i vanjski peterokut, što zbog jedinstvenosti preslikavanja τ_{ln} sa svojstvom $h_l \circ \tau_{ln} = \phi_{ln} \circ h_n$ povlači $\tau_{lm} \circ \tau_{mn} = \tau_{ln}$.

$$\begin{tikzcd} C_l \arrow[r, "h_l"] & A_l \\ C_m \arrow[u, "\tau_{lm}"] \arrow[r, "h_m"] & A_m \arrow[u, "\phi_{lm}"'] \\ C_n \arrow[u, "\tau_{mn}"] \arrow[r, "h_n"] & A_n \arrow[u, "\phi_{mn}"'] \arrow[uu, bend right, "\phi_{ln}"'] \end{tikzcd}$$

Dakle, $\boldsymbol{C} := (\{C_n\}_{n \in I}, \{\tau_{mn}\})$ je filtracija u $\mathcal{V}$ i očito je $h = (\mathrm{id}, \{h_n\})$ predmorfizam filtracija.

Dokazat ćemo da je $h\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{A}$ ujednačitelj para $f,\, g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ u kategoriji $\mathrm{Ind}^s\mathcal{V}$. Neka je $\boldsymbol{D} = (\{D_n\}_{n\in J}, \{\sigma_{mn}\})$ filtracija u $\mathcal{V}$ i neka je

$$e = (\mu\colon J \to I, \{e_n\colon D_n \to A_{\mu(n)}\}_{n\in J})\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{A}$$

predmorfizam filtracija takav da je $f \circ e = g \circ e$. Tada po univerzalnom svojstvu ujednačitelja postoje jedinstveni morfizmi $r_n\colon D_n \to C_{\mu(n)}$ u $\mathcal{V}$ za koje vrijedi $h_{\mu(n)} \circ r_n = e_n$.

$$\begin{tikzcd}
D_n \arrow[r, dashed, "r_n"] \arrow[rr, bend right, "e_n"'] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] & A_{\mu(n)} \arrow[r, shift left, "f_{\mu(n)}"] \arrow[r, shift right, "g_{\mu(n)}"'] & B_{\mu(n)}
\end{tikzcd}$$

Dokazujemo da je $r := (\mu, \{r_n\})$ predmorfizam filtracija. Na sljedećem dijagramu je komutativan desni kvadrat, vanjski četverokut, gornji i donji trokut i $h_{\mu(m)}$ je monomorfizam, pa je komutativan i lijevi kvadrat.

$$\begin{tikzcd}
D_m \arrow[r, "r_m"'] \arrow[rr, bend left, "e_m"] & C_{\mu(m)} \arrow[r, "h_{\mu(m)}"'] & A_{\mu(n)} \\
D_n \arrow[u, "\sigma_{mn}"] \arrow[r, "r_n"] \arrow[rr, bend right, "e_n"'] & C_{\mu(n)} \arrow[u, "\tau_{mn}"'] \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] & A_{\mu(n)} \arrow[u, "\phi_{mn}"']
\end{tikzcd}$$

Očito je $h \circ r = e$. Dokažimo sada da je svaki drugi takav predmorfizam ekvivalentan r. Neka je $p = (\nu, \{p_n\})$ neki drugi predmorfizam takav da je $h \circ p = e$. Tada postoji gornja međa $l \in I$ od $\mu(n)$ i $\nu(n)$ takva da je vanjski peterokut na sljedećem dijagramu komutativan.

$$\begin{tikzcd}
 & C_{\nu(n)} \arrow[r, "h_{\nu(n)}"] & A_{\nu(n)} \arrow[dr, dashed, "\phi_{l\nu(n)}"] & \\
 & & & A_l \\
D_n \arrow[uur, "p_n"] \arrow[r, "r_n"] \arrow[rr, bend right, "e_n"'] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] & A_{\mu(n)} \arrow[ur, dashed, "\phi_{l\mu(n)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Budući da su na sljedećem dijagramu komutativni vanjski peterokut, donji trokut, dva unutrašnja desna četverokuta i h_l je monomorfizam, slijedi da je komutativan i unutrašnji lijevi četverokut, tj. predmorfizam p ekvivalentan je predmorfizmu r.

$$\begin{tikzcd}
 & C_{\nu(n)} \arrow[r, "h_{\nu(n)}"] \arrow[dr, "\tau_{l\nu(n)}"'] & A_{\nu(n)} \arrow[dr, "\phi_{l\nu(n)}"] & \\
 & & C_l \arrow[r, "h_l"] & A_l \\
D_n \arrow[uur, "p_n"] \arrow[r, "r_n"] \arrow[rr, bend right, "e_n"'] & C_{\mu(n)} \arrow[r, "h_{\mu(n)}"] \arrow[ur, "\tau_{l\mu(n)}"] & A_{\mu(n)} \arrow[ur, "\phi_{l\mu(n)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Time je dokaz dovršen.

□

Napomena 5.5.5. U prethodnom poglavlju nije dokazano što je ujednačitelj u $\mathrm{proVect}$, ali to je vjerojatno jednostavno $\mathrm{Ker}(f-g) \hookrightarrow A$ za paralelni par $f, g\colon A \to B$ u $\mathrm{proVect}$.

Poglavlje 6

Algebra u monoidalnim kategorijama

Definicija monoidalne kategorije dana je u 2.2.1 i simetrične monoidalne kategorije u 2.2.2. U ovom poglavlju definiramo neke tipove algebarskih struktura u monoidalnim kategorijama: monoide (algebre), komonoide (koalgebre), bialgebre, module nad algebrama, komodule nad koalgebrama, bimodule, Yetter-Drinfeldove module, te neke osnovne konstrukcije s njima. Ponekad se naglašava da su to internalizirane varijante tih pojmova u općim monoidalnim kategorijama riječju unutarnji, dakle unutarnji modul za razliku od običnih modula u kategoriji vektorskih prostora, unutarnji monoid za razliku od običnih monoida u kategoriji skupova. Za neke od tih konstrukcija, posebno za tenzorski produkt bimodula, potrebno je da je monoidalna kategorija simetrična ili da dopušta koujednačitelje koji komutiraju s tenzorskim produktom.

6.1 Algebra, koalgebra, bialgebra, Hopfova algebra

6.1.1 Definicija monoida (algebre) i morfizma monoida

Definicija 6.1.1. *Monoid* (sinonim: algebra) u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$ je trojka (A, μ, η) u kojoj je A objekt u $\mathcal{V}$, a $\mu\colon A \otimes A \to A$ (množenje u monoidu) i $\eta\colon k \to A$ (jedinica monoida) su morfizmi u $\mathcal{V}$ koji zadovoljavaju sljedeća dva aksioma:

(i) asocijativnost

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd}$$

(ii) aksiom jedinice

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \eta"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & k \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

koji su zapisani pomoću komutativnih dijagrama.

U slučaju kad je k polje i $\mathcal{V}$ monoidalna kategorija k-vektorskih prostora s jediničnim objektom k i tenzorskim produktom $\otimes_k$, monoid u $\mathcal{V}$ zovemo i k-algebra (pri čemu podrazumijevamo asocijativnu k-algebru s jedinicom).

Definicija 6.1.2. *Morfizam monoida* $f\colon (A,\mu,\eta) \to (A',\mu',\eta')$ je morfizam $f\colon A \to A'$ u $\mathcal{V}$ koji zadovoljava

$$\mu' \circ (f \otimes f) = f \circ \mu, \qquad f \circ \eta = \eta'.$$

Propozicija 6.1.3. *(Tenzorski produkt monoida) Neka su* (R,μ_R,η_R) *i* (S,μ_S,η_S) *monoidi u simetričnoj monoidalnoj kategoriji* $\mathcal{V} = (\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r,\tau)$. *Tada je* $(R\otimes S, \mu_{R\otimes S}, \eta_{R\otimes S})$, *gdje je*

$$\mu_{R\otimes S} = (\mu_R \otimes \mu_S) \circ (\mathrm{id}_R \otimes \tau_{S,R} \otimes \mathrm{id}_S), \qquad \eta_{R\otimes S} = (\eta_R \otimes \eta_S) \circ l_k^{-1},$$

također monoid u $\mathcal{V}$.

Svejedno je uzimamo li lijevu ili desnu jedinicu u prethodnoj propoziciji jer u monoidalnoj kategoriji vrijedi $l_k = r_k\colon k \otimes k \to k$. Dokaz je standardan, vidi [Kelly]. U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji množenje i jedinica iz prethodne propozicije su

$$(r \otimes s) \cdot (r' \otimes s') = rr' \otimes ss', \qquad 1_{R\otimes S} = 1_R \otimes 1_S,$$

pa takvo množenje često zovemo množenjem po komponentama.

6.1.2 Definicija komonoida (koalgebre) i morfizma komonoida

Dualni pojam, komonoid u $(\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r)$ je monoid u kategoriji suprotnoj kategoriji $\mathcal{V}$, ali s 'istim' tenzorskim produktom $M^{\mathrm{op}} \otimes N^{\mathrm{op}} = (M \otimes N)^{\mathrm{op}}$.

Definicija 6.1.4. *Komonoid* (sinonim: koalgebra) u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V} = (\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r)$ je trojka (C,Δ,ϵ) u kojoj je $\Delta\colon C \to C \otimes C$ morfizam u $\mathcal{V}$ zvan komnoženje (koprodukt), $\epsilon\colon C \to k$ morfizam u $\mathcal{V}$ zvan kojedinica i takva da su sljedeći dijagrami komutativni:

(i) koasocijativnost

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"] & (C \otimes C) \otimes C \arrow[d, "a_{C,C,C}"] \\
C \otimes C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"'] & & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}$$

(ii) aksiom kojedinice

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "r_C"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "l_C"] & \\ C \otimes k & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id}_A \otimes \epsilon"] \arrow[r, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_A"'] & k \otimes C \end{tikzcd}$$

Ako je $\mathcal{V}$ monoidalna kategorija k-vektorskih prostora, komonoid u $\mathcal{V}$ zovemo i k-koalgebra.

Definicija 6.1.5. *Morfizam komonoida* $f\colon (C, \Delta, \epsilon) \to (C', \Delta', \epsilon')$ je morfizam $f\colon C \to C'$ u $\mathcal{V}$ koji zadovoljava

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f, \qquad \epsilon' \circ f = \epsilon,$$

što je u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji $f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)}$, te $\epsilon'(f(c)) = \epsilon(c)$.

Komonoid u monoidalnoj kategoriji k-vektorskih prostora (ili općenitije, k-modula gdje je k komutativan prsten) zove se k-koalgebra. (Ko)monoid u monoidalnoj kategoriji R-bimodula, gdje prsten s jedinicom R može biti nekomutativan, zove se R-(ko)prsten.

6.1.3 Sweedlerova notacija i apstraktna Sweedlerova notacija

6.1.6. Sweedlerova notacija za koalgebre. Neka je (C, Δ, ϵ) komonoid u kategoriji vektorskih prostora (tj. k-kolagebra). Vrijednost $\Delta(c)$ je oblika $\sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i \in C \otimes_k C$. Sweedler predlaže notaciju $c_{(1)} = a$, $c_{(2)} = b$ i indeks i izostavlja:

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Iteracije označava ovako: $c_{(1)(1)} := (c_{(1)})_{(1)}$ itd. Tako se aksiom koasocijativnosti može zapisati na sljedeći način:

$$\sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} =: \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

a aksiom kojedinice na sljedeći:

$$\sum \epsilon(c_{(1)}) c_{(2)} = c = \sum c_{(1)} \epsilon(c_{(2)}).$$

6.1.7. Apstraktna Sweedlerova notacija. Sweedlerovu notaciju često koristimo, zajedno s generičkim elementima, i u općoj monoidalnoj kategoriji. Detaljnije, neka su A, B, C, ... oznake objekata u monoidalnoj kategoriji i želimo linearno zapisati niz identiteta među morfizmima s fiksiranom domenom i kodomenom koje su neki monoidalni produkti objekata A, B, C, ... i jediničnog objekta. Tada, oponašajući račun s elementima u modulima, izaberemo po jedan simbol odgovarajućeg tipa u svakom od tenzorskih množitelja i morfizme primjenjujemo na apstraktni simbol. Npr. aksiom asocijativnosti množenja $\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id})$ pišemo $\mu(a, \mu(a', a'')) = \mu(\mu(a, a'), a'')$ s generičkim simbolima a, a', a'' tipa A, čak i ako objekt A nije skup i stoga a, a', a'' ne možemo interpretirati kao elemente od A. Takvo pisanje je u redu ukoliko na izrazima primijenjujemo samo transformacije koje odgovaraju identitetima među morfizmima. Naime, iz takvog izraza lako dobijemo natrag identitet eliminacijom generičkih simbola u svakoj strani jednakosti. Na generičke simbole možemo primijeniti Sweedlerovu notaciju koja tada ne označava sumu i nazivamo je *apstraktna Sweedlerova notacija*. Aksiomi kao $\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c$ i dalje vrijede (zanemarujući pisanje koherencija, koje se mogu umetnuti, no tada su računi s elementima nepregledni jer koherencije imaju po nekoliko argumenata koji tako postanu vezani u notaciji; u ovom primjeru tako $r_C(\epsilon(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}) = c$, gdje je $r_C \colon C \otimes k \to C$ komponenta u C desnog unitora). Kod apstraktne Sweedlerove notacije moramo paziti da koristimo samo identitete među morfizmima u toj monoidalnoj kategoriji.

6.1.8. Osim obične Sweedlerove notacije koja označava konačne sume i apstraktne Sweedlerove notacije koja ne označava stvarne sume već kompozicije morfizama, na nekoliko mjesta u ovoj disertaciji koristimo i formalnu Sweedlerovu notaciju u kojoj se podrazumijeva sumacija u smislu formalnih suma. U tom posljednjem slučaju treba paziti da kod transformacija u računu stalno dobivamo formalne sume i identitete među formalnim sumama (za to moramo koristiti morfizme koji distribuiraju po formalnim sumama ili koristiti identitete među formalnim sumama i druge opravdane transformacije).

6.1.4 Konvolucijsko množenje i dualne gebre u Vect

Slijedeći Serrea [Serre] algebre, koalgebre i bialgebre kolektivno možemo zvati *gebrama*.

Ako je (C, Δ, ϵ) k-koalgebra i (A, μ, η) k-algebra, onda skup k-linearnih preslikavanja $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ ima strukturu k-algebre s obzirom na *k*onvolucijsko množenje $*$ dano s

$$f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

i jedinicu $\eta \circ \epsilon$. Algebru $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ zovemo *konvolucijska algebra*.

Ako je (C, Δ, ϵ) k-koalgebra, onda njen algebarski dual $C^* = \mathrm{Hom}_k(C, k)$ vidimo kao poseban slučaj konvolucijske algebre. U apstraktnoj Sweedleovoj notaciji, za f, $g \in C^*$, $c \in C$,

$$(f \cdot g)(c) := f(c_{(1)})g(c_{(2)}),$$

gdje je simbolom $\cdot$ označeno odgovarajuće množenje elemenata.

Ako je (A, μ, η) konačno-dimenzionalna k-algebra, onda je A^* k-koalgebra jer je kanonsko preslikavanje $A^* \otimes_k A^* \to (A \otimes_k A)^*$ tada izomorfizam. Naime, za $f \in A^*$, a, $a' \in A$ definicija

$$\Delta(f)(a \otimes a') := f(a \cdot a').$$

određuje $\Delta(f) \in (A \otimes_k A)^* \cong A^* \otimes_k A^*$ pa imamo preslikavanje $\Delta\colon A^* \to A^* \otimes_k A^*$. Ako k-algebra A nije konačno-dimenzionalna, onda $A^* \otimes_k A^* \underset{\neq}{\hookrightarrow} (A \otimes_k A)^*$.

6.1.5 Definicija bialgebre

Bimonoid (sinonimi: bialgebra, bigebra) je objekt B u simetričnoj monoidalnoj kategoriji koji istovremeno ima strukturu monoida i komonoida, zajedno s kompatibilnosti koja suštinski koristi simetriju $\tau_{B,B}$ u toj monoidalnoj kategoriji.

Definicija 6.1.9. *Bialgebra* je petorka $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ u kojoj je (B, μ, η) monoid i (B, Δ, ϵ) komonoid sa svojstvima:

(i) kompatibilnost množenja i komnoženja

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, "\mu"'] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "\mathrm{id}_B\otimes\tau_{B,B}\otimes\mathrm{id}_B"] \\ & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\ B \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

(ii) kompatibilnost množenja i kojedinice

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\epsilon\otimes\epsilon"] \arrow[d, "\mu"'] & k \otimes k \arrow[d, "\cong"] \\ B \arrow[r, "\epsilon"'] & k \end{tikzcd}$$

(iii) kompatibilnost jedinice i komnoženja

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\eta"'] & k \otimes k \arrow[d, "\eta\otimes\eta"] \\ B \arrow[r, "\Delta"'] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

(iv) kompatibilnost jedinice i kojedinice

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ B \arrow[r, "\epsilon"'] & k \end{tikzcd}$$

koja su dana komutativnim dijagramima.

U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji ta svojstva su redom:

(i) $(bc)_{(1)} \otimes (bc)_{(2)} = b_{(1)}c_{(1)} \otimes b_{(2)}c_{(2)}$

(ii) $\epsilon(bc) = \epsilon(b)\epsilon(c)$

(iii) $\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B$

(iv) $\epsilon(1_B) = 1_k$

Primijetimo da gornji uvjeti kompatibilnosti znače da su Δ i ϵ morfizmi monoida pri čemu je struktura monoida na $B \otimes B$ dana množenjem po komponentama kao u propoziciji 6.1.3. Ekvivalentno, ti uvjeti kompatibilnosti znače da su μ i η morfizmi komonoida, pri čemu je struktura komonoida na $B \otimes B$ slično inducirana po komponentama strukturom komonoida B.

6.1.10. Komutativnost i kokomutativnost. Neka je $\mathcal{V}$ simetrična monoidalna kategorija sa simetrijom $\tau = \{\tau_{A,B} \colon A \otimes B \to B \otimes A\}_{A,B}$. Tada za monoid (A, μ, η) u $\mathcal{V}$ kažemo da je *komutativan* ako je $\mu \circ \tau_{A,A} = \mu$, a za komonoid (C, Δ, ϵ) kažemo da je *kokomutativan* ako je $\tau_{C,C} \circ \Delta = \Delta$. Bimonoid je komutativan ako je promatran kao monoid komutativan, te kokomutativan ako je promatran kao komonoid kokomutativan.

6.1.6 Definicija Hopfove algebre i primjeri

Definicija 6.1.11. *Hopfova algebra* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ je bialgebra na kojoj postoji morfizam $S \colon H \to H$ u $\mathcal{V}$, koji zovemo antipod, za koji vrijedi

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta,$$

što je u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)}).$$

Ako za bialgebru H antipod postoji, on je jedinstven.

6.1.12. Posljedice aksioma za Hopfovu algebru su sljedeće. Antipod S je antihomomorfizam algebri i koalgebri, $S \colon H^{\mathrm{op,co}} \to H$. Ako je H komutativna ili kokomutativna, onda je $S^2 = \mathrm{id}_H$. Hopfovu algebru H u kategoriji k-vektorskih prostora zovemo i Hopfova k-algebra. Ako je Hopfova k-algebra H konačno-dimenzionalna, onda je $S \in \mathrm{Hom}_k(H, H)$ bijektivan.

Primjer 6.1.13. *Grupovna algebra kG diskretne grupe G* je kokomutativna Hopfova algebra. Kao vektorski prostor, kG je skup linearnih kombinacija elemenata grupe G s koeficijentima iz k. Množenje na kG je linearno proširenje množenja na grupi, koje stoga općenito nije komutativno, a jedinica je 1_G. Ono je komutativno ako i samo ako je G abelova grupa. Komnoženje i kojedinica su linearna proširenja preslikavanja na elementima $g \in G$ zadanog sa

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \epsilon(g) = 1.$$

Postoji antipod i on je linearno proširenje preslikavanja koje je na elementima $g \in G$ dano sa

$$S(g) = g^{-1}.$$

Za $a = \sum_{g\in G} a_g g$ i $a' = \sum_{g\in G} a'_g g$ u kG produkt je $a \cdot a' = \sum_{g\in G}(\sum_{h\in G} a_{gh^{-1}} a_h)g$ pa se kG ponekad zove konvolucijska algebra.

Primjer 6.1.14. *Algebra $k(G)$ funkcija na konačnoj grupi G* je komutativna Hopfova algebra. Zbog konačnosti grupe G, $k(G) = \{f\colon G \to k\}$ je konačno-dimenzionalan vektorski prostor. Množenje je dano množenjem po točkama, pa je $k(G)$ komutativna algebra s jedinicom. Komnoženje i kojedinica zadani su s

$$\Delta(f)(g,h) = f(gh), \qquad \epsilon(f) = f(1_G).$$

Komnoženje $\Delta(f) \in \mathrm{Fun}(G \times G, k) = \mathrm{Fun}(G,k) \otimes \mathrm{Fun}(G,k)$ je komutativno ako i samo ako je G komutativna. Antipod je zadan s

$$(Sf)(g) = f(g^{-1}).$$

Ako je grupa G konačna, Hopfovoj algebri kG dualna je Hopfova algebra $k(G)$. Zaista, elementi od $k(G)$, dakle funkcije na G, jednoznačno se proširuju do k-linearnih funkcija na kG, a one su upravo elementi algebarskog duala $(kG)^*$ i lako se vidi da su im strukture Hopfovih algebri dualne.

Kao poopćenje od $k(G)$ u kojem umjesto konačnih gledamo algebarske grupe, regularne funkcije na algebarskoj grupi G nad poljem k čine Hopfovu algebru $\mathcal{O}(G)$.

Primjer 6.1.15. *Hopfova algebra regularnih funkcija $\mathcal{O}(G)$ na afinoj algebarskoj grupi G.* Neka je k polje. *Afina k-višestrukost M* je skup nultočki nekog skupa polinoma u n-dimenzionalnom afinom k-prostoru $\mathbb{A}^m$, za neki m. Ti polinomi generiraju ideal I_M u k-algebri $\mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$ polinomijalnih funkcija na $\mathbb{A}^m$, koja je izomorfna algebri polinoma u m varijabli s koeficijentima iz k,

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^m) \cong k[x^1, \ldots, x^m].$$

Topologija Zariskog na M je topologija u kojoj su zatvorene upravo podvišestrukosti od M, a to su oni podskupovi $M' \subseteq M$ koji su također k-višestrukosti u ambijentnom $\mathbb{A}^m$. *Morfizam afinih k-višestrukosti* $f\colon M \to N$, $M \subseteq \mathbb{A}^m$, $N \subseteq \mathbb{A}^n$ je preslikavanje $f\colon M \to N$ koje je regularno, a to za afine mnogostrukosti znači da postoji globalno preslikavanje $\tilde{f}\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ koje je dano n-torkom polinomijalnih funkcija i čija je restrikcija $\tilde{f}|_M = f$. Regularna preslikavanja $M \to \mathbb{A}^1$ zovemo regularnim funkcijama na M. *Algebra regularnih funkcija* s množenjem po točkama je dakle

$$\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/I_M.$$

Produkt u kategoriji k-višestrukosti $M \times N$ je skup $M \times N \subseteq \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^{m+n}$ s induciranom strukturom k-višestrukosti iz $\mathbb{A}^{m+n}$. Lako se vidi da su morfizmi $f\colon M \to N$ afinih k-višestrukosti u prirodnoj bijekciji s homomorfizmima k-algebri

$$f^* = (- \circ f)\colon \mathcal{O}(N) \to \mathcal{O}(M)$$

danim pretkompozicijom s f te da postoji kanonski izomorfizam k-algebri

$$\mathcal{O}(M \times N) \cong \mathcal{O}(M) \otimes_k \mathcal{O}(N),$$

prirodan u M i N. Preslikavanja $M \to \mathcal{O}(M)$, $f \mapsto f^*$, se proširuju do jake monoidalne antiekvivalencije Kartezijeve monoidalne kategorije k-višestrukosti i kategorije konačno generiranih k-algebri bez nilpotentnih elemenata s monoidalnim produktom $\otimes_k$ (koji je tamo kategorijski koprodukt).

Po Nullstellensatzu, ako je k algebarski zatvoreno polje, morfizmi k-višestrukosti iz apstraktne točke $*$ u M u bijekciji su s točkama od M kao skupa. Pripadni dualni homomorfizmi k-algebri $\mathcal{O}(M) \to k \cong \mathcal{O}(*)$ su evaluacijski funkcionali u danim točkama $\mathrm{ev}_p\colon f \mapsto f(p)$. Jezgre tih funkcionala su maksimalni ideali u $\mathcal{O}(M)$ i svi maksimalni ideali se pojavljuju na taj način. Točkama od M dakle odgovaraju maksimalni ideali od $\mathcal{O}(M)$.

Afina algebarska k-grupa je grupa G u kategoriji afinih k-višestrukosti nad poljem k. Morfizam množenja $m\colon G \times G \to G$ dakle odgovara homomorfizmu k-algebri

$$\Delta := m^*\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \cong \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$$

koji je komnoženje, kojedinica je dana s

$$\epsilon\colon \mathcal{O}(G) \to k, \quad f \mapsto f(e)$$

gdje je $e \in G$ jedinica, a antipod je dan s

$$(Sf)(g) = f(g^{-1}), \quad g \in G,\ f \in \mathcal{O}(G).$$

Time algebra funkcija $\mathcal{O}(G)$ postaje Hopfova k-algebra. Svaka komutativna Hopfova k-algebra koja je konačno generirana kao k-algebra i nema nilpotentnih elemenata izomorfna je $\mathcal{O}(G)$ za jedinstvenu algebarsku k-grupu G. Štoviše ta korespodencija se proširuje do antiekvivalencije kategorija.

Poseban slučaj afinih algebarskih k-grupa su linearne algebarske grupe. Linearna algebarska grupa je Zariski zatvorena podgrupa grupe $GL_n(k)$, dakle podgrupa od $GL_n(k)$ koja je skup nultočki nekog skupa regularnih funkcija na $GL_n(k)$. Algebru regularnih funkcija na $GL_n(k)$ možemo opisati naprimjer na sljedeći način. Ako promatramo $GL_n(k)$ kao podskup od

$k^{2n^2} \cong \mathbb{A}^{2n^2}$ s obzirom na preslikavanje $M \mapsto (M^i_j, (M^{-1})^i_j)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ koje M pridružuje komponente matrice M i matrice M^{-1}, onda je $\mathcal{O}(GL_n(k))$ izomorfna kvocijentu algebre polinoma u varijablama $u^i_j, \bar{u}^i_j$ za $i, j = 1, \ldots, n$ po idealu generiranom sa $\sum_j u^i_j \bar{u}^j_k - \delta^i_k$ i $\sum_j \bar{u}^i_j u^j_k - \delta^i_k$, za $i, k = 1, \ldots, n$, pri čemu su funkcije u^j_i i $\bar{u}^j_i$ definirane za $M \in GL_n(k)$ sa $u^i_j(M) = M^i_j$ te $\bar{u}^i_j(M) = (M^{-1})^i_j$. Gornji indeks je ovdje indeks retka, a donji indeks stupca matrice.

Svaka afina algebarska grupa nad algebarski zatvorenim poljem je izomorfna nekoj linearnoj algebarskoj grupi ([JantzenAGr], str. 51). Svaka linearna algebarska grupa nad poljem $\mathbb{C}$ ima kanonsku strukturu Liejeve grupe. Naime, $GL_n(\mathbb{C})$ je Liejeva grupa, svaki Zariski zatvoren podskup je ujedno zatvoren u topologiji mnogostrukosti (jer su polinomi neprekidne funkcije pa je skup nula kao inverzna slika po polinomu nule u polju zatvoren skup) i svaka zatvorena podgrupa Liejeve grupe je Liejeva grupa.

Primjer 6.1.16. *Proizvoljna komutativna Hopfova k-algebra kao Hopfova algebra globalnih prereza strukturnog snopa afine grupovne k-sheme.* Kategorija afinih algebarskih k-višestrukosti se netrivijalno ulaže u veću kategoriju afinih k-shema.

Sjetimo se da je spektar $\mathrm{Spec}\, A$ skup prostih ideala k-algebre A s topologijom Zariskog čija je baza dana glavnim otvorenim skupovima U_f, $0 \neq f \in A$ koji se sastoje od onih prostih ideala koji ne sadrže f. Na tom skupu zadaje se jedinstveni snop k-algebri $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}$ takav da je na glavnim otvorenim skupovima $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(U_f) = A[f^{-1}]$ i restrikcija s $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(U_f)$ na $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(U_g)$ je kanonski homomorfizam k-algebri $A[f^{-1}] \to A[g^{-1}]$ kad f dijeli g.

Uzimanje spektra $A \mapsto \mathrm{Spec}\, A$ se proširuje do antiekvivalencije kategorije $\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}}$ komutativnih k-algebri i najmanje pune te zatvorene na izomorfizme potkategorije kategorije topoloških prostora opremljenih snopom lokalnih k-algebri; tu potkategoriju zovemo kategorija afinih k-shema Aff_k,

$$\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Aff}_k.$$

Svaka afina k-shema $(X, \mathcal{O}_X)$ je dakle po definiciji izomorfna spektru neke komutativne k-algebre, naime algebre globalnih prereza snopa $\mathcal{O}_X$. Ukoliko je ta algebra konačno generirana i bez nilpotenata tada je možemo zapisati kao $k[x^1, \ldots, x^m]/I_M$ za neku k-višestrukost M u $\mathbb{A}^m$. Njene točke su u kanonskoj bijekciji sa zatvorenim točkama afine sheme X, a sve točke od X odgovaraju svim ireducibilnim podvišestrukostima od M. Te korespodencije se proširuju do netrivijalnog ulaganja kategorije afinih k-višestrukosti AffVar_k u kategoriju afinih k-shema,

$$\mathrm{AffVar}_k \hookrightarrow \mathrm{Aff}_k,$$

i to ulaganje je kompatibilno s ulaganjem dualne kategorije konačno generiranih komutativnih k-algebri bez nilpotenata u kategoriju svih komutativnih k-algebri.

Ukoliko komutativna k-algebra ima strukturu Hopfove k-algebre, po dualnosti se ta struktura prenosi do strukture grupe u kategoriji afinih k-shema, odnosno afine grupovne k-sheme.

Ulaganje kategorije afinih k-višestrukosti u afine k-sheme inducira ulaganje kategorije algebarskih k-grupa u kategoriju afinih grupovnih k-shema,

$$\mathrm{Grp}(\mathrm{AffVar}_k) \hookrightarrow \mathrm{Grp}(\mathrm{Aff}_k),$$

i to ulaganje na dualnoj strani odgovara ulaganju kategorije konačno generiranih Hopfovih k-algebri bez nilpotenata u kategoriju svih komutativnih Hopfovih k-algebri. Za razliku od algebarskih k-grupa koje se gledaju nad poljem k, k-sheme i grupovne k-sheme promatramo nad proizvoljnim prstenom k.

Komutativni Hopfovi k-algebroidi poopćuju dalje ovaj primjer kao struktura na komutativnoj k-algebri koja po dualnosti odgovara strukturi grupoida na afinoj k-shemi.

Primjer 6.1.17. *Hopfova algebra reprezentativnih funkcija* $\mathrm{Rep}(G)$ *na kompaktnoj topološkoj grupi* G. Neka je G kompaktna topološka grupa. Označimo s $C(G, \mathbb{C})$ algebru neprekidnih funkcija na G s vrijednostima u $\mathbb{C}$. Za funkciju $f \in C(G, \mathbb{C})$ kažemo da je *reprezentativna* ako je skup njenih lijevih translacija po svim elementima od G konačno-dimenzionalan vektorski potprostor od $C(G, \mathbb{C})$, gdje je lijeva translacija za g funkcije f definirana sa

$$h \mapsto f(g^{-1}h), \qquad h \in G.$$

Lako se vidi da je f reprezentativna ako i samo ako se pojavljuje kao komponenta matrice neke konačno-dimenzionalne kompleksne reprezentacije grupe G. Naime, ako je $\pi\colon G \to GL_n(\mathbb{C})$ reprezentacija od G, iz $\pi(g^{-1}h) = \pi(g^{-1})\pi(h)$ imamo $\pi_{ij}(g^{-1}h) = \sum_k \pi_{ik}(g^{-1})\pi_{kj}(h)$ što pokazuje da se za svaki g funkcija $h \mapsto \pi_{ij}(g^{-1}h)$ može prikazati kao linearna kombinacija neprekidnih funkcija iz konačnog skupa $\{\pi_{kj} \mid k, j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Obratno, svaki konačno-dimenzionalni potprostor od $C(G, \mathbb{C})$ definiran tako reprezentativnom funkcijom je očito invarijantan s obzirom na djelovanje lijevim regularnim translacijama grupe G na $C(G, \mathbb{C})$.

Lako se vidi da je algebra $\mathrm{Rep}(G)$ Hopfova $\mathbb{C}$-algebra, uz standardni koprodukt, kojedinicu i antipod za algebru funkcija na grupi,

$$\Delta(f)(g, h) = f(gh), \qquad \epsilon(f) = f(1_G), \qquad (Sf)(g) = f(g^{-1}),$$

za $f \in \mathrm{Rep}(G)$ i $g, h \in G$. [Khalkhali] str. 33.

Ako je G Liejeva grupa, algebra $\mathrm{Rep}(G)$ je podalgebra algebre glatkih funkcija $C^\infty(G, \mathbb{C})$ s vrijednostima u $\mathbb{C}$. Naime, svaki neprekidni homomorfizam Liejevih grupa je automatski glatko preslikavanje, pa je svaka neprekidna konačno-dimenzionalna reprezentacija Liejeve grupe i time svaka reprezentativna funkcija glatka. [Timmermann] str. 33.

Primjer 6.1.18. *Univerzalna omotačka algebra* $U(\mathfrak{g})$ *Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ je kokomutativna Hopfova algebra. Po definiciji [BourbakiLie, Helgason, CannWeinst], univerzalna omotačka algebra

$U(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je kvocijent tenzorske algebre $T(\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geqslant 0}\mathfrak{g}^{\otimes n}$ po dvostranom idealu I generiranom s $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$ za $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I.$$

To je asocijativna algebra i kanonsko preslikavanje $i\colon \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, inducirano prirodnom inkluzijom $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$, je univerzalno u smislu da se svako linearno preslikavanje $a\colon \mathfrak{g} \to A$ čija je kodomena asocijativna algebra i za koje vrijedi $a([x,y]) = a(x)a(y) - a(y)a(x)$ na jedinstveni način faktorizira kroz i. Koristeći univerzalno svojstvo od $U(\mathfrak{g})$ lako se vidi da su dobro definirani i jedinstveni homomorfizmi algebri $\Delta\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ i $\epsilon\colon U(\mathfrak{g}) \to k$, te antihomomorfizam algebri $S\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, određeni sa

$$\Delta(X) = 1\otimes X + X\otimes 1, \qquad \epsilon(X) = 0, \qquad S(X) = -X,$$

za $X \in \mathfrak{g}$. Zatim se provjeri da je $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \epsilon, S)$ kokomutativna Hopfova algebra. Ona je komutativna ako i samo ako je $\mathfrak{g}$ abelova Liejeva algebra i tada je $U(\mathfrak{g})$ jednaka $S(\mathfrak{g})$, simetričnoj algebri od $\mathfrak{g}$. [Khalkhali]

Za konačno-dimenzionalnu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$, elementi $X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ za $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geqslant 0$, gdje je $X_1,\ldots,X_n$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, čine bazu vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$ po Poincaré-Birkhoff-Wittovom teoremu.

Primjer 6.1.19. *Algebarski dual $U(\mathfrak{g}^L)^*$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g}^L)$* je unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji $\mathrm{proVectFin}$, dualna Hopfovoj algebri $U(\mathfrak{g}^L)$ u $\mathrm{indVectFin}$. *Algebra $J^\infty(G,e)$ formalnih funkcija oko jedinice Liejeve grupe G* čija je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$ njoj je izomorfna unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji $\mathrm{proVectFin}$.

Algebarski dual $U(\mathfrak{g}^L)^*$ možemo shvatiti i u terminima formalne geometrije na Liejevoj grupi G čija je Liejeva algebra $\mathfrak{g}^L$. Sjetimo se da je svaka Liejeva grupa G ujedno analitička mnogostrukost sa strukturom grupe za koju su množenje i inverz analitička preslikavanja. Analitičke funkcije na G (i globalne i one definirane na okolini jedinice e) određene su svojim redom oko jedinice e. Po teoremu É. Borela [EBorel] svaki red potencija Taylorov je red neke glatke funkcije oko 0. *Formalna funkcija* oko točke e na analitičkoj mnogostrukosti M je klasa ekvivalencije parova (U, f) gdje je $U \ni e$ domena otvorene karte oko e i $f\colon U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija pri čemu su dvije funkcije u istoj klasi ako i samo ako imaju jednake Taylorove redove u e u nekoj karti. Ta relacija ekvivalencije ne ovisi o izboru karte jer su prijelazi među kartama analitički. Formalne funkcije u e čine algebru $J^\infty(M,e)$ s obzirom na aritmetiku formalnih redova. Nas zanima slučaj kad je $M = G$ i e je jedinica Liejeve grupe G. Algebra $J^\infty(G,e)$ formalnih funkcija oko jedinice Liejeve grupe G izomorfna je upotpunjenoj simetričnoj algebri $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)$, a algebra analitičkih funkcija njena je podalgebra. Algebra $U(\mathfrak{g}^L)$ je Hopfova algebra lijevo invarijantnih diferencijalnih operatora na Liejevoj grupi G, ona je beskonačno-dimenzionalna i filtrirana stupnjem diferencijalnog operatora, dakle objekt u $\mathrm{indVectFin}$. Sparivanje

$$\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^L)\otimes J^\infty(G,e)\to\mathbb{R}$$

je definirano kompozicijom djelovanja diferencijalnog operatora na funkciju i evaluacije rezultata u jedinici e, to jest $\langle D,f\rangle := Df(e)$; to sparivanje poistovjećuje dualnu algebru od $U(\mathfrak{g}^L)$ s algebrom formalnih funkcija oko jedinice $J^\infty(G,e)$. Više detalja je u pododjeljku 9.6.5.

Mi ćemo, na temelju propozicije 5.3.5 o dualnosti u kategoriji $\mathrm{indproVect}$, pokazati da je $U(\mathfrak{g}^L)^*$ unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$ dualna Hopfovoj algebri $U(\mathfrak{g}^L)$, vidi iskaz propozicije 9.4.3. Time dakle $J^\infty(G,e)\cong U(\mathfrak{g}^L)^*$ postaje unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$, dualna Hopfovoj algebri $U(\mathfrak{g}^L)$.

Primjer 6.1.20. *Kvantizirana univerzalna omotačka algebra* $U_q(\mathfrak{g})$ za konačno-dimenzionalnu kompleksnu poluprostu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ je Hopfova algebra. Definicija kvantne grupe $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dana je u pododjeljku 9.9.1.

6.2 Moduli i komoduli

Definicija 6.2.1. (Unutarnji) *lijevi modul nad monoidom* (A,μ,η) u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}=(\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r)$ je par (M,ν) gdje je M objekt u $\mathcal{V}$ i $\nu\colon A\otimes M\to M$ morfizam (koji nazivamo lijevo djelovanje monoida A na objekt M) takav da vrijedi

$$\nu\circ(\mathrm{id}_A\otimes\nu)\circ a_{A,A,M}=\nu\circ(\mu\otimes\mathrm{id}_M)\colon (A\otimes A)\otimes M\to M$$

$$\nu\circ(\eta\otimes\mathrm{id}_M)=l_M\colon k\otimes M\to M.$$

Desni modul nad (A,μ,η) je par (N,ξ) gdje je N objekt i $\xi\colon N\otimes A\to N$ morfizam (koji nazivamo desno djelovanje monoida A na objekt N) takav da vrijedi

$$\xi\circ(\xi\otimes\mathrm{id}_A)=\xi\circ(\mathrm{id}_N\otimes\mu)\circ a_{N,A,A}\colon (N\otimes A)\otimes A\to N$$

$$\xi\circ(\mathrm{id}_N\otimes\eta)=r_N\colon N\otimes k\to N.$$

Lijevi (odnosno desni) modul nad bimonoidom $(B,\mu,\eta,\Delta,\epsilon)$ u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}=(\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r,\tau)$ je (odnosno desni) modul nad monoidom (B,μ,η).

6.2.2. Ponekad je, posebno u računima, korisno za lijevo djelovanje monoida koristiti simbol $\blacktriangleright$ i za desno djelovanje simbol $\blacktriangleleft$ (ponekad s dodatnim modifikatorima, npr. donjim ili gornjim indeksima). Naime, ti simboli će u računima s (generičkim) elementima slijediti sintaksu binarne operacije, dakle $\blacktriangleright(n,h)$ pisat ćemo $n \blacktriangleright h$. U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji gore navedena svojstva su redom, za lijevi modul:

$$a \blacktriangleright (a' \blacktriangleright m) = (aa') \blacktriangleright m, \qquad 1_A \blacktriangleright m = m$$

i za desni modul:

$$(n \blacktriangleleft a) \blacktriangleleft a' = n \blacktriangleleft (aa'), \qquad n \blacktriangleleft 1_A = n.$$

Komnoženje Δ u bialgebri B omogućava da tenzorski produkt B-modula bude B-modul, tj. omogućava definiciju tenzorskog produkta u kategoriji B-modula.

Definicija 6.2.3. Neka je $(B,\mu,\eta,\Delta,\epsilon)$ bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. *Tenzorski produkt desnih B-modula* $(M,\nu_M)\otimes(N,\nu_N)$ je desni B-modul $(M\otimes N,\nu_{M\otimes N})$ u kojem je $\nu_{M\otimes N}$ kompozicija (zapis je bez asocijatora)

$$M\otimes N\otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}_{M\otimes N}\otimes\Delta} M\otimes N\otimes B\otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}_M\otimes\tau_{N,B}\otimes\mathrm{id}_B} M\otimes B\otimes N\otimes B \xrightarrow{\nu_M\otimes\nu_N} M\otimes N,$$

što je u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za $m\in M$, $n\in N$, $b\in B$,

$$(m\otimes n)\blacktriangleleft b = (m\blacktriangleleft b_{(1)})\otimes(n\blacktriangleleft b_{(2)}),$$

gdje smo sva djelovanja, ν_M, ν_N, $\nu_{M\otimes N}$ označili simbolom $\blacktriangleleft$.

Slično, kojedinica ϵ bialgebre B definira strukturu desnog B-modula na jediničnom objektu k koju nazivamo *desni trivijalni B-modul* , naime

$$\nu_k = r_k\circ(\mathrm{id}_k\otimes\epsilon)\colon k\otimes B\to k$$

gdje je $r_k\colon k\otimes k\cong k$ koherencija jedinice. U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za $\lambda\in k$, $b\in B$, to je

$$\lambda\blacktriangleleft b = \lambda\epsilon(b).$$

Time kategorija desnih B-modula postaje monoidalna kategorija kojoj je jedinični objekt trivijalni B-modul.

Slično se za bialgebru B definira tenzorski produkt lijevih B-modula i trivijalni lijevi B-modul, što ćemo navesti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 6.2.4. *Neka je B bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $(\mathcal{V},\otimes,k,a,l,r,\tau)$. Tada je kategorija lijevih B-modula u $\mathcal{V}$ monoidalna kategorija. Naime, ako su $\nu_M\colon B\otimes M\to M$ i $\nu_N\colon B\otimes N\to N$ lijeva B-djelovanja, tada je formulom (bez pisanja asocijatora)*

$$(\nu_M\otimes\nu_N)\circ(\mathrm{id}_B\otimes\tau_{B,M}\otimes\mathrm{id}_N)\circ(\Delta\otimes\mathrm{id}_M\otimes\mathrm{id}_N)\colon B\otimes M\otimes N\to M\otimes N,$$

dano lijevo B-djelovanje na tenzorskom produktu $M\otimes N$, a jedinični objekt je trivijalni B-modul koji je dan objektom k s djelovanjem $B\otimes k\xrightarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}_k} k\otimes k\xrightarrow{\cong} k$.

U slučaju kad je $\mathcal{V}$ kategorija vektorskih prostora, ako je B Hopfova algebra, onda uz pomoć njenog antipoda S na dualu $M^* = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ H-modula M dobivamo strukturu "dualnog" modula sa: $(h \blacktriangleright f)(m) := f(S(h) \blacktriangleright m)$ ako je modul lijevi, odnosno $(f \blacktriangleleft h)(m) = f(h \blacktriangleleft S(m))$ ako je desni, za $h \in H$, $f \in M^*$, $m \in M$. Dakle reprezentacije Hopfove k-algebre čine monoidalnu kategoriju s dualima.

Komoduli nad koalgebrom su pojam dualan pojmu modula nad algebrom.

Definicija 6.2.5. Neka je (C, Δ, ϵ) koalgebra u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$. *Lijevi C-komodul* je par (M, λ) gdje je M objekt u $\mathcal{V}$ i $\lambda \colon M \to C \otimes M$ morfizam (koji zovemo *lijevo kodjelovanje*) takav da komutiraju dijagrami

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & & C \otimes M \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \lambda"] \\
C \otimes M \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_M"'] & (C \otimes C) \otimes M \arrow[r, "\cong", "a_{C,C,M}"'] & C \otimes (C \otimes M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\cong", "l_M^{-1}"'] & C \otimes M \arrow[d, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_M"] \\
& k \otimes M
\end{tikzcd}$$

Desni C-komodul je par (N, ρ) gdje je N objekt u $\mathcal{V}$ i $\rho : N \to N \otimes C$ morfizam (koji zovemo *desno kodjelovanje*) takav da sljedeći dijagrami

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & & N \otimes C \arrow[d, "\rho \otimes \mathrm{id}_C"] \\
N \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}_N \otimes \Delta"'] & N \otimes (C \otimes C) \arrow[r, "\cong", "a^{-1}_{N,C,C}"'] & (N \otimes C) \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\cong"'] & N \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_N \otimes \epsilon"] \\
& N \otimes k
\end{tikzcd}$$

komutiraju.

6.2.6. Za kodjelovanja se proširuje Sweedlerova notacija, gdje član s oznakom $_{[0]}$ pripada modulu. Za desna kodjelovanja tako pišemo $\rho(n) = \sum n_{[0]} \otimes n_{[1]}$, a za lijeva kodjelovanja $\lambda(m) = \sum m_{[-1]} \otimes m_{[0]}$. Prvi i drugi aksiom desnog komodula su tada (koherencije su zanemarene u notaciji)

$$\sum n_{[0]} \otimes n_{[1](1)} \otimes n_{[1](2)} = \sum n_{[0][0]} \otimes n_{[0][1]} \otimes n_{[1]} =: \sum n_{[0]} \otimes n_{[1]} \otimes n_{[2]},$$

$$n_{[0]}\epsilon(n_{[1]}) = n,$$

a prvi i drugi aksiom lijevog komodula

$$\sum m_{[-1](1)} \otimes m_{[-1](2)} \otimes m_{[0]} = \sum m_{[-1]} \otimes m_{[0][-1]} \otimes m_{[0][0]} =: \sum m_{[-2]} \otimes m_{[-1]} \otimes m_{[0]},$$

$$\epsilon(m_{[-1]})m_{[0]} = m.$$

6.2.7. Ako je $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, onda je kategorija lijevih B-komodula također monoidalna uz djelovanje na tenzorski produkt objekata dano s

$$(M, \lambda_M) \otimes (N, \lambda_N) := (M \otimes N, (\mu \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\mathrm{id}_B \otimes \tau_{M,B} \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\lambda_M \otimes \lambda_N)),$$

ili, u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, s

$$\lambda_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_{[-1]}n_{[-1]} \otimes m_{[0]} \otimes n_{[0]}.$$

Kategorija desnih B-komodula također je tada monoidalna uz djelovanje na tenzorski produkt objekata dano s

$$(M, \rho_M) \otimes (N, \rho_N) := (M \otimes N, (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N \otimes \mu) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \tau_{B,N} \otimes \mathrm{id}_B) \circ (\rho_M \otimes \rho_N)),$$

što je u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji

$$\rho_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_{[0]} \otimes n_{[0]} \otimes m_{[1]}n_{[1]}.$$

6.3 Hopfovo djelovanje i poludirektni produkt

Neka je B bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Algebru u monoidalnoj kategoriji lijevih (desnih) B-modula zovemo lijevom (desnom) B-modulnom algebrom, a pripadno B-djelovanje Hopfovim B-djelovanjem na tu algebru, kako je opisano u sljedećoj definiciji.

Definicija 6.3.1. Neka je (A, μ_A, η_A) algebra i $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta, \epsilon)$ bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Desno djelovanje $\blacktriangleleft : A \otimes B \to A$ je desno *Hopfovo djelovanje* (sinonim: A je desna B*-modulna algebra*) ako dijagrami

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}_{A\otimes A}\otimes\Delta"] \arrow[dd, "\mu_A"'] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\tau_{A,B}\otimes\mathrm{id}_B"] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[d, "\blacktriangleleft\otimes\blacktriangleleft"] \\
 & & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
A \otimes B \arrow[rr, "\blacktriangleleft"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes B \arrow[r, "\eta_A\otimes\mathrm{id}_B"] \arrow[d, "\eta_A\otimes\epsilon"'] & A \otimes B \arrow[d, "\blacktriangleleft"] \\
A \otimes k \arrow[r, "r_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

komutiraju.

U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, uvjeti da je desno djelovanje Hopfovo mogu se zapisati, za a, $a' \in A$, b, $b' \in B$, kao

$$(aa') \blacktriangleleft b = (a \blacktriangleleft b_{(1)})(a' \blacktriangleleft b_{(2)})$$

$$1_A \blacktriangleleft b = \epsilon(b) 1_A$$

Definicija 6.3.2. *Poludirektni produkt* (*engl. (smash product*) $B\sharp A$ bialgebre $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta, \epsilon)$ i desne B-modulne algebre (A, μ_A, η_A) u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ sa simetrijom τ je monoid $B\sharp A = (B \otimes A, \mu_{B\sharp A}, \eta_{B\sharp A})$ u $\mathcal{V}$ gdje je morfizam množenja $\mu_{B\sharp A}$ kompozicija

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes A) \otimes (B \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_{B\otimes A}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_A"] \\
(B \otimes A) \otimes ((B \otimes B) \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_B\otimes\tau_{A,B}\otimes\mathrm{id}_B\otimes\mathrm{id}_A"] \\
B \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \arrow[d, "\mu_B\otimes(\triangleleft\otimes\mathrm{id}_A)"] \\
B \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}_B\otimes\mu_A"] \\
B \otimes A
\end{tikzcd}$$

i jedinica $\eta_{B\sharp A} = \eta_B \otimes \eta_A$ (bez pisanja koherencija).

Definicija množenja i jedinice u poludirektnom produktu može se u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji zapisati

$$(b\sharp a)(b'\sharp a') = bb'_{(1)}\sharp(a \blacktriangleleft b'_{(2)})a', \qquad a, a' \in A,\ b, b' \in B,$$

$$1_{B\sharp A} = 1_B \sharp 1_A,$$

gdje (radi naglašavanja) pišemo $a\sharp b := a \otimes b$. Primijetimo podalgebre $1_B\sharp A \cong A$ i $B\sharp 1_A \cong B$.

Slično definiramo lijevo Hopfovo djelovanje $\blacktriangleright\colon B \otimes A \to A$ i poludirektni produkt $A\sharp B$, u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji

$$b \blacktriangleright (aa') = (b_{(1)} \blacktriangleright a) \cdot (b_{(2)} \blacktriangleright a')$$

$$b \blacktriangleright 1_A = \epsilon(b) 1_A$$

$$(a\sharp b)(a'\sharp b') = a(b_{(1)} \blacktriangleright a')\sharp b_{(2)} b', \qquad a, a' \in A, b, b' \in B$$

Množenje na poludirektnom produktu $A\sharp B$ (odnosno $B\sharp A$) je definirano upravo tako da proširenje Hopfovog djelovanja B na A i djelovanja A na A induciranog množenjem bude djelovanje $A\sharp B$ na A (odnosno $B\sharp A$ na A).

6.4 Hopfovo sparivanje, Heisenbergovo udvojenje

Definicija 6.4.1. *Hopfovo sparivanje* dviju Hopfovih algebri A i H u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r, \tau)$ je morfizam $\langle\ ,\ \rangle\colon A \otimes H \to k$ u $\mathcal{V}$ sa svojstvima:

$$\begin{aligned}
&\langle ab, h\rangle = \langle a \otimes b, \Delta h\rangle,\\
&\langle 1_A, h\rangle = \epsilon(h),\\
&\langle \Delta a, h \otimes g\rangle = \langle a, hg\rangle,\\
&\epsilon(a) = \langle a, 1_H\rangle,\\
&\langle Sa, h\rangle = \langle a, Sh\rangle.
\end{aligned}$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za a, $b \in A$, h, $g \in H$, pri čemu je sparivanje $A \otimes A$ i $H \otimes H$ inducirano sparivanjem po komponentama.

Drugim riječima, množenje na H je formalno dualno komnoženju na A, množenje na A formalno dualno komnoženju na A i antipodi su im međusobno dualni.

6.4.2. Neka je sada A konačno-dimenzionalna Hopfova k-algebra. Tada je njen k-linearni dual $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ Hopfova k-algebra na jedinstveni način takav da je kanonsko sparivanje $\langle\,,\rangle\colon A \otimes A^* \to k$, $\langle a, f\rangle = f(a)$, Hopfovo sparivanje. Iz osnova linearne algebre znamo da je to sparivanje nedegenerirano u obje varijable. Množenje u A^* definirano tako tada nije nužno standardno množenje funkcionala po točkama. Tada možemo definirati Hopfova djelovanja

$$\blacktriangleleft\colon A \otimes A^* \to A, \qquad \triangleright\colon A \otimes A^* \to A^*$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji sa:

$$d \blacktriangleleft f = \langle d_{(1)}, f\rangle d_{(2)}, \qquad d \triangleright f = f_{(1)}\langle d, f_{(2)}\rangle.$$

Budući da je sparivanje nedegenerirano možemo reći da je prvo djelovanje Hopfovo djelovanje određeno jedinstveno sa: $\langle d \blacktriangleleft f, g\rangle = \langle d, fg\rangle$ za svaki $g \in A^*$, a drugo Hopfovo djelovanje određeno jedinstveno sa: $\langle e, d \triangleright f\rangle = \langle ed, f\rangle$ za svaki $e \in A$.

Definicija 6.4.3. *Heisenbergovo udvojenje* konačno-dimenzionalne Hopfove k-algebre A je poludirektni produkt $A^* \sharp A$ s obzirom na desno Hopfovo djelovanje $\blacktriangleleft$ Hopfove algebre A^* na A kao iznad:

$$f\sharp d \cdot g\sharp e = fg_{(1)}\sharp(d \blacktriangleleft g_{(2)})e = fg_{(1)}\sharp\langle d_{(1)}, g_{(2)}\rangle d_{(2)}e$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za f, $g \in A^*$, d, $e \in A$. Isti produkt na $A^* \otimes A$ dobije se od lijevog djelovanja $\triangleright$ od A na A^* definiranog iznad jer je:

$$f(d_{(1)} \triangleright g)\sharp d_{(2)}e = fg_{(1)}\langle d_{(1)}, g_{(2)}\rangle\sharp d_{(2)}e = fg_{(1)}\sharp\langle d_{(1)}, g_{(2)}\rangle d_{(2)}e = fg_{(1)}\sharp(d \blacktriangleleft g_{(2)})e$$

Propozicija 6.4.4. *Neka su A i H Hopfove algebre u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ i neka je $\langle\,,\rangle\colon A\otimes H\to k$ Hopfovo sparivanje u $\mathcal{V}$. Tada su morfizmi u $\mathcal{V}$*

$$\blacktriangleleft\colon A\otimes H\to A,\qquad \triangleright\colon A\otimes H\to H$$

definirani kao kompozicije

$$\blacktriangleleft\colon A\otimes H\xrightarrow{\Delta_A\otimes\mathrm{id}_H} A\otimes A\otimes H\xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\tau_{A,H}} A\otimes H\otimes A\xrightarrow{\langle,\rangle\otimes\mathrm{id}_A} k\otimes A\xrightarrow{\quad\cong\quad} A$$

$$\triangleright\colon A\otimes H\xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes\Delta_H} A\otimes H\otimes H\xrightarrow{\tau_{A,H}\otimes\mathrm{id}_H} H\otimes A\otimes H\xrightarrow{\mathrm{id}_H\otimes\langle,\rangle} H\otimes k\xrightarrow{\quad\cong\quad} H$$

tj. u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za $d\in A$, $f\in H$, sa:

$$d\blacktriangleleft f=\langle d_{(1)},f\rangle d_{(2)},\qquad d\triangleright f=f_{(1)}\langle d,f_{(2)}\rangle$$

redom desno i lijevo djelovanje u $\mathcal{V}$. Ta djelovanja definiraju isti poludirektni produkt $H\sharp A$.

6.5 Yetter-Drinfeldovi moduli i modulne algebre

U ovom odjeljku koristimo apstraktnu Sweedlerovu notaciju bez napominjanja.

Definicija 6.5.1. Neka je H bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. *Desno-lijevi Yetter-Drinfeldov modul nad bialgebrom H* je objekt M u $\mathcal{V}$ koji je desni H-modul uz desno djelovanje $\blacktriangleleft\colon M\otimes H\to M$ i lijevi H-komodul uz lijevo kodjelovanje $\rho\colon M\to H\otimes M$, u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji $m\mapsto m_{[-1]}\otimes m_{[0]}$, takav da zadovoljava Yetter-Drinfeldov uvjet kompatibilnosti:

$$h_{(2)}(m\blacktriangleleft h_{(1)})_{[-1]}\otimes(m\blacktriangleleft h_{(1)})_{[0]}=m_{[-1]}h_{(1)}\otimes(m_{[0]}\blacktriangleleft h_{(2)}),\quad h\in H, m\in M.$$

6.5.2. Objekti *kategorije desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad bialgebrom H* u $\mathcal{V}$ su desno-lijevi Yetter-Drinfeldovi moduli, a morfizmi te kategorije su morfizmi desnih H-modula i lijevih H-komodula. Ona je monoidalna kategorija uz tenzorski produkt u $\mathcal{V}$ i djelovanje i kodjelovanje H na tenzorske produkte objekata definirano na sljedeći način. Desno djelovanje H na tenzorski produkt $M\otimes N$ i jedinični objekt k definirano je sa:

$$M\otimes N\otimes H\to M\otimes N,\qquad (m\otimes n)\blacktriangleleft h=(m\blacktriangleleft h_{(1)})\otimes(n\blacktriangleleft h_{(2)}),$$

$$k\otimes H\to k,\qquad 1_k\blacktriangleleft h=\epsilon(h)1_k$$

a lijevo kodjelovanje H na $M\otimes N$ i k sa:

$$M\otimes N\to H\otimes M\otimes N,\qquad m\otimes n\mapsto n_{[-1]}m_{[-1]}\otimes m_{[0]}\otimes n_{[0]}$$

$$k \to H \otimes k, \qquad 1_k \mapsto 1_H \otimes 1_k$$

Lako se provjeri da ta preslikavanja zadovoljavaju aksiome za djelovanje odnosno kodjelovanje. Kodjelovanje ovdje nije definirano kao standardno kodjelovanje u monoidalnoj kategoriji lijevih H-komodula, već je redoslijed faktora $m_{[-1]}$ i $n_{[-1]}$ ovdje obrnut. Uz ovako definirano kodjelovanje lako se vidi da je tenzorski produkt $M \otimes N$ desno-lijevi Yetter-Drinfeldov modul:

$$\begin{aligned}
& h_{(3)}((m \otimes n) \blacktriangleleft h)_{[-1]} \otimes ((m \otimes n) \blacktriangleleft h)_{[0]} = \\
&= h_{(3)}((m \blacktriangleleft h_{(1)}) \otimes (n \blacktriangleleft h_{(2)}))_{[-1]} \otimes ((m \blacktriangleleft h_{(1)}) \otimes (n \blacktriangleleft h_{(2)}))_{[0]} = \\
&= h_{(3)}(n \blacktriangleleft h_{(2)})_{[-1]}(m \blacktriangleleft h_{(1)})_{[-1]} \otimes (m \blacktriangleleft h_{(1)})_{[0]} \otimes (n \blacktriangleleft h_{(2)})_{[0]} = \quad \text{(i)} \\
&= n_{[-1]}h_{(2)}(m \blacktriangleleft h_{(1)})_{[-1]} \otimes (m \blacktriangleleft h_{(1)})_{[0]} \otimes (n_{[0]} \blacktriangleleft h_{(3)}) = \quad \text{(ii)} \\
&= n_{[-1]}m_{[-1]}h_{(1)} \otimes (m_{[0]} \blacktriangleleft h_{(2)}) \otimes (n_{[0]} \blacktriangleleft h_{(3)}) = \\
&= (m \otimes n)_{[-1]}h_{(1)} \otimes ((m \otimes n)_{[0]} \blacktriangleleft h_{(2)})
\end{aligned}$$

pri čemu smo u (i) koristili Yetter-Drinfeldovo svojstvo od N (sa $h_{(2)}$ umjesto h) i u (ii) Yetter-Drinfeldovo svojstvo od M. Uz standardno definirano kodjelovanje to ne bi vrijedilo. Ta monoidalna kategorija ima predpleteničastu simetriju (engl. pre-braiding)

$$\tau_{M,N} \colon M \otimes N \to N \otimes M, \qquad \tau_{M,N}(m \otimes n) = (n \blacktriangleleft m_{[-1]}) \otimes m_{[0]}.$$

Lako se vidi da je svaki $\tau_{M,N}$ zaista morfizam desnih H-modula i lijevih H-komodula.

6.5.3. *Algebra u kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad bialgebrom H* u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ je dakle algebra M u $\mathcal{V}$ uz množenje $\mu_M \colon M \otimes M \to M$ i jedinicu $\eta_M \colon k \to M$ koji su morfizmi u toj kategoriji Yetter-Drinfeldovih modula. Detaljnije, množenje i jedinica su morfizmi desnih H-modula u $\mathcal{V}$:

$$(m \cdot m') \blacktriangleleft h = (m \blacktriangleleft h_{(1)}) \cdot (m' \blacktriangleleft h_{(2)})$$

$$1_M \blacktriangleleft h = 1_k \blacktriangleleft h = \epsilon(h)1_k$$

to jest desno djelovanje $\blacktriangleleft$ je Hopfovo djelovanje, i morfizmi su lijevih H-komodula u $\mathcal{V}$:

$$(m \cdot m')_{[-1]} \otimes (m \cdot m')_{[0]} = m'_{[-1]}m_{[-1]} \otimes m_{[0]}m'_{[0]}$$

$$1_H \otimes 1_M = 1_H \otimes 1_M.$$

Ta algebra je *pleteničasto-komutativna* ako vrijedi $\mu_M \circ \tau_{M,M} = \mu_M$ to jest ako je

$$m \cdot m' = (m' \blacktriangleleft m_{[-1]}) \cdot m_{[0]},$$

gdje je τ predpleteničasta simetrija u toj kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula.

Napomena 6.5.4. Pretpostavimo da je M desni H-modul i lijevi H-komodul u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Ako je (i) pripadno desno djelovanje $\blacktriangleleft\colon M \otimes H \to M$ Hopfovo djelovanje, onda je dobro definiran poludirektni produkt $H\sharp M$ i možemo pripadno kodjelovanje ρ gledati kao morfizam $\rho\colon M \to H\sharp M$. Koristeći množenje na algebri $H\sharp M$ sva dosad navedena svojstva možemo zapisati u kraćem obliku kako slijedi. (ii) Desno-lijevo Yetter-Drinfeldovo svojstvo od M nad H je:

$$h_{(2)} \cdot \rho(m \blacktriangleleft h_{(1)}) = \rho(m) \cdot h, \quad m \in M, h \in H.$$

Ako je M algebra u $\mathcal{V}$ uz množenje μ_M i jedinicu η_M, uvjet da je ona (iii) pleteničasto-komutativna možemo zapisati ovako:

$$m \cdot m' = m' \blacktriangleleft \rho(m), \quad m, m' \in M$$

i zatim, ako vrijedi prethodno svojstvo, uvjet da je (iv) μ_M morfizam lijevih H-komodula u $\mathcal{V}$ možemo zapisati ovako:

$$\rho(m \cdot m') = \rho(m') \cdot \rho(m), \quad m, m' \in M.$$

Za algebru M u $\mathcal{V}$ koja je desni H-modul i lijevi H-komodul dovoljno je provjeriti (i), (ii), (iii), (iv) redom da se utvrdi da je ona desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u $\mathcal{V}$.

Analogno se definira kategorija lijevo-desnih Yetter-Drinfeldovih modula nad bialgebrom H, kako slijedi.

Definicija 6.5.5. Neka je H bialgebra u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. *Lijevo-desni Yetter-Drinfeldov modul nad bialgebrom H* je objekt M u $\mathcal{V}$ koji je lijevi H-modul uz lijevo djelovanje $\blacktriangleright\colon H \otimes M \to M$ i desni H-komodul uz desno kodjelovanje $\rho\colon M \to M \otimes H$, u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji $m \mapsto m_{[0]} \otimes m_{[1]}$, takav da zadovoljava Yetter-Drinfeldov uvjet kompatibilnosti:

$$(h_{(1)} \blacktriangleright m_{[0]}) \otimes h_{(2)} m_{[1]} = (h_{(2)} \blacktriangleright m)_{[0]} \otimes (h_{(2)} \blacktriangleright m)_{[1]} h_{(1)}$$

6.5.6. Objekti *kategorije lijevo-desnih Yetter-Drinfeldovih modula nad bialgebrom H* u $\mathcal{V}$ su lijevo-desni Yetter-Drinfeldovi moduli, a morfizmi te kategorije su morfizmi lijevih H-modula i desnih H-komodula. Ona je monoidalna kategorija uz tenzorski produkt u $\mathcal{V}$ i djelovanje i kodjelovanje H na tenzorske produkte objekata definirano na sljedeći način. Lijevo djelovanje H na tenzorski produkt $M \otimes N$ i jedinični objekt k definirano je sa:

$$H \otimes M \otimes N \to M \otimes N, \qquad h \blacktriangleright (m \otimes n) = (h_{(1)} \blacktriangleright m) \otimes (h_{(2)} \blacktriangleright n),$$

$$H \otimes k \to k, \qquad h \blacktriangleright 1_k = \epsilon(h) 1_k$$

a desno kodjelovanje H na $M \otimes N$ i k sa:

$$M \otimes N \to M \otimes N \otimes H, \qquad m \otimes n \mapsto m_{[0]} \otimes n_{[0]} \otimes n_{[1]} m_{[1]}$$

$$k \to k \otimes H, \qquad 1_k \mapsto 1_k \otimes 1_H$$

Kodjelovanje ovdje nije definirano kao standardno kodjelovanje u monoidalnoj kategoriji desnih H-komodula, već je redoslijed faktora $m_{[1]}$ i $n_{[1]}$ ovdje obrnut. Ta monoidalna kategorija ima predpleteničastu simetriju

$$\tau'_{M,N} \colon M \otimes N \to N \otimes M, \qquad \tau'_{M,N}(m \otimes n) = n_{[0]} \otimes (n_{[1]} \blacktriangleright m).$$

6.5.7. *Algebra u kategoriji lijevo-desnih Yetter-Drinfeldovih modula nad bialgebrom H* u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ je dakle algebra M u $\mathcal{V}$ uz množenje $\mu_M \colon M \otimes M \to M$ i jedinicu $\eta_M \colon k \to M$ koji su morfizmi u toj kategoriji Yetter-Drinfeldovih modula. Detaljnije, množenje i jedinica su morfizmi lijevih H-modula u $\mathcal{V}$:

$$h \blacktriangleright (m \cdot m') = (h_{(1)} \blacktriangleright m) \cdot (h_{(2)} \blacktriangleright m')$$

$$h \blacktriangleright 1_A = h \blacktriangleright 1_k = \epsilon(h) 1_k$$

to jest lijevo djelovanje $\blacktriangleright$ je Hopfovo djelovanje, i morfizmi su desnih H-komodula u $\mathcal{V}$:

$$(m \cdot m')_{[0]} \otimes (m \cdot m')_{[1]} = m_{[0]} \otimes m'_{[0]} \otimes m'_{[1]} m_{[1]}$$

$$1_M \otimes 1_H = 1_M \otimes 1_H.$$

Ta algebra je *pleteničasto-komutativna* ako vrijedi $\mu_M \circ \tau'_{M,M} = \mu_M$ to jest ako je

$$m \cdot m' = m'_{[0]} \cdot (m'_{[1]} \blacktriangleright m),$$

gdje je τ predpleteničasta simetrija u toj kategoriji lijevo-desnih Yetter-Drinfeldovih modula.

Napomena 6.5.8. Pretpostavimo da je M lijevi H-modul i desni H-komodul u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Ako je (i) pripadno lijevo djelovanje $\blacktriangleright \colon H \otimes M \to M$ Hopfovo djelovanje, onda je dobro definiran poludirektni produkt $M \sharp H$ i možemo pripadno kodjelovanje ρ gledati kao morfizam $\rho \colon M \to M \sharp H$. Koristeći množenje na algebri $M \sharp H$ sva dosad navedena svojstva možemo zapisati u kraćem obliku kako slijedi. (ii) Lijevo-desno Yetter-Drinfeldovo svojstvo od M nad H je:

$$h \cdot \rho(m) = \rho(h_{(2)} \blacktriangleright m) \cdot h_{(1)}, \quad m \in M, h \in H.$$

Ako je M algebra u $\mathcal{V}$ uz množenje μ i jedinicu η, uvjet da je ona (iii) pleteničasto-komutativna možemo zapisati ovako:

$$m \cdot m' = \rho(m') \blacktriangleright m, \quad m, m' \in M$$

i zatim, ako vrijedi prethodno svojstvo, uvjet da je (iv) μ morfizam H-komodula u $\mathcal{V}$ možemo zapisati ovako:

$$\rho(m \cdot m') = \rho(m') \cdot \rho(m), \quad m, m' \in M.$$

Za algebru M u $\mathcal{V}$ koja je lijevi H-modul i desni H-komodul dovoljno je provjeriti (i), (ii), (iii), (iv) redom da se utvrdi da je ona lijevo-desna pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u $\mathcal{V}$.

6.6 Tenzorski produkti nad unutrašnjim monoidom

6.6.1 Tenzorski produkt nad bazom

Definicija 6.6.1. Neka je $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k)$ monoidalna kategorija koja dopušta koujednačitelje i neka oni komutiraju s tenzorskim produktom. Neka je (R, μ, η) monoid u $\mathcal{V}$, $\rho\colon N \otimes R \to N$ desno R-djelovanje i $\lambda\colon R \otimes M \to M$ lijevo R-djelovanje. *Tenzorski produkt* desnog (unutarnjeg) R-modula (N, ρ) i lijevog (unutarnjeg) R-modula (M, λ) je koujednačitelj (s vrhom $N \otimes_R M$)

$$\begin{tikzcd} N \otimes R \otimes M \arrow[r, shift left, "\rho\otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_N \otimes \lambda"'] & N \otimes M \arrow[r] & N \otimes_R M \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Monoid R često zovemo baza tenzorskog produkta $\otimes_R$. Da bismo razlikovali tenzorski produkt $\otimes_R$ od monoidalnog produkta u $\mathcal{V}$, zovemo ga i tenzorski produkt nad monoidom R (ili bazom R). U dijagramu (6.1) $N \otimes_R M$ označava vrh koujednačitelja koji je samo objekt u $\mathcal{V}$ bez dodatnih djelovanja. Taj vrh također smatramo tenzorskim produktom nad monoidom R.

6.6.2 Unutrašnji bimoduli

Neka su R, S monoidi u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r)$.

Definicija 6.6.2. *R-S-bimodul* je trojka (M, ν_R, ν_S) takva da je M objekt u $\mathcal{V}$, par (M, ν_R) je lijevi R-modul, (M, ν_S) desni S-modul i djelovanja ν_R i ν_S komutiraju u smislu da dijagram

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes M) \otimes S \arrow[r, "\nu_R \otimes \mathrm{id}_S"] \arrow[dd, "a_{R,M,S}"'] & M \otimes S \arrow[dr, "\nu_S"] & \\
 & & M \\
R \otimes (M \otimes S) \arrow[r, "\mathrm{id}_R \otimes \nu_S"'] & R \otimes M \arrow[ur, "\nu_R"'] &
\end{tikzcd}$$

komutira.

6.6.3 Tenzorski produkt unutrašnjih bimodula

Malo više pažnje moramo posvetiti tenzorskom produktu nad monoidom modula s bimodulom, bimodula s modulom ili bimodula s bimodulom, u nekoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$. Da bi dodatno djelovanje na bimodulu, koje nije iskorišteno u tenzorskom produktu modula, induciralo djelovanje na tenzorskom produktu modula potrebno je da koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom u smislu definicije 2.2.5.

Neka je dakle $R = (R, \mu_R, \eta_R)$ monoid u $\mathcal{V}$ i neka su $N_R = (N, \triangleleft)$ te ${}_RM = (M, \triangleright)$ redom desni i lijevi R-modul u $\mathcal{V}$. Tada je tenzorski produkt $(N, \triangleleft) \otimes_R (M, \triangleright)$ modula koujednačitelj u $\mathcal{V}$

$$\begin{tikzcd}
N \otimes R \otimes M \arrow[r, shift left, "\triangleleft \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_N \otimes \triangleright"'] & N \otimes M \arrow[r] & N_R \otimes_R {}_RM.
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

Naravno, taj koujednačitelj ne mora uvijek postojati. Obično sam vrh koujednačitelja također zovemo tenzorskim produktom i označavamo pojednostavljeno $N \otimes_R M$.

Neka je $S = (S, \mu_S, \eta_S)$ monoid u $\mathcal{V}$ i neka je ${}_RM_S = (M, \triangleright_R, \triangleleft_S)$ unutrašnji R-S-bimodul u $\mathcal{V}$. To znači da djelovanja $\triangleright_R$ i $\triangleleft_S$ komutiraju u smislu da $\triangleright_R \circ (\mathrm{id}_R \otimes \triangleleft_S) = \triangleleft_S \circ (\triangleright_R \otimes \mathrm{id}_S) \colon R \otimes M \otimes S \to M$. Pretpostavimo da monoidalni produkt u $\mathcal{V}$ komutira s koujednačiteljima. To znači da ako tenzoriramo dijagram za koujednačitelj (6.2) sa S zdesna, dobit ćemo dijagram za koujednačitelj, pa možemo koristiti njegovo univerzalno svojstvo. Ukoliko tenzorski produkt $(N, \triangleleft_R) \otimes_R (M, \triangleright_R)$ postoji, tada njegov vrh ima desno djelovanje ν od S dano univerzalnim svojstvom koujednačitelja:

$$\begin{tikzcd}
N \otimes R \otimes M \otimes S \arrow[r, shift left, "\triangleleft \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_S"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_N \otimes \triangleright \otimes \mathrm{id}_S"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{N \otimes R} \otimes \triangleleft_S"'] & N \otimes M \otimes S \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_N \otimes \triangleleft_S"] & N_R \otimes_R {}_RM \otimes S \arrow[d, "\nu"] \\
N \otimes R \otimes M \arrow[r, shift left, "\triangleleft \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_N \otimes \triangleright"'] & N \otimes M \arrow[r] & N_R \otimes_R {}_RM
\end{tikzcd}$$

Time dobivamo desni unutrašnji S-modul $N_R \otimes_R {}_R M_S$ u $\mathcal{V}$. Analogno, promatrajući dodatno lijevo (P, μ_P, η_P)-djelovanje na N, tenzorski produkt unutrašnjeg P-R-bimodula ${}_P N_R$ i unutrašnjeg R-S-bimodula ${}_R M_S$ postaje unutrašnji P-S-bimodul ${}_P N \otimes_R M_S = {}_P N_R \otimes_R {}_R M_S$.

Ukoliko je A monoid u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ s koujednačiteljima koji komutiraju s tenzorskim produktom tada kategorija A-bimodula $({}_A\mathcal{V}_A, \otimes_A, A)$ i preslikavanja bimodula ima strukturu monoidalne kategorije.

Poglavlje 7

Unutarnji bialgebroid i Hopfov algebroid

Ovo poglavlje bavi se internalizacijom pojmova bialgebroida i Hopfovih algebroida. Ova disertacija je uglavnom posvećena razradi neke klase unutarnjih Hopfovih algebroida u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora.

Najprije, radi motivacije (i objašnjenja nekih pojmova iz uvoda disertacije) obrađujemo pojam grupoida i njegovog poopćenja u monoidalnim kategorijama, unutarnjeg grupoida. Naime, dualni objekt grupoidu, kogrupoid u simetričnoj monoidalnoj kategoriji komutativnih k-algebri je komutativni Hopfov algebroid nad komutativnom bazom. Komutativan bialgebroid je gotovo komutativan Hopfov algebroid, jedino mu nedostaje jedan strukturni morfizam, antipod.

Nekomutativno poopćenje su asocijativni k-bialgebroidi iz [Lu], čija aksiomatika je dalje raspravljana u [Xu, BrzMil, BohmHAlg, SS]. U drugom odjeljku razrađujemo internaliziranu verziju tog pojma (prema G. Böhm [BohmInt]) u kontekstu simetrične monoidalne kategorije s koujednačiteljima koji komutiraju s tenzorskim produktom. Na toj internalizaciji bialgebroida u trećem odjeljku baziramo novu definiciju internaliziranog Hopfovog algebroida. Opravdanje same definicije zahtijeva nešto više pažnje nego u kategoriji vektorskih prostora, gdje je definiciju simetričnog Hopfovog algebroida razvila G. Böhm [BohmAlt, BohmSzlach] ispravljajući neke nedostatke nesimetričnih Hopfovih algebroida prema J-H. Lu [Lu].

7.1 Grupoidi i unutarnji grupoidi

Ovaj odjeljak nije korišten u formulaciji i dokazivanju novih rezultata u disertaciji, ali pripada pojmovlju koje motivira koncept Hopfovih algebroida. Naime, konačno generirani komutativni Hopfovi k-algebroidi bez nilpotenata su unutarnji kogrupoidi u kategoriji konačno generiranih komutativnih algebri bez nilpotenata, odnosno čine kategoriju dualnu kategoriji grupoida u kategoriji afinih k-višestrukosti.

Pojam grupoida je u matematiku uveo H. Brandt [Brandt] 1927. godine kao skup s asocijativnom parcijalno definiranom binarnom operacijom koja zadovoljava niz aksioma. Modernu definiciju, internalizaciju i geometrijske primjene razvio je C. Ehresmann. Slijedi moderna definicija.

Definicija 7.1.1. (Diskretan) *grupoid* je mala kategorija u kojoj je svaki morfizam invertibilan. *Morfizam grupoida* je funktor. Diskretni grupoidi i njihovi morfizmi čine kategoriju

$$\mathrm{Gpd} = \mathrm{Gpd}(\mathrm{Set}).$$

Ako je G diskretan grupoid njegovi objekti čine dakle skup G_0 i morfizmi skup G_1. Svakom morfizmu f iz G_1 možemo pridružiti njegovu domenu $\mathrm{dom}(f)$ i kodomenu $\mathrm{cod}(f)$, što definira preslikavanja $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon G_1 \to G_0$. Skup svih parova $(g, f) \in G_1 \times G_1$ koji su kompozabilni, tj. za koje vrijedi $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f)$, je povlak $G_1 \times_{G_0} G_1$ dan univerzalnim konusom

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & G_1 \arrow[d, "\mathrm{cod}"] \\
G_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] & G_0
\end{tikzcd}$$

Dakle, kompozicija je preslikavanje $m\colon G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$, $m(g, f) = g \circ f$. Uveli smo novi simbol m jer ćemo koristiti kompoziciju preslikavanja m s drugim preslikavanjima.

Propozicija 7.1.2. *Grupoid G je određen sedmorkom $(G_0, G_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, m, 1, i)$, gdje je G_0 skup objekata (ili jedinica) grupoida, G_1 skup morfizama grupoida, $\mathrm{dom}\colon G_1 \to G_0$ funkcija uzimanja domene, $\mathrm{cod}\colon G_1 \to G_0$ funkcija uzimanja kodomene, $m\colon G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$, $(g, f) \mapsto g \circ f$ funkcija kompozicije, $1\colon G_0 \to G_1$, $x \mapsto \mathrm{id}_x$ funkcija uzimanja identitete i $i\colon G_1 \to G_1$, $f \mapsto f^{-1}$ funkcija uzimanja dvostranog inverza. Ta strukturna preslikavanja zadovoljavaju sljedeće identitete*

$$m \circ (m \times_{G_0} \mathrm{id}_{G_1}) = m \circ (\mathrm{id}_{G_1} \times_{G_0} m)\colon G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1, \tag{7.1}$$

$$\mathrm{cod} \circ p_1 = \mathrm{cod} \circ m, \qquad \mathrm{dom} \circ p_2 = \mathrm{dom} \circ m, \tag{7.2}$$

$$\mathrm{dom} \circ 1 = \mathrm{id}_{G_0}, \qquad \mathrm{cod} \circ 1 = \mathrm{id}_{G_0}, \tag{7.3}$$

$$m \circ (\mathrm{id}_{G_1} \times_{G_0} 1) = \mathrm{id}_{G_1} = m \circ (1 \times_{G_0} \mathrm{id}_{G_1}), \tag{7.4}$$

uz identifikacije $G_1 \times_{G_0} G_0 \cong G_1 \cong G_0 \times_{G_0} G_1$, te zahtjeve za funkciju uzimanja inverza i,

$$\mathrm{dom} \circ i = \mathrm{cod}, \qquad \mathrm{cod} \circ i = \mathrm{dom}, \tag{7.5}$$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[d, "m"] & G_1 \arrow[l, "(i,\mathrm{id})"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& G_1 &
\end{tikzcd} \tag{7.6}$$

Definicija 7.1.3. *Grupoid* u kategoriji C je sedmorka $(G_0, G_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, m, 1, i)$ u kojoj su G_0, G_1 objekti u C, postoje povlaci $G_1 \times_{G_0} G_1$ i $G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_1} G_0$, a $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon G_1 \to G_0$, $m\colon G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$, $1\colon G_0 \to G_1$ i $i\colon G_1 \to G_1$ su morfizmi u C koji zadovoljavaju identite (7.1), (7.2), (7.3), (7.4), (7.5), (7.6) u kategoriji C. *Morfizam grupoida* u C,

$$F = (F_0, F_1)\colon (G_0, G_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, m, 1, i) \to (G_0', G_1', \mathrm{dom}', \mathrm{cod}', m', 1', i'),$$

je par morfizama $F_0\colon G_0 \to G_0'$, $F_1\colon G_0' \to G_1'$ u C koji komutiraju sa strukturnim morfizmima u smislu da vrijedi $\mathrm{dom}' \circ F_1 = F_0 \circ \mathrm{dom}$, $\mathrm{cod}' \circ F_1 = F_0 \circ \mathrm{cod}$, $F_0 \circ m = m' \circ F_0$, $F_1 \circ 1 = 1' \circ F_0$ i $i' \circ F_1 = F_1 \circ i$. Grupoidi u C i njihovi morfizmi čine kategoriju

$$\mathrm{Gpd}(C).$$

Osim diskretnih grupoida, tj. grupoida u Set, poznati geometrijski primjer čine Liejevi grupoidi. Liejev grupoid se može definirati kao unutarnji grupoid u kategoriji glatkih mnogostrukosti. Kategorija glatkih mnogostrukosti nema ujednačitelje nekih glatkih preslikavanja pa ne dopušta ni povlake proizvoljnih parova morfizama s istom kodomenom. Ipak, povlaci $G_1 \times_{G_0} G_1$ (i iteracije) postoje ako su dom i cod submerzije. Stoga Liejev grupoid obično definiramo pomoću podataka $G_0, G_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, m, 1, i$ kao gore s dodatnim zahtjevom da su dom i cod submerzije.

Definicija 7.1.4. Kategorija komutativnih Hopfovih k-algebroida $(\mathrm{Gpd}(\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$ je kategorija suprotna kategoriji grupoida u kategoriji $\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}}$ suprotnoj kategoriji komutativnih algebri nad čvrstim poljem k. *Komutativni Hopfov k-algebroid* je objekt u kategoriji

$$(\mathrm{Gpd}(\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}.$$

U algebarskoj geometriji se kategorija $\mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}}$ obično identificira s jednom geometrijskom kategorijom, kategorijom afinih k-shema Aff_k, vidi primjer 6.1.16. Ekvivalencija kategorija koja realizira tu identifikaciju je dana funktorom spektra komutativnog prstena

$$\mathrm{Spec}\colon \mathrm{Com}_k^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Aff}_k.$$

Funktor Spec prebacuje tenzorski produkt algebri u kategorijski produkt, a tenzorski produkt nad baznom algebrom u povlak $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B) \cong \mathrm{Spec}B \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}B$. Dakle, kategorija komutativnih Hopfovih k-algebroida je dualna kategoriji grupoida u kategoriji Aff_k, a ponekad se tako i definira. Ukoliko je Hopfov algebroid konačno generiran bez nilpotenata, možemo umjesto s afinim k-shemama raditi s afinim k-višestrukostima, vidi primjer 6.1.15.

Morfizme k-algebri koji po dualnosti k-algebri i afinih k-shema (odnosno k-višestrukosti) odgovaraju strukturnim morfizmima zvat ćemo $\alpha = \mathrm{dom}^*$, $\beta = \mathrm{cod}^*$, $\Delta = m^*$, $\epsilon = 1^*$ i

$\tau = i^*$, a projekcijama povlaka su dualni morfizmi $1_{H_1} \otimes_{H_0} \mathrm{id}_{H_1} = p_1^*$, $\mathrm{id}_{H_1} \otimes_{H_0} 1_{H_1} = p_2^*$ koji su injekcije koprodukta u Com_k. Sjetimo se da su ti dualni morfizmi dani pretkompozicijom, npr. $\mathrm{cod}^* = - \circ \mathrm{cod}$.

Eksplicitnije, u terminima kategorije Com_k (usporedi [Ravenel]), komutativni Hopfov algebroid je dan podacima $(H_1, H_0, \alpha, \beta, \Delta, \epsilon, \tau)$ gdje su $H_0, H_1 \in \mathrm{Com}_k$ komutativne k-algebre s množenjima m_{H_1}, m_{H_0} i jedinicama 1_{H_1}, 1_{H_0}, a $\alpha, \beta \colon H_0 \to H_1$, $\Delta \colon H_1 \to H_1 \otimes_{H_0} H_1$, $\epsilon \colon H_1 \to H_0$, $\tau \colon H_1 \to H_1$ morfizmi komutativnih k-algebri koji zadovoljavaju identitete

$$(\Delta \otimes_{H_0} \mathrm{id}_{H_1}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{H_1} \otimes_{H_0} \Delta) \circ \Delta \colon H_1 \to H_1 \otimes_{H_0} H_1 \otimes_{H_0} H_1, \tag{7.7}$$

$$\beta \otimes_{H_0} 1_{H_1} = \Delta \circ \beta, \qquad 1_{H_1} \otimes_{H_0} \alpha = \Delta \circ \alpha, \tag{7.8}$$

$$\epsilon \circ \alpha = \mathrm{id}_{H_0}, \qquad \epsilon \circ \beta = \mathrm{id}_{H_0}, \tag{7.9}$$

$$(\mathrm{id}_{H_1} \otimes_{H_0} \epsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_{H_1} = (\epsilon \otimes_{H_0} \mathrm{id}_{H_1}) \circ \Delta, \tag{7.10}$$

gdje su identificirani vektorski prostori $H_1 \otimes_{H_0} H_0 \cong H_1 \cong H_0 \otimes_{H_0} H_1$, te zahtjeve za antipodno preslikavanje τ,

$$\tau \circ \alpha = \beta, \qquad \tau \circ \beta = \alpha, \tag{7.11}$$

$$\begin{tikzcd} & H_1 \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ H_1 & H_1 \otimes_{H_0} H_1 \arrow[l, "m_{H_1} \circ (\mathrm{id} \otimes \tau)"] \arrow[r, "m_{H_1} \circ (\tau \otimes \mathrm{id})"'] & H_1 \end{tikzcd} \tag{7.12}$$

Primijetimo da je kod komutativnih Hopfovih algebroida τ izomorfizam komutativnih algebri.

7.2 Unutarnji bialgebroid

U ovom odjeljku $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r, \tau)$ je fiksirana simetrična monoidalna kategorija koja dopušta koujednačitelje koji komutiraju s tenzorskim produktom $\otimes$ u smislu definicije 2.2.5. Te pretpostavke su potrebne da bi mogli definirati pojam unutrašnjeg bialgebroida.

7.2.1 Pripremne leme

U sljedećem nizu lema u svakoj sljedećoj lemi koristit će se: notacija uvedena u prethodnim lemama i između lema, te svojstva objekata tako označenih dokazana u prethodnim lemama.

7.2.1. Neka su (L, μ_L, η_L) i (H, μ_H, η_H) monoidi u $\mathcal{V}$. Kako koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom, dobro je definirana monoidalna kategorija L-bimodula $({}_L\mathcal{V}_L, \otimes_L, L)$.

Lema 7.2.2. *Neka su $\alpha\colon L \to H$, $\beta\colon L^{\mathrm{op}} \to H$ morfizmi monoida u $\mathcal{V}$ za koje vrijedi*

$$\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\alpha \otimes \beta) = \mu_H \circ (\alpha \otimes \beta). \tag{7.13}$$

Tada je H unutarnji L-bimodul preko lijevog djelovanja $\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H)$ i desnog djelovanja $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \beta)$.

Dokaz. Dokazujemo prvo da je $\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H)$ lijevo djelovanje. Imamo

$$\begin{aligned}\mu_H \circ (\alpha \otimes (\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H))) &= \mu_H \circ ((\mu_H \circ (\alpha \otimes \alpha)) \otimes \mathrm{id}_H)\\ &= \mu_H \circ ((\alpha \circ \mu_L) \otimes \mathrm{id}_H)\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj liniji koristili asocijativnost μ_H, a u drugoj da je α morfizam monoida. Dalje, za kompatibilnost sa jedinicom η_H primijetimo $\mu_H \circ ((\alpha \circ \eta_L) \otimes \mathrm{id}_H) = \mu_H \circ (\eta_H \otimes \mathrm{id}_H) = l_H$. Slično se dokaže da je $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \beta)$ desno djelovanje.

Na kraju treba provjeriti da lijevo i desno djelovanje komutiraju, tj. da je

$$\mu_H \circ (\alpha \otimes (\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \beta))) = \mu_H \circ \tau_{H,H} \circ ((\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H)) \otimes \beta) : L \otimes H \otimes L \to H$$

Lijeva strana je jednaka $\mu_H \circ (\mu_H \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\alpha \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_L \otimes \tau_{H,L})$. Desna strana je jednaka $\mu_H \circ (\beta \otimes (\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H))) \circ \tau_{L \otimes H, L}$ što je $\mu_H \circ ((\mu_H \circ (\beta \otimes \alpha)) \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{L \otimes H, L}$ pa pretpostavka 7.13 svodi to na $\mu_H \circ ((\mu_H \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \tau_{L,L}) \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{L \otimes H, L}$ što je jednako $\mu_H \circ (\mu_H \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\alpha \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\tau_{L,L} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{L \otimes H, L}$. Jednakost lijeve i desne strane izlazi sada iz $(\tau_{L,L} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{L \otimes H, L} = \mathrm{id}_L \otimes \tau_{H,L}$. $\square$

7.2.3. Za α i β kao u prethodnoj propoziciji označimo s $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ kompozicije:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\alpha}"'] & k \otimes L \arrow[r, "\eta_H \otimes \alpha"] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\beta}"'] & L \otimes k \arrow[r, "\beta \otimes \eta_H"] & H \otimes H \end{tikzcd}$$

U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji to je: $\tilde{\alpha}(l) = 1_H \otimes \alpha(l)$ i $\tilde{\beta}(l) = \beta(l) \otimes 1_H$.

7.2.4. Označimo s $\mu_{H \otimes H} := (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,H} \otimes \mathrm{id}_H)$ i $\eta_{H \otimes H} := (\eta_H \otimes \eta_H) \circ l_k^{-1}$. Tada je prema 6.1.3 $(H \otimes H, \mu_{H \otimes H}, \eta_{H \otimes H})$ monoid u $\mathcal{V}$.

7.2.5. Neka je π kanonsko preslikavanje $H \otimes H \to H \otimes_L H$, tj. koujednačitelj

$$\begin{tikzcd} H \otimes L \otimes H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & H \otimes H \arrow[r, "\pi"] & H \otimes_L H \end{tikzcd}$$

za L-bimodul H. Lako se vidi da je tada π također koujednačitelj paralelnog para morfizama $\mu_{H \otimes H} \circ (\tilde{\alpha} \otimes \mathrm{id}_{H \otimes H})$, $\mu_{H \otimes H} \circ (\tilde{\beta} \otimes \mathrm{id}_{H \otimes H})$,

$$\begin{tikzcd} L \otimes (H \otimes H) \arrow[r, shift left, "\tilde{\alpha} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "\tilde{\beta} \otimes \mathrm{id}"'] & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu_{H \otimes H}"] & H \otimes H \arrow[r, "\pi"] & H \otimes_L H \end{tikzcd}$$

Lema 7.2.6. *(i) Postoji jedinstveni ρ takav da je sljedeći dijagram komutativan:*

$$\begin{tikzcd}
(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H\otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, dashed, "\rho"] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

(ii) Taj jedinstveni ρ je desno djelovanje.

Dokaz. Jedinstvenost proizlazi iz razmatranja sljedećeg dijagrama.

$$\begin{tikzcd}
L\otimes(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, shift right, "\tilde{\alpha}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\beta}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] & L\otimes(H\otimes H) \arrow[d, shift right, "\tilde{\alpha}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "\tilde{\beta}\otimes\mathrm{id}"] \\
(H\otimes H)\otimes(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\mu_{H\otimes H}\otimes\mathrm{id}"] & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[d, "\mu_{H\otimes H}"] \\
(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H\otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, dashed, "\rho"] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Vertikalna preslikavanja desno na dijagramu čine dijagram za koujednačitelj π, a vertikalna preslikavanja lijevo na dijagramu čine dijagram za koujednačitelj $\pi\otimes\mathrm{id}$, jer u kategoriji $\mathcal{V}$ koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom. Gornji pravokutnik sekvencijalno komutira zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta i srednji jer je $\mu_{H\otimes H}$ asocijativan, pa slijedi da $\pi\circ\mu_{H\otimes H}$ koujednačuje paralelni par vertikalnih preslikavanja lijevo na dijagramu. Zbog toga postoji jedinstveni ρ, iz univerzalnog svojstva koujednačitelja $\pi\otimes\mathrm{id}$.

Dokažimo sada da je ρ desno djelovanje.

$$\begin{tikzcd}
(H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"'] & (H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[ddd, bend left=60, "\rho"] \\
(H\otimes H)\otimes(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[u, "\pi\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"] & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[u, "\pi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu_{H\otimes H}"] \\
(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H\otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\rho"'] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Komutativnost unutrašnjih pet četverokuta proizlazi iz asocijativnosti od $\mu_{H\otimes H}$, definicije od ρ i funktorijalnosti tenzorskog produkta, a $\pi\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$ je epimorfizam, pa je komutativan i vanjski četverokut.

$$\begin{tikzcd}
(H\otimes H)\otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend left] & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H\otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H\otimes_L H)\otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta_{H\otimes H}"] \arrow[rr, bend right] & (H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\rho"] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Komutativnost gornjeg trokuta, unutrašnjih četverokuta i vanjskog četverokuta prozlazi iz kompatibilnosti množenja i jedinice u monoidu $H\otimes H$, funktorijalnosti tenzorskog produkta, definicije ρ i toga da je desni unitor u kategoriji prirodna transformacija. Uz to $\pi\otimes\mathrm{id}$ je epimorfizam, pa komutira i donji trokut. □

7.2.7. Neka je dalje ${}_LH_L$ opremljen strukturom komonoida (H,Δ,ϵ) u monoidalnoj kategoriji L-bimodula. Dakle, $\Delta\colon H\to H\otimes_L H$ je koasocijativan morfizam L-bimodula i $\epsilon\colon H\to L$ je kojedinica za Δ, također morfizam L-bimodula.

Lema 7.2.8. *Neka ρ koujednačuje par $\Delta\otimes\tilde{\alpha}$ i $\Delta\otimes\tilde{\beta}$:*

$$\begin{tikzcd}
H\otimes L \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & \\
(H\otimes_L H)\otimes L \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\alpha}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\beta}"'] & (H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[d, "\rho"] \\
 & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Tada postoji jedinstveni λ takav da je sljedeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd}
H\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & H\otimes(H\otimes_L H) \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\
(H\otimes_L H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\rho"'] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

Dokaz.

$$
\begin{tikzcd}
 & & H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[ddd, dashed, bend left=60, "\lambda"] \\
H \otimes L \otimes (H \otimes H) \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\alpha}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\beta}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] & H \otimes (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] & H \otimes (H \otimes H) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\pi"'] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\
(H \otimes_L H) \otimes L \otimes (H \otimes H) \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\alpha}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\tilde{\beta}\otimes\mathrm{id}"'] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "\rho"] \\
 & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\rho"] & (H \otimes_L H)
\end{tikzcd}
$$

Budući da u $\mathcal{V}$ koujednačitelji komutiraju s tenzorskim produktom, $\mathrm{id} \otimes \pi$ je koujednačitelj preslikavanja na gornjem rubu dijagrama. Iz pretpostavke leme slijedi da $\rho \otimes \mathrm{id}$ koujednačuje par $\Delta \otimes \tilde{\alpha} \otimes \mathrm{id}$ i $\Delta \otimes \tilde{\beta} \otimes \mathrm{id}$. Dijagram za to je stepeničasti lijevi rub dijagrama. Tri pravokutnika komutiraju zbog funktorijalnosti $\otimes$ i toga da je ρ djelovanje (gornji lijevi sekvencijalno). Slijedi da $\rho \circ (\Delta \otimes \mathrm{id})$ koujednačuje horizontalna preslikavanja na gornjem rubu dijagrama. Po univerzalnom svojstvu koujednačitelja $\pi \otimes \mathrm{id}$ zbog toga postoji jedinstveno preslikavanje λ. $\square$

Lema 7.2.9. *Preslikavanja $\lambda \otimes \mathrm{id}$ i $\mathrm{id} \otimes \rho$ komutiraju.*

Dokaz.

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes\mu_{H\otimes H}"'] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, bend left=60, "\rho\otimes\mu_{H\otimes H}"] \\
H \otimes (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\rho"'] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "\rho"] \\
H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[r, "\lambda"] & (H \otimes_L H) \\
H \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\pi"] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}
$$

Komutiraju gornji četverokut (definicija za λ, tenzoriranje zdesna s id), desni četverokut (ρ je djelovanje), vanjski četverokut (funktorijalnost tenzorskog produkta), donji četverokut (definicija od λ) i lijevi četverokut (definicija od ρ, tenzoriranje slijeva s id) i $\mathrm{id}\otimes\pi\otimes\mathrm{id}$ je epimorfizam, pa komutira i centralni četverokut (komutativnost $\lambda\otimes\mathrm{id}$ sa $\mathrm{id}\otimes\rho$). $\square$

Lema 7.2.10. *Ako vrijedi*

$$\Delta\circ\eta_H = \pi\circ\eta_{H\otimes H} \tag{7.14}$$

to jest komutativan je dijagram

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta_H"] \arrow[d, "\eta_{H\otimes H}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
(H\otimes H) \arrow[r, "\pi"'] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

i za morfizam λ vrijedi

$$\Delta\circ\mu_H = \lambda\circ(\mathrm{id}_H\otimes\Delta) \tag{7.15}$$

to jest komutativan je dijagram

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\mu_H"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
H\otimes(H\otimes_L H) \arrow[r, "\lambda"'] & (H\otimes_L H),
\end{tikzcd}$$

onda je morfizam λ lijevo H-djelovanje na $H\otimes_L H$.

U apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji ta se dva uvjeta mogu zapisati: $\Delta(1_H) = 1_H\otimes_L 1_H$ i $\lambda(h\otimes h'_{(1)}\otimes h'_{(2)}) = \Delta(hh')$, za $h,h'\in H$. U kategoriji vektorskih prostora drugi uvjet je naprosto $\Delta(hh') = h_{(1)}h'_{(1)}\otimes_L h_{(2)}h'_{(2)}$ za sve $h,h'\in H$, ali dobra definiranost desne strane jednakosti zahtijeva dodatne gornje aksiome.

Dokaz.

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\pi"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mu_{H\otimes H}\otimes\mathrm{id}"'] & H \otimes (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\rho"] \arrow[ddd, bend left=60, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \\
H \otimes H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[d, "\mu_{H\otimes H}\otimes\mathrm{id}"'] & H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[d, "\lambda"] \\
H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[r, "\lambda"] & (H \otimes_L H) \\
H \otimes H \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\pi"] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}
\tag{7.16}
$$

Komutiraju gornji četverokut (definicija od λ, tenzoriranje slijeva s id), donji četverokut (definicija od λ), lijevi četverokut (funktorijalnost tenzorskog produkta), desni četverokut (komutativnost $\lambda \otimes \mathrm{id}$ sa $\mathrm{id} \otimes \rho$) i vanjski četverokut (uvjet na λ i Δ tenzoriran zdesna s id) i $\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \pi$ je epimorfizam, pa komutira i centralni četverokut (aksiom asocijativnosti za djelovanje za λ).

$$
\begin{tikzcd}
 & (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[dr, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H \otimes H) \arrow[dd, bend left=60, "\pi"] \\
k \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\eta_H\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\eta_{H\otimes H}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend left] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi"'] & H \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi"'] & (H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[d, "\rho"'] \\
k \otimes (H \otimes_L H) \arrow[r, "\eta_H\otimes\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right] & H \otimes (H \otimes_L H) \arrow[r, "\lambda"] & (H \otimes_L H)
\end{tikzcd}
\tag{7.17}
$$

Komutiraju vanjski četverokut (prirodnost lijeve jedinice monoidalne kategorije), gornji trokut (aksiom jedinice za množenje $\mu_{H\otimes H}$), unutrašnji gornji četverokut (uvjet na Δ i η_H tenzoriran zdesna s id), unutrašnji donji lijevi četverokut (funktorijalnost tenzorskog produkta), unutrašnji donji desni četverokut (definicija od λ), unutrašnji desni četverokut (aksiom asocijativnosti za djelovanje ρ) i $\mathrm{id} \otimes \pi$ je epimorfizam, pa komutira i donji trokut (aksiom jedinice za djelovanje za λ). $\square$

Lema 7.2.11. *Obratno, ako je λ lijevo djelovanje, onda vrijede*

$$\Delta \circ \eta_H = \pi \circ \eta_{H \otimes H}$$

$$\Delta \circ \mu_H = \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta).$$

Dokaz. Promatrajmo ponovno dijagram (7.16). Ako je komutativan centralni četverokut, iz komutativnosti ostala četiri unutarnja četverokuta slijedi komutativnost vanjskog četverokuta, a to je traženo svojstvo za Δ i λ tenzorirano s id. Koristeći jedinicu $\eta_{H\otimes H}$ i činjenicu da je ona monomorfizam, možemo iz toga dobiti komutativnost četverokuta za to traženo svojstvo $\Delta \circ \mu_H = \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)$.

Promatrajmo sada ponovno dijagram (7.17). Ako je komutativan donji trokut, komutativan je i unutrašnji gornji četverokut, a to je traženo svojstvo $\Delta \circ \eta_H = \pi \circ \eta_{H\otimes H}$ tenzorirano s id. Koristeći jedinicu $\eta_{H\otimes H}$ i činjenicu da je ona monomorfizam, možemo iz toga dobiti komutativnost četverokuta za to traženo svojstvo. $\square$

Dakle, pokazalo se da je svojstvo $\Delta \circ \eta_H = \pi \circ \eta_{H\otimes H}$ ekvivalentno aksiomu jedinice za djelovanje za λ, a svojstvo $\Delta \circ \mu_H = \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)$ ekvivalentno aksiomu asocijativnosti za djelovanje za λ.

Korolar 7.2.12. *$H \otimes_L H$ je unutarnji H-$(H \otimes H)$-bimodul s obzirom na djelovanja λ i ρ.*

7.2.2 Definicija unutrašnjeg bialgebroida

U sljedeće dvije definicije kategorija $\mathcal{V}$ je simetrična monoidalna kategorija $(\mathcal{V}, \otimes, k, a, l, r, \tau)$ koja dopušta koujednačitelje i takva da oni komutiraju s tenzorskim produktom.

Definicija 7.2.13. Neka je $L = (L, \mu_L, \eta_L)$ monoid u $\mathcal{V}$. *Unutrašnji lijevi L-bialgebroid u kategoriji $\mathcal{V}$* dan je sa sljedećim podacima:

(i) monoid (H, μ_H, η_H) u $\mathcal{V}$

(ii) morfizmi monoida $\alpha\colon L \to H$, $\beta\colon L^{\mathrm{op}} \to H$ za koje vrijedi $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\alpha \otimes \beta) = \mu_H \circ (\alpha \otimes \beta)$

(iii) komonoid (H, Δ, ϵ) u monoidalnoj kategoriji L-bimodula $({}_L\mathcal{V}_L, \otimes_L, L)$, gdje je H unutarnji L-bimodul preko lijevog djelovanja $\mu_H \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_H)$ i desnog djelovanja $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \beta)$.

koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i) Jedinstveno desno djelovanje ρ za koje je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
(H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] & (H \otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H \otimes_L H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, dashed, "\rho"] & (H \otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

zadovoljava uvjet

$$\rho \circ (\Delta \otimes \beta \otimes \eta_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes r_L^{-1}) = \rho \circ (\Delta \otimes \eta_H \otimes \alpha) \circ (\mathrm{id}_H \otimes l_L^{-1}),$$

pri čemu su r_L i l_L komponente desne i lijeve jedinice monoidalne kategorije $\mathcal{V}$, $\mu_{H\otimes H}$ množenje u monoidu $(H\otimes H, \mu_{H\otimes H}, \eta_{H\otimes H})$ inducirano s μ_H po komponentama i π preslikavanje u koujednačitelju $H \otimes H \to H\otimes_L H$.

(ii) Jedinstveno preslikavanje λ (usporedi lemu 7.2.8) za koje je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{tikzcd}
H \otimes (H\otimes H) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] & H \otimes (H\otimes_L H) \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\
(H\otimes_L H) \otimes (H\otimes H) \arrow[r, "\rho"'] & (H\otimes_L H)
\end{tikzcd}$$

je lijevo djelovanje. Ekvivalentno, vrijedi:

$$\Delta \circ \eta_H = \pi \circ \eta_{H\otimes H}$$

$$\Delta \circ \mu_H = \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)$$

gdje je $\eta_{H\otimes H} \colon k \to H \otimes H$ jedinica u monoidu $(H \otimes H, \mu_{H\otimes H}, \eta_{H\otimes H})$ inducirana s η_H.

(iii) Vrijedi

$$\epsilon \circ \eta_H = \eta_L$$

$$\epsilon \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\alpha \circ \epsilon)) = \epsilon \circ \mu_H = \epsilon \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\beta \circ \epsilon))$$

α zovemo *morfizam izvora* i β *morfizam ponora*indexmorfizam ponora. Time je definicija dovršena.

Definicija je dobra zbog prethodno dokazanih pripremnih lema.

U kategoriji vektorskih prostora, uvjet (i) je uvjet da je slika koprodukta unutar Takeuchijevog produkta, a uvjet (ii) da vrijedi $\Delta(1_H) = 1_H \otimes_L 1_H$ i $\Delta(hh') = h_{(1)}h'_{(1)} \otimes_L h_{(2)}h'_{(2)}$, što je dobro definirano zbog (i). Uvjet (iii) u toj kategoriji je $\epsilon(1_H) = 1_L$ i $\epsilon(h\alpha(\epsilon(h'))) = \epsilon(hh') = \epsilon(h\beta(\epsilon(h')))$, ili ekvivalentno, preslikavanje dano s $h \blacktriangleright l = \epsilon(h\alpha(l))$ i preslikavanje dano s $h \blacktriangleright' l = \epsilon(h\beta(l))$ su lijeva djelovanja.

Definicija 7.2.14. Neka je (R, μ_R, η_R) monoid u $\mathcal{V}$. *Unutrašnji desni R-bialgebroid u kategoriji $\mathcal{V}$* dan je sa sljedećim podacima:

(i) monoid (H, μ_H, η_H) u $\mathcal{V}$

(ii) morfizmi monoida $\alpha\colon R \to H$, $\beta\colon R^{\mathrm{op}} \to H$ za koje vrijedi $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\alpha \otimes \beta) = \mu_H \circ (\alpha \otimes \beta)$

(iii) komonoid (H, Δ, ϵ) u monoidalnoj kategoriji R-bimodula $({}_R\mathcal{V}_R, \otimes_R, R)$, gdje je H unutarnji R-bimodul preko desnog djelovanja $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha)$ i lijevog djelovanja $\mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (\beta \otimes \mathrm{id}_H)$.

koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i) Jedinstveno lijevo djelovanje ρ za koje je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
(H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu_{H\otimes H}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi"] & (H \otimes H) \arrow[d, "\pi"] \\
(H \otimes H) \otimes (H \otimes_R H) \arrow[r, dashed, "\rho"] & (H \otimes_R H)
\end{tikzcd}$$

zadovoljava uvjet

$$\rho \circ (\eta_H \otimes \beta \otimes \Delta) \circ (l_R^{-1} \otimes \mathrm{id}_H) = \rho \circ (\alpha \otimes \eta_H \otimes \Delta) \circ (r_R^{-1} \otimes \mathrm{id}_H),$$

pri čemu su r_R i l_R komponente desne i lijeve jedinice monoidalne kategorije $\mathcal{V}$, $\mu_{H\otimes H}$ množenje u monoidu $(H \otimes H, \mu_{H\otimes H}, \eta_{H\otimes H})$ inducirano s μ_H po komponentama i π preslikavanje u koujednačitelju $H \otimes H \to H \otimes_R H$.

(ii) Jedinstveno preslikavanje λ za koje je sljedeći dijagram komutativan

$$\begin{tikzcd}
(H\otimes H) \otimes H \arrow[r, "\pi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & (H\otimes_R H) \otimes H \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\
(H\otimes H) \otimes (H\otimes_R H) \arrow[r, "\rho"'] & (H\otimes_R H)
\end{tikzcd}$$

je desno djelovanje. Ekvivalentno, vrijedi:

$$\Delta \circ \eta_H = \pi \circ \eta_{H\otimes H}$$

$$\Delta \circ \mu_H = \lambda \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_H)$$

gdje je $\eta_{H\otimes H}\colon k \to H \otimes H$ jedinica u monoidu $(H \otimes H, \mu_{H\otimes H}, \eta_{H\otimes H})$ inducirana s η_H.

(iii) Vrijedi

$$\epsilon \circ \eta_H = \eta_R$$

$$\epsilon \circ \mu_H \circ ((\alpha \circ \epsilon) \otimes \mathrm{id}_H) = \epsilon \circ \mu_H = \epsilon \circ \mu_H \circ ((\beta \circ \epsilon) \otimes \mathrm{id}_H)$$

Time je definicija dovršena.

Da je definicija dobra može se dokazati nizom lema analogno dokazanim pripremnim lemama. U kategoriji vektorskih prostora, uvjet (i) je uvjet da je slika koprodukta unutar Takeuchijevog produkta, a uvjet (ii) da vrijedi $\Delta(1_H) = 1_H \otimes_R 1_H$ i $\Delta(hh') = h_{(1)}h'_{(1)} \otimes_R h_{(2)}h'_{(2)}$, što je dobro definirano zbog (i). Uvjet (iii) u toj kategoriji je $\epsilon(1_H) = 1_R$ i $\epsilon(\alpha(\epsilon(h))h') = \epsilon(hh') = \epsilon(\beta(\epsilon(h))h')$, ili ekvivalentno, preslikavanje dano s $r \blacktriangleleft h = \epsilon(\alpha(r)h)$ i preslikavanje dano s $r \blacktriangleleft' h = \epsilon(\beta(r)h)$ su desna djelovanja.

7.3 Unutarnji Hopfov algebroid

7.3.1 Pripremne leme

Neka su dani monoidi R i L u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\mathcal{V}$ s koujednačiteljima koji komutiraju s tenzorskim produktom.

Lema 7.3.1. *Neka je $\mathcal{H}_L = (H, \mu_H, \eta_H, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ lijevi unutrašnji L-bialgebroid i neka je struktura R-bimodula na H dana množenjem zdesna komutirajućim morfizmima monoida $\beta_R \colon R^{\mathrm{op}} \to H$, $\alpha_R \colon R \to H$. Ako vrijedi*

$$\alpha_L \circ \epsilon_L \circ \beta_R = \beta_R, \qquad \beta_L \circ \epsilon_L \circ \alpha_R = \alpha_R,$$

onda je Δ_L morfizam R-bimodula.

Analogno, za desni unutrašnji R-bialgebroid $\mathcal{H}_R = (H, \mu_H, \eta_H, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ sa strukturom L-bimodula na H danom množenjem slijeva komutirajućim morfizmima monoida $\beta_L \colon L^{\mathrm{op}} \to H$, $\alpha_L \colon L \to H$, ako vrijedi

$$\alpha_R \circ \epsilon_R \circ \beta_L = \beta_L, \qquad \beta_R \circ \epsilon_R \circ \alpha_L = \alpha_L,$$

onda je Δ_R morfizam L-bimodula.

Dokaz. Dokazat ćemo da je Δ_L morfizam desnog R-modula, dokaz da je on morfizam lijevog R-modula provede se analogno. Slično se obje tvrdnje dokažu za Δ_R. Dokazujemo

$$\Delta_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R) = \nu_R \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_R)$$

gdje je ν_R desno R-djelovanje na $H \otimes_L H$ koje je po definiciji tenzorskog produkta desnog L-modula i L-R-bimodula inducirano desnim R-djelovanjem $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R)$ na H, to jest jedinstveno preslikavanje ν_R takvo da je

$$\nu_R \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_R) = \pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R))).$$

U dokazu ćemo imitirati sljedeći račun s elementima. U početku imamo:

$$\Delta_L(h \cdot \alpha_R(r)) \overset{\text{(i)}}{=} \text{"}\Delta_L(h) \cdot \Delta_L(\alpha_R(r))\text{"}$$

i zatim računamo

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\alpha_R(r)) &\overset{\text{(ii)}}{=} \Delta_L(\beta_L(\epsilon_L(\alpha_R(r)))) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \Delta_L(\beta_L(\epsilon_L(\alpha_R(r))) \cdot 1_H) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \Delta_L(1_H) \cdot \epsilon_L(\alpha_R(r)) \\
&\overset{\text{(v)}}{=} (1_H \otimes_L 1_H) \cdot \epsilon_L(\alpha_R(r)) \\
&\overset{\text{(vi)}}{=} 1_H \otimes_L (\beta_L(\epsilon_L(\alpha_R(r))) \cdot 1_H) \\
&\overset{\text{(vii)}}{=} 1_H \otimes_L \alpha_R(r)
\end{aligned}$$

te uvrstimo u prvu jednakost:

$$\text{"}\Delta_L(h) \cdot \Delta_L(\alpha_R(r))\text{"} = \text{"}\Delta_L(h) \cdot (1_H \otimes_L \alpha_R(r))\text{"} \overset{\text{(ix)}}{=} \Delta_L(h) \cdot \alpha_R(r).$$

Pritom su izrazi pod navodnicima zapravo redom

$$\lambda(h \otimes \Delta_L(\alpha_R(r)))$$

$$\lambda(h \otimes 1_H \otimes_L \alpha_R(r)) \overset{\text{(viii)}}{=} \rho(\Delta_L(h) \otimes 1_H \otimes \alpha_R(r)).$$

Dakle, redom ćemo u sljedećem računu koristiti sljedeće.

(i) λ je lijevo djelovanje: $\Delta_L \circ \mu_H = \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \Delta_L)$,

(ii) jednakost iz iskaza leme $\alpha_R = \beta_L \epsilon_L \alpha_R$,

(iii) aksiom jedinice $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ r_H^{-1} = \mathrm{id}_H$,

(iv) Δ_L je morfizam desnih L-modula: $\Delta_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} = \nu_L \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_L)$, gdje je $\nu_L \colon H \otimes_L H \otimes L \to H \otimes_L H$ desno djelovanje inducirano desnim djelovanjem $\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} \colon H \otimes L \to H$,

(v) λ je lijevo djelovanje pa za jedinicu vrijedi $\Delta_L \circ \eta_H = \pi_L \circ \eta_{H \otimes H} = \pi_L \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \circ l_k^{-1}$,

(vi) po definiciji desnog djelovanja ν_L pomoću gore navedenog desnog djelovanja vrijedi: $\nu_L \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_L) = \pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L}))$,

(vii) jednostavan račun napravljen ispod glavnog računa koji koristi aksiom jedinice $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) = r_H$,

(viii) po definiciji od λ je: $\lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \pi_L) = \rho \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H)$,

(ix) dodatni račun napravljen ispod glavnog računa koji koristi da je ν_R jedinstveno preslikavanje za koje je $\nu_R \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_R) = \pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R)))$ i činjenicu da po definiciji od ρ vrijedi $\rho \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_{H\otimes H}) = \pi_L \circ \mu_{H\otimes H}$.

Računamo dakle:

$$
\begin{aligned}
& \Delta_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R) \\
\overset{\text{(i)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \alpha_R)) \\
\overset{\text{(ii)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \beta_L \epsilon_L \alpha_R)) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mathrm{id}_H \circ \beta_L \epsilon_L \alpha_R)) \\
\overset{\text{(iii)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ r_H^{-1} \circ \beta_L \epsilon_L \alpha_R)) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ (\beta_L \epsilon_L \alpha_R \otimes \mathrm{id}_k) \circ r_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \epsilon_L \alpha_R \otimes \eta_H) \circ r_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\epsilon_L \alpha_R \otimes \eta_H) \circ r_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\Delta_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} \circ (\eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ \tau_{R,k} \circ r_R^{-1})) \\
\overset{\text{(iv)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\nu_L \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ (\eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\nu_L \circ ((\Delta_L \circ \eta_H) \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
\overset{\text{(v)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\nu_L \circ ((\pi_L \circ \eta_{H\otimes H}) \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\nu_L \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ (\eta_{H\otimes H} \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\nu_L \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ (\eta_H \otimes \eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ (l_k^{-1} \otimes \mathrm{id}_R) \circ l_R^{-1})) \\
\overset{\text{(vi)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L})) \circ (\eta_H \otimes \eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R) \circ (l_k^{-1} \otimes \mathrm{id}_R) \circ l_R^{-1})) \\
\overset{\text{(vii)}}{=}\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\pi_L \circ (\eta_H \otimes (\alpha_R \circ l_R)) \circ (l_k^{-1} \otimes \mathrm{id}_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\pi_L \circ (\eta_H \otimes (\alpha_R \circ l_R)) \circ (\mathrm{id}_k \otimes l_R^{-1}) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\pi_L \circ (\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \lambda \circ (\mathrm{id}_H \otimes \pi_L) \circ (\mathrm{id}_H \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
\overset{\text{(viii)}}{=}\ & \rho \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \\
=\ & \rho \circ (\mathrm{id}_{H\otimes_L H} \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \circ (\Delta_H \otimes \mathrm{id}_R) \\
\overset{\text{(ix)}}{=}\ & \nu_R \circ (\Delta_L \otimes \mathrm{id}_R)
\end{aligned}
$$

Pritom je jednostavan račun za korak (vii) napravljen ovdje:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L})) \circ (\eta_H \otimes \eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R) \\
&= \eta_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} \circ (\eta_H \otimes \epsilon_L \alpha_R)) \\
&= \eta_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\epsilon_L \alpha_R \otimes \eta_H) \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (\mu_H \circ (\beta_L \epsilon_L \alpha_R \otimes \eta_H) \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (\mu_H \circ (\alpha_R \otimes \eta_H) \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ (\alpha_R \otimes \mathrm{id}_k) \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (r_H \circ (\alpha_R \otimes \mathrm{id}_k) \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (\alpha_R \circ r_R \circ \tau_{k,R}) \\
&= \eta_H \otimes (\alpha_R \circ l_R)
\end{aligned}$$

Na kraju opravdanje za korak (ix) slijedi ovdje. Dokazujemo da je

$$\rho \circ (\mathrm{id}_{H \otimes_L H} \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) = \nu_R.$$

Preslikavanje ν_R je jedinstveno preslikavanje za koje vrijedi

$$\nu_R \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_R) = \pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R))),$$

pa dokažimo da za $\rho \circ (\mathrm{id}_{H \otimes_L H} \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1}))$ vrijedi isto. Računamo

$$\begin{aligned}
&\rho \circ (\mathrm{id}_{H \otimes_L H} \otimes ((\eta_H \otimes \alpha_R) \circ l_R^{-1})) \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_R) \\
&= \rho \circ (\pi_L \otimes \mathrm{id}_{H \otimes H}) \circ (\mathrm{id}_{H \otimes H} \otimes \eta_H \otimes \alpha_R) \circ (\mathrm{id}_{H \otimes H} \otimes l_R^{-1}) \\
&= \pi_L \circ \mu_{H \otimes H} \circ (\mathrm{id}_{H \otimes H} \otimes \eta_H \otimes \alpha_R) \circ (\mathrm{id}_{H \otimes H} \otimes l_R^{-1}) \\
&= \pi_L \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \alpha_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,k} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes l_R^{-1}) \\
&= \pi_L \circ (r_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R)) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,k} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes l_R^{-1}) \\
&= \pi_L \circ (\mathrm{id}_H \otimes (\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \alpha_R))) \circ (r_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,k} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes l_R^{-1})
\end{aligned}$$

Preostaje dokazati ovu tvrdnju s unitorima:

$$(r_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau_{H,k} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes l_R^{-1}) = \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_R$$

a ona lako slijedi iz aksioma simetrične monoidalne kategorije. □

7.3.2 Definicija unutrašnjeg Hopfovog algebroida

Definicija 7.3.2. Unutrašnji Hopfov algebroid nad L i R u kategoriji $\mathcal{V}$ dan je sljedećim podacima: lijevi unutrašnji L-bialgebroid $\mathcal{H}_L = (H, \mu_H, \eta_H, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$, desni unutrašnji R-bialgebroid $\mathcal{H}_R = (H, \mu_H, \eta_H, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ i antihomomorfizam algebri $\tau\colon H \to H$ (antipod) koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(i)

$$\begin{aligned} \alpha_L \circ \epsilon_L \circ \beta_R = \beta_R,\ \ \beta_L \circ \epsilon_L \circ \alpha_R = \alpha_R, \\ \alpha_R \circ \epsilon_R \circ \beta_L = \beta_L,\ \ \beta_R \circ \epsilon_R \circ \alpha_L = \alpha_L, \end{aligned} \tag{7.18}$$

(ii)

$$(\Delta_R \otimes_L \mathrm{id}_H) \circ \Delta_L = (\mathrm{id}_H \otimes_R \Delta_L) \circ \Delta_R \tag{7.19}$$

$$(\Delta_L \otimes_R \mathrm{id}_H) \circ \Delta_R = (\mathrm{id}_H \otimes_R \Delta_R) \circ \Delta_L \tag{7.20}$$

Tenzorski produkt $\Delta_L \otimes_R \mathrm{id}_H$ je dobro definiran jer je Δ_L prema lemi 7.3.1 morfizam R-bimodula.

(iii)

$$\begin{aligned} \tau \circ \beta_L = \alpha_L, \qquad \tau \circ \beta_R = \alpha_R \\ \mu_{\otimes'_L} \circ (\tau \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta_L = \alpha_R \circ \epsilon_R \\ \mu_{\otimes'_R} \circ (\mathrm{id}_H \otimes \tau) \circ \Delta_R = \alpha_L \circ \epsilon_L \end{aligned} \tag{7.21}$$

gdje je $\mu_{\otimes'_R} \colon H \otimes'_R H \to H$ množenje u R-prstenu $(H, \mu_{\otimes'_R}, \alpha_R)$ inducirano s μ_H i $\mu_{\otimes'_L} \colon H \otimes'_L H \to H$ množenje u L-prstenu $(H, \mu_{\otimes'_L}, \alpha_L)$ inducirano s μ_H, a kompozicije preslikavanja su dobro definirane jer su dobro definirana sljedeća preslikavanja $\tau \otimes \mathrm{id}_H \colon H \otimes_L H \to H \otimes'_L H$ i $\mathrm{id}_H \otimes \tau \colon H \otimes_R H \to H \otimes'_R H$.

Lema 7.3.3. *U svakom L-bialgebroidu je $\epsilon_L \circ \alpha_L = \mathrm{id}_L = \epsilon_L \circ \beta_L$. Slijedi i da su $\alpha_L \circ \epsilon_L$ i $\beta_L \circ \epsilon_L$ idempotentni.*

Dokaz. Jednakost $\mathrm{id}_L = \epsilon_L \circ \alpha_L$ dokazat ćemo imitirajući ovaj račun s elementima

$$\epsilon_L(\alpha_L(l)) = \epsilon_L(\alpha_L(l) \cdot 1_H) = l \cdot \epsilon_L(1_H) = l \cdot 1_L = l,$$

dakle, koristit ćemo (zdesna nalijevo) (i) aksiom jedinice $\mu_L \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_L) \circ r_L^{-1} = \mathrm{id}_L$, (ii) kompatibilnost kojedinice s jedinicom $\epsilon_L \circ \eta_H = \eta_L$, (iii) zahtjev da je ϵ_L morfizam lijevih L-modula, $\epsilon_L \circ \mu_H \circ (\alpha_L \otimes \mathrm{id}_H) = \mu_L \circ (\mathrm{id}_L \otimes \epsilon_L) \colon L \otimes H \to L$ te (iv) aksiom jedinice $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ r_H^{-1} = \mathrm{id}_H$. Računamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_L &\overset{\text{(i)}}{=} \mu_L \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_L) \circ r_L^{-1} \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \mu_L \circ (\mathrm{id}_L \otimes (\epsilon_L \circ \eta_H)) \circ r_L^{-1} \\ &= \mu_L \circ (\mathrm{id}_L \otimes \epsilon_L) \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_H) \circ r_L^{-1} \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\alpha_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_H) \circ r_L^{-1} \\ &= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\alpha_L \otimes \eta_H) \circ r_L^{-1} \\ &= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ (\alpha_L \otimes \mathrm{id}_k) \circ r_L^{-1} \\ &\overset{\text{(iv)}}{=} \epsilon_L \circ r_H \circ (\alpha_L \otimes \mathrm{id}_k) \circ r_L^{-1} \\ &= \epsilon_L \circ \alpha_L. \end{aligned}$$

U zadnjem koraku koristimo prirodnost desnog unitora r.

Za dokaz jednakosti $\mathrm{id}_L = \epsilon_L \circ \beta_L$ imitirat ćemo ovaj račun s elementima

$$\epsilon_L(\beta_L(l)) = \epsilon_L(\beta_L(l) \cdot 1_H) = \epsilon_L(1_H) \cdot l = 1_L \cdot l = l$$

dakle, koristit ćemo (zdesna nalijevo) (i) aksiom jedinice $\mu_L \circ (\eta_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ l_L^{-1} = \mathrm{id}_L$, (ii) kompatibilnost kojedinice s jedinicom $\epsilon_L \circ \eta_H = \eta_L$, (iii) zahtjev da je ϵ_L morfizam desnih L-modula, $\epsilon_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} = \mu_L \circ (\epsilon_L \otimes \mathrm{id}_L) \colon H \otimes L \to L$ te (iv) aksiom jedinice $\mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ r_H^{-1} = \mathrm{id}_H$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_L &\overset{\text{(i)}}{=} \mu_L \circ (\eta_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ l_L^{-1} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \mu_L \circ ((\epsilon_L \circ \eta_H) \otimes \mathrm{id}_L) \circ l_L^{-1} \\
&= \mu_L \circ (\epsilon_L \otimes \mathrm{id}_L) \circ (\eta_H \otimes \mathrm{id}_L) \circ l_L^{-1} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ \tau_{H,L} \circ (\eta_H \otimes \mathrm{id}_L) \circ l_L^{-1} \\
&= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_H) \circ \tau_{k,L} \circ l_L^{-1} \\
&= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_H) \circ (\mathrm{id}_L \otimes \eta_H) \circ r_L^{-1} \\
&= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\beta_L \otimes \eta_H) \circ r_L^{-1} \\
&= \epsilon_L \circ \mu_H \circ (\mathrm{id}_H \otimes \eta_H) \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_k) \circ r_L^{-1} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \epsilon_L \circ r_H \circ (\beta_L \otimes \mathrm{id}_k) \circ r_L^{-1} \\
&= \epsilon_L \circ \beta_L.
\end{aligned}$$

$\square$

Korolar 7.3.4. $\epsilon_R \circ \beta_L \colon L^{\mathrm{op}} \cong R$ *je izomorfizam s inverzom* $\epsilon_L \circ \alpha_R$.

Dokaz. $\epsilon_L\alpha_R\epsilon_R\beta_L = \epsilon_L\beta_L = \mathrm{id}_L$ i $\epsilon_R\beta_L\epsilon_L\alpha_R = \epsilon_R\alpha_R = \mathrm{id}_R$. $\square$

Korolar 7.3.5. $\epsilon_L \circ \beta_R \colon R^{\mathrm{op}} \cong L$ *je izomorfizam s inverzom* $\epsilon_R \circ \alpha_L$.

Dokaz. $\epsilon_R\alpha_L\epsilon_L\beta_R = \epsilon_R\beta_R = \mathrm{id}_R$ i $\epsilon_L\beta_R\epsilon_R\alpha_L = \epsilon_L\alpha_L = \mathrm{id}_L$. $\square$

Poglavlje 8

Konstrukcija unutrašnjeg skalarnog proširenja

8.1 Teorem o skalarnom proširenju

Cilj ovog poglavlja je dokazati sljedeći teorem i opisati strukturu tog Hopfovog algebroida.

Teorem. *Neka je H unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$ *s bijektivnim antipodom. Neka je R unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u toj kategoriji. Tada je poludirektni produkt $H\sharp R$ unutarnji Hopfov algebroid nad R^{op} i R u toj kategoriji (uz odgovarajuće formule koje slijede).*

Takve Hopfove algebroide zovemo skalarnim proširenjima. Sada slijedi pojednostavljeni pregled cijelog dokaza, a nakon toga će biti proveden dokaz kroz nekoliko propozicija. Pritom neće biti potpuno praćen ovaj pojednostavljeni minimalni plan.

(i) Neka je R pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H uz desno djelovanje $\blacktriangleleft\colon R\,\tilde{\otimes}\,H \to R$ i lijevo kodjelovanje $\rho\colon R \to H\,\hat{\otimes}\,R$. Definiramo preslikavanja:

$$
\begin{aligned}
\alpha_R :\ & R \to H\sharp R \\
& y \mapsto 1_H\sharp y \\
\beta_R :\ & R^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\
& y \mapsto \rho(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \\
\Delta_R :\ & H\sharp R \to H\sharp R\,\tilde{\otimes}_R\,H\sharp R \\
& f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes f_{(2)}\sharp y \\
\epsilon_R :\ & H\sharp R \to R \\
& f\sharp y \mapsto \epsilon(f)y
\end{aligned}
$$

Tada je $\mathcal{H}_R = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ desni bialgebroid nad R u $\mathrm{indproVect}$.

(ii) Označimo s L algebru R^{op} i neka je $\phi\colon L \to R$ odgovarajući antiizomorfizam algebri. Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned}
\alpha_L :\ & L \to H\sharp R \\
& x \mapsto \rho(\phi(x)) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \\
\beta_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\
& x \mapsto \phi(x)_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}\phi(x)_{[-1]} \\
\Delta_L :\ & H\sharp R \to H\sharp R \,\tilde{\otimes}_L\, H\sharp R \\
& f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes f_{(2)}\sharp y \\
\epsilon_L :\ & H\sharp R \to L \\
& f\sharp y \mapsto \phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2 y_{[1]} S f))
\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}_L = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ lijevi bialgebroid nad L i L^{op} u $\mathrm{indproVect}$, što ćemo dokazati koristeći izomorfizam iz dijela (v) s lijevim bialgebroidom $L\sharp H$ iz dijela (iv) za koji je priprema dio (iii).

(iii) Tada je L pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H uz lijevo djelovanje $\blacktriangleright\colon H \,\tilde{\otimes}\, L \to L$ definirano sa

$$f \blacktriangleright x := \phi^{-1}(\phi(x) \blacktriangleleft Sf)$$

i desno kodjelovanje definirano sa

$$x \mapsto x_{[0]} \otimes x_{[1]} := \phi^{-1}(\phi(x)_{[0]}) \otimes S^{-1}(\phi(x)_{[-1]}).$$

(iv) Definiramo preslikavanja analogno:

$$\begin{aligned}
\alpha_L :\ & L \to L\sharp H \\
& x \mapsto x\sharp 1_H \\
\beta_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to L\sharp H \\
& x \mapsto \rho(x) = x_{[0]}\sharp x_{[1]} \\
\Delta_L :\ & L\sharp H \to L\sharp H \,\tilde{\otimes}_L\, L\sharp H \\
& f\sharp x \mapsto x\sharp f_{(1)} \otimes 1_L\sharp f_{(2)} \\
\epsilon_L :\ & L\sharp H \to L \\
& f\sharp x \mapsto \epsilon(f)x
\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}'_L = (L\sharp H, \mu_{L\sharp H}, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ lijevi bialgebroid nad L u $\mathrm{indproVect}$.

(v) Definiramo $\Phi\colon L\sharp H \to H\sharp R$ sa

$$\Phi\colon x\sharp f \mapsto \rho(\phi(x)) \cdot f\sharp 1_R = Sx_{[1]}\sharp\phi(x_{[0]}) \cdot f\sharp 1_R.$$

To preslikavanje je izomorfizam algebri.

Po tom izomorfizmu, sve formule od $\mathcal{H}'_L$ odgovaraju svim formulama od $\mathcal{H}_L$ pa je i $\mathcal{H}_L$ lijevi bialgebroid, izomorfan $\mathcal{H}'_L$.

(vi) Definiramo antipod:

$$\begin{aligned} \tau\ :\ & (H\sharp R)^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\ & f\sharp y \mapsto y_{[0]} \cdot S^2 y_{[-1]} Sf \end{aligned}$$

Dokažemo da je τ antihomomorfizam koristeći izomorfizam Φ.

(vii) Tada je $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \tau)$ Hopfov algebroid u $\mathrm{indproVect}$.

U propozicijama će osim ovoga biti istodobno obrađena i analogna verzija s usporedbom desnog bialgebroida $\mathcal{H}_R \cong H\sharp R$ i $\mathcal{H}'_R \cong L\sharp H$ i dane formule za te bialgebroide.

Slijedi lijevo-desna verzija prethodnog teorema.

Teorem. *Neka je H unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ s bijektivnim antipodom. Neka je L unutrašnja pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u toj kategoriji. Tada je poludirektni produkt $L\sharp H$ unutarnji Hopfov algebroid nad L u toj kategoriji (uz odgovarajuće formule navedene iznad), koji zovemo skalarno proširenje.*

8.1.1 Lijepi lijevi i desni bialgebroidi

Lema 8.1.1. *Neka je $(R, \mu_R, \eta_R, \blacktriangleleft, \rho)$ unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad unutrašnjom Hopfovom algebrom H u kategoriji $\mathrm{indproVect}$. Tada je kodjelovanje*

$$\rho\colon R \to H\sharp R$$

antihomomorfizam algebri:

$$e_{[-1]}\sharp e_{[0]} \cdot y_{[-1]}\sharp y_{[0]} = (ye)_{[-1]}\sharp(ye)_{[0]}$$

Tvrdnja teorema vrijedi i za unutrašnju lijevo-desnu pleteničasto-komutativnu Yetter-Drinfeldovu modulnu algebru L nad H i pripadno kodjelovanje λ i poludirektni produkt $L\sharp H$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} e_{[-1]}\sharp e_{[0]} \cdot y_{[-1]}\sharp y_{[0]} &= e_{[-1]}y_{[-2]}\sharp(e_{[0]} \blacktriangleleft y_{[-1]})y_{[0]} \\ &= e_{[-1]}y_{[-1]}\sharp y_{[0]}e_{[0]} \\ &= (ye)_{[-1]}\sharp(ye)_{[0]} \end{aligned}$$

Druga i treća jednakost vrijede zbog svojstva pleteničaste-komutativnosti i toga što je R modulna algebra. Analogno se dokaže tvrdnja za L nad H. □

Najprije ćemo dokazati da lijevo-desne i desno-lijeve Yetter-Drinfeldove modulne algebre daju na jednostavan način lijeve i desne bialgebroide.

Propozicija 8.1.2. *Neka je* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ *unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$ *s bijektivnim antipodom. Neka je* $(R, \mu_R, \eta_R, \blacktriangleleft, \rho)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *u toj kategoriji.*

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned} \alpha_R : \ & R \to H\sharp R \\ & y \mapsto 1_H\sharp y \\ \beta_R : \ & R^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\ & y \mapsto \rho(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \\ \Delta_R : \ & H\sharp R \to H\sharp R \tilde{\otimes}_R H\sharp R \\ & f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_R f_{(2)}\sharp y \\ \epsilon_R : \ & H\sharp R \to R \\ & f\sharp y \mapsto \epsilon(f)y \end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}_R = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ *desni bialgebroid nad* R *u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$.

Dokaz. (i) Očito je sa $\alpha_R(y) = 1_H\sharp y$ definiran homomorfizam algebri. Dokazujemo da je sa

$$\beta_R(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]}$$

definiran antihomomorfizam algebri. Vrijedi

$$\begin{aligned} \beta_R(ye) &= (ye)_{[-1]}\sharp(ye)_{[0]} \\ &= e_{[-1]}y_{[-1]}\sharp y_{[0]}e_{[0]} \end{aligned}$$

jer je R pleteničasto-komutativna algebra nad H. Zatim imamo

$$\begin{aligned} \beta_R(e)\beta_R(y) &= e_{[-1]}\sharp e_{[0]} \cdot y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \\ &= e_{[-1]}y_{[-2]}\sharp(e_{[0]} \blacktriangleleft y_{[-1]})y_{[0]} \end{aligned}$$

a to je jednako gornjem jer R nad H ima svojstvo pleteničaste-komutativnosti:

$$(x \blacktriangleleft d_{[-1]})d_{[0]} = dx$$

Dokazujemo dalje da slike preslikavanja α_L i β_L komutiraju. To opet izlazi iz toga što je R pleteničasto-komutativna algebra nad H:

$$\begin{aligned} 1_H \sharp y \cdot e_{[-1]} \sharp e_{[0]} &= e_{[-2]} \sharp (y \blacktriangleleft e_{[-1]}) e_{[0]} \\ &= e_{[-1]} \sharp e_{[0]} y \\ &= e_{[-1]} \sharp e_{[0]} \cdot 1_H \sharp y \end{aligned}$$

$H \sharp R$ je dakle R-R bimodul uz ovako definirana djelovanja:

$$y \text{ djeluje zdesna na } f \sharp e = f \sharp e \cdot \alpha_R(y) = f \sharp ey$$

$$y \text{ djeluje slijeva na } f \sharp e = f \sharp e \cdot \beta_R(y) = f \sharp e \cdot y_{[-1]} \sharp y_{[0]} = f y_{[-1]} \sharp y_{[0]} e$$

(ii) Zatim dokazujemo da je $({}_R H \sharp R_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ komonoid u $({}_R \mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$. Za

$$\Delta_R(f \sharp y) = f_{(1)} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} \sharp y$$

$$\epsilon_R(f \sharp y) = \epsilon(f) y$$

koasocijativnost koprodukta jednostavno slijedi iz koasocijativnosti koprodukta u H. Aksiom kojedinice također vrijedi jer lako se vidi:

$$f_{(1)} \sharp 1_R \cdot \alpha_R(\epsilon_R(f_{(2)} \sharp y)) = f \sharp y$$

$$f_{(2)} \sharp y \cdot \beta_R(\epsilon_R(f_{(1)} \sharp 1_R)) = f \sharp y$$

Lako se provjeri da su oni morfizmi R-bimodula:

$$\begin{aligned} \Delta_R(f \sharp e \cdot \alpha_R(y)) &= f_{(1)} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} \sharp ey \\ &= f_{(1)} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} \sharp e \cdot \alpha_R(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_R(f \sharp e \cdot \beta_R(y)) &= f_{(1)} y_{[-2]} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} y_{[-1]} \sharp y_{[0]} e \\ &= f_{(1)} y_{[-1]} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} \sharp e \cdot \beta_R(y_{[0]}) \\ &= f_{(1)} y_{[-1]} \sharp 1_R \cdot \alpha_R(y_{[0]}) \otimes_R f_{(2)} \sharp e \\ &= f_{(1)} \sharp 1_R \cdot \beta_R(y) \otimes_R f_{(2)} \sharp e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_R(f \sharp e \cdot \alpha_R(y)) &= \epsilon(f) ey \\ &= \epsilon_R(f \sharp e) \cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_R(f\sharp e\cdot\beta_R(y)) &= \epsilon(fy_{[-1]})y_{[0]}e\\ &= \epsilon(f)ye\\ &= y\cdot\epsilon_R(f\sharp e)\end{aligned}$$

(iii) Dokazujemo sada da Δ_R ima svojstvo

$$\alpha_R(y)\cdot f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(2)}\sharp e = f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R \beta_R(y)\cdot f_{(2)}\sharp e$$

Desna strana jednaka je

$$f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R y_{[-1]}\sharp y_{[0]}\cdot f_{(2)}\sharp e = f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R y_{[-1]}f_{(2)}\sharp(y_{[0]}\blacktriangleleft f_{(3)})e$$

Lijeva strana jednaka je

$$\begin{aligned}1_H\sharp y\cdot f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(2)}\sharp e &= f_{(1)}\sharp(y\blacktriangleleft f_{(2)})\otimes_R f_{(3)}\sharp e\\ &= f_{(1)}\sharp 1_R\cdot\alpha_R(y\blacktriangleleft f_{(2)})\otimes_R f_{(3)}\sharp e\\ &= f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(3)}\sharp e\cdot\beta_R(y\blacktriangleleft f_{(2)})\\ &= f_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(3)}\sharp 1_R\cdot\beta_R(y\blacktriangleleft f_{(2)})\cdot 1_H\sharp e\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer slika od β_R komutira sa slikom od α_R. Jednakost te dvije strane izlazi iz desno-lijevog Yetter-Drinfeldovog uvjeta:

$$f_{(2)}(y\blacktriangleleft f_{(1)})_{[-1]}\otimes(y\blacktriangleleft f_{(1)})_{[0]} = y_{[-1]}f_{(1)}\otimes(y_{[0]}\blacktriangleleft f_{(2)})$$

$$f_{(2)}\sharp 1_R\cdot\beta_R(y\blacktriangleleft f_{(1)}) = y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]}\blacktriangleleft f_{(2)})$$

(iv) Lako se provjeri da Δ_R ima svojstvo

$$\Delta_R(f\sharp y\cdot g\sharp e) = f_{(1)}\sharp 1_R\cdot g_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(2)}\sharp y\cdot g_{(2)}\sharp e$$

$$\begin{aligned}\Delta_R(f\sharp y\cdot g\sharp e) &= \Delta_R(fg_{(1)}\sharp(y\blacktriangleleft g_{(2)})e)\\ &= f_{(1)}g_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(2)}g_{(2)}\sharp(y\blacktriangleleft g_{(3)})e\\ &= f_{(1)}\sharp 1_R\cdot g_{(1)}\sharp 1_R\otimes_R f_{(2)}\sharp y\cdot g_{(2)}\sharp e\end{aligned}$$

(v) Na kraju dokazujemo da je ϵ_R desni karakter.

$$\epsilon_R(1_H\sharp 1_R) = 1_R$$

$$\epsilon_R(f\sharp y\cdot g\sharp e) = \epsilon_R(\alpha_R(\epsilon_R(f\sharp y))\cdot g\sharp e)$$

$$\epsilon_R(f\sharp y\cdot g\sharp e) = \epsilon_R(\beta_R(\epsilon_R(f\sharp y))\cdot g\sharp e)$$

Te tvrdnje je lako provjeriti kako slijedi.

$$\begin{aligned}\epsilon_R(f\sharp y\cdot g\sharp e) &= \epsilon_R(fg_{(1)}\sharp(y\blacktriangleleft g_{(2)})e)\\ &= \epsilon(fg_{(1)})(y\blacktriangleleft g_{(2)})e\\ &= \epsilon(f)(y\blacktriangleleft g)e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(\alpha_R(\epsilon_R(f\sharp y))\cdot g\sharp e) &= \epsilon_L(\epsilon(f)1_H\sharp y\cdot g\sharp e)\\ &= \epsilon(f)\epsilon(1_H)(y\blacktriangleleft g)e\\ &= \epsilon(f)(y\blacktriangleleft g)e\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(\beta_R(\epsilon_R(f\sharp y))\cdot g\sharp e) &= \epsilon_L(\epsilon(f)y_{[-1]}\sharp y_{[0]}\cdot g\sharp e)\\ &= \epsilon(f)\epsilon(y_{[-1]})(y_{[0]}\blacktriangleleft g)e\\ &= \epsilon(f)(y\blacktriangleleft g)e\end{aligned}$$

Dakle, $H\sharp R$ je desni bialgebroid nad R.

□

Propozicija 8.1.3. *Neka je* $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S)$ *unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* indproVect *s bijektivnim antipodom.*

Neka je $(L,\mu_L,\eta_L,\blacktriangleright,\lambda)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *u toj kategoriji.*

Definiramo preslikavanja

$$\begin{aligned}\alpha_L:\ & L\to L\sharp H\\ & x\mapsto x\sharp 1_H\\ \beta_L:\ & L^{\mathrm{op}}\to L\sharp H\\ & x\mapsto \lambda(x)=x_{[0]}\sharp x_{[1]}\\ \Delta_L:\ & L\sharp H\to L\sharp H\,\tilde{\otimes}_L\,L\sharp H\\ & x\sharp f\mapsto x\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\\ \epsilon_L:\ & L\sharp H\to L\\ & x\sharp f\mapsto \epsilon(f)x\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}'_L=(L\sharp H,\mu_{L\sharp H},\alpha_L,\beta_L,\Delta_L,\epsilon_L)$ *lijevi bialgebroid nad* L *u kategoriji* indproVect.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu propozicije 8.1.2. (i) Očito je sa $\alpha_L(x)=x\sharp 1_H$ definiran homomorfizam algebri. Dokazujemo da je sa

$$\beta_L(x)=x_{[0]}\sharp x_{[1]}$$

definiran antihomomorfizam algebri. Vrijedi

$$\begin{aligned}\beta_L(xd) &= (xd)_{[0]}\sharp(xd)_{[1]}\\ &= x_{[0]}d_{[0]}\sharp d_{[1]}x_{[1]}\end{aligned}$$

jer je L pleteničasto-komutativna algebra nad H. Zatim imamo

$$\begin{aligned}\beta_L(d)\beta_L(x) &= d_{[0]}\sharp d_{[1]}\cdot x_{[0]}\sharp x_{[1]}\\ &= d_{[0]}(d_{[1]}\blacktriangleright x_{[0]})\sharp d_{[2]}x_{[1]}\end{aligned}$$

a to je jednako gornjem jer L nad H ima svojstvo pleteničaste-komutativnosti

$$e_{[0]}(e_{[1]}\blacktriangleright x) = xe$$

Dokazujemo dalje da slike preslikavanja α_L i β_L komutiraju. To opet izlazi iz toga što je L pleteničasto-komutativna algebra nad H:

$$\begin{aligned}d_{[0]}\sharp d_{[1]}\cdot x\sharp 1_H &= d_{[0]}(d_{[1]}\blacktriangleright x)\sharp d_{[2]}\\ &= xd_{[0]}\sharp d_{[1]}\\ &= x\sharp 1_H\cdot d_{[0]}\sharp d_{[1]}\end{aligned}$$

Dakle, $L\sharp H$ je L-L bimodul uz ovako definirana djelovanja:

$$x \text{ djeluje slijeva na } d\sharp f = \alpha_L(x)\cdot d\sharp f = xd\sharp f$$

$$x \text{ djeluje zdesna na } d\sharp f = \beta_L(x)\cdot d\sharp f = x_{[0]}\sharp x_{[1]}\cdot d\sharp f = dx_{[0]}\sharp x_{[1]}f$$

(ii) Zatim dokazujemo da je $({}_L L\sharp H_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ komonoid u ${}_L\mathcal{M}_L$. Za

$$\Delta_L(x\sharp f) = x\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}$$

$$\epsilon_L(x\sharp f) = \epsilon(f)x$$

koasocijativnost koprodukta jednostavno slijedi iz koasocijativnosti koprodukta u H. Aksiom kojedinice također vrijedi jer lako se vidi:

$$\alpha_L(\epsilon_L(x\sharp f_{(1)}))\cdot 1_L\sharp f_{(2)} = x\sharp f$$

$$\beta_L(\epsilon_L(1_L\sharp f_{(2)}))\cdot x\sharp f_{(1)} = x\sharp f$$

Lako se provjeri da su oni morfizmi L-bimodula.

$$\begin{aligned}\Delta_L(\alpha_L(x)\cdot d\sharp f) &= xd\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\\ &= \alpha_L(x)\cdot d\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L(\beta_L(x)\cdot d\sharp f) &= dx_{[0]}\sharp x_{[1]}f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp x_{[2]}f_{(2)}\\ &= \beta_L(x_{[0]})\cdot d\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp x_{[1]}f_{(2)}\\ &= d\sharp f_{(1)}\otimes_L \alpha_L(x_{[0]})\cdot 1_L\sharp x_{[1]}f_{(2)}\\ &= d\sharp f_{(1)}\otimes_L \beta_L(x)\cdot 1_L\sharp f_{(2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(\alpha_L(x)\cdot d\sharp f) &= \epsilon(f)xd\\ &= x\cdot\epsilon_L(d\sharp f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(\beta_L(x)\cdot d\sharp f) &= \epsilon(x_{[1]}f)dx_{[0]}\\ &= \epsilon(f)dx\\ &= \epsilon_L(d\sharp f)\cdot x\end{aligned}$$

(iii) Dokazujemo sada da Δ_L ima svojstvo

$$d\sharp f_{(1)}\cdot\beta_L(x)\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)} = d\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\cdot\alpha_L(x)$$

Lijeva strana jednaka je

$$d\sharp f_{(1)}\cdot x_{[0]}\sharp x_{[1]}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)} = d(f_{(1)}\blacktriangleright x_{[0]})\sharp f_{(2)}x_{[1]}\otimes_L 1_L\sharp f_{(3)}$$

Desna strana jednaka je

$$\begin{aligned}d\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\cdot x\sharp 1_H &= d\sharp f_{(1)}\otimes_L (f_{(2)}\blacktriangleright x)\sharp f_{(3)}\\ &= d\sharp f_{(1)}\otimes_L \alpha_L(f_{(2)}\blacktriangleright x)\cdot 1_L\sharp f_{(3)}\\ &= \beta_L(f_{(2)}\blacktriangleright x)\cdot d\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(3)}\\ &= d\sharp 1_H\cdot\beta_L(f_{(2)}\blacktriangleright x)\cdot 1_L\sharp f_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(3)}\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer slika od β_L komutira sa slikom od α_L. Jednakost te dvije strane izlazi iz lijevo-desnog Yetter-Drinfeldovog uvjeta:

$$\beta_L(f_{(2)}\blacktriangleright x)\cdot 1_L\sharp f_{(1)} = (f_{(1)}\blacktriangleright x_{[0]})\sharp f_{(2)}x_{[1]}$$

(iv) Lako se provjeri da Δ_L ima svojstvo

$$\Delta_L(x\sharp f\cdot d\sharp g) = x\sharp f_{(1)}\cdot d\sharp g_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\cdot 1_L\sharp g_{(2)}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L(x\sharp f\cdot d\sharp g) &= \Delta_L(x(f_{(1)}\blacktriangleright d)\sharp f_{(2)}g)\\ &= x(f_{(1)}\blacktriangleright d)\sharp f_{(2)}g_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(3)}g_{(2)}\\ &= x\sharp f_{(1)}\cdot d\sharp g_{(1)}\otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}\cdot 1_L\sharp g_{(2)}\end{aligned}$$

(v) Na kraju dokazujemo da je ϵ_L lijevi karakter.

$$\epsilon_L(1_L\sharp 1_H) = 1_L$$

$$\epsilon_L(d\sharp f\cdot e\sharp g)=\epsilon_L(d\sharp f\cdot\alpha_L(\epsilon_L(e\sharp g)))$$

$$\epsilon_L(d\sharp f\cdot e\sharp g)=\epsilon_L(d\sharp f\cdot\beta_L(\epsilon_L(e\sharp g)))$$

Te tvrdnje je lako provjeriti kako slijedi.

$$\begin{aligned}\epsilon_L(d\sharp f\cdot e\sharp g)&=\epsilon_L(d(f_{(1)}\blacktriangleright e)\sharp f_{(2)}g)\\&=\epsilon(f_{(2)}g)d(f_{(1)}\blacktriangleright e)\\&=\epsilon(g)d(f\blacktriangleright e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(d\sharp f\cdot\alpha_L(\epsilon_L(e\sharp g)))&=\epsilon_L(d\sharp f\cdot\epsilon(g)e\sharp 1_H)\\&=\epsilon(g)\epsilon(1_H)d(f\blacktriangleright e)\\&=\epsilon(g)d(f\blacktriangleright e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_L(d\sharp f\cdot\beta_L(\epsilon_L(e\sharp g)))&=\epsilon_L(d\sharp f\cdot\epsilon(g)e_{[0]}\sharp e_{[1]})\\&=\epsilon(g)\epsilon(e_{[1]})d(f\blacktriangleright e_{[0]})\\&=\epsilon(g)d(f\blacktriangleright e)\end{aligned}$$

Dakle, $L\sharp H$ je lijevi bialgebroid nad L.

$\square$

8.1.2 Izomorfizam lijevog i desnog poludirektnog produkta

Zatim želimo povezati desni bialgebroid $H\sharp R$ i lijevi bialgebroid $L\sharp H$ za $L=R^{\mathrm{op}}$ tako da na kraju oni zajedno čine Hopfov algebroid.

Propozicija 8.1.4. *Neka je* $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S)$ *unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* indproVect *s bijektivnim antipodom.*

Neka su R, $L=R^{\mathrm{op}}$ *dvije unutrašnje algebre u kategoriji* indproVect *i označimo s* $\phi\colon L\to R$ *odgovarajući antiizomorfizam algebri.*

(i) Ako je $(R,\mu_R,\eta_R,\blacktriangleleft,\rho)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *u toj kategoriji, onda je* L *unutrašnja pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *uz lijevo djelovanje* $\blacktriangleright\colon H\tilde{\otimes}L\to L$ *definirano sa*

$$f\blacktriangleright x:=\phi^{-1}(\phi(x)\blacktriangleleft Sf)$$

i desno kodjelovanje definirano sa

$$x\mapsto x_{[0]}\otimes x_{[1]}:=\phi^{-1}(\phi(x)_{[0]})\otimes S^{-1}(\phi(x)_{[-1]}).$$

Obratno, ako je $(L, \mu_L, \eta_L, \blacktriangleright, \lambda)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H*, onda je* R *unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *uz na jednak način kao gore definirane veze djelovanja i kodjelovanja: desno djelovanje* $\blacktriangleleft\colon R\tilde{\otimes} H \to R$ *definirano je sa*

$$\phi(S^{-1}f \blacktriangleright x) =: y \blacktriangleleft f.$$

i lijevo kodjelovanje sa

$$\phi(x_{[0]}) \otimes S(x_{[1]}) =: y_{[0]} \otimes y_{[-1]}.$$

Tada vrijedi sljedeće:

(ii) Preslikavanje $\Phi\colon L\sharp H \to H\sharp R$ *definirano sa*

$$\Phi\colon x\sharp f \mapsto \rho(\phi(x)) \cdot f\sharp 1_R = Sx_{[1]}\sharp\phi(x_{[0]}) \cdot f\sharp 1_R$$

je izomorfizam algebri. Njegov inverz dan je sa

$$f\sharp y \mapsto 1_L\sharp f S(y_{[-1]}) \cdot \phi^{-1}(y_{[0]})\sharp 1_H = 1_L\sharp f S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}\sharp 1_H$$

gdje je sa x *označen element od* L *takav da je* $\phi(x) = y$*.*

(iii) Preslikavanje $\tau\colon H\sharp R \to H\sharp R$ *definirano sa*

$$\tau\colon f\sharp y \mapsto y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})Sf$$

i preslikavanje $\tau'\colon L\sharp H \to L\sharp H$ *definirano sa*

$$\tau'\colon x\sharp f \mapsto SfS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$$

su antihomomorfizmi algebri i za njih vrijedi

$$\tau \circ \Phi = \Phi \circ \tau'.$$

Dokaz. (i) Neka su $x \in L$ i $y \in R$ takvi da je $y = \phi(x)$. Zadano je

$$x_{[0]} \otimes x_{[1]} = \phi^{-1}(y_{[0]}) \otimes S^{-1}(y_{[-1]})$$

$$f \blacktriangleright x = \phi^{-1}(y \blacktriangleleft Sf)$$

Ekvivalentno,

$$\phi(x_{[0]}) \otimes S(x_{[1]}) = y_{[0]} \otimes y_{[-1]}$$

$$\phi(S^{-1}f \blacktriangleright x) = y \blacktriangleleft f.$$

Lako se pokaže da djelovanje i kodjelovanje H na R time definira djelovanje i kodjelovanje H na L i obratno.

(a) Dokazujemo prvo da L zadovoljava lijevo-desni Yetter-Drinfeldov uvjet:

$$(f \blacktriangleright x)_{[0]} \otimes (f \blacktriangleright x)_{[1]} = (f_{(2)} \blacktriangleright x_{[0]}) \otimes f_{(3)} x_{[1]} S^{-1}(f_{(1)})$$

ako R nad H zadovoljava desno-lijevi Yetter-Drinfeldov uvjet:

$$(y \blacktriangleleft f)_{[-1]} \otimes (y \blacktriangleleft f)_{[0]} = S^{-1}(f_{(3)}) y_{[-1]} f_{(1)} \otimes (y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})$$

Krenimo od tog uvjeta za Sf i $y = \phi(x)$:

$$(\phi(x) \blacktriangleleft Sf)_{[-1]} \otimes (\phi(x) \blacktriangleleft Sf)_{[0]} = S^{-1}((Sf)_{(3)}) \phi(x)_{[-1]} (Sf)_{(1)} \otimes (\phi(x)_{[0]} \blacktriangleleft (Sf)_{(2)})$$

$$(\phi(x) \blacktriangleleft Sf)_{[-1]} \otimes (\phi(x) \blacktriangleleft Sf)_{[0]} = f_{(1)} \phi(x)_{[-1]} S(f_{(3)}) \otimes (\phi(x)_{[0]} \blacktriangleleft S(f_{(2)}))$$

$$\phi(f \blacktriangleright x)_{[-1]} \otimes \phi(f \blacktriangleright x)_{[0]} = f_{(1)} S((x)_{[1]}) S(f_{(3)}) \otimes (\phi(x_{[0]}) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))$$

$$S((f \blacktriangleright x)_{[1]}) \otimes \phi((f \blacktriangleright x)_{[0]}) = f_{(1)} S((x)_{[1]}) S(f_{(3)}) \otimes \phi(f_{(2)} \blacktriangleright x_{[0]})$$

Djelujemo zatim sa $S^{-1} \otimes \phi^{-1}$ i zatim s $\tau_{H,L}$ i rezultat je

$$(f \blacktriangleright x)_{[0]} \otimes (f \blacktriangleright x)_{[1]} = (f_{(2)} \blacktriangleright x_{[0]}) \otimes f_{(3)} x_{[1]} S^{-1}(f_{(1)})$$

Sve jednakosti u dokazu su ekvivalentne, dakle, vrijedi i obratno da iz lijevo-desnog Yetter-Drinfeldovog uvjeta za L slijedi desno-lijevi Yetter-Drinfeldov uvjet za R.

(b) Dokazujemo da je L modulna algebra. Budući da je R desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H vrijedi:

$$(ye) \blacktriangleleft f = (y \blacktriangleleft f_{(1)})(e \blacktriangleleft f_{(2)})$$

$$(ye)_{[-1]} \otimes (ye)_{[0]} = e_{[-1]} y_{[-1]} \otimes y_{[0]} e_{[0]}$$

(b1) Uzmimo prvi uvjet za Sf, $y = \phi(x)$, $e = \phi(d)$:

$$(\phi(x)\phi(d)) \blacktriangleleft Sf = (\phi(x) \blacktriangleleft (Sf)_{(1)})(\phi(d) \blacktriangleleft (Sf)_{(2)})$$

$$\phi(dx) \blacktriangleleft Sf = (\phi(x) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(1)}))$$

$$\phi(f \blacktriangleright dx) = \phi(f_{(2)} \blacktriangleright x)\phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)$$

$$\phi(f \blacktriangleright dx) = \phi((f_{(1)} \blacktriangleright d)(f_{(2)} \blacktriangleright x))$$

Djelujemo s ϕ^{-1} i imamo traženi uvjet za L nad H:

$$f \blacktriangleright (dx) = (f_{(1)} \blacktriangleright d)(f_{(2)} \blacktriangleright x)$$

(b2) Uzmimo sada drugi uvjet

$$(ye)_{[-1]} \otimes (ye)_{[0]} = e_{[-1]} y_{[-1]} \otimes y_{[0]} e_{[0]}$$

za $y = \phi(x)$, $e = \phi(d)$

$$(\phi(x)\phi(d))_{[-1]} \otimes (\phi(x)\phi(d))_{[0]} = \phi(d)_{[-1]}\phi(x)_{[-1]} \otimes \phi(x)_{[0]}\phi(d)_{[0]}$$

$$(\phi(dx))_{[-1]} \otimes (\phi(dx))_{[0]} = S(d_{[1]})S(x_{[1]}) \otimes \phi(x_{[0]})\phi(d_{[0]})$$

$$S((dx)_{[1]}) \otimes \phi((dx)_{[0]}) = S(x_{[1]}d_{[1]}) \otimes \phi(d_{[0]}x_{[0]})$$

i djelujmo na njega sa $S^{-1} \otimes \phi^{-1}$ i zatim s $\tau_{H,L}$. Dobit ćemo traženi uvjet za L nad H:

$$(dx)_{[0]} \otimes (dx)_{[1]} = d_{[0]}x_{[0]} \otimes d_{[1]}x_{[1]}$$

U oba dokaza je slijed ekvivalentnih jednakosti, dakle, vrijedi da iz analognih uvjeta za L nad H slijede uvjeti za R nad H.

(c) Provjeravamo svojstvo pleteničaste komutativnosti od L nad H:

$$x_{[0]}(x_{[1]} \blacktriangleright e) = ex$$

Krenimo od pleteničaste komutativnosti od R nad H:

$$(d \blacktriangleleft y_{[-1]})y_{[0]} = yd$$

Neka je $e \in L$ takav da je $\phi(e) = d$. Zamijenimo y sa $\phi(x)$ i d sa $\phi(e)$.

$$(\phi(e) \blacktriangleleft \phi(x)_{[-1]})\phi(x)_{[0]} = \phi(x)\phi(e)$$

$$(\phi(e) \blacktriangleleft S(x_{[1]}))\phi(x_{[0]}) = \phi(ex)$$

$$(\phi(x_{[1]} \blacktriangleright e)\phi(x_{[0]}) = \phi(ex)$$

$$\phi(x_{[0]}(x_{[1]} \blacktriangleright e) = \phi(ex)$$

$$x_{[0]}(x_{[1]} \blacktriangleright e) = ex$$

Sve ove jednakosti su ekvivalentne, pa također iz pleteničaste komutativnosti od L nad H obratno slijedi pleteničasta komutativnost od R nad H.

(ii) Dokazujemo da je $\Phi(x\sharp f \cdot d\sharp g) = \Phi(x\sharp f) \cdot \Phi(d\sharp g)$ za generičke elemente $x\sharp f$, $d\sharp g \in L\sharp H$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\Phi(x\sharp f \cdot d\sharp g) &= \Phi(x(f_{(1)} \blacktriangleright d)\sharp f_{(2)}g) \\
&= \phi(x(f_{(1)} \blacktriangleright d))_{[-1]}\sharp\phi(x(f_{(1)} \blacktriangleright d))_{[0]} \cdot f_{(2)}g\sharp 1_R \\
&= \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \cdot \phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)_{[-1]}\sharp\phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)_{[0]} \cdot f_{(2)}g\sharp 1_R \quad \text{(i')} \\
&= \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \cdot f\sharp 1_R \cdot \phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]} \cdot g\sharp 1_R \qquad \text{(ii')} \\
&= \Phi(x\sharp f) \cdot \Phi(d\sharp g)
\end{aligned}$$

gdje smo u koraku (i') koristili da je ϕ antiizomorfizam algebri i da je koakcija antihomomorfizam algebri što je dokazano u lemi 8.1.1:

$$(ey)_{[-1]}\sharp(ey)_{[0]} = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot e_{[-1]}\sharp e_{[0]}$$

a u koraku (ii') smo koristili jednakost

$$\phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)_{[-1]}\sharp\phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)_{[0]} \cdot f_{(2)} = f\phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]}$$

koja je ekvivalentna desno-lijevom Yetter-Drinfeldovom uvjetu na sljedeći način. Jednaka je

$$(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(1)}))_{[-1]}\sharp(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(1)}))_{[0]} \cdot f_{(2)} = f\phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]}$$

$$S(f_{(1)})(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))_{[-1]}\sharp(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))_{[0]} \cdot f_{(3)} = \phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]}$$

$$S(f_{(1)})(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))_{[-1]}\sharp(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(2)}))_{[0]} = \phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]} \cdot Sf$$

$$(Sf)_{(2)}(\phi(d) \blacktriangleleft (Sf)_{(1)}))_{[-1]}\sharp(\phi(d) \blacktriangleleft (Sf)_{(1)}))_{[0]} = \phi(d)_{[-1]}\sharp\phi(d)_{[0]} \cdot Sf$$

Time je dokazano je da je Φ homomorfizam algebri $L\sharp H$ i $H\sharp R$. Lako se provjeri da je njegov inverz definiran formulom

$$f\sharp y \mapsto 1\sharp fS(y_{[-1]}) \cdot \phi^{-1}(y_{[0]})\sharp 1 = 1\sharp fS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}\sharp 1$$

gdje je sa x označen element od L takav da je $\phi(x) = y$.

(iii)

(a) Provjeravamo podudarnost τ i τ'.

$$\begin{aligned}\Phi(\tau'(x\sharp f)) &= \Phi(S(f)S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]})\\ &= S(f) \cdot y\end{aligned}$$

jer je

$$\Phi^{-1}(y) = S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$$

Znamo da je

$$\Phi(x\sharp f) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f = y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})$$

$$\tau(f\sharp y) = y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(f)$$

Provjeravamo

$$\begin{aligned}\tau(\Phi(x\sharp f)) &= \tau(y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)}))\\ &= (y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[0]}S^2((y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[-1]})S(y_{[-1]}f_{(1)})\\ &= (**)\end{aligned}$$

Po desno-lijevom Yetter-Drinfeldovom uvjetu vrijedi:

$$(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[-1]} \otimes (y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[0]} \otimes y_{[-1]} \otimes f_{(1)} = S^{-1}(f_{(4)})y_{[-1]}f_{(2)} \otimes (y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(3)}) \otimes y_{[-2]} \otimes f_{(1)}$$

pa slijedi zamjenom prve dvije komponente, primjenom $\mathrm{id} \otimes S^2 \otimes \mu_{H\sharp R}$ i zatim primjenom $\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes S$ na taj uvjet i na kraju množenjem svih komponenti i uvrštavanjem u gornju jednakost

$$\begin{aligned}(**) &= (y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(3)}) \cdot S^2(S^{-1}(f_{(4)})y_{[-1]}f_{(2)}) \cdot S(y_{[-2]}f_{(1)})\\ &= (y \blacktriangleleft f_{(1)})S(f_{(2)})\\ &= S(f) \cdot y\\ &= \Phi(\tau'(x\sharp f))\end{aligned}$$

(b) Dokazujemo sada je je $\tau' \colon L\sharp H \to L\sharp H$, $\tau' \colon x\sharp f \mapsto SfS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$ antihomomorfizam. Najprije uočimo da je

$$\Phi(\tau'(x\sharp f)) = \Phi(SfS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}) = Sf \cdot y$$

za $y = \phi(x)$, jer je $\Phi^{-1}(y) = S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$. Slijedi

$$\tau'(x\sharp f) = \Phi^{-1}(Sf\sharp\phi(x))$$

Sada iz toga što su ϕ i S antihomomorfizmi i Φ izomorfizam algebri lako slijedi da je τ antihomomorfizam:

$$\begin{aligned}\Phi(\tau'(x\sharp f \cdot d\sharp g)) &= \Phi(\tau'(x(f_{(1)} \blacktriangleright d)\sharp f_{(2)}g))\\ &= S(g)S(f_{(2)})\sharp\phi(x(f_{(1)} \blacktriangleright d))\\ &= S(g)S(f_{(2)})\sharp\phi(f_{(1)} \blacktriangleright d)\phi(x)\\ &= S(g)S(f_{(2)})\sharp(\phi(d) \blacktriangleleft S(f_{(1)}))\phi(x)\\ &= S(g)\sharp\phi(d) \cdot S(f)\sharp\phi(d)\\ &= \Phi(\tau'(d\sharp g)) \cdot \Phi(\tau'(x\sharp f))\\ &= \Phi(\tau'(d\sharp g) \cdot \tau'(x\sharp f))\end{aligned}$$

Dakle, τ' je antihomomorfizam

$$\tau'(x\sharp f \cdot d\sharp g) = \tau'(d\sharp g) \cdot \tau'(x\sharp f),$$

a iz toga zbog $\tau = \Phi \circ \tau' \circ \Phi^{-1}$ slijedi da je to i $\tau \colon H\sharp R \to H\sharp R$, $\tau \colon x\sharp f \mapsto SfS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$.

□

8.1.3 Nelijepi bialgebroidi pomoću lijepih

Sada možemo povući strukturu lijevog bialgebroida sa $L\sharp H$ na $H\sharp R$ i strukturu desnog bialgebroida sa $H\sharp R$ na $L\sharp H$ pomoću izomorfizma Φ tih algebri, a na kraju ćemo dokazati da te strukture zajedno s definiranim antipodima τ odnosno τ' čine Hopfov algebroid.

Propozicija 8.1.5. *Neka je* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ *unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$ *s bijektivnim antipodom.*

Neka je $(R, \mu_R, \eta_R, \blacktriangleright, \rho)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *u toj kategoriji. Označimo s* L *algebru* R^{op} *i neka je* $\phi\colon L \to R$ *odgovarajući antiizomorfizam algebri.*

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned}
\alpha_L :\ & L \to H\sharp R \\
& x \mapsto \rho(\phi(x)) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \\
\beta_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\
& x \mapsto \phi(x)_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}\phi(x)_{[-1]} \\
\Delta_L :\ & H\sharp R \to H\sharp R\,\tilde{\otimes}_L\, H\sharp R \\
& f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_L f_{(2)}\sharp y \\
\epsilon_L :\ & H\sharp R \to L \\
& f\sharp y \mapsto \phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2 y_{[-1]} Sf))
\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}_L = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ *lijevi bialgebroid nad* L *u* $\mathrm{indproVect}$.

Dokaz. U propoziciji 8.1.4 je dokazano da je L nad H pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz lijevo djelovanje $\blacktriangleright\colon H\,\tilde{\otimes}\, L \to L$ definirano sa

$$f \blacktriangleright x := \phi^{-1}(\phi(x) \blacktriangleleft Sf)$$

i desno kodjelovanje definirano sa

$$x \mapsto x_{[0]} \otimes x_{[1]} := \phi^{-1}(\phi(x)_{[0]}) \otimes S^{-1}(\phi(x)_{[-1]})$$

izomorfna kao algebra sa $H\sharp R$ po izomorfizmu $\Phi\colon L\sharp H \to H\sharp R$ definiranim sa

$$\Phi\colon x\sharp f \mapsto \rho(\phi(x)) \cdot f\sharp 1_R = Sx_{[1]}\sharp\phi(x_{[0]}) \cdot f\sharp 1_R,$$

a u propoziciji 8.1.3 je za $L\sharp H$ uz formule

$$\begin{aligned}
\alpha'_L :\ & L \to L\sharp H \\
& x \mapsto x\sharp 1_H \\
\beta'_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to L\sharp H \\
& x \mapsto \lambda(x) = x_{[0]}\sharp x_{[1]} \\
\Delta'_L :\ & L\sharp H \to L\sharp H\,\tilde{\otimes}_L\, L\sharp H \\
& f\sharp x \mapsto x\sharp f_{(1)} \otimes_L 1_L\sharp f_{(2)} \\
\epsilon'_L :\ & L\sharp H \to L \\
& f\sharp x \mapsto \epsilon(f)x
\end{aligned}$$

dokazano da je lijevi bialgebroid $\mathcal{H}'_L$ nad L.

Dokazat ćemo da po izomorfizmu Φ sve formule od $\mathcal{H}'_L$ odgovaraju svim formulama od $\mathcal{H}_L$ pa će slijediti da je i $\mathcal{H}_L$ lijevi bialgebroid, izomorfan $\mathcal{H}'_L$.

I dalje koristimo oznake $x \in L$ i $y \in R$ za par generičkih elemenata za koje vrijedi $y = \phi(x)$. Izomorfizam Φ podalgebru H od $L\sharp H$ preslikava identično u podalgebru H od $H\sharp R$:

$$\Phi(1\sharp f) = f\sharp 1$$

za generički element $f \in H$.

Provjeravamo sada podudarnost α_L s α'_L i β_L s β'_L.

$$\Phi(\alpha'_L(x)) = \Phi(x\sharp 1) = S(x_{[1]})\sharp\phi(x_{[0]}) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} = \alpha_L(x)$$

$$\Phi(\beta'_L(x)) = \Phi(x_{[0]}\sharp x_{[1]}) = S(x_{[1]})\sharp\phi(x_{[0]}) \cdot x_{[2]} = \phi(x_{[0]}) \blacktriangleleft x_{[1]} = y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]}) = \beta_L(x)$$

Dakle, dobro je definirano preslikavanje $\Phi \otimes_L \Phi\colon L\#H \otimes_L L\#H \to R\#H \otimes_L R\#H$.

Sada provjeravamo podudarnost ϵ'_L i ϵ_L.

$$\epsilon_L(f\sharp y) = \phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-1]})S(f))) = (fS(y_{[-1]})) \blacktriangleright \phi(y_{[0]}) = (fS^2(x_{[1]})) \blacktriangleright x_{[0]}$$

$$\epsilon'_L(x\sharp f) = \epsilon(f)x$$

$$\epsilon'_L(\Phi^{-1}(f\sharp y)) = \epsilon'_L(fS^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}) = (fS^2(x_{[1]})) \blacktriangleright x_{[0]} = \epsilon_L(f\sharp y)$$

Provjeravamo podudarnost Δ_L i Δ'_L.

$$(\Phi \otimes_L \Phi)(\Delta'_L(x\sharp f)) = (\Phi \otimes_L \Phi)(x\sharp f_{(1)} \otimes_L 1\sharp f_{(2)}) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(1)} \otimes_L f_{(2)}\sharp 1$$

$$\Phi(x\sharp f) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f$$

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\Phi(x\sharp f)) &= \Delta_L(y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f) \\
&= \Delta_L(y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})) \\
&= y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_L y_{[-1]}f_{(2)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(3)}) \\
&= y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_L y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(2)} \\
&= (*)
\end{aligned}$$

što je, budući da je

$$\alpha_L(x) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]}$$

$$\beta_L(x) = y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]})$$

jednako

$$\begin{aligned}(*) &= (y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]}))y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_L f_{(2)}\\ &= y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(1)} \otimes_L f_{(2)}\\ &= (\Phi \otimes_L \Phi)(\Delta'_L(x\sharp f))\end{aligned}$$

Dokazali smo da se sve formule za $\mathcal{H}'_L$ podudaraju s odgovarajućim formulama za $\mathcal{H}_L$. Slijedi da je $\mathcal{H}_L$ lijevi bialgebroid, izomorfan $\mathcal{H}'_L$.

□

Propozicija 8.1.6. *Neka je* $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ *unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* indproVect *s bijektivnim antipodom.*

Neka je $(L, \mu_L, \eta_L, \blacktriangleleft, \lambda)$ *unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad* H *u toj kategoriji. Označimo s* R *algebru* L^{op} *i neka je* $\phi\colon L \to R$ *odgovarajući antiizomorfizam algebri.*

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned}\alpha_R :\ & R \to L\sharp H\\ & y \mapsto S^2(\phi^{-1}(y)_{[1]}) \cdot \phi^{-1}(y)_{[0]}\\ \beta_R :\ & R^{\mathrm{op}} \to L\sharp H\\ & y \mapsto \phi^{-1}(y)\sharp 1_H\\ \Delta_R :\ & L\sharp H \to L\sharp H \,\tilde{\otimes}_R\, L\sharp H\\ & x\sharp f \mapsto x\sharp f_{(1)} \otimes_R 1_L\sharp f_{(2)}\\ \epsilon_R :\ & L\sharp H \to R\\ & x\sharp f \mapsto \phi(S^{-1}(f) \blacktriangleright x)\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{H}_R = (L\sharp H, \mu_{L\sharp H}, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ *desni bialgebroid nad* R *u kategoriji* indproVect.

Dokaz. U propoziciji 8.1.4 je dokazano da je R nad H pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz desno djelovanje $\blacktriangleleft : R \,\tilde{\otimes}\, H \to R$ definirano je sa

$$\phi(S^{-1}f \blacktriangleright x) =: y \blacktriangleleft f$$

i lijevo kodjelovanje sa

$$\phi(x_{[0]}) \otimes S(x_{[1]}) =: y_{[0]} \otimes y_{[-1]}$$

izomorfna kao algebra sa $L\sharp X$ po izomorfizmu $\Phi\colon L\sharp H \to H\sharp R$ definiranim sa

$$\Phi\colon x\sharp f \mapsto \rho(\phi(x)) \cdot f\sharp 1_R = Sx_{[1]}\sharp\phi(x_{[0]}) \cdot f\sharp 1_R,$$

a u propoziciji 8.1.2 je za $H\sharp R$ uz formule

$$\begin{aligned}\alpha'_R :\ & R \to H\sharp R\\ & y \mapsto 1_H\sharp y\\ \beta'_R :\ & R^{\mathrm{op}} \to H\sharp R\\ & y \mapsto \rho(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]}\\ \Delta'_R :\ & H\sharp R \to H\sharp R\,\tilde{\otimes}_R\, H\sharp R\\ & f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_R f_{(2)}\sharp y\\ \epsilon'_R :\ & H\sharp R \to R\\ & f\sharp y \mapsto \epsilon(f)y\end{aligned}$$

dokazano da je desni bialgebroid $\mathcal{H}'_R$ nad R.

Dokazat ćemo da po izomorfizmu Φ formule od $\mathcal{H}'_R$ odgovaraju formulama od $\mathcal{H}_R$ pa će slijediti da je i $\mathcal{H}_R$ desni bialgebroid, izomorfan $\mathcal{H}'_R$.

I dalje koristimo oznake $x \in L$ i $y \in R$ za par generičkih elemenata za koje vrijedi $y = \phi(x)$. Izomorfizam Φ podalgebru H od $L\sharp H$ preslikava identično u podalgebru H od $H\sharp R$:

$$\Phi(1_L\sharp f) = f\sharp 1_R$$

za generički element $f \in H$.

Provjeravamo sada podudarnost α_R s α'_R i β_R s β'_R.

$$\Phi^{-1}(\alpha'_R(y)) = \Phi^{-1}(1_H\sharp y) = S(y_{[-1]}) \cdot \phi^{-1}(y_{[0]}) = S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]} = \alpha_R(y)$$

$$\Phi(\beta_R(x)) = \Phi(x\sharp 1_H) = S(x_{[1]})\sharp\phi(x_{[0]}) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} = \beta'_R(x)$$

Dakle, dobro je definirano preslikavanje $\Phi \otimes_R \Phi\colon L\sharp H \otimes_R L\sharp H \to R\sharp H \otimes_R R\sharp H$.

Sada provjeravamo podudarnost ϵ'_R i ϵ_R.

$$\epsilon_R(x\sharp f) = \phi(S^{-1}(f) \blacktriangleright x) = \phi(x) \blacktriangleleft f = y \blacktriangleleft f$$

$$\epsilon_R(f\sharp y) = \epsilon(f)y$$

$$\epsilon_R(\Phi(x\sharp f)) = \epsilon_R(y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f) = y \blacktriangleleft f$$

Provjeravamo podudarnost Δ_R i Δ'_R.

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes_R \Phi)(\Delta_R(x\sharp f)) &= (\Phi \otimes_R \Phi)(x\sharp f_{(1)} \otimes_R 1\sharp f_{(2)})\\ &= y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(1)} \otimes_R f_{(2)}\\ &= y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)}) \otimes_R f_{(3)}\\ &= y_{[-1]}f_{(1)}\sharp\alpha_R(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)}) \otimes_R f_{(3)}\\ &= y_{[-1]}f_{(1)} \otimes_R f_{(3)}\beta_R(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})\\ &= y_{[-1]}f_{(1)} \otimes_R f_{(3)}(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[-1]}(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})_{[0]}\\ &= (*)\end{aligned}$$

pa po desno-lijevom yetter-Drinfeldovom uvjetu slijedi da je to jednako

$$\begin{aligned}(*) &= y_{[-2]}f_{(1)} \otimes_R y_{[-1]}f_{(2)}(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(3)}) \\ &= y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_R y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(2)}\end{aligned}$$

Uz

$$\Phi(x\sharp f) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f$$

računamo

$$\begin{aligned}\Delta_R(\Phi(x\sharp f)) &= \Delta_R(y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f) \\ &= \Delta_R(y_{[-1]}f_{(1)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(2)})) \\ &= y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_R y_{[-1]}f_{(2)}\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft f_{(3)}) \\ &= y_{[-2]}f_{(1)}\sharp 1 \otimes_R y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot f_{(2)}\end{aligned}$$

Dokazali smo da se formule za $\mathcal{H}'_R$ podudaraju s odgovarajućim formulama za $\mathcal{H}_R$. Slijedi da je $\mathcal{H}_R$ desni bialgebroid, izomorfan $\mathcal{H}'_R$.

□

8.1.4 Hopfovi algebroidi

Sada možemo dokazati da lijevi i desni bialgebroid na $H\sharp R$ zajedno s prije uvedenim τ čine Hopfov algebroid.

Teorem 8.1.7. *Neka je $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* indproVect *s bijektivnim antipodom. Neka je $(R, \mu_R, \eta_R, \blacktriangleleft, \rho)$ unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u toj kategoriji. Označimo s $L := R^{\mathrm{op}}$ i odgovarajući antiizomorfizam s $\phi\colon L \to R$.*

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned}
\alpha_R :\ & R \to H\sharp R & \alpha_L :\ & L \to H\sharp R \\
& y \mapsto 1_H\sharp y & & x \mapsto \rho(\phi(x)) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \\
\beta_R :\ & R^{\mathrm{op}} \to H\sharp R & \beta_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\
& y \mapsto \rho(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} & & x \mapsto \phi(x)_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}\phi(x)_{[-1]} \\
\Delta_R :\ & H\sharp R \to H\sharp R\tilde{\otimes}_R H\sharp R & \Delta_L :\ & H\sharp R \to H\sharp R\tilde{\otimes}_L H\sharp R \\
& f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_R f_{(2)}\sharp y & & f\sharp y \mapsto f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_L f_{(2)}\sharp y \\
\epsilon_R :\ & H\sharp R \to R & \epsilon_L :\ & H\sharp R \to L \\
& f\sharp y \mapsto \epsilon(f)y & & f\sharp y \mapsto \phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2 y_{[-1]}Sf))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau :\ & (H\sharp R)^{\mathrm{op}} \to H\sharp R \\ & f\sharp y \mapsto y_{[0]} \cdot S^2 y_{[-1]}Sf\end{aligned}$$

Tada je $(H\sharp R, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \tau)$ *unutrašnji Hopfov algebroid u kategoriji* indproVect *s lijevim bialgebroidom* $\mathcal{H}_L = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ *nad* L *i desnim bialgebroidom* $\mathcal{H}_R = (H\sharp R, \mu_{H\sharp R}, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ *nad* R*.*

Dokaz. U propozicijama 8.1.2 i 8.1.5 je dokazano da su $\mathcal{H}_R$ i $\mathcal{H}_L$ desni odnosno lijevi bialgebroid nad R odnosno L i u propoziciji 8.1.4 da je τ antihomomorfizam.

(i) Dokazujemo prvo jednakosti

$$\alpha_L \circ \epsilon_L \circ \beta_R = \beta_R, \qquad \beta_L \circ \epsilon_L \circ \alpha_R = \alpha_R,$$
$$\alpha_R \circ \epsilon_R \circ \beta_L = \beta_L, \qquad \beta_R \circ \epsilon_R \circ \alpha_L = \alpha_L.$$

Prvu, treću i četvrtu jednakost je lako dokazati.

$$\begin{aligned}
\alpha_L(\epsilon_L(\beta_R(y)) &= \alpha_L(\epsilon_L(y_{[-1]}\sharp y_{[0]})) \\
&= \alpha_L(\phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-1]})S(y_{[-2]})))) \\
&= \alpha_L(\phi^{-1}(y)) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \\
&= \beta_R(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_R(\epsilon_R(\beta_L(x)))) &= \alpha_R(\epsilon_R(y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]}))) \\
&= \alpha_R(y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]}))) \\
&= y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]})) \\
&= \beta_L(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_R(\epsilon_R(\alpha_L(x))) &= \beta_R(\epsilon_R(y_{[-1]}\sharp y_{[0]})) \\
&= \beta_R(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \\
&= \alpha_L(x)
\end{aligned}$$

Dokazujemo sada drugu jednakost.

$$\begin{aligned}
\beta_L(\epsilon_L(\alpha_R(y)))) &= \beta_L(\epsilon_L(1_H\sharp y)) \\
&= \beta_L(\phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft S^2 y_{[-1]})) \\
&= (y_{[0]} \blacktriangleleft S^2 y_{[-1]})_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft S^2 y_{[-1]})_{[-1]} \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Koristeći desno-lijevi Yetter-Drinfeldov uvjet imamo:

$$\begin{aligned}
(e \blacktriangleleft g) \otimes S^{-1}(e \blacktriangleleft g)_{[-1]} &= e \blacktriangleleft g_{(2)} \otimes S^{-1}(S^{-1}(g_{(3)})y_{[-1]}g_{(1)}) \\
&= e \blacktriangleleft g_{(2)} \otimes S^{-1}(g_{(1)})S^{-1}(y_{[-1]})S^{-2}(g_{(3)})
\end{aligned}$$

Sada primjenimo desno djelovanje na lijevu i desnu stranu i imamo:

$$\begin{aligned}
(e \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft S^{-1}(e \blacktriangleleft g)_{[-1]} &= e \blacktriangleleft (g_{(2)}S^{-1}(g_{(1)})S^{-1}(y_{[-1]})S^{-2}(g_{(3)})) \\
&= e \blacktriangleleft (S^{-1}(y_{[-1]})S^{-2}(g))
\end{aligned}$$

Primjenom toga za $e = y_{[0]}$ i $g = S^2(y_{[-1]})$ računamo dalje

$$\begin{aligned}(*) &= y_{[0]} \blacktriangleleft (S^{-1}(y_{[-1]})S^{-2}(y_{[-2]})) \\ &= 1_H \sharp y \\ &= \alpha_R(y)\end{aligned}$$

(ii) Lako se vidi da vrijedi:

$$(\Delta_R \otimes_L \mathrm{id}) \circ \Delta_L = (\mathrm{id} \otimes_R \Delta_L) \circ \Delta_R$$

$$(\Delta_L \otimes_R \mathrm{id}) \circ \Delta_R = (\mathrm{id} \otimes_R \Delta_R) \circ \Delta_L$$

Naime, obje strane prve jednakosti na generičkom elementu $f \sharp y$ jednake su:

$$f_{(1)} \sharp 1_R \otimes_R f_{(2)} \sharp 1_R \otimes_L f_{(3)} \sharp y$$

a obje strane druge jednakosti:

$$f_{(1)} \sharp 1_R \otimes_L f_{(2)} \sharp 1_R \otimes_R f_{(3)} \sharp y$$

(iii) Na kraju dokazujemo

$$\begin{gathered}\tau \circ \beta_L = \alpha_L, \qquad \tau \circ \beta_R = \alpha_R \\ \mu_{\otimes'_L} \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_L = \alpha_R \circ \epsilon_R \\ \mu_{\otimes'_R} \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ \Delta_R = \alpha_L \circ \epsilon_L\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\tau(\beta_R(y)) &= \tau(y_{[-1]} \sharp y_{[0]}) \\ &= y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(y_{-2]}) \\ &= y = \alpha_R(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\beta_L(y)) &= \tau(y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]})) \\ &= \tau(y_{[-1]} \sharp y_{[0]} \cdot S^{-1}(y_{[-2]})) \\ &= y_{[-3]} \cdot y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(y_{-2]}) \\ &= y_{[-1]} \sharp y_{[0]} = \alpha_L(y)\end{aligned}$$

Ovdje je $\mu_{\otimes'_R}$ množenje u R-prstenu $(\mathcal{H}, \mu_{\otimes'_R}, \alpha_R)$, monoidu u kategoriji $({}_R\mathcal{M}_R, \tilde{\otimes}'_R, R)$ u kojoj je lijevo i desno djelovanje na H dano množenjem s α_R slijeva i zdesna, inducirano s $\mu_{\mathcal{H}}$. Analogno, $\mu_{\otimes'_L}$ je množenje u L-prstenu $(\mathcal{H}, \mu_{\otimes'_L}, \alpha_L)$, monoidu u kategoriji $({}_L\mathcal{M}_L, \tilde{\otimes}'_L, L)$ u kojoj je lijevo i desno djelovanje na H dano sa množenjem s α_L slijeva i zdesna, inducirano s $\mu_{\mathcal{H}}$. Kompozicije preslikavanja su dobro definirane jer je zbog prethodno dokazana dva svojstva od τ dobro definirano:

$$\tau \otimes \mathrm{id} \colon H \sharp R \otimes_L H \sharp R \to H \sharp R \otimes'_L H \sharp R$$

$$\mathrm{id} \otimes \tau \colon H\sharp R \otimes_R H\sharp R \to H\sharp R \otimes'_R H\sharp R$$

Prva jednakost se lako provjeri na generičkom elementu $f\sharp y$:

$$\mu_{\otimes'_L}((\tau \otimes \mathrm{id})(\Delta_L(f\sharp y))) = S(f_{(1)})f_{(2)}\sharp y = \epsilon(f)1_H\sharp y = \alpha_R(\epsilon_R(f\sharp y))$$

a za drugu je potrebno koristiti Yetter-Drinfeldov uvjet:

$$\begin{aligned} \mu_{\otimes'_R}((\mathrm{id} \otimes \tau)(\Delta_R(f\sharp y))) &= \mu_{\otimes'_R}((\mathrm{id} \otimes \tau)(f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_R f_{(2)}\sharp y)) \\ &= f_{(1)} \cdot y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(f_{(2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_L(\epsilon_L(f\sharp y)) &= \alpha_L(\phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-1]})Sf))) \\ &= \rho(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-1]})Sf)) \end{aligned}$$

što je po desno-lijevom Yetter-Drinfeldovom uvjetu jednako:

$$\begin{aligned} &= S^{-1}(S^2(y_{[-2]})S(f_{(1)}))y_{[-1]}(S^2(y_{[-4]})S(f_{(3)}))\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-3]})S(f_{(2)}))) \\ &= f_{(1)}S^2(y_{[-2]})S(f_{(3)})\sharp(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-3]})S(f_{(2)}))) \\ &= f_{(1)} \cdot y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(f_{(2)}) \end{aligned}$$

□

Slijedi i lijevo-desna verzija prethodnog teorema.

Teorem 8.1.8. *Neka je $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ unutrašnja Hopfova algebra u kategoriji* $\mathrm{indproVect}$ *s bijektivnim antipodom. Neka je $(L, \mu_L, \eta_L, \blacktriangleright, \lambda)$ unutrašnja pleteničasto-komutativna lijevo-desna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H u toj kategoriji. Označimo s $R := L^{\mathrm{op}}$ i odgovarajući antiizomorfizam s $\phi\colon L \to R$.*

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned} \alpha_L :\ & L \to L\sharp H & \alpha_R :\ & R \to L\sharp H \\ & x \mapsto x\sharp 1_H & & y \mapsto S^2(\phi^{-1}(y)_{[1]}) \cdot \phi^{-1}(y)_{[0]} \\ \beta_L :\ & L^{\mathrm{op}} \to L\sharp H & \beta_R :\ & R^{\mathrm{op}} \to L\sharp H \\ & x \mapsto \lambda(x) = x_{[0]}\sharp x_{[1]} & & y \mapsto \phi^{-1}(y)\sharp 1_H \\ \Delta_L :\ & L\sharp H \to L\sharp H \,\tilde{\otimes}_L\, L\sharp H & \Delta_R :\ & L\sharp H \to L\sharp H \,\tilde{\otimes}_R\, L\sharp H \\ & x\sharp f \mapsto x\sharp f_{(1)} \otimes_L 1_L\sharp f_{(2)} & & x\sharp f \mapsto x\sharp f_{(1)} \otimes_R 1_L\sharp f_{(2)} \\ \epsilon_L :\ & L\sharp H \to L & \epsilon_R :\ & L\sharp H \to R \\ & x\sharp f \mapsto \epsilon(f)x & & x\sharp f \mapsto \phi(S^{-1}(f) \blacktriangleright x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau :\ & (L\sharp H)^{\mathrm{op}} \to L\sharp H \\ & x\sharp f \mapsto SfS^2x_{[1]} \cdot x_{[0]} \end{aligned}$$

Tada je $(L\sharp H, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \tau)$ *unutrašnji Hopfov algebroid u kategoriji* indproVect *s lijevim bialgebroidom* $\mathcal{H}_L = (L\sharp H, \mu_{L\sharp H}, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$ *nad* L *i desnim bialgebroidom* $\mathcal{H}_R = (L\sharp H, \mu_{L\sharp H}, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ *nad* R*.*

Dokaz. Iz prethodnog dokazanog slijedi da je to Hopfov algebroid izomorfan Hopfovom algebroidu iz teorema 8.1.7.

□

Slijedi tablica u kojoj su ukratko navedene sve formule koje se pojavljuju u prethodnim propozicijama. Postoje dva istaknuta antiizomorfizma među $L \to R$ koja proizlaze iz strukture Hopfovog algebroida, naime $\phi = \epsilon_R \circ \alpha_L$ s inverzom $\phi^{-1} = \epsilon_L \circ \beta_R$, te $\mu = \epsilon_R \circ \beta_L$ s inverzom $\mu^{-1} = \epsilon_L \circ \alpha_R$. Ovdje su kao u prethodnim propozicijama ti antiizomorfizmi korišteni da se povežu formule za prikaze Hopfovog algebroida kao $H\sharp R$ i $L\sharp H$. Izomorfizam te dvije algebre, tj. veza ta dva prikaza iste algebre, vidljiva je iz tablice uspoređujući preslikavanja s lijeve i desne strane, naprimjer: $x = x\sharp 1_H = \alpha_L(x) \in L\sharp H$ jednak je $\alpha_L(x) = \phi(x)_{[-1]}\sharp\phi(x)_{[0]} \in H\sharp R$ i imajući na umu da je $1_L\sharp f \in L\sharp H$ jednak $f\sharp 1_R \in H\sharp R$.

$L\sharp H$	$H\sharp R$
lijevi bialgebroid nad L	lijevi bialgebroid nad $L,$ pomoću ϕ
$\alpha_L(x) = x\sharp 1_H$	$\alpha_L(\phi^{-1}(y)) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]}$
$\beta_L(x) = x_{[0]}\sharp x_{[1]}$	$\beta_L(\phi^{-1}(y)) = y_{[0]} \blacktriangleleft S^{-1}(y_{[-1]})$
$\Delta_L(x\sharp f) = x\sharp f_{(1)} \otimes_L 1_L\sharp f_{(2)}$	$\Delta_L(f\sharp y) = f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_L f_{(2)}\sharp y$
$\epsilon_L(x\sharp f) = \epsilon(f)x$	$\epsilon_L(f\sharp y) = \phi^{-1}(y_{[0]} \blacktriangleleft (S^2(y_{[-1]})S(f)))$
desni bialgebroid nad $R,$ pomoću ϕ	**desni bialgebroid nad** R
$\alpha_R(\phi(x)) = S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$	$\alpha_R(y) = 1_H\sharp y$
$\beta_R(\phi(x)) = x\sharp 1_H$	$\beta_R(y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]}$
$\Delta_R(x\sharp f) = x\sharp f_{(1)} \otimes_R 1_L\sharp f_{(2)}$	$\Delta_R(f\sharp y) = f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_R f_{(2)}\sharp y$
$\epsilon_R(x\sharp f) = \phi(S^{-1}(f) \blacktriangleright x)$	$\epsilon_R(f\sharp y) = \epsilon(f)y$
antipod	antipod
$\tau(x\sharp f) = S(f)S^2(x_{[1]}) \cdot x_{[0]}$	$\tau(f\sharp y) = y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})S(f)$
$\tau^{-1}(x\sharp f) = S^{-1}(f) \cdot x_{[0]}\sharp x_{[1]}$	$\tau^{-1}(f\sharp y) = y_{[-1]}\sharp y_{[0]} \cdot S^{-1}(f)$

Ovdje je $\phi = \epsilon_R \circ \alpha_L,\ \phi^{-1} = \epsilon_L \circ \beta_R,\ \phi\colon L \to R$ antiizomorfizam

Alternativno, formule za drugi bialgebroid možemo zapisati i pomoću gore navedenog μ kao u sljedećoj tablici. Dijelovi ove dodatne tablice mogu zamijeniti dijelove gornje tablice u kojima su formule zapisane pomoću ϕ.

$L\sharp H$	$H\sharp R$
desni bialgebroid nad $R,$ pomoću μ	lijevi bialgebroid nad $L,$ pomoću μ
$\alpha_R(\mu(x)) = x_{[0]}\sharp x_{[1]}$	$\alpha_L(\mu^{-1}(y)) = y_{[0]} \cdot S^2(y_{[-1]})$
$\beta_R(\mu(x)) = S^{-1}(x_{[1]}) \blacktriangleright x_{[0]}$	$\beta_L(\mu^{-1}(y)) = 1_H\sharp y$
$\Delta_R(x\sharp f) = x\sharp f_{(1)} \otimes_R 1_L\sharp f_{(2)}$	$\Delta_L(f\sharp y) = f_{(1)}\sharp 1_R \otimes_L f_{(2)}\sharp y$
$\epsilon_R(x\sharp f) = \mu((S(f)S^2(x_{[1]})) \blacktriangleright x_{[0]})$	$\epsilon_L(f\sharp y) = \mu^{-1}(y \blacktriangleleft S^{-1}(f))$
Ovdje je $\mu = \epsilon_R \circ \beta_L,\ \mu^{-1} = \epsilon_L \circ \alpha_R,\ \mu\colon L \to R$ antiizomorfizam	

Zamijetimo da su u dodatnoj tablici formule za desni bialgebroid nad R pomoću μ analogne formulama u osnovnoj tablici za desni bialgebroid nad R pomoću ϕ i slično za formule za lijeve bialgebroide pomoću ϕ i μ.

Napomena 8.1.9. Dokazi teorema i propozicija u ovom poglavlju lako se prevode u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji na dokaze analognih teorema i propozicija u kojima je kategorija $\mathrm{indproVect}$ zamijenjena proizvoljnom simetričnom monoidalnom kategorijom koja posjeduje koujednačitelje koji komutiraju s monoidalnim produktom. Posebnu pažnju pritom treba dati samo izrazima oblika $\Delta(h) \cdot \Delta(h')$, jer rad s njima uključuje identitete koji sadrže djelovanja λ i ρ iz definicije 7.2.13 unutarnjeg bialgebroida, vidi dokaze lema u odjeljku 7.3. Ovdje to nije bilo potrebno jer je koprodukt $\Delta(h) \in \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$ uvijek bio u računu predstavljen s $\pi_A(h')$ za neki $h' \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, gdje smo s $\mathcal{H}$ označili poludirektne produkte $L\sharp H$ i $H\sharp R$, s A algebre L i R, a s π_L kanonsku projekciju $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}$.

Poglavlje 9

Dualne Hopfove algebre, Yetter-Drinfeldove modulne algebre i skalarna proširenja u $\mathrm{indproVect}$

U ovom poglavlju bavimo se pitanjem kada za unutrašnje Hopfove algebre R i H u Hopfovom sparivanju u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ vrijedi da je R nad H unutrašnja pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra u kategoriji $\mathrm{indproVect}$. U prethodnom poglavlju je dokazano da svaka takva Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz bijektivnost antipoda Hopfove algebre H) vodi na strukturu Hopfovog algebroida na poludirektnom produktu $H\sharp R$. Pritom nas najviše zanimaju sparivanja Hopfovih algebri iz dualnih potkategorija $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$, te Heisenbergova udvojenja $R^*\sharp R$ u toj kategoriji za R iz kategorije $\mathrm{indVectFin}$.

Hopfovo sparivanje, Hopfovo djelovanje i poludirektni produkt u $\mathrm{indproVect}$ definirani su u odjeljcima 6.3 i 6.4 poglavlja Algebra u monoidalnim kategorijama.

9.1 Pregled rezultata i metoda

Rezultate smo dobili za Hopfova sparivanja $R\tilde{\otimes}H \to k$ koja su nedegenerirana u drugoj varijabli, što naravno uključuje kanonsko sparivanje $R\tilde{\otimes}R^* \to k$ i primjer Heisenbergovog udvojenja $R^*\sharp R$ za Hopfovu algebru R u $\mathrm{indVectFin}$. U dokazu sljedećeg teorema 9.3.10 smo koristili injektivnosti određenih linearnih preslikavanja $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$, koje ne bi mogle vrijediti da sparivanje nije nedegenerirano u drugoj varijabli. Ipak, dodatno su nađeni primjeri u kojima sparivanje nije nedegenerirano u drugoj varijabli.

Teorem A. *Neka su R i H unutrašnje Hopfove algebre u* $\mathrm{indproVect}$ *i neka je* $\blacktriangleleft : R\tilde{\otimes}H \to R$

desno Hopfovo djelovanje u $\mathrm{indproVect}$ *takvo da je* $\mathcal{T}_2$ *koji je definiran u napomeni 9.2.2*

$$\mathcal{T}_2\colon H \mathbin{\tilde{\otimes}} H \mathbin{\tilde{\otimes}} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \mathbin{\tilde{\otimes}} R, R),$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda$$

injekcija.

Tada ako postoji morfizam $\rho\colon R \to H \mathbin{\tilde{\otimes}} R$ *u* $\mathrm{indproVect}$ *za koji vrijedi uvjet:*

$$\mu_R \circ (\blacktriangleleft \mathbin{\tilde{\otimes}} \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_R \mathbin{\tilde{\otimes}} \rho) = \mu_R \circ \tau_{R,R}$$

to jest

$$r' \blacktriangleleft \rho(r) = rr', \text{ za sve } r, r' \in R,$$

vrijedi da je ρ *lijevo kodjelovanje i* R *je uz djelovanje* $\blacktriangleleft$ *i kodjelovanje* ρ *unutrašnja pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad* H *u* $\mathrm{indproVect}$*. Nadalje, taj* ρ *je jedinstveno takvo kodjelovanje.*

Injektivnost linearnog preslikavanja $\mathcal{T}_2$ dokazali smo

(i) u slučaju Hopfovog sparivanja R i H iz potkategorija $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$: koristeći složeniju propoziciju s anihilatorima, uz dodatne dovoljne uvjete na koprodukt Hopfove algebre R,

(ii) u slučaju Hopfovog sparivanja R iz $\mathrm{indVectFin}$ sa R^* iz $\mathrm{proVectFin}$ (Heisenbergovo udvojenje $R^*\sharp R$), te općenitije sa H iz $\mathrm{proVect}$: koristeći jednostavnije dokaze s uvedenim kanonskim elementima.

9.1.1 Hopfove algebre iz potkategorija $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$

Opišimo sada prvi slučaj. Dokazan je sljedeći teorem.

Teorem B. *Neka je* R *unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVect}$*,* H *unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je* $\langle\,,\,\rangle\colon R \mathbin{\tilde{\otimes}} H \to k$ *Hopfovo sparivanje među njima u* $\mathrm{indproVect}$ *koje je nedegenerirano u drugoj varijabli. Neka* R *ima filtrirajuće komponente* $\{R_n\}_{n\in\boldsymbol{N_0}}$ *i skup generatora kao vektorskog prostora za koji vrijedi:*

(Δ_0) *za svaki generator* $r \in R_0$ *postoji* $r' \in R$ *koji nije djelitelj nule takav da je* $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$

(Δ_n) *za sve* $n \in \mathbb{N}$*, za svaki generator* $r \in R_n$ *postoji* $r' \in R$ *koji nije djelitelj nule takav da je* $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in R_{n-1} \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$

Tada ako postoji morfizam $\rho\colon R \to H \tilde{\otimes} R$ *u* indproVect *za koji je*

$$r' \blacktriangleleft \rho(r) = rr', \text{ za sve } r, r' \in R,$$

onda je ρ *lijevo kodjelovanje i* R *je uz djelovanje* $\blacktriangleleft$ *i kodjelovanje* ρ *unutrašnja pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad* H *u* indproVect. *Nadalje, taj* ρ *je, ako postoji, jedinstven takav morfizam i jedinstveno takvo kodjelovanje.*

Zamijetimo su zahtjevi (Δ_0) i (Δ_n) poopćenja sljedećih zahtjeva:

(Δ_0') $R_0 \cong k$

(Δ_n') za sve $n \in \mathbb{N}$, za svaki $r \in R_n$, vrijedi $\Delta_R(r) - r \otimes 1_R \in R_{n-1} \otimes R$

koji su zadovoljeni naprimjer za univerzalnu omotačku algebru $U(\mathfrak{g})$ i za povezane strogo filtrirane Hopfove algebre, te poopćenja sljedećih zahtjeva:

(Δ_0'') za svaki generator $r \in R_0$ postoji $r' \in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) = r \otimes r'$

(Δ_n'') za sve $n \in \mathbb{N}$, za svaki generator $r \in R_n$ postoji $r' \in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in R_{n-1} \otimes R$

za koje će se pokazati da su zadovoljeni naprimjer za $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, uz standardnu filtraciju koja je čini objektom u indVect koji nije unutar indVectFin.

9.1.1. Pregled pomoćnih rezultata. Dokazano je da svaki morfizam $A \tilde{\otimes} B \to C$ u indproVect definira linearno preslikavanje $B \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(A, C)$, što je korišteno za definiciju potrebnih linearnih preslikavanja koja slijede. Koristeći filtriranu bazu od R i formalnu bazu od H pokaže se da su, ako je sparivanje nedegenerirano u drugoj varijabli, linearna preslikavanja definirana u napomeni 9.2.2:

$$\mathcal{S}_1\colon H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R, R), \quad \mathcal{S}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle r_\lambda,$$

$$\mathcal{S}_2\colon H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{S}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle \langle d', h'_\lambda \rangle r_\lambda$$

injekcije. To je učinjeno u pododjeljku 9.3.1. Zatim se koriste zahtjevi (Δ_0) i (Δ_n) da bi se preslikavanja $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ na nekim pogodnim kvocijentima prikazala pomoću injekcija $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ i na temelju toga dokazala injektivnost $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. To je učinjeno u pododjeljcima 9.3.2 i 9.3.3, gdje su pripremne propozicije i glavna složenija propozicija s anihilatorima koja pokazuje injektivnost linearnog preslikavanja $\mathcal{T}_2$.

9.1.2 Heisenbergovo udvojenje Hopfove algebre iz $\mathrm{indVectFin}$

Opišimo sada drugi slučaj. Heisenbergovo udvojenje, poludirektni produkt $A^*\sharp A$, definirano je za konačno-dimenzionalne Hopfove algebre A. Ovdje će Heisenbergovo udvojenje biti definirano općenitije za sve Hopfove algebre R koje su filtrirane konačno-dimenzionalnim komponentama, tj. objekti u $\mathrm{indVectFin}$. Naime, za takve Hopfove algebre vrijedi da je njihov dual R^* unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$ i da je njihovo sparivanje morfizam u $\mathrm{indproVect}$, vidi odjeljak 9.4.

Za Hopfove algebre R iz $\mathrm{indVectFin}$ koje imaju bijektivan antipod, dokazali smo da je linearno preslikavanje $\mathcal{T}_2$ injektivno i zatim pronašli jednostavan nužan i dovoljan uvjet za postojanje preslikavanja ρ iz teorema A.

Teorem C. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ s bijektivnim antipodom. Tada postoji kodjelovanje $\rho\colon R \to R^* \otimes R$ takvo da je R nad R^* desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje $\blacktriangleleft : R\otimes R^* \to R$ ako i samo ako je orbita svakog elementa $Y \in R$ po adjungiranim djelovanjima od R potprostor konačne dimenzije. To kodjelovanje je tada jedinstveno.*

Nakon toga je u primjerima pokazano da uvjete teorema zadovoljavaju univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ konačno-dimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, što će voditi na skalarno proširenje $U(\mathfrak{g})^*\sharp U(\mathfrak{g})$ koje se može kao algebra poistovjetiti s algebrom formalnih diferencijalnih operatora $J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g})$. Također, dokazano je da je uvjet teorema zadovoljen za kvantnu grupu $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ promatranu kao Hopfovu algebru u $\mathrm{indVectFin}$.

9.1.2. Pregled pomoćnih rezultata. Ovdje upravo konačna-dimenzionalnost komponenata od R i bijektivnost antipoda (koja je inače zadovoljena za sve konačno-dimenzionalne Hopfove algebre) omogućava definiciju određenih kanonskih elemenata i njihovu upotrebu. Naime, pokaže se da je moguće definirati kanonske elemente

$$\mathcal{K},\ \mathcal{L}\colon\ \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}$$

koristeći filtriranu bazu $(D_\alpha)_\alpha$ od R i njoj dualnu formalnu bazu $(e_\alpha)_\alpha$ od R^*, koja ne bi bila formalna baza da nisu komponente konačno-dimenzionalne. Oni su unutar skupa većeg od $R^* \tilde{\otimes} R$, ali opet unutar kategorije, jer je taj skup jednak tenzorskom produktu $R^* \tilde{\otimes} \underline{R} = R^* \hat{\otimes} \underline{R}$, gdje je sa $\underline{R}$ označeno da je na R zaboravljena filtracija. Kanonski element $\mathcal{K}$ i njegov inverz $\hat{\mathcal{S}}_1$ su

$$\mathcal{K}\colon\ \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \qquad \mathcal{K}(\phi) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$$

$$\hat{\mathcal{S}}_1\colon R^* \hat{\otimes} R \to \mathrm{End}(R), \qquad \hat{\mathcal{S}}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \mapsto \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle r_\lambda$$

te kanonski element $\mathcal{L}$ i njegov inverz $\hat{\mathcal{T}}_1$

$$\mathcal{L}\colon \operatorname{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \qquad \mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_1\colon R^* \hat{\otimes} R \to \operatorname{End}(R), \qquad \hat{\mathcal{T}}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \mapsto \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda.$$

Cilj je pomoću kanonskih elemenata dokazati da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ injekcije. U oba slučaja se lako dokaže da je $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{K} = \mathrm{id}_{\operatorname{End}(R)}$ i $\hat{\mathcal{T}}_1 \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_{\operatorname{End}(R)}$, ali teže da su obratne kompozicije identitete, to jest da su $\hat{\mathcal{S}}_1$ i $\hat{\mathcal{T}}_1$ injekcije. Zatim se na analogan način dokaže pomoću dvostrukog kanonskog elementa $\mathcal{M}$ da je $\hat{\mathcal{T}}_2$ injekcija. Pritom su $\hat{\mathcal{S}}_1$, $\hat{\mathcal{T}}_1$ proširenja reprezentacija $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{T}_1$ (dviju struktura algebre na) $R^* \otimes R$ na veći tenzorski produkt $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ koji je i dalje u kategoriji, ali nije algebra u kategoriji. Analogno je $\hat{\mathcal{T}}_2$ proširenje od $\mathcal{T}_2$. Tako se pokaže da je $\mathcal{T}_2$ injekcija, što je jedan uvjet teorema A. Dalje se koristeći opet kanonske elemente pokaže da se preslikavanje

$$\mathrm{Lu} := \mathcal{L}(\phi_Y)\colon R \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \qquad \phi_Y\colon Z \mapsto YZ$$

korestringira do traženog morfizma $\rho\colon R \to R^* \tilde{\otimes} R$ točno onda kad su orbite elemenata od R po adjungiranom djelovanju konačne dimenzije, čime se zadovolji drugi uvjet teorema A. Pritom ta veza s adjungiranim djelovanjem dolazi iz formule

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathcal{L}(\phi_Y))\colon Z \mapsto S^{-1}(Z_{(2)}) Y Z_{(1)}.$$

9.1.3 Hopfove algebre iz potkategorija $\mathrm{indVectFin}$ i $\mathrm{proVect}$

Sada opišimo općenitiju verziju drugog slučaja sa H u $\mathrm{proVect}$ umjesto R^*, koji se nadovezuje na prethodno.

Teorem D. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ s bijekivnim antipodom. Neka je H unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVect}$ u Hopfovom sparivanju $\langle\,,\rangle\colon R \otimes H = R \tilde{\otimes} H \to k$ s R u $\mathrm{indproVect}$ koje je nedegenerirano u drugoj varijabli. Tada postoji kodjelovanje $\rho\colon R \to H \sharp R$ uz koje je R nad H pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra sa sparivanjem induciranim djelovanjem $\blacktriangleleft\colon R \otimes H \to R$ ako i samo ako je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H \sharp R \subseteq R^* \sharp R$.*

Na temelju ovog teorema će slijediti da je $U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g})$ skalarno proširenje nad $U(\mathfrak{g})$ za određenu Hopfovu algebru $U(\mathfrak{g})^{min} \subseteq U(\mathfrak{g})^*$ koju dobijemo ekplicitno izračunavši generatore i strukturna preslikavanja najmanje Hopfove algebre $H \subseteq U(\mathfrak{g})^*$ takve da je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H \sharp R$. Također, budući da će iz tih eksplicitnih računa biti jasno da je $U(\mathfrak{g})^{min}$ Hopfova algebra u kategoriji $\mathrm{Vect} \subseteq \mathrm{proVect}$, direktno će slijediti da je i $U(\mathfrak{g})^\circ \sharp U(\mathfrak{g})$ skalarno proširenje nad $U(\mathfrak{g})$ za reducirani dual $U(\mathfrak{g})^\circ \subseteq U(\mathfrak{g})^*$.

Također, imamo i geometrijski definirane primjere $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g})$, kod kojih pak sparivanje nije nedegenerirano u drugoj varijabli, već je činjenica da je $U(\mathfrak{g})$ nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ i nad $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ Yetter-Drinfeldova modulna algebra dokazana direktno koristeći nađeni opis generatora i strukturnih preslikavanja tih Hopfovih algebri.

Također, za $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ je analizirano kako se mogu upotrijebiti kanonski elementi čak i kada $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ gledamo sa standardnom filtracijom, kao objekt u $\mathrm{indVect}$ koji nije u $\mathrm{indVectFin}$.

9.2 Reprezentacije

Propozicija 9.2.1. *Neka je $f\colon A\tilde{\otimes}B\to C$ morfizam u* $\mathrm{indproVect}$. *Tada je za svaki $b\in B$ linearno preslikavanje $\mathcal{T}(b)\colon A\to C$ definirano sa: $\mathcal{T}(b)(a)=f(a\otimes b)$ morfizam u* $\mathrm{indproVect}$. *Dakle, morfizam $f\colon A\tilde{\otimes}B\to C$ u* $\mathrm{indproVect}$ *definira linearno preslikavanje*

$$\mathcal{T}\colon B\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(A,C).$$

Za formalnu sumu $\sum_\lambda b_\lambda=b$ u B i $a\in A$ vrijedi da je $\sum_\lambda(\mathcal{T}(b_\lambda)(a))$ formalna suma u C i

$$\mathcal{T}(b)(a)=\mathcal{T}(\sum_\lambda b_\lambda)(a)=\sum_\lambda(\mathcal{T}(b_\lambda)(a))$$

pa je, ako je B tenzorski produkt objekata, preslikavanje $\mathcal{T}$ jedinstveno određeno svojom vrijednosti na jednostavnim tenzorima.

Analogno je za svaki $a\in A$ definiran morfizam $B\to C$ u $\mathrm{indproVect}$ *čime je definirano linearno preslikavanje $A\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(B,C)$ i ono je određeno svojim vrijednostima na jednostavnim tenzorima.*

Dokaz. Neka su komponente od A, B, C redom $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_j\}_{j\in J}$, $\{C_k\}_{k\in K}$. Lako se vidi da je $\mathcal{T}(b)$ zaista morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Naime, za svaki $i\in I$, $j\in J$ postoji filtrirajuća komponenta C_k takva da postoji morfizam $f_{i,j}\colon A_i\hat{\otimes}B_j\to C_k$ u $\mathrm{proVect}$ koji je komponenta morfizma $f\colon A\tilde{\otimes}B\to C$. Budući da se b nalazi u nekoj filtrirajućoj komponenti B_j, za svaki i postoji k takav da postoji linearno preslikavanje $\mathcal{T}_i(b)\colon A_i\to C_k$, $\mathcal{T}_i(b)(a)=f_{i,j}(a\otimes b)$, za koje vrijedi $\mathcal{T}(b)\circ\iota_i^A=\iota_k^C\circ\mathcal{T}_i(b)$.

Preslikavanje $f_{i,j}$ je morfizam u $\mathrm{proVect}$ pa distribuira po formalnim sumama, dakle i formalnim sumama oblika $(\sum_\lambda a_\lambda)\otimes b=\sum_\lambda(a_\lambda\otimes b)$ (tenzorski produkt formalnih suma je formalna suma po lemi 5.4.7) iz čega slijedi da linearno preslikavanje $\mathcal{T}_i(b)$ distribuira po formalnim sumama $\sum_\lambda a_\lambda$, tj. da je ono također morfizam u $\mathrm{proVect}$. Time je pokazano da je linearno preslikavanje $\mathcal{T}(b)$ morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Vrijedi

$$\mathcal{T}(\sum_\lambda b_\lambda)(a)=f(a\otimes(\sum_\lambda b_\lambda))=f(\sum_\lambda a\otimes b_\lambda)=\sum_\lambda f(a\otimes b_\lambda)=\sum_\lambda(\mathcal{T}(b_\lambda)(a))$$

jer je tenzorski produkt formalnih suma formalna suma i f distribuira po formalnim sumama. $\square$

9.2.2. Po propoziciji 9.2.1 desno Hopfovo djelovanje $\blacktriangleleft\colon R\tilde{\otimes} H \to R$ Hopfove algebre H u $\mathrm{indproVect}$ na Hopfovu algebru R u $\mathrm{indproVect}$ definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{T}_0\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{T}_0(h)\colon d \mapsto d \blacktriangleleft h$$

i desno djelovanje $T_1 := \blacktriangleleft\colon R\tilde{\otimes}(H\sharp R) \to R$ definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{T}_1\colon H\sharp R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{T}_1(\sum_\lambda h_\lambda \sharp r_\lambda)\colon d \mapsto d \blacktriangleleft (\sum_\lambda h_\lambda\sharp r_\lambda) = \sum_\lambda (d\blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda.$$

Budući da $H\sharp R$ djeluje na R, preslikavanje $\mathcal{T}_1$ je antihomomorfizam algebri.

Analogno, sparivanje $\langle\ ,\ \rangle\colon R\tilde{\otimes} H \to k$ objekata R i H u $\mathrm{indproVect}$ definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_0\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,k), \quad \mathcal{S}_0(h)\colon d \mapsto \langle d, h\rangle$$

i morfizam S_1 u $\mathrm{indproVect}$ dan kompozicijom $R\tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \xrightarrow{\langle\,,\rangle\otimes \mathrm{id}_R} k\tilde{\otimes} R \longrightarrow R$ definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_1\colon H\tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{S}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \mapsto \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle r_\lambda.$$

Po toj propoziciji preslikavanja su dobro definirana formulama s formalnim sumama s desne strane i određena su svojim vrijednostima na jednostavnim tenzorima.

Dodatno ćemo definirati primjenom iste propozicije 9.2.1 dva preslikavanja koja će nam biti potrebna u dokazu glavnog teorema 9.3.10.

Morfizam T_2 u $\mathrm{indproVect}$ dan kompozicijom

$$R\tilde{\otimes} R\tilde{\otimes} H\tilde{\otimes} H\sharp R \xrightarrow{\mathrm{id}_R\tilde{\otimes}\tau_{R,H}\tilde{\otimes}\mathrm{id}_{H\sharp R}} R\tilde{\otimes} H\tilde{\otimes} R\tilde{\otimes} H\sharp R \xrightarrow{\blacktriangleleft\tilde{\otimes}\blacktriangleleft} R\tilde{\otimes} R \xrightarrow{\mu_R} R$$

na jednostavnim tenzorima je

$$T_2\colon d\otimes d'\otimes h\otimes h'\otimes r \mapsto (d\blacktriangleleft h)(d'\blacktriangleleft h'\sharp r) = (d\blacktriangleleft h)(d'\blacktriangleleft h')r$$

i definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{T}_2\colon H\tilde{\otimes} H\sharp R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R\tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes r_\lambda)\colon d\otimes d' \mapsto \sum_\lambda (d\blacktriangleleft h_\lambda)(d'\blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda.$$

Pritom se lako vidi da iz definicije preslikavanja T_2 osim svojstva

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes r_\lambda)(d\otimes d') = \sum_\lambda (d\blacktriangleleft h_\lambda)(d'\blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda$$

imamo i svojstva:

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda(\sum_\mu h_{\lambda\mu}\otimes h'_{\lambda\mu})\otimes r_\lambda)(d\otimes d') = \sum_\lambda(\sum_\mu(d\blacktriangleleft h_{\lambda\mu})(d'\blacktriangleleft h'_{\lambda\mu}))r_\lambda$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes(\sum_\mu h'_{\lambda\mu}\otimes r_{\lambda\mu}))(d\otimes d') = \sum_\lambda(d\blacktriangleleft h_\lambda)(\sum_\mu(d'\blacktriangleleft h'_{\lambda\mu})r_{\lambda\mu})$$

Morfizam S_2 u $\mathrm{indproVect}$ dan kompozicijom

$$R\tilde{\otimes}R\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}R\xrightarrow{\mathrm{id}_R\tilde{\otimes}\tau_{R,H}\tilde{\otimes}\mathrm{id}_H\tilde{\otimes}\mathrm{id}_R}R\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}R\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}R\xrightarrow{\langle,\rangle\tilde{\otimes}\langle,\rangle\tilde{\otimes}\mathrm{id}_R}k\tilde{\otimes}R\longrightarrow R$$

na jednostavnim tenzorima je

$$S_2\colon d\otimes d'\otimes h\otimes h'\otimes r\mapsto\langle d,h\rangle\langle d',h'\rangle r$$

i definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_2\colon H\tilde{\otimes}H\tilde{\otimes}R\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R\tilde{\otimes}R,R),$$

$$\mathcal{S}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes r_\lambda)\colon d\otimes d'\mapsto\sum_\lambda\langle d,h_\lambda\rangle\langle d',h'_\lambda\rangle r_\lambda.$$

Slike po preslikavanjima $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{T}_2$ dovoljno je zadati na jednostavnim tenzorima jer je dokazano da su te slike morfizmi u $\mathrm{indproVect}$ (dakle, mogu se proširiti na cijelu domenu $R\tilde{\otimes}R$ koristeći zapise pomoću formalnih suma i to je dobro definirano, tj. neovisno o izboru formalne sume).

U sljedećih nekoliko propozicija dokazat ćemo da vrijedi: (i) ako je $\mathcal{S}_0$ injekcija, onda su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ injekcije, (ii) uz neke određene uvjete na bialgebru R u $\mathrm{indVect}$ koja je u Hopfovom sparivanju s bialgebrom H u $\mathrm{proVect}$, ako je $\mathcal{S}_0$ injekcija, onda su $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ injekcije. To ćemo onda koristiti u teoremu 9.3.10 da dokažemo jednakost nekih elemenata u H, u $H\sharp R$ i u $H\tilde{\otimes}H\sharp R$.

9.3 Injektivnost reprezentacija

9.3.1 Injektivnost $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$

Propozicija 9.3.1. *Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ formalna baza objekta H u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je $(D_\beta)_{\beta\in B}$ filtrirana baza objekta R u* $\mathrm{indVect}$. *Tada se svaki element od $H\tilde{\otimes}R$ može zapisati na jedinstven način kao formalna suma $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B}a_{\alpha\beta}e_\alpha\otimes D_\beta$.*

Dokaz. Neka filtracija na R ima komponente $(\{R_i\}_{i\in I})$. Skup $(D_\beta)_{\beta\in B}$ je filtrirana baza od R, pa postoji kofinalni podskup K od I takav da je za svaki $i \in K$ praslika tog skupa po injekciji $\iota_i^R\colon R_i \to R$, $\iota_i^R(\{D_\beta \mid \beta \in B\}) =: \{D_\beta \mid \beta \in B_i\}$, baza filtrirajuće komponente R_i, objekta u Vect. Budući da je R_i trivijalno kofiltriran vektorski prostor kao objekt u $\mathrm{proVect}$, to je $\{D_\beta \mid \beta \in B_i\}$ njegova formalna baza, pa po propoziciji 3.3.14 slijedi da je $(e_\alpha \otimes D_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B_i}$ formalna baza od filtrirajuće komponente $H \hat{\otimes} R_i$, objekta u $\mathrm{proVect}$.

Svaki element t od $H \tilde{\otimes} R$ pripada nekoj komponenti $H \hat{\otimes} R_i$. Zbog kofinalnosti K u I, komponentu možemo odabrati tako da i bude u K. Element t unutar komponente $H \hat{\otimes} R_i$ može se tada po propoziciji 3.3.10 zapisati na jedinstven način kao formalna suma u toj bazi. Ako uzmemo zapise u dvije različite komponente $H \hat{\otimes} R_i$ i $H \hat{\otimes} R_j$, pri čemu komponente ne moraju imati indekse iz skupa K, lako se vidi da zbog kofinalnosti skupa K postoji komponenta $H \hat{\otimes} R_k$ sa $k \in K$ u kojoj će slike tih dviju formalnih suma po neprekidnim veznim preslikavanjima (koja su inkuzije) po prethodnome biti ista formalna suma. Dakle, zapis je jedinstven. $\square$

Propozicija 9.3.2. *Neka je R objekt u* $\mathrm{indVect}$*, H objekt u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je* $\langle\,,\,\rangle\colon R \tilde{\otimes} H \to k$ *sparivanje u* $\mathrm{indproVect}$. *Neka su $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ linearna preslikavanja definirana u napomeni 9.2.2:*

$$\mathcal{S}_0\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,k), \quad \mathcal{S}_0(h)(d) = \langle d, h\rangle,$$

$$\mathcal{S}_1\colon H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{S}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle r_\lambda,$$

$$\mathcal{S}_2\colon H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{S}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle\langle d', h'_\lambda\rangle r_\lambda.$$

Tada vrijedi sljedeće: ako je $\mathcal{S}_0$ injekcija, tj. sparivanje je nedegenerirano u drugoj varijabli, onda su i $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ injekcije.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_0$ injekcija. Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ formalna baza objekta H u $\mathrm{proVect}$ i neka je $(D_\beta)_{\beta\in B}$ filtrirana baza objekta R u $\mathrm{indVect}$. One postoje po propozicijama 3.3.13 i 4.3.2.

Dokazujemo da je $\mathcal{S}_1$ injekcija. Neka je $t \neq 0$ element od $H \tilde{\otimes} R$. On se može zapisati kao formalna suma oblika $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes D_\beta$ po propoziciji 9.3.1. Po lemi 5.4.7 o računanju s formalnim sumama: (a) grupiranjem sumanada imamo da je za svaki β izraz $\sum_{\alpha\in A} a_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes D_\beta$ formalna suma, (b) budući da je za svaki β element $D_\beta \neq 0$, slijedi da je za svaki β izraz $\sum_{\alpha\in A} a_{\alpha\beta} e_\alpha$ formalna suma neke vrijednosti v_β i vrijedi

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes D_\beta = \sum_\beta (\sum_\alpha a_{\alpha\beta} e_\alpha) \otimes D_\beta = \sum_\beta v_\beta \otimes D_\beta.$$

Sada odaberemo neki $d \in R$ takav da je barem jedan $\langle d, v_\beta\rangle \neq 0$. Takav postoji jer u protivnom bi, jer je $\mathcal{S}_0$ injekcija, svaki v_β bio jednak 0 pa i t jednak 0. Sada imamo

$$\mathcal{S}_1(t)(d) = \mathcal{S}_1(\sum_\beta v_\beta \otimes D_\beta)(d) = \sum_\beta \langle d, v_\beta\rangle D_\beta$$

što je zbog linearne nezavisnosti $\{D_\beta\}_\beta$ različito od 0. Dokazali smo da je $\mathcal{S}_1$ injekcija.

Sada dokazujemo da je $\mathcal{S}_2$ injekcija. Zaključivanje slijedi slično kao za $\mathcal{S}_1$ koristeći iste propozicije i leme. Neka je $t' \neq 0$ element od $H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R$. On se može zapisati kao formalna suma oblika $\sum_{(\gamma,\alpha,\beta)\in A\times A\times B} a_{\gamma\alpha\beta}\, e_\gamma \otimes e_\alpha \otimes D_\beta$. Grupiranjem sumanada imamo da je za svaki (α, β) izraz $\sum_{\gamma\in A} a_{\gamma\alpha\beta}\, e\gamma \otimes e_\alpha \otimes D_\beta$ formalna suma. Budući da je za svaki (α, β) element $e_\alpha \otimes D_\beta \neq 0$, slijedi da je za svaki (α, β) izraz $\sum_{\gamma\in A} a_{\gamma\alpha\beta} e_\gamma$ formalna suma neke vrijednosti $v_{\alpha\beta}$ i vrijedi

$$\sum_{(\gamma,\alpha,\beta)\in A\times A\times B} a_{\gamma\alpha\beta}\, e\gamma \otimes e_\alpha \otimes D_\beta = \sum_{\alpha,\beta}(\sum_\gamma a_{\gamma\alpha\beta}\, e_\gamma) \otimes e_\alpha \otimes D_\beta = \sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha\beta} \otimes e_\alpha \otimes D_\beta.$$

Sada odaberemo neki $d' \in R$ takav da je barem jedan $\langle d', v_{\alpha\beta}\rangle \neq 0$. Takav postoji jer u protivnom bi, jer je $\mathcal{S}_0$ injekcija, svaki $v_{\alpha\beta}$ bio jednak 0 pa i t' jednak 0. Budući da je $\langle\,,\,\rangle \tilde{\otimes} \mathrm{id}_H \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R$ morfizam u $\mathrm{indproVect}$, izraz

$$\sum_{\alpha,\beta}\langle d', v_{\alpha\beta}\rangle\, e_\alpha \otimes D_\beta$$

je također formalna suma. Po propoziciji 9.3.1, zapis je jedinstven, pa slijedi da je ta formalna suma vrijednosti $t \neq 0$. Budući da je $\mathcal{S}_1$ injekcija, postoji $d \in R$ takav da je $\mathcal{S}_1(t)(d) \neq 0$ pa je

$$\mathcal{S}_2(t')(d' \otimes d) = \sum_{\alpha,\beta}\langle d', v_{\alpha\beta}\rangle\langle d, e_\alpha\rangle D_\beta = \mathcal{S}_1(t)(d) \neq 0.$$

Dokazali smo da je $\mathcal{S}_2$ injekcija. $\square$

Napomena 9.3.3. U definiciji linearnog preslikavanja $\mathcal{S}_2$ i dokazu propozicije zapravo nije bitno da su sparivanja jednaka i da R sudjeluje u njima, pa bi se analogno mogla dokazati i općenitije tvrdnje da je

$$\mathcal{S}'_2\colon H_1 \tilde{\otimes} H_2 \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R_1 \tilde{\otimes} R_2, R),$$
$$\mathcal{S}'_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle_1 \langle d', h'_\lambda\rangle_2\, r_\lambda$$

dobro definirano linearno preslikavanje i da je injekcija čim su sparivanja $\langle\,,\,\rangle_1\colon R_1 \tilde{\otimes} H_1 \to k$ i $\langle\,,\,\rangle_2\colon R_2 \tilde{\otimes} H_2 \to k$ nedegenerirana u drugoj varijabli, te da je

$$\mathcal{S}'_1\colon H_1 \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R_1, R),$$
$$\mathcal{S}'_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle_1\, r_\lambda$$

dobro definirano linearno preslikavanje i da je injekcija čim je sparivanje $\langle\,,\,\rangle_1\colon R_1 \tilde{\otimes} H_1 \to k$ nedegenerirano u drugoj varijabli.

9.3.2 Pripremne propozicije

Propozicija 9.3.4. *Neka su V i W objekti u* $\mathrm{proVect}$ *i neka su $V' \leqslant V$ i $W' \leqslant W$ njihovi potpuni potprostori. Tada je presjek potpunih potprostora $V' \hat{\otimes} W$ i $V \hat{\otimes} W'$ od $V \hat{\otimes} W$ jednak $V' \hat{\otimes} W'$.*

Dokaz. Jezgra od $V' \hat{\otimes} W \hookrightarrow V \hat{\otimes} W \to V \hat{\otimes}(W/W')$ je jezgra tenzorskog produkta $\iota_{V'} \hat{\otimes} q_{W'}$ monomorfizma i kvocijentnog preslikavanja, dakle, po propoziciji 3.4.23, ona je jednaka

$$V' \hat{\otimes} \operatorname{Ker} q_{W'} = V' \hat{\otimes} W'.$$

S druge strane, budući da je kvocijent po potpunom potprostoru u $\mathrm{proVect}$ koujednačitelj po propoziciji 3.4.12 i da po korolaru 3.4.4 u $\mathrm{proVect}$ koujednačitelj komutira s tenzorskim produktom, to je $V \hat{\otimes}(W/W') \cong (V \hat{\otimes} W)/(V \hat{\otimes} W')$ i desni trokut na sljedećem dijagramu je komutativan.

$$\begin{tikzcd}
 & & V \hat{\otimes}(W/W') \arrow[dd, "\cong"] \\
V \hat{\otimes} W' \arrow[r, hook, shift left, "\mathrm{id}_V \hat{\otimes} \iota_{W'}"] \arrow[r, shift right, "0"'] & V \hat{\otimes} W \arrow[ur, "\mathrm{id}_V \hat{\otimes} q_{W'}"] \arrow[dr, "q_{V \hat{\otimes} W'}"'] & \\
V' \hat{\otimes} W \arrow[ur, hook, bend right, "\iota_{V'} \hat{\otimes} \mathrm{id}_W"'] & & (V \hat{\otimes} W)/(V \hat{\otimes} W')
\end{tikzcd}$$

Jezgra preslikavanja $V' \hat{\otimes} W \hookrightarrow V \hat{\otimes} W \to (V \hat{\otimes} W)/(V \hat{\otimes} W')$ je skup svih elemenata od $V' \hat{\otimes} W$ koji se preslikaju unutar jezgre $V \hat{\otimes} W'$ kvocijentnog preslikavanja $q_{V \hat{\otimes} W'}$, dakle, jezgra je

$$(V' \hat{\otimes} W) \bigcap (V \hat{\otimes} W').$$

Jezgre su jednake, dakle vrijedi $V' \hat{\otimes} W' = (V' \hat{\otimes} W) \bigcap (V \hat{\otimes} W')$. $\square$

Propozicija 9.3.5. *Neka je R objekt u* $\mathrm{indVect}$, *H objekt u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je $\langle\, , \rangle \colon R \tilde{\otimes} H \to k$ sparivanje među njima u* $\mathrm{indproVect}$. *Tada za svaku filtrirajuću komponentu R_n od R vrijedi da je $\operatorname{Anih}_H(R_n) := \{h \in H \mid \langle r, h\rangle = 0,\ \forall r \in R_n\}$ potpun potprostor od H. Nadalje, postoji jedinstveno preslikavanje*

$$\langle\, , \rangle_n \colon R_n \hat{\otimes}(H/\operatorname{Anih}_H(R_n)) \to k$$

takvo da je sljedeći dijagram komutativan, ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$ *i nedegenerirano je u* *drugoj varijabli.*

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} H \arrow[r, "\langle , \rangle"] & k \arrow[d, equal] \\
R_n \hat{\otimes} H \arrow[u, hook] \arrow[r, "\langle , \rangle"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{R_n} \hat{\otimes} \pi_n"'] & k \arrow[d, equal] \\
R_n \hat{\otimes}(H/\operatorname{Anih}_H(R_n)) \arrow[r, "\langle , \rangle_n"] & k
\end{tikzcd}$$

Ovdje je s π_n označeno kvocijentno preslikavanje $H \to H/\operatorname{Anih}_H(R_n)$, morfizam u $\mathrm{proVect}$.

Dokaz. (i) Dokazujemo da je $\operatorname{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od H za svaku filtrirajuću komponentu R_n. Preslikavanje $R_n \hat{\otimes} H \to k$ u drugom retku je komponenta morfizma $\langle \; , \; \rangle$ u $\mathrm{indproVect}$, dakle morfizam u $\mathrm{proVect}$. Budući da tada to preslikavanje distribuira po formalnim sumama, slijedi da $\operatorname{Anih}(R_n)$ sadrži sve formalne sume čiji su sumandi njegovi elementi, pa je po propoziciji 3.4.8 potpun potprostor od H.

(ii) Dokazujemo da je dobro definirano preslikavanje

$$\langle \; , \; \rangle_n \colon R_n \hat{\otimes}(H/\operatorname{Anih}_H(R_n)) \to k$$

u najdonjem retku na dijagramu, da je ono morfizam u $\mathrm{proVect}$ i da je nedegenerirano u drugoj varijabli. Budući da je $\operatorname{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od H, slijedi da je $R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od $R_n \hat{\otimes} H$. Zbog toga što je $R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_n)$ podskup jezgre preslikavanja $R_n \hat{\otimes} H \to k$ u drugom retku i potpun potprostor od $R_n \hat{\otimes} H$, po propoziciji 3.4.14 postoji jedinstveno preslikavanje $(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_n)) \to k$ u trećem retku na sljedećem dijagramu takvo da je dijagram komutativan i ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$.

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} H \arrow[r, "\langle , \rangle"] & k \arrow[d, equal] \\
R_n \hat{\otimes} H \arrow[u, hook] \arrow[r, "\langle , \rangle"] \arrow[d] & k \arrow[d, equal] \\
(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}_H(R_n)) \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

Po korolaru 3.4.4 koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$ komutira s tenzorskim produktom, pa je

$$(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_n)) \cong R_n \hat{\otimes}(H/\operatorname{Anih}(R_n))$$

i kvocijentno preslikavanje $R_n \hat{\otimes} H \to (R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_n))$ možemo zamijeniti s

$$\mathrm{id}_{R_n} \hat{\otimes} \pi_n \colon R_n \hat{\otimes} H \to R_n \hat{\otimes}(H/\operatorname{Anih}(R_n)).$$

$\square$

Propozicija 9.3.6. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVect}$*, H unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je $\langle\,,\,\rangle\colon R\tilde{\otimes}H \to k$ Hopfovo sparivanje među njima u* $\mathrm{indproVect}$. *Neka R ima filtrirajuće komponente $\{R_n\}_{n\in\mathbf{N_0}}$ i neka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\Delta_R(R_n) \subseteq R_n \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R.$$

Za svaki n je tada $\mathrm{Anih}_H(R_n)$ potpun potprostor od H te postoji jedinstveno preslikavanje

$$\blacktriangleleft_n\colon R_n \hat{\otimes}(H/\,\mathrm{Anih}_H(R_n)) \to R_m,$$

do na izbor kodomene R_m, takvo da je sljedeći dijagram komutativan i ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$.

$$\begin{tikzcd}
R\tilde{\otimes}H \arrow[rr, "\blacktriangleleft"] & & R \\
R_n\hat{\otimes}H \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\blacktriangleleft"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{R_n}\hat{\otimes}\pi_n"'] & & R_m \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] \\
R_n\hat{\otimes}(H/\,\mathrm{Anih}_H(R_n)) \arrow[rr, "\blacktriangleleft_n"] & & R_m
\end{tikzcd}$$

Ovdje je $\blacktriangleleft\colon R\tilde{\otimes}H \to R$ desno djelovanje definirano u 6.4.4. S π_n je označeno kvocijentno preslikavanje $H \to H\big/\,\mathrm{Anih}_H(R_n)$, morfizam u $\mathrm{proVect}$.

Dokaz. U propoziciji 9.3.5 dokazano je da je $\mathrm{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od H za svaku filtrirajuću komponentu R_n. Preslikavanje $R_n\hat{\otimes}H \to k$ u drugom retku je komponenta morfizma $\blacktriangleleft$ u $\mathrm{indproVect}$, dakle morfizam u $\mathrm{proVect}$. Dokazujemo da je dobro definirano preslikavanje

$$\blacktriangleleft_n\colon R_n\hat{\otimes}(H/\,\mathrm{Anih}_H(R_n)) \to R_m$$

u najdonjem retku na dijagramu i da je ono morfizam u $\mathrm{proVect}$. Budući da je $\mathrm{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od H, slijedi da je $R_n\hat{\otimes}\mathrm{Anih}(R_n)$ potpun potprostor od $R_n\hat{\otimes}H$. Budući da je

$$\Delta_R(R_n) \subseteq R_n \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R,$$

vrijedi da je $R_n\hat{\otimes}\mathrm{Anih}(R_n)$ podskup jezgre preslikavanja $R_n\hat{\otimes}H \to R_m$ u drugom retku na sljedećem dijagramu, komponente morfizma $\blacktriangleleft$. Naime, svaki element od $R_n\hat{\otimes}\mathrm{Anih}_H(R_n)$ možemo zapisati kao formalnu sumu $\sum_\lambda r_\lambda \otimes h_\lambda$ u kojoj je svaki h_λ u $\mathrm{Anih}_H(R_n)$ i svaki r_λ u R_n, a zbog svojstva koje ima koprodukt, za svaki r_λ je $\sum r_{\lambda(1)}\otimes r_{\lambda(2)} \in R_n\otimes R+\mathrm{Anih}_R(H)\otimes R$, pa je

$$\blacktriangleleft(\sum_\lambda r_\lambda \otimes h_\lambda) = \sum_\lambda \langle r_{\lambda(1)}, h_\lambda\rangle r_{\lambda(2)} = 0.$$

Po propoziciji 3.4.14 zbog toga postoji jedinstveno preslikavanje $(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \mathrm{Anih}(R_n)) \to R_m$ u trećem retku na sljedećem dijagramu takvo da je dijagram komutativan i ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$.

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} H \arrow[r, "\blacktriangleleft"] & R \\
R_n \hat{\otimes} H \arrow[u, hook] \arrow[r, "\blacktriangleleft"] \arrow[d] & R_m \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] \\
(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \mathrm{Anih}_H(R_n)) \arrow[r] & R_m
\end{tikzcd}$$

Po korolaru 3.4.4 koujednačitelj u $\mathrm{proVect}$ komutira s tenzorskim produktom, pa je

$$(R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \mathrm{Anih}(R_n)) \cong R_n \hat{\otimes}(H/\mathrm{Anih}(R_n))$$

i kvocijentno preslikavanje $R_n \hat{\otimes} H \to (R_n \hat{\otimes} H)/(R_n \hat{\otimes} \mathrm{Anih}(R_n))$ možemo zamijeniti s

$$\mathrm{id}_{R_n} \hat{\otimes} \pi_n \colon R_n \hat{\otimes} H \to R_n \hat{\otimes}(H/\mathrm{Anih}(R_n)).$$

$\square$

Propozicija 9.3.7. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVect}$*, H unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je $\langle\, , \rangle\colon R \tilde{\otimes} H \to k$ Hopfovo sparivanje među njima u* $\mathrm{indproVect}$. *Neka R ima filtrirajuće komponente $\{R_n\}_{n \in \mathbf{N_0}}$. Tada vrijede sljedeće dvije tvrdnje.*

Ako za $r \in R$ postoji $r' \in R$ sa svojstvom

$$\Delta_R(r) - r \otimes r' \in \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R,$$

onda za svaki $h \in H$ vrijedi $r \blacktriangleleft h = \langle r, h \rangle r'$.

Ako za $n \in \mathbb{N}$ i $r \in R_n$ postoji $r' \in R$ sa svojstvom

$$\Delta_R(r) - r \otimes r' \in R_{n-1} \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R,$$

onda za svaki $h \in \mathrm{Anih}_H(R_{n-1})$ vrijedi $r \blacktriangleleft h = \langle r, h \rangle r'$.

Ovdje je $\blacktriangleleft\colon R \tilde{\otimes} H \to R$ desno djelovanje inducirano sparivanjem definirano u 6.4.4.

Dokaz. Ako je $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$, onda za svaki $h \in H$ vrijedi

$$\sum \langle r_{(1)}, h \rangle r_{(2)} - \langle r, h \rangle r' = 0$$

to jest $r \blacktriangleleft h = \langle r, h \rangle r'$. Ako je $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in R_{n-1} \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$, onda slično za svaki $h \in \mathrm{Anih}(R_{n-1})$ vrijedi $\sum \langle r_{(1)}, h \rangle r_{(2)} - \langle r, h \rangle r' = 0$ to jest $r \blacktriangleleft h = \langle r, h \rangle r'$. $\square$

9.3.3 Injektivnost $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$

Propozicija 9.3.8. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVect}$, *H unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *i neka je $\langle\, ,\, \rangle\colon R\tilde{\otimes} H \to k$ Hopfovo sparivanje među njima u* $\mathrm{indproVect}$. *Neka su $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ linearna preslikavanja definirana u napomeni 9.2.2:*

$$\mathcal{S}_0\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,k), \quad \mathcal{S}_0(h)(d) = \langle d, h\rangle,$$

$$\mathcal{T}_0\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{T}_0(h)(d) = d \blacktriangleleft h$$

$$\mathcal{T}_1\colon H\tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R,R), \quad \mathcal{T}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda (d\blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda,$$

$$\mathcal{T}_2\colon H\tilde{\otimes} H\tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R\tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d\otimes d') = \sum_\lambda (d\blacktriangleleft h_\lambda)(d'\blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_0$ injekcija, tj. da je sparivanje nedegenerirano u drugoj varijabli. Tada vrijedi sljedeće

(a) $\mathcal{T}_0$ je injekcija, tj. djelovanje H na R je efektivno

(b) ako R ima filtrirajuće komponente $\{R_n\}_{n\in\mathbf{N_0}}$ i skup generatora od R kao vektorskog prostora za koji vrijedi:

(Δ_0) za svaki generator $r\in R_0$ postoji $r'\in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) - r\otimes r' \in \mathrm{Anih}_R(H)\otimes R$

(Δ_n) za sve $n\in\mathbb{N}$, za svaki generator $r\in R_n$ postoji $r'\in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) - r\otimes r' \in R_{n-1}\otimes R + \mathrm{Anih}_R(H)\otimes R$

onda je $\mathcal{T}_1$ injekcija, tj. djelovanje $H\sharp R$ na R je efektivno, i $\mathcal{T}_2$ je injekcija.

Dokaz. (a) Dokažimo da je $\mathcal{T}_0$ injekcija ako je $\mathcal{S}_0$ injekcija. Iz definicije djelovanja $\blacktriangleleft$ proizlazi da za sve $r\in R$ i sve $h\in H$ vrijedi

$$\langle 1_R, r\blacktriangleleft h\rangle = \langle r, h\rangle.$$

Ako je $r\blacktriangleleft h = 0$ za svaki $r\in R$, onda je i $\langle r,h\rangle = 0$ za svaki r, pa je zbog injektivnosti $\mathcal{S}_0$ nužno $h=0$.

(b) Dokažimo prvo da je $\mathcal{T}_2$ injekcija ako je $\mathcal{S}_0$ injekcija i vrijede navedena svojstva (Δ_0) i (Δ_n) koprodukta na R. Iz injektivnosti $\mathcal{T}_2$ lako će na kraju slijediti injektivnost $\mathcal{T}_1$.

Pregled cijelog dokaza da je $\mathcal{T}_2$ injekcija je u dijelu (ix) dokaza koji slijedi. Ovdje prije početka navodimo ukratko što ćemo učiniti. Za $t \in H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R$, $t = \sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda$, $t \neq 0$, pronaći ćemo $d \otimes d' \in R \tilde{\otimes} R$ i $s \in H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R$, $s = \sum_\mu g_\mu \otimes g'_\mu \otimes p_\mu$, takve da je

$$\mathcal{S}_2(t)(d \otimes d') \neq 0$$

$$\mathcal{S}_2(t)(d \otimes d') = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle \langle d', h'_\lambda \rangle r_\lambda = \sum_\mu \langle d, g_\mu \rangle \langle d', g'_\mu \rangle p_\mu = \mathcal{S}_2(s)(d \otimes d')$$

$$\mathcal{T}_2(t)(d \otimes d') = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda = \sum_\mu (d \blacktriangleleft g_\mu)(d' \blacktriangleleft g'_\mu) p_\mu = \mathcal{T}_2(s)(d \otimes d')$$

i takve da za d'', d''' koji nisu djelitelji nule i pripadaju d i d' po (Δ_0) i (Δ_1) vrijedi za svaki μ

$$d \blacktriangleleft g_\mu = \langle d, g_\mu \rangle d'', \quad d' \blacktriangleleft g'_\mu = \langle d', g'_\mu \rangle d'''$$

pa onda

$$\mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') = \sum_\mu (d \blacktriangleleft g_\mu)(d' \blacktriangleleft g'_\mu) p_\mu = \sum_\mu \langle d, g_\lambda \rangle d'' \langle d', g'_\lambda \rangle d'' p_\lambda = d'' d''' \mathcal{S}_2(s)(d \otimes d')$$

i iz toga

$$\mathcal{S}_2(s)(d \otimes d') \neq 0 \;\Rightarrow \mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') \neq 0.$$

Sada slijedi dokaz.

(i) Morfizam $S_2 \colon R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to R$ u $\mathrm{indproVect}$ definiran u 9.2.2 kao kompozicija morfizama u $\mathrm{indproVect}$ na jednostavnim tenzorima je:

$$S_2(d \otimes d' \otimes h \otimes h' \otimes r) = \langle d, h \rangle \langle d', h' \rangle r$$

i definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_2 \colon H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{S}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle \langle d', h'_\lambda \rangle r_\lambda$$

koje je injekcija jer je $\mathcal{S}_0$ injekcija, po propoziciji 9.3.2.

Za svaki (k, l, n) postoji morfizam među filtrirajućim komponentama, preslikavanje u drugom retku sljedećega dijagrama, i ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$. Jednostavna posljedica leme 9.3.5 je da je dobro definirano preslikavanje u zadnjem retku na sljedećem dijagramu i da je ono morfizam u $\mathrm{proVect}$, kao kompozicija morfizama u $\mathrm{proVect}$, te da je dijagram komutativan, zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta.

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \arrow[r, "S_2"] & R \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}_{R_k} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_l} \hat{\otimes} \pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] & R_n \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n \arrow[r, "S_2'"] & R_n
\end{tikzcd}$$

Po istoj lemi vrijedi da su odgovarajuća sparivanja

$$\langle\ ,\ \rangle_k \colon R_k \hat{\otimes} H/\operatorname{Anih}(R_k) \to k$$

$$\langle\ ,\ \rangle_l \colon R_l \hat{\otimes} H/\operatorname{Anih}(R_l) \to k$$

nedegenerirana u drugoj varijabli, pa je po napomeni 9.3.3 pripadno linearno preslikavanje (koje pripada S_2')

$$\mathcal{S}_2' \colon (H/\operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R_k \hat{\otimes} R_l, R_n)$$

injekcija. Zbog komutativnosti dijagrama za svaki $t \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$ vrijedi

$$\mathcal{S}_2(t) = \mathcal{S}_2'((\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t)).$$

(ii) Neka je $t \in H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R$ proizvoljan element različit od 0. Postoji $n \in \mathbb{N}_0$ takav da je t unutar filtrirajuće komponente $H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$:

$$t \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n,\ t \neq 0.$$

(iii) Dokazujemo da za taj t postoji par (k, l) takav da je $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \\
H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n \arrow[u, hook] \arrow[d, "\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] \\
(H/\operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n
\end{tikzcd}$$

Preslikavanje $\mathcal{S}_2$ je injekcija pa postoji generator $d \otimes d' \in R \tilde{\otimes} R$ takav da je $\mathcal{S}_2(t)(d \otimes d') \neq 0$. Postoje $k, l \in \mathbb{N}_0$ takvi da je $d \otimes d'$ unutar filtrirajuće komponente $R_k \hat{\otimes} R_l = R_k \otimes R_l$. Budući da je $\mathcal{S}_2'((\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t))(d \otimes d') = \mathcal{S}_2(t)(d \otimes d')$ po komutativnosti donjeg četverokuta na dijagramu u (b1), mora biti $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$. Dakle postoji par (k, l) takav da je $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$.

(iv) Neka je sada (k, l) najmanji par u $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ takav da za zadani $t \neq 0$ vrijedi

$$t' := (\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$$

i sa S_2' i $\mathcal{S}_2'$ označena odgovarajuća preslikavanja za taj par (k, l), kao gore.

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \arrow[r, "S_2"] & R \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}_{R_k} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_l} \hat{\otimes} \pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] & R_n \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} (H / \operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H / \operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n \arrow[r, "S_2'"] & R_n
\end{tikzcd}$$

(v) Dokazujemo da tada vrijedi sljedeće:

(1) ako je $k \neq 0$, $l \neq 0$, onda $t' \in (A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} (A_{l-1}/A_l) \hat{\otimes} R_n$,

(2) ako je $k = 0$, $l \neq 0$, onda $t' \in (H/A_k) \hat{\otimes} (A_{l-1}/A_l) \hat{\otimes} R_n$,

(3) ako je $k \neq 0$, $l = 0$, onda $t' \in (A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} (H/A_l) \hat{\otimes} R_n$,

(4) ako je $k = 0$, $l = 0$, onda $t' \in (H/A_k) \hat{\otimes} (H/A_l) \hat{\otimes} R_n$.

Ovdje smo s A_k označili $\operatorname{Anih}(R_k)$ radi kratkoće zapisa, za svaki k. Neka je

$$\pi_{(k-1)k} \colon H/A_k \to H/A_{k-1}$$

preslikavanje

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi_k"'] & H \arrow[d, "\pi_{k-1}"] \\
H/A_k \arrow[r, "\pi_{(k-1)k}"'] & H/A_{k-1}
\end{tikzcd}$$

Ono je zbog $A_k \subseteq A_{k-1}$ dobro definirano i po propoziciji 3.4.14 je morfizam u $\mathrm{proVect}$. U komutativnom kvadratu je vidljivo da vrijedi $\pi_{k-1} = \pi_{(k-1)k} \circ \pi_k$.

Ako je $k, l \neq 0$, budući da je (k, l) najmanji par sa svojstvom da je $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$, to je t u jezgri preslikavanja $\pi_{k-1} \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ i u jezgri preslikavanja $\pi_k \hat{\otimes} \pi_{l-1} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$. Iz toga slijedi da se t' nalazi u jezgri preslikavanja $\pi_{(k-1)k} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{H/A_l} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ i u jezgri preslikavanja $\mathrm{id}_{H/A_k} \hat{\otimes} \pi_{(l-1)l} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$. Po propoziciji 3.4.23, te jezgre su $(A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} (H/A_l) \hat{\otimes} R_n$ i

$(H/A_k)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n$. Dakle, t' nalazi se u njihovom presjeku. Po propoziciji 9.3.4 taj presjek jednak je $(A_{k-1}/A_k)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n$ to jest vrijedi

$$t' \in (A_{k-1}/A_k)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n.$$

Ako je $k = 0$, $l \neq 0$ tada je iz istog razloga t u jezgri preslikavanja $\pi_0 \hat{\otimes} \pi_{l-1} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$, pa se t' nalazi u jezgri preslikavanja $\mathrm{id}_{H/A_0} \hat{\otimes} \pi_{(l-1)l} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$, što je po propoziciji 3.4.23 jednako $(H/A_0)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n$. Treći slučaj pokaže se analogno. U četvrtom slučaju nema se što pokazati.

(vi) Sada dokazujemo da postoji $s \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$ takav da je

$$(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(s) = t'$$

i vrijedi:

(1') za $k \neq 0$, $l \neq 0$ je $s \in A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$,

(2') za $k = 0$, $l \neq 0$ je $s \in H \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$,

(3') za $k \neq 0$, $l = 0$ je $s \in A_{k-1} \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$,

(4') za $k = 0$, $l = 0$ je $s \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$

Za $k, l \neq 0$ promotrimo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
 & H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \\
A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'_k \hat{\otimes} \pi'_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] & H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n \arrow[u, hook] \arrow[d, "\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"] \\
(A_{k-1}/A_k)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n \arrow[r, hook] & (H/A_k)\hat{\otimes}(H/A_l)\hat{\otimes} R_n
\end{tikzcd}$$

Dovoljno je dokazati da je $\pi'_k \hat{\otimes} \pi'_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ surjekcija, iz toga će zbog

$$t' \in (A_{k-1}/A_k)\hat{\otimes}(A_{l-1}/A_l)\hat{\otimes} R_n$$

slijediti da postoji

$$s \in A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$$

koji se preslikava u njega. Dokazujemo da je $\pi'_k \hat{\otimes} \pi'_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ surjekcija.

Tenzorski produkt više kvocijentnih preslikavanja i (moguće više) identiteta u $\mathrm{proVect}$ može se prikazati kao kompozicija tenzorskih produkata jednog kvocijentnog preslikavanja i identiteta. Ovdje je $\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ kompozicija:

$$\begin{tikzcd}
A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n \arrow[d, "\pi'_k \hat{\otimes} \mathrm{id}_{A_{l-1}} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] \\
(A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n \arrow[d, "\mathrm{id}_{A_{k-1}/A_k} \hat{\otimes} \pi'_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] \\
(A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} (A_{l-1}/A_l) \hat{\otimes} R_n
\end{tikzcd}$$

Tenzorski produkt jednog kvocijentnog preslikavanja i (moguće više) identiteta u $\mathrm{proVect}$ je surjekcija, jer vrijedi: u $\mathrm{proVect}$ je kvocijentno preslikavanje koujednačitelj, u $\mathrm{proVect}$ koujednačitelj komutira s tenzorskim produktom i kvocijentno preslikavanje je surjekcija. Ovdje poesbno imamo zbog toga komutativan dijagram iz kojeg slijedi surjektivnost prvog preslikavanja u kompoziciji:

$$\begin{tikzcd}
A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n \arrow[d, "\pi'_k \hat{\otimes} \mathrm{id}_{A_{l-1}} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] \arrow[dr, dashed, two heads, "q"] & \\
(A_{k-1}/A_k) \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n & (A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n)/(A_k \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n) \arrow[l, dashed, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Slično za drugo preslikavanje u kompoziciji zaključujemo da je surjekcija. Kompozicija surjekcija je surjekcija pa je dokazana surjektivnost od $\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$.

Analogno se u slučajevima (2) i (3) dokaže da su preslikavanja $\pi_0 \hat{\otimes} \pi'_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$, $\pi'_k \hat{\otimes} \pi_0 \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}$ surjekcije iz čega slijedi postojanje traženog $s \in H \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$ odnosno $s \in A_{k-1} \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$. U slučaju (4) se nema što dokazati jer možemo uzeti $s = t$.

(vii) Morfizam $T_2\colon R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to R$ u $\mathrm{indproVect}$ definiran u 9.2.2 kao kompozicija morfizama u $\mathrm{indproVect}$ na jednostavnim tenzorima je:

$$T_2(d \otimes d' \otimes h \otimes h' \otimes r) = (d \blacktriangleleft h)(d' \blacktriangleleft h')r$$

i definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{T}_2\colon H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda$$

Za (k, l, n) postoji morfizam među filtrirajućim komponentama, preslikavanje u drugom retku sljedećega dijagrama, i ono je morfizam u $\mathrm{proVect}$. Jednostavna posljedica leme 9.3.6

je da je dobro definirano preslikavanje u zadnjem retku na sljedećem dijagramu i da je ono morfizam u $\mathrm{proVect}$, kao kompozicija morfizama u $\mathrm{proVect}$, te da je dijagram komutativan, zbog funktorijalnosti tenzorskog produkta.

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \arrow[r, "T_2"] & R \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}_{R_k} \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_l} \hat{\otimes} \pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n}"'] & R_m \arrow[u, hook] \arrow[d, equal] \\
R_k \hat{\otimes} R_l \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n \arrow[r, "T_2'"] & R_m
\end{tikzcd}$$

Linearno preslikavanje koje pripada T_2' označimo s

$$\mathcal{T}_2' \colon (H/\operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H/\operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R_k \hat{\otimes} R_l, R_n).$$

Zbog komutativnosti dijagrama za svaki $t \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$ vrijedi

$$\mathcal{T}_2(t) = \mathcal{T}_2'((\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t)).$$

(viii) Sada dokazujemo da za $s \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$ takav da vrijedi:

(1') ako je $k \neq 0$, $l \neq 0$, onda $s \in A_{k-1} \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$,

(2') ako je $k = 0$, $l \neq 0$, onda $s \in H \hat{\otimes} A_{l-1} \hat{\otimes} R_n$,

(3') ako je $k \neq 0$, $l = 0$, onda $s \in A_{k-1} \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$,

(4') ako je $k = 0$, $l = 0$, onda $s \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$

i $d \otimes d'$ bilo koji generator u $R_k \otimes R_l$ vrijedi

$$\mathcal{S}_2(s)(d \otimes d') \neq 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') \neq 0.$$

Označimo za d s d'' element koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(d) - d \otimes d'' \in \operatorname{Anih}_R(H) \otimes R$ za $k = 0$, odnosno, $\Delta_R(d) - d \otimes d'' \in R_{k-1} \otimes R + \operatorname{Anih}_R(H) \otimes R$ za $k \neq 0$. Analogno, neka je d''' takav element za d'. Neka je s prikazan kao formalna suma $s = \sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda$. Pritom su svi h_λ u A_{k-1} ako je $k \neq 0$ i svi h'_λ u A_{l-1} ako je $l \neq 0$. Koristeći lemu 9.3.6 vidimo da za takve s i $d \otimes d' \in R_k \otimes R_l$ vrijedi

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle d'' \langle d', h'_\lambda \rangle d''' r_\lambda = d'' d''' \mathcal{S}_2(s)(d \otimes d')$$

to jest

$$\mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') = d'' d''' \mathcal{S}_2(s)(d \otimes d').$$

Budući da d'' i d''' nisu djelitelji nule, tvrdnja slijedi.

(ix) Sada možemo napokon provesti dokaz do kraja. U (ii) smo za

$$t \in H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R, \quad t \neq 0$$

odredili filtrirajuću komponentu u kojoj se nalazi:

$$t \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n, \quad t \neq 0.$$

Zatim smo u (iv) zadali da je (k, l) najmanji par za koji vrijedi $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0$ i označili

$$t' = (\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(t) \neq 0,$$

$$t' \in (H / \operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (H / \operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n.$$

U (iii) smo dokazali da iz injektivnosti od $\mathcal{S}_0$ slijedi da barem jedan takav par postoji, dakle, postoji i najmanji. Budući da je $t' \neq 0$ i $\mathcal{S}_2'$ injekcija po (i), to postoji generator

$$d \otimes d' \in R_k \hat{\otimes} R_l = R_k \otimes R_l$$

takav da je

$$\mathcal{S}_2'(t')(d \otimes d') \neq 0.$$

Zatim smo iz minimalnosti para (k, l) u (v) pokazali da mora biti, ako je k, $l \neq 0$,

$$(1) \quad t' \in (\operatorname{Anih}(R_{k-1}) / \operatorname{Anih}(R_k)) \hat{\otimes} (\operatorname{Anih}(R_{l-1}) / \operatorname{Anih}(R_l)) \hat{\otimes} R_n,$$

ili, ako je neki od njih jednak 0, neka od mogućnosti (2), (3), (4) u kojima je $\operatorname{Anih}(R_{k-1})$ zamijenjen s H ako je $k = 0$ i $\operatorname{Anih}(R_{l-1})$ zamijenjen s H ako je $l = 0$.

Onda smo u (vi) dokazali da postoji $s \in H \hat{\otimes} H \hat{\otimes} R_n$ takav da je

$$(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(s) = t'$$

i takav da, ako je k, $l \neq 0$, vrijedi

$$(1') \quad s \in \operatorname{Anih}(R_{k-1}) \hat{\otimes} \operatorname{Anih}(R_{l-1}) \hat{\otimes} R_n,$$

ili, ako je neki od njih jednak 0, neka od mogućnosti (2'), (3'), (4') u kojima je $\operatorname{Anih}(R_{k-1})$ zamijenjen s H ako je $k = 0$ i $\operatorname{Anih}(R_{l-1})$ zamijenjen s H ako je $l = 0$. Budući da je $(\pi_k \hat{\otimes} \pi_l \hat{\otimes} \mathrm{id}_{R_n})(s) = t'$, za s po (i) vrijedi:

$$\mathcal{S}_2(s)(d \otimes d') = \mathcal{S}_2'(t')(d \otimes d') \neq 0,$$

a u (viii) je, iz činjenice da s zadovoljava neko od svojstava (1'), (2'), (3'), (4') i iz svojstava (Δ_0) i (Δ_n), dokazano da vrijedi:

$$\mathcal{S}_2(s)(d \otimes d') \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') \neq 0.$$

Dakle, imamo

$$\mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') \neq 0.$$

Po (vii) vrijedi:

$$\mathcal{T}_2(s)(d \otimes d') = \mathcal{T}_2'(t')(d \otimes d') = \mathcal{T}_2(t)(d \otimes d'),$$

pa slijedi

$$\mathcal{T}_2(t)(d \otimes d') \neq 0.$$

Za proizvoljan $t \neq 0$ pronađen je dakle $d \otimes d' \in R \tilde{\otimes} R$ takav da je $\mathcal{T}_2(t)(d \otimes d') \neq 0$, dakle pokazano je da je $\mathcal{T}_2$ injekcija i dokaz je dovršen.

(x) Dokažimo sada da je $\mathcal{T}_1$ injekcija. Neka je $t \in H \tilde{\otimes} R$, $t \neq 0$. Tada je $1_H \otimes t \in H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R$ i $1_H \otimes t \neq 0$. Budući da je $\mathcal{T}_2$ injekcija, postoji generator $d \otimes d'$ u $R \tilde{\otimes} R$ takav da je $\mathcal{T}_2(1_H \otimes t)(d \otimes d') \neq 0$. Budući da je $\mathcal{T}_2(1_H \otimes t)(d \otimes d') = (d \blacktriangleleft 1_H)(d' \blacktriangleleft t) = d(d' \blacktriangleleft t) \neq 0$, mora biti $\mathcal{T}_1(t)(d') = d' \blacktriangleleft t \neq 0$.

$\square$

Napomena 9.3.9. Zamijetimo da su uvjeti prethodne propozicije zadovoljeni posebno za unutrašnju Hopfovu algebru R u $\mathrm{indVect}$ s filtrirajućim komponentama $\{R_n\}_{n \in \boldsymbol{N_0}}$ takvu da je:

(i) $R_0 = \{\lambda 1_R \colon \lambda \in k\} \cong k$

(ii) $\Delta_R(r) - r \otimes 1_R \in R_{n-1} \otimes R$, za sve $r \in R_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$

i bilo koju unutrašnju Hopfovu algebru H u $\mathrm{proVect}$ koja je u Hopfovom sparivanju s R koje je nedegenerirano u drugoj varijabli.

9.3.4 Teorem o Yetter-Drinfeldovoj modulnoj algebri

Teorem 9.3.10. *Neka su R i H unutrašnje Hopfove algebre u* $\mathrm{indproVect}$ *i neka je* $\blacktriangleleft \colon R \tilde{\otimes} H \to R$ *desno Hopfovo djelovanje u* $\mathrm{indproVect}$ *takvo da je $\mathcal{T}_2$ definiran u napomeni 9.2.2*

$$\mathcal{T}_2 \colon H \tilde{\otimes} H \tilde{\otimes} R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R \tilde{\otimes} R, R),$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)(d \otimes d') = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda$$

injekcija.

Tada ako postoji morfizam $\rho\colon R \to H \tilde{\otimes} R$ *u* $\mathrm{indproVect}$ *za koji vrijedi uvjet:*

$$\mu_R \circ (\blacktriangleleft \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \rho) = \mu_R \circ \tau_{R,R}$$

to jest

$$r' \blacktriangleleft \rho(r) = rr', \text{ za sve } r, r' \in R,$$

vrijedi da je ρ *lijevo kodjelovanje i* R *je uz djelovanje* $\blacktriangleleft$ *i kodjelovanje* ρ *unutrašnja pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad* H *u* $\mathrm{indproVect}$. *Nadalje, taj* ρ *je jedinstveno takvo kodjelovanje.*

Dokaz. Sa $H\sharp R$ je označen poludirektni produkt definiran djelovanjem $\blacktriangleleft$, kao u 6.3. Injektivnost preslikavanja $\mathcal{T}_2$ nam omogućuje da jednakost dva elementa t i s u $H \tilde{\otimes} H\sharp R$ dokazujemo tako da dokažemo jednakost preslikavanja $\mathcal{T}_2(t)$ i $\mathcal{T}_2(s)$. Jednakost preslikavanja $\mathcal{T}_2(t)$ i $\mathcal{T}_2(s)$ je pak dovoljno provjeriti na jednostavnim tenzorima jer su oni morfizmi u $\mathrm{indproVect}$, kako je pokazano u napomeni 9.2.2 kao posljedica propozicije 9.2.1, pa distribuiraju po formalnim sumama, a svaki element tenzorskog produkta objekata u $\mathrm{indproVect}$ može se prikazati kao formalna suma jednostavnih tenzora po 5.4.6.

Injektivnost $\mathcal{T}_2$ povlači injektivnost $\mathcal{T}_1$ definiranog kao u napomeni 9.2.2

$$\mathcal{T}_1\colon H\sharp R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R, R), \quad \mathcal{T}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda$$

što je dokazuje na isti način kao dokaz iste tvrdnje za R u $\mathrm{indVect}$ i H u $\mathrm{proVect}$ pri kraju dokaza propozicije 9.3.8. Dakle djelovanje $H\sharp R$ na R je efektivno. Analogno jednakost dva elementa t i s u $H\sharp R$ možemo dokazati tako da dokažemo jednakost preslikavanja $\mathcal{T}_1(t)$ i $\mathcal{T}_1(s)$.

Prvo ćemo dokazati desno-lijevo Yetter-Drinfeldovo svojstvo, zapisano pomoću množenja u $H\sharp R$:

$$\rho(r) \cdot h = \sum h_{(2)} \cdot \rho(r \blacktriangleleft h_{(1)}),$$

za svaki jednostavan tenzor $h\sharp r$ u $H\sharp R$. Desna strana je formalna suma u $H\sharp R$, jer je nastala iz $h\sharp r$ primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$. Jednakost je dovoljno dokazati za jednostavan tenzor $h\sharp r$ jer obje strane nastaju primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$. Neka je d proizvoljan element od R. Lijeva strana jednakosti djeluje na d:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(\rho(r) \cdot h)(d) &= d \blacktriangleleft (\rho(r) \cdot h) = \\
&= (d \blacktriangleleft \rho(r)) \blacktriangleleft h = \\
&= (rd) \blacktriangleleft h
\end{aligned}$$

Desna strana jednakosti djeluje na d:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(\sum h_{(2)}\cdot\rho(r\blacktriangleleft h_{(1)}))(d) &= d\blacktriangleleft(\sum h_{(2)}\cdot\rho(r\blacktriangleleft h_{(1)})) = \\ &= \sum d\blacktriangleleft(h_{(2)}\cdot\rho(r\blacktriangleleft h_{(1)})) = \\ &= \sum(d\blacktriangleleft h_{(2)})\blacktriangleleft\rho(r\blacktriangleleft h_{(1)}) = \\ &= \sum(r\blacktriangleleft h_{(1)})(d\blacktriangleleft h_{(2)}) = \\ &= (rd)\blacktriangleleft h\end{aligned}$$

Zapišimo sada $\rho(r)$ u Sweedlerovoj notaciji kao formalnu sumu $\sum r_{[-1]}\otimes r_{[0]}$ u $H\sharp R$.

Da bismo pokazali da je definirano preslikavanje kodjelovanje, trebamo dokazati:

$$\sum(\sum r_{[-1](1)}\otimes r_{[-1](2)})\otimes r_{[0]} = \sum r_{[-1]}\otimes(\sum r_{[0][-1]}\otimes r_{[0][0]})$$

$$\sum\epsilon(r_{[-1]})r_{[0]} = r$$

za svaki $r\in R$. Obje sume na lijevoj strani su formalne sume, ali ne možemo ekspandirati sumande i dobiti jednu formalnu sumu. Jednako tako vrijedi za desnu stranu. To će stvoriti probleme u računu koje ćemo riješiti na sljedeći način. Preslikavanje $\mathcal{T}_2$ ima po napomeni 9.2.2 svojstva, za $d\otimes d'\in R\tilde{\otimes}R$,

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes r_\lambda)(d\otimes d') = \sum_\lambda(d\blacktriangleleft h_\lambda)(d'\blacktriangleleft h'_\lambda)r_\lambda = \sum_\lambda\mathcal{T}_2(h_\lambda\otimes h'_\lambda\otimes r_\lambda)(d\otimes d')$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda(\sum_\mu h_{\lambda\mu}\otimes h'_{\lambda\mu})\otimes r_\lambda)(d\otimes d') = \sum_\lambda(\sum_\mu(d\blacktriangleleft h_{\lambda\mu})(d'\blacktriangleleft h'_{\lambda\mu}))r_\lambda$$

$$\mathcal{T}_2(\sum_\lambda h_\lambda\otimes(\sum_\mu h'_{\lambda\mu}\otimes r_{\lambda\mu}))(d\otimes d') = \sum_\lambda(d\blacktriangleleft h_\lambda)(\sum_\mu(d'\blacktriangleleft h'_{\lambda\mu})r_{\lambda\mu})$$

pa možemo računati na sljedeći način.

Neka je $d\otimes d'$ proizvoljan u $R\tilde{\otimes}R$. Lijeva strana:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2(\sum(\sum r_{[-1](1)}\otimes r_{[-1](2)})\otimes r_{[0]}))(d\otimes d') &= \sum\mathcal{T}_2((\sum r_{[-1](1)}\otimes r_{[-1](2)})\otimes r_{[0]})(d\otimes d') \\ &= \sum(\sum(d\blacktriangleleft r_{[-1](1)})(d'\blacktriangleleft r_{[-1](2)}))r_{[0]} \\ &= \sum((dd')\blacktriangleleft r_{[-1]})r_{[0]} \\ &\doteq (dd')\blacktriangleleft\sum r_{[-1]}\sharp r_{[0]} \\ &= rdd'\end{aligned}$$

Desna strana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2(\sum r_{[-1]} \otimes (\sum r_{[0][-1]} \otimes r_{[0][0]}))(d \otimes d') &= \sum \mathcal{T}_2(r_{[-1]} \otimes (\sum r_{[0][-1]} \otimes r_{[0][0]}))(d \otimes d') \\
&= \sum (d \blacktriangleleft r_{[-1]})(\sum (d' \blacktriangleleft r_{[0][-1]}) r_{[0][0]}) \\
&\doteq \sum (d \blacktriangleleft r_{[-1]})(d' \blacktriangleleft \sum r_{[0][-1]} \sharp r_{[0][0]}) \\
&= \sum (d \blacktriangleleft r_{[-1]}) r_{[0]} d' \\
&\doteq (\sum (d \blacktriangleleft r_{[-1]}) r_{[0]}) d' \\
&\doteq (d \blacktriangleleft \sum r_{[-1]} \sharp r_{[0]}) d' \\
&= r d d'
\end{aligned}$$

Druga jednakost:

$$\begin{aligned}
\sum \epsilon(r_{[-1]}) r_{[0]} &= \sum (1_R \blacktriangleleft r_{[-1]}) r_{[0]} \\
&\doteq 1_R \blacktriangleleft (\sum r_{[-1]}) \sharp r_{[0]}) \\
&= r
\end{aligned}$$

Još preostaje dokazati da je R algebra u toj kategoriji, tj. dokazati da vrijedi:

$$\sum (rr')_{[-1]} \sharp (rr')_{[0]} = \sum \sum r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]}$$

za sve $r \otimes r' \in R \tilde{\otimes} R$, jer je dovoljno provjeriti jednakost za jednostavne tenzore kao što objašnjeno pri dokazu prve tvrdnje. Na desnoj strani je formalna suma u $H \sharp R$ jer je nastala iz formalnih suma $\sum r_{[-1]} \otimes r_{[0]}$ i $\sum r'_{[-1]} \otimes r'_{[0]}$ tenzoriranjem i primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$, na lijevoj strani je formalna suma po definiciji.

Djelujemo lijevom stranom na proizvoljan $d \in R$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(\sum (rr')_{[-1]} \sharp (rr')_{[0]})(d) &= d \blacktriangleleft (\sum (rr')_{[-1]} \sharp (rr')_{[0]}) \\
&= d \blacktriangleleft \rho(rr') \\
&= rr'd
\end{aligned}$$

i djelujemo desnom stranom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(\sum \sum r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]})(d) &= d \blacktriangleleft (\sum \sum r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]}) \\
&= \sum \sum d \blacktriangleleft r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]} \\
&= \sum \sum (d \blacktriangleleft (r'_{[-1]} r_{[-1]})) r_{[0]} r'_{[0]} \\
&= \sum \sum (d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) \blacktriangleleft r_{[-1]}) r_{[0]} r'_{[0]} \\
&= \sum \sum ((d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) \blacktriangleleft (r_{[-1]} \sharp r_{[0]})) r'_{[0]} \\
&\doteq \sum (d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) \blacktriangleleft (\sum r_{[-1]} \sharp r_{[0]}) r'_{[0]} \\
&= \sum r (d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) r'_{[0]} \\
&\doteq r \sum (d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) r'_{[0]} \\
&\doteq r (d \blacktriangleleft (\sum r'_{[-1]} \sharp r'_{[0]})) \\
&= rr'd
\end{aligned}$$

U dokazu smo s točkicom nad znakom jednakosti naznačili provjeru da je izraz s desne strane također formalna suma, kao u lemi 5.4.7 o računanju s formalnim sumama u $\mathrm{indproVect}$. □

Napomena 9.3.11. Dokaz smo mogli provesti elegantnije apstraktnim Sweedlerovim računom pa na kraju iskoristiti da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ injekcije. Generički elementi: $r, r', d, d' \in R$, $h \in H$.

Desno-lijevo Yetter-Drinfeldovo svojstvo:

$$\rho(r) \cdot h = h_{(2)} \cdot \rho(r \blacktriangleleft h_{(1)})$$

Provjeravamo:

$$\begin{aligned} d \blacktriangleleft (\rho(r) \cdot h) &= (d \blacktriangleleft \rho(r)) \blacktriangleleft h \\ &= (rd) \blacktriangleleft h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \blacktriangleleft (h_{(2)} \cdot \rho(r \blacktriangleleft h_{(1)})) &= (d \blacktriangleleft h_{(2)}) \blacktriangleleft \rho(r \blacktriangleleft h_{(1)}) \\ &= (r \blacktriangleleft h_{(1)})(d \blacktriangleleft h_{(2)}) \\ &= (rd) \blacktriangleleft h \end{aligned}$$

Kodjelovanje:

$$r_{[-1](1)} \otimes r_{[-1](2)} \otimes r_{[0]} = r_{[-1]} \otimes r_{[0][-1]} \otimes r_{[0][0]}$$

$$\epsilon(r_{[-1]})r_{[0]} = r$$

Provjeravamo:

$$\begin{aligned} (d \blacktriangleleft r_{[-1](1)})(d' \blacktriangleleft r_{[-1](2)})r_{[0]} &= ((dd') \blacktriangleleft r_{[-1]})r_{[0]} \\ &= (dd') \blacktriangleleft r_{[-1]} \sharp r_{[0]} \\ &= rdd' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d \blacktriangleleft r_{[-1]})(d' \blacktriangleleft r_{[0][-1]})r_{[0][0]} &= (d \blacktriangleleft r_{[-1]})(d' \blacktriangleleft r_{[0][-1]} \sharp r_{[0][0]}) \\ &= (d \blacktriangleleft r_{[-1]})r_{[0]}d' \\ &= (d \blacktriangleleft r_{[-1]} \sharp r_{[0]})d' \\ &= rdd' \end{aligned}$$

Druga jednakost:

$$\begin{aligned} \epsilon(r_{[-1]})r_{[0]} &= (1_R \blacktriangleleft r_{[-1]})r_{[0]} \\ &= 1_R \blacktriangleleft r_{[-1]} \sharp r_{[0]} \\ &= r \end{aligned}$$

Algebra:

$$(rr')_{[-1]} \sharp (rr')_{[0]} = r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]}$$

Provjeravamo:

$$d \blacktriangleleft (rr')_{[-1]} \sharp (rr')_{[0]} = rr'd$$

$$\begin{aligned}
d \blacktriangleleft r'_{[-1]} r_{[-1]} \sharp r_{[0]} r'_{[0]} &= d \blacktriangleleft (r'_{[-1]} r_{[-1]}) r_{[0]} r'_{[0]} \\
&= (d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) \blacktriangleleft r_{[-1]}) r_{[0]} r'_{[0]} \\
&= r(d \blacktriangleleft r'_{[-1]}) r'_{[0]} \\
&= r r' d
\end{aligned}$$

Napomena 9.3.12. Naravno, ako za R i H u $\mathrm{indproVect}$ vrijedi da je $\mathcal{T}_2$ injekcija, onda moraju biti i $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_0$ injekcije. Ako je Hopfovo djelovanje definirano iz Hopfovog sparivanja, onda mora biti i $\mathcal{S}_0$ injekcija (jer ako postoje dva elementa koji se jednako sparuju, onda jednako i djeluju). Za zadovoljenje uvjeta ove propozicije dolaze dakle u obzir samo efektivna Hopfova djelovanja, odnosno Hopfova sparivanja nedegenerirana u drugoj varijabli.

Teorem 9.3.13. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVect}$, H unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVect}$ i neka je $\langle\, , \,\rangle\colon R \tilde{\otimes} H \to k$ Hopfovo sparivanje među njima u $\mathrm{indproVect}$. Ako vrijedi sljedeće:*

(i) sparivanje je nedegenerirano u drugoj varijabli

(ii) R ima filtrirajuće komponente $\{R_n\}_{n \in \mathbf{N_0}}$ i skup generatora kao vektorskog prostora za koji vrijedi:

(Δ_0) za svaki generator $r \in R_0$ postoji $r' \in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$

(Δ_n) za sve $n \in \mathbb{N}$, za svaki generator $r \in R_n$ postoji $r' \in R$ koji nije djelitelj nule takav da je $\Delta_R(r) - r \otimes r' \in R_{n-1} \otimes R + \mathrm{Anih}_R(H) \otimes R$

(iii) postoji morfizam $\rho\colon R \to H \tilde{\otimes} R$ u $\mathrm{indproVect}$ za koji je

$$r' \blacktriangleleft \rho(r) = rr', \text{ za sve } r, r' \in R,$$

onda je ρ lijevo kodjelovanje i R je uz djelovanje $\blacktriangleleft$ i kodjelovanje ρ unutrašnja pleteničasto-komutativna algebra u kategoriji desno-lijevih Yetter-Drinfeldovih modula nad H u $\mathrm{indproVect}$.

Dokaz. Posljedica propozicije 9.3.8 i teorema 9.3.10. □

9.4 Dualne Hopfove algebre u $\mathrm{indproVectFin}$

Sljedeća propozicija pokazuje da je dual filtriranog vektorskog prostora V, objekta u $\mathrm{indVect}$, kofiltrirani vektorski prostor V^*, objekt u $\mathrm{proVect}$, i da se sparivanje proširuje do morfizma u $\mathrm{indproVect}$. Ona je posljedica tvrdnji o dualnosti u kategoriji $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$ dokazanih u odjeljku 5.3. Prisjetimo se da za V u $\mathrm{indVect}$ vrijedi $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, k) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(V, k)$.

Propozicija 9.4.1. *Neka je V objekt u* $\mathrm{indVect}$ *s filtracijom* $(\{V_n\}_{n\in I}, \{\phi_{mn}\})$. *Tada je na dualu* $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(V, k)$ *vektorskog prostora V inducirana kofiltracija*

$$V_n^* := V^*/\operatorname{Anih}(V_n) \cong (V_n)^*$$

s veznim preslikavanjima

$$\psi_{nm} := (\phi_{mn})^* \colon V_m^* \to V_n^*$$

i projekcijama $\pi_n^{V^*} \colon V^* \to V_n^*$ koje su kanonska kvocijentna preslikavanja i time dual postaje kofiltrirani vektorski prostor V^*, objekt u $\mathrm{proVect}$. *Uz to, sparivanje $\langle\, , \rangle \colon V \otimes V^* \to k$ u* Vect *se proširuje do sparivanja*

$$\langle\, , \rangle \colon V \mathbin{\tilde{\otimes}} V^* \to k$$

u $\mathrm{indproVect}$.

Dokaz. U propoziciji 5.3.2 je dokazano da je $(\{V_n^*\}_{n\in I}, \{\psi_{nm}\})$ kofiltracija, a u propoziciji 5.3.3 da je $V^* \cong \lim_{n\in I} V_n^*$. Dokazat ćemo da postoji proširenje sparivanja koristeći propoziciju 5.2.5 o proširenju preslikavanja u $\mathrm{indproVect}$.

Sparivanje $\langle\, , \rangle \colon V \otimes V^* \to k$ poštuje filtracije na domeni i kodomeni i kofiltracije na njihovim komponentama na sljedeći način. Za svaku komponentu $V_n \otimes V^*$ filtracije na domeni postoji komponenta k filtracije na kodomeni i preslikavanje $\langle\, , \rangle'_n \colon V_n \otimes V^* \to k$ takvo da gornji kvadrat na sljedećem dijagramu komutira i takvo da ono poštuje kofiltracije na domeni i kodomeni. Naime, svaka restrikcija $V_n \otimes V^* \hookrightarrow V \otimes V^* \to k$ je takva da gornji kvadrat komutira i svaka takva restrikcija zaista poštuje kofiltracije na domeni i kodomeni. Dokažimo drugu tvrdnju. Za svaku komponentu k kofiltracije kodomene preslikavanja $\langle\, , \rangle'_n$ postoji komponenta kofiltracije na domeni $V_n \otimes V^*$ (naime, to je komponenta $V_n \otimes V_n^*$) takva da postoji preslikavanje među njima za koje je donji kvadrat na sljedećem dijagramu komutativan (to je sparivanje $V_n \otimes V_n^* \to k$).

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V^* \arrow[r, "\langle,\rangle"] & k \\
V_n \otimes V^* \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\langle,\rangle'_n"] \arrow[d, two heads] & k \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
V_n \otimes V_n^* \arrow[r, dashed, "\langle,\rangle_n"] & k
\end{tikzcd}$$

Po propoziciji 5.2.5 o proširenju preslikavanja, slijedi da se to sparivanje proširuje do jedinstvenog morfizma u $\mathrm{indproVect}$

$$\begin{tikzcd}
V \mathbin{\tilde{\otimes}} V^* \arrow[r, dashed] & k \\
V \otimes V^* \arrow[u, hook] \arrow[r] & k \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

i da su komponente tog morfizma upotpunjenja navedenih preslikavanja $\langle\, , \rangle'_n$.

$$\begin{tikzcd}
V \otimes V^* \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\langle,\rangle"] & V \tilde{\otimes} V^* \arrow[r, dashed] & k \\
V_n \otimes V^* \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[dr, two heads] & V_n \hat{\otimes} V^* \arrow[u, dashed, hook] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, two heads] & k \arrow[u, equal] \\
 & V_n \otimes V_n^* \arrow[r, "\langle,\rangle_n"] & k \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Na dijagramu su kanonski morfizmi $V \otimes V^* \hookrightarrow V \tilde{\otimes} W$ i $V_n \otimes V^* \hookrightarrow V_n \hat{\otimes} V^*$ injekcije po propozicijama 3.3.16 i 5.2.4.

$\square$

Kofiltraciju na dualu V^* induciranu filtracijom filtriranog vektorskog prostora V kao u prethodnoj propoziciji zovemo *kofiltracija dualna filtraciji* na V.

Propozicija 9.4.2. *(i) Tenzorski produkt $C \hat{\otimes} H$ u kategoriji* $\mathrm{proVect}$ *konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora C i kofiltriranog vektorskog prostora H jednak je običnom tenzorskom produktu $C \otimes H$ uz istu kofiltraciju.*

(ii) Tenzorski produkt $R \tilde{\otimes} H$ objekta u $\mathrm{indVectFin}$ *i objekta u* $\mathrm{proVect}$ *jednak je običnom tenzorskom produktu $R \otimes H$ uz istu filtraciju kofiltracija.*

Dokaz. (i) Kofiltracija na C je trivijalna. Neka je $\boldsymbol{H} = (\{H_n\}_{n \in I}, \{\phi_{mn}\})$ kofiltracija od H, $H = \lim \boldsymbol{H}$. Kofiltracija od $C \hat{\otimes} H$ dakle je $(\{C \otimes H_n\}_{n \in I}, \{\mathrm{id}_C \otimes \phi_{mn}\})$. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza od C i $\{f_\lambda\}_\lambda$ formalna baza od H. Svaki element od $C \hat{\otimes} H$ je vrijednost neke formalne sume $\sum_{k,\lambda} a_{k,\lambda} e_k \otimes f_\lambda$, a njena vrijednost jednaka je vrijednosti formalne sume

$$e_1 \otimes (\sum_\lambda a_{1,\lambda} f_\lambda) + \ldots + e_n \otimes (\sum_\lambda a_{n,\lambda} f_\lambda).$$

Konačna suma jednostavnih tenzora je unutar običnog tenzorskog produkta $C \otimes H$. Dakle, injekcija $C \otimes H \hookrightarrow C \hat{\otimes} H$ je bijekcija.

(ii) Primjenom (i) na komponente filtracije na $R \tilde{\otimes} H$. $\square$

Propozicija 9.4.3. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra $(R, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ u $(\mathrm{indVectFin}, \otimes, k)$. Tada je njen dual R^* unutrašnja Hopfova algebra $(R^*, \Delta^*, \epsilon^*, \mu^*, \eta^*, S^*)$ u $(\mathrm{proVectFin}, \hat{\otimes}, k)$.*

Sparivanje je morfizam u kategoriji $(\mathrm{indproVectFin}, \tilde{\otimes}, k)$, $R \tilde{\otimes} R^* \to k$.

$$\begin{array}{ll} \mu_R \colon R \otimes R \to R & \Delta_{R^*} \colon R^* \to R^* \hat{\otimes} R^* \\ \eta_R \colon k \to R & \epsilon_{R^*} \colon R^* \to k \\ \Delta_R \colon R \to R \otimes R & \mu_{R^*} \colon R^* \hat{\otimes} R^* \to R^* \\ \epsilon_R \colon R \to k & \eta_{R^*} \colon k \to R^* \\ S_R \colon R \to R & S_{R^*} \colon R^* \to R^* \end{array}$$

$$\langle\,,\,\rangle \colon R \otimes R^* \to k$$

Dakle, sve su to objekti i morfizmi u $(\mathrm{indproVect}, \tilde{\otimes}, k)$.

Dokaz. To je posljedica prethodne dvije propozicije, propozicije 5.3.5 o dualnosti monoidalnih kategorija $\mathrm{indVectFin}$ i $\mathrm{proVectFin}$ te samodualnosti aksioma Hopfove algebre. □

9.5 Kanonski elementi i Luina formula

9.5.1 Heisenbergovo udvojenje $R^* \sharp R$ za R iz $\mathrm{indVectFin}$

9.5.1. Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ i neka je $\langle\,,\,\rangle \colon R \tilde{\otimes} R^* \to k$ kanonsko Hopfovo sparivanje između R i njenog duala, unutrašnje Hopfove algebre R^* u $\mathrm{proVectFin}$. Tada imamo sljedeće:

(i) Desno Hopfovo djelovanje $\blacktriangleleft \colon R \tilde{\otimes} R^* \to R$ u $\mathrm{indproVect}$:

$$\blacktriangleleft \colon R \tilde{\otimes} R^* \xrightarrow{\Delta_R \otimes \mathrm{id}_{R^*}} R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \xrightarrow{\mathrm{id}_R \otimes \tau_{R,R^*}} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \xrightarrow{\langle,\rangle \otimes \mathrm{id}_R} k \tilde{\otimes} R \longrightarrow R$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji dano s $r \blacktriangleleft h = \langle r_{(1)}, h \rangle r_{(2)}$ za $r \in R$, $h \in R^*$.

(ii) Heisenbergovo udvojenje $R^* \sharp R$, algebra uz množenje u $\mathrm{indproVect}$:

$$\begin{array}{c} R^* \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \\ \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R \otimes \Delta_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R} \\ R^* \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \\ \big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{R^*} \otimes \tau_{R,R^*} \otimes \mathrm{id}_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R} \\ R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \\ \big\downarrow {\scriptstyle \mu_{R^*} \otimes \blacktriangleleft \otimes \mathrm{id}_R} \\ R^* \tilde{\otimes} k \tilde{\otimes} R \\ \big\downarrow \\ R^* \tilde{\otimes} R \end{array}$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji dano s $h\sharp r \cdot h'\sharp r' = hh'_{(1)}\sharp(r \blacktriangleleft h'_{(2)})r'$ za $h, h' \in H$, r, $r' \in R$, te $1_{R^*\sharp R} = 1_{R^*}\sharp 1_R$.

(iii) Desno djelovanje $\blacktriangleleft\colon R\tilde{\otimes}(R^*\sharp R) \to R$ u $\mathrm{indproVect}$

$$R\tilde{\otimes}R^*\tilde{\otimes}R \xrightarrow{\blacktriangleleft\otimes\mathrm{id}_R} R\tilde{\otimes}R \xrightarrow{\quad\mu_R\quad} R$$

u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji dano sa $d \blacktriangleleft (h\sharp r) = (d \blacktriangleleft h)r$ za $d, r \in R$, $h \in R^*$.

Napomena 9.5.2. Definirat ćemo sada neka linearna preslikavanja po propoziciji 9.2.1 kao u napomeni 9.2.2. Desno djelovanje $R^*\sharp R$ na R definira linearno preslikavanje $\mathcal{T}_1\colon R^*\sharp R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R, R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVectFin}}(R, R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(R, R) =: \mathrm{End}(R)$. Iz prethodne propozicije slijedi da je to preslikavanje

$$\mathcal{T}_1\colon R^*\sharp R \to \mathrm{End}(R), \quad \mathcal{T}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda) r_\lambda$$

antihomomorfizam unitalnih algebri. Suma na desnoj strani je formalna suma u R, dakle ima najviše konačno mnogo sumanada različitih od nule.

Morfizam $R\tilde{\otimes}R^* \otimes R \xrightarrow{\langle,\rangle\otimes\mathrm{id}_R} k\tilde{\otimes}R \longrightarrow R$ definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_1\colon R^*\tilde{\otimes}R \to \mathrm{End}(R), \quad \mathcal{S}_1(\sum_\lambda h_\lambda \otimes r_\lambda)(d) = \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle r_\lambda$$

To je standardno pridruživanje $R^* \otimes R \to \mathrm{End}(R)$. Množenje na $R^* \otimes R$ koje odgovara kompoziciji operatora je: $h \otimes r \cdot h' \otimes r' = h\langle r, h'\rangle \otimes r'$.

Analogno definiramo linearna preslikavanja $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{S}_2$, kao u napomeni 9.2.2.

9.5.2 Upotpunjenje Heisenbergovog udvojenja

Neka je $(R, \mu_R, \eta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$. Označimo s $\underline{R}$ Hopfovu algebru R kojoj smo zaboravili filtraciju, $(\underline{R}, \mu_R, \eta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ u $(\mathrm{Vect}, \otimes, k)$. Kako je filtracija na $R^*\tilde{\otimes}\underline{R}$ u $\mathrm{indproVect}$ trivijalna, to je $R^*\tilde{\otimes}\underline{R}$ jednak $R^*\hat{\otimes}\underline{R}$ u $\mathrm{proVect}$. Taj kofiltrirani vektorski prostor

$$R^*\hat{\otimes}\underline{R}$$

označavat ćemo još i sa $R^*\hat{\otimes}R$ (kad neće biti mogućnosti zabune) i zvati ga *upotpunjenje Heisenbergovog udvojenja Hopfove algebre* R.

Napomena 9.5.3. Definiramo $\hat{T}_1 = $ "$\blacktriangleleft$"$\colon R \otimes (R^*\hat{\otimes}\underline{R}) \to \underline{R}$ kao kompoziciju

$$\text{"}\blacktriangleleft\text{"}\colon R\tilde{\otimes}R^*\tilde{\otimes}\underline{R} \xrightarrow{\blacktriangleleft\otimes\mathrm{id}_R} R\tilde{\otimes}\underline{R} \xrightarrow{\quad\mu_{R,\underline{R}}\quad} \underline{R}$$

morfizama u $\mathrm{indproVect}$: djelovanja $\blacktriangleleft\colon R \tilde{\otimes} R^* \to R$ i množenja $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \tilde{\otimes} \underline{R} \to \underline{R}$, za koje se lako vidi da je morfizam u $\mathrm{indVect}$. Po propoziciji 9.2.1, ono definira linearno preslikavanje

$$\hat{\mathcal{T}}_1\colon R^* \hat{\otimes} R \to \mathrm{End}(R)$$

$$\hat{\mathcal{T}}_1(\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda)(Y) = \sum_\lambda (Y \blacktriangleleft f_\lambda) E_\lambda \in R$$

Vrijedi $\mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(R, \underline{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(\underline{R}, \underline{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVectFin}}(R, R)$ i zbog toga smo kodomenu označili jednostavno s $\mathrm{End}(R)$. Morfizam "$\blacktriangleleft$" nije djelovanje jer nije moguće definirati množenje na upotpunjenju Heisenbergovog udvojenja koje bi bilo morfizam u kategoriji. Možemo računati

$$Y \text{"}\blacktriangleleft\text{"} (\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda) = \sum_\lambda (Y \blacktriangleleft f_\lambda) E_\lambda \in R$$

za formalnu sumu $\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda$ u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$. Sume na desnoj strani su formalne sume u R, dakle imaju najviše konačno mnogo pribrojnika različitih od 0.

Morfizam $\hat{S}_1\colon R \otimes (R^* \hat{\otimes} \underline{R}) \to \underline{R}$ u $\mathrm{indproVect}$ definiran kompozicijom:

$$R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\langle\,,\rangle \otimes \mathrm{id}_R} k \tilde{\otimes} \underline{R} \longrightarrow \underline{R}$$

po istoj propoziciji određuje linearno preslikavanje

$$\hat{\mathcal{S}}_1\colon R^* \hat{\otimes} R \to \mathrm{End}(R)$$

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda)\colon Y \mapsto \sum_\lambda \langle Y, f_\lambda \rangle E_\lambda \in R$$

Dakle, analogoni preslikavanja $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{S}_1$ postoje čak i ako proširimo $R^* \otimes R$ do $R^* \hat{\otimes} R$. Još ćemo provjeriti da isto vrijedi i za $\hat{\mathcal{T}}_2$ i $\hat{\mathcal{S}}_2$, analogone $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{S}_2$.

Morfizam $\hat{T}_2$ u $\mathrm{indproVect}$ dan kompozicijom

$$R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \otimes R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \tau_{R,R^*} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{R^*} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{\underline{R}}} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\blacktriangleleft \tilde{\otimes} \text{"}\blacktriangleleft\text{"}} R \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\mu_{R,\underline{R}}} \underline{R}$$

na jednostavnim tenzorima je $\hat{T}_2\colon d \otimes d' \otimes h \otimes h' \otimes r \mapsto (d \blacktriangleleft h)(d' \blacktriangleleft h')r$ i definira linearno preslikavanje

$$\hat{\mathcal{T}}_2\colon R^* \hat{\otimes} R^* \hat{\otimes} \underline{R} \to \mathrm{Hom}(R \otimes R, R),$$

$$\hat{\mathcal{T}}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \otimes d' \mapsto \sum_\lambda (d \blacktriangleleft h_\lambda)(d' \blacktriangleleft h'_\lambda) r_\lambda \in R.$$

Ovdje vrijedi $\mathrm{Hom}_{\mathrm{indVect}}(R \otimes R, \underline{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(R \otimes R, R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{indVectFin}}(R \otimes R, R)$ pa smo kodomenu jednostavno označili s $\mathrm{Hom}(R \otimes R, R)$.

Morfizam $\hat{S}_2$ u $\mathrm{indproVect}$ dan kompozicijom

$$R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \tau_{R,R^*} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{R^*} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{\underline{R}}} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \xrightarrow{\langle\,,\rangle \tilde{\otimes} \langle\,,\rangle \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{\underline{R}}} k \tilde{\otimes} \underline{R} \longrightarrow \underline{R}$$

na jednostavnim tenzorima je $\hat{S}_2\colon d \otimes d' \otimes h \otimes h' \otimes r \mapsto \langle d, h\rangle\langle d', h'\rangle r$ i definira linearno preslikavanje

$$\hat{\mathcal{S}}_2\colon R^* \hat{\otimes} R^* \hat{\otimes} \underline{R} \to \mathrm{Hom}(R \otimes R, R),$$

$$\hat{\mathcal{S}}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \otimes d' \mapsto \sum_\lambda \langle d, h_\lambda\rangle\langle d', h'_\lambda\rangle r_\lambda.$$

Sva preslikavanja iz napomene 9.2.2 su restrikcije odgovarajućih preslikavanja u ovoj napomeni. Naprimjer, T_2 je restrikcija od $\hat{T}_2$, $\mathcal{T}_2$ je restrikcija $\hat{\mathcal{T}}_2$ i slično.

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \otimes ((R^* \hat{\otimes} R^*) \hat{\otimes} \underline{R}) \arrow[r, "\hat{T}_2"] & \underline{R} \\
R \otimes R \otimes ((R^* \hat{\otimes} R^*) \otimes R) \arrow[r, "T_2"] \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_{R\otimes R} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_{R^* \hat{\otimes} R^*} \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R"] & R \arrow[u, "\mathrm{id}_R"']
\end{tikzcd}$$

9.5.3 Dualne baze

U 4.3.1 je definirana filtrirana baza u $\mathrm{indVect}$, u 4.3.2 je dokazano da svaki filtrirani vektorski prostor posjeduje filtriranu bazu. U 3.3.1 je definirana formalna suma u $\mathrm{proVect}$, u 3.3.9 formalna baza u $\mathrm{proVect}$, a u 3.3.13 je dokazano da svaki kofiltrirani vektorski prostor posjeduje formalnu bazu. U 5.4.1 je definirana formalna suma u $\mathrm{indproVect}$.

U sljedećoj propoziciji je ključno da R bude filtrirana konačno-dimenzionalnim komponentama.

Propozicija 9.5.4. *Neka R objekt u* $\mathrm{indVectFin}$ *i neka je $(D_\alpha)_{\alpha\in A}$ filtrirana baza od R. Označimo za svaki $\alpha \in A$ sa $e_\alpha \in R^*$ funkcional na R takav da je za svaki $\beta \in A$*

$$\langle D_\beta, e_\alpha\rangle := e_\alpha(D_\beta) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Tada je taj dualni skup funkcionala $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ formalna baza od R^* kao objekta u $\mathrm{proVectFin}$*, pri čemu na R^* podrazumijevamo kofiltraciju dualnu filtraciji na R.*

Dokaz. Neka su $\{R_n\}_{n\in I}$ komponente filtracije od R. Skup $B := \{D_\alpha \mid \alpha \in A\}$ je filtrirana baza od R, dakle postoji kofinalan usmjeren skup K u I takav da je praslika

$$B_k := (\iota_k^R)^{-1}(B) =: \{D_\alpha \mid \alpha \in A_k\}$$

baza konačno-dimenzionalne komponente R_k, za svaki $k \in K$. Označimo s $B^* := \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ dualni skup funkcionala iz iskaza propozicije. Budući da je $\mathrm{Ker}\,\pi_k^{R^*} = \mathrm{Anih}(R_k)$ za svaki k, to za svaki $k \in K$ vrijedi

$$B_k^* := \pi_k^{R^*}(B^* \backslash \mathrm{Ker}(\pi_k^{R^*})) = \{e_\beta + \mathrm{Anih}(R_k) \mid e_\beta \notin \mathrm{Anih}(R_k)\} = \{e_\alpha + \mathrm{Anih}(R_k) \mid \alpha \in A_k\}.$$

Za svaki $n \in I$ sljedeći je dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} R^* \arrow[r, "\langle,\rangle"] & k \\
R_n \otimes R^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "\langle,\rangle"] \arrow[d, two heads] & k \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
R_n \otimes R^* / \operatorname{Anih}(R_n) \arrow[r, "\langle,\rangle"] & k
\end{tikzcd}$$

gdje je filtrirajuća komponenta $R_n \hat{\otimes} R^*$ jednaka $R_n \otimes R^*$ jer je R_n konačno-dimenzionalan, po propoziciji 9.4.2. Sparivanje $R_n \otimes R^*/\operatorname{Anih}(R_n) \to k$ u zadnjem retku zadano je sa $\langle r, h + \operatorname{Anih}(R_n)\rangle := \langle r, h\rangle$ i očito je ono dobro definirano i nedegenerirano sparivanje.

Za $k \in K$, $D_\alpha \in B_k$, $e_\beta \in B_k^*$, vrijedi $\langle D_\alpha, e_\beta + \operatorname{Anih}(R_k)\rangle = \langle D_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$, dakle B_k^* čine dualni skup funkcionala za bazu B_k vektorskog prostora R_k. Budući da je R_k konačno-dimenzionalan, vektorski prostori R_k i $R^*/\operatorname{Anih}(R_k) \cong R_k^*$ su jednake (konačne) dimenzije, pa je taj dualni skup funkcionala baza od $R^*/\operatorname{Anih}(R_k)$. $\square$

9.5.5. Neka je R filtrirani vektorski prostor, objekt u $\mathrm{indVect}$. Sa $\underset{\sim}{R}$ je označen isti vektorski prostor sa zaboravljenom filtracijom, $\underset{\sim}{R}$ je objekt u Vect.

Korolar 9.5.6. *Neka je R objekt u* $\mathrm{indVectFin}$ *i neka je R^* njegov dual, objekt u* $\mathrm{proVectFin}$. *Neka je $(e_\alpha)_\alpha$ formalna baza od R^* dualna filtriranoj bazi $(D_\alpha)_\alpha$ od R. Tada je $(e_\alpha \otimes D_\beta)_{\alpha,\beta}$ formalna baza od $R^* \hat{\otimes} \underset{\sim}{R} = R^* \tilde{\otimes} \underset{\sim}{R}$ u* $\mathrm{proVect}$.

Dokaz. Tvrdnja lako slijedi jer je $(D_\alpha)_\alpha$ formalna baza trivijalno kofiltriranog vektorskog prostora $\underset{\sim}{R}$, a prethodno je dokazano u propoziciji 3.3.14 da je tada $(e_\alpha \otimes D_\beta)_{\alpha,\beta}$ formalna baza tenzorskog produkta tih kofiltriranih vektorskih prostora. $\square$

9.5.4 Kanonski elementi $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$

Propozicija 9.5.7. *Neka je R objekt u* $\mathrm{indVectFin}$ *i neka je R^* njegov dual, objekt u* $\mathrm{proVectFin}$. *Neka je $(e_\alpha)_\alpha$ formalna baza od R^* dualna filtriranoj bazi $(D_\alpha)_\alpha$ od R. Tada je izraz $\sum_\alpha e_\alpha$ formalna suma u R^* i kanonski element*

$$\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$$

je formalna suma u kofiltriranom vektorskom prostoru $R^* \hat{\otimes} \underset{\sim}{R} = R^* \tilde{\otimes} \underset{\sim}{R}$. Nadalje, za kanonski element vrijedi:

$$\hat{\mathcal{S}}_1\Big(\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha\Big)(Y) = \sum_\alpha \langle Y, e_\alpha\rangle D_\alpha = Y$$

za svaki $Y \in R$.

Dokaz. (i) Postoji kofinalan podskup K indeksnog skupa I za koji se formalna baza od R^* projicira u baze komponenti R_k^* za $k \in K$, tako da se svi elementi osim onih koji se preslikaju u elemente baze preslikaju u 0. Budući da je za svaki k komponenta R_k^* konačno-dimenzionalna, to se projekcijom $\pi_k^{R^*}: R^* \to R_k^*$ svi osim konačno mnogo elemenata baze $\{e_\alpha\}_\alpha$ preslikaju u 0. Projekcija $\pi_k^{R^* \hat{\otimes} \underline{R}}$ na komponentu $R_k^* \otimes R$ se na jednostavnim tenzorima podudara sa $\pi_k^{R^*} \otimes \mathrm{id}_R$, pa iz prethodnog vidimo da se za svaki k svi osim konačno mnogo sumanada $e_\alpha \otimes D_\alpha$ preslikaju u 0. Time je dokazano da su dani izrazi formalne sume.

(ii) Podsjetimo se da je za R iz $\mathrm{indVect}$ formalna suma u R isto što i formalna suma u $\underline{R}$: to su sume s konačno mnogo pribrojnika različitih od 0. Element $Y \in R$ možemo zapisati u filtriranoj bazi od R kao formalnu (s konačno mnogo pribrojnika različitih od 0) sumu $\sum_\beta y_\beta D_\beta$. Sparivanje $R \tilde{\otimes} R^* \to k$ distribuira po formalnim sumama pa je $\langle Y, e_\alpha \rangle = \sum_\beta y_\beta \langle D_\beta, e_\alpha \rangle = y_\alpha$. Dakle, $\sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle D_\alpha$ je formalna suma u R jednaka formalnoj sumi $\sum_\alpha y_\alpha D_\alpha$ i njena je vrijednost Y. □

Propozicija 9.5.8. *Neka je R objekt u $\mathrm{indVectFin}$ i neka je R^* njegov dual, objekt u $\mathrm{proVectFin}$. Neka je $(e_\alpha)_\alpha$ formalna baza od R^* dualna filtriranoj bazi $(D_\alpha)_\alpha$ od R. Neka je $\phi \in \mathrm{End}(R)$. Za kanonski element $\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$ u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ tada vrijedi da je $\sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$ formalna suma u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ i*

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha))(Y) = \sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha) = \phi(Y)$$

za svaki $Y \in R$. Dakle za linearno preslikavanje

$$\mathcal{K}\colon \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \quad \mathcal{K}(\phi) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$$

vrijedi

$$\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{K} = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(R)}$$

Dokaz. Morfizam $\mathrm{id}_{R^*} \tilde{\otimes} \phi\colon R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \to R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$ distribuira po formalnim sumama, pa je, budući da je kanonski element formalna suma, njegova slika $\sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$ također formalna suma. Po prethodnoj propoziciji znamo da je $\sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle D_\alpha$ formalna suma u R vrijednosti Y. Morfizam $\phi\colon R \to R$ distribuira po formalnim sumama u R pa je $\sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha)$ formalna suma i vrijedi:

$$\phi(Y) = \phi(\sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle D_\alpha) = \sum_\alpha \langle Y, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha).$$

□

Propozicija 9.5.9. *$\hat{\mathcal{S}}_1$ i $\hat{\mathcal{S}}_2$ su injekcije.*

Dokaz. Dokaz analogan dokazu u propoziciji 9.3.2, vidi napomenu 9.3.3. □

Napomena 9.5.10. Dakle, linearna preslikavanja

$$\hat{\mathcal{S}}_1\colon R^* \hat{\otimes} \underline{R} \to \mathrm{End}(R), \quad \hat{\mathcal{S}}_1(\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda)\colon Y \mapsto \sum_\lambda \langle Y, f_\lambda \rangle E_\lambda \in R$$

$$\mathcal{K}\colon \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \quad \mathcal{K}(\phi) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$$

su međusobno inverzne bijekcije, po prethodne dvije propozicije. Kanonskom elementu je pridružena identiteta i iz injektivnosti od $\mathcal{S}_1$ zaključujemo da kanonski element ne ovisi o odabiru filtrirane baze od R. To opravdava naziv kanonski element. Također zaključujemo da vrijednost formalne sume $\sum_\alpha e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$ ne ovisi o izboru filtrirane baze od R.

Propozicija 9.5.11. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* indVectFin *s bijektivnim antipodom. Za $\phi \in \mathrm{End}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(\underline{R}, \underline{R})$ definiramo*

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha).$$

To je formalna suma u $R^* \hat{\otimes} \underline{R} = R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$. $\mathcal{L}$ je dakle linearno preslikavanje

$$\mathcal{L}\colon \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}.$$

Dokaz. Kanonski element $\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$ je formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$, pa je

$$\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha \otimes D_\alpha \otimes e_\beta \otimes D_\beta$$

formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$ čija je vrijednost jednaka tenzorskom produktu dva kanonska elementa $\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$ i $\sum_\beta e_\beta \otimes D_\beta$ po lemi 5.4.7 o računanju s formalnim sumama. Preslikavanja $\tau_{\underline{R},R^*}$, $S_{R^*}^{-1}$ i $\phi\colon \underline{R} \to \underline{R}$ su morfizmi u $\mathrm{proVect}$, pa je i

$$\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha \otimes S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \otimes \phi(D_\alpha)$$

formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} \underline{R}$. Dalje, preslikavanja $\mu_{R^*}\colon R^* \tilde{\otimes} R^* \to R^*$ i $\mu_{\underline{R}}\colon \underline{R} \tilde{\otimes} \underline{R} \to \underline{R}$ su morfizmi u $\mathrm{proVect}$ pa je i

$$\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha)$$

formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$.

□

Propozicija 9.5.12. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* indVectFin *s bijektivnim antipodom. Tada za svaki $Y \in R$ i svaki $\phi \in \mathrm{End}(R)$ vrijedi*

$$\hat{\mathcal{T}}_1(\mathcal{L}(\phi))(Y) = Y \text{ ``}\blacktriangleleft\text{'' } \mathcal{L}(\phi) = \phi(Y).$$

Dakle za linearno preslikavanje

$$\mathcal{L}\colon \operatorname{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \quad \mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha)$$

vrijedi

$$\hat{\mathcal{T}}_1 \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_{\operatorname{End}(R)}.$$

Dokaz. Slijedi račun s formalnim sumama koji će biti opravdan nakon njega.

$$\begin{array}{rcll}
Y \,\text{''}\!\blacktriangleleft\!\text{''}\, \mathcal{L}(\phi) & = & Y \,\text{''}\!\blacktriangleleft\!\text{''} \big(\sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha) \big) = & \text{(i)} \\
& = & \sum_{\alpha,\beta} \big(Y \blacktriangleleft (e_\alpha S^{-1}(e_\beta)) \big) D_\beta \phi(D_\alpha) = & \text{(ii)} \\
& = & \sum_{\alpha,\beta} \big(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} \big) D_\beta \phi(D_\alpha) = & \\
& = & \sum_{\alpha,\beta} \big(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} D_\beta \phi(D_\alpha) \big) = & \text{(iii)} \\
& = & \sum \sum_{\alpha,\beta} \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} D_\beta \phi(D_\alpha) = & \text{(iv)} \\
& = & \sum \sum_\beta Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle D_\beta (\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha)) = & \\
& = & \sum \sum_\beta Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle D_\beta \phi(Y_{(1)}) = & \text{(v)} \\
& = & \sum Y_{(3)} \big(\sum_\beta \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle D_\beta \big) \phi(Y_{(1)}) = & \\
& = & \sum Y_{(3)} S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)}) = & \\
& = & \sum \epsilon(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)}) = & \\
& = & \phi(Y) &
\end{array}$$

Dokaz korektnosti računa s formalnim sumama.

(i) Prije je pokazano da je $\mathcal{L}(\phi)$ formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$ i da je preslikavanje

$$\text{''}\!\blacktriangleleft\!\text{''}\colon R \tilde{\otimes} (R^* \tilde{\otimes} \underline{R}) \to \underline{R}$$

morfizam kofiltriranih vektorskih prostora, pa distribuira po formalnim sumama.

(ii) Suma $\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)}$ je formalna suma za svaki α, β jer je nastala od formalne (konačne) sume

$$\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)} \otimes e_\alpha \otimes e_\beta$$

morfizmom u $\mathrm{indproVect}$. Množenje distribuira po formalnim sumama pa je i sljedeća suma formalna

$$\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} D_\beta \phi(D_\alpha)$$

(iii) Sljedeći izraz je formalna suma u $R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$:

$$\sum \sum_{\alpha,\beta} Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)} \otimes e_\alpha \otimes D_\alpha \otimes e_\beta \otimes D_\beta$$

jer je ona tenzorski produkt formalnih suma:

$$(\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)}) \otimes (\sum_{\alpha} e_\alpha \otimes D_\alpha) \otimes (\sum_{\beta} e_\beta \otimes D_\beta)$$

pa je i sljedeći izraz formalna suma jer je nastao morfizmom u $\mathrm{indproVect}$ od nje:

$$\sum \sum_{\alpha,\beta} \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} D_\beta \phi(D_\alpha)$$

Grupiranjem sumanada te formalne sume dobije se prethodna formalna suma u računu:

$$\sum_{\alpha,\beta} \big(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle Y_{(3)} D_\beta \phi(D_\alpha) \big)$$

(iv)

$$\sum \sum_{\alpha,\beta} Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \, \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \, \phi(D_\alpha)$$

Grupiranjem sumanada formalne sume dobije se formalna suma formalnih suma:

$$\sum \sum_{\beta} \big(\sum_{\alpha} Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \, \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \, \phi(D_\alpha) \big)$$

Unutrašnja suma $\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \, \phi(D_\alpha)$ je formalna suma i množenje distribuira po formalnim sumama pa je vrijednosti prethodne jednaka vrijednost ove formalne sume:

$$\sum \sum_{\beta} Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \big(\sum_{\alpha} \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \, \phi(D_\alpha) \big)$$

a to je

$$\sum \sum_{\beta} Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \phi(Y_{(1)})$$

(v) Grupiranjem sumanada formalne sume dobije se formalna suma formalnih suma:

$$\sum \big(\sum_{\beta} Y_{(3)} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \phi(Y_{(1)}) \big)$$

Unutrašnja suma $\sum_\beta \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta$ je formalna suma i množenje distribuira po formalnim sumama pa je vrijednosti prethodne jednaka vrijednost ove formalne sume:

$$\sum Y_{(3)} \big(\sum_{\beta} \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle \, D_\beta \big) \phi(Y_{(1)})$$

a to je

$$\sum Y_{(3)} S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)})$$

Ukratko, $\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$ je formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$, $\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)}$ je formalna (konačna) suma u $R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R$ pa su i njihovi tenzorski produkti formalne sume. Sljedeća preslikavanja su morfizmi u $\mathrm{indproVect}$: "$\blacktriangleleft$": $R \tilde{\otimes} (R^* \tilde{\otimes} \underline{R}) \to \underline{R}$, $\phi \colon \underline{R} \to \underline{R}$, $S^{-1} \colon R^* \to R^*$, $\mu_{R^*} \colon R^* \hat{\otimes} R^* \to R^*, \langle\, , \rangle \colon R \tilde{\otimes} R^* \to k$, $\mu_{R,\underline{R}} \colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, $\mu_R \colon R \otimes R \to R$, $\mu_{\underline{R}} \colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, pa su i kompozicije tenzorskih produkata tih preslikavanja morfizmi u $\mathrm{indproVect}$. Sve sume koje se pojavljuju u računu mogu se dobiti iz tenzorskog produkta navedenih formalnih suma primjenom navedenih morfizama i njihovih tenzorskih produkata pa slijedi da su one formalne sume. U računu se koristi distributivnost "$\blacktriangleleft$" i μ_R po formalnim sumama.

$\square$

Propozicija 9.5.13. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ s bijektivnim antipodom. Tada za svaki $Y \in R$ i svaki $\phi \in \mathrm{End}(R)$ vrijedi*

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathcal{L}(\phi))(Y) = S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}).$$

Nadalje, linearno preslikavanje

$$\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L} \colon \mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R), \quad \hat{\mathcal{S}}_1(\mathcal{L}(\phi)) \colon Y \mapsto S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)})$$

ima inverzno preslikavanje

$$\mathcal{U}_1 \colon \mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R), \quad \mathcal{U}_1(\psi) \colon Z \mapsto Z_{(2)}\psi(Z_{(1)}).$$

Dokaz. Po definiciji $\mathcal{L}(\phi)$ imamo

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathcal{L}(\phi))(Y) \colon Y \mapsto \sum_{\alpha,\beta} \langle Y, e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \phi(D_\alpha)$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
Y \mapsto & \textstyle\sum_{\alpha,\beta} \langle Y, e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \phi(D_\alpha) = && \text{(i)} \\
= & \textstyle\sum_{\alpha,\beta} \left(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle \right) D_\beta \phi(D_\alpha) = && \text{(ii)} \\
= & \textstyle\sum \sum_{\alpha,\beta} \left(\langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \phi(D_\alpha) \right) = && \text{(iii)} \\
= & \textstyle\sum (\sum_\beta \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta)(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha)) = && \text{(iv)} \\
= & \textstyle\sum (\sum_\beta \langle S^{-1}(Y_{(2)}), e_\beta \rangle D_\beta) \phi(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle D_\alpha) = \\
= & \textstyle\sum S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)})
\end{aligned}$$

Dokaz opravdanosti računa s formalnim sumama:

(i) Za svaki α i β je suma

$$\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle$$

konačna suma jednaka $\langle Y, e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \rangle$.

(ii) Suma

$$\sum\sum_{\alpha,\beta} Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes e_\alpha \otimes S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \otimes \phi(D_\alpha)$$

je formalna suma u $R \tilde{\otimes} R \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} \underline{R}$ pa je i

$$\sum\sum_{\alpha,\beta} \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \phi(D_\alpha)$$

formalna suma u $\underline{R}$ jer je slika po morfizmu u $\mathrm{indproVect}$.

(iii) Sume $\sum_\beta \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta$ i $\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha)$ su za svaki $Y_{(1)} \otimes Y_{(2)}$ formalne sume u $\underline{R}$, pa je konačna suma njihovih umnožaka

$$\sum (\sum_\beta \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta)(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha))$$

formalna suma u $\underline{R}$. Tenzorski produkt formalnih suma je za svaki $Y_{(1)} \otimes Y_{(2)}$

$$(\sum_\beta \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta) \otimes (\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha))$$

formalna suma u $\underline{R} \tilde{\otimes} \underline{R}$ jednake vrijednosti kao

$$\sum_{\alpha,\beta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \otimes \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha),$$

a množenje distribuira po formalnim sumama pa je sljedeća suma jednake vrijednosti kao prethodna:

$$\sum\sum_{\alpha,\beta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\beta) \rangle D_\beta \langle Y_{(1)}, e_\alpha \rangle \phi(D_\alpha).$$

(iv) $\phi\colon \underline{R} \to \underline{R}$ je morfizam u $\mathrm{indproVect}$ pa distribuira po formalnim sumama.

Ukratko, $\sum_\alpha e_\alpha \otimes D_\alpha$ je formalna suma u $R^* \tilde{\otimes} \underline{R}$, $\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)}$ je formalna (konačna) suma u $R \tilde{\otimes} R$ pa su i njihovi tenzorski produkti formalne sume. Sljedeća preslikavanja su morfizmi u $\mathrm{indproVect}$ pa su i kompozicije tenzorskih produkata tih preslikavanja morfizmi u $\mathrm{indproVect}$: $S^{-1}\colon R^* \to R^*$, $\mu_{R^*}\colon R^* \hat{\otimes} R^* \to R^*$, $\langle\, ,\rangle\colon R \otimes R^* \to k$, $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, $\mu_{\underline{R}}\colon R \otimes R \to R$, $\mu_R\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$. Sve sume u računu mogu se dobiti iz tenzorskih produkata navedenih formalnih suma primjenom navedenih morfizama u $\mathrm{indproVect}$ i njihovih tenzorskih produkata, dakle, one su formalne sume. U računu se koristi i distributivnost po formalnim sumama morfizama u $\mathrm{indproVect}$.

Sada dokazujemo da je $\mathcal{U}_1$ inverzno preslikavanje od $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L}$, to jest

$$(\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L}) \circ \mathcal{U}_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(R)} = \mathcal{U}_1 \circ (\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L}).$$

Za

$$\psi := (\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L})(\phi)\colon Y \mapsto \sum S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)})$$

imamo

$$\mathcal{U}_1(\psi)(Z) = \sum Z_{(2)}\psi(Z_{(1)}) = \sum Z_{(3)}S^{-1}(Z_{(2)})\phi(Z_{(1)}) = \sum \epsilon(Z_{(2)})\phi(Z_{(1)}) = \phi(Z).$$

Slično za

$$\phi := \mathcal{U}(\psi)\colon Z \mapsto \sum Z_{(2)}\psi(Z_{(1)})$$

imamo

$$(\hat{\mathcal{S}}_1\circ\mathcal{L})(\phi)(Y) = \sum S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}) = \sum S^{-1}(Y_{(3)})Y_{(2)}\psi(Y_{(1)}) = \sum \epsilon(Y_{(2)})\psi(Y_{(1)}) = \psi(Y).$$

□

Korolar 9.5.14. *Preslikavanje $\mathcal{L}$ je bijekcija. Preslikavanja $\hat{\mathcal{T}}_1$ i $\mathcal{L}$ su međusobno inverzne bijekcije.*

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji je $\hat{\mathcal{S}}_1 \circ \mathcal{L}$ bijekcija, a po propoziciji 9.5.9 je $\hat{\mathcal{S}}_1$ injekcija, dakle $\hat{\mathcal{S}}_1$ je bijekcija, pa je i $\mathcal{L}$ bijekcija. Po propoziciji 9.5.12 je $\hat{\mathcal{T}}_1 \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(R)}$ pa iz prethodnog slijedi da su $\hat{\mathcal{T}}_1$ i $\mathcal{L}$ međusobno inverzne bijekcije. □

Napomena 9.5.15. Linearna preslikavanja

$$\hat{\mathcal{T}}_1\colon R^* \hat{\otimes} \underline{R} \to \mathrm{End}(R), \quad \hat{\mathcal{T}}_1(\sum_\lambda f_\lambda \otimes E_\lambda)\colon Y \mapsto \sum_\lambda (Y \blacktriangleleft f_\lambda)E_\lambda$$

$$\mathcal{L}\colon \mathrm{End}(R) \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}, \quad \mathcal{L}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta \phi(D_\alpha)$$

su dakle međusobno inverzne bijekcije. Iz injektivnosti tada slijedi da $\mathcal{L}(\phi)$ ne ovisi o izboru filtrirane baze od R. Element koji se preslikava u identitetu je tada kanonski element za "$\blacktriangleleft$"

$$\mathcal{L}(\mathrm{id}_R) = \sum_{\alpha,\beta} e_\alpha S^{-1}(e_\beta) \otimes D_\beta D_\alpha.$$

Posljedica bijektivnosti je da kompozicija endomorfizama $\circ\colon\ \mathrm{End}(R)\otimes\mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R)$ definira suprotno množenje elemenata

$$(R^* \hat{\otimes} R) \otimes (R^* \hat{\otimes} R) \to (R^* \hat{\otimes} R)$$

koje se na vektorskom potprostoru $R^* \otimes R$ podudara s množenjem u poludirektnom produktu $R^* \sharp R$.

Napomena 9.5.16. Ne možemo definirati množenje na $R^* \hat{\otimes} R$ u kategoriji $\mathrm{proVect}$ jer nije definirano upotpunjenje $◂ \colon \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \to \underline{R}$ djelovanja ni upotpunjenje $\langle\,,\rangle\colon \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \to k$ sparivanja. Naprimjer, $\sum_\alpha \langle D_\alpha, e_\alpha \rangle = \infty$ čim R nije konačne dimenzije.

$$\begin{tikzcd}
R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \arrow[d, "\mathrm{id}_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R \otimes \Delta_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R"] \\
R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \arrow[d, "\mathrm{id}_{R^*} \otimes \tau_{R,R^*} \otimes \mathrm{id}_{R^*} \otimes \mathrm{id}_R"] \\
R^* \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \tilde{\otimes} R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \arrow[d, dotted, "\mu_{R^*} \otimes ◂ \otimes \mathrm{id}_R \text{ nije definirano}"] \\
R^* \tilde{\otimes} k \tilde{\otimes} \underline{R} \arrow[d] \\
R^* \tilde{\otimes} \underline{R}
\end{tikzcd}$$

9.5.5 Dvostruki kanonski element $\mathcal{M}$

Slično kao prethodne dvije propozicije dokaže se sljedeća propozicija.

Propozicija 9.5.17. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ s bijektivnim antipodom. Definiramo linearno preslikavanje*

$$\mathcal{M}\colon \operatorname{Hom}(R \otimes R, R) \to R^* \hat{\otimes} R^* \hat{\otimes} \underline{R}$$

$$\mathcal{M}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} e_\alpha S^{-1}(e_\gamma) \otimes e_\beta S^{-1}(e_\delta) \otimes D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)$$

Za linearna preslikavanja $\hat{\mathcal{T}}_2$, $\hat{\mathcal{S}}_2\colon R^* \hat{\otimes} R^* \hat{\otimes} \underline{R} \to \operatorname{Hom}(R \otimes R, R)$ definirana u napomeni 9.5.3

$$\hat{\mathcal{T}}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \otimes d' \mapsto \sum_\lambda (d ◂ h_\lambda)(d' ◂ h'_\lambda) r_\lambda$$

$$\hat{\mathcal{S}}_2(\sum_\lambda h_\lambda \otimes h'_\lambda \otimes r_\lambda)\colon d \otimes d' \mapsto \sum_\lambda \langle d, h_\lambda \rangle \langle d', h'_\lambda \rangle r_\lambda$$

vrijedi

$$\hat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{M} = \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(R \otimes R, R)}$$

$$(\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M})(\phi)(Y \otimes Z) = S^{-1}(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)})$$

i $\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M}$ ima inverzno preslikavanje

$$\mathcal{U}_2\colon \operatorname{Hom}(R \otimes R, R) \to \operatorname{Hom}(R \otimes R, R)$$

$$\mathcal{U}_2(\psi)\colon Y \otimes Z \mapsto Y_{(2)} Z_{(2)} \psi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}).$$

Dokaz. Dokazujemo
$$\hat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{M} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(R \otimes R, R)}.$$

Izraz
$$\mathcal{M}(\phi) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} e_\alpha S^{-1}(e_\gamma) \otimes e_\beta S^{-1}(e_\delta) \otimes D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)$$
je formalna suma jer je nastala od kanonskih elemenata $\sum_\lambda e_\lambda \otimes D_\lambda \in R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ tenzoriranjem u $\mathrm{indproVect}$ i primjenom morfizama $\tau_{\underline{R},R^*}$, τ_{R^*,R^*}, $\tau_{\underline{R},\underline{R}}$, $S^{-1}_{R^*}$, μ_{R^*}, te morfizama $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, $\mu_{\underline{R}}\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ i $\phi\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ u $\mathrm{indproVect}$. Sljedeća suma je formalna zbog svojstva preslikavanja $\hat{\mathcal{T}}_2$.
$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \big(Y \blacktriangleleft (e_\alpha S^{-1}(e_\gamma))\big)\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \big(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big)\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta) =$$
Unutrašnja suma u sljedećem izrazu je formalna jer je nastala iz sumanda prethodne formalne sume (koji je umnožak formalne sume, elementa iz R i elementa iz $\underline{R}$) primjenom množenja $\mu_R\colon R \otimes R \to R$ i $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ koja su morfizmi u $\mathrm{indproVect}$. Vanjske formalne sume su dakle iste vrijednosti.
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \Big(\sum \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)} \big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)\Big) = (i)$$
Sljedeća suma (ii) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta kanonskih elemenata $\sum_\lambda e_\lambda \otimes D_\lambda \in R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ i konačne sume $\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)}$ primjenom simetrizatora, zatim $S^{-1}_{R^*}$, μ_{R^*}, te morfizama $\langle\,,\rangle\colon R \otimes R^* \to k$, $\blacktriangleleft\colon R \otimes R^* \to R$, $\phi\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ i $\mu_{\underline{R}}\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ u $\mathrm{indproVect}$. Jednake je vrijednosti kao prethodna jer prethodna iz nje nastaje grupiranjem sumanada.
$$(ii) = \sum \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)} \big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta) = (i)$$
Grupiranjem sumanada iz te dobivamo sljedeću formalnu sumu.
$$(ii) = \sum \sum_{\beta,\gamma,\delta} \Big(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)} \big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)\Big) = (iii)$$
Sljedeća suma (iv) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta kanonskih elemenata $\sum_\lambda e_\lambda \otimes D_\lambda \in R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ i konačne sume $\sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)} \otimes Y_{(3)}$ primjenom simetrizatora, zatim $S^{-1}_{R^*}$, μ_{R^*}, te morfizama $\langle\,,\rangle\colon R \otimes R^* \to k$, $\blacktriangleleft\colon R \otimes R^* \to R$, $\phi\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$, $\mu_{R,\underline{R}}\colon R \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ i $\mu_{\underline{R}}\colon \underline{R} \otimes \underline{R} \to \underline{R}$ u $\mathrm{indproVect}$.
$$(iv) = \sum \sum_{\beta,\gamma,\delta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)} \big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

i zatim, jer je morfizam ϕ je morfizam u $\mathrm{indproVect}$, vrijedi:

$$= \sum\sum_{\beta,\gamma,\delta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi((\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle D_\alpha) \otimes D_\beta) =$$

$$= \sum\sum_{\beta,\gamma,\delta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \big(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)\big) =$$

iz čega primjenom množenja $\mu_{R,\underline{R}}$ i $\mu_{\underline{R}}$ unutar sumanada dobivamo formalnu sumu (iii):

$$= \sum\sum_{\beta,\gamma,\delta} \Big(\sum_\alpha \langle Y_{(1)}, e_\alpha\rangle \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha \otimes D_\beta)\Big) = (iii)$$

Dalje, iz formalne sume (iv)

$$(iv) = \sum\sum_{\beta,\gamma,\delta} \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

grupiranjem dobivamo

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} \Big(\sum_\gamma \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (v)$$

Sljedeća suma (vi) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta formalnih suma (kao gore) primjenom simetrizatora i morfizama S^{-1}_{R*}, S^{-1}_{R}, μ_{R*}, $\blacktriangleleft$, ϕ, μ_R, $\mu_{R,\underline{R}}$, $\mu_{\underline{R}}$ u $\mathrm{indproVect}$.

$$(vi) = \sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta \big(\sum_\gamma \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle D_\gamma\big) \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

što je primjenom množenja $\mu_{\underline{R}}$ unutar sumanda jednako formalnoj sumi (v):

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} \Big(\sum_\gamma \langle Y_{(2)}, S^{-1}(e_\gamma)\rangle Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta D_\gamma \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (v)$$

Dalje se postupak za Z provede slično kao za Y. Sljedeća suma (vi) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta kanonskih elemenata i konačne sume primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$ slično kao gore.

$$(vi) = \sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\big(Z \blacktriangleleft (e_\beta S^{-1}(e_\delta))\big) D_\delta S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\big(\sum \langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle \langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)}\big) D_\delta S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

Množenjem unutar sumanda nastaje

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} \Big(\sum Y_{(3)} \langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle \langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)}) \phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (vii)$$

Sljedeća suma je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta kanonskih elemenata i konačnih suma primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$ slično kao gore.

$$(viii) = \sum\sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

Grupiranjem sumanada dobivamo prethodnu sumu:

$$= \sum\sum_{\beta,\delta} \Big(\sum Y_{(3)}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (vii)$$

Grupiranjem sumanada iz formalne sume (viii) dobivamo:

$$(viii) = \sum\sum\sum_{\beta,\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta) =$$

$$= \sum\sum\sum_{\delta} \Big(\sum_{\beta} Y_{(3)}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (ix)$$

Sljedeća suma (x) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta kanonskog elementa i konačnih suma primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$ slično kao gore.

$$(x) = \sum\sum\sum_{\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}) =$$

što je, jer je ϕ morfizam u $\mathrm{indproVect}$, jednako

$$= \sum\sum\sum_{\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\big(\sum_{\beta}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\big) =$$

iz čega se množenjem unutar sumanda dobiva formalna suma

$$= \sum\sum\sum_{\delta} \Big(\sum_{\beta} Y_{(3)}\langle Z_{(1)}, e_\beta\rangle\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes D_\beta)\Big) = (ix)$$

Grupiranjem sumanada formalne sume (x) imamo

$$(x) = \sum\sum\sum_{\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}) =$$

$$= \sum\sum \Big(\sum_{\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)})\Big) = (xi)$$

Sljedeća suma (xii) je formalna jer je nastala iz tenzorskog produkta konačnih suma primjenom morfizama u $\mathrm{indproVect}$ slično kao gore.

$$(xii) = \sum\sum Y_{(3)} Z_{(3)} S^{-1}(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}) =$$

$$= \sum\sum Y_{(3)} Z_{(3)} \big(\sum_{\delta}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle D_\delta\big) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}) =$$

što je množenjem unutar sumanda jednako

$$= \sum\sum\Big(\sum_{\delta} Y_{(3)}\langle Z_{(2)}, S^{-1}(e_\delta)\rangle Z_{(3)} D_\delta S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)})\Big) = (xi)$$

Dalje su sume konačne i računamo

$$(xii) = \sum\sum Y_{(3)} Z_{(3)} S^{-1}(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)}) =$$

$$= \sum\sum Y_{(3)}\big(\sum Z_{(3)} S^{-1}(Z_{(2)})\big) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)}) =$$

$$= \sum\sum Y_{(3)}\epsilon(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)}) =$$

$$= \sum(\sum Y_{(3)} S^{-1}(Y_{(2)}))\phi(Y_{(1)}\otimes(\sum \epsilon(Z_{(2)})Z_{(1)})) =$$

$$= \sum \epsilon(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z) =$$

$$= \phi((\sum \epsilon(Y_{(2)})Y_{(1)})\otimes Z) =$$

$$= \phi(Y\otimes Z)$$

Dokazali smo da vrijedi

$$\hat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{M} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(R\otimes R,R)}.$$

Sličnim zaključivanjem može se pokazati da vrijedi

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \langle Y, e_\alpha S^{-1}(e_\gamma)\rangle\langle Z, e_\beta S^{-1}(e_\delta)\rangle D_\delta D_\gamma \phi(D_\alpha\otimes D_\beta) = S^{-1}(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)})$$

to jest

$$(\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M})(\phi)(Y\otimes Z) = S^{-1}(Z_{(2)}) S^{-1}(Y_{(2)})\phi(Y_{(1)}\otimes Z_{(1)}).$$

Na kraju se lako provjeri da je

$$\mathcal{U}_2 \circ (\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(R\otimes R,R)}$$

$$(\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M}) \circ \mathcal{U}_2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(R\otimes R,R)}.$$

□

Korolar 9.5.18. *Preslikavanje $\mathcal{M}$ je bijekcija. Preslikavanja $\mathcal{M}$ i $\hat{\mathcal{T}}_2$ su međusobno inverzne bijekcije.*

Dokaz. Po prethodnoj propoziciji $\hat{\mathcal{S}}_2 \circ \mathcal{M}$ je bijekcija, a po propoziciji 9.5.9 je $\hat{\mathcal{S}}_2$ injekcija, dakle $\hat{\mathcal{S}}_2$ je bijekcija, pa je i $\mathcal{M}$ bijekcija. Iz $\hat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{M} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(R\otimes R,R)}$ tada slijedi da su $\mathcal{M}$ i $\hat{\mathcal{T}}_2$ međusobno inverzne bijekcije. □

Napomena 9.5.19. Dakle, ako je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$, onda je R^* unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$ i $\langle\,,\,\rangle\colon R\otimes R^*\to k$ je nedegenerirano Hopfovo sparivanje u $\mathrm{indproVectFin}$. Sva preslikavanja $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ su injekcije, kao restrikcije bijekcija $\hat{\mathcal{S}}_1$, $\hat{\mathcal{S}}_2$, $\hat{\mathcal{T}}_1$, $\hat{\mathcal{T}}_2$, bez dodatnih uvjeta na Hopfovu algebru R osim bijektivnosti antipoda. Po teoremu 9.3.10 dakle, za unutrašnju Hopfovu algebru R u $\mathrm{indVectFin}$ s bijektivnim antipodom vrijedi: R je pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad R^* u $\mathrm{indproVect}$ ako i samo ako postoji morfizam $\rho\colon R\to R^*\sharp R$ u $\mathrm{indproVect}$ za koji je $Z\blacktriangleleft\rho(Y)=YZ$, za sve Y, $Z\in R$. Pitamo se za koje Hopfove algebre R postoji takav ρ.

Već znamo da je $\mathcal{L}\colon\ \mathrm{End}(R)\to R^*\hat{\otimes}\underline{R}$ bijekcija i da vrijedi $Z\,\text{"}\blacktriangleleft\text{"}\,\mathcal{L}(\phi)=\phi(Z)$, pa takav ρ postoji točno onda kad: postoji korestrikcija na $R^*\otimes R$ preslikavanja

$$R\to\mathrm{End}(R)\to R^*\hat{\otimes}R,\qquad Y\mapsto\phi_Y\mapsto\mathcal{L}(\phi_Y),\ \text{gdje je }\phi_Y\colon Z\mapsto YZ$$

i ona je morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Pogledajmo kada točno R ima to svojstvo.

9.5.6 Luina formula

Propozicija 9.5.20. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVectFin}$ *s bijektivnim antipodom. Označimo za $Y\in R$ sa $\phi_Y\in\mathrm{End}\,R$ množenje slijeva s Y, $\phi_Y(Z)=YZ$ i definiramo*

$$\mathrm{Lu}(Y):=\mathcal{L}(\phi_Y)=\sum_{\alpha,\beta}e_\alpha S^{-1}(e_\beta)\otimes D_\beta YD_\alpha.$$

Tada je $\mathrm{Lu}\colon\ R\to R^*\hat{\otimes}\underline{R}$ *morfizam u* $\mathrm{indproVect}$ *i moguće ga je korestringirati na $R^*\tilde{\otimes}R$ do morfizma $\rho\colon\ R\to R^*\tilde{\otimes}R$ u* $\mathrm{indproVect}$ *ako i samo ako je za svaki $Y\in R$ preslikavanje*

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(Y))=\hat{\mathcal{S}}_1(\mathcal{L}(\phi_Y))\colon Z\mapsto\sum S^{-1}(Z_{(2)})YZ_{(1)}$$

konačnog ranga.

Dokaz. Lako se vidi da je Lu morfizam u $\mathrm{indproVect}$, jer je ono kompozicija morfizama u $\mathrm{indproVect}$. Prvo zamijetimo da vrijede sljedeće jednakosti vektorskih prostora: $R^*\tilde{\otimes}\underline{R}=R^*\hat{\otimes}\underline{R}$, te $R^*\tilde{\otimes}R=R^*\otimes R$ jer zbog konačne dimenzionalnosti filtrirajućih komponenti R_n od R vrijedi $R^*\hat{\otimes}R_n=R^*\otimes R_n$. U dokazu ćemo katkad pisati jedan, katkad drugi tenzorski produkt.

Slika preslikavanja Lu je unutar $R^*\tilde{\otimes}R=R^*\otimes R$ i korestrikcija $R\to R^*\tilde{\otimes}R$ je morfizam u $\mathrm{indproVect}$ ako i samo ako za svaku filtrirajuću komponentu R_n od R postoji filtrirajuća komponenta R_m od R takva da je

$$\mathrm{Lu}(R_n)\subseteq R^*\otimes R_m.$$

Zaista, pretpostavimo da za svaki n postoji m takav da je $\mathrm{Lu}(R_n) \subseteq R^* \otimes R_m = R^* \hat{\otimes} R_m$. Tada je slika od $R \cong \mathrm{colim}_n R_n$ unutar $R^* \tilde{\otimes} R \cong \mathrm{colim}_m R^* \otimes R_m$, pa možemo korestringirati Lu do linearnog preslikavanja $\rho\colon R \to R^* \tilde{\otimes} R$. To je korestrikcija jer $R^* \tilde{\otimes} R = R^* \otimes R \hookrightarrow R^* \hat{\otimes} \underline{R}$. Preslikavanja $R_n \to R^* \otimes R_m = R^* \hat{\otimes} R_m$ među filtrirajućim komponentama su komponente od ρ i morfizmi su u $\mathrm{proVect}$ jer za svaki k postoji komponenta $R_n \to R_k^* \otimes R_m$ tog preslikavanja među kofiltrirajućim komponentama, to je kompozicija $R_n \to R^* \hat{\otimes} R_m \to R_k^* \otimes R_m$. Dakle, ρ je morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Lako se vidi da obrat također vrijedi.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dashed, "\rho"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Lu}"] & R^* \tilde{\otimes} R \arrow[r, dashed, hook] & R^* \tilde{\otimes} \underline{R} \\
R_n \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & R^* \hat{\otimes} R_m \arrow[u, dashed, hook] \arrow[ur, hook] \arrow[d, two heads] & \\
R_n \arrow[r] & R_k^* \otimes R_m &
\end{tikzcd}$$

Nadalje, $\mathrm{Lu}(R_n) \subseteq R^* \otimes R_m$ vrijedi ako i samo ako je

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(R_n)) \subseteq \mathrm{End}(R, R_m),$$

jer je $\hat{\mathcal{S}}_1(R^* \otimes R_m) = \mathrm{End}(R, R_m)$. Detaljnije, za svaki $\phi \in \mathrm{End}(R)$ je

$$\mathcal{K}(\phi) = \sum e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$$

gdje je $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ formalna baza od R^* dualna filtriranoj bazi $(D_\alpha)_{\alpha \in A}$ od R, a $\mathcal{K}$ bijekcija inverzna bijekciji $\hat{\mathcal{S}}_1$. Očito je pripadna formalna suma $\sum e_\alpha \otimes \phi(D_\alpha)$ unutar $R^* \otimes R_m$ ako je $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq R_m$. S druge strane, za $A_m = \{\alpha \in A \mid D_\alpha \in R_m\}$ je $(D_\alpha)_{\alpha \in A_m}$ baza od R_m. Svaki element od $R^* \hat{\otimes} R_m$ može se zapisati kao formalna suma $\sum_{\alpha \in A, \beta \in A_m} a_{\alpha\beta}\, e_\alpha \otimes D_\beta$ u $R^* \hat{\otimes} R_m$, a budući da je to potpuni potprostor od $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$, to je formalna suma u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$. Za taj zapis očito vrijedi da pripadni $\psi \in \mathrm{End}(R)$ ima sliku unutar R_m:

$$\psi(D_\gamma) = \hat{\mathcal{S}}_1\Big(\sum_{\alpha \in A, \beta \in A_m} a_{\alpha\beta}\, e_\alpha \otimes D_\beta\Big)(D_\gamma) = \sum_{\alpha \in A, \beta \in A_m} a_{\alpha\beta} \langle D_\gamma, e_\alpha \rangle D_\beta = \sum_{\beta \in A_m} a_{\gamma\beta} D_\beta \in R_m$$

Na kraju, zbog konačne dimenzionalnosti svih komponenti od R tvrdnja:

$$(\forall n)(\exists m)(\forall Y \in R_n)(\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(Y))) \subseteq R_m)$$

je ekvivalentna tvrdnji

$$(\forall Y \in R)(\exists m)(\mathrm{Im}(\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(Y))) \subseteq R_m).$$

□

Adjungirano djelovanje elementa Z na Y u R je $\mathrm{ad}_Z \colon R \to R$

$$\mathrm{ad}_Z \colon Y \mapsto Z_{(1)} Y S(Z_{(2)}).$$

Preslikavanje koje se pojavljuje u prethodnoj propoziciji označimo s $\mathrm{ad}'_Z \colon R \to R$. Vrijedi

$$\mathrm{ad}'_Z = \mathrm{ad}_{S^{-1}(Z)} \,.$$

Dakle, vrijednost formalne sume $\mathrm{Lu}(Y)$ će biti unutar $R^* \otimes R$ za svaki $Y \in R$ za one unutrašnje Hopfove algebre R u $\mathrm{indVectFin}$ s bijektivnim antipodom za koje je orbita svakog elementa po adjungiranim djelovanjima od R unutar potprostora konačne dimenzije.

Teorem 9.5.21. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVectFin}$ *s bijektivnim antipodom. Tada postoji kodjelovanje $\rho \colon R \to R^* \otimes R$ takvo da je R nad R^* desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje $\blacktriangleleft \colon R \otimes R^* \to R$ ako i samo ako je orbita svakog elementa $Y \in R$ po adjungiranim djelovanjima od R unutar potprostora konačne dimenzije, što je ekvivalentno zahtjevu* $\mathrm{Lu}(R) \subseteq R^* \otimes R$. *To kodjelovanje je tada jedinstveno.*

Dokaz. Primjenjujemo da je $\mathcal{T}_2$ injekcija kao restrikcija injekcije $\hat{\mathcal{T}}_2$, prethodnu propoziciju 9.5.20 i teorem 9.3.10. □

9.5.7 Hopfove algebre R i H u Hopfovom sparivanju

Pretpostavimo da je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$, H unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVect}$ i $\langle\,,\rangle \colon R \otimes H \to k$ Hopfovo sparivanje u $\mathrm{indproVect}$ nedegenerirano u drugoj varijabli.

Budući da je R unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$, njen dual R^* je unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$. Po propoziciji 9.2.1 sparivanje definira linearno preslikavanje

$$\mathcal{S}_0 \colon H \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{indproVect}}(R, k) \cong R^*$$

koje je injekcija jer je sparivanje $\langle\,,\rangle \colon R \otimes H \to k$ nedegenerirano u drugoj varijabli. Dokažimo da je to preslikavanje štoviše morfizam $H \hookrightarrow R^*$ u $\mathrm{proVect}$. Za svaki n postoji k takav da postoji komponenta $R_n \otimes H_k \to k$ za koju je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
R \tilde{\otimes} H \arrow[r, "\langle\,,\rangle"] & k \\
R_n \hat{\otimes} H \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d, two heads] & k \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
R_n \otimes H_k \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

Preslikavanja u donja dva retka su sparivanja i ona definiraju linearna preslikavanja $H \to R_n^*$ i $H_k \to R_n^*$ te je, zbog komutativnosti prethodnog dijagrama, sljedeći dijagram također komutativan:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\mathcal{S}_0"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr] & R^* \arrow[d, two heads] \\ H_k \arrow[r] & R_n^* \end{tikzcd}$$

Budući da za svaki n postoji k i preslikavanje $H_k \to R_n^*$ takvo da je prethodni dijagram komutativan, slijedi da je $\mathcal{S}_0$ morfizam u $\mathrm{proVect}$. Označimo ga sa η. Injekcija $\eta = \mathcal{S}_0 \colon H \hookrightarrow R^*$, morfizam u $\mathrm{proVect}$, definira injekciju $\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \eta \colon R \tilde{\otimes} H = R \otimes H \hookrightarrow R \otimes R^* = R \tilde{\otimes} R^*$ u $\mathrm{indproVect}$. Očito je sljedeći dijagram komutativan i sva preslikavanja na njemu su morfizmi u $\mathrm{indproVect}$.

$$\begin{tikzcd} R \tilde{\otimes} R^* \arrow[r, "\langle,\rangle"] & k \arrow[d, equal] \\ R \tilde{\otimes} H \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \eta"] \arrow[r, "\langle,\rangle"] & k \end{tikzcd}$$

Pazimo da ne gledamo H kao potpun potprostor od R^* u $\mathrm{proVect}$ budući da H ne mora imati kofiltraciju induciranu po injekciji $H \hookrightarrow R$. To znači da bi u R^* neke sume elemenata od H mogle biti formalne, a da nisu formalne u H.

Budući da su oba sparivanja Hopfova i η injekcija, slijedi da je morfizam η homomorfizam algebri i koalgebri. Lako se vidi da iz komutativnosti prethodnog slijedi komutativnost ovog dijagrama:

$$\begin{tikzcd} R \tilde{\otimes} R^* \arrow[r, "\blacktriangleleft"] & R \arrow[d, equal] \\ R \tilde{\otimes} H \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \eta"] \arrow[r, "\blacktriangleleft"] & R \end{tikzcd}$$

i zatim ovog dijagrama:

$$\begin{tikzcd} R \tilde{\otimes} R^* \sharp R \arrow[r, "\blacktriangleleft"] & R \arrow[d, equal] \\ R \tilde{\otimes} H \sharp R \arrow[u, hook, "\mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \eta \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R"] \arrow[r, "\blacktriangleleft"] & R \end{tikzcd}$$

te ovog dijagrama, jer je η homomorfizam algebri i koalgebri,

$$\begin{tikzcd} R^* \sharp R \tilde{\otimes} R^* \sharp R \arrow[r, "\mu_{R^* \sharp R}"] & R^* \sharp R \\ H \sharp R \tilde{\otimes} H \sharp R \arrow[u, hook, "\eta \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R \tilde{\otimes} \eta \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R"] \arrow[r, "\mu_{H \sharp R}"] & H \sharp R \arrow[u, hook, "\eta \tilde{\otimes} \mathrm{id}_R"'] \end{tikzcd}$$

Pazimo da ne gledamo $H\sharp R$ kao Hopfovu podalgebru od $R^*\sharp R$ u $\mathrm{indproVect}$ s induciranom filtracijom kofiltracija, to jest za sume elemenata u $H\sharp R$ koje su formalne u $R^*\sharp R$ ne smijemo bez provjere zaključiti da su formalne i u $H\sharp R$. Suprotno, svaka formalna suma u $H\sharp R$ po inkluziji, morfizmu u $\mathrm{indproVect}$, je formalna suma u $R^*\sharp R$. Zanima nas kada postoji morfizam $\rho\colon R \to H\sharp R$ u $\mathrm{indproVect}$ takav da je $d \blacktriangleleft \rho(r) = rd$ za sve $r, d \in R$.

Za to je dovoljno da je morfizam $\mathrm{Lu}\colon R \to R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ moguće korestringirati kao linearno preslikavanje na vektorski potprostor $H\sharp R \subseteq R^*\sharp R \subseteq R^* \hat{\otimes} \underline{R}$, jer je takvo linearno preslikavanje nužno morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Slijedi objašnjenje. Pretpostavimo da postoji $\rho\colon R \to H\sharp R$. Budući da je R_n konačno-dimenzionalan, to sigurno postoji m takav da je $\rho(R_n) \subseteq H \otimes R_m = H \hat{\otimes} R_m$. Nakon toga lako se vidi da za tu komponentu $R_n \to H \hat{\otimes} R_m$ za svaki k postoji njena komponenta među kofiltrirajućim komponentama, kompozicija $R_n \to H \hat{\otimes} R_m \to H_k \otimes R_m$.

Ostaje dakle pitanje kada je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H\sharp R$. To je točno onda kad je $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(R)) \subseteq \hat{\mathcal{S}}_1(H\sharp R)$, a koji je to podskup od $\mathrm{End}(R)$? Pretpostavimo da je $(D_\alpha)_{\alpha\in A}$ filtrirana baza od R. Svaki element od $H\sharp R = H \otimes R$ može se zapisati kao konačna suma elemenata $\sum_\beta h_{\alpha\beta} \otimes D_\beta$, gdje su svi $h_{\alpha\beta}$ u H. Budući da je ta suma formalna suma u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$, a zapis elementa u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$ kao formalna suma oblika $\sum_\beta f_{\alpha\beta} \otimes D_\beta$ je jedinstven, zaključujemo da, kad bismo za svaki D_α zapisali $\mathrm{Lu}(D_\alpha)$ u tom obliku kao formalnu sumu u $R^* \hat{\otimes} \underline{R}$,

$$\mathrm{Lu}(D_\alpha) = \sum_\beta f_{\alpha\beta} \otimes D_\beta,$$

morala bi ta suma biti konačna i svi $f_{\alpha\beta}$ u H. H bi dakle morao sadržavati sve funkcionale $f_{\alpha\beta}$ i svako preslikavanje $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(D_\alpha))$ moralo bi imati konačan rang. Lako se vidi da obrat vrijedi: ako je svako preslikavanje u $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(D_\alpha))$ konačnog ranga i H sadrži sve funkcionale $\{f_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in A\}$, onda je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H\sharp R$.

Dakle, provjera se svodi na to je li orbita svakog D_α po adjungiranim djelovanjima od R unutar potprostora konačne dimenzije i da li H kao vektorski potprostor $H \subseteq R^*$ sadrži sve funkcionale $\{f_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in A\}$ iz svih zapisa $\mathrm{Lu}(D_\alpha) = \sum_\beta f_{\alpha\beta} \otimes D_\beta$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 9.5.22. *Neka je R unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{indVectFin}$ *s bijekivnim antipodom. Neka je H unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *u Hopfovom sparivanju $\langle\,,\rangle\colon R\otimes H = R\tilde{\otimes} H \to k$ s R u* $\mathrm{indproVect}$ *koje je nedegenerirano u drugoj varijabli. Tada postoji kodjelovanje $\rho\colon R \to H\sharp R$ uz koje je R nad H pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje $\blacktriangleleft\colon R\otimes H \to R$ ako i samo ako je* $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H\sharp R$*, gdje $H\sharp R$ gledamo kao vektorski potprostor $H\sharp R \subseteq R^*\sharp R$. Tada je* $\mathrm{Lu} = \rho$.

9.5.23. (Minimalna Hopfova podalgebra $R^{min} \subseteq R^*$ takva da je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq R^{min}\sharp R$.) Na temelju razmatranja ispred propozicije zamijetimo da, ako je algebra R generirana s konačno mnogo elemenata $Y_1, \dots, Y_n$ i $\mathrm{Lu}(R) \subseteq R^* \sharp R$, onda $H \sharp R$ sadrži $\mathrm{Lu}(R)$ čim H sadrži sve funkcionale koji se pojavljuju u zapisu elemenata $\mathrm{Lu}(Y_1), \dots, \mathrm{Lu}(Y_n)$ u obliku $\mathrm{Lu}(Y_i) = \sum_\beta f_{i\beta} \otimes D_\beta$ za neku filtriranu bazu $\{D_\beta\}_\beta$ od R. Naime, budući da je $\rho(XY) = \rho(Y) \cdot \rho(X)$ u $R^* \sharp R$ (ako su $\rho(X)$ i $\rho(Y)$ unutar $R^* \sharp R$) i $H \sharp R$ algebra, to onda moraju biti svi $\mathrm{Lu}(Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_n^{\alpha_n})$ u $H \sharp R$ čim su $\mathrm{Lu}(Y_1), \dots, \mathrm{Lu}(Y_n)$ u $H \sharp R$. Najmanju Hopfovu algebru H koja se sparuje s R takva da je R nad H pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz djelovanje inducirano sparivanjem) mogli bismo dobiti kao najmanju Hopfovu podalgebru od R^* koja sadrži konačan broj funkcionala dobivenih računajući $\mathrm{Lu}(Y_1), \dots, \mathrm{Lu}(Y_n)$. Vidi poslije primjer 9.6.5 s $U(\mathfrak{g})$. Označimo li najmanju takvu Hopfovu algebru s $R^{min} \subseteq R^*$, onda možemo reći da je R nad $H \subseteq R^*$ desno lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem definirano djelovanje ako i samo ako je $R^{min} \subseteq H \subseteq R^*$. Uz to, tada imamo niz podalgebri $R^{min} \sharp R \subseteq H \sharp R \subseteq R^* \sharp R$.

9.6 Primjeri s univerzalnom omotačkom algebrom $U(\mathfrak{g})$

Definicija $U(\mathfrak{g})$ je dana u primjeru 6.1.18.

9.6.1 Pregled dijagrama s $U(\mathfrak{g})^*$, $U(\mathfrak{g})^{min}$, $U(\mathfrak{g})^\circ$, $\mathcal{O}^{min}(G)$, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$

9.6.1. Za $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalnu Liejevu algebru nad poljem k imat ćemo na kraju morfizme određenih Hopfovih algebri:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[d, two heads] & & \\
U(\mathfrak{g})^{min} \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^\circ \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^*
\end{tikzcd}$$

i pokazat ćemo da je $U(\mathfrak{g})$ nad $U(\mathfrak{g})^*$, $U(\mathfrak{g})^{min}$, $U(\mathfrak{g})^\circ$, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz djelovanje inducirano sparivanjem i kodjelovanje koje je korestrikcija od Lu.

Za Liejevu grupu G imat ćemo:

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g})^* & C^\infty(G) \arrow[l, dashed] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l, dashed] \arrow[dl, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, hook', "\cong"'] \\
U(\mathfrak{g})^{min} \arrow[u, hook] & \mathcal{O}^{min}(G) \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook, dashed] & & &
\end{tikzcd}$$

s time da u dijagramu jedino $C^\infty(G)$ nije Hopfova algebra. Sva preslikavanja osim iscrtkanih su morfizmi Hopfovih algebri, s time da je $U(\mathfrak{g})^*$ Hopfova algebra u $\mathrm{indproVect}$. Pokazat ćemo da je $U(\mathfrak{g})$ nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz djelovanje inducirano sparivanjem i kodjelovanje koje je korestrikcija od Lu.

Za linearnu algebarsku grupu G imat ćemo morfizme Hopfovih algebri:

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g})^* & \mathcal{O}(G) \arrow[l] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l] \arrow[dl, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, "\cong"'] \\
U(\mathfrak{g})^{min} \arrow[u, hook] & \mathcal{O}^{min}(G) \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

9.6.2 Dual $U(\mathfrak{g})^*$

Neka je $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem k.

9.6.2. Dokazat ćemo da je

$$\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g})) \subseteq U(\mathfrak{g})^* \sharp U(\mathfrak{g})$$

u sljedećoj propoziciji 9.6.3. Po gornjem teoremu 9.5.22 iz toga će slijediti da je $U(\mathfrak{g})$ nad $U(\mathfrak{g})^*$ desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) na jedinstven način, uz kodjelovanje koje je korestrikcija od Lu.

Propozicija 9.6.3. *Vrijednost formalne sume* $\mathrm{Lu}(Y)$ *je unutar* $U(\mathfrak{g})^* \otimes U(\mathfrak{g})$ *za sve* $Y \in U(\mathfrak{g})$. *Sa* $\rho\colon Y \mapsto \mathrm{Lu}(Y)$ *je time definiran morfizam* $\rho\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^* \tilde{\otimes} U(\mathfrak{g})$ *u* $\mathrm{indproVectFin}$ *za koji vrijedi* $Z \blacktriangleleft \rho(Y) = YZ$ *za sve* $Y, Z \in U(\mathfrak{g})$.

Dokaz. Po propoziciji 9.5.20 dovoljno je dokazati da je za svaki $Y \in U(\mathfrak{g})$ preslikavanje

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(Y))\colon Z \mapsto \sum S^{-1}(Z_{(2)})YZ_{(1)}$$

konačnog ranga. Označimo sa $\mathrm{ad}'_Z\colon U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ preslikavanje

$$\mathrm{ad}'_Z\colon Y \mapsto \sum S^{-1}(Z_{(2)})YZ_{(1)}.$$

Treba dakle dokazati da za svaki $Y \in U(\mathfrak{g})$ postoji stupanj m takav da su svi elementi orbite $\{\mathrm{ad}'_Z(Y) \mid Z \in U(\mathfrak{g})\}$ stupnja najviše m.

(i) Prvo matematičkom indukcijom dokazujemo da je za svaki $Y \in U(\mathfrak{g})$ i svaki $X \in \mathfrak{g}$ stupanj od $S^{-1}(X_{(2)})YX_{(1)}$ manji ili jednak stupnju od Y. Za sve $X \in \mathfrak{g}$ i $Y \in \mathfrak{g}$ je $YX - XY = [Y, X]$ stupnja 1, što je baza indukcije. Pretpostavimo da je za svaki $V \in U(\mathfrak{g})$ stupnja n i svaki $X \in \mathfrak{g}$ stupanj od $VX - XV$ manji od ili jednak n. Neka je $W \in U(\mathfrak{g})$ monom stupnja $n+1$, tada je $W = YV$ za neki $Y \in \mathfrak{g}$ i $V \in U(\mathfrak{g})$ monom stupnja n. Sada imamo

$$WX - XW = YVX - XYV = Y(VX - XV) + (YX - XY)V,$$

a to je po pretpostavci indukcije stupnja najviše $n+1$. Zbroj monoma stupnja najviše $n+1$ je stupnja najviše $n+1$.

(ii) Zatim zamijetimo da je svaki monom $Z \in U(\mathfrak{g})$ produkt $X_1 X_2 \cdots X_s$ elemenata stupnja 1 i da je $\mathrm{ad}'_Z = \mathrm{ad}'_{X_s} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}'_{X_2} \circ \mathrm{ad}'_{X_1}$ pa po prethodno dokazanom niti ad'_Z ne povećava stupanj elementa Y. $\square$

Korolar 9.6.4. *Hopfova algebra $U(\mathfrak{g})$ je desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad dualnom unutrašnjom Hopfovom algebrom $U(\mathfrak{g})^*$ u* $\mathrm{proVectFin}$ *s obzirom na djelovanje $\blacktriangleleft$ inducirano sparivanjem, tj. u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji, za $Y \in U(\mathfrak{g})$ i $f \in U(\mathfrak{g})^*$, definirano sa*

$$Y \blacktriangleleft f = \langle Y_{(1)}, f \rangle Y_{(2)}$$

na jedinstven način: uz kodjelovanje dano sa

$$Y \mapsto \mathrm{Lu}(Y) \in U(\mathfrak{g})^* \sharp U(\mathfrak{g})$$

za $Y \in U(\mathfrak{g})$.

9.6.3 Minimalna Hopfova algebra $U(\mathfrak{g})^{min} \subseteq U(\mathfrak{g})^*$ i $U(\mathfrak{g})^\circ$

Neka je $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem k.

9.6.5. (Minimalna Hopfova algebra $U(\mathfrak{g})^{min}$.) Ovdje ćemo dati kratki pregled rezultata, a nakon toga sve detaljno razraditi. Odredit ćemo Hopfovu podalgebru u $\mathrm{proVect}$

$$U(\mathfrak{g})^{min} \subseteq U(\mathfrak{g})^*$$

minimalnu takvu da je $\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g})) \subseteq U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g})$ i pokazati da je ona Hopfova k-algebra. Time ćemo dobiti morfizme Hopfovih algebri

$$U(\mathfrak{g})^{min} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})^\circ \hookrightarrow U(\mathfrak{g})^*$$

pri čemu su prve dvije Hopfove k-algebre, a zadnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVect}$.

Hopfova algebra $U(\mathfrak{g})^{min}$ ima sljedeća svojstva: generirana je kao asocijativna unitalna algebra s određenim $\mathcal{U}^j_i$ i $\bar{\mathcal{U}}^j_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, komutativna je, te vrijedi

$$\sum_j \mathcal{U}^k_j \bar{\mathcal{U}}^j_i = \delta^k_i = \sum_j \bar{\mathcal{U}}^k_j \mathcal{U}^j_i$$

$$\Delta(\mathcal{U}^j_i) = \sum_k \mathcal{U}^j_k \otimes \mathcal{U}^k_i, \quad \Delta(\bar{\mathcal{U}}^j_i) = \sum_k \bar{\mathcal{U}}^k_i \otimes \bar{\mathcal{U}}^j_k$$

$$\epsilon(\mathcal{U}^j_i) = \delta^j_i = \epsilon(\bar{\mathcal{U}}^j_i)$$

$$S(\mathcal{U}_i^j) = \bar{\mathcal{U}}_i^j, \quad S(\bar{\mathcal{U}}_i^j) = \mathcal{U}_i^j$$

i vrijedi

$$\langle X_k, \mathcal{U}_i^j \rangle = C_{ki}^j,$$

$$\sum_{l,m} \mathcal{U}_i^l \mathcal{U}_j^m C_{lm}^k = \sum_n C_{ij}^n \mathcal{U}_n^k, \quad \sum_{l,m} \bar{\mathcal{U}}_i^l \bar{\mathcal{U}}_j^m C_{lm}^k = \sum_n C_{ij}^n \bar{\mathcal{U}}_n^k.$$

$$\mathrm{Lu}(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \sharp X_j.$$

Postoje određene eksponencijalne formule za matrice $\mathcal{U} = [\mathcal{U}_i^j]_{j,i}$ i $\bar{\mathcal{U}} = [\bar{\mathcal{U}}_i^j]_{j,i} \in M_n(U(\mathfrak{g})^*)$ koje ćemo naći.

Po gornjem teoremu 9.5.22 slijedit će da je $U(\mathfrak{g})$ nad $U(\mathfrak{g})^{min}$ i nad $U(\mathfrak{g})^\circ$ (uz sparivanjem inducirano djelovanje) pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra na jedinstven način. To jedinstveno kodjelovanje dano je na generatorima algebre $U(\mathfrak{g})$ sa

$$\rho(X_i) = \mathrm{Lu}(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \sharp X_j.$$

9.6.6. Dokazi. Iznad je u 9.5.23 objašnjeno da, ako je algebra R u $\mathrm{indVectFin}$ generirana s konačno mnogo elemenata $X_1, \ldots, X_n$ i vrijedi $\mathrm{Lu}(R) \subseteq R^* \sharp R$, onda je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H \sharp R$ čim H sadrži funkcionale koji se pojavljuju u zapisima $\mathrm{Lu}(X_1), \ldots, \mathrm{Lu}(X_n)$.

Nađimo sada minimalnu Hopfovu podalgebru $U(\mathfrak{g})^{min}$ od $U(\mathfrak{g})^*$ takvu da je $\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g})) \subseteq U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g})$. Za $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalnu Liejevu algebru nad poljem k, $U(\mathfrak{g})$ je unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ odabrani generatori Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ sa strukturnim konstantama danim sa

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k.$$

(i) Budući da je $\hat{\mathcal{S}}_1$ bijekcija $U(\mathfrak{g})^* \hat{\otimes} U(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Hom}_k(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}))$, element $\mathrm{Lu}(X)$ za $X \in U(\mathfrak{g})$ određen je vrijednostima $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(X))$ na bazi vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Računamo

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(X_i))(1_R) = \mathrm{ad}'_{1_R}(X_i) = X_i$$

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(X_i))(X_j) = \mathrm{ad}'_{X_j}(X_i) = [X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k = \sum (\mathcal{C}_j)_i^k X_k$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(X_i))(X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}) &= \mathrm{ad}'_{X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}}(X_i) = (\mathrm{ad}' X_n{}^{\alpha_n} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}' X_1{}^{\alpha_1})(X_i) = \\ &= \sum_k (\mathcal{C}_n^{\alpha_n} \cdots \mathcal{C}_2^{\alpha_2} \mathcal{C}_1^{\alpha_1})_i^k X_k\end{aligned}$$

gdje smo za svaki j označili s $\mathcal{C}_j$ matricu $[C_{ij}^k]_{k,i}$. Zamijetimo da je $\mathcal{C}_j$ matrica od

$$\mathrm{ad}'_{X_j} = -\,\mathrm{ad}_{X_j} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

zapisanog u bazi $X_1, \ldots, X_n$. Dakle,

$$\mathrm{Lu}(X_i) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} e_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \sharp (\sum_k (\mathcal{C}_n^{\alpha_n} \cdots \mathcal{C}_2^{\alpha_2} \mathcal{C}_1^{\alpha_1})_i^k X_k) =$$

$$= \sum_k (\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} e_{\alpha_1\ldots\alpha_n} (\mathcal{C}_n^{\alpha_n} \cdots \mathcal{C}_2^{\alpha_2} \mathcal{C}_1^{\alpha_1})_i^k) \sharp X_k = \sum_k \bar{\mathcal{U}}_i^k \sharp X_k$$

gdje je s $e_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = e_{X_1^{\alpha_1}\ldots X_n^{\alpha_n}}$ označen funkcional, element od $U(\mathfrak{g})^*$, dualan elementu $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ baze od $U(\mathfrak{g})$, a sa $\bar{\mathcal{U}}$ je označena matrica $[\bar{\mathcal{U}}_i^k]_{k,i} \in M_n(U(\mathfrak{g})^*)$ definirana sa

$$\bar{\mathcal{U}}_i^k = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} e_{\alpha_1\ldots\alpha_n} (\mathcal{C}_n^{\alpha_n} \cdots \mathcal{C}_2^{\alpha_2} \mathcal{C}_1^{\alpha_1})_i^k$$

Dakle, ako i samo ako Hopfova podalgebra H od $U(\mathfrak{g})^*$ sadrži n^2 funkcionala $\bar{\mathcal{U}}_i^k$, vrijedi da je $\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g})) \subseteq H \sharp U(\mathfrak{g})$ i vrijedi

$$X \blacktriangleleft \sum_k \bar{\mathcal{U}}_i^k \sharp X_k = X_i X$$

za sve $X \in U(\mathfrak{g})$.

(ii) Za koprodukt imamo

$$\Delta(\bar{\mathcal{U}}_i^k) = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \otimes \bar{\mathcal{U}}_j^k.$$

Skicirajmo dokaz te tvrdnje. Prvo imamo

$$\langle X_j X_l, \bar{\mathcal{U}}_i^k \rangle = \sum_m C_{ij}^m C_{ml}^k = \sum_m \langle X_j, \bar{\mathcal{U}}_i^m \rangle \langle X_l, \bar{\mathcal{U}}_m^k \rangle$$

za bazu indukcije i dalje se indukcijom po stupnju može dokazati

$$\langle X_j X, \bar{\mathcal{U}}_i^k \rangle = \sum_m \langle X_j, \bar{\mathcal{U}}_i^m \rangle \langle X, \bar{\mathcal{U}}_m^k \rangle$$

i iskoristiti jedinstvenost dualnog koprodukta.

(iii) Za kojedinicu, iz definicije $\bar{\mathcal{U}}_i^k$, dobivamo

$$\epsilon(\bar{\mathcal{U}}_i^k) = \langle 1_R, \bar{\mathcal{U}}_i^k \rangle = \delta_i^k.$$

(iv) Označimo s $\mathcal{U}_i^j \in U(\mathfrak{g})^*$ element takav da je

$$S(\bar{\mathcal{U}}_i^j) = \mathcal{U}_i^j.$$

Slijedi

$$\langle X_j, \mathcal{U}_i^k \rangle = \langle S(X_j), \bar{\mathcal{U}}_i^k \rangle = C_{ji}^k.$$

Iz formule za koprodukt i kojedinicu od $\bar{\mathcal{U}}_i^j$ tada slijedi

$$\Delta(\mathcal{U}_i^k) = \sum_j \mathcal{U}_j^k \otimes \mathcal{U}_i^j$$

$$\epsilon(\mathcal{U}_i^j) = \delta_i^j$$

$$\sum_j \mathcal{U}_j^k \bar{\mathcal{U}}_i^j = \delta_i^k = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_j^k \mathcal{U}_i^j$$

(v) Dakle, podalgebra od $U(\mathfrak{g})^*$ generirana s $2n^2$ generatora $\mathcal{U}_i^k$, $\bar{\mathcal{U}}_i^k$ može se gledati kao Hopfova algebra u Vect, minimalna koja se sparuje s $U(\mathfrak{g})$ tako da $U(\mathfrak{g})$ nad njom bude pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje), označimo je s $U(\mathfrak{g})^{min}$. Zamijetimo da, ako je $U(\mathfrak{g})$ komutativna, onda je $U(\mathfrak{g})^{min}$ trivijalna, tj. jednaka k.

(vi) Nadalje, može se dokazati da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\sum_{l,m} \bar{\mathcal{U}}_i^l \bar{\mathcal{U}}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \bar{\mathcal{U}}_n^k$$

Prvo se za bazu indukcije pokaže da se obje strane s generatorima od $U(\mathfrak{g})$ sparuju jednako koristeći definiciju funkcionala $\bar{\mathcal{U}}_i^j$ i Jacobijevo svojstvo za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ zapisano pomoću strukturnih konstanti. Zatim se u koraku indukcije koristi formula za koprodukt da se dokaže da se lijeva i desna strana sparuju jednako sa svim elementima baze vektorskog prostora $U(\mathfrak{g})$. Iz te jednakosti i gornjih jednakosti lako se vidi da slijedi analogna jednakost za generatore $\mathcal{U}_i^j$:

$$\sum_{l,m} \mathcal{U}_i^l \mathcal{U}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \mathcal{U}_n^k$$

(vii) Iz navedenih formula u (iv) slijedi da je matrici $\bar{\mathcal{U}} \in M_n(U(\mathfrak{g})^*)$ inverzna matrica $\mathcal{U} \in M_n(U(\mathfrak{g})^*)$. Nadalje, kad bi komponente tih matrica bile funkcije na nekoj grupi, iz koprodukta i kojedinice je vidljivo da bi matrica $\mathcal{U}$ predstavljala neku reprezentaciju te grupe u $GL(n,k)$. To je razlog što smo početnu matricu označili s $\bar{\mathcal{U}}$, a izvedenu s $\mathcal{U}$, umjesto obratno.

U primjeru 9.6.17 ćemo naći geometrijski definiranu Hopfovu algebru $\mathcal{O}^{min}(G)$ funkcija na Liejevoj (ili afinoj algebarskoj) grupi G koje dolaze od adjungirane reprezentacije grupe G, a u primjeru 9.6.18 ćemo dati Hopfovu algebru funkcija $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ na algebarskoj grupi $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ i pokazati da se obje te Hopfove algebre surjektivno preslikavaju na $U(\mathfrak{g})^{min}$ geometrijski definiranim morfizmima Hopfovih algebri.

(viii) Na kraju, što nije bitno za daljnje izlaganje, može se evaluacijom na generatorima lako pokazati da vrijedi

$$e_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = e_{X_1^{\alpha_1}} \cdots e_{X_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\alpha_1!}(e_{X_1})^{\alpha_1} \cdots \frac{1}{\alpha_n!}(e_{X_n})^{\alpha_n}.$$

Ako označimo $\tilde{\mathcal{C}}_i := \mathcal{C}_i \cdot e_{X_i} \in M_n(U(\mathfrak{g})^*)$ tada je

$$\bar{\mathcal{U}} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \tilde{\mathcal{C}}_n^{\alpha_n} \cdots \tilde{\mathcal{C}}_2^{\alpha_2} \tilde{\mathcal{C}}_1^{\alpha_1} = \exp \tilde{\mathcal{C}}_n \cdots \exp \tilde{\mathcal{C}}_1.$$

Lako se vidi da je onda

$$\mathcal{U} = \exp(-\tilde{\mathcal{C}}_1) \cdots \exp(-\tilde{\mathcal{C}}_n) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \frac{(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \tilde{\mathcal{C}}_1^{\alpha_1} \tilde{\mathcal{C}}_2^{\alpha_2} \cdots \tilde{\mathcal{C}}_n^{\alpha_n}.$$

9.6.4 Sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$ sa $C^\infty(G)$

Neka je G Liejeva grupa.

9.6.7. (Sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$ sa $C^\infty(G)$.) Sparivanje

$$\langle \, , \rangle \colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes C^\infty(G) \to \mathbb{R}$$

je definirano evaluacijom u jedinici rezultata primjene diferencijalnog operatora na funkciju. Analogno, imamo sparivanje $\langle \, , \rangle \colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes C^\infty(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

(i) Detaljnije, svako lijevo invarijantno vektorsko polje $X \in \mathfrak{g}^L$ definira diferencijalni operator prvog reda $D_X \colon C^\infty(G) \to C^\infty(G)$, $D_X f = Xf$. Pridruživanje $X \mapsto D_X$ se proširuje do injektivnog unitalnog homomorfizma algebri $D \colon U(\mathfrak{g}^L) \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(G))$, $P \mapsto D_P$. Eksplicitno, elementu $P = X_1 \cdots X_r \in U(\mathfrak{g}^L)$, gdje su $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{g}$ pridružuje se diferencijalni operator D_P određen s

$$(D_P f)(y) = (D_{X_1} \cdots D_{X_r} f)(y) = \frac{\partial^r}{\partial t_1 \cdots \partial t_r}\bigg|_{t_1,\ldots,t_r=0} f(y \cdot \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_r X_r))$$

Označimo s e jedinicu u G. Definiramo sparivanje

$$\langle \, , \rangle \colon U(g^L) \otimes C^\infty(G) \to \mathbb{R}, \qquad \langle P, f \rangle = (D_P f)(e)$$

Hopfove algebre $U(\mathfrak{g}^L)$ i algebre $C^\infty(G)$.

(ii) Analogno se definira sparivanje

$$\langle \, , \rangle \colon U(\mathfrak{g}^R) \otimes C^\infty(G) \to \mathbb{R}$$

uz formulu

$$(D_P f)(y) = (D_{Y_1} \cdots D_{Y_r} f)(y) = \frac{\partial^r}{\partial t_1 \cdots \partial t_r}\bigg|_{t_1,\ldots,t_r=0} f(\exp(t_r Y_r) \cdots \exp(t_1 Y_1) \cdot y)$$

za $P = Y_1 \cdots Y_r \in U(\mathfrak{g}^R)$, gdje su $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{g}^R$. Zamijetimo da je redoslijed argumenata ovdje obrnut.

(iii) Oba sparivanja se slično definiraju za funkcije s vrijednostima u $\mathbb{C}$.

9.6.8. (Hopfovo sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ s algebrom funkcija na G.) (i) Nadalje, ako je H podalgebra od $C^\infty(G)$ takva da je H Hopfova k-algebra nekih funkcija na grupi G (tj. čija je struktura dualna strukturi te grupe), onda je restrikcija gore navedenog sparivanja,

$$\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^L)\otimes H\to\mathbb{R}$$

Hopfovo sparivanje. Dokaz te tvrdnje slijedi. Kompatibilnost produkta na $U(\mathfrak{g})^L$ i koprodukta na H:

$$\begin{aligned}\langle X_1\cdots X_r,f\rangle &= \tfrac{\partial^r}{\partial t_1\cdots\partial t_r}\Big|_{t_1,\ldots,t_r=0} f(\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_rX_r))\\ &= \tfrac{\partial^r}{\partial t_1\cdots\partial t_r}\Big|_{t_1,\ldots,t_r=0}\big(\textstyle\sum f_{(1)}(\exp(t_1X_1))\cdots f_{(r)}(\exp(t_rX_r))\big)\\ &= \textstyle\sum\tfrac{\partial}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0} f_{(1)}(\exp(t_1X_1))\cdots\tfrac{\partial}{\partial t_r}\Big|_{t_r=0} f_{(s)}(\exp(t_rX_r))\\ &= \textstyle\sum\langle X_1,f_{(1)}\rangle\cdots\langle X_r,f_{(r)}\rangle\end{aligned}$$

te produkta na H i koprodukta na $U(\mathfrak{g})^L$:

$$\langle\Delta(X),fg\rangle = f(e)\langle X,g\rangle+\langle X,f\rangle g(e),\qquad X\in\mathfrak{g}^L$$

što je Leibnizovo pravilo za $X\in\mathfrak{g}^L$, a lako se pokaže da tada vrijedi i za sve $P\in U(\mathfrak{g}^L)$. Kompatibilnost jedinica i kojedinica, za $P=X_1\cdots X_r$:

$$\langle P,1_H\rangle = 0=\epsilon(P),\qquad \langle 1_{U(\mathfrak{g})},1_H\rangle = 1=\epsilon(1_{U(\mathfrak{g})})$$

$$\langle 1_{U(\mathfrak{g})},f\rangle = f(e)=\epsilon(f)$$

Kompatibilnost dva antipoda:

$$\langle X,Sf\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f((\exp(tX))^{-1}) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(\exp(-tX)) = -\langle X,f\rangle = \langle SX,f\rangle$$

za $X\in\mathfrak{g}^L$. Lako se vidi da to vrijedi za sve $P\in U(\mathfrak{g}^L)$.

(ii) Slično se pokaže da je restrikcija drugog gore navedenog sparivanja,

$$\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^R)\otimes H\to\mathbb{R}$$

Hopfovo sparivanje uz obrnuti koprodukt na H.

9.6.9. (Algebra diferencijalnih operatora $H\sharp U(\mathfrak{g}^L)$ i $H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R)$.)

(i) Uz tako definirano Hopfovo sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)\otimes H\to k$, za $P\in U(\mathfrak{g}^L)$, $f\in H$ vrijedi:

$$D_Pf=\sum f_{(1)}\langle P,f_{(2)}\rangle$$

Dokažimo to za $X\in\mathfrak{g}^L$.

$$(D_Xf)(y) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(y\cdot\exp(tX)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\sum f_{(1)}(y)f_{(2)}(\exp(tX)) = \sum f_{(1)}(y)\langle X,f_{(2)}\rangle$$

Lako se dalje provjeri tvrdnja za proizvoljan $P \in U(\mathfrak{g}^L)$. Definirano je lijevo Hopfovo djelovanje $U(\mathfrak{g}^L)$ na H, $\triangleright\colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes H \to H$,

$$P \triangleright f = \sum f_{(1)} \langle P, f_{(2)} \rangle,$$

koje odgovara djelovanju diferencijalnog operatora na funkciju. Nadalje, kompozicija množenja funkcijom f i djelovanja diferencijalnog operatora D_P je:

$$g \mapsto D_P(fg) = \sum D_{P_{(1)}} f \cdot D_{P_{(2)}} g$$

što se lako dokaže iz definicije, dakle vrijedi

$$D_P \cdot f = \sum D_{P_{(1)}} f \cdot D_{P_{(2)}} = \sum (D_{P_{(1)}} \triangleright f) \cdot D_{P_{(2)}} = \sum f_{(1)} \langle P_{(1)}, f_{(2)} \rangle D_{P_{(2)}}$$

i definirajmo desno Hopfovo djelovanje H na $U(\mathfrak{g}^L)$, $\blacktriangleleft : U(\mathfrak{g}^L) \otimes H \to U(\mathfrak{g}^L)$,

$$P \blacktriangleleft f = \sum \langle P_{(1)}, f \rangle P_{(2)}.$$

Množenje u poludirektnom produktu $H \sharp U(\mathfrak{g}^L)$ (dobivenog iz djelovanja $\triangleright$ ili, ekvivalentno, djelovanja $\blacktriangleleft$) odgovara kompoziciji diferencijalnih operatora:

$$f D_P \cdot g D_R = \sum f g_{(1)} \langle P_{(1)}, g_{(2)} \rangle D_{P_{(2)}} D_R$$

$$f \sharp P \cdot g \sharp R = \sum f g_{(1)} \langle P_{(1)}, g_{(2)} \rangle P_{(2)} R$$

Svaki diferencijalni operator može se zapisati na jedinstven način kao suma produkata funkcija na G i lijevo-invarijantnih diferencijalnih operatora, pa iz prethodnog slijedi da je poludirektni produkt $H \sharp U(\mathfrak{g}^L)$ podalgebra algebre diferencijalnih operatora $\mathrm{Diff}(G)$ na G: Hopfova algebra $U(\mathfrak{g}^L)$ je algebra lijevo invarijantnih diferencijalnih operatora na G, a koeficijenti su funkcije iz H. Djelovanja se proširuju do djelovanja cijele algebre $H \sharp U(\mathfrak{g}^L)$, pri čemu je lijevo djelovanje $\triangleright$ algebre $H \sharp U(\mathfrak{g}^L)$ na H djelovanje diferencijalnog operatora na funkciju. Imamo i desno djelovanje $\blacktriangleleft$ algebre $H \sharp U(\mathfrak{g}^L)$ na $U(\mathfrak{g}^L)$.

(ii) Sve tvrdnje vrijede i za sparivanje sa $U(\mathfrak{g}^R)$ uz obrnuti koprodukt na H.

9.6.5 Sparivanje $U(\mathfrak{g})$ i algebre formalnih funkcija $J^\infty(G, e)$

Sparivanje $U(\mathfrak{g})$ i glatkih funkcija $C^\infty(G)$ je degenerirano u drugom argumentu iz dva razloga. Najprije, sparivanje ovisi samo o vrijednostima u okolini jedinice pa dodavanje svake glatke funkcije koje je nula na nekoj okolini ne mijenja rezultat. Dakle, možemo raditi s klicama glatkih funkcija na okolinama jedinice da to izbjegnemo. No, čak i na klicama je sparivanje degenerirano jer sparivanje sa svakim diferencijalnim operatorom ovisi samo o Taylorovom redu funkcije u jedinici $e \in G$. Tako će klica funkcije koja u nekim koordinatama $x^1, \ldots, x^n$ centriranim oko e poprima vrijednost 0 u jedinici i $\exp(-1/\|x\|^2)$ u točkama van nje imati trivijalno sparivanje sa svakim diferencijalnim operatorom u e.

Kod prijelaza između karata glatkog atlasa Taylorov red funkcije se transformira uz pomoć iteracija lančanog pravila za derivacije kompozicije funkcija. Ako se za dvije funkcije definirane oko e Taylorovi redovi u e podudaraju u nekoj karti tada se dakle podudaraju u svakoj karti C^∞-glatkog atlasa. Eventualna konvergencija Taylorovog reda čuva se samo ukoliko je atlas analitički. Klasa ekvivalencije funkcija oko e koje imaju isti Taylorov red u nekoj karti je po definiciji *formalna funkcija* oko e. Isti pojam formalne funkcije može se definirati i bez pozivanja na karte, kao limes inverznog sustava k-mlazova $\lim_k J^k(G, e)$ čiji su elementi klase ekvivalencije lokalnih funkcija koje se međusobno podudaraju po sparivanju u e sa svim diferencijalnim operatorima stupnja najviše k. Operacije množenja i zbrajanja po točkama induciraju strukturu algebre na skupu $J^\infty(G, e)$ formalnih funkcija na e. Formalne funkcije oko e se ponekad identificiraju s distribucijama (generaliziranim funkcijama) s nosačem u e. Sparivanje

$$\langle\, , \rangle \colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes J^\infty(G, e) \to \mathbb{R}$$

evaluacijom u e je nedegenerirano za svaku realnu Liejevu grupu G. Dakle, sparivanje inducira prirodni izomorfizam $J^\infty(G, e) \cong U(\mathfrak{g}^L)^*$.

9.6.6 Formalni diferencijalni operatori $J^\infty(G, e)\sharp U(\mathfrak{g})$

Neka je e točka na realnoj analitičkoj mnogostrukosti M dimenzije n. Diferencijalni operatori u koordinatama $w^1, \ldots, w^n$ na otvorenoj okolini U od $e \in M$ su konačne sume oblika

$$\sum_J p^J(w)\partial_J := \sum_{j_1,\ldots,j_k} p^{j_1,\ldots,j_n}(w^1, \ldots, w^n) \left(\frac{\partial}{\partial w^1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial w^n}\right)^{j_n},$$

gdje su $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n$ multiindeksi, a p^J glatke funkcije definirane na U. Dva diferencijalna operatora po definiciji određuju isti formalni diferencijalni operator u e ako njihove restrikcije na dovoljnu malu domenu oko e imaju istu vrijednost na svake dvije glatke funkcije s istim Taylorovim redom u e. Ekvivalentno je tražiti da za sve multiindekse $J = (j_1, \ldots, j_n)$ pripadni glatki koeficijenti p^J, q^J oba operatora određuju isti formalnu funkciju. Dakle, formalni diferencijalni operatori se mogu gledati kao diferencijalni operatori s formalnim koeficijentima. Formalni diferencijalni operatori oko e čine $\mathbb{R}$-algebru $\mathrm{Diff}^\omega(M, e)$. Njihovo djelovanje na klice glatkih funkcija očito inducira djelovanje na formalne funkcije. U slučaju kad je G Liejeva grupa, Hopfovo sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ i $J^\infty(G, e)$ inducira lijevo Hopfovo djelovanje $\triangleright U(\mathfrak{g}^L)$ na $J^\infty(G, e)$ i desno Hopfovo djelovanje $\blacktriangleleft J^\infty(G, e)$ na $U(\mathfrak{g}^L)$, pa je definiran poludirektni produkt $J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$, jednak za oba djelovanja. Identifikacija algebre globalnih glatkih diferencijalnih operatora s poludirektnim produktom $C^\infty(G)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$ iz pododjeljka 9.6.4 inducira identifikaciju algebre $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)$ formalnih diferencijalnih operatora s poludirektnim produktom $J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$. Analogno se iz drugog Hopfovog sparivanja

$$\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^R)\otimes(J^\infty(G,e))^{\mathrm{co}}\to\mathbb{R}$$

dobije poludirektni produkt $(J^\infty(G,e))^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R)$.

9.6.7 Nekomutativni fazni prostor tipa Liejeve algebre

9.6.10. U nekim fizikalnim radovima (naprimjer u [Juric]) $U(\mathfrak{g}^L)$ se interpretira kao algebra polinomijalnih funkcija na nekomutativnom prostoru, a elementi baze od $\mathfrak{g}^L$ kao nekomutativne koordinate na tom nekomutativnom prostoru koji gledamo i kao deformaciju komutativnog prostora. Ta točka gledanja drukčija je od uobičajene geometrijske gdje su elementi baze od $\mathfrak{g}$ invarijantna vektorska polja, dakle analogoni parcijalnih derivacija. Elementi algebre formalnih diferencijalnih operatora $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)$ oko jedinice e pripadne Liejeve grupe G mogu se opisati kao konačne sume elemenata iz $U(\mathfrak{g}^R)$ s koeficijentima slijeva u algebri formalnih funkcija $J^\infty(G,e)$ oko e; pokazali smo da kompozicija operatora odgovara množenju u poludirektnom produktu $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)\cong(J^\infty(G,e))^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R)$. Ti formalni diferencijalni operatori djeluju na formalne funkcije na desno. Suprotna algebra $\mathrm{Diff}^{\omega,\mathrm{op}}(G,e)\subseteq\mathrm{End}(J^\infty(G,e))$ se dakle može promatrati kao algebra diferencijalnih operatora koji djeluju na lijevo i ima strukturu $U(\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}}\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$.

9.6.11. Neka je $\kappa\colon U(\mathfrak{g}^L)\to U(\mathfrak{g}^R)$ antiizomorfizam algebri dan na generatorima sa $X_i\mapsto Y_i$. Sparivanje s $U(\mathfrak{g}^R)$ je kompozicija $\kappa\otimes\mathrm{id}$ i sparivanja s $U(\mathfrak{g}^L)$,

$$U(\mathfrak{g}^R)\otimes J^\infty(G,e)\to U(\mathfrak{g}^L)\otimes J^\infty(G,e)\to\mathbb{R}.$$

Također, množenje na poludirektnom produktu odgovara kompoziciji diferencijalnih operatora. Na temelju te dvije tvrdnje vidimo da možemo djelovanje na lijevo od $U(\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}}$ zamijeniti s djelovanjem na lijevo od $U(\mathfrak{g}^L)$. Time dobivamo izomorfizam

$$U(\mathfrak{g}^L)\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}\cong U(\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}}\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}.$$

9.6.12. Struktura Hopfovog algebroida na $\mathrm{Diff}^{\omega,\mathrm{op}}(G,e)\cong U(\mathfrak{g}^L)\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$ može se dobiti od strukture Hopfovog algebroida na $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)\cong J^\infty(G,e)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$. Naime, vrijedi sljedeća propozicija o prenošenju strukture Hopfovog algebroida duž antiizomorfizama.

Propozicija 9.6.13. *Neka je dan Hopfov algebroid $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R, \tau_D)$ nad baznim algebrama L i R sljedećim podacima: lijevi L- bialgebroid $\mathcal{D}_L = (D, \mu_L, \eta_L, \alpha_L, \beta_L, \Delta_L, \epsilon_L)$, desni R-bialgebroid $\mathcal{D}_R = (D, \mu_R, \eta_R, \alpha_R, \beta_R, \Delta_R, \epsilon_R)$ i antipod $\tau_D\colon D \to D$. Neka je dan antiizomorfizam algebri $\kappa\colon L \to R$.*

Neka je dana algebra H i antiizomorfizam algebri $\Psi\colon D \to H$. Tada na H postoji struktura Hopfovog algebroida $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, \tau_H)$ nad baznim algebrama L i R dana sljedećim podacima: lijevi L-bialgebroid $\mathcal{H}_L = (H, \mu^L, \eta^L, \alpha^L, \beta^L, \Delta^L, \epsilon^L)$, desni R-bialgebroid $\mathcal{H}_R = (H, \mu^R, \eta^R, \alpha^R, \beta^R, \Delta^R, \epsilon^R)$ i antipod $\tau_H\colon H \to H$ koji su definirani sa:

$$\begin{aligned} \alpha^L &= \Psi \circ \alpha_R \circ \kappa & \beta^L &= \Psi \circ \beta_R \circ \kappa \\ \alpha^R &= \Psi \circ \alpha_L \circ \kappa^{-1} & \beta^R &= \Psi \circ \beta_L \circ \kappa^{-1} \\ \Delta^L &= \Psi_{D\otimes_R D} \circ \Delta_R \circ \Psi^{-1} & \Delta^R &= \Psi_{D\otimes_L D} \circ \Delta_L \circ \Psi^{-1} \\ \epsilon^L &= \kappa^{-1} \circ \epsilon_R \circ \Psi^{-1} & \epsilon^R &= \kappa \circ \epsilon_L \circ \Psi^{-1} \end{aligned}$$

$$\tau_H = \Psi \circ \tau_D \circ \Psi^{-1}$$

Ovdje je $\Psi_{D\otimes_R D}\colon D \otimes_R D \to H \otimes_L H$ preslikavanje koje šalje $a \otimes_R b$ u $\Psi(b) \otimes_L \Psi(a)$ i $\Psi_{D\otimes_L D}\colon D \otimes_L D \to H \otimes_R H$ preslikavanje koje šalje $a \otimes_L b$ u $\Psi(b) \otimes_R \Psi(a)$. Analogna tvrdnja vrijedi i za unutarnje Hopfove algebroide.

Dokaz. Direktna računska provjera aksioma. Ako je $(\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R, \tau)$ Hopfov algebrod nad baznim algebrama L i R, onda je $((\mathcal{D}_R)^{\mathrm{op,co}}, (\mathcal{D}_L)^{\mathrm{op,co}}, \tau)$ Hopfov algebroid nad baznim algebrama R^{op} i L^{op}, kako je navedeno u [BohmHAlg]. $\square$

9.6.14. U članku [MSS] struktura Hopfovog algebroida na $\mathrm{Diff}^{\omega,\mathrm{op}}(G, e)$ nađena je direktno, koristeći njegovu strukturu kao poludirektnog produkta i u terminima koordinata. U ovom paragrafu razlikovat ćemo tangentni vektorski prostor $\mathfrak{g} = T_e G$ od prostora $\mathfrak{g}^R \subseteq \Gamma\, TG$. Promatrajmo koordinatnu kartu $\psi\colon U \to \psi(U) \subseteq G$, za $U \subseteq T_e G$, koja šalje $0 \in U$ u $e \in G$. Algebra formalnih funkcija $J^\infty(T_e G, 0)$ oko $0 \in T_e G$ je kanonski izomorfna upotpunjenju $\hat{S}(\mathfrak{g}^*) = \prod_{n=0}^\infty S^n(\mathfrak{g}^*)$ algebre polinoma $S(\mathfrak{g}^*) = \oplus_{n=0}^\infty S^n(\mathfrak{g}^*)$ na prostoru $\mathfrak{g} = T_e G$. Izomorfizam $T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ inducira kanonsko ulaganje $S(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}^\omega(T_e G, 0)$ koje se proširuje do izomorfizma $J^\infty(\mathfrak{g}, 0)\sharp S(\mathfrak{g}) = \mathrm{Diff}^\omega(T_e G, 0)$. Povlačenje $(\psi^{-1})^*\colon J^\infty(G, e) \to J^\infty(\mathfrak{g}, 0) \cong \hat{S}(\mathfrak{g}^*)$ je izomorfizam algebri koji naravno zavisi od (∞-mlaza) karte ψ. Vektorska polja oko $0 \in \mathfrak{g}$ prenašamo potiskom ψ_* na vektorska polja oko $e \in G$. Te dva izomorfizma se proširuju na izomorfizam algebri formalnih diferencijalnih operatora, također označen s ψ_*,

$$\hat{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp S(\mathfrak{g}) = J^\infty(\mathfrak{g}, 0)\sharp S(\mathfrak{g}) = \mathrm{Diff}^\omega(T_e G, 0) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Diff}^\omega(G, e) = J^\infty(G, e)\sharp U(\mathfrak{g}^R).$$

Da bi se dobile konkretne formule, invarijantna vektorska polja iz $U(\mathfrak{g}^R)$ se raspišu kao J^∞-linearne kombinacije od $\psi_*(e_i)$ gdje su $e_1, \ldots, e_n$ elementi baze od $T_e G$. Svaki element $h \in T_e G$

može se zapisati u obliku $h = \sum_i h^i e_i \in \mathfrak{g}$. Neka su $w^1, \ldots, w^n$ koordinate na $\psi(U)$ dane s $w^i(\psi(h)) = h^i \in \mathbb{R}$, za $i = 1, \ldots, n$. Ako identificiramo tangentni prostor $T_h\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}$, tada formula $h \mapsto e_i$ za sve $h \in U$ definira vektorsko polje $\tilde{e}_i \in \Gamma_U T\mathfrak{g}$. Potiscima dobivamo bazu desno invarijantnih vektorskih polja $Y_j^\psi \colon \psi(h) \mapsto R_{\psi(h)*}(\tilde{e}_j) \in \Gamma T(\psi(U))$, bazu lijevo invarijantnih vektorskih polja $X_j^\psi \colon \psi(h) \mapsto L_{\psi(h)*}(\tilde{e}_j)$ i bazu $\psi_*(\tilde{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$ i vrijedi $(X_j^\psi)_e = (Y_j^\psi)_e$. Odgovarajući operatori koji djeluju na desno su $(X_j^\psi)^{\mathrm{op}}$, $(Y_j^\psi)^{\mathrm{op}}$, a operatori $\partial^i := (w^i)^{\mathrm{op}}$ generiraju $(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$. U članku [MSS] izvedene su konkretne formule za invarijantna vektorska polja $Y_j^\psi = R_{\psi(h)*}(\tilde{e}_j)$ raspisana preko polja $\psi_*(\tilde{e}_i)$ za slučaj kad je ψ eksponencijalno preslikavanje. To je dalo konkretne formule za realizaciju $\mathrm{Diff}^\omega(G,e)$ izomorfizmom s upotpunjenom Weylovom algebrom $\hat{S}(\mathfrak{g}^*)\sharp S(\mathfrak{g})$. Mada ga je geometrijski pogrešno promatrati kao identifikaciju, apstraktno algebarski imamo izomorfizam

$$\kappa \colon U(\mathfrak{g}^L) \xrightarrow{\cong} U(\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}},$$

koji proširuje apstraktni izomorfizam $\mathfrak{g}^L \cong (\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}}$, $X_j \mapsto (Y_j)^{\mathrm{op}}$, što je u realizaciji $X_j^\psi \mapsto (Y_j^\psi)^{\mathrm{op}}$. U svakom slučaju, kako $(Y_i^\psi)^{\mathrm{op}}$ i ∂_j, $i,j = 1, \ldots, n$ generiraju $U(\mathfrak{g}^R)^{\mathrm{op}}\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$ koristeći κ^{-1} zaključujemo da X_i i ∂^j generiraju $U(\mathfrak{g}^L)\sharp(J^\infty(G,e))^{\mathrm{op}}$. Ta slika korištena je u [MSS], a varijanta i u geometrijskom dijelu članka [Durov].

9.6.15. Pojam upotpunjenog Hopfovog algebroida iz [MSS] je konzistentan ali *ad hoc* i nije unutrašnji Hopfov algebroid u nekoj kategoriji. Na te probleme smo se konkretnije osvrnuli u uvodu, u pododjeljku 1.1.4.

9.6.8 Hopfova algebra $\mathcal{O}^{min}(G)$ funkcija na G

Neka je G Liejeva grupa.

9.6.16. (Matrica $\mathcal{O}$ i Hopfova algebra $\mathcal{O}^{min}(G)$.) Ovdje ćemo dati kratki pregled rezultata, a nakon toga detaljno razraditi. Pokazat ćemo da podalgebra od $C^\infty(G)$ generirana komponentama matrice $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^L) \subseteq GL(\mathfrak{g}^L) \cong GL_n(\mathbb{R})$ zajedno s komponentama matrice $\mathrm{Ad}^{-1}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^L) \subseteq GL(\mathfrak{g}^L) \cong GL_n(\mathbb{R})$ ima strukturu Hopfove $\mathbb{R}$-algebre (dualnu strukturi grupe G). Označimo tu Hopfovu algebru s $\mathcal{O}^{min}(G)$.

Hopfova algebra $\mathcal{O}^{min}(G)$ ima svojstva analogna svojstvima za $U(\mathfrak{g}^L)^{min}$: generirana je kao asocijativna unitalna algebra komponentama matrica $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}$ i $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}^{-1}$, $\{\mathcal{O}_i^j, \bar{\mathcal{O}}_i^j \mid i,j = 1, \ldots, n\}$, komutativna je,

$$\sum_j \mathcal{O}_j^k \bar{\mathcal{O}}_i^j = \delta_i^k = \sum_j \bar{\mathcal{O}}_j^k \mathcal{O}_i^j$$

$$\Delta(\mathcal{O}_i^j) = \sum_k \mathcal{O}_k^j \otimes \mathcal{O}_i^k, \quad \Delta(\bar{\mathcal{O}}_i^j) = \sum_k \bar{\mathcal{O}}_i^k \otimes \bar{\mathcal{O}}_k^j$$

$$\epsilon(\mathcal{O}_i^j) = \delta_i^j = \epsilon(\bar{\mathcal{O}}_i^j)$$
$$S(\mathcal{O}_i^j) = \bar{\mathcal{O}}_i^j, \quad S(\bar{\mathcal{O}}_i^j) = \mathcal{O}_i^j$$

i vrijedi

$$\langle X_k, \mathcal{O}_i^j \rangle = C_{ki}^j$$
$$\sum_{l,m} \mathcal{O}_i^l \mathcal{O}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \mathcal{O}_n^k$$

Sparivanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathcal{O}^{min}(G) \to \mathbb{R}$ je Hopfovo sparivanje po prethodnom pododjeljku. Dakle, imamo morfizam Hopfovih algebri po tom sparivanju:

$$\mathcal{O}^{min}(G) \to U(\mathfrak{g}^L)^*.$$

Iz toga lako slijedi da je slika po tom preslikavanju $U(\mathfrak{g}^L)^{min} \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^*$. Naime, sparivanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes U(\mathfrak{g}^L)^{min} \to k$ je nedegenerirano u drugoj varijabli, pa se zbog $\langle X_k, \mathcal{O}_i^j \rangle = C_{ki}^j = \langle X_k, \mathcal{U}_i^j \rangle$, te $\Delta(\mathcal{O}_i^j) = \sum_k \mathcal{O}_k^j \otimes \mathcal{O}_i^k$ i $\Delta(\mathcal{U}_i^j) = \sum_k \mathcal{U}_k^j \otimes \mathcal{U}_i^k$ lako vidi da se $\mathcal{O}_i^j$ preslikava u $\mathcal{U}_i^j$ (jer se nužno sa svim elementima od $U(\mathfrak{g}^L)$ jednako sparuje kao $\mathcal{U}_i^j$), i analogno za drugi skup generatora. Imamo dakle sljedeće morfizme Hopfovih algebri:

$$\mathcal{O}^{min}(G) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g}^L)^{min} \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^\circ \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^*.$$

U nekim slučajevima je sparivanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathcal{O}^{min}(G) \to \mathbb{R}$ nedegenerirano u drugoj varijabli, to jest vrijedi $\mathcal{O}^{min}(G) \cong U(\mathfrak{g}^L)^{min}$. Možda je uvijek, ali to nismo dokazivali.

Vrijedit će da je $U(\mathfrak{g}^L)$ nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) i kodjelovanje dano sa

$$\rho(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{O}}_i^j \sharp X_j,$$

a to će biti upravo zapis odgovarajućeg desno invarijantnog vektorskog polja Y_i, takvog da je $(X_i)_e = (Y_i)_e$, kao diferencijalni operator pomoću lijevo invarijantnih vektorskih polja i funkcija na G.

9.6.17. Definicije i dokazi. (Hopfova algebra $\mathcal{O}^{min}(G)$.) Neka je

$$\mathcal{O}(g) := (\mathrm{Ad}_g)_g = (L_{g*} \circ R_{g^{-1}*})_g \colon T_gG \to T_gG$$
$$\mathcal{O}(g) \in GL(T_gG)$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ baza za Liejevu algebru $\mathfrak{g}^R$ desno invarijantnih vektorskih polja, $X_1, \ldots, X_n$ baza za Liejevu algebru $\mathfrak{g}^L$ lijevo invarijantnih vektorskih polja takve da $(Y_i)_e = (X_i)_e$, $\forall i$. U bazi $(Y_1)_g, \ldots, (Y_n)_g$, komponente matrice od $\mathcal{O}(g)$ označimo s $\mathcal{O}_i^j(g)$:

$$\mathcal{O}(g)((Y_i)_g) = \sum_j \mathcal{O}_i^j(g)(Y_j)_g,$$

ovdje je j dakle indeks retka, a i indeks stupca. Vrijedi

$$(\mathrm{Ad}_g)_g((Y_i)_g) = (L_{g*})_e((R_{g^{-1}*})_g((Y_i)_g)) = (L_{g*})_e(Y_i)_e = (L_{g*})_e(X_i)_e = (X_i)_g$$

Dakle,

$$\mathcal{O}(g)((Y_i)_g) = (X_i)_g = \sum_j \mathcal{O}_i^j(g)(Y_j)_g.$$

Nadalje, vrijedi

$$(\mathrm{Ad}_g)_e((Y_i)_e) = (\mathrm{Ad}_g)_e((X_i)_e) = (L_{g*} \circ R_{g^{-1}*})_e((X_i)_e) = (R_{g^{-1}*} \circ L_{g*})_e((X_i)_e) =$$

$$= (R_{g^{-1}*})_g((L_{g*})_e((X_i)_e)) = (R_{g^{-1}*})_g((X_i)_g) = \sum_j (R_{g^{-1}*})_g(\mathcal{O}_i^j(g)(Y_j)_g) =$$

$$= \sum_j \mathcal{O}_i^j(g)(R_{g^{-1}*})_g((Y_j)_g) = \sum_j \mathcal{O}_i^j(g)(Y_j)_e$$

Dakle,

$$\mathcal{O}_i^j(g) = [(\mathrm{Ad}_g)_e]_i^j,$$

gdje je lijeva matrica u bazi $(Y_1)_g, \ldots, (Y_n)_g$ od T_gG, a desna matrica u bazi $(Y_1)_e, \ldots, (Y_n)_e$ od T_eG.

Dakle, $\mathcal{O}$ možemo gledati i kao adjungiranu reprezentaciju

$$\mathrm{Ad}\colon G \to GL(T_eG)$$

i vrijedi

$$\mathcal{O}_i^j(hg) = \sum_k \mathcal{O}_k^j(h)\mathcal{O}_i^k(g).$$

Dokazat ćemo da postoji Hopfova algebra, podalgebra od $C^\infty(G)$, čija je struktura koalgebre dualna strukturi grupe G i koja sadrži funkcije $\mathcal{O}_i^j$.

Pretpostavimo da postoji takva Hopfova algebra.

Za koprodukt određen produktom na G iz prethodnoga bismo imali:

$$\Delta(\mathcal{O}_i^j) = \sum_k \mathcal{O}_k^j \otimes \mathcal{O}_i^k$$

a za kojedinicu određenu jedinicom na G:

$$\epsilon(\mathcal{O}_i^j) = \mathcal{O}_i^j(e) = \delta_i^j.$$

Ako označimo s $\bar{\mathcal{O}}(g)$ linearni operator inverzan $\mathcal{O}(g)$, onda je

$$\bar{\mathcal{O}}_i^j(g) = [(\mathrm{Ad}_{g^{-1}})_e]_i^j = \mathcal{O}_i^j(g^{-1})$$

dakle u toj Hopfovoj algebri bilo bi

$$S(\mathcal{O}_i^j) = \bar{\mathcal{O}}_i^j, \qquad S(\bar{\mathcal{O}}_i^j) = \mathcal{O}_i^j$$

Iz svojstava Hopfove algebre slijedilo bi za $\bar{\mathcal{O}}_i^j$

$$\Delta(\bar{\mathcal{O}}_i^j) = \sum_k \bar{\mathcal{O}}_i^k \otimes \bar{\mathcal{O}}_k^j$$

$$\epsilon(\bar{\mathcal{O}}_i^j) = \bar{\mathcal{O}}_i^j(e) = \delta_i^j.$$

Iz svega pokazanog, jasno je da podalgebra od $C^\infty(G)$ generirana funkcijama $\mathcal{O}_i^j$, $\bar{\mathcal{O}}_i^j$ Hopfova algebra nekih funkcija na grupi G, označimo je s $\mathcal{O}^{min}(G)$.

Nadalje, po primjeru 9.6.7 sparivanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes C^\infty(G) \to \mathbb{R}$ restringira se na Hopfovo sparivanje $U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathcal{O}^{min}(G) \to \mathbb{R}$, pa imamo morfizam Hopfovih algebri

$$\mathcal{O}^{min}(G) \to U(\mathfrak{g}^L)^*$$

Dokažimo da vrijedi

$$\langle X_j, \mathcal{O}_i^k \rangle = C_{ji}^k.$$

Vrijedi

$$(X_j)_e \mathcal{O}_i^k = \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathcal{O}(\exp tX_j)_i^k$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 (\mathrm{Ad}_{\exp tX_j})_e = \mathrm{ad}_{X_j} = [C_{ji}^k]_i^k.$$

za

$$[X_j, X_i] = \sum_k C_{ji}^k X_k$$

Imamo još jedno sparivanje $U(\mathfrak{g}^R) \otimes \mathcal{O}^{min}(G) \to \mathbb{R}$ koje je Hopfovo ako uzmemo na $\mathcal{O}^{min}(G)$ suprotan koprodukt, dakle imamo morfizam Hopfovih algebri

$$\mathcal{O}^{min}(G)^{\mathrm{co}} \to U(\mathfrak{g}^R)^*.$$

Ta dva sparivanja su u sljedećem odnosu. Vrijedi

$$\langle X_i, f \rangle = (X_i)_e f = (Y_i)_e f = \langle Y_i, f \rangle$$

$$\langle X_{i_1} \cdots X_{i_k}, f \rangle = \langle Y_{i_k} \cdots Y_{i_1}, f \rangle$$

a potonje se može dokazati tako da se iz definicije deriviranja funkcije vektorskim poljem pokaže da lijevo invarijantna vektorska polja komutiraju s desno invarijantnim vektorskim poljima i koristi račun

$$\langle X_i X, f \rangle = \langle X_i, D_X f \rangle = \langle Y_i, D_X f \rangle = \langle Y_i X, f \rangle = \langle X Y_i, f \rangle$$

gdje su oba sparivanja sada proširena do sparivanja $\mathrm{Diff}(G) \otimes C^\infty(G) \to \mathbb{R}$.

Budući da su komponente matrice $\mathcal{O}$ komponente reprezentacije, sve se lijeve translacije funkcije $\mathcal{O}_i^j$ mogu zapisati kao linearna kombinacija funkcija $\mathcal{O}_k^j$. Slijedi da je $\mathcal{O}_i^j \in \mathrm{Rep}(G) \subseteq C^\infty(G, \mathbb{C})$ za kompaktnu Liejevu grupu G, a znamo da je $\mathrm{Rep}(G)$ Hopfova algebra. Također, zbog $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}$, za Liejevu grupu G je $\mathcal{O}, \bar{\mathcal{O}} \in M_n(C^\infty(G))$, a za linearnu algebarsku grupu G, $\mathcal{O}, \bar{\mathcal{O}} \in M_n(\mathcal{O}(G))$.

Ako $\mathcal{O}^{min}(G) \sharp U(\mathfrak{g}^L)$ gledamo kao podalgebru algebre diferencijalnih operatora, vidimo da je to najmanja podalgebra algebre $\mathrm{Diff}(G)$ koja sadrži i lijevo invarijantne i desno invarijantne diferencijalne operatore, jer je zapis desno invarijantnog vektorskog polja Y_i upravo

$$Y_i = \sum_j \bar{\mathcal{O}}_i^j \sharp X_j$$

Ta formula definira izomorfizam s algebrom $\mathcal{O}^{min}(G)^{\mathrm{co}} \sharp U(\mathfrak{g}^R)$ čiji su elementi isti diferencijalni operatori, samo zapisani na drugačiji način, pomoću desno invarijantnih diferencijalnih operatora.

Mogli bismo još definirati i poludirektne produkte $U(\mathfrak{g}^L) \sharp \mathcal{O}^{min}(G)^{\mathrm{co}}$ i $U(\mathfrak{g}^R) \sharp \mathcal{O}^{min}(G)$ u skladu s time da imaju podalgebre $\mathcal{O}^{min}(G)$, te $U(\mathfrak{g}^L)$ odnosno $U(\mathfrak{g}^R)$, i da množenje odgovara kompoziciji diferencijalnih operatora. Za općenitu Hopfovu algebru funkcija na grupi koja sadrži $\mathcal{O}^{min}(G)$ imamo dakle izomorfne algebre:

$$H \sharp U(\mathfrak{g}^L) \cong U(\mathfrak{g}^R) \sharp H \cong H^{\mathrm{co}} \sharp U(\mathfrak{g}^R) \cong U(\mathfrak{g}^L) \sharp H^{\mathrm{co}}$$

koje su sve različiti zapisi iste algebre diferencijalnih operatora.

Zamijetimo još da je po morfizmima Hopfovih algebri

$$H \to U(\mathfrak{g}^L)^*, \quad H \to (U(\mathfrak{g}^R)^*)^{\mathrm{co}}$$

slika od $\mathcal{O}^{min}(G)$ upravo $U(\mathfrak{g}^L)^{min}$ i $(U(\mathfrak{g}^R)^{min})^{\mathrm{co}}$. Pritom se komponente matrica $\mathcal{O}$, $\bar{\mathcal{O}}$ preslikaju redom u odgovarajuće komponente matrica $\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}$ u $U(\mathfrak{g}^L)^{min}$. To se lako pokaže koristeći nedegeneriranost sparivanja $U(\mathfrak{g}^L) \otimes U(\mathfrak{g}^L)^* \to \mathbb{R}$, činjenice da se svaki $\mathcal{O}_i^j$ sparuje s generatorima od $U(\mathfrak{g}^L)$ jednako kao odgovarajući $\mathcal{U}_i^j$, te da $\mathcal{O}_i^j$ i $\mathcal{U}_i^j$ imaju odgovarajuće jednako definirane koprodukte.

Može se dokazati da je $U(\mathfrak{g}^L)$ nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) i kodjelovanje definirano baš sa

$$\rho(X_i) = Y_i = \sum_j \bar{\mathcal{O}}_i^j \sharp X_j.$$

Dokaz koristi svojstva te grupe koja ima i grupa $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ koja se surjektivno morfizmom Hopfovih algebri preslika na $\mathcal{O}^{min}(G)$, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru, pa ćemo ga provesti za grupu $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ u propoziciji 9.6.20 iz čega će slijediti tvrdnja za $\mathcal{O}^{min}(G)$ po korolaru 9.6.21.

9.6.9 Hopfova algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$

9.6.18. (Hopfova algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$.) Neka je $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem k. Sa $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ označili smo algebru regularnih funkcija na algebarskoj grupi $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Uz izbor baze $X_1, \dots, X_n$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobivamo izomorfizam $GL(\mathfrak{g}) \cong GL(n,k)$.

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow GL(\mathfrak{g}) \cong GL(n,k) \hookrightarrow M_n(k)$$

Ti morfizmi algebarskih grupa induciraju sljedeći niz morfizama Hopfovih algebri:

$$\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \leftarrow \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{O}(GL(n,k)).$$

Algebra $\mathcal{O}(GL(n,k))$ regularnih funkcija na algebarskoj grupi $GL(n,k)$ generirana je funkcijama U_i^j, $\bar{U}_i^j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definiranim sa

$$U_i^j(M) = M_i^j, \quad \bar{U}_i^j(M) = (M^{-1})_i^j$$

modulo relacije

$$\sum_j U_i^j \bar{U}_j^k = \delta_i^k = \sum_j \bar{U}_i^j U_j^k.$$

Slijedi da Hopfova algebra $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ ima sljedeća svojstva: ona je kvocijent slobodne komutativne algebre generirane s $\mathcal{G}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j$, $i, j = 1, \dots, n$ (koje su slika odgovarajućih gore navedenih koordinatnih funkcija na $GL(n,k)$) po idealu određenom sa

$$\sum_{l,m} \mathcal{G}_i^l \mathcal{G}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \mathcal{G}_n^k$$

$$\sum_j \mathcal{G}_j^k \bar{\mathcal{G}}_i^j = \delta_i^k = \sum_j \bar{\mathcal{G}}_j^k \mathcal{G}_i^j$$

i vrijedi

$$\Delta(\mathcal{G}_i^j) = \sum_k \mathcal{G}_k^j \otimes \mathcal{G}_i^k, \quad \Delta(\bar{\mathcal{G}}_i^j) = \sum_k \bar{\mathcal{G}}_i^k \otimes \bar{\mathcal{G}}_k^j$$

$$\epsilon(\mathcal{G}_i^j) = \delta_i^j = \epsilon(\bar{\mathcal{G}}_i^j)$$

$$S(\mathcal{G}_i^j) = \bar{\mathcal{G}}_i^j, \quad S(\bar{\mathcal{G}}_i^j) = \mathcal{G}_i^j$$

Dalje, lako se vidi da postoji morfizam Hopfovih algebri $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{g})^{min}$ dan na generatorima sa $\mathcal{G}_i^j \mapsto \mathcal{U}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j \mapsto \bar{\mathcal{U}}_i^j$, čime dobivamo niz morfizama Hopfovih algebri

$$U(\mathfrak{g})^{min} \leftarrow \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \leftarrow \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{O}(GL(n,k)).$$

Sada se lako vidi da taj morfizam Hopfovih algebri inducira sparivanje

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})^{min} \to k$$

i da je ono Hopfovo sparivanje. Za to sparivanje vrijedi

$$\langle X_k, \mathcal{G}_i^j \rangle = C_{ki}^j.$$

Sparivanje nije nedegenerirano, pa ne možemo koristiti teoreme koje imamo, ali može se dokazati da je $U(\mathfrak{g})$ nad $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra (uz sparivanjem inducirano djelovanje) i kodjelovanje dano na generatorima sa

$$\rho(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{G}}_i^j \sharp X_j.$$

Pritom se činjenica da je sparivanje dobro definirano ako se zada na generatorima i sva ostala potrebna svojstva mogu dokazati koristeći samo gore navedena svojstva od $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$, bez korištenja morfizma $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{g})^{min}$, kako ćemo vidjeti u dokazu sljedeće propozicije.

9.6.19. (Veza $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ i $\mathcal{O}^{min}(G)$.) Kad bi bilo $k = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ i kad bi postojala algebarska grupa G čija je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$, imali bismo niz regularnih homomorfizama grupa

$$G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow GL(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\cong} GL(n,k)$$

koji bi definirao niz sljedećih morfizama Hopfovih algebri regularnih funkcija.

$$\mathcal{O}(G) \longleftarrow \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \twoheadleftarrow \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \xleftarrow{\cong} \mathcal{O}(GL(n,k))$$

Slika funkcija U_i^j, $\bar{U}_i^j \in \mathcal{O}(GL(n,k)) \cong \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g}))$ po tim preslikavanjima bila bi $\mathcal{G}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j \in \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ i zatim $\mathcal{O}_i^j$, $\bar{\mathcal{O}}_i^j \in \mathcal{O}^{min}(G) \subseteq \mathcal{O}(G)$ iz primjera 9.6.17 i 9.6.5. U pododjeljku 9.6.7 definirano je sparivanje $\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes C^\infty(G) \to k$. Ovdje promotrimo njegovu restrikciju

$$\langle\,,\rangle\colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathcal{O}(G) \to k.$$

Pomoću tog sparivanja i pridruživanja $\mathcal{O}(G) \leftarrow \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ mogli bismo definirati sparivanje

$$\langle\,,\rangle'\colon U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to k$$

$$\langle X, f\rangle' := \langle X, f \circ \mathrm{Ad}\rangle.$$

Ovo sparivanje jednako je gore definiranom sparivanju.

Propozicija 9.6.20. *Neka je $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalna Liejeva algebra, sa strukturnim konstantama, za generatore $X_1, \ldots, X_n$, danima sa*

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

Neka je Hopfova algebra H kvocijent slobodne komutativne asocijativne unitalne algebre generirane sa $\mathcal{G}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j$, $i,j=1,\ldots,n$ po idealu određenom sa

$$\sum_{l,m}\mathcal{G}_i^l\mathcal{G}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n\mathcal{G}_n^k, \qquad i,j,k=1,\ldots,n$$

$$\sum_j \mathcal{G}_j^k\bar{\mathcal{G}}_i^j = \delta_i^k = \sum_j \bar{\mathcal{G}}_j^k\mathcal{G}_i^j, \qquad i,k=1,\ldots,n$$

i neka su struktura koalgebre i antipod na H dani na generatorima sa:

$$\Delta(\mathcal{G}_i^j) = \sum_k \mathcal{G}_k^j\otimes\mathcal{G}_i^k, \quad \Delta(\bar{\mathcal{G}}_i^j) = \sum_k \bar{\mathcal{G}}_i^k\otimes\bar{\mathcal{G}}_k^j, \qquad i,j=1,\ldots,n$$

$$\epsilon(\mathcal{G}_i^j) = \delta_i^j = \epsilon(\bar{\mathcal{G}}_i^j), \qquad i,j=1,\ldots,n$$

$$S(\mathcal{G}_i^j) = \bar{\mathcal{G}}_i^j, \quad S(\bar{\mathcal{G}}_i^j) = \mathcal{G}_i^j, \qquad i,j=1,\ldots,n$$

to jest $H\cong\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$. Tada je dobro definirano Hopfovo sparivanje $U(\mathfrak{g})\otimes H\to k$ dano na generatorima sa

$$\langle X_k,\mathcal{G}_i^j\rangle = C_{ki}^j, \qquad i,j,k=1,\ldots,n$$

i $U(\mathfrak{g})$ je nad H desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje i kodjelovanje koje je linearno unitalno antimultiplikativno proširenje preslikavanja na generatorima danog sa

$$\rho(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{G}}_i^j\sharp X_j, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Dokaz. Dokazujemo najprije da je sparivanje dobro definirano. (i) Za početak, dobro je definirano sparivanje $\mathfrak{g}$ i slobodne asocijativne unitalne algebre generirane s $\mathcal{G}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j$, $i,j=1,\ldots,n$ koje je na generatorima dano formulama

$$\langle X_k,\mathcal{G}_i^j\rangle = C_{ki}^j, \quad \langle X_k,\bar{\mathcal{G}}_i^j\rangle = -C_{ki}^j \qquad i,j,k=1,\ldots,n$$

$$\langle X_k, 1_H\rangle = 0$$

i prošireno po formuli

$$\langle X_k,\tilde{\mathcal{G}}_{i_1}^{j_1}\cdots\tilde{\mathcal{G}}_{i_m}^{j_m}\rangle = \sum_l \delta_{i_1}^{j_1}\cdots\delta_{i_{l-1}}^{j_{l-1}}\langle X_k,\tilde{\mathcal{G}}_{i_l}^{j_l}\rangle\delta_{i_{l+1}}^{j_{l+1}}\cdots\delta_{i_m}^{j_m}$$

gdje $\tilde{\mathcal{G}}_i^j$ označuje $\mathcal{G}_i^j$ ili $\bar{\mathcal{G}}_i^j$. Budući da rezultat sparivanja ne ovisi o redoslijedu generatora u H, to je tim formulama također dobro definirano sparivanje $\mathfrak{g}$ i slobodne asocijativne komutativne unitalne algebre s navedenim generatorima. Da bismo dokazali da je istim formulama dobro definirano sparivanje $\mathfrak{g}\otimes H\to k$ dovoljno je dokazati da je

$$\langle X_p,\sum_{l,m}\mathcal{G}_i^l\mathcal{G}_j^m C_{lm}^k\rangle = \langle X_p,\sum_{l,m} C_{ij}^n\mathcal{G}_n^k\rangle, \qquad i,j,k,p=1,\ldots,n$$

$$\langle X_p, \sum_j \mathcal{G}^k_j \bar{\mathcal{G}}^j_i \rangle = \langle X_p, \delta^k_i \rangle = \langle X_p, \sum_j \bar{\mathcal{G}}^k_j \mathcal{G}^j_i \rangle, \qquad i, k, p = 1, \ldots, n$$

Prva tvrdnja je

$$\sum_l C^l_{pi} C^k_{lj} + \sum_m C^m_{pj} C^k_{im} = C^n_{ij} C^k_{pn}$$

što izlazi iz Jacobijevog identiteta za X_p, X_i, X_j, a druga tvrdnja je

$$\langle X_p, \mathcal{G}^k_i \rangle + \langle X_p, \bar{\mathcal{G}}^k_i \rangle = 0.$$

Iz definicije samog sparivanja sa monomima i 1_H lako se vidi da za svaka dva elementa f, $g \in H$ i svaki $X \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\langle X, fg \rangle = \langle X, f \rangle \epsilon(g) + \epsilon(f) \langle X, g \rangle.$$

(ii) Dalje, dobro je definirano proširenje sparivanja $\mathfrak{g} \otimes H \to k$ do sparivanja $T(\mathfrak{g}) \otimes H \to k$ formulom

$$\langle X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_m}, f \rangle = \sum \langle X_{i_1}, f_{(1)} \rangle \cdots \langle X_{i_m}, f_{(m)} \rangle.$$

Da bismo dokazali da to sparivanje inducira dobro definirano sparivanje na kvocijentu $U(\mathfrak{g})$ tenzorske algebre, dovoljno je dokazati da je

$$\langle [X_i, X_j], f \rangle = \langle X_i X_j - X_j X_i, f \rangle$$

za sve generatore X_i, $X_j \in \mathfrak{g}$ i sve $f \in H$. Tu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Za bazu indukcije trebamo dokazati

$$\langle [X_i, X_j], \mathcal{G}^l_k \rangle = \langle X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i, \mathcal{G}^l_k \rangle$$

$$\langle [X_i, X_j], \bar{\mathcal{G}}^l_k \rangle = \langle X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i, \bar{\mathcal{G}}^l_k \rangle$$

Obje te tvrdnje su ekvivalentne

$$\sum_p C^p_{ij} C^l_{pk} = \sum_p C^l_{ip} C^p_{jk} - \sum_p C^l_{jp} C^p_{ik}$$

što izlazi iz Jacobijevog svojstva od $\mathfrak{g}$.

Za korak indukcije koristimo jednakost

$$\langle X, fg \rangle = \langle X, f \rangle \epsilon(g) + \epsilon(f) \langle X, g \rangle$$

koja vrijedi za svaka dva elementa f, $g \in H$ i svaki $X \in \mathfrak{g}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $f \in H$. Računamo

$$\langle X_i \otimes X_j, \mathcal{G}^l_k f \rangle = \sum \sum \langle X_i, (\mathcal{G}^l_k)_{(1)} f_{(1)} \rangle \langle X_j, (\mathcal{G}^l_k)_{(2)} f_{(2)} \rangle =$$

$$= \sum \sum_p \Big(\langle X_i, \mathcal{G}^l_p \rangle \epsilon(f_{(1)}) + \delta^l_p \langle X_i, f_{(1)} \rangle \Big) \Big(\langle X_j, \mathcal{G}^p_k \rangle \epsilon(f_{(2)}) + \delta^p_k \langle X_j, f_{(2)} \rangle \Big)$$

a to je jednako

$$\sum \sum_p \langle X_i, \mathcal{G}^l_p \rangle \epsilon(f_{(1)}) \langle X_j, \mathcal{G}^p_k \rangle \epsilon(f_{(2)}) + \langle X_i, \mathcal{G}^l_k \rangle \langle X_j, f \rangle + \langle X_j, \mathcal{G}^l_k \rangle \langle X_i, f \rangle + \delta^l_k \sum \langle X_i, f_{(1)} \rangle \langle X_j, f_{(2)} \rangle$$

to jest

$$\sum \langle X_i \otimes X_j, \mathcal{G}^l_k \rangle \epsilon(f_{(1)}) \epsilon(f_{(2)}) + \langle X_i, \mathcal{G}^l_k \rangle \langle X_j, f \rangle + \langle X_j, \mathcal{G}^l_k \rangle \langle X_i, f \rangle + \delta^l_k \sum \langle X_i \otimes X_j, f \rangle$$

i analogno za $\langle X_j \otimes X_i, \mathcal{G}^l_k f \rangle$. Pri oduzimanju se dva sumanda u sredini pokrate i vrijedi $\sum \epsilon(f_{(1)}) \epsilon(f_{(2)}) = \sum \epsilon(f_{(1)}) \epsilon(S f_{(2)}) = \epsilon(f)$ pa je dakle

$$\langle X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i, \mathcal{G}^l_k f \rangle$$

jednako

$$\sum \langle X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i, \mathcal{G}^l_k \rangle \epsilon(f) + \delta^l_k \sum \langle X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i, f \rangle$$

što je po bazi indukcije i pretpostavci indukcije jednako

$$\langle [X_i, X_j], \mathcal{G}^l_k \rangle \epsilon(f) + \delta^l_k \sum \langle [X_i, X_j], f \rangle.$$

To je pak po definiciji sparivanja $\mathfrak{g} \otimes H \to k$ jednako traženom

$$\langle [X_i, X_j], \mathcal{G}^l_k f \rangle.$$

Analogno se dokaže ista tvrdnja za generatore $\bar{\mathcal{G}}^l_k$. Zamijetimo da bismo na isti način mogli dokazati da je tim formulama dobro definirano sparivanje $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(GL(n,k)) \to k$.

Tim sparivanjem je dobro definirano desno Hopfovo djelovanje, ono definira poludirektni produkt i na generatorima je jednako

$$X_k \blacktriangleleft \mathcal{G}^j_i = \langle X_k, \mathcal{G}^j_i \rangle + \delta^j_i X_k = \delta^j_i X_k + C^j_{ki}.$$

$$X_k \blacktriangleleft \bar{\mathcal{G}}^j_i = \langle X_k, \bar{\mathcal{G}}^j_i \rangle + \delta^j_i X_k = \delta^j_i X_k - C^j_{ki}.$$

(i)', (ii)' Puno jednostavniji način bio bi sljedeći. Definiramo preslikavanje $U(\mathfrak{g})^{min} \leftarrow \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ koje preslikava generatore $\mathcal{G}^j_i$ u $\mathcal{U}^j_i$ i $\bar{\mathcal{G}}^j_i$ u $\bar{\mathcal{U}}^j_i$. Ono je očito dobro definirano i lako se vidi da je morfizam Hopfovih algebri. Zatim se traženo sparivanje definira kao kompozicija

$$\langle \, , \rangle \colon U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})^{min} \xrightarrow{\langle , \rangle} k.$$

Analogno se naravno može definirati sparivanje $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(GL(n,k)) \to k$. Iz toga očito slijedi da je sparivanjem inducirano desno djelovanje također kompozicija

$$\blacktriangleleft \colon U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})^{min} \xrightarrow{\blacktriangleleft} U(\mathfrak{g})$$

te da je inducirano preslikavanje $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{min}\sharp U(\mathfrak{g})$ morfizam algebri. Očito je također da je desno Hopfovo djelovanje definirano sparivanjem također kompozicija

$$\blacktriangleleft : U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})^{min}\sharp U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\blacktriangleleft} k.$$

Iz formula je vidljivo da je $U(\mathfrak{g})^{min}$-kodjelovanje $\rho_{U(\mathfrak{g})^{min}}$ kompozicija

$$\rho_{U(\mathfrak{g})^{min}} : U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{\min}\sharp U(\mathfrak{g}).$$

(iii) Dokažimo sada da je ρ dobro definirano.

$$\rho(X_j)\rho(X_i) = (\sum_k \bar{\mathcal{G}}_j^k \sharp X_k) \cdot (\sum_l \bar{\mathcal{G}}_i^l \sharp X_l) = \sum_{k,l,p} \bar{\mathcal{G}}_j^k \bar{\mathcal{G}}_i^p (X_k \blacktriangleleft \bar{\mathcal{G}}_p^l) X_l =$$

$$= \sum_{k,l,p} \bar{\mathcal{G}}_j^k \bar{\mathcal{G}}_i^p \sharp (\delta_p^l X_k - C_{kp}^l) X_l = \sum_{k,l} \bar{\mathcal{G}}_j^k \bar{\mathcal{G}}_i^l \sharp X_k - \sum_{k,l,p} \bar{\mathcal{G}}_j^k \bar{\mathcal{G}}_i^p C_{kp}^l \sharp X_l$$

i analogno za $\rho(X_j)\rho(X_i)$. S druge strane

$$\rho([X_i, X_j]) = \sum_{p,r} C_{ij}^p \bar{\mathcal{G}}_p^r \sharp X_r.$$

Jednakost $\rho(X_j)\rho(X_i) - \rho(X_i)\rho(X_j) = \rho([X_i, X_j])$ izlazi sada iz komutativnosti od H i jednakosti

$$\sum_{l,m} \bar{\mathcal{G}}_i^l \bar{\mathcal{G}}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \bar{\mathcal{G}}_n^k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n$$

koju lako dobijemo iz

$$\sum_{l,m} \mathcal{G}_i^l \mathcal{G}_j^m C_{lm}^k = \sum_{l,m} C_{ij}^n \mathcal{G}_n^k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Zamijetimo još da očito vrijedi $\rho(XY) = \rho(Y)\rho(X)$ za sve $X, Y \in U(\mathfrak{g})$.

(iv) Dokažimo pleteničastu komutativnost:

$$Y \blacktriangleleft \rho(X) = XY.$$

$$X_k \blacktriangleleft \sum_j \bar{\mathcal{G}}_i^j \sharp X_j = \sum_j (\delta_i^j X_k X_j + C_{ik}^j) X_j = X_k X_i + [X_i, X_k] = X_i X_k$$

$$(XY) \blacktriangleleft \sum_j \bar{\mathcal{G}}_i^j \sharp X_j = \sum_{j,m} (X \blacktriangleleft \bar{\mathcal{G}}_i^m)(Y \blacktriangleleft \bar{\mathcal{G}}_m^j) X_j = \sum_{j,m} (X \blacktriangleleft \bar{\mathcal{G}}_i^m) X_m Y = X_i XY$$

$$X \blacktriangleleft \rho(YZ) = (X \blacktriangleleft \rho(Z)) \blacktriangleleft \rho(Y) = (ZX) \blacktriangleleft \rho(Y) = YZX$$

(iv)' Jednostavniji način bio bi koristiti preslikavanja definirana u (i)', (ii)'. Naime,

$$Y \blacktriangleleft \rho(X) = Y \blacktriangleleft \rho_{U(\mathfrak{g})^{min}}(X) = XY.$$

(v) Dokažimo da je ρ kodjelovanje. Za početak dokažimo da ako tvrdnja vrijedi za X, $Y \in U(\mathfrak{g})$, vrijedi i za $XY \in U(\mathfrak{g})$. Koristimo svojstva: ρ je antihomomorfizam algebri, $\blacktriangleleft$ je Hopfovo djelovanje, vrijedi pleteničasta komutativnost kao u (iv), kompatibilnost koprodukta i produkta u H. Imamo

$$\rho(YX) = \rho(X)\rho(Y) = \sum X_{[-1]}\sharp X_{[0]} \cdot Y_{[-1]}\sharp Y_{[0]} = \sum X_{[-1]}Y_{[-1](1)}\sharp(X_{[0]} \blacktriangleleft Y_{[-1](2)})Y_{[0]}$$

$$= \sum X_{[-1]}Y_{[-1]}\sharp(X_{[0]} \blacktriangleleft Y_{[0][-1]})Y_{[0][0]} = \sum X_{[-1]}Y_{[-1]}\sharp Y_{[0]}X_{[0]}$$

iz čega slijedi, jer X i Y imaju traženo svojstvo,

$$((\mathrm{id} \otimes \rho) \circ \rho)(XY) = \sum X_{[-1]}Y_{[-1]} \otimes \rho(Y_{[0]}X_{[0]}) =$$

$$= \sum X_{[-1]}Y_{[-1]} \otimes X_{[0][-1]}Y_{[0][-1]} \otimes Y_{[0][0]}X_{[0][0]} =$$

$$= \sum X_{[-1](1)}Y_{[-1](1)} \otimes X_{[-1](2)}Y_{[-1](2)} \otimes Y_{[0]}X_{[0]} =$$

$$= \sum (X_{[-1]}Y_{[-1]})_{(1)} \otimes (X_{[-1]}Y_{[-1]})_{(2)} \otimes Y_{[0]}X_{[0]}$$

te, s druge strane,

$$((\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \rho)(YX) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(\sum X_{[-1]}Y_{[-1]}\sharp Y_{[0]}X_{[0]}) =$$

$$= \sum (X_{[-1]}Y_{[-1]})_{(1)} \otimes (X_{[-1]}Y_{[-1]})_{(2)} \otimes Y_{[0]}X_{[0]}.$$

Sada vidimo da je dovoljno tvrdnju provjeriti na generatorima, a to je trivijalno:

$$\sum_{k,j} \bar{\mathcal{G}}_i^k \otimes \bar{\mathcal{G}}_k^j \sharp X_j = \sum_{j,l} \bar{\mathcal{G}}_i^j \otimes \bar{\mathcal{G}}_j^l \sharp X_l.$$

(iv) Dokazujemo Yetter-Drinfeldovo svojstvo:

$$\sum f_{(2)} \cdot (X \blacktriangleleft \rho(f_{(1)})) = \rho(X \blacktriangleleft f).$$

Dovoljno je dokazati svojstvo za generatore $X_k, 1_{U(\mathfrak{g})} \in \mathfrak{g}$ i $\mathcal{G}_i^j$, $\bar{\mathcal{G}}_i^j, 1_H \in H$ zbog činjenice da je $\blacktriangleleft$ Hopfovo djelovanje, činjenice da je ρ antihomomorfizam algebri i činjenice da se u H koprodukt slaže s produktom. Naime, ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za X, $Y \in U(\mathfrak{g})$, onda vrijedi i za XY:

$$\sum f_{(2)}\rho((XY) \blacktriangleleft f_{(1)}) = \sum f_{(3)}\rho((X \blacktriangleleft f_{(1)})(Y \blacktriangleleft f_{(2)})) = \sum f_{(3)}\rho(Y \blacktriangleleft f_{(2)})\rho(X \blacktriangleleft f_{(1)}) =$$

$$= \sum \rho(Y) \cdot f_{(2)}\rho(X \blacktriangleleft f_{(1)}) = \rho(Y)\rho(X) \cdot f = \rho(XY) \cdot f.$$

i ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za f, $g \in H$, onda vrijedi i za $fg \in H$

$$\sum (fg)_{(2)}\rho(X \blacktriangleleft (fg)_{(1)}) = \sum\sum f_{(2)}g_{(2)}\rho(X \blacktriangleleft (f_{(1)}g_{(1)})) =$$

$$= \sum\sum f_{(2)}g_{(2)}\rho((X \blacktriangleleft f_{(1)}) \blacktriangleleft g_{(1)}) = \sum\sum f_{(2)}\rho((X \blacktriangleleft f_{(1)})g = \rho(X)fg.$$

Dokažimo sada tvrdnju za generatore:

$$\sum_l \mathcal{G}^l_i \rho(X_k \blacktriangleleft \mathcal{G}^j_l) = \sum_l \mathcal{G}^l_i \rho(\delta^j_l X_k + C^j_{kl}) = \mathcal{G}^j_i \rho(X_k) + \sum_l \mathcal{G}^l_i C^j_{kl}$$

$$\rho(X_k \blacktriangleleft \mathcal{G}^j_i) = \sum_l \bar{\mathcal{G}}^l_k \sharp X_l \cdot \mathcal{G}^j_i = \sum_{l,p} \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_p \sharp (X_l \blacktriangleleft \mathcal{G}^p_i) = \sum_{l,p} \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_p \sharp (\delta^p_i X_l + C^p_{li}) =$$

$$= \sum_l \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_i \sharp X_l + \sum_{l,p} \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_p C^p_{li} = \mathcal{G}^j_i \rho(X_k) + \sum_{l,p} \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_p C^p_{li}$$

Preostaje dokazati

$$\sum_{l,p} \bar{\mathcal{G}}^l_k \mathcal{G}^j_p C^p_{li} = \sum_l \mathcal{G}^l_i C^j_{kl}$$

što lako slijedi iz

$$\sum_p \mathcal{G}^j_p C^p_{li} = \sum_{m,r} \mathcal{G}^m_l \mathcal{G}^r_i C^j_{mr}.$$

Analogno se tvrdnja dokaže za generatore $\bar{\mathcal{G}}^j_i$. □

Korolar 9.6.21. *Neka je G Liejeva grupa i neka su $X_1, \dots, X_n$ odabrani generatori Liejeve algebre $\mathfrak{g}^L$ od G, sa strukturnim konstantama*

$$[X_i, X_j] = \sum_k C^k_{ij} X_k, \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Neka su $\mathcal{O}^j_i(g)$ te $\bar{\mathcal{O}}^j_i(g)$ komponente matrica od Ad_g te $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ zapisanih u bazi $X_1, \dots, X_n$. Neka je $\mathcal{O}^{min}(G)$ najmanja podalgebra od $C^\infty(G)$ koja sadrži funkcije $\mathcal{O}^j_i$ i $\bar{\mathcal{O}}^j_i$. Tada je $U(\mathfrak{g}^L)$ nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ desno-lijeva pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje i kodjelovanje koje je linearno unitalno antimultiplikativno proširenje preslikavanja na generatorima danog sa

$$\rho(X_i) = \sum_j \bar{\mathcal{O}}^j_i \sharp X_j, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Nadalje, $\rho(X_i)$ je desno invarijantno vektorsko polje $Y_i \in \mathfrak{g}^R$ takvo da je $(Y_i)_e = (X_i)_e$, zapisano u algebri diferencijalnih operatora $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g}^L) \subseteq \mathrm{Diff}(G)$ pomoću lijevo invarijantnih vektorskih polja i funkcija na G. To čini $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$ najmanjom podalgebrom od $\mathrm{Diff}(G)$ takvom da sadrži i $\mathfrak{g}^L$ i $\mathfrak{g}^R$.

Na kraju sljedećeg poglavlja iz ovoga će slijediti da je $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g}^L)$ Hopfov algebroid nad $U(\mathfrak{g}^L)$ i $U(\mathfrak{g}^R)$.

9.6.10 Veza Hopfovih algebri $U(\mathfrak{g})^{min}$, $\mathcal{O}^{min}(G)$ i $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$

9.6.22. Neka je G realna linearna algebarska grupa. Tada je G Liejeva grupa, jer je svaka Zariski zatvorena podgrupa od $GL(n,\mathbb{R})$ ujedno zatvorena podgrupa, a svaka zatvorena podgrupa Liejeve grupe je Liejeva grupa. Vrijedi $\mathcal{O}(G) \subseteq C^\infty(G,\mathbb{R})$. Postoje morfizmi linearnoh algebarskih (Liejevih) grupa

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & GL(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\cong"] & GL(n,\mathbb{R}) \\
G/Z_G(G_0) \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

gdje je $Z_G(G_0)$ centralizator u G komponente povezanosti jedinice G_0. Poznato je da vrijedi $Z_G(G_0) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}$, što opravdava kvocijentno preslikavanje $G \to G/Z_G(G_0)$ i komutativan trokut u dijagramu. Ti homomorfizmi grupa induciraju homomorfizme Hopfovih algebri

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(G) & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l] \arrow[dl, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, "\cong"'] \\
\mathcal{O}(G/Z_G(G_0)) \arrow[u, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Po konstrukciji $\mathcal{O}^{min}(G)$ ona je slika od $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ po gornjem preslikavanju $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(G)) \to \mathcal{O}(G)$. Slijedi $\mathcal{O}^{min}(G) \cong \mathcal{O}(G/Z_G(G_0))$. Budući da imamo sparivanje imamo dalje:

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g}^L)^* & \mathcal{O}(G) \arrow[l] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l] \arrow[dl, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, "\cong"'] \\
U(\mathfrak{g}^L)^{min} \arrow[u, hook] & \mathcal{O}^{min}(G) \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

jer slika od $\mathcal{O}^{min}(G) \subseteq \mathcal{O}(G)$ je $U(\mathfrak{g}^L)^{min} \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^*$. Dakle, imamo niz surjektivnih morfizama Hopfovih algebri

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g}^L)^{min} & \mathcal{O}^{min}(G) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

pri kojem se generatori preslikavaju u generatore:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_i^j & \mathcal{O}_i^j \arrow[l, mapsto] & \mathcal{G}_i^j \arrow[l, mapsto] & U_i^j \arrow[l, mapsto] & U_i^j \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Desni slučaj se dobiva ovako:

$$\begin{tikzcd}
(U(\mathfrak{g}^R)^*)^{\mathrm{co}} & \mathcal{O}(G) \arrow[l] & \mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \arrow[l] \arrow[dl, two heads] & \mathcal{O}(GL(\mathfrak{g})) \arrow[l, two heads] & \mathcal{O}(GL(n,\mathbb{R})) \arrow[l, "\cong"'] \\
(U(\mathfrak{g}^R)^{min})^{\mathrm{co}} \arrow[u, hook] & \mathcal{O}^{min}(G) \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

$U(\mathfrak{g})$ je dakle desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad $U(\mathfrak{g})^{min}$, $U(\mathfrak{g})^*$, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$, $U(\mathfrak{g})^\circ$ čim je $\mathfrak{g}$ konačno-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem k, te uz to nad $\mathcal{O}^{min}(G)$ čim je G Liejeva grupa ili algebarska grupa.

9.6.11 Hopfova algebra $\mathrm{Rep}(G)$

Neka je G kompaktna Liejeva grupa. Hopfova algebra $\mathrm{Rep}(G)$ definirana je u primjeru 6.1.17.

9.6.23. Vrijedi $\mathrm{Rep}(G) \subseteq C^\infty(G, \mathbb{C})$. Proširimo li sparivanje $U(\mathfrak{g}^L)$ i $C^\infty(G, \mathbb{R})$ definirano u odjeljku 9.6.7 najprije $\mathbb{C}$-linearno na kompleksne funkcije u drugom faktoru i onda restringiramo na $\mathrm{Rep}(G)$, dobit ćemo bilinearno preslikavanje

$$U(\mathfrak{g}^L) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Rep}(G) \to \mathbb{C},$$

$\mathbb{R}$-vektorskih prostora. Ono je nedegenerirano u drugoj varijabli ako je G povezana grupa [Timmermann], str. 33. Možemo ga gledati i kao sparivanje

$$U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Rep}(G) \to \mathbb{C},$$

gdje je $U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}} := U(\mathfrak{g}^L) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. To sparivanje je tada Hopfovo sparivanje Hopfovih $\mathbb{C}$- algebri i nedegenerirano je u drugoj varijabli ako je G povezana. Vrijedi

$$U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U(\mathfrak{g}^L), \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = U(\mathfrak{g}^L)^* \otimes \mathbb{C}.$$

Iz sparivanja dobivamo morfizam Hopfovih algebri $\mathrm{Rep}(G) \to U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}}$, a ako je G k tome povezana, onda je taj morfizam Hopfovih algebri injekcija

$$\mathrm{Rep}(G) \hookrightarrow U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}}.$$

9.6.24. Budući da je matrica $\mathcal{O} = \mathrm{Ad} \in M_n(C^\infty(G, \mathbb{R}))$ definirana u 9.6.17 reprezentacija, to su komponente $\mathcal{O}^j_i$, $\bar{\mathcal{O}}^j_i$ reprezentativne funkcije, pa slijedi $\mathcal{O}^{min}(G) \subseteq \mathrm{Rep}(G)$ i time dobivamo morfizme Hopfovih $\mathbb{C}$-algebri

$$\mathcal{O}^{min}(G) \otimes \mathbb{C} \subseteq \mathrm{Rep}(G) \to U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}}.$$

Slika od $\mathcal{O}^{min}(G)$ po toj inkluziji je $U(\mathfrak{g}^L)^{min} \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^* \subseteq U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}}$, pa za G kompaktnu povezanu Liejevu grupu zbog prethodnog imamo

$$\mathcal{O}^{min}(G) \cong U(\mathfrak{g}^L)^{min}.$$

Također vrijedi

$$\mathrm{Lu}(U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{O}^{min}(G) \sharp U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathbb{C} \subseteq \mathrm{Rep}(G) \sharp U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}}$$

i $\mathrm{Rep}(G) \hookrightarrow U(\mathfrak{g}^L)^*_{\mathbb{C}}$ pa lako slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 9.6.25. *Neka je G kompaktna povezana Liejeva grupa. Tada je $U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}}$ nad $\mathrm{Rep}(G)$ pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra uz sparivanjem inducirano djelovanje na jedinstven način. Jedinstveno kodjelovanje je dano kompozicijom*

$$U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}} = U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{O}^{min}(G) \sharp U(\mathfrak{g}^L) \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Rep}(G) \sharp U(\mathfrak{g}^L)_{\mathbb{C}}$$

gdje su $\mathcal{O}^{min}(G)$ i kodjelovanje $U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}^{min}(G) \sharp U(\mathfrak{g})$ definirani u 9.6.17. Također, tada vrijedi

$$\mathcal{O}^{min}(G) \cong U(\mathfrak{g}^L)^{min}$$

za Hopfovu algebru $U(\mathfrak{g}^L)^{min}$ definiranu u 9.6.5.

Dokaz. Posljedica teorema 9.5.22 i prethodnih razmatranja. □

Imamo također sljedeći komutativni dijagram za kompaktnu povezanu Liejevu grupu G.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \otimes \mathbb{C} \arrow[d, two heads] \arrow[dr] & & & \\
\mathcal{O}^{min}(G) \otimes \mathbb{C} \arrow[r, hook] & \mathrm{Rep}(G) \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^{\circ}_{\mathbb{C}} \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^{*}_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

9.6.12 Primjeri Hopfovih algebroida nad $U(\mathfrak{g})$ koji su skalarna proširenja

Sljedeći dijagram prikazuje međusobni odnos raznih poludirektnih produkata $U(\mathfrak{g})$ sa Yetter-Drinfeldovim modulnim algebrama u $\mathrm{indproVect}$ koji su inducirani sparivanjem. Opće formule za skalarno proširenje su specijalizirane za generatore tih algebri u sljedećem pododjeljku 9.6.13.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) \sharp U(\mathfrak{g}) \arrow[d, two heads] & & \\
\mathcal{O}^{min}(G) \sharp U(\mathfrak{g}) \arrow[d, two heads] & & \\
U(\mathfrak{g})^{min} \sharp U(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^{\circ} \sharp U(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & U(\mathfrak{g})^{*} \sharp U(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

Dakle, dobili smo opis strukture unutarnjeg Hopfovog algebroida na sljedećim algebrama u $\mathrm{indproVect}$:

(i) Heisenbergovo udvojenje $U(\mathfrak{g})^{*} \sharp U(\mathfrak{g})$ koji možemo interpretirati kao algebru formalnih differencijalnih operatora $\mathrm{Diff}^{\omega}(G, e) \cong J^{\infty}(G, e) \sharp U(\mathfrak{g}^L)$

(ii) Minimalno skalarno proširenje $U(\mathfrak{g})^{min}\sharp U(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^*\sharp U(\mathfrak{g})$

(iii) Heisenbergovo udvojenje s reduciranim dualom $U(\mathfrak{g})^\circ\sharp U(\mathfrak{g})$

(iv) Minimalni Hopfov algebroid $\mathcal{O}^{min}(G)\sharp U(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Diff}(G)$ za G Liejevu ili algebarsku grupu

(v) $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))\sharp U(\mathfrak{g})$

te sljedećeg unutarnjeg Hopfovog algebroida nad $U(\mathfrak{g})_\mathbb{C}$

(vi) $\mathrm{Rep}(G)\sharp U(\mathfrak{g})_\mathbb{C}$ za G povezanu kompaktnu Liejevu grupu

9.6.13 Formule za skalarna proširenja nad $U(\mathfrak{g})$

Formule ćemo dati za sva skalarna proširenja $H\sharp U(\mathfrak{g}^L)$ iz prethodnog odjeljka. Oni se mogu kao algebra zapisati na sljedeća četiri načina,

$$H\sharp U(\mathfrak{g}^L) \cong U(\mathfrak{g}^R)\sharp H \cong H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R) \cong U(\mathfrak{g}^L)\sharp H^{\mathrm{co}},$$

za koje ćemo dati formule. U tablici ćemo konkretno zadati formule za $H \cong U(\mathfrak{g}^L)^*$ koje se primjenjuju na sve ostale primjere jednostavnom zamjenom, gdje je potrebno, generatora koji su komponente matrice $\mathcal{U}$ sa onima matrice $\mathcal{O}$ ili $\mathcal{G}$.

Neka je dakle

$$H \cong U(\mathfrak{g}^L)^*, \qquad H^{\mathrm{co}} \cong U(\mathfrak{g}^R)^*.$$

Neka je koprodukt na H u apstraktnoj Sweedlerovoj notaciji

$$\Delta_H(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}.$$

Dakle, koprodukt na $H^{\mathrm{co}} \cong U(\mathfrak{g}^R)^*$ ovdje je $\Delta_{H^{\mathrm{co}}}(f) = f_{(2)} \otimes f_{(1)}$.

9.6.26. Označimo $R := U(\mathfrak{g})^R$ i $L := U(\mathfrak{g}^L)$. Neka je $\phi\colon U(\mathfrak{g}^L) \to U(\mathfrak{g}^R)$ antihomomorfizam, dan na generatorima standardno sa $X_i \mapsto Y_i$. Dat ćemo formule za strukturna preslikavanja Hopfovih algebroida nad baznim algebrama $L = U(\mathfrak{g}^L)$ i $R = U(\mathfrak{g}^R)$ za sljedeća dva poludirektna produkta

$$U(\mathfrak{g}^L)\sharp U(\mathfrak{g}^R)^* \cong U(\mathfrak{g}^R)^*\sharp U(\mathfrak{g}^R).$$

One se modificiraju kako je gore navedeno na poludirektne produkte

$$U(\mathfrak{g}^L)\sharp H^{\mathrm{co}} \cong H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R)$$

za bilo koju H među $U(\mathfrak{g}^L)^{min}$, $U(\mathfrak{g}^L)^\circ$, $\mathcal{O}^{min}(G)$, $J^\infty(G,e) \cong U(\mathfrak{g}^L)^*$, $\mathcal{O}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$.

$U(\mathfrak{g}^L)\sharp H^{\mathrm{co}}$	$H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R)$
lijevi bialgebroid nad $U(\mathfrak{g}^L)$	lijevi bialgebroid nad $U(\mathfrak{g}^L)$
$\alpha_L(X_i) = X_i$	$\alpha_L(X_i) = X_i = \sum_j \mathcal{U}_i^j \sharp Y_j$
$\beta_L(X_i) = Y_i - \sum_j C_{ji}^j = \sum_j (\bar{\mathcal{U}}_i^j \cdot X_j - C_{ji}^j)$	$\beta_L(X_i) = \sum_j Y_j \blacktriangleleft \bar{\mathcal{U}}_i^j = Y_i - \sum_j C_{ji}^j$
$\Delta_L(X\sharp f) = X\sharp f_{(2)} \otimes_L 1\sharp f_{(1)}$	$\Delta_L(f\sharp Y) = f_{(2)}\sharp 1 \otimes_L f_{(1)}\sharp Y$
$\epsilon_L(X\sharp f) = \epsilon(f)X$	$\epsilon_L(f\sharp Y_i) = f \blacktriangleright X_i - \epsilon(f)\sum_j C_{ji}^j$
desni bialgebroid nad $U(\mathfrak{g}^R)$	**desni bialgebroid nad** $U(\mathfrak{g}^R)$
$\alpha_R(Y_i) = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \cdot X_j$	$\alpha_R(Y_i) = Y_i$
$\beta_R(Y_i) = X_i$	$\beta_R(Y_i) = X_i = \sum_j \mathcal{U}_i^j \sharp Y_j$
$\Delta_R(X\sharp f) = X\sharp f_{(2)} \otimes_R 1\sharp f_{(1)}$	$\Delta_R(f\sharp Y) = f_{(2)}\sharp 1 \otimes_R f_{(1)}\sharp Y$
$\epsilon_R(X_i\sharp f) = Y_i \blacktriangleleft f$	$\epsilon_R(f\sharp Y) = \epsilon(f)Y$
antipod	antipod
$\tau(X_i\sharp f) = S(f)Y_i$	$\tau(f\sharp Y_i) = (X_i - \sum_j C_{ji}^j)S(f)$
$\tau^{-1}(Y_i\sharp f) = S^{-1}(f)\sum_j(\mathcal{U}_i^j \cdot Y_j + C_{ji}^j)$	$\tau^{-1}(f\sharp Y_i) = X_i S^{-1}(f)$
Ovdje je $\phi = \epsilon_R \circ \alpha_L,\ \phi^{-1} = \epsilon_L \circ \beta_R,$	$\phi\colon L \to R$ antiizomorfizam

9.6.27. S druge strane, neka je sada obratno $L' := U(\mathfrak{g}^R)$, $R' := U(\mathfrak{g}^L)$. Neka je $\psi\colon U(\mathfrak{g}^R) \to U(\mathfrak{g}^L)$ antiizomorfizam dan na generatorima sa $Y_i \mapsto X_i$, on je inverz prethodnog antiizomorfizma ϕ.

$U(\mathfrak{g}^R)\sharp H$	$H\sharp U(\mathfrak{g}^L)$
lijevi bialgebroid nad $L' = U(\mathfrak{g}^R)$	lijevi bialgebroid nad $L' = U(\mathfrak{g}^R)$
$\alpha_{L'}(Y_i) = Y_i$	$\alpha_{L'}(Y_i) = Y_i = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \sharp X_j$
$\beta_{L'}(Y_i) = X_i + \sum_j C_{ji}^j = \sum_j(\mathcal{U}_i^j \cdot Y_j + C_{ji}^j)$	$\beta_{L'}(Y_i) = \sum_j X_j \blacktriangleleft \mathcal{U}_i^j = X_i + \sum_j C_{ji}^j$
$\Delta_{L'}(Y\sharp f) = Y\sharp f_{(1)} \otimes_{L'} 1\sharp f_{(2)}$	$\Delta_{L'}(f\sharp X) = f_{(1)}\sharp 1 \otimes_{L'} f_{(2)}\sharp X$
$\epsilon_{L'}(Y\sharp f) = \epsilon(f)Y$	$\epsilon_{L'}(f\sharp X_i) = f \blacktriangleright Y_i + \epsilon(f)\sum_j C_{ji}^j$
desni bialgebroid nad $R' = U(\mathfrak{g}^L)$	**desni bialgebroid nad** $R' = U(\mathfrak{g}^L)$
$\alpha_{R'}(X_i) = \sum_j \mathcal{U}_i^j \cdot Y_j$	$\alpha_{R'}(X_i) = X_i$
$\beta_{R'}(X_i) = Y_i$	$\beta_{R'}(X_i) = Y_i = \sum_j \bar{\mathcal{U}}_i^j \sharp X_j$
$\Delta_{R'}(Y\sharp f) = Y\sharp f_{(1)} \otimes_{R'} 1\sharp f_{(2)}$	$\Delta_{R'}(f\sharp X) = f_{(1)}\sharp 1 \otimes_{R'} f_{(2)}\sharp X$
$\epsilon_{R'}(Y_i\sharp f) = X_i \blacktriangleleft f$	$\epsilon_{R'}(f\sharp X) = \epsilon(f)X$

$U(\mathfrak{g}^R)\sharp H$	$H\sharp U(\mathfrak{g}^L)$
antipod	antipod
$\tau'(Y_i\sharp f) = S(f)X_i$	$\tau'(f\sharp X_i) = (Y_i - \sum_j C^j_{ji})S(f)$
$(\tau')^{-1}(Y_i\sharp f) = S^{-1}(f)\sum_j(\mathcal{U}^j_i \cdot Y_j + C^j_{ji})$	$(\tau')^{-1}(f\sharp X_i) = Y_i S^{-1}(f)$
Ovdje je $\psi = \epsilon_{R'} \circ \alpha_{L'}$, $\psi^{-1} = \epsilon_{L'} \circ \beta_{R'}$,	$\psi \colon L' \to R'$ antiizomorfizam

9.6.28. Dakle,

$$H\sharp U(\mathfrak{g}^L) \cong U(\mathfrak{g}^R)\sharp H \cong H^{\mathrm{co}}\sharp U(\mathfrak{g}^R) \cong U(\mathfrak{g}^L)\sharp H^{\mathrm{co}}$$

je lijevi bialgebroid nad $U(\mathfrak{g}^L)$ i desni nad $U(\mathfrak{g}^R)$ s formulama:

$$\alpha_L(X) = X, \quad \alpha_R(Y) = Y, \quad \beta_L(X_i) = Y_i - \sum_j C^j_{ji}, \quad \beta_R(Y_i) = X_i$$

te uz to Hopfov algebroid s antipodom

$$\tau(X_i) = Y_i, \quad \tau(f) = S(f)$$

i lijevi bialgebroid nad $U(\mathfrak{g}^R)$ i desni nad $U(\mathfrak{g}^L)$ s formulama:

$$\alpha'_L(Y) = Y, \quad \alpha'_R(X) = X, \quad \beta'_L(Y_i) = X_i + \sum_j C^j_{ji}, \quad \beta'_R(X_i) = Y_i$$

te uz to Hopfov algebroid s antipodom

$$\tau'(Y_i) = X_i, \quad \tau'(f) = S(f)$$

Budući da ovdje vrijedi $S(f) = S^{-1}(f)$, to je τ inverzan τ'. Vrijedi $\alpha'_L = \alpha_R$, $\alpha_L = \alpha'_R$ i vrijedi da je $\epsilon_R \circ \beta_L$ inverzan $\epsilon'_R \circ \beta'_L$, te $\epsilon_L \circ \beta_R$ inverzan $\epsilon'_L \circ \beta'_R$.

9.7 Primjeri s filtriranom Hopfovom algebrom s bijektivnim antipodom i konačno-dimenzionalnim adjungiranim orbitama

Za Hopfovu algebru R s bijektivnim antipodom koja je filtrirana konačno-dimenzionalnim komponentama i za koju vrijedi da je $\mathrm{ad}_R(r)$ unutar potprostora konačne dimenzije za svaki $r \in R$ po propoziciji 9.5.21 vrijedi da je (uz sparivanjem inducirano djelovanje) na jedinstven način desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad kofiltriranom Hopfovom algebrom R^* i po propoziciji 9.5.22 svim njenim (kofiltriranim) Hopfovim podalgebrama H takvima da je $\mathrm{Lu}(R) \subseteq H\sharp R$.

9.8 Primjeri s filtriranom povezanom Hopfovom algebrom

9.8.1 Koradikalna filtracija

Definicije i propozicije iz ovog pododjeljka mogu se naći u [Radford].

Definicija 9.8.1. *Stroga filtracija na k-koalgebri C* je familija njenih potprostora $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ takvih da vrijedi $C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = C$ i

$$\Delta(C_n) \subseteq \sum_{k=0}^{n} C_{n-k} \otimes C_k$$

za sve $n \geqslant 0$.

Primijetimo da su C_n potkoalgebre od C.

Definicija 9.8.2. *Koradikal* koalgebre je direktna suma njenih prostih potkoalgebri. Koalgebra je *prosta* ako nema pravih potkoalgebri. Koalgebra je *točkovna* (eng. *pointed*) ako je svaka njena prosta potkoalgebra jednodimenzionalna. Koalgebra je *ireducibilna* ako svake njene dvije netrivijalne potkoalgebre imaju netrivijalan presjek.

Propozicija 9.8.3. *Koalgebra je ireducibilna ako i samo ako ima jedinstvenu prostu potkoalgebru.*

Propozicija 9.8.4. *Svaka potkoalgebra sadrži koradikal.*

Dakle, koradikal je unutar komponente C_0 kod strogo filtrirane koalgebre C.

Propozicija 9.8.5. *Neka je C koalgebra i neka je C_0 njen koradikal. Neka je*

$$C_n := \{c \in C \mid \Delta(c) \in C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0\}.$$

Tada je $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ stroga filtracija na C. Zovemo je koradikalna filtracija.

Propozicija 9.8.6. *Neka je $R = (R, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ točkovna Hopfova algebra. (Može i slabiji zahtjev, da je koradikal Hopfova podalgebra.) Tada je uz koradikalnu filtraciju R strogo filtrirana Hopfova algebra, tj. vrijedi:*

$$\mu(R_n \otimes R_k) \subseteq R_{n+k}$$

$$\Delta(R_n) \subseteq \sum_{k=0}^{n} R_{n-k} \otimes R_k$$

$$S(R_n) \subseteq R_n$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [Montgomery]. □

9.8.2 Povezana koalgebra

Definicija 9.8.7. Strogo filtrirana k-koalgebra (C, Δ, ϵ) je *povezana* ako je restrikcija kojedinice na baznu komponentu, $\epsilon|_{C_0}\colon C_0 \to k$, izomorfizam vektorskih prostora.

Neka je C povezana koalgebra i neka je $\xi\colon k \to C_0$ inverz od $\epsilon|_{C_0}$. Tada svaki element $c \in C$ možemo rastaviti kao $c = (c - \xi(\epsilon(c))) + \xi(\epsilon(c)) \in \operatorname{Ker}\epsilon \oplus C_0$. Za svaki rastav $c = (c - c_0) + c_0 \in \operatorname{Ker}\epsilon \oplus C_0$ dobivamo $\xi(\epsilon(c)) = \xi(\epsilon(c - c_0)) + \xi(\epsilon(c_0)) = c_0$, dakle

$$C = \operatorname{Ker}\epsilon \oplus C_0.$$

Propozicija 9.8.8. *Neka je (C, Δ, ϵ) povezana strogo filtrirana k-koalgebra. Tada za svaki $n \geqslant 0$ i svaki $p \in C_n$ vrijedi*

$$\Delta(p) - p \otimes 1 \in C_{n-1} \otimes \operatorname{Ker}\epsilon.$$

Dokaz. Kako je, po definiciji kojedinice, $(\mathrm{id}_C \otimes \epsilon)(\Delta(p) - p \otimes 1) = 0$, to je

$$\Delta(p) - p \otimes 1 \in \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_C \otimes \epsilon),$$

a ta je jezgra jednaka $C \otimes \operatorname{Ker}\epsilon$. Kako je C strogo filtrirana, vrijedi i

$$\Delta(C_n) \subseteq C_n \otimes C_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \otimes C_{n-k},$$

a to je podskup od

$$C_n \otimes C_0 + C_{n-1} \otimes C_0 + C_{n-1} \otimes \operatorname{Ker}\epsilon = C_n \otimes C_0 + C_{n-1} \otimes \operatorname{Ker}\epsilon.$$

Budući da je $C \otimes \operatorname{Ker}\epsilon \cap C_n \otimes C_0 = \{0\}$, element $\Delta(p) - p \otimes 1$ je u drugom sumandu $C_{n-1} \otimes \operatorname{Ker}\epsilon$. □

9.8.9. Dakle, svaka točkovna Hopfova k-algebra ima koradikalnu filtraciju i može se s obzirom na nju promatrati kao strogo filtrirana Hopfova algebra, pa time i objekt u kategoriji $\mathrm{indVect}$. Dalje, ako je Hopfova k-algebra R povezana kao koalgebra, tj. $\epsilon|_{R_0}\colon R_0 \cong k$, onda za nju po prethodnoj propoziciji vrijede uvjeti (Δ_0) i (Δ_n) iz propozicije 9.3.8 i korolara 9.3.13. Dakle, za povezanu Hopfovu algebru R i (moguće kofiltriranu) Hopfovu algebru H u Hopfovom sparivanju koje je nedegenerirano u varijabli u H, dovoljno je provjeriti da li postoji $\rho\colon R \to H\sharp R$ takav da je $r' \blacktriangleleft \rho(r) = rr'$ za svaki $r \in R$ da bi se odredilo je li R pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra nad H (uz sparivanjem inducirano djelovanje $\blacktriangleleft$).

9.9 Primjeri s kvantnom grupom $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ za q korijen iz jedinice

9.9.1. Kvantizirana univerzalna omotačka algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}_2$, tj. kvantna grupa $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, je kvocijent slobodne asocijativne algebre generirane sa K, K^{-1}, E, F nad poljem racionalnih funkcija $k(q)$ u jednoj varijabli q po idealu generiranom sa

$$KK^{-1}-1, \quad K^{-1}K-1, \quad KE-q^2EK, \quad KF-q^{-2}FK,$$
$$[E,F]-\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

Struktura Hopfove algebre na $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dana je na generatorima sa:

$$\Delta(K)=K\otimes K, \quad \Delta(E)=E\otimes K+1\otimes E, \quad \Delta(F)=F\otimes 1+K^{-1}\otimes F$$

$$\epsilon(K)=1, \quad \epsilon(E)=0, \quad \epsilon(F)=0$$

$$S(K)=K^{-1}, \quad S(E)=-EK^{-1}, \quad S(F)=-KF$$

Jedna baza vektorskog prostora $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ je $\{E^aF^bK^c \mid a,b\in\mathbb{N}_0, c\in\mathbb{Z}\}$. Filtracija na $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dana je po stupnju monoma i takva da su E, F stupnja 1, te K, K^{-1} stupnja 0. Ona je uz tu filtraciju filtrirana Hopfova algebra u standardnom smislu, [JantzenQGr]. Ovdje smo uzeli alternativnu definiciju kvantne grupe $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ iz te knjige.

Dakle, ovdje je $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVect}$.

9.9.2. Ona zadovoljava svojstva (Δ_0) i (Δ_n) iz propozicije 9.3.13:

$$\Delta(E^aF^bK^c)-E^aF^bK^c\otimes K^{a+c}\in R^{n-1}\otimes R$$

$$\Delta(K^c)-K^c\otimes K^c=0$$

Dokaz. Vrijedi

$$\Delta(E^aF^bK^c)=\Delta(E)^a\Delta(F)^b\Delta(K)^c=(E\otimes K+1\otimes E)^a(F\otimes 1+K^{-1}\otimes F)^bK^c\otimes K^c$$

gdje je množenje na desnoj strani po komponentama. Budući da $1\otimes E$ i $K^{-1}\otimes F$ ne doprinose stupnju lijeve komponente tenzorskog produkta, vrijedi

$$\Delta(E^aF^bK^c)-(E\otimes K)^a(F\otimes 1)^bK^c\otimes K^c\in R_{n-1}\otimes R$$

to jest

$$\Delta(E^aF^bK^c)-E^aF^bK^c\otimes K^{a+c}\in R_{n-1}\otimes R$$

Uz to, ona nema djelitelja nule (vidi [JantzenQGr]) pa K^c nije djelitelj nule, $c\in\mathbb{Z}$. $\square$

Dakle, to je unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVect}$ sa svojstvima (Δ_0) i (Δ_n) pa slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 9.9.3. *Neka je H unutrašnja Hopfova algebra u* $\mathrm{proVect}$ *koja je u Hopfovom sparivanju s unutrašnjom Hopfovom algebrom $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ u* $\mathrm{indVect}$ *koje je nedegenerirano u varijabli u H. Tada je $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ nad H unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra u* $\mathrm{indproVect}$ *uz djelovanje inducirano sparivanjem ako i samo ako postoji morfizam*

$$\rho\colon U_q(\mathfrak{sl}_2) \to H \sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

u $\mathrm{indproVect}$ *sa svojstvom kao u iskazu teorema 9.3.10. Taj morfizam je tada odgovarajuće kodjelovanje i jedinstven je.*

Dokaz. Po korolaru 9.3.13 teorema 9.3.10. □

9.9.4. Hopfovu $k(q)$-algebru $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ možemo promatrati i kao Hopfovu algebru $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ koja je jednaka Hopfovoj algebri $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, ali s drugačijom filtracijom: takvom da su stupnjevi od E, F, K, K^{-1} svi jednaki 1. Tada je $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ filtrirana konačno-dimenzionalnim komponentama, tj. unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$. Njen dual $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f := (U_q(\mathfrak{sl}_2)_f)^*$ je unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$, pa možemo promatrati kanonsko Hopfovo sparivanje u $\mathrm{indproVectFin}$

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)_f \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f = U_q(\mathfrak{sl}_2)_f \,\tilde{\otimes}\, U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f \to k,$$

Heisenbergovo udvojenje $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f \sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ i provjeriti je li $\mathrm{Lu}(U_q(\mathfrak{sl}_2)_f) \subseteq U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f \sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$. Pritom su naravno kao vektorski prostori $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ i $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f$ jednaki $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ i $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*$, samo s drugačijom filtracijom i kofiltracijom. Zamijetimo da unutar kategorije $\mathrm{indproVect}$ uz gore navedeno Hopfovo sparivanje, postoji kanonsko sparivanje

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) \,\tilde{\otimes}\, U_q(\mathfrak{sl}_2)^* \to k,$$

te čak i sparivanje dobiveno kompozicijom

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)_f \,\tilde{\otimes}\, U_q(\mathfrak{sl}_2)^* \hookrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \,\tilde{\otimes}\, U_q(\mathfrak{sl}_2)^* \to k,$$

ali ne postoji sparivanje $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ i $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f$ u toj kategoriji koje bi na običnom tenzorskom produktu odgovaralo kanonskom sparivanju. Ipak, dual $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f$ možemo koristiti da bismo analizirali sparivanje $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ iz $\mathrm{indVect}$ i H iz $\mathrm{proVect}$, kako je opisano u sljedećem paragrafu. Naravno, možemo ga koristiti na standardni način za analizu sparivanja $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ u $\mathrm{indVectFin}$ i H u $\mathrm{proVect}$.

9.9.5. Da bismo mogli raditi s Luinom formulom kad je $R := U_q(\mathfrak{sl}_2)$ u $\mathrm{indVect}$, promatrat ćemo Hopfovu algebru $P := U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ koja je $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, ali s filtracijom u $\mathrm{indVectFin}$ u kojoj su E, F, K, K^{-1} stupnja 1. Ona je zaista unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ uz ista strukturna preslikavanja jer je svako linearno preslikavanje među objektima u $\mathrm{indVectFin}$ automatski morfizam u $\mathrm{indVectFin}$. (i) Vrijedi da je

$$\mathrm{id}_{P,R} := \mathrm{id}\colon P \to R$$

morfizam u $\mathrm{indVect}$, jer se svaka filtrirajuća komponenta P_{abc} od P preslika unutar neke filtrirajuće komponente od R, ovdje unutar komponente R_{ab}. Pritom smo s a, b, c označili eksponente u monomima $E^aF^bK^c$ i sukladno tome označili filtrirajuće komponente od P i R sa P_{abc} i R_{ab}. (ii) Slijedi da je

$$(\mathrm{id}_{P,R})^*\colon R^* \to P^*$$

morfizam u $\mathrm{proVect}$, po dualnosti kategorija $\mathrm{indVect}$ i $\mathrm{proVect}$. (iii) Iako se podudaraju kao vektorski prostori, za razliku od R^*, P^* je dual unutrašnje Hopfove algebre u $\mathrm{indVectFin}$ i zbog toga unutrašnja Hopfova algebra u $\mathrm{proVectFin}$. (v) Pretpostavimo da je dano Hopfovo sparivanje u $\mathrm{indproVect}$

$$\langle\,,\rangle\colon R\tilde{\otimes} H \to k$$

te Hopfove algebre R u $\mathrm{indVect}$ i neke Hopfove algebre H u $\mathrm{proVect}$ koje je nedegenerirano u drugoj varijabli. Iz (ii) slijedi da je kompozicija

$$\langle\,,\rangle'\colon P\otimes H = P\tilde{\otimes} H \hookrightarrow R\tilde{\otimes} H \to k$$

morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Pritom je morfizam $\mathrm{id}_{P,R}\tilde{\otimes}\,\mathrm{id}_H$ injekcija jer se obični tenzorski produkt $P\otimes H$ ulaže u tenzorski produkt $R\tilde{\otimes} H$. Budući da su kao Hopfove algebre P i R jednake, lako se vidi da je $\langle\,,\rangle'$ također Hopfovo sparivanje nedegenerirano u drugoj varijabli. Dakle, imamo sada Hopfovu algebru P u $\mathrm{indVectFin}$ i Hopfovu algebru H u $\mathrm{proVect}$ koje su u Hopfovom sparivanju u $\mathrm{indproVect}$ koje je nedegenerirano u varijabli u H, pa možemo koristiti kanonske elemente, Luinu formulu i Heisenbergovo udvojenje $P^*\sharp P$.

Slijedi ukratko niz zaključaka o P i H koji su detaljnije dani u odjeljku 9.5.7. Neka je P Hopfova algebra u $\mathrm{indVectFin}$ i H Hopfova algebra u $\mathrm{proVect}$ koje su u Hopfovom sparivanju u $\mathrm{indproVect}$ koje je nedegenerirano u varijabli u H. Tada imamo injekciju

$$H \hookrightarrow P^*$$

koja je morfizam u $\mathrm{proVect}$. Sparivanjem je inducirano standardno djelovanje $P\tilde{\otimes} H \to P$, zatim poludirektni produkt $H\sharp P$ te djelovanje $P\tilde{\otimes} H\sharp P \to P$. Pokaže se da su djelovanja kompozicije injekcija i odgovarajućih djelovanja induciranih sparivanjem $P\tilde{\otimes} P^* \to k$,

$$P\tilde{\otimes} H \hookrightarrow P\tilde{\otimes} P^* \to P,$$

$$P \tilde{\otimes} H \sharp P \hookrightarrow P \tilde{\otimes} P^* \sharp P \to P.$$

Promotrimo linearno preslikavanje

$$\mathrm{Lu}\colon P \to P^* \tilde{\otimes} \underline{P}$$

dano Luinom formulom. (i) Standardna provjera je li dobro definirana korestrikcija

$$\mathrm{Lu}'\colon P \to P^* \sharp P$$

i je li ona morfizam u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ sastoji se jednostavno u provjeri da li se svaka komponenta P_{abc} preslikava unutar neke komponente $P^* \otimes P_{a'b'c'}$. (ii) Zatim se provjeri da li je slika od Lu unutar $H \sharp P \subseteq P^* \sharp P$ i, ako jest, onda automatski vrijedi da je korestrikcija

$$\mathrm{Lu}''\colon P \to H \sharp P$$

morfizam u $\mathrm{indproVect}$. Da bismo provjerili je li slika od Lu unutar $H \sharp P$ dovoljno je provjeriti to na generatorima algebre P. Budući da je, ako vrijedi $\mathrm{Lu}(P) \subseteq P^* \sharp P$, slika svakog generatora unutar $P^* \tilde{\otimes} P = P^* \otimes P$, ona se može zapisati kao konačna suma jednostavnih tenzora čije su druge komponente elementi filtrirane baze od P. Ako P ima konačno mnogo generatora kao algebra, onda je dakle dovoljno provjeriti za konačno mnogo funkcionala nalaze li se u H. Budući da je takav zapis slike jedinstven, svi se ti funkcionali i moraju nalaziti u H, pa ako nije svaki u H, onda $H \sharp P$ sigurno ne sadrži sliku od Lu. To je niz zaključaka naveden u odjeljku 9.5.7 u kojem se koristi Luina formula za $H \sharp P$ gdje je P u $\mathrm{indVectFin}$ i H u $\mathrm{proVect}$.

Sada niz zaključaka iz prethodnog paragrafa možemo prilagoditi tako da iskoristimo Luinu formulu i u slučaju sa R u $\mathrm{indVect}$ i H u $\mathrm{proVect}$. Ovdje za $\mathrm{Lu}\colon P \to P^* \tilde{\otimes} \underline{P}$ (i) provjeravamo da li se svaka komponenta $R_{ab} = \bigcup_c P_{abc}$ preslikava unutar neke komponente $P^* \hat{\otimes} R_{a'b'} \subseteq P^* \hat{\otimes} \underline{P}$ i ako da, onda je dokazano da postoji preslikavanje

$$\mathrm{Lu}'\colon R \to P^* \tilde{\otimes} R$$

koje je kao linearno preslikavanje korestrikcija početnog na $P^* \tilde{\otimes} R \hookrightarrow P^* \tilde{\otimes} \underline{P}$ i da je ono morfizam u $\mathrm{indproVect}$. (Obratno, da bi vrijedilo da postoji traženo preslikavanje $\mathrm{Lu}''\colon R \to H \sharp R$, nužno je da ovo vrijedi jer je $H \hat{\otimes} R_{a'b'} \hookrightarrow P^* \hat{\otimes} R_{a'b'}$.) (ii) Zatim treba još provjeriti je li slika od Lu unutar $H \sharp R \hookrightarrow P^* \tilde{\otimes} R$. Ako jest, onda automatski vrijedi da je korestrikcija

$$\mathrm{Lu}''\colon R \to H \tilde{\otimes} R$$

morfizam u kategoriji $\mathrm{indproVect}$ zbog sljedećeg: svaka komponenta R_{ab} preslikava se tada unutar nekog $P^* \hat{\otimes} R_{a'b'} \cap H \tilde{\otimes} R$, a njegovi se svi elementi nalaze unutar $H \hat{\otimes} R_{a'b'}$. Zadnja tvrdnja vrijedi jer je $H \tilde{\otimes} R = \bigcup_{a,b} H \hat{\otimes} R_{ab}$ i $H \hat{\otimes} R_{ab} \hookrightarrow P^* \hat{\otimes} R_{ab}$.

Propozicija 9.9.6. *Označimo s $R = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ Hopfovu algebru $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ u* $\mathrm{indVect}$ *uz standardnu filtraciju (generatori E, F su stupnja 1, te K, K^{-1} stupnja 0), a sa $P = U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ označimo istu Hopfovu algebru, ali promatranu kao unutrašnju Hopfovu algebru u* $\mathrm{indVectFin}$ *(s filtracijom takvom da su svi generatori stupnja 1).*

Ako je q korijen iz jedinice, linearno preslikavanje $\mathrm{Lu}\colon P \to P^* \tilde{\otimes} \underline{P}$ *se može korestringirati do preslikavanja*

$$\mathrm{Lu}'\colon P \to P^* \tilde{\otimes} P = P^* \otimes P$$

i do preslikavanja

$$\mathrm{Lu}''\colon R \to P^* \tilde{\otimes} R$$

i unutar je kategorije $\mathrm{indproVect}$ *u oba slučaja.*

Dokaz. Označimo s ad'_Z preslikavanje

$$\mathrm{ad}'_Z\colon Z \mapsto S^{-1}(Z_{(2)}) Y Z_{(1)}.$$

Vrijedi $\mathrm{ad}'_Z = \mathrm{ad}_{S^{-1}(Z)}$ za standardno adjungirano djelovanje, $\mathrm{ad}_Z\colon Y \mapsto Z_{(1)} Y S(Z_{(2)})$. Imamo

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(E^n F^m K^r))(Z) = \mathrm{ad}'_Z(E^n F^m K^r).$$

Neka je d najmanji takav da je $q^d = 1$. Označimo s e broj d ili $\frac{d}{2}$, ovisno o tome je li d neparan ili paran. Izračuna se:

$$\mathrm{ad}'_K(E^n F^m K^r) = q^{-2n+2m} E^n F^m K^r$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}'_E(E^n F^m K^r) = {} & q^{-2-2n+2m}(q^{2r} - 1) E^{n+1} F^m K^{r-1} + \\ & + \tfrac{q^{-1-2n+2m+2r}}{(q-q^{-1})^2}(q^{-2m} - 1) E^n F^{m-1} K^r + \\ & + \tfrac{q^{-1-2n+2m+2r}}{(q-q^{-1})^2}(q^{2m} - 1) E^n F^{m-1} K^{r-2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{ad}'_E(E^n K^r) = q^{-2-2n}(q^{2r} - 1) E^{n+1} K^{r-1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}'_F(E^n F^m K^r) = {} & q^{-2r}(1 - q^{2r+2n-2m}) E^n F^{m+1} K^r + \\ & + \tfrac{q^{1+2n-4m}}{(q-q^{-1})^2}(q^{2n} - 1) E^{n-1} F^m K^{r+1} + \\ & + \tfrac{q^{1+2n}}{(q-q^{-1})^2}(1 - q^{-2n}) E^{n-1} F^m K^{r-1}\end{aligned}$$

$$\mathrm{ad}'_F(F^m K^r) = q^{-2r}(1 - q^{2r-2m}) F^{m+1} K^r$$

Iz računa je vidljivo da svi ad'_{K^R} ne mijenjaju stupanj monoma. Zatim se kombinatorno argumentira da element $E^n F^m K^r$ poništavaju svi ad'_{E^N} za $N > (m+1)e$ i svi ad'_{F^M} za $M >$

$(n+1)e$. Zatim se zaključi da ga poništavaju svi $\mathrm{ad}'_{E^N F^M K^R}$ čim je $M > (n+1)e$ ili $N > (m+(n+1)e+1)e$. Dakle, svaka Lu formula je unutar $P^* \otimes P = P^* \tilde{\otimes} P$ pa i unutar $P^* \tilde{\otimes} R$.

Zatim treba zaključiti da su tako dobivene korestrikcije morfizmi u kategoriji $\mathrm{indproVect}$. Tvrdnja za $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f = P$ u $\mathrm{indVectFin}$ slijedi iz samog postojanja preslikavanja, a tvrdnju za $U_q(\mathfrak{sl}_2) = R$ u $\mathrm{indVect}$ moramo provjeriti posebno. Po prethodnome je

$$\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(E^n F^m K^r))(E^N F^M K^R) = 0 \text{ ako je } M > (n+1)e \text{ ili } N > (m+(n+1)e+1)e.$$

Ako ograničimo (n,m) onda je i unija slika od $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(E^{n'} F^{m'} K^{r'}))$ za $(n',m') \leqslant (n,m)$ ograničena po stupnju po nečemu što ovisi o (n,m), pri čemu je ograničen i eksponent od K. Naime, da bi vrijednost $\hat{\mathcal{S}}_1(\mathrm{Lu}(E^n F^m K^r))(E^N F^M K^R)$ bila različita od nule, mora biti: $M \leqslant (n+1)e$, $N \leqslant (m+1)e + (n+1)e^2$, a iz izračunatog je vidljivo da slika ima najveći eksponent (a,b,c) manji od ili jednak: $(n+N, m+M, \max\{|r+M|, |r-2N-M|\})$.

□

Propozicija 9.9.7. *Unutrašnja Hopfova algebra $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ u* $\mathrm{indVectFin}$ *(po filtraciji takvoj da su stupnjevi od F, E, K, K^{-1} jednaki 1) za q korijen iz jedinice je unutrašnja pleteničasto-komutativna desno-lijeva Yetter-Drinfeldova modulna algebra u* $\mathrm{indproVect}$ *nad njoj dualnom unutrašnjom Hopfovom algebrom $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f$ u* $\mathrm{proVectFin}$.

Iz ove propozicije slijedi, jer po teoremu 8.1.7 pleteničasto-komutativne Yetter-Drinfeldove modulne algebre induciraju na poludirektnim produktima strukturu Hopfovog algebroida, da je za q korijen iz jedinice

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f \sharp U_q(\mathfrak{sl}_2)_f = U_q(\mathfrak{sl}_2)^*_f \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$$

Hopfov algebroid u $\mathrm{indproVect}$ nad Hopfovom algebrom $U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ iz $\mathrm{indVectFin}$.

Također, budući da je $P = U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ konačno generirana algebra i pokazano je da vrijedi $\mathrm{Lu}(P) \subseteq P^* \otimes P$ kad je q korijen iz jedinice, vidimo da je najmanja unutrašnja Hopfova podalgebra P^{min} od P^* takva da je $\mathrm{Lu}(P) \subseteq P^{min} \sharp P$ generirana konačnim brojem funkcionala. Koristeći to bi se moglo u slučaju sparivanja $R = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ iz $\mathrm{indVect}$ (odnosno $P = U_q(\mathfrak{sl}_2)_f$ iz $\mathrm{indVectFin}$) s H iz $\mathrm{proVect}$ provjeriti je li $P^{min} \subseteq H$ i, ako jest, zaključiti da je R (odnosno P) nad H pleteničasto-komutativna Yetter-Drinfeldova modulna algebra. Ovdje nije eksplicitno određen taj konačni skup funkcionala niti unutrašnja Hopfova podalgebra P^{min}.

Indeks

adjungirana reprezentacija, 274
adjungirano djelovanje, 258
algebarska grupa, 148
algebra, 141
algebra diferencijalnih operatora, 268
algebra regularnih funkcija, 147
algebra reprezentativnih funkcija, 150, 287
asocijator, 19

baza, filtrirana, 100
baza, formalna, 54
bialgebra, 145
bialgebroid, unutarnji, 175, 177
bifunktor, 16
bimodul, 162
bimonoid, 145

diferencijalni operator, algebra, 268
diferencijalni operator, djelovanje, 268
diferencijalni operator, formalni, 270
diferencijalni operator, sparivanje s formalnim funkcijama, 269
diferencijalni operator, sparivanje s funkcijama, 267
distribuiranje po formalnim sumama, 50, 125
djelovanje, 152
djelovanje diferencijalnog operatora, 268
djelovanje, inducirano sparivanjem, 158
dualnost, u $\mathrm{indproVect}$, 122

epimorfizam, 15
epimorfizam, u $\mathrm{proVect}$, 75

filtracija, 86
filtrirana baza, 100
filtrirana kategorija, 25
filtrirani vektorski prostor, 87
filtrirano-kofiltrirani vektorski prostor, 114
formalna baza, 54
formalna funkcija, 151, 270
formalna funkcija, sparivanje, 269
formalna suma, 49, 125
formalna suma, računanje, 126
formalni diferencijalni operator, 270
funktor, jaki monoidalni, 22
funktor, monoidalni, 21

granični kokonus, 17
granični konus, 17
grupoid, 166

Heisenbergovo udvojenje, 157
Hopfov algebroid, formule, 203, 206
Hopfov algebroid, komutativni, 167
Hopfov algebroid, unutarnji, 181
Hopfova algebra, 146
Hopfovo djelovanje, 155
Hopfovo sparivanje, 157

inicijalni objekt, 16
inverzni sustav, 28
izomorfizam, 15
izomorfni objekti, 15
izvor, 176

jedinični objekt, 19
jednostavni tenzor, 47

kategorija uređaja, 25
kategorija Yetter-Drinfeldovih modula, 158, 160
kategorija, filtrirana, 25
kategorija, kofiltrirana, 25
kategorija, monoidalna, 19
kategorija, simetrična monoidalna, 20
kategorija, suprotna, 15
kategorija, usmjerena, 25
koalgebra, 142
kodjelovanje, 154
kofiltracija, 31
kofiltracija, kvocijentna, 70
kofiltracija, potprostorna, 65
kofiltrirana kategorija, 25
kofiltrirani vektorski prostor, 34
kofinalnost, 30
kokomutativnost, 146
kokonus, 17
kokonus, granični, 17
kolimes, 17
kolimes, u $\mathrm{proVect}$, 82
kolimes, u Vect, 26
komodul, 154
komonoid, 142
komponenta inverznog sustava, 28
komponenta morfizma filtracija, 91
komponenta usmjerenog sustava, 27
konus, 16
konus, granični, 17
koprodukt, kategorijski, 17
koprodukt, u $\mathrm{proVect}$, 78
koujednačitelj, u $\mathrm{proVect}$, 81
koujednačavati, 17
koujednačitelj, 17
kvantizirana univerzalna omotačka algebra, 294
kvocijentna kofiltracija, 70

limes, 17
limes, u Vect, 24
linearna algebarska grupa, 148
Luina formula, 256

modul nad bimonoidom, 152
modul nad monoidom, 152
monoid, 141
monoidalna kategorija, 19
monomorfizam, 15
monomorfizam, u $\mathrm{proVect}$, 74
morfizam filtriranih vektorskih prostora, 87
morfizam filtrirano-kofiltriranih vektorskih prostora, 115
morfizam inverznih sustava, 29
morfizam izvora, 176
morfizam kofiltriranih vektorskih prostora, 34
morfizam komonoida, 143
morfizam monoida, 142
morfizam po nivoima, 28, 102
morfizam usmjerenih sustava, 28

nit, 25
nulmorfizam, 18
nulobjekt, 18

objekt, inicijalni, 16
objekt, jedinični, 19
objekt, terminalni, 16

poludirektni produkt, 156
ponor, 176
potprostorna kofiltracija, 65
potpun vektorski prostor, 68, 69

predmorfizam inverznih sustava, 29
predmorfizam usmjerenih sustava, 27
produkt kategorija, 15
produkt, kategorijski, 17
produkt, poludirektni, 156

reprezentativna funkcija, 150

simetrična monoidalna kategorija, 20
skalarno proširenje, 3, 184
skalarno proširenje, primjeri, 288
slika morfizma, 18
sparivanje diferencijalnih operatora i formalnih funkcija, 269
sparivanje diferencijalnih operatora i funkcija, 267
suprotna kategorija, 15
sustav, inverzni, 28
sustav, usmjereni, 27
Sweedlerova notacija, 143
Sweedlerova notacija, apstraktna, 143

tenzor, jednostavni, 47
tenzorski produkt, filtracija, 93
tenzorski produkt, kofiltracija, 41
tenzorski produkt, komutira s koujednačiteljima, 22, 132, 163, 164
tenzorski produkt, modula nad bialgebrom, 153
tenzorski produkt, nad monoidom, 162
tenzorski produkt, u $\mathrm{indproVect}$, 118
tenzorski produkt, u $\mathrm{indVect}$, 99
tenzorski produkt, u $\mathrm{proVect}$, 47
tenzorski produkt, upotpunjeni, 47
tenzorski produkt, vektorskih prostora, 23
terminalni objekt, 16

ujedačitelj, 17
ujednačavati, 17
unitor, 19
univerzalna omotačka algebra, 150, 261
upotpunjeni tenzorski produkt, 47
upotpunjenje, u $\mathrm{indproVect}$, 120
upotpunjenje, u $\mathrm{proVect}$, 39
usmjeren skup, 25
usmjerena kategorija, 25
usmjereni sustav, 27

vezni morfizam, 27, 28

Yetter-Drinfeldov modul, 158, 160
Yetter-Drinfeldova modulna algebra, 159, 161

Bibliografija

[Abe] E. ABE, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press 1980.

[AtiyahSegal] M. F. ATIYAH, G. B. SEGAL, *Equivariant K-theory and completion*, J. Diff. Geom. 3 (1969) 1–18.

[ArtinMazur] M. ARTIN, B. MAZUR, *Etale homotopy theory*, Lec. Notes in Math. 100, Springer-Verlag 1969.

[BohmHAlg] G. BÖHM, *Hopf algebroids*, in Handbook of Algebra, Vol. 6, ed. by M. Hazewinkel, Elsevier 2009, 173–236. `http://arxiv.org/abs/0805.3806`

[BohmInt] G. BÖHM, *Internal bialgebroids, entwining structures and corings*, AMS Contemp. Math. 376 (2005) 207–226. `http://arxiv.org/abs/math/0311244`

[BohmAlt] G. BÖHM, *An alternative notion of Hopf algebroid*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 239, 31–54, Dekker 2004. `http://arxiv.org/abs/math/0301169`

[BohmSzlach] G. BÖHM, K. SZLACHÁNYI, *Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals and duals*, Comm. Alg. 32 (11) (2004) 4433–4464. `http://arxiv.org/abs/math/0302325`

[EBorel] É. BOREL, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 12 (1895), p. 9–55.

[BourbakiLie] N. BOURBAKI, *Lie groups and algebras*, Ch. I-III, Hermann, Paris, 1971 (Ch.I), 1972 (Ch.II-III) (French); Springer 1975, 1989 (Ch. I-III, English).

[BourbakiSet] N. BOURBAKI, *Theory of sets*, 1968.

[Brandt] H. BRANDT, *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Mathematische Annalen 36:1, 360–366, 1927.

[BrzMil] T. BRZEZIŃSKI, G. MILITARU, *Bialgebroids, $\times_A$-bialgebras and duality*, J. Alg. 251: 279–294 (2002) `http://arxiv.org/abs/math/0012164`

[BrzWisb] T. BRZEZIŃSKI, R. WISBAUER, *Corings and comodules*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 309, Cambridge Univ. Press 2003.

[Cartier] P. CARTIER, *A primer of Hopf algebras*, Frontiers in number theory, physics, and geometry II, 537–615, Springer 2007.; preprint IHÉS 2006. `http://preprints.ihes.fr/2006/M/M-06-40.pdf`

[CannWeinst] A. CANNAS DA SILVA, A. WEINSTEIN, *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Math. Lec. Notes Series, AMS 1999. `http://math.berkeley.edu/~alanw/Models.pdf`

[Durov] N. DUROV, S. MELJANAC, A. SAMSAROV, Z. ŠKODA, *A universal formula for representing Lie algebra generators as formal power series with coefficients in the Weyl algebra*, Journal of Algebra 309:1, str. 318–359 (2007) `http://arxiv.org/abs/math/0604096`

[Helgason] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Acad. Press 1978; Amer. Math. Soc. 2001.

[Henkin] L. HENKIN, *A problem on inverse mapping systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 224–225.

[JantzenAGr] J. C. JANTZEN, *Representations of algebraic groups*, Acad. Press 1987.

[JantzenQGr] J. C. JANTZEN, *Lectures on quantum groups*, Springer Grad. Texts in Math. 6, Amer. Math. Soc. 1996.

[Juric] T. JURIĆ, D. KOVAČEVIĆ, S. MELJANAC, *κ-deformed phase space, Hopf algebroid and twisting*, SIGMA 10 (2014) 106, 1–18. `http://arxiv.org/abs/1402.0397`

[Khalkhali] M. KHALKHALI, *Basic noncommutative geometry*, European Mathematical Society

[Kelly] M. KELLY, *On MacLane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc.*, Journal of Algebra 1 (1964), 397-402.

[Lu] J-H. LU, *Hopf algebroids and quantum groupoids*, Int. J. Math. 7 (1996) 47–70. `http://arxiv.org/abs/q-alg/9505024`

[MacLane] S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed. Springer 1998.

[Majid] S. MAJID, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press 1995.

[MardSegal] S. MARDEŠIĆ, J. SEGAL, *Shape theory*, North Holland 1982.

[MSS] S. MELJANAC, Z. ŠKODA, M. STOJIĆ, *Lie algebra type noncommutative phase spaces are Hopf algebroids*, Lett. Math. Phys. 107:3, 475–503 (2017) `http://arxiv.org/abs/1409.8188`

[MilnorMoore] J. MILNOR, J. MOORE, *The structure of Hopf algebras*, Annals of Math. 81 (1965), 211-264.

[Montgomery] S. MONTGOMERY, *Some remarks on filtrations of Hopf algebras*, Comm. Algebra 21 No 3, 999-1007 (1993).

[Radford] D. E. RADFORD, *Hopf algebras*, World Scientific 2012.

[Ravenel] D. C. RAVENEL, *Complex cobordism and the stable homotopy groups of spheres*, Academic Press 1986., 2nd ed. AMS 2003.

[Serre] J-P. SERRE, *Gébres*, Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 1-2, 33–85.

[Skoda] Z. ŠKODA, *Heisenberg double versus deformed derivatives*, Int. J. Mod. Phys. A 26, Nos. 27 & 28 (2011) 4845–4854. `http://arxiv.org/abs/0806.0978`

[SS] Z. ŠKODA, M. STOJIĆ, *A two-sided ideal trick in Hopf algebroid axiomatics*, preprint. `http://arxiv.org/abs/1610.03837`

[SGA4-1] A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER, *Préfaisceaux*, Exposé 1, str. 1–184 u knjizi *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Tome 1: Théorie des topos, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. 269, Springer 1972.

[Takeuchi] M. TAKEUCHI, *Groups of algebras over* $A \otimes \bar{A}$, J. Math. Soc. Japan 29:3 (1977), 459–492.

[Timmermann] T. TIMMERMANN, *An invitation to quantum groups and duality*, Eur. Math. Soc. 2008.

[Xu] P. XU, *Quantum groupoids*, Commun. Math. Phys., 216:539–581 (2001) `http://arxiv.org/abs/math/9905192`

Životopis

Martina Stojić rođena je u Zagrebu 29. ožujka 1981. godine. Pohađala je srednju školu u V. gimnaziji u Zagrebu od 1995. do 1999. godine. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala je na Državnim natjecanjima iz matematike na kojima je osvojila drugu nagradu 1996. i 1998. godine. Upisala je studij dipl. ing. matematike, smjer Teorijska matematika, na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu te 2004. godine dobila Nagradu dekana za uspjeh u studiju. U siječnju 2010. godine obranila je diplomski rad naslova *Alexanderov polinom* pod mentorstvom prof. Šime Ungara. Na studiju je postigla ukupni prosjek ocjena 5.0. Tijekom dvije godine srednjoškolskog obrazovanja i dvije godine studija primala je Stipendiju Grada Zagreba.

Od 2011. godine zaposlena je kao znanstvena novakinja i asistentica na Zavodu za topologiju Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Većinu godina držala je vježbe iz kolegija Elementarna matematika I & II, Elementarna geometrija, Konstruktivne metode u geometriji, Strukture podataka i algoritmi, te neke godine vježbe iz kolegija Uvod u matematiku, Vektorski prostori, Diskretna matematika, Mjera i integral.

Studira na doktorskom studiju matematike od 2010. godine gdje je bila aktivna na Seminaru za topologiju te s ocjenom izvrstan položila ispite Algebra, Geometrija i topologija, Matematička logika i računarstvo, Analitičke funkcije više varijabli, Geometrija koneksija i integrabilnost, Geometrija prostora sa strukturnim snopom. Bez priopćenja sudjelovala je u radu konferencija *Dubrovnik VII – Geometric Topology*, od 26. lipnja do 3. srpnja 2011. godine u Dubrovniku, *Manifolds, K-theory, and Related Topics*, od 23. do 27. lipnja 2014. godine u Dubrovniku i *Dubrovnik VIII – Geometric Topology, Geometric Group Theory & Dynamical Systems*, od 22. do 26. lipnja 2015. godine u Dubrovniku.

Sa Z. Škodom i S. Meljancom objavila je znanstveni rad *Lie algebra type noncommutative phase spaces are Hopf algebroids*, Lett. Math. Phys. 107:3, 475–503 (2017), `arXiv:1409.8188`. Sa Z. Škodom napisala je i znanstveni rad *A two-sided ideal trick in Hopf algebroid axiomatics*, `arXiv:1610.03837`.