Tehnika Bellmanovih funkcija za multilinearne martingalne ocjene

Škreb, Kristina Ana

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Ana Škreb

TEHNIKA BELLMANOVIH FUNKCIJA ZA MULTILINEARNE MARTINGALNE OCJENE

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2017.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Ana Škreb

TEHNIKA BELLMANOVIH FUNKCIJA ZA MULTILINEARNE MARTINGALNE OCJENE

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Kristina Ana Škreb

THE BELLMAN FUNCTION TECHNIQUE FOR MULTILINEAR MARTINGALE ESTIMATES

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017

Mentor:

doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač
Sveučilište u Zagrebu,
Prirodoslovno-matematički fakultet,
Matematički odsjek,
Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb.
e-mail: vjekovac@math.hr

Supervisor:

doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač
University of Zagreb,
Faculty of Science,
Department of Mathematics,
Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb.
e-mail: vjekovac@math.hr

Zahvala

Prije svega, željela bih se od srca zahvaliti svom mentoru Vjekoslavu Kovaču. Bez njegove konstantne podrške, razumijevanja i zlata vrijednih savjeta ovaj doktorski rad ne bi bio moguć. Zahvaljujem mu što me uveo u znanstveni svijet i naučio kako se treba baviti matematikom. Vrlo sam zahvalna i što je dio svog vječnog entuzijazma i ljubavi prema matematici uspio prenijeti i na mene.

Ovaj rad bilo bi nemoguće završiti bez pomoći moje obitelji i najbližih. Posebno se zahvaljujem svojoj majci i bratu na bezuvjetnoj ljubavi i podršci. Bili su sa mnom na svakom koraku ovog puta, veselili se svakom uspjehu i hrabrili kad je bilo najteže. Posebna zahvala ide i Gogiju što je bio uvijek tu uz mene kad je trebalo. Uz vas ništa nije bilo teško i zato vam hvala!

Bilo bi jako teško pojedinačno se zahvaliti svima koji su me uveseljavali i bodrili sve ove godine. Hvala kolegama s Građevine i PMF-a na brojim produktivnim diskusijama, savjetima i druženjima, ne samo poslovnim već i privatnim. Hvala i mojim dragim prijateljima na ljubavi i sreći koju unose u moj život. S vama je sve lakše i ljepše!

Sažetak

U ovom radu razvija se varijanta tehnike Bellmanovih funkcija potrebna za dokaz određenih L^p ocjena u kontekstu dva ili tri različita martingala. U slučaju kad su martingali adaptirani obzirom na istu filtraciju, konstruira se odgovarajuća Bellmanova funkcija, koja zadovoljava određena svojstva konveksnosti, na domeni određenoj s konačno mnogo kontrolnih parametara. Konstruirana funkcija koristi se za dokaz L^p ocjena martingalnog paraprodukta (s neprekidnim i diskretnim vremenom) te za alternativni dokaz L^p ograničenosti paraprodukta obzirom na toplinski tok.

U slučaju kad su martingali adaptirani obzirom na različite filtracije, konstruira se izraz Bellmanovog tipa, tj. kontrolni proces, koji imitira svojstva Bellmanovih funkcija. Dokazuje se nekoliko novih martingalnih ocjena i razmatraju se njihove primjene u različitim matematičkim granama. Dobivaju se nove L^p ocjene za poopćeni zapetljani paraprodukt obzirom na dvije općenite multiplikativne dilatacijske grupe. Također, daje se i jedan mogući smjer proširenja Itōve teorije stohastičkog integriranja izvan ograničenja Bichteler-Dellacherie teorema. Konstruira se stohastički integral u jednom specifičnom kontekstu kada integrator nije nužno semimartingal.

Ključne riječi: tehnika Bellmanovih funkcija, martingalni paraprodukti, paraprodukti obzirom na toplinski tok, opći zapetljani paraprodukt, neadaptirani stohastički integral.

Summary

This thesis develops the Bellman function technique needed in the proofs of the L^p estimates in the context of two or three different martingales. If the martingales are adapted to the same filtration, the corresponding Bellman function, which satisfies certain convexity-type properties, is constructed on the domain determined by finitely many control parameters. The constructed function is used to prove L^p estimates for the martingale paraproduct (both in discrete-time and in continuous-time) and to give an alternative proof of L^p boundedness of the heat flow paraproducts.

On the other hand, if the martingales are adapted with respect to different filtrations, a certain Bellman-type expression (a control process) which imitates the properties of Bellman functions is constructed. Several novel martingale estimates are proved and then applied in different branches of mathematics. New L^p estimates are established for the general twisted paraproduct with respect to two general multiplicative groups of dilations. Also, a possible direction in which Itō's integration theory can be extended beyond the limitations of the Bichteler–Dellacherie theorem is presented. The stochastic integral is constructed in a specific context, where the integrator is not necessarily a semimartingale.

The thesis is organized as follows. Chapter 1 ("Introduction") introduces the Bellman function technique and explains the objectives and hypotheses of this research.

In Chapter 2 ("Preliminaries") we give some preliminary results and definitions regarding conditionals expectations, martingales and stochastic integration.

In Chapter 3 ("Bellman function and L^p estimates for dyadic paraproducts") we give an explicit formula for one possible Bellman function associated with the L^p boundedness of dyadic paraproducts regarded as trilinear forms. The constructed function has a similar form to the one constructed by F. Nazarov and S. Treil in [46] (for the problem of Haar multipliers). For a special choice of exponents, we also construct simpler Bellman functions that give us asymptotic behavior of the constants.

In Chapter 4 ("L^p estimates for paraproducts") we apply the same Bellman function (constructed in the previous chapter) in various other settings, to give self-contained alternative proofs of the L^p estimates for several classical operators. These include the martingale paraproducts of Bañuelos and Bennett and the paraproducts with respect to the heat flows.

In Chapter 5 ("L^p estimates for the generalized martingale transform") we introduce a variant of Burkholder's martingale transform associated with two martingales with respect to different filtrations. Even though the classical martingale techniques cannot be applied, we show that the discussed transformation still satisfies some expected L^p estimates. To do so we construct an appropriate control process with required "convexity" properties.

In Chapter 6 ("Twisted paraproducts and stochastic integrals") we apply the martingale inequalities obtained in Chapter 5 to general-dilation twisted paraproducts, particular instances of which have already appeared in the literature. That way new L^p estimates are established for paraproducts with respect to two different dilation structures. As another application we construct stochastic integrals $\int_0^t H_s d(X_s Y_s)$ associated with certain continuous-time martingales $(X_t)_{t\geqslant 0}$ and $(Y_t)_{t\geqslant 0}$. The process $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ is shown to be a "good integrator", although it is not necessarily a semimartingale, or even adapted to any convenient filtration.

Finally, in Chapter 7 ("Noncommutative martingale paraproducts") we present L^p estimates for martingale paraproducts of dyadic algebra-valued martingales. For a special choice of exponents we construct the Bellman function that yields estimates with sharp constants.

Keywords: Bellman function technique, martingale paraproducts, heat flow paraproducts, general-dilation twisted paraproduct, non-adapted stochastic integral.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Tehnika Bellmanovih funkcija temelji se na radovima primijenjenog matematičara R. E. Bellmana iz stohastičke optimalne kontrole nastalima sredinom dvadesetog stoljeća. U području teorije vjerojatnosti prvi je tu tehniku razvio i koristio D. L. Burkholder. On je u [12] pokazao da za realni martingal f i $1 < p < \infty$ vrijedi

$$\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant (p^* - 1)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},$$

gdje je g martingalna transformacija od f obzirom na neki realni predvidivi proces v koji je uniformno ograničen s 1, a $p^* = \max\{p, \frac{p}{p-1}\}$. Kako bi dokazao da je konstanta $p^* - 1$ zaista i najbolja moguća, Burkholder je dao eksplicitni oblik Bellmanove funkcije koja zadovoljava određena svojstva konkavnosti. Modifikacije te funkcije kasnije su korištene za dokaz brojnih drugih martingalnih ocjena (više detalja može se pronaći u [15] i [13]). Osim u teoriji vjerojatnosti, tehnika Bellmanovih funkcija našla je svoju primjenu i u području harmonijske analize. F. Nazarov, S. Treil i A. Volberg su u seminalnim radovima [46] i [47] tu tehniku prilagodili problemima ocjene normi integralnih operatora.

Spomenuta tehnika Bellmanovih funkcija za dokazivanje ocjena u teoriji vjerojatnosti i analizi najčešće se provodi u tri koraka:

(1) formulira se problem u terminima martingalne ocjene;

(2) dokaže se da je željena ocjena ekvivalentna s egzistencijom Bellmanove funkcije s određenim svojstvima;

(3) konstruira se konkretna Bellmanova funkcija s određenim kontrolnim parametrima.

Na ovaj način teoretske martingalne ocjene se svode na konstrukciju samo jednog i sasvim konkretnog objekta: eksplicitne funkcije s odgovarajućom domenom, kodomenom i željenim svojstvima poopćene konveksnosti. Bellmanovu funkciju najčešće tražimo kao modifikaciju već poznatih Bellmanovih funkcija iz literature ili rješavanjem odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi.

Razvojem moderne multilinearne analize pojavili su se problemi ograničenosti multilinearnih singularnih integralnih operatora za čiji dokaz se martingalni pristup čini najizglednijim. U tu skupinu pripadaju razni singularni operatori koji su invarijantni na vrlo generalnu dilatacijsku strukturu uvedenu u [55], a najjednostavniji primjer su tzv. *paraprodukti*. Jedan takav operator je i tzv. *zapetljani paraprodukt* kojeg su uveli Demeter i Thiele u [25]. Problem njegove ograničenosti riješio je V. Kovač u [38] prikladno modificirajući tehniku Bellmanovih funkcija za multilinearne ocjene. Prirodno se postavilo pitanje daljnje prilagodbe tehnike Bellmanovih funkcija na veću klasu problema u multilinearnoj harmonijskoj analizi, ali i srodnim matematičkim granama. Prvi rezultati u tom smjeru postignuti su u radu V. Kovača [37], u kojem se tehnikom Bellmanovih funkcija dokazuju nestandardne ocjene za dijadske martingale. U ovom doktorskom radu cilj je razviti varijantu tehnike Bellmanovih funkcija potrebne za dokaz L^p ocjena za dva (ili tri) različita martingala, koji ne moraju biti dijadski i koji nisu nužno adaptirani obzirom na istu filtraciju.

U Poglavlju 2 navodimo neke osnovne pojmove i poznate rezultate iz teorije vjerojatnosti koji će nam biti od koristi u daljnjem radu. Više detalja o martingalima s diskretnim vremenom može se pronaći u [31] i [59], dok za martingale s neprekidnim vremenom i stohastičku integraciju upućujemo na [30] i [53].

Poglavlje 3 posvećeno je dokazivanju L^p ograničenosti tzv. dijadskog paraprodukta. Dokazat ćemo da postoji konačna konstanta $\mathcal{C}_{p,q,r} > 0$ koja ovisi samo o tri eksponenta p, q, r takva da je

$$|\Lambda_\epsilon(f, g, h)| \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})} \tag{1.1}$$

kad god su $1 < p, q, r \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ i f, g, h funkcije iz odgovarajućeg prostora test funkcija. U gornjoj nejednakosti $\Lambda_\epsilon(f, g, h)$ je trilinearna forma koja se dobije dualizacijom dijadskog paraprodukta $\Pi_\epsilon(f, g)$ (vidi Odjeljak 3.1). Iako je ocjena (1.1) dobro poznata, mi ćemo prezentirati nešto drugačiji, direktniji, dokaz korištenjem tehnike Bellmanovih funkcija. Takav dokaz nam može dati precizniju kvantitativnu ovisnost konstanti $\mathcal{C}_{p,q,r}$ i omogućuje nam da istu Bellmanovu funkciju primijenimo u različitim kontekstima. Dat ćemo eksplicitni izraz za odgovarajuću Bellmanovu funkciju, a pritom ćemo koristiti strukturu jednostavnije Bellmanove funkcije koju su konstruirali F. Nazarov i S. Treil za problem Haarovih množitelja u [46]. U dokazu da konstruirana Bellmanova funkcija zaista zadovoljava tražena svojstva koja povlače (1.1) (Odjeljak 3.2) koristit ćemo i programski paket *Mathematica* [60]. Konačno, pokazat ćemo kako za poseban izbor eksponenata p, q, r možemo konstruirati i jednostavnije Bellmanove funkcije koje će nam dati asimptotsko ponašanje konstanti $\mathcal{C}_{p,q,r}$ (Odjeljak 3.3).

U Poglavlju 4 primijenit ćemo Bellmanovu funkciju konstruiranu u Poglavlju 3 kako bismo dokazali L^p ograničenost martingalnih paraprodukta i paraprodukta obzirom na toplinski tok. U Odjeljku 4.1 dokazat ćemo da za sve eksponente p, q, r takve da je

$1 < p, q, r < \infty$, $q > r$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ vrijedi

$$\|(X \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^{r'}} \lesssim_{p,q,r} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}, \tag{1.2}$$

gdje je r' konjugirani eksponent od r. Ovdje je $\big((X \cdot Y)_n\big)_{n=0}^{\infty}$ martingalni paraprodukt dva martingala s diskretnim vremenom, $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$, definiran po uzoru na Burkholderovu martingalnu transformaciju uvedenu u [14]. Definiciju martingalnog paraprodukta $\big((X \cdot Y)_t\big)_{t\geqslant 0}$ dva martingala s neprekidnim vremenom, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$, preuzet ćemo iz članka Bañuelosa i Bennetta [3]. U Odjeljcima 4.4 i 4.2 dokazat ćemo da i $\big((X \cdot Y)_t\big)_{t\geqslant 0}$ zadovoljava ocjenu oblika (1.2) i to u kontekstu filtracije obzirom na Brownovo gibanje i općenite filtracije s neprekidnim vremenom koja zadovoljava neke standardne pretpostavke (Definicija 2.22). Konačno, u Odjeljku 4.3 iskoristit ćemo istu tu Bellmanovu funkciju kako bismo dali elegantni dokaz ocjene

$$|\Lambda(f, g, h)| \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}, \tag{1.3}$$

gdje je $\Lambda(f, g, h)$ paraprodukt obzirom na toplinski tok, a eksponenti p, q, r zadovoljavaju gore navedene pretpostavke. Materijal obuhvaćen Poglavljima 3 i 4 može se pronaći u članku [40].

U Poglavlju 5 uvodimo jednu varijantu Burholderove martingalne transformacije pridružene dvama martingalima obzirom na dvije različite filtracije (Definicija 5.1). Dokazat ćemo da takve transformacije i dalje zadovoljavaju neke L^p ocjene, tj. da za realne martingale $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ adaptirane obzirom na dvije različite (premda ne sasvim proizvoljne) filtracije $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(\mathcal{G}_n)_{n=0}^{\infty}$ postoji apsolutna konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\|(KX \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C\, \|X_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^2}, \tag{1.4}$$

$$\|(K \cdot XY)_n\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C\, \Big(\|X_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^2} + \|Y_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}\Big), \tag{1.5}$$

i to za svaki nenegativan cijeli broj n. U gornjim nejednakostima $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ je adaptirani proces obzirom na presječnu filtraciju $(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_n)_{n=0}^{\infty}$. Uz neke dodatne uvjete na filtraciju $(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{G}_n)_{n=0}^{\infty}$ pokazuje se da postoji konstanta $C_{p,q,r} > 0$ takva da vrijedi

$$\|(KX \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant C_{p,q,r}\, A^{3/2} \Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n-1} \|K_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big) \|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}, \tag{1.6}$$

i to za svaki nenegativan cijeli broj n i eksponente p, q, r za koje vrijedi $1/r = 1/p + 1/q$ i $1 < r < 2 < p, q < \infty$. Dokaz ocjena (1.4) i (1.6) opet se temelji na varijanti tehnike Bellmanovih funkcija. U ovom slučaju ipak nećemo konstruirati Bellmanovu funkciju s određenim kontrolnim parametrima (kao što smo napravili u Poglavlju 3), već ćemo naprosto konstruirati izraz Bellmanovog tipa sa svim željenim svojstvima. Više nećemo govoriti o Bellmanovoj funkciji, već naprosto o kontrolnom procesu.

U Poglavlju 6 pokazat ćemo kako možemo primijeniti martingalne ocjene (1.4), (1.5) i (1.6) iz Poglavlja 5. U Odjeljku 6.1 uvodimo opći zapetljani paraprodukt obzirom na dvije općenite dilatacijske strukture na $\mathbb{R}^d$ (preuzete iz [55] i [35]). Kako bismo dokazali L^p ograničenost takvog operatora, trebat ćemo martingalnu ocjenu (1.5) prevesti u ocjenu na $\mathbb{R}^d$, koji uz spomenutu dilatacijsku strukturu postaje prostor homogenog tipa. Kod tog prijenosa koristit ćemo Christovu konstrukciju dijadskih kocaka na općenitom prostoru homogenog tipa ([19]) i ocjenu kvadratne funkcije Jonesa, Seegera i Wrighta ([35]). U Odjeljku 6.2 ćemo spomenute martingalne ocjene iskoristiti za konstrukciju stohastičkog integrala $\int_0^t H_s d(X_s Y_s)$ povezanog s određenim martingalima s neprekidnim vremenom $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$. Itōva konstrukcija stohastičkog integrala [33] je davno poopćena na integratore koji su semimartingali. Poznati Bichteler-Dellacherie teorem ([10], [9] i [24]) nam kaže da je to ujedno i najširi doseg klasične teorije, tj. da adaptirani "dobri integratori" moraju biti semimartingali. Pokazuje se da je ipak i proces $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ "dobar integrator", tj. da dobro integrira jednostavne predvidive procese, iako nije nužno semimartingal, jer nije čak ni adaptiran obzirom na bilo koju prigodnu filtraciju. Dosad u literaturi nisu postojali takvi primjeri. Poglavlja 5 i 6 objavljena su u [41].

Konačno, u Poglavlju 7 dajemo osvrt i na martingalne paraprodukte nekomutativnih dijadskih martingala koji poprimaju vrijednosti u algebri. Pokazuje se da i oni zadovoljavaju određene L^p ocjene te da je za poseban izbor eksponenata moguće čak i konstruirati Bellmanovu funkciju koja nam daje ocjenu s najboljom konstantom.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom poglavlju definirat ćemo neke osnovne pojmove i prezentirati neke poznate rezultate iz teorije vjerojatnosti. Ti rezultati će nam biti od pomoći pri dokazivanju novih rezultata u sljedećim poglavljima ovog doktorskog rada.

2.1 Martingali s diskretnim vremenom

2.1.1 Uvjetno očekivanje

U ovom odjeljku zbog lakšeg praćenja kasnijeg teksta navodimo osnovne rezultate iz teorije martingala. Da bi prikaz bio pregledniji, rezultate ostavljamo bez dokaza koji se mogu pronaći u literaturi (npr. [31], [59]).

Definicija 2.1 Kažemo da neko svojstvo (P) vrijedi *gotovo sigurno* (skraćeno *g.s.*) na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ako postoji skup $A \in \mathcal{F}$ vjerojatnosti 1 ($\mathbb{P}(A) = 1$) takav da (P) vrijedi za svaki $\omega \in A$.

Neka je X slučajna varijabla na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $\mathcal{G}$ proizvoljna σ-podalgebra od $\mathcal{F}$, tj. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Želimo definirati *uvjetno očekivanje* slučajne varijable X uz danu σ-algebru $\mathcal{G}$. Prvo pretpostavimo da je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nenegativna slučajna varijabla s konačnim očekivanjem.

Definicija 2.2 Neka je X nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za koju je $\mathbb{E}X < \infty$ i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. *Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$* se definira kao slučajna varijabla $Y : \Omega \to [0, \infty]$ za koju vrijedi

(i) Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva;

(ii) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)$, za sve $A \in \mathcal{G}$.

U tom slučaju pišemo $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Iz definicije se lako vidi i da uvjetno očekivanje mora biti $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$-g.s. jedinstveno ($\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$ je oznaka za vjerojatnost $\mathbb{P}$ restringiranu na σ-algebru $\mathcal{G}$).

Napomena 2.3 Ako definiramo funkciju $\mathbb{Q} : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ formulom

$$\mathbb{Q}(A) := \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\mathbb{A}} X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A X), \qquad A \in \mathcal{G},$$

lako se vidi da je $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$, tj. $\mathbb{Q}$ je apsolutno neprekidna s obzirom na $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$. Prema Radon-Nikodymovom teoremu postoji $\mathcal{G}$-izmjeriva funkcija $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}}$ za koju vrijedi

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}} \, d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}} \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}}\Big), \tag{2.1}$$

pa ona očito zadovoljava svojstva (i) i (ii) uvjetnog očekivanja. Dakle, Radon-Nikodymova derivacija $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}}$ je verzija uvjetnog očekivanja $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. ■

Za proizvoljnu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ koja ima očekivanje, definiramo uvjetno očekivanje od X s obzirom na $\mathcal{G}$ kao

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}).$$

U gornjoj definiciji, X^+ i X^- predstavljaju pozitivni i negativni dio slučajne varijable X i definiraju se kao

$$X^+ := \max\{X, 0\}, \qquad X^- := -\min\{X, 0\}.$$

Uočimo da ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X \qquad \text{g.s.}$$

Isto tako, iz definicije uvjetnog očekivanja slijedi da je

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big) = \mathbb{E}X.$$

Bit će nam važna i sljedeća svojstva uvjetnog očekivanja.

Propozicija 2.4 Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla s konačnim očekivanjem na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$.

(a) Ako su X_1 i X_2 integrabilne slučajne varijable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tada je

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbb{E}(X_1\mathcal{G}) + a_2\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

(b) Ako je $X \geqslant 0$ g.s., tada je i $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geqslant 0$ g.s.

(c) Ako je Y omeđena $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je

$$\mathbb{E}(YX|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

(d) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big|\mathcal{H}\Big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \quad \text{g.s.}$$

(e) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ g.s.

(f) Ako je Y integrabilna slučajna varijabla, vrijedi

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G})^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2|\mathcal{G})\mathbb{E}(Y^2|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

(g) Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka je $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty$. Tada vrijedi

$$\varphi\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\varphi(X)|\mathcal{G}\Big) \quad \text{g.s.}$$

Svojstva (a) i (b) su svojstva *linearnosti* i *monotonosti*. Svojstvo (f) je zapravo *uvjetna Cauchy-Schwarzova nejednakost*, a (g) je *uvjetna Jensenova nejednakost*.

Za uvjetno očekivanje vrijede i uvjetni teoremi o monotonoj i dominiranoj konvergenciji, te uvjetna Fatouova lema.

Propozicija 2.5 (a) Neka je $(X_n)_{n=1}^\infty$ rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli i neka je $X = \lim_n X_n$. Tada je zbog monotonosti uvjetnog očekivanja

$$0 \leqslant \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G}) \leqslant \cdots \leqslant \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

i vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

(b) Neka je $(X_n)_{n=1}^\infty$ niz slučajnih varijabli takvih da je $|X_n| \leqslant Y$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}Y < \infty$ i $X = \lim_n X_n$ g.s. Tada je X integrabilna slučajna varijabla i vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

(c) Neka je $X_n \geqslant 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) \leqslant \liminf_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \quad \text{g.s.}$$

2.1.2 Definicija i svojstva martingala

Krećemo s nekoliko osnovnih definicija.

Definicija 2.6 Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. *Slučajni proces s diskretnim vremenom* je niz slučajnih varijabli $X = (X_n : n \geqslant 0)$.

Definicija 2.7 Familija $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geqslant 0$ naziva se *filtracijom.*

Definicija 2.8 Za slučajni proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ kažemo da je *adaptiran* obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ ako je slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva za svaki $n \geqslant 0$.

Ako za slučajni proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiramo $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, onda filtraciju $(\mathcal{F}_n^0)_{n=0}^{\infty}$ zovemo *prirodnom (kanonskom) filtracijom procesa* X.

Definicija 2.9 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ filtracija i $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. X je *martingal* ako vrijedi:

(i) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ za svaki $n \geqslant 0$;

(ii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ g.s. za svaki $n \geqslant 0$.

Ako u (ii) znak jednakosti $=$ zamijenimo s $\leqslant$ ili $\geqslant$, tada je X *supermartingal* ili *submartingal.*

Primjer 2.10 (Slučajna šetnja) Neka je $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s očekivanjem nula ($\mathbb{E}\xi_1 = 0$). Proces $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ definiran kao $X_0 = 0$ i $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ za $n \geqslant 1$ nazivamo *slučajnom šetnjom.* Definiramo σ-algebre $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ za $n \geqslant 1$. Očito je X adaptiran obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ i vrijedi $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ za svaki $n \geqslant 0$. Budući da je za svaki $n \geqslant 0$ slučajna varijabla ξ_{n+1} nezavisna s $\mathcal{F}_n$, a X_n je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, iz linearnosti uvjetnog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}\xi_{n+1} = X_n.$$

Time smo pokazali da je X martingal. ■

Lako se pokaže da za martingal $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ vrijedi

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = X_m \quad \text{g.s.} \quad \text{za sve } 0 \leqslant m < n.$$

Isto tako, iz uvjetne Jensenove nejednakosti slijedi da, ako je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija takva da je $\mathbb{E}|\varphi(X_n)| < \infty$ za sve $n \geqslant 0$, tada je $\big(\varphi(X_n)\big)_{n\geqslant 0}$ submartingal.

Do kraja odjeljka ćemo pretpostavljati da radimo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem je dana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Uvodimo i pojam martingalne transformacije.

Definicija 2.11 Neka je $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ adaptirani proces, te neka je $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ predvidiv proces. *Martingalna transformacija* procesa X po procesu H je slučajni proces $H \cdot X = ((H \cdot X)_n)_{n\geqslant 0}$ definiran kao

$$\begin{aligned} &(H \cdot X)_0 := 0, \\ &(H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \qquad \text{za } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

U gornjoj definiciji slučajni proces $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ zovemo *predvidivim* ako je H_0 $\mathcal{F}_0$-izmjeriva, a H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva za svaki $n \geqslant 1$.

Za predvidiv proces H takav da je H_n ograničena slučajna varijabla za sve $n \geqslant 0$ vrijedi sljedeće:

- Ako je X martingal, onda je i $H \cdot X$ martingal.
- Ako je X supermartingal (odnosno submartingal) i $H_n \geqslant 0$ za sve $n \geqslant 0$, onda je i $H \cdot X$ supermartingal (odnosno submartingal).

Definicija 2.12 Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ zove se *vrijeme zaustavljanja* s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako vrijedi $\{T \geqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $n \geqslant 0$.

Za slučajni proces $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ možemo definirati i proces zaustavljen u vremenu T, $X^T = (X_n^T)_{n\geqslant 0}$ kao

$$X_n^T := X_{n\wedge T} = X_n \mathbb{1}_{\{n<T\}} + X_T \mathbb{1}_{\{n\geqslant T\}}.$$

Ako je X martingal, tada je i zaustavljeni proces X^T također martingal. To se vidi iz činjenice da je zaustavljeni proces X^T zapravo martingalna transformacija procesa X po procesu $(\mathbb{1}_{\{n\leqslant T\}})_{n\geqslant 0}$.

Ako je X martingal, a T vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, uz određene uvjete možemo zaključiti i da vrijedi $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ (npr. T ograničeno ili X ograničen). Teoremi tog tipa zovu se teoremi o opcionalnom zaustavljanju i jedni su od najvažnijih u teoriji martingala, jer ih koristimo za dokazivanje brojih drugih rezultata.

Nas će u ostatku rada ipak najviše zanimati martingalne L^p ocjene pa navodimo i važne nejednakosti koje ćemo koristiti u njihovim dokazima.

Definicija 2.13 L^p-norma slučajne varijable Z definira se kao

$$\|Z\|_{\mathrm{L}^p} := (\mathbb{E}|Z|^p)^{1/p},$$

za bilo koji $1 \leqslant p < \infty$.

$\|Z\|_{\mathrm{L}^\infty}$ se jednostavno definira kao esencijalni supremum od $|Z|$, tj.

$$\|Z\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{C \geqslant 0 : |Z(\omega)| \leqslant C \quad \text{g.s.}\}.$$

Krećemo s Doobovim nejednakostima.

Teorem 2.14 (Doobove nejednakosti) Neka je $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingal, $\lambda > 0$ i $p > 1$. Definiramo *maksimalni proces* $(X_n^*)_{n\geqslant 0}$

$$X_n^* := \max\{|X_0|, |X_1|, \dots, |X_n|\} \qquad \text{za } n \geqslant 0.$$

Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(X_n^* > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\|X_n\|_{\mathrm{L}^1} \qquad \text{za svaki } n \geqslant 0; \tag{2.3}$$

$$\|X_n^*\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \qquad \text{za svaki } n \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Nejednakost (2.3) zovemo još i *Doobova maksimalna nejednakost*, a (2.4) *Doobova* L^p *nejednakost.*

U dokazu (2.4) koristimo sljedeću lemu, koja će nam kasnije trebati i u Poglavlju 5, pa je navodimo zbog boljeg pregleda.

Lema 2.15 Neka je Z nenegativna slučajna varijabla. Tada za svaki $p \geqslant 1$ vrijedi

$$\mathbb{E}(Z^p) = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(Z > t)\, dt. \tag{2.5}$$

Sljedeća nejednakost bit će nam važna za ograničavanje kvadratne varijacije i kvadratne funkcije u Poglavljima 4 i 5. Dokazali su je Burkholder, Davis i Gundy u [16], čemu su prethodili neki posebni slučajevi pokazani od strane istih autora.

Teorem 2.16 (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost) Neka je $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingal adaptiran obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Definiramo *kvadratnu varijaciju* $([X]_n)_{n\geqslant 0}$ kao

$$\begin{aligned} &[X]_0 := 0, \\ &[X]_n := \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})^2 \qquad \text{za } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Tada za svaki $p \in (1, \infty)$ postoje konstante $c_p, C_p > 0$ koje ovise samo o p takve da vrijedi

$$c_p\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \left\|[X]_n^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C_p\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \qquad \text{za } n \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Napomena 2.17 Ako je martingal $(X_n)_{n\geqslant 0}$ L^p ograničen, tj. $\sup_{n\geqslant 0}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < \infty$, onda on konvergira u L^p prema nekoj slučajnoj varijabli X. Uz oznaku $X^* := \sup_n |X_n|$, nejednakost (2.4) daje

$$\|X^*\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|X\|_p, \tag{2.7}$$

i štoviše, konstanta $\frac{p}{p-1}$ je najbolja moguća.

Uz oznaku

$$[X]_\infty := \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(X_k - X_{k-1})^2\Big)^{1/2},$$

iz nejednakosti (2.6) slijedi i ocjena

$$\Big\|[X]_\infty\Big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C_p \|X\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{2.8}$$

■

Konačno, navodimo i poznatu nejednakost koju je dokazao Donald Burkholder. On se bavio proučavanjem martingalnih transformacija i pokazao je da one zadovoljavaju određene L^p ocjene.

Teorem 2.18 (Burkholderova nejednakost) Za svaki $1 < p < \infty$ vrijedi

$$\Big\|(H \cdot X)_n\Big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (p^* - 1)\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}, \tag{2.9}$$

za svaki $n \geqslant 0$. Pritom smo označili $p^* = \max\Big\{p, \frac{p}{p-1}\Big\}$. Konstanta $p^* - 1$ je najbolja moguća.

Napomena 2.19 Nejednakost (2.9) je jedan od najvećih znanstvenih doprisnosa Donalda Burkholdera. Burkholder je u svom dokazu primijenio i razvio tehniku Bellmanovih funkcija, koja se kasnije počela koristiti za dokazivanje raznih martingalnih ocjena. Više detalja može se pronaći u [12] i [13]. ■

2.1.3 Dijadski martingali

Dijadski martingali su specijalan slučaj martingala s diskretnim vremenom. Oni se prirodno pojavljuju u realnoj analizi i zato ih posebno spominjemo u ovom pododjeljku.

Neka je $\Omega := [0, 1)$ i definiramo

$$\mathcal{D}_n := \Big\{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)) : k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}\Big\}, \quad \mathcal{D} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n.$$

Intervale iz $\mathcal{D}$ nazivamo *dijadskim intervalima*, a intervale iz $\mathcal{D}_n$ *dijadskim intervalima duljine* 2^{-n}.

Dijadski intervali imaju sljedeća svojstva:

- Za $n \geqslant 0$ i $I_n \in \mathcal{D}_n$ postoji jedinstveni $I_{n-1} \in \mathcal{D}_{n-1}$ takav da je $I_n \subset I_{n-1}$.
- Za svaki $I \in \mathcal{D}$ duljine 2^{-n} postoje dva intervala $I_{\text{lijevi}}, I_{\text{desni}} \in \mathcal{D}$ duljine 2^{-n-1} takva da je

  $$I = I_{\text{lijevi}} \cup I_{\text{desni}}.$$

  I_{lijevi} i I_{desni} nazivaju se lijeva i desna polovica intervala I.

- Za svaka dva neprazna dijadska intervala I i J vrijedi

$$I \cap J \neq \emptyset \implies I \subseteq J \quad \text{ili} \quad J \subseteq I.$$

  Dakle, svaka dva neprazna dijadska intervala ili se sijeku ili je jedan podskup drugoga.

- Za svaki $x \in \Omega$ i $n \geqslant 0$ postoji jedinstveni $I_n \in \mathcal{D}_n$ takav da je $x \in I_n$.

Za svaki $n \geqslant 0$ možemo definirati σ-algebru $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{D}_n)$ generiranu dijadskim intervalima duljine 2^{-n}. Filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ se tada naziva *dijadskom filtracijom.* Sada za $f \in \mathrm{L}^1([0,1))$ možemo definirati i *dijadski martingal* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ kao

$$X_n := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) \qquad \text{za } n \geqslant 0.$$

Eksplicitno,

$$X_n = \sum_{I\in\mathcal{D}_n} [f]_I \mathbb{1}_I,$$

pri čemu je $\mathbb{1}_I$ indikatorska funkcija intervala I, a

$$[f]_I := \frac{1}{|I|} \int_I f$$

je prosjek funkcije f na dijadskom intervalu I. S $|I|$ označavamo duljinu intervala I.

Martingalne razlike možemo eksplicitno zapisati kao

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{I\in\mathcal{D}_n} \langle f, \tilde{\mathbb{h}}_I\rangle \tilde{\mathbb{h}}_I = \sum_{I\in\mathcal{D}_n} |I|^{-1} \langle f, \mathbb{h}_I\rangle \mathbb{h}_I,$$

pri čemu su

$$\tilde{\mathbb{h}}_I := |I|^{-\frac{1}{2}} (\mathbb{1}_{I_{\text{lijevi}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desni}}}) \quad \text{i} \quad \mathbb{h}_I := \mathbb{1}_{I_{\text{lijevi}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desni}}}$$

Haarove funkcije normalizirane u L^2 i L^∞ redom.

Napomena 2.20 Lako se vidi da je

$$\left\{\mathbb{1}_{[0,1)}\right\} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\tilde{\mathbb{h}}_I : I \in \mathcal{D}_n\}$$

ortonormirana baza od $\mathrm{L}^2([0,1))$. ■

Neka su sad

$$Mf := \sup_{I\in\mathcal{D}} |I|^{-1} \langle f, \mathbb{1}_I\rangle \mathbb{1}_I \quad \text{i} \quad Sf := \Bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}} |I|^{-2} |\langle f, \mathbb{h}_I\rangle|^2 \mathbb{1}_I \Bigg)^{1/2}$$

dijadska maksimalna funkcija i *dijadska kvadratna funkcija.* Iz Doobove nejednakosti (2.7) primijenjene na martingal $(X_n)_{n\geqslant 0}$ slijedi

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^p([0,1))} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p([0,1))}, \tag{2.10}$$

za svaki $1 < p < \infty$. S $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p([0,1))}$ je označena L^p norma na $[0,1)$ obzirom na Lebesgueovu mjeru, tj.

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p([0,1))} = \left(\int_{[0,1)} |f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Ocjena za dijadsku maksimalnu funkciju M može se dobiti i imitirajući dokaz za Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju (vidi [32]), ali na taj način ne dobijemo najbolju konstantu.

S druge strane, ako primijenimo Burkholder-Davis-Gundy nejednakost (2.8) na martingal $(X_n)_{n\geqslant 0}$, dobit ćemo ocjenu za dijadsku kvadratnu funkciju

$$\|Sf\|_{\mathrm{L}^p([0,1))} \leqslant C_p\|f\|_{\mathrm{L}^p([0,1))}, \tag{2.11}$$

za $1 < p < \infty$. Postoji i analitički dokaz gornje ocjene pomoću tzv. Calderón-Zygmundove dekompozicije (vidi [54]).

Napomena 2.21 Umjesto $\Omega = [0,1)$ možemo uzeti i $\Omega = \mathbb{R}$, pa promatrati dijadske intervale na $\mathbb{R}$. Tu modifikaciju ćemo koristiti u sljedećem poglavlju. ■

2.2 Slučajni procesi s neprekidnim vremenom

2.2.1 Osnovne definicije

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ potpun vjerojatnosni prostor na kojem je dana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Filtraciju isto kao u prethodnom odjeljku definiramo kao rastuću familiju σ-algebri, tj. familiju koja zadovoljava $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ za $s < t$.

Definicija 2.22 Za filtrirani potpuni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ kažemo da zadovoljava *standardne pretpostavke* ako vrijedi

(i) $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{F}$ $\mathbb{P}$-mjere nula;

(ii) filtracija $\mathbb{F}$ je neprekidna zdesna, tj.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u \qquad \text{za sve } t \geqslant 0.$$

Definicija 2.23 Slučajna varijabla $T : \Omega \to [0,\infty]$ je *vrijeme zaustavljanja* ako je za svaki $t \geqslant 0$ događaj $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

Ako pretpostavimo da je filtracija neprekidna zdesna, onda je T vrijeme zaustavljanja ako i samo ako je $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ za svaki $t \geqslant 0$.

Definicija 2.24 Neka je T vrijeme zaustavljanja. *Zaustavljena σ-algebra* $\mathcal{F}_T$ definira se kao

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ za svaki } t \geqslant 0\}.$$

Zaustavljenu σ-algebru $\mathcal{F}_T$ možemo zamišljati kao "informacije" nakupljene do slučajnog vremena T.

Definicija 2.25 Familija $(X_t)_{t\geqslant 0}$ slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ naziva se *slučajnim procesom s neprekidnim vremenom.* Za proces $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ kažemo da je *adaptiran* s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako vrijedi da je X_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva, za svaki $t \geqslant 0$.

Kažemo da je slučajni proces Y *verzija* procesa X ako je $X_t = Y_t$ g.s., za svaki $t \geqslant 0$ (to nekad zovemo i stohastičkom ekvivalencijom). Za procese X i Y kažemo da su *nerazlučivi* ako je g.s. za sve $t \geqslant 0$ $X_t = Y_t$, tj. ako postoji skup $A \subseteq \Omega$ vjerojatnosti 1 takav da je $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ za sve $\omega \in A$ i sve $t \geqslant 0$.

Funkcije $t \mapsto X_t(\omega)$ nazivaju se *putevima* (trajektorijama) slučajnog procesa X.

Definicija 2.26 Za slučajni proces X kažemo da je *càdlàg* ako g.s. ima puteve koji su neprekidni zdesna i imaju limese slijeva. Analogno, slučajni proces je *càglàd* ako g.s. ima puteve koji su neprekidni slijeva i imaju limese zdesna.

Ako su X i Y dva càdlàg slučajna procesa takva da je Y verzija od X, tada su X i Y nerazlučivi. Štoviše, ista stvar vrijedi i ako procesi X i Y imaju samo puteve koji su g.s. neprekidni zdesna.

Kad govorimo da slučajni proces zadovoljava neko svojstvo, podrazumijeva se da to svojstvo zapravo zadovoljava g.s. (do na skup vjerojatnosti 0). Stoga je proces koji promatramo često moguće zamijeniti nekom njegovom verzijom koja ima ljepša svojstva, npr. neprekidna je zdesna ili slijeva.

Definicija 2.27 Funkcija $f : [0, t] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna zdesna je *funkcija ograničene varijacije* ako je

$$V_f^{(1)}(t) := \sup \sum_{j=1}^{k} |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty,$$

gdje se supremum uzima po svim $k \in \mathbb{N}$ i svim particijama

$$0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k = t$$

segmenta $[0, t]$. Ako je gornji supremum beskonačan, kažemo da je f funkcija neograničene varijacije.

Definicija 2.28 Neka je $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ càdlàg proces. Kažemo da je A *proces konačne varijacije* ako su putevi od A g.s. ograničene varijacije na svakom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}_+$.

Primjer procesa konačne varijacije je kompenzirani Poissonov proces, $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$, koji se definira kao

$$M_t := N_t - \lambda t,$$

gdje je $(N_t)_{t \geqslant 0}$ Poissonov proces s parametrom λ.

2.2.2 Martingali i Brownovo gibanje

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ potpuni filtrirani vjerojatnosti prostor koji zadovoljava standardne pretpostavke (Definicija 2.22).

Definicija 2.29 Adaptirani proces $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ je *martingal* (s neprekidnim vremenom) ako vrijedi:

(i) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ za svaki $t \geqslant 0$;

(ii) $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ g.s. za sve $s \leqslant t$.

Ako u (ii) znak jednakosti $=$ zamijenimo s $\leqslant$ ili $\geqslant$, tada je X *supermartingal* ili *submartingal*.

Ako je $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ martingal, tada postoji jedinstveni càdlàg proces Y koji je verzija od X. Stoga ćemo uvijek kad spominjemo martingal s neprekidnim vremenom podrazumijevati da se radi o njegovoj verziji koja je càdlàg.

Martingali s neprekidnim vremenom isto zadovoljavaju određene L^p ocjene. Preciznije, i za njih vrijedi Doobova L^p nejednakost (2.7).

Za slučajni proces X i vrijeme zaustavljanja T možemo definirati i *zaustavljeni proces* X^T kao

$$X_t^T := X_{t \wedge T} = X_t \mathbb{1}_{\{t < T\}} + X_T \mathbb{1}_{\{t \geqslant T\}}.$$

Definicija 2.30 Adaptirani, càdlàg proces X je *lokalni martingal* ako postoji niz vremena zaustavljanja $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:

- $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ g.s. raste, tj. $\mathbb{P}(T_n < T_{n+1}) = 1$ za svaki $n \geqslant 0$;
- $\lim_{n \to \infty} T_n = \infty$ g.s.;
- zaustavljeni proces $X^{T_n} = (X_{t \wedge T_n})_{t \geqslant 0}$ je martingal (s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{t \wedge T_n})_{t \geqslant 0}$) za svaki $n \geqslant 0$.

Lako se vidi da je svaki càdlàg martingal ujedno i lokalni martingal, jer možemo uzeti niz $T_n = n$. S druge strane, lokalni martingal ne mora biti martingal.

Definicija 2.31 Adaptirani proces $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ koji poprima vrijednosti u $\mathbb{R}^n$ je *n-dimenzionalno Brownovo gibanje* ako vrijedi:

(i) za $0 \leqslant s < t < \infty$ je $B_t - B_s$ nezavisno od $\mathcal{F}_s$ (inkrementi su nezavisni od prošlosti);

(ii) za $0 < s < t$, slučajna varijabla $B_t - B_s$ ima n-dimenzionalnu normalnu distribuciju s očekivanjem nula i kovarijacijskom matricom $(t-s)C$, gdje je C neka matrica dimenzija $n \times n$: $B_t - B_s \sim N_n(\mathbf{0}, (t-s)C)$.

Kažemo da Brownovo gibanje kreće iz točke $x \in \mathbb{R}^n$ ako je $\mathbb{P}(B_0 = x) = 1$.

Može se pokazati da svako Brownovo gibanje B ima verziju koja ima g.s. neprekidne puteve. Stoga ćemo uvijek pretpostavljati da koristimo upravo tu verziju. Ako dodatno pretpostavimo da je $C = I_n$ jedinična matrica i da je $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$, tj. da gibanje kreće iz 0, tada kažemo da se radi o *standardnom Brownovom gibanju*.

Uočimo da ako je B standardno n-dimenzionalno Brownovo gibanje, gdje je $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ za $0 \leqslant t < \infty$, tada su $B^1, \dots, B^n$ međusobno nezavisna jednodimenzionalna standardna Brownova gibanja.

Vrijedi i sljedeće:

- Neka je $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ jednodimenzionalno standardno Brownovo gibanje. Tada je proces $(M_t)_{t \geqslant 0}$ definiran kao $M_t := B_t^2 - t$ martingal.

- Za gotovo sve $\omega \in \Omega$ putevi $t \mapsto B_t(\omega)$ standardnog Brownovog gibanja B su neograničene varijacije na svakom intervalu.

Dokazi svih navedenih rezultata i dodatna svojstva mogu se pronoaći u [53] i [30].

2.3 Stohastička integracija

U ovom odjeljku navest ćemo osnovne definicije vezane uz klasičnu Itōvu teoriju stohastičke integracije. Kao i u prethodnom odjeljku, pretpostavit ćemo da je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ potpuni filtrirani vjerojatnosti prostor koji zadovoljava standardne pretpostavke (Definicija 2.22).

Definicija 2.32 Za proces $H = (H_s)_{s \geqslant 0}$ kažemo da je *elementarni predvidiv proces* ako se može zapisati kao

$$H_s = H_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^{n} H_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s), \tag{2.12}$$

gdje su $0 = t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{n+1} < \infty$, H_k je $\mathcal{F}_{t_k}$ izmjeriva i $|H_k| < \infty$ g.s. za sve $0 \leqslant k \leqslant n$. Familiju elementarnih predvidivih procesa ćemo označavati s $\mathcal{P}$.

Neka je sada $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ slučajni proces. Operator I_X na $\mathcal{P}$, induciran procesom X, mora zadovoljavati dva osnovna svojstva da bi se mogao zvati *stohastičkim integralom*:

(1) I_X je linearan operator;

(2) I_X zadovoljava određenu varijantu teorema o ograničenoj konvergenciji. Preciznije, htjeli bismo da uniformna konvergencija $H^n \to H$ povlači konvergenciju po vjerojatnosti $I_X(H^n) \to I_X(H)$.

Pokazuje se da proces X mora biti *semimartingal* da bi bio "dobar integrator", tj. da bismo mogli definirati operator I_X koji zadovoljava svojstva (1) i (2).

Definicija 2.33 Neka je $(X_t)_{t\geqslant 0}$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{s\geqslant 0}$. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ je semimartingal ako ga možemo rastaviti kao

$$X_t = M_t + A_t, \qquad \text{za svaki } t \geqslant 0,$$

gdje je $(M_t)_{t\geqslant 0}$ lokalni martingal, a $(A_t)_{t\geqslant 0}$ je proces konačne varijacije.

Lako se vidi da je Brownovo gibanje semimartingal. Također i càdlàg martingali su semimartingali.

Označimo sada s $\mathbb{D}$ prostor svih adaptiranih procesa s càdlàg putevima, a s $\mathbb{L}$ prostor svih adaptiranih procesa s càglàd putevima.

Definicija 2.34 Kažemo da niz procesa $(H^n)_{n\geqslant 1}$ konvergira prema procesu H *uniformno na kompaktima po vjerojatnosti* (skraćeno *ukv*) ako za svaki $t > 0$

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |H_s^n - H_s| \to 0$$

po vjerojatnosti.

Označit ćemo s $\mathbb{D}_{ukv}$, $\mathbb{L}_{ukv}$ i $\mathcal{P}_{ukv}$ prostore $\mathbb{D}$, $\mathbb{L}$ i $\mathcal{P}$ opremljene s *ukv* topologijom.

Sada smo spremni za definiciju stohastičkog integrala.

Definicija 2.35 Neka je X càdlàg proces i $H \in \mathcal{P}$ elementarni predvidiv proces definiran s (2.12). Tada možemo definirati linearno preslikavanje $J_X : \mathcal{P} \to \mathbb{D}$ kao

$$J_X(H) := H_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}). \tag{2.13}$$

$J_X(H)$ zovemo *stohastički integral od H s obzirom na X.*

Za stohastički integral koriste se različite notacije, npr.

$$J_X(H) = \int H_s dX_s = H \cdot X.$$

Možemo definirati i određeni integral kao

$$J_X(H)_t = \int_0^t H_s dX_s := H_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X_{t_{k+1}\wedge t} - X_{t_k \wedge t}). \tag{2.14}$$

Željeli bismo proširiti definiciju stohastičkog integrala (2.13) i (2.14) i na širu klasu integranada od $\mathcal{P}$. Za to će nam trebati sljedeći teorem iz [53].

Teorem 2.36 (a) Prostor $\mathcal{P}$ je gust u $\mathbb{L}$ s obzirom na *ukv* topologiju.

(b) Neka je X semimartingal. Tada je preslikavanje $J_X : \mathcal{P}_{ukv} \to \mathbb{D}_{ukv}$ neprekidno.

Iz gornjeg teorema sada vidimo da se operator J_X može po neprekidnosti proširiti s $\mathcal{P}$ na $\mathbb{L}$.

Definicija 2.37 Neka je X semimartingal. Neprekidno linearno preslikavanje $J_X : \mathbb{L}_{ukv} \to \mathbb{D}_{ukv}$ dobiveno proširenjem operatora $J_X : \mathcal{P} \to \mathbb{D}$ po neprekidnosti naziva se *stohastičkim integralom.*

Poznati Bichteler-Dellacherie teorem (vidi [10], [9], [24]) nam govori da "dobre integratore", tj. semimartingale, možemo karakterizirati i na sljedeći način.

Teorem 2.38 (Bichteler-Dellacherie) Neka je $(X_s)_{s\geqslant 0}$ càdlàg proces adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$. $(X_s)_{s\geqslant 0}$ je semimartingal ako i samo ako je skup

$$\left\{ \int_0^t H_s dX_s \; : \; (H_s)_{s\geqslant 0} \text{ je elementaran predvidiv proces}, \; \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|H_s\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 1 \right\}$$

ograničen po vjerojatnosti.

Napomena 2.39 Elementarni predvidiv proces $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ može se definirati i kao

$$H_t = H_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{n} H_k \mathbb{1}_{(T_k, T_{k+1}]}(t),$$

gdje su $0 = T_1 \leqslant \cdots \leqslant T_{n+1} < \infty$ vremena zaustavljanja, H_k je $\mathcal{F}_{T_k}$ izmjeriva i $|H_k| < \infty$ g.s. za sve $0 \leqslant k \leqslant n$. U tom slučaju se stohastički integral procesa H s obzirom na semimartingal X definira kao

$$H \cdot X = H_0 X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (X^{T_{k+1}} - X^{T_k}).$$

Definicija se širi i na ovu veću klasu integranada na prethodno opisani način. Za više detalja pogledati [53]. ■

Zanimljiv će nam biti i sljedeći teorem o reprezentaciji martingala, čiji se dokaz može pronaći također u [53].

Teorem 2.40 Neka je $B = (B^1, \ldots, B^n)$ n-dimenzionalno standardno Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ njegova upotpunjena prirodna filtracija. Tada svaki lokalni martingal $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ adaptiran s obzirom na $\mathbb{F}$ ima reprezentaciju

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t H_s^i \, dB_s^i,$$

gdje su H^i, $i = 1, \dots, n$, predvidivi procesi.

Završit ćemo ovaj odjeljak definicijom procesa kvadratne varijacije i kovarijacije, te Itōvom formulom.

Definicija 2.41 Neka je X semimartingal. Tada definiramo proces *kvadratne varijacije* $[X] = ([X]_t)_{t \geqslant 0}$ kao

$$[X]_t := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{n(m)} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2, \tag{2.15}$$

gdje je $(\pi_m)_m$ niz profinjavajućih subdizivija intervala $[0, t]$;

$$\pi_m = (0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \cdots < t_{n(m)}^{(m)} = t), \quad \lim_{m \to \infty} \Delta(\pi_m) = 0.$$

Limes u (2.15) se interpretira kao limes po vjerojatnosti.

Definicija 2.42 Neka su X i Y semimartingali. Proces *kvadratne kovarijacije* $[X, Y] = ([X, Y]_t)_{t \geqslant 0}$ definiramo kao

$$[X, Y]_t := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{n(m)} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}), \tag{2.16}$$

gdje je opet $(\pi_m)_m$ niz profinjavajućih subdizivija intervala $[0, t]$.

Za X i Y semimartingale, te H i K procese iz $\mathbb{L}$ vrijedi

$$[H \cdot X, K \cdot Y]_t = \int_0^t H_s K_s \, d[X, Y]_s. \tag{2.17}$$

Definicija 2.43 Neka je X semimartingal. Jedinstveni predvidivi rastući proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t \geqslant 0}$ takav da je $\langle X \rangle_0 = 0$ i $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ je lokalni martingal naziva se *predvidivom kvadratnom varijacijom.*

Neka su X i Y dva semimartingala. Jedinstveni predvidivi proces koji je lokalno ograničene varijacije $\langle X, Y \rangle = (\langle X, Y \rangle_t)_{t \geqslant 0}$ takav da je $\langle X, Y \rangle_0 = 0$ i $X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t$ je lokalni martingal naziva se *predvidivom kvadratnom kovarijacijom.*

U slučaju da su X i Y neprekidni martingali, vrijedi

$$[X]_t = \langle X \rangle_t \quad \text{i} \quad [X, Y]_t = \langle X, Y \rangle_t \quad \text{za svaki } t \geqslant 0.$$

Posljedično, ako su X i Y neprekidni martingali, uzimanjem očekivanja u (2.17) dobivamo da vrijedi

$$\mathbb{E}[H \cdot X, K \cdot Y]_t = \mathbb{E} \int_0^t H_s K_s \, d[X, Y]_s. \tag{2.18}$$

Jednakost (2.18) se naziva *Itōva izometrija.*

Teorem 2.44 (Itōva formula) Neka je $X = (X^1, \ldots, X^n)$ n-torka neprekidnih semimartingala i neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Tada je $f(X)$ semimartingal i vrijedi

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \partial_i f(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \partial_i \partial_j f(X_s)\, d[X^i, X^j]_s. \tag{2.19}$$

POGLAVLJE 3

Bellmanova funkcija i L^p ocjene za dijadske paraprodukte

Prema Jansonu i Peetreu [34] pojam *paraprodukt* označava više ideju nego neki jedinstveni objekt. U literaturi se pojavljuju različiti tipovi paraprodukata (i u analizi i u vjerojatnosti) i uvijek su nam određena svojstva ograničenosti (tj. neprekidnosti) nužna za njihovu daljnju primjenu. Povijesni prikaz razvoja paraprodukata i daljnje reference mogu se naći u kratkom preglednom članku [6].

U ovom poglavlju dat ćemo eksplicitnu formulu za jednu moguću Bellmanovu funkciju povezanu s L^p ograničenošću dijadskih paraprodukata, koje promatramo kao bilinearne operatore ili trilinearne forme.

3.1 Dijadski paraprodukti i Bellmanova funkcija

Neka je $\mathcal{D}$ familija dijadskih intervala na $\mathbb{R}$ i neka su $\mathbb{h}_I := \mathbb{1}_{I_{\text{lijevi}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desni}}}$ L^∞-normalizirane Haarove funkcije kao u Pododjeljku 2.1.3.

Definicija 3.1 Za dvije funkcije f i g iz odgovarajućeg prostora test funkcija definiramo njihov *dijadski paraprodukt* kao bilinearni operator na sljedeći način:

$$\Pi_\epsilon(f,g) := \sum_{I\in\mathcal{D}} \epsilon_I |I|^{-2} \langle f, \mathbb{1}_I\rangle \langle g, \mathbb{h}_I\rangle \mathbb{h}_I. \tag{3.1}$$

Ovdje su ϵ_I realni brojevi za koje vrijedi da je $|\epsilon_I| \leqslant 1$ za svaki $I \in \mathcal{D}$.

Uočimo da, ako izaberemo $\epsilon_I \in \{-1, 1\}$, oni jednostavno predstavljaju $+$ i $-$ predznake. Prigodni izbor za test funkcije su takozvane *dijadske step funkcije*, tj. konačne linearne kombinacije indikatorskih funkcija na dijadskim intervalima.

Tipično se takav objekt promatra kao linearni operator u g s fiksiranom funkcijom f i u tom slučaju postaje poseban slučaj Burkholderove martingalne transformacije (2.2). Alternativno, možemo fiksirati g i promatrati ga kao linearan operator u f i u tom slučaju je poznat kao *linearni paraprodukt.* Mi ćemo na Π gledati simetrično i promatrati njegova svojstva kao bilinearnog operatora. Dijelom motivacija za to dolazi iz multilinearne harmonijske analize, gdje se proučavaju singularni operatori ovakvog tipa (vidi knjigu [57]).

Ekvivalentno, dijadski paraprodukt se može definirati i kao trilinearna forma. Uzme se treća test funkcija h i dualizira (3.1) da bi se dobilo

$$\begin{aligned} \Lambda_\epsilon(f,g,h) &:= \sum_{I\in\mathcal{D}} \epsilon_I |I|^{-2} \langle f, \mathbb{1}_I\rangle \langle g, \mathbb{h}_I\rangle \langle h, \mathbb{h}_I\rangle \\ &= \sum_{I\in\mathcal{D}} \epsilon_I |I| [f]_I \Big(\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}}{2}\Big)\Big(\frac{[h]_{I_{\text{lijevi}}} - [h]_{I_{\text{desni}}}}{2}\Big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dobro je poznato da (3.2) zadovoljava određene L^p ocjene, tj. da postoji konačna konstanta $\mathcal{C}_{p,q,r} \geqslant 0$ koja ovisi samo o tri eksponenta p, q, r takva da je

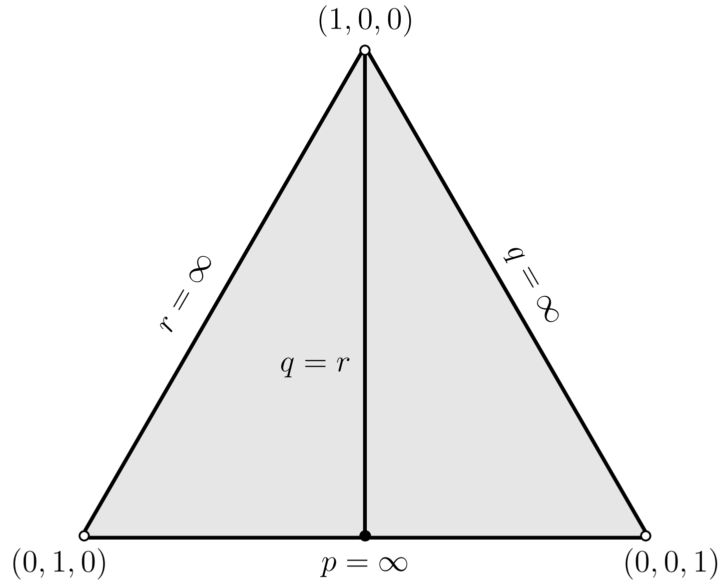
$$|\Lambda_\epsilon(f,g,h)| \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})} \tag{3.3}$$

kad god su $1 < p, q, r \leqslant \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. S $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$ je označena L^p norma na $\mathbb{R}$ s obzirom na Lebesgueovu mjeru.

Najjednostavniji dokaz nejednakosti (3.3) kad su $q, r < \infty$ koristi ograničenost dijadske maksimalne funkcije i dijadske kvadratne funkcije. Prvo moramo primjeniti Cauchy-Schwarzovu nejednakost, pa zatim i Hölderovu nejednakost da bismo dobili

$$|\Lambda_\epsilon(f,g,h)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} (Mf)(Sg)(Sh) \leqslant \|Mf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|Sg\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \|Sh\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}.$$

Sada iz ocjena za dijadsku maksimalnu i dijadsku kvadratnu funkciju, (2.10) i (2.11), slijedi (3.3).



Slika 3.1: Banachov trokut s baricentričnim koordinatama $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$.

Na stranici $p = \infty$ trokuta na Slici 3.1 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f \equiv 1$. Najbolju konstantu u (3.3) je našao Burkholder u [12] i ona iznosi

$$\mathcal{C}_{\infty,q,r} = \max\{q-1, r-1\}.$$

S druge strane, na stranicama $q = \infty$ i $r = \infty$ umjesto L^p ocjena prirodnije je proučavati određene BMO ocjene, ali njima se nećemo baviti.

Na visini $q = r$ trokuta na Slici 3.1 L^p ocjene za trilinearnu formu (3.2) mogu se reducirati na L^p ocjene za dijadsku kvadratnu funkciju budući da je

$$\int_{\mathbb{R}} f(Sg)^2 = \Lambda_\epsilon(f, g, g)$$

u slučaju da je $\epsilon_I = 1$ za svaki $I \in \mathcal{D}$. Iz toga slijedi da je

$$\|(Sg)^2\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} \leqslant \mathcal{C}_{p,q,q} \|g\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}, \quad \text{tj.} \quad \|S\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{\mathcal{C}_{p,q,q}}.$$

Zapravo, u slučaju kad je konstanta $\mathcal{C}_{p,q,q}$ optimalna, zadnja nejednakost prelazi u jednakost. Najbolju konstantu je našao Davis u [22] i ona iznosi

$$\mathcal{C}_{p,q,q} = (z_q^*)^{-2},$$

gdje je z_q^* najmanja pozitivna nultočka konfluente hipergeometrijske funkcije $M_q(z)$ koja se definira kao

$$M_q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2z^2)^m}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} \Big(\frac{q}{2} - j\Big).$$

Ako je q paran prirodan broj, tada je z_q^* zapravo najmanja pozitivna nultočka Hermiteovog polinoma reda q. (Za više detalja vidi [1].)

Posebni slučajevi koje smo naveli u gornjim odlomcima su dosta proučavani u literaturi i za njih su čak nađene i odgovarajuće Bellmanove funkcije. Za $p = \infty$ možemo ih naći u radovima Burkholdera [12], Nazarova i Treila [46], Vasyunina i Volberga [58], Bañuelosa i Osękowskog [4], dok za $q = r$ Bellmanovu funkciju nalazimo u knjizi Osękowskog [50]. Stoga ćemo se, zbog simetrije, u sljedeća dva poglavlja ograničiti na razmatranje trojki eksponenata (p, q, r) koje zadovoljavaju

$$1 < p, q, r < \infty, \quad q > r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \tag{3.4}$$

i odgovaraju desnoj polovici Banachovog trokuta prikazanog na Slici 3.1.

Cilj nam je dati direktni dokaz ocjene (3.3) koristeći tehniku Bellmanovih funkcija. Takav tip dokaza nam najčešće daje bolju kvantitativnu kontrolu i istu Bellmanovu funkciju često možemo primjeniti u više različitih okruženja.

Prvo uočimo da možemo pretpostaviti da su funkcije f, g, h nenegativne, jer ih inače možemo rastaviti na pozitivne i negativne dijelove. Također možemo uočiti da je jednostavnije zamijeniti desnu stranu $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}$ u (3.3) s veličinom

$$\frac{1}{p}\|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \frac{1}{r}\|h\|^r_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})},$$

koja je veća po Youngovoj nejednakosti, ali nova nejednakost je zapravo ekvivalentna s (3.3), zbog homogenosti lijeve strane.

Budući da su $|\epsilon_I| \leqslant 1$ proizvoljni, dovoljno je dokazati nehomogenu ocjenu

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} |I|[f]_I \left|\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}}{2}\right| \left|\frac{[h]_{I_{\text{lijevi}}} - [h]_{I_{\text{desni}}}}{2}\right| \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \frac{1}{r}\|h\|^r_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}\Big). \tag{3.5}$$

Ako želimo dobiti početnu ocjenu, moramo samo homogenizirati gornju nejednakost i primjeniti ograničenost od ϵ_I.

Za proizvoljan dijadski interval $I \in \mathcal{D}$ definiramo izraz

$$\Phi_I(f,g,h) := \frac{1}{|I|}\sum_{J\subseteq I} |J|[f]_J \frac{|[g]_{J_{\text{lijevi}}} - [g]_{J_{\text{desni}}}|}{2}\frac{|[h]_{J_{\text{lijevi}}} - [h]_{J_{\text{desni}}}|}{2},$$

koji je invarijatan na skaliranje. Na taj način dobijemo i normaliziranu ocjenu

$$\Phi_I(f,g,h) \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}[f^p]_I + \frac{1}{q}[g^q]_I + \frac{1}{r}[h^r]_I\Big). \tag{3.6}$$

koja je ekvivaletna s željenom ocjenom (3.5). To se lako vidi množenjem (3.6) s $|I|$ i puštajući $n \to \infty$ uz izbore $I = [0, 2^n)$ i $I = [-2^n, 0)$. Rastavljanjem $\sum_{J\subseteq I}$ na $\sum_{J\subseteq I_{\text{lijevi}}}$, $\sum_{J\subseteq I_{\text{desni}}}$ i $J = I$ dobije se sljedeći skalirajući identitet:

$$\Phi_I(f,g,h) = \frac{1}{2}\Phi_{I_{\text{lijevi}}}(f,g,h) + \frac{1}{2}\Phi_{I_{\text{desni}}}(f,g,h) + [f]_I\frac{|[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}|}{2}\frac{|[h]_{I_{\text{lijevi}}} - [h]_{I_{\text{desni}}}|}{2}. \tag{3.7}$$

Sad možemo definirati *apstraktnu Bellmanovu funkciju*

$$\mathbb{B}(u,v,w,U,V,W) := \sup_{f,g,h} \Phi_I(f,g,h),$$

gdje se supremum uzima po svim nenegativnim dijadskim step funkcijama f, g, h za koje je

$$[f]_I = u, \quad [g]_I = v, \quad [h]_I = w, \quad [f^p]_I = U, \quad [g^q]_I = V, \quad [h^r]_I = W.$$

Uočimo da gornji supremum ne ovisi o izboru "baznog" intervala I, radi invarijantnosti svih veličina na kompozicije s afinim transformacijama na $\mathbb{R}$.

Navedimo neka svojstva te apstraktne Bellmanove funkcije.

($\mathcal{B}1$) *Domena:* Sve šestorke (u, v, w, U, V, W) koje zadovoljavaju

$$u, v, w, U, V, W \geqslant 0, \quad u^p \leqslant U, \quad v^q \leqslant V, \quad w^r \leqslant W.$$

Gornje ograde jednostavno slijede iz Jensenove nejednakosti:

$$u^p = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f\Big)^p \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I f^p = U, \qquad v^p = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I g\Big)^q \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I g^q = V,$$
$$w^r = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I h\Big)^r \leqslant \frac{1}{|I|}\int_I h^r = W.$$

($\mathcal{B}2$) *Slika:*

$$0 \leqslant \mathbb{B}(u, v, w, U, V, W) \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}U + \frac{1}{q}V + \frac{1}{r}W\Big),$$

gdje smo na desnoj strani pretpostavili da ocjena (3.6) vrijedi.

($\mathcal{B}3$) *Glavna nejednakost:*

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{B}(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2}\mathbb{B}(\mathbf{x}_2) + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\frac{|v_1 - v_2|}{2}\frac{|w_1 - w_2|}{2},$$

za sve šestorke $\mathbf{x} = (u, v, w, U, V, W)$ i $\mathbf{x}_i = (u_i, v_i, w_i, U_i, V_i, W_i)$, $i = 1, 2$, koje pripadaju domeni i zadovoljavaju

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2.$$

Lako se vidi da glavna nejednakost mora vrijediti uzimanjem supremuma u skalirajućem identitetu (3.7) po svim nenegativnim funkcijama f, g, h za koje je

$$[f]_{I_{\text{lijevi}}} = u_1,\ [g]_{I_{\text{lijevi}}} = v_1,\ [h]_{I_{\text{lijevi}}} = w_1,\ [f^p]_{I_{\text{lijevi}}} = U_1,\ [g^q]_{I_{\text{lijevi}}} = V_1,\ [h^r]_{I_{\text{lijevi}}} = W_1,$$
$$[f]_{I_{\text{desni}}} = u_2,\ [g]_{I_{\text{desni}}} = v_2,\ [h]_{I_{\text{desni}}} = w_2,\ [f^p]_{I_{\text{desni}}} = U_2,\ [g^q]_{I_{\text{desni}}} = V_2,\ [h^r]_{I_{\text{desni}}} = W_2.$$

Obratno, pretpostavimo da smo već našli funkciju $\mathcal{B}$ sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$). Pokazat ćemo kako njena egzistencija povlači ocjenu (3.3). Primjena nejednakosti ($\mathcal{B}3$) n puta s fiksnim izborom funkcija $f, g, h \geqslant 0$ i fiksnim baznim intervalom I daje

$$|I|\,\mathcal{B}\Big([f]_I, [g]_I, [h]_I, [f^p]_I, [g^q]_I, [h^r]_I\Big) \geqslant \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\mathcal{B}\Big([f]_J, [g]_J, [h]_J, [f^p]_J, [g^q]_J, [h^r]_J\Big)$$
$$+ \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}} [f]_J\ \frac{\big|[g]_{J_{\text{lijevi}}} - [g]_{J_{\text{desni}}}\big|}{2}\ \frac{\big|[h]_{J_{\text{lijevi}}} - [h]_{J_{\text{desni}}}\big|}{2}.$$

Budući da je zbog $(\mathcal{B}2)$ prva suma nenegativna i

$$\mathcal{B}\Big([f]_I, [g]_I, [h]_I, [f^p]_I, [g^q]_I, [h^r]_I\Big) \overset{(\mathcal{B}2)}{\leqslant} \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}[f^p]_I + \frac{1}{q}[g^q]_I + \frac{1}{r}[h^r]_I\Big),$$

puštanje $n \to \infty$ nas dovodi do ocjene (3.6), a prema tome i do (3.3).

Bit će korisno naći funkciju $\mathcal{B}$ koja također zadovoljava i sljedeći uvjet:

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}) + (d\mathcal{B})(\mathbf{x})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) \geqslant \mathcal{B}(\mathbf{x}_1) + \frac{2}{3}u|v_1 - v||w_1 - w|, \tag{$\mathcal{B}4$}$$

za sve šestorke $\mathbf{x} = (u, v, w, U, V, W)$ i $\mathbf{x}_1 = (u_1, v_1, w_1, U_1, V_1, W_1)$ koje pripadaju domeni $(\mathcal{B}1)$. Ovdje $d\mathcal{B}$ označava diferencijal od $\mathcal{B}$ kao linearnu formu koju promatramo u točki $\mathbf{x}$ i primjenjujemo na vektor $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}$.

Sad želimo naći eksplicitnu formulu za jedan mogući izbor funkcije $\mathcal{B}$. Označimo domenu

$$\mathbb{D} := \{(u, v, w, U, V, W) \in [0, \infty)^6 : u^p \leqslant U, v^q \leqslant V, w^r \leqslant W\}$$

i definirajmo funkciju $\mathcal{B} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ kao

$$\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) := \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}U + \frac{1}{q}V + \frac{1}{r}W\Big) - \mathcal{A}(u, v, w), \tag{3.8}$$

gdje je $\mathcal{A} : [0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$ dana s

$$\mathcal{A}(u, v, w) := \tag{3.9}$$
$$\begin{cases} Au^p + Bv^q + Cw^r; & u^p \leqslant w^r \leqslant v^q, \\ \frac{A(p-1)-C}{p-1}u^p + Bv^q + \frac{Cp}{p-1}uw^{r-\frac{r}{p}}; & w^r \leqslant u^p \leqslant v^q, \\ \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bp}{p-1}uv^{q-\frac{q}{p}} + \frac{Cp}{p-1}uw^{r-\frac{r}{p}}; & w^r \leqslant v^q \leqslant u^p, \\ \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bq}{2}uv^2w^{1-\frac{r}{q}} + \frac{2Cpr-Bp(q-r)}{2r(p-1)}uw^{r-\frac{r}{p}}; & v^q \leqslant w^r \leqslant u^p, \\ \frac{2Ar(p-1)-B(q+r)}{2r(p-1)}u^p + \frac{Bq^2}{2p(q-2)}u^{p-\frac{2p}{q}}v^2 + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}v^2w^{r-\frac{2r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r; & v^q \leqslant u^p \leqslant w^r, \\ Au^p + \frac{Bq}{p(q-2)}v^q + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}v^2w^{r-\frac{2r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r; & u^p \leqslant v^q \leqslant w^r. \end{cases}$$

Koeficijenti $A, B, C > 0$ će biti izabrani na odgovarajući način i ovisit će jedino o eksponentima p, q, r. U tom slučaju ćemo moći uzeti

$$\mathcal{C}_{p,q,r} = \max\{Ap, Bq, Cr\}.$$

Može se primijetiti da funkcija $\mathcal{A}$ u stvari ima sličan oblik kao Bellmanova funkcija koju su konstruirali Nazarov i Treil za problem Haarovih množitelja u [46] i koju u našoj notaciji možemo pisati kao

$$\mathcal{NT}(v, w) = A(v^q + w^r) + B \begin{cases} \frac{2}{q}v^q + \Big(\frac{2}{r} - 1\Big)w^r; & v^q \geqslant w^r, \\ v^2w^{2-r}; & v^q \leqslant w^r. \end{cases}$$

Ona odgovara rubnom slučaju $p = \infty$, $1 < r < 2 < q < \infty$. Umjesto jedne kritične krivljue $v^q = w^r$ za $\mathcal{NT}$, u našem slučaju postoje tri kritične plohe:

$$u^p = v^q, \quad u^p = w^r, \quad v^q = w^r. \tag{3.10}$$

Konačno smo spremni iskazati glavni teorem.

Teorem 3.2 Za eksponente p, q, r koji zadovoljavaju (3.4) moguće je izabrati koeficijente A, B, C takve da je funkcija $\mathcal{B}$ definirana s (3.8) klase C^1 na cijeloj domeni ($\mathcal{B}1$) i zadovoljava uvjete ($\mathcal{B}2$), ($\mathcal{B}3$) i ($\mathcal{B}4$).

Pod tvrdnjom da je $\mathcal{B}$ klase C^1 na cijeloj domeni podrazumijevamo da je funkcija $\mathcal{A}$ neprekidna na $[0,\infty)^3$, $\mathcal{A}$ je neprekidno diferencijabilna na $(0,\infty)^3$ i parcijalne derivacije od $\mathcal{A}$ se mogu neprekidno proširiti na $[0,\infty)^3$. U točkama ruba diferencijal $d\mathcal{B}$ u ($\mathcal{B}4$) interpretira se kao linearna forma čiji su koeficijenti već spomenuta neprekidna proširenja parcijalnih derivacija u toj točki.

Motivacija za pronalaženje eksplicitne Bellmanove funkcije (umjesto korištenja apstraktne) proizlazi iz činjenice da je u nekim kontekstima korisno znati baš eksplicitnu formulu. Na primjer, u [17] i [18] Carbonaro i Dragičević su koristili činjenicu da se eksplicitna Bellmanova funkcija sastoji od potencija. Još jedan izvor motivacije je taj da bismo htjeli naći direktan dokaz (ne koristeći argumente vremena zaustavljanja) ocjena za “zapetljani” paraprodukt kojeg je proučavao Kovač u [38] ili ocjena za “zapetljane” kvadrilinearne forme koje je razmatrala Durcik u [27] i [28]. Isto tako, možda bismo mogli i proširiti raspon eksponenata za normu varijacije ergodičkih usrednjenja obzirom na dvije komutirajuće transformacije u [29]. Jedino što se zasad može reći je da bi Bellmanova funkcija za bilo koji od gore navedenih problema morala u sebi imati na neki način implementiranu funkciju iz Teorema 3.2, jer su dijadski paraprodukti najjednostavniji multilinearni množitelji.

3.2 Dokaz Teorema 3.2

Dokaz Teorema 3.2 rastavit ćemo na nekoliko dijelova i pritom ćemo uvjete ($\mathcal{B}3$) i ($\mathcal{B}4$) svesti na odgovarajuće uvjete koje mora zadovoljavati funkcija $\mathcal{A}$. Krećemo s dvije propozicije koje nam rješavaju pitanje glatkoće i ograničenosti funkcije $\mathcal{B}$.

Propozicija 3.3 Funkcija $\mathcal{A} : [0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ definirana s (3.9) zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $\mathcal{A}$ je neprekidna na $[0,\infty)^3$;

(ii) $\mathcal{A}$ je neprekidno diferencijabilna na $(0,\infty)^3$;

(iii) parcijalne derivacije od $\mathcal{A}$ se mogu neprekidno proširiti na $[0,\infty)^3$.

Dokaz. Svojstvo (i) je lako provjeriti. Zaista, uočimo da su svi eksponenti koji se pojavljuju u definiciji od $\mathcal{A}$ pozitivni. Stoga je $\mathcal{A}$ očito dobro definirana funkcija i neprekidna na svakom od šest zatvorenih područja određenih s nejednakostima za varijable u, v, w. Treba se još samo provjeriti da su tih šest formula kojima je funkcija zadana kompatibilne na zajedničkim rubovima. Zbog jednostavnosti ćemo s $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_6$ označiti formule kojima je funkcija definiranana na tih šest zatvorenih područja.

(1) Rub između prvog i drugog zatvorenog područja je podskup krivulje $u^p = w^r$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_1\Big|_{u^p=w^r} = (A+C)u^p + Bv^q = \mathcal{A}_2\Big|_{u^p=w^r}.$$

(2) Rub između drugog i trećeg zatvorenog područja je podskup krivulje $u^p = v^q$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_2\Big|_{u^p=v^q} = \frac{(p-1)(A+B)-C}{p-1}u^p + \frac{Cp}{p-1}uw^{r-\frac{r}{p}} = \mathcal{A}_3\Big|_{u^p=v^q}.$$

(3) Rub između trećeg i četvrtog zatvorenog područja je podskup krivulje $v^q = w^r$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_3\Big|_{v^q=w^r} = \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{(B+C)p}{p-1}uv^{q-\frac{q}{p}} = \mathcal{A}_4\Big|_{v^q=w^r}.$$

(4) Rub između četvrtog i petog zatvorenog područja je podskup krivulje $u^p = w^r$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_4\Big|_{u^p=w^r} = \frac{2r(A+C)(p-1)-B(pq-pr+2r)}{2r(p-1)}u^p + \frac{Bq}{2}u^{p-\frac{2p}{q}}v^2 = \mathcal{A}_5\Big|_{u^p=w^r}.$$

(5) Rub između petog i šestog zatvorenog područja je podskup krivulje $u^p = v^q$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_5\Big|_{u^p=v^q} = \frac{Ap(q-2)+Bq}{p(q-2)}u^p + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}u^{\frac{2p}{q}}w^{r-\frac{2r}{p}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r = \mathcal{A}_6\Big|_{u^p=v^q}.$$

(6) Rub između šestog i prvog zatvorenog područja je podskup krivulje $v^q = w^r$ i vrijedi

$$\mathcal{A}_6\Big|_{v^q=w^r} = Au^p + (B+C)v^q = \mathcal{A}_1\Big|_{v^q=w^r}.$$

Time smo pokazali da su formule kojima je funkcija $\mathcal{A}$ zadana kompatibilne na zajedničkim rubovima, pa zaista možemo zaključiti da vrijedi (i).

Da bismo pokazali da vrijedi (ii) trebaju se izračunati parcijalne derivacije prvog reda na svakom od prethodno spomenutih šest područja.

(1) Prvo područje ($u^p < w^r < v^q$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial u}(u,v,w) = Apu^{p-1}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial v}(u,v,w) = Bqv^{q-1}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial w}(u,v,w) = Crw^{r-1}.$$

(2) Drugo područje ($w^r < u^p < v^q$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial u}(u,v,w) = \frac{Ap(p-1)-Cp}{p-1}u^{p-1} + \frac{Cp}{p-1}w^{r-\frac{r}{p}}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial v}(u,v,w) = Bqv^{q-1},$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial w}(u,v,w) = Cruw^{\frac{r}{q}}.$$

(3) Treće područje ($w^r < v^q < u^p$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial u}(u,v,w) = \frac{Ap(p-1)-(B+C)p}{p-1}u^{p-1} + \frac{Bp}{p-1}v^{q-\frac{q}{p}} + \frac{Cp}{p-1}w^{r-\frac{r}{p}},$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial v}(u,v,w) = Bquv^{\frac{q}{r}}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial w}(u,v,w) = Cruw^{\frac{r}{q}}.$$

(4) Četvrto područje ($v^q < w^r < u^p$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial u}(u,v,w) = \frac{Ap(p-1)-(B+C)p}{p-1}u^{p-1} + \frac{Bq}{2}v^2w^{1-\frac{r}{q}} + \frac{2Cpr-Bp(q-r)}{2r(p-1)}w^{r-\frac{r}{p}},$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial v}(u,v,w) = Bquvw^{1-\frac{r}{q}}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial w}(u,v,w) = \frac{B(q-r)}{2}uv^2w^{-\frac{r}{q}} + \frac{2Cr^2-Br(q-r)}{2r}uw^{\frac{r}{q}}.$$

(5) Peto područje ($v^q < u^p < w^r$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial u}(u,v,w) = \frac{2Apr(p-1)-B(q+r)}{2r(p-1)}u^{p-1} + \frac{Bq}{2}u^{\frac{p}{r}-\frac{p}{q}}v^2,$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial v}(u,v,w) = \frac{Bq^2}{p(q-2)}u^{p-\frac{2p}{q}}v + \frac{Bq(q-r)}{r(q-2)}vw^{r-\frac{2r}{q}},$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial w}(u,v,w) = \frac{B(q-r)}{2}v^2w^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2}w^{r-1}.$$

(5) Šesto područje ($u^p < v^q < w^r$):

$$\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial u}(u,v,w) = Apu^{p-1}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial v}(u,v,w) = \frac{Bq^2}{p(q-2)}v^{q-1} + \frac{Bq(q-r)}{r(q-2)}vw^{r-\frac{2r}{q}},$$
$$\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial w}(u,v,w) = \frac{B(q-r)}{2}v^2w^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2}w^{r-1}.$$

Vidimo da se gornje formule za parcijalne derivacije unutar bilo kojeg područja mogu neprekidno proširiti na cijeli otvoreni oktant $(0,\infty)^3$. Štoviše, te formule su kompatibilne, tj. podudaraju se na zajedničkom rubu svaka dva susjedna područja.

(1) Rub između prvog i drugog područja je podskup krivulje $u^p = w^r$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial u}\right|_{u^p=w^r} = Apu^{p-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial u}\right|_{u^p=w^r}, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial v}\right|_{u^p=w^r} = Bqv^{q-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial v}\right|_{u^p=w^r},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial w}\right|_{u^p=w^r} = Cru^{p-\frac{p}{r}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial w}\right|_{u^p=w^r}.$$

(2) Rub između drugog i trećeg područja je podskup krivulje $u^p = v^q$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial u}\right|_{u^p=v^q} = \frac{Ap(p-1)-Cp}{p-1}u^{p-1} + \frac{Cp}{p-1}w^{r-\frac{r}{p}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial u}\right|_{u^p=v^q}$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial v}\right|_{u^p=v^q} = Bqu^{p-\frac{p}{q}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial v}\right|_{u^p=v^q}, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial w}\right|_{u^p=v^q} = Cruw^{\frac{r}{q}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial w}\right|_{u^p=v^q}.$$

(3) Rub između trećeg i četvrtog područja je podskup krivulje $v^q = w^r$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial u}\right|_{v^q=w^r} = \frac{Ap(p-1)-(B+C)p}{p-1}u^{p-1} + \frac{(B+C)p}{p-1}v^{q-\frac{q}{p}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial u}\right|_{v^q=w^r},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial v}\right|_{v^q=w^r} = Bqu^{\frac{q}{r}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial v}\right|_{v^q=w^r}, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial w}\right|_{v^q=w^r} = Cruv = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial w}\right|_{v^q=w^r}.$$

(4) Rub između četvrtog i petog područja je podskup krivulje $u^p = w^r$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial u}\right|_{u^p=w^r} = \frac{2Apr(p-1)-Bp(q+r)}{2r(p-1)}u^p + \frac{Bq}{2}u^{\frac{p}{r}-\frac{p}{q}}v^2 = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial u}\right|_{u^p=w^r},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial v}\right|_{u^p=w^r} = Bqu^{p-\frac{2p}{q}}v = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial v}\right|_{u^p=w^r},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial w}\right|_{u^p=w^r} = \frac{B(q-r)}{2}u^{1-\frac{p}{q}}v^2 + \frac{2Cr-B(q-r)}{2}u^{1+\frac{p}{q}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial w}\right|_{u^p=w^r}.$$

(5) Rub između petog i šestog područja je podskup krivulje $u^p = v^q$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial u}\right|_{u^p=v^q} = Apu^{p-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial u}\right|_{u^p=v^q},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial v}\right|_{u^p=v^q} = \frac{Bq^2}{p(q-2)}u^{p-\frac{p}{q}} + \frac{Bq(q-r)}{r(q-2)}u^{\frac{p}{q}}w^{r-\frac{2r}{q}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial v}\right|_{u^p=v^q},$$
$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial w}\right|_{u^p=v^q} = \frac{B(q-r)}{2}u^{\frac{2p}{q}}w^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2}w^{r-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial w}\right|_{u^p=v^q}.$$

(6) Rub između šestog i prvog područja je podskup krivulje $v^q = w^r$ i vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial u}\right|_{v^q=w^r} = Apu^{p-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial u}\right|_{v^q=w^r}, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial v}\right|_{v^q=w^r} = Bqv^{q-1} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial v}\right|_{v^q=w^r},$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial w}\right|_{v^q=w^r} = Crv^{q-\frac{q}{r}} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial w}\right|_{v^q=w^r}.$$

Stoga možemo zaključiti da je funkcija $\mathcal{A}$ stvarno klase C^1 na $(0,\infty)^3$, tj. da vrijedi (ii).

Preostaje nam dokazati da vrijedi i svojstvo (iii), odnosno da postoji limes parcijalnih derivacija u svakoj točki ruba oktanta $[0,\infty)^3$.

Uočimo da su svi eksponenti koji se pojavljuju u parcijalnim derivacijama na prvom, drugom i trećem području pozitivni. Stoga je očito da postoji limes parcijalnih derivacija u svakoj točki ruba oktanta $[0,\infty)^3$. Na četvrtom, petom i šestom području su svi eksponenti koji se pojavljuju u parcijalnim derivacijama po u i po v pozitivni, pa također postoje traženi limesi. Dakle, problematične su jedino parcijalne derivacije po w na četvrtom, petom i šestom području. Očito su u tom slučaju jedine problematične točke one koje se nalaze na dijelu ruba koji leži u ravnini $w=0$, pa samo za njih moramo provjeriti egzistenciju limesa.

(1) Na četvrtom području je $0 < v^q < w^r < u^p$, pa vrijedi $\frac{v^q}{w^r} \leqslant 1$, i slijedi

$$\lim_{w\to 0} \frac{\partial \mathcal{A}_4}{\partial w}(u,v,w) = \lim_{w\to 0}\left(\frac{B(q-r)}{2} u w^{\frac{r}{q}} \left(\frac{v^q}{w^r}\right)^{\frac{2}{q}} + \frac{2Cr - B(q-r)}{2} u w^{\frac{r}{q}}\right) = 0.$$

(2) Na petom području je $0 < v^q < u^p < w^r$, a na šestom $0 < u^p < v^q < w^r$. Opet slijedi $\frac{v^q}{w^r} \leqslant 1$, pa je

$$\begin{aligned}\lim_{w\to 0} \frac{\partial \mathcal{A}_5}{\partial w}(u,v,w) &= \lim_{w\to 0} \frac{\partial \mathcal{A}_6}{\partial w}(u,v,w)\\ &= \lim_{w\to 0}\left(\frac{B(q-r)}{2}\left(\frac{v^q}{w^r}\right)^{\frac{2}{q}} w^{\frac{r}{p}+\frac{r}{q}} + \frac{2Cr - B(q-r)}{2} w^{r-1}\right) = 0.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da se sve parcijalne derivacije mogu neprekidno proširiti i na cijeli zatvoreni oktant $[0,\infty)^3$, čime je dokaz propozicije završen. □

Propozicija 3.4 Funkcija $\mathcal{A}$ zadovoljava

$$0 \leqslant \mathcal{A}(u,v,w) \leqslant Au^p + Bv^q + Cw^r \tag{$\mathcal{A}2$}$$

za sve $A, B, C \geqslant 0$.

Dokaz. Lijeva nejednakost u ($\mathcal{A}2$) slijedi zbog nenegativnosti varijabli u, v, w, a desna nejednakost se jednostavno pokaže primjenom Youngove nejednakosti. Za $u^p \leqslant w^r \leqslant v^q$, imamo

$$\mathcal{A}(u,v,w) = Au^p + Bv^q + Cw^r.$$

Za $w^r \leqslant u^p \leqslant v^q$, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,v,w) &= \frac{A(p-1)-C}{p-1}u^p + Bv^q + \frac{Cp}{p-1}uw^{r-\frac{r}{p}} \\ &\leqslant \frac{A(p-1)-C}{p-1}u^p + Bv^q + \frac{Cp}{p-1}\Big(\frac{1}{p}u^p + \frac{p-1}{p}w^r\Big).\end{aligned}$$

Za $w^r \leqslant v^q \leqslant u^p$, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,v,w) &= \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bp}{p-1}uv^{q-\frac{q}{p}} + \frac{Cp}{p-1}uw^{r-\frac{r}{p}} \\ &\leqslant \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bp}{p-1}\Big(\frac{1}{p}u^p + \frac{p-1}{p}v^q\Big) + \frac{Cp}{p-1}\Big(\frac{1}{p}u^p + \frac{p-1}{p}w^r\Big).\end{aligned}$$

Za $v^q \leqslant w^r \leqslant u^p$, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,v,w) &= \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bq}{2}uv^2w^{1-\frac{r}{q}} + \frac{2Cpr-Bp(q-r)}{2r(p-1)}uw^{r-\frac{r}{p}} \\ &\leqslant \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1}u^p + \frac{Bq}{2}\Big(\frac{1}{p}u^p + \frac{2}{q}v^q + \frac{q-r}{qr}w^r\Big) \\ &\quad + \frac{2Cpr-Bp(q-r)}{2r(p-1)}\Big(\frac{1}{p}u^p + \frac{p-1}{p}w^r\Big).\end{aligned}$$

Za $v^q \leqslant u^p \leqslant w^r$, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,v,w) &= \frac{2Ar(p-1)-B(q+r)}{2r(p-1)}u^p + \frac{Bq^2}{2p(q-2)}u^{p-\frac{2p}{q}}v^2 + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}v^2w^{r-\frac{2r}{q}} \\ &\quad + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r \\ &\leqslant \frac{2Ar(p-1)-B(q+r)}{2r(p-1)}u^p + \frac{Bq^2}{2p(q-2)}\Big(\frac{q-2}{q}u^p + \frac{2}{q}v^q\Big) \\ &\quad + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}\Big(\frac{2}{q}v^q + \frac{q-2}{q}w^r\Big) + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r.\end{aligned}$$

I na kraju za $u^p \leqslant v^q \leqslant w^r$, imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u,v,w) &= Au^p + \frac{Bq}{p(q-2)}v^q + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}v^2w^{r-\frac{2r}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r \\ &\leqslant Au^p + \frac{Bq}{p(q-2)}v^q + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)}\Big(\frac{2}{q}v^q + \frac{q-2}{q}w^r\Big) + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r}w^r.\end{aligned}$$

Sređivanjem gornjih izraza dobijemo nejednakost ($\mathcal{A}2$). □

Uočimo sad da je svojstvo ($\mathcal{B}3$) ekvivaletno s

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(u_1,v_1,w_1) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(u_2,v_2,w_2) - \mathcal{A}(u,v,w) \geqslant \frac{1}{2}(u_1+u_2)\frac{|v_1-v_2|}{2}\frac{|w_1-w_2|}{2}, \tag{$\mathcal{A}3$}$$

gdje su (u, v, w), (u_1, v_1, w_1) i (u_2, v_2, w_2) iz $[0, \infty)^3$ za koje vrijedi

$$(u, v, w) = \frac{1}{2}(u_1, v_1, w_1) + \frac{1}{2}(u_2, v_2, w_2), \tag{3.11}$$

dok je svojstvo ($\mathcal{B}4$) ekvivaletno s

$$\mathcal{A}(u_1, v_1, w_1) \geqslant \mathcal{A}(u, v, w) + (d\mathcal{A})(u, v, w)(u_1 - u, v_1 - v, w_1 - w) + \frac{2}{3}u|v_1 - v||w_1 - w|, \tag{$\mathcal{A}4$}$$

gdje su (u, v, w) i (u_1, v_1, w_1) iz $[0, \infty)^3$. Umjesto da dokazujemo ($\mathcal{A}3$) i ($\mathcal{A}4$) direktno, dalje ćemo ih reducirati na nejednakosti među kvadratnim formama.

Neka je $(u, v, w) \in (0, \infty)^3$ točka koja ne leži niti na jednoj od tri kritične plohe (3.10). U tom slučaju je funkcija $\mathcal{A}$ klase C^2 na nekoj otvorenoj kugli oko te točke. Uzmimo proizvoljne dvije točke (u_1, v_1, w_1) i (u_2, v_2, w_2) iz te otvorene kugle takve da (3.11) vrijedi i uvedimo supstitucije

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2},\ \Delta u = \frac{u_1 - u_2}{2},\ v = \frac{v_1 + v_2}{2},\ \Delta v = \frac{v_1 - v_2}{2},\ w = \frac{w_1 + w_2}{2},\ \Delta w = \frac{w_1 - w_2}{2}.$$

Zbrajanjem Taylorovih formula u točki (u, v, w) za $\mathcal{A}(u \pm \Delta u, v \pm \Delta v, w \pm \Delta w)$ iz ($\mathcal{A}3$) dobivamo infinitezimalnu verziju tog svojstva:

$$(d^2\mathcal{A})(u, v, w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w) \geqslant 2u|\Delta v||\Delta w|. \tag{$\mathcal{A}3'$}$$

Ovdje $d^2\mathcal{A}$ označava drugi diferencijal od $\mathcal{A}$ kao kvadratnu formu, koju promatramo u točki (u, v, w) i primjenjujemo na vektor $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$. Uočimo da ($\mathcal{A}3'$) ne vrijedi na cijeloj domeni funkcije $\mathcal{A}$, koja je $[0, \infty)^3$, ali vrijedi na svih šest područja na koja tri kritične plohe dijele otvoreni oktant $(0, \infty)^3$.

Obratno, ($\mathcal{A}3'$) povlači ($\mathcal{A}3$), tj. dvije nejednakosti su ekvivaletne za neprekidno diferencijabilne funkcije, što slijedi iz konveksnosti domene. Da bismo to pokazali, korisna će nam biti sljedeća lema.

Lema 3.5 Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 takva da je f' apsolutno neprekidna na $[a, b]$. Tada je

$$\int_a^b (1 \pm t) f''(t) dt = (1 \pm b) f'(b) - (1 \pm a) f'(a) \mp f(b) \pm f(a).$$

Dokaz. Primjenom parcijalne integracije (u varijanti za apsolutno neprekidne funkcije; vidi [20]) i Newton-Leibnizove formule slijedi

$$\int_a^b (1 \pm t) f''(t) dt = \left\{ \begin{array}{lll} u = 1 \pm t & \Longrightarrow & du = \pm dt \\ dv = f''(t) dt & \Longrightarrow & v = f'(r) \end{array} \right\} = (1 \pm t) f'(t)\Big|_a^b \mp \int_a^b f'(t) dt$$

$$= (1 \pm b)f'(b) - (1 \pm a)f'(a) \mp f(b) \pm f(a),$$

što nam daje traženu jednakost. $\square$

Propozicija 3.6 Ako funkcija $\mathcal{A}$ zadovoljava nejednakost ($\mathcal{A}3'$), tada zadovoljava i nejednakosti ($\mathcal{A}3$) i ($\mathcal{A}4$) na otvorenom oktantu $(0, \infty)^3$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu točku $(u, v, w) \in (0, \infty)^3$ i vektor $(\Delta u, \Delta v, \Delta w) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $(u \pm \Delta u, v \pm \Delta v, w \pm \Delta w) \in (0, \infty)^3$. Sada definiramo funkciju $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ kao

$$\alpha(t) := \mathcal{A}(u + t\Delta u, v + t\Delta v, w + t\Delta w). \tag{3.12}$$

Budući da je prema Propoziciji 3.3 funkcija $\mathcal{A}$ klase C^1 na $(0, \infty)^3$, i funkcija α je neprekidno diferencijabilna na $[-1, 1]$. Štoviše, α je i po dijelovima klase C^2 na $[-1, 1]$. To slijedi zbog toga što je funkcija $\mathcal{A}$ klase C^2 na $(0, \infty)^3$ bez kritičnih ploha (3.10), ima ograničene parcijalne derivacije drugog reda kad se odmaknemo od koordinatnih ravnina $u = 0$, $v = 0$ i $w = 0$ i segment $\{(u + t\Delta u, v + t\Delta v, w + t\Delta w) : t \in [-1, 1]\}$ siječe tri kritične plohe u konačno mnogo točaka.

Ako označimo te točke s $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, tada primjenom Leme 3.5 i teleskopiranjem dobijemo

$$\frac{1}{2}\alpha(-1) + \frac{1}{2}\alpha(1) - \alpha(0) = \frac{1}{2}\int_{[-1,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1 - |t|)\alpha''(t)dt, \tag{3.13}$$

gdje smo s $\int_{[-1,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}}$ označili zbroj integrala

$$\int_{-1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \cdots + \int_{t_n}^{1}.$$

Iz (3.13) sada zaključujemo da je

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathcal{A}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(u - \Delta u, v - \Delta v, w - \Delta w) - \mathcal{A}(u, v, w) \\ &= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1 - |t|)(d^2\mathcal{A})(u + t\Delta u, v + t\Delta v, w + t\Delta w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w)dt. \end{aligned}$$

Konačno, iz ($\mathcal{A}3'$) slijedi da je zadnji izraz barem

$$\frac{1}{2}\int_{[-1,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1 - |t|)2(u + t\Delta u)|\Delta v||\Delta w|dt = u|\Delta v||\Delta w|,$$

što nam daje točno ($\mathcal{A}3$).

Na sličan način ćemo dokazati da vrijedi i ($\mathcal{A}4$). Opet uzmemo proizvoljnu točku $(u, v, w) \in (0, \infty)^3$ i vektor $(\Delta u, \Delta v, \Delta w) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) \in (0, \infty)^3$. Definiramo $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ opet formulom (3.12). Primjenom Leme 3.5 i teleskopiranjem dobijemo da vrijedi identitet

$$\alpha(1) = \alpha(0) + \alpha'(0) + \int_{[0,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1-t)\alpha''(t)dt,$$

i stoga je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) &= \mathcal{A}(u,v,w) + (d\mathcal{A})(u,v,w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w)\\ &+ \int_{[0,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1-t)(d^2\mathcal{A})(u+t\Delta u, v+t\Delta v, w+t\Delta w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w)dt.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Budući da je

$$u + t\Delta u = (1-t)u + t(u+\Delta u) \geqslant (1-t)u, \tag{3.15}$$

primjena gornje nejednakosti i nejednakosti ($\mathcal{A}3'$) nam daje

$$\begin{aligned}&\int_{[0,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1-t)(d^2\mathcal{A})(u+t\Delta u, v+t\Delta v, w+t\Delta w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w)dt\\ &\overset{(\mathcal{A}3')}{\geqslant} \int_{[0,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} (1-t)2(u+t\Delta u)|\Delta v||\Delta w|dt\\ &\overset{(3.15)}{\geqslant} \int_{[0,1]\setminus\{t_1,\ldots,t_n\}} 2(1-t)^2 u|\Delta v||\Delta w|dt = \frac{2}{3}u|\Delta v||\Delta w|,\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi integriranjem po t. Sad iz prethodnog računa i (3.14) zaključujemo da je

$$\mathcal{A}(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) \geqslant \mathcal{A}(u,v,w) + (d\mathcal{A})(u,v,w)(\Delta u, \Delta v, \Delta w) + \frac{2}{3}u|\Delta v||\Delta w|,$$

što je točno ($\mathcal{A}4$). □

Napomena 3.7 Na ovaj način smo dokazali da ($\mathcal{A}3'$) povlači ($\mathcal{A}3$) i ($\mathcal{A}4$), ali samo na otvorenom oktantu $(0,\infty)^3$. Da vidimo da te dvije nejednakosti tada vrijede i na $[0,\infty)^3$ moramo samo proširiti dobivene nejednakosti po neprekidnosti od $\mathcal{A}$ i $d\mathcal{A}$. Već smo komentirali da u točkama ruba diferencijal $d\mathcal{A}$ interpretiramo kao linearnu formu čiji su koeficijenti neprekidna proširenja parcijalnih derivacija u toj točki. ■

Preostalo nam je samo dokazati da funkcija $\mathcal{A}$ zadovoljava ($\mathcal{A}3'$), što ćemo napraviti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.8 Funkcija $\mathcal{A}$ definirana s (3.9) zadovoljava ($\mathcal{A}3'$).

Dokaz. Da bi vrijedilo ($\mathcal{A}3'$), dovoljno je dokazati da su matrice

$$\begin{bmatrix} \partial_u^2\mathcal{A} & \partial_u\partial_v\mathcal{A} & \partial_u\partial_w\mathcal{A} \\ \partial_u\partial_v\mathcal{A} & \partial_v^2\mathcal{A} & \partial_v\partial_w\mathcal{A} \pm u \\ \partial_u\partial_w\mathcal{A} & \partial_v\partial_w\mathcal{A} \pm u & \partial_w^2\mathcal{A} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

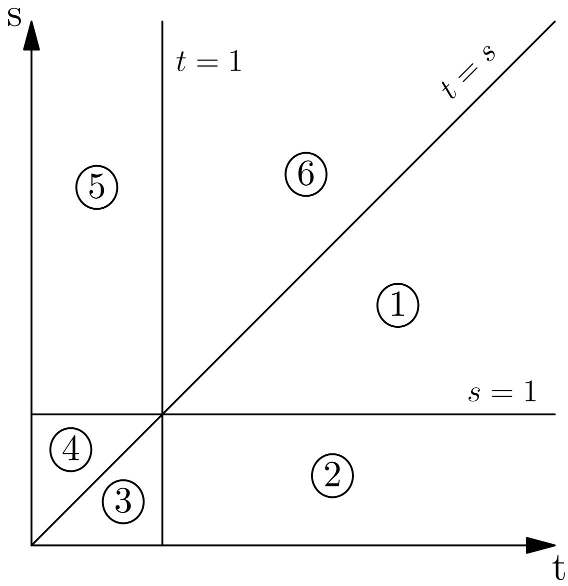
pozitivno semidefinitne na svakom od šest područja na koja kritične plohe (3.10) dijele otvoreni oktant $(0,\infty)^3$. Da bismo to dokazali koristit ćemo Sylvesterov kriterij i pokazati da su sve tri glavne minore matrica pozitivne. Preciznije, pokazat ćemo da je moguće izabrati konstante A, B, C tako da to vrijedi.

Račun se može malo pojednostaviti uvođenjem supstitucija $t = \frac{v^q}{u^p}$, $s = \frac{w^r}{u^p}$ i uočavanjem da je

$$\mathcal{A}(u,v,w) = u^p \gamma(t,s), \tag{3.17}$$

gdje je $\gamma : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$\gamma(t,s) = \begin{cases} A + Bt + Cs; & 1 \leqslant s \leqslant t, \\ \frac{A(p-1)-C}{p-1} + Bt + \frac{Cp}{p-1} s^{1-\frac{1}{p}}; & s \leqslant 1 \leqslant t, \\ \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1} + \frac{Bp}{p-1} t^{1-\frac{1}{p}} + \frac{Cp}{p-1} s^{1-\frac{1}{p}}; & s \leqslant t \leqslant 1, \\ \frac{A(p-1)-(B+C)}{p-1} + \frac{Bq}{2} t^{\frac{2}{q}} s^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} + \frac{2Cpr-Bp(q-r)}{2r(p-1)} s^{1-\frac{1}{p}}; & t \leqslant s \leqslant 1, \\ \frac{2Ar(p-1)-B(q+r)}{2r(p-1)} + \frac{Bq^2}{2p(q-2)} t^{\frac{2}{q}} + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)} t^{\frac{2}{q}} s^{1-\frac{2}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r} s; & t \leqslant 1 \leqslant s, \\ A + \frac{Bq}{p(q-2)} t + \frac{Bq(q-r)}{2r(q-2)} t^{\frac{2}{q}} s^{1-\frac{2}{q}} + \frac{2Cr-B(q-r)}{2r} s; & 1 \leqslant t \leqslant s. \end{cases}$$



Slika 3.2: Šest područja određenih nejednakostima za varijable t i s.

Uvrštavnjem (3.17) u (3.16) i množenjem obje strane dijagonalnom matricom

$$\begin{bmatrix} u^{1-p/2} & 0 & 0 \\ 0 & u^{p/q-p/2} & 0 \\ 0 & 0 & u^{p/r-p/2} \end{bmatrix}$$

dobijamo matrice $M = (m_{ij})$, čiji su elementi

$$m_{11} = p(p-1)\gamma(t,s) - p(p-1)t\partial_t \gamma(t,s) - p(p-1)s\partial_s \gamma(t,s),$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2p^2 ts\partial_t\partial_s\gamma(t,s) + p^2t^2\partial_t^2\gamma(t,s) + p^2s^2\partial_s^2\gamma(t,s),\\
m_{12} &= m_{21} = -pqt^{1-\frac{1}{q}}s\partial_t\partial_s\gamma(t,s) - pqt^{2-\frac{1}{q}}\partial_t^2\gamma(t,s),\\
m_{13} &= m_{31} = -prts^{1-\frac{1}{r}}\partial_t\partial_s\gamma(t,s) - prs^{2-\frac{1}{r}}\partial_s^2\gamma(t,s),\\
m_{22} &= q(q-1)t^{1-\frac{2}{q}}\partial_t\gamma(t,s) + q^2t^{2-\frac{2}{q}}\partial_t^2\gamma(t,s),\\
m_{23} &= m_{32} = qrt^{1-\frac{1}{q}}s^{1-\frac{1}{r}}\partial_t\partial_s\gamma(t,s) \pm 1,\\
m_{33} &= r(r-1)s^{1-\frac{2}{r}}\partial_s\gamma(t,s) + r^2s^{2-\frac{2}{r}}\partial_s^2\gamma(t,s),
\end{aligned}
$$

i problem smo reducirali na provjeru da su gornje matrice zaista pozitivno definitne na svakom šest područja određenih nejednakostima za t i s prikazanima na Slici 3.2. Prvo ćemo izračunati tri glavne minore gornjih matrica za svako područje, a zatim ćemo objasniti zašto možemo izabrati koeficijente A, B, C tako da sve one budu pozitivne.

Sljedeći izrazi izračunati su korištenjem softwarea Mathematica [60].

(1) Prvo područje: $1 < s < t$

- Prva minora: $\boxed{Ap(p-1)}$
- Druga minora: $\boxed{ABp(p-1)q(q-1)t^{1-\frac{2}{q}}}$
- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{ABCp(p-1)q(q-1)r(r-1)t^{1-\frac{2}{q}}s^{1-\frac{2}{r}}} - Ap(p-1)$$

(2) Drugo područje: $s < 1 < t$

- Prva minora: $\boxed{p(A(p-1)-C)}$
- Druga minora: $\boxed{Bp(A(p-1)-C)q(q-1)t^{1-\frac{2}{q}}}$
- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{BCp(A(p-1)-C)(q-1)r^2t^{1-\frac{2}{q}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}} - BC^2q(q-1)r^2t^{1-\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{q}} - p(A(p-1)-C)$$

(3) Treće područje: $s < t < 1$

- Prva minora: $\boxed{p(A(p-1)-B-C)}$
- Druga minora:

$$\boxed{\frac{Bp(A(p-1)-B-C)q^2}{r}t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}} - B^2q^2t^{\frac{2}{r}}$$

- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{BCp(Ap(q+r)-qr(B+C))t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}} - B^2Cqr^2t^{\frac{2}{r}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} - BC^2q^2rt^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}s^{\frac{2}{q}}$$
$$-p(A(p-1)-B-C) \pm 2BCqrt^{\frac{1}{r}}s^{\frac{1}{q}}$$

(4) Četvrto područje: $t < s < 1$

- Prva minora: $\boxed{p(A(p-1)-B-C)}$
- Druga minora: $\boxed{Bp(A(p-1)-B-C)qs^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}} - B^2q^2t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{r}-\frac{2}{q}}$
- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{\frac{1}{2}(A(p-1)-B-C)\Big(Bpr(2Cr-B(q-r))-2p\Big)} - \frac{1}{4}Bq(2Cr-B(q-r))^2 s^{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}$$
$$-\frac{1}{2}B^2p(A(p-1)-B-C)(q-r)(2q-r)t^{\frac{2}{q}}s^{-\frac{2}{q}} \pm Bq(2Cr-B(q-r))t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{r}}$$
$$\mp 2Bp(A(p-1)-B-C)(q-r)t^{\frac{1}{q}}s^{-\frac{1}{q}} + \frac{1}{4}B^3q(q-r)(3q-r)t^{\frac{4}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{3}{q}}$$
$$+\frac{1}{2}B^2q(2Cr-B(q-r))(q-2r)t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \pm B^2q(q-r)t^{\frac{3}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{2}{q}}$$

(5) Peto područje: $t < 1 < s$

- Prva minora:

$$\boxed{\frac{p(2Ar(p-1)-B(q+r))}{2r}} + \frac{Bp(q-r)}{2r}t^{\frac{2}{q}}$$

- Druga minora:

$$\boxed{\frac{Bpq(q-r)(2Ar(p-1)-B(q+r))}{2r^2(q-2)}s^{1-\frac{2}{q}}} - \frac{B^2q^2(pq+q-2p)}{2p(q-2)}t^{\frac{2}{q}} + \frac{B^2pq(q-r)^2}{2r^2(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{1-\frac{2}{q}}$$
$$+\boxed{\frac{Bq^2(2Ar(p-1)-B(q+r))}{2r(q-2)}}$$

- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{\frac{B(q-r)(p+q)(2Ar(p-1)-B(q+r))(2Cr-B(q-r))}{4r(q-2)}s^{\frac{2}{p}}} - \frac{Bp(q-r)}{2r}t^{\frac{2}{q}}$$
$$+\boxed{\frac{B(2Ar(p-1)-B(q+r))(2Cr-B(q-r))q^2(r-1)}{4r(q-2)}s^{1-\frac{2}{r}}}$$
$$\mp\frac{B^2p(q-r)^2}{r}t^{\frac{3}{q}}s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \frac{B^2(q-r)^2(2Ar(p-1)-B(q+r))(2pq-3p-q)}{4r(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}$$
$$-\frac{B^3p(q-r)^3(qr-2r+q)}{4r^2(q-2)}t^{\frac{4}{q}}s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}} - \frac{B^2q^2(pq-2p+q)(r-1)(2Cr-B(q-r))}{4p(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{1-\frac{2}{r}}$$
$$-\frac{B^3qr(pq-2p+q)(q-r)(q-p)}{4p^2(q-2)}t^{\frac{4}{q}}s^{\frac{2}{p}-1} + \frac{B^2pq(q-r)^2(r-1)(2Cr-B(q-r))}{4r^2(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{p}}$$
$$\mp\frac{Bp(q-r)(2Ar(p-1)-B(q+r))}{r}t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \frac{p(2Ar(p-1)-B(q+r))}{2r}$$
$$+\frac{B^2q(q-r)(q-p)(2Ar(p-1)-B(q+r))}{4p(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{p}-1}$$

(6) Šesto područje: $1 < t < s$

- Prva minora: $\boxed{\boxed{Ap(p-1)}}$
- Druga minora:

$$\boxed{\boxed{\frac{ABpq(p-1)(q-r)}{r(q-2)}s^{1-\frac{2}{q}}}} + \boxed{\frac{ABq^2(p-1)(q-1)}{q-2}t^{1-\frac{2}{q}}}$$

- Determinante (s $\pm$):

$$\boxed{\boxed{\frac{AB(2Cr-B(q-r))(p-1)(q-r)(p+q)}{2(q-2)}s^{\frac{2}{p}}}} \mp 2ABp(p-1)(q-r)t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$
$$-\frac{AB^2qr(p-1)(q-1)(q-r)(p-q)}{2p(q-2)}ts^{\frac{2}{p}-1} - \frac{AB^2(p-1)(q-r)^2(2pq-3p-q)}{2(q-2)}t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}$$
$$+\boxed{\frac{AB(2Cr-B(q-r))qr(p-1)(q-1)(p+q)}{2p(q-2)}t^{1-\frac{2}{q}}s^{1-\frac{2}{r}}} - Ap(p-1)$$

U svakom od gornjih izraza postoji dominantan član (gledajući prema eksponentima od t i s) koji je jedinstven i on je dvostruko uokviren. Izabrat ćemo proizvoljan B (recimo $B = 1$), a zatim uzeti C dovoljno velik (koji ovisi o B, p, q, r) i konačno A dovoljno velik (koji ovisi o C, B, p, q, r). Dok to radimo, vodit ćemo računa o tome da je koeficijent u dvostruko uokvirenom članu veći od sume apsolutnih vrijednosti koeficijenta članova koji nisu niti uokvireni niti zaokruženi.

To možemo napraviti jer uzimanjem dovoljno velikog C izraz koji množi A u koeficijentu dominantnog člana postaje veći od sume apsolutnih vrijednosti odgovarajućih izraza u ostalim neuokvirenim i nezaokruženim članovima koji sadrže A. Posljedično, kad puštamo da A teži u beskonačnost koeficijent u dominantnom članu raste brže nego suma apsolutnih vrijednosti drugih koeficijenta u članovima koji nisu niti uokvireni niti zaokruženi. To znači da možemo izabrati dovoljno velik A tako da dominantan član zaista dominira sumu svi ostalih neuokvirenih i nezaokruženih članova u svakom izrazu.

Jedini problematični članovi koje ne možemo dominirati dominantnim članom su oni zaokruženi. Međutim, ako uzmemo

$$C \geqslant \frac{B(q-r)}{2r} \quad \text{i} \quad A \geqslant \frac{B(q+r)}{2r(p-1)}$$

možemo postići da su svi oni nenegativni, pa samo pridonose pozitivnosti izraza.

Malo ćemo detaljnije objasniti prethodno opisani način zaključivanja, tj. kako izabrati koeficijente A, B i C. Uzet ćemo da je $B = 1$ pa vidjeti kakvi trebaju biti C i A na svakom području.

Prvo područje: Prva i druga minora imaju samo jedan član i očito su pozitivne. U determinantama je dvostruko uokvireni član zaista dominantan, jer iz $1 < s < t$

slijedi $t^{1-\frac{2}{q}}s^{1-\frac{2}{r}} > 1$. Dovoljno je uzeti C takav da je $Cq(q-1)r(r-1) > 1$, pa će determinante biti pozitivne.

Drugo područje: Opet prva i druga minora imaju samo jedan član i bit će pozitivne čim je $A(p-1) > C$. Budući da je $s < 1 < t$ vrijedi $t^{1-\frac{2}{q}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} > t^{1-\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{q}}$ i $t^{1-\frac{2}{q}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} > 1$, pa opet vidimo da je dvostruko uokvireni član dominantan u determinantama. Ako uzmemo dovoljno velike C i A takve da je

$$C(q-1) > 2 \quad \text{i} \quad Ap(p-1) > C(p+2q),$$

dominantan član će biti dva puta veći od svakog od preostalih članova, pa će i cijela determinanta biti pozitivna.

Treće područje: Ako uzmemo A takav da je $Ap(p-1) > Cp + p + r$, prva minora će očito biti pozitivna. Zbog $t < 1$ je $t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} > t^{\frac{2}{r}}$, pa slijedi i pozitivnost druge minore. Na trećem području je $s < t < 1$, pa je

$$t^{\frac{1}{r}}s^{\frac{1}{q}},\ 1,\ t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}s^{\frac{2}{q}},\ t^{\frac{2}{r}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\ <\ t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}},$$

što znači da je dvostruko uokvireni član dominantan u determinanti. Ako uzmemo C takav da je $Cqr > 4$, onda je $Cp^2(q+r) > 4p(p-1)$, tj. izraz koji množi A u koeficijentu dominantnog člana je četiri puta veći od izraza koji množi A u koeficijentu jedinog drugog člana koji sadrži A. Koeficijenti preostala tri člana ni ne sadrže A, pa možemo uzeti A dovoljno velik tako da dominantni član bude četiri puta veći od bilo kojeg drugog člana, tj. da dominira sumu preostalih članova. Tako postižemo pozitivnost determinante.

Četvrto područje: Za A takav da je $Ap(p-1) > Cp + p + q$ će prva i druga minora biti pozitivne, jer je na četvrtom području $s^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} > t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{2}{r}-\frac{2}{q}}$. Nadalje, uočimo da je dvostruko uokvireni član zaista dominantan u determinanti, jer iz $t < s < 1$ slijedi

$$s^{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}},\ t^{\frac{1}{q}}s^{-\frac{1}{q}},\ t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{r}},\ t^{\frac{2}{q}}s^{-\frac{2}{q}},\ t^{\frac{2}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}},\ t^{\frac{3}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{2}{q}},\ t^{\frac{4}{q}}s^{\frac{1}{r}-\frac{3}{q}}\ <\ 1 = t^0 s^0.$$

Možemo uzeti dovoljno velik C takav da je

$$r(2Cr-q+r) > 28(q-r)+2 \quad \text{i} \quad r(2Cr-q+r) > 7(q-r)(2q-r)+2.$$

Na taj način je izraz koji množi A u koeficijentu dominatnog člana sedam puta veći od izraza koji množi A u koeficijentima dva druga člana koja sadrže A. Koeficijenti preostalih pet članova uopće i ne sadrže A, pa očito možemo uzeti dovoljno velik A tako da dominantni član bude sedam puta veći od bilo kojeg drugog člana. Na taj način će dominantni član biti veći od sume preostalih članova, tj. determinanta će biti pozitivna.

Peto područje: Zbog $t < 1$ je $t^{\frac{2}{q}} < 1$, pa je dovoljno uzeti A takav da je $Ar(p-1) > q$ da bi prva minora bila pozitivna. U drugoj minori je dvostruko uokvireni član dominantan, jer je na petom području $s^{\frac{1}{q}} > t^{\frac{2}{q}}, t^{\frac{2}{q}} s^{1-\frac{2}{q}}, 1$. Ako uzmemo A takav da je

$$2Ar(p-1) > \frac{2qr^2(pq+q-2p) + p^2(q^2-r^2)}{p^2(q-r)} \quad \text{i} \quad 2Ar(p-1) > 3q - r,$$

dominantan član će biti dvostruko veći od preostala dva člana koja nisu zaokružena. Budući da možemo postići da je zaokruženi član nenegativan, minora će biti pozitivna.

Preostaje nam provjeriti pozitivnost determinante. Vidimo da je dvostruko uokvireni član dominantan jer zbog $t < 1 < s$ vrijedi

$$t^{\frac{2}{q}},\ s^{1-\frac{2}{r}},\ t^{\frac{3}{q}} s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\ t^{\frac{2}{q}} s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}},\ t^{\frac{4}{q}} s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}},\ t^{\frac{2}{q}} s^{1-\frac{2}{r}},\ t^{\frac{4}{q}} s^{\frac{2}{p}-1},\ t^{\frac{2}{q}} s^{\frac{2}{p}},\ t^{\frac{1}{q}} s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\ t^{\frac{2}{q}} s^{\frac{2}{p}-1},\ 1 \ <\ s^{\frac{2}{p}}.$$

Dovoljno je uzeti C takav da je

$$\begin{aligned}(2Cr - q + r)(p+q) > \max\Big\{ & 10(q-r)|2pq - 3p - q|,\ \frac{10qr|q-p|}{p}, \\ & 40p(q-2),\ \frac{20p(q-2)}{q-r} \Big\},\end{aligned}$$

da bi izraz koji množi A u koeficijentu dominantnog člana bio deset puta veći od izraza koji množi A u koeficijentima četiri druga člana koja sadrže A (i nisu zaokružena). Koeficijenti preostalih šest članova koji nisu zaokruženi uopće ne sadrže A, pa očito možemo uzeti dovoljno velik A tako da dominantni član bude deset puta veći od bilo kojeg drugog nezaokruženog člana. Budući da možemo postići da je zaokruženi član nenegativan i da je dominantni član veći od sume nezaokruženih članova, determinanta će biti pozitivna.

Šesto područje: Očito su prva i druga minora pozitivne. Opet se lako vidi da je u determinanti dvostruko uokvireni član dominantan, jer je

$$t^{\frac{1}{q}} s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\ ts^{\frac{2}{p}-1},\ t^{\frac{2}{q}} s^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}},\ t^{1-\frac{2}{q}} s^{1-\frac{2}{r}},\ 1 \ <\ s^{\frac{2}{q}},$$

zbog $1 < t < s$. Uzet ćemo dovoljno veliki C takav da je

$$\begin{aligned}(2Cr - q + r)(p+q) > \max\Big\{ & 16p(q-2),\ \frac{4qr(q-1)|p-q|}{p}, \\ & 4(q-r)|2pq - 3p - q|,\ \frac{8p(q-2)}{q-r} \Big\}.\end{aligned}$$

Tako ćemo dobiti da je izraz koji množi A u koeficijentu dominatnog člana četiri puta veći od izraza koji množi A u koeficijentima preostala četiri člana koja nisu zaokružena. Ako uzmemo dovoljno velik A, moći ćemo postići da dominantan član bude četiri puta veći od bilo kojeg neuokvirenog i nezaokruženog člana. Budući da nam odgovarajući izbor A i C daje i nenegativnost zaokruženog člana, cijela determinanta je pozitivna.

Konačno, trebamo odabrati dovoljno veliki C, pa zatim dovoljno veliki A (u ovisnosti o C) tako da odgovarajuće nejednakosti na svakom od šest područja budu zadovoljene. Tako se postiže pozitivnost svakog izraza, što je točno ono što smo trebali i time je dokaz svojstva ($\mathcal{A}3'$) završen. □

Iz prethodno navedenih Propozicija sada lako slijedi i dokaz Teorema 3.2.

Dokaz Teorema 3.2. Iz Propozicije 3.3 slijedi da je funkcija $\mathcal{B}$ klase C^1 na cijeloj domeni ($\mathcal{B}1$). Ocjena ($\mathcal{B}2$) slijedi direktno iz definicije funkcije $\mathcal{B}$ i svojstva ($\mathcal{A}2$) (Propozicija 3.4). Nenegativnost od $\mathcal{B}$ na $\mathbb{D}$ je garantirana ako je

$$\mathcal{C}_{p,q,r} \geqslant \max\{Ap,\ Bq,\ Cr\},$$

jer je u tom slučaju

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(u,v,w,U,V,W) &= \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}U + \frac{1}{q}V + \frac{1}{r}W\Big) - \mathcal{A}(u,v,w) \\
&\geqslant AU + BV + CW - \mathcal{A}(u,v,w) \\
&\geqslant Au^p + Bv^q + Cw^r - \mathcal{A}(u,v,w) \overset{(\mathcal{A}2)}{\geqslant} 0.
\end{aligned}$$

Konačno, iz Propozicija 3.4 i 3.6 te Napomene 3.7 slijedi da $\mathcal{A}$ zadovoljava ($\mathcal{A}3$) i ($\mathcal{A}4$), tj. da $\mathcal{B}$ zadovoljava ($\mathcal{B}3$) i ($\mathcal{B}4$).

Time smo završili i dokaz Teorema 3.2. □

U sljedećem poglavlju nekad će biti zgodnije koristiti infinitezimalnu varijantu svojstva ($\mathcal{B}3$):

$$-(d^2\mathcal{B})(u,v,w,U,V,W)(\Delta u,\Delta v,\Delta w,\Delta U,\Delta V,\Delta W) \geqslant 2u|\triangle v||\triangle w|. \qquad (\mathcal{B}3')$$

Opet, ($\mathcal{B}3'$) vrijedi samo za točke (u,v,w,U,V,W) za koje je drugi diferencijal od $\mathcal{B}$ dobro definiran, tj. za točke za koje (u,v,w) ne leži ni na jednoj od tri kritične plohe (3.10). Ekvivalentnost od ($\mathcal{B}3'$) i ($\mathcal{B}3$) slijedi iz ekvivalentnosti od ($\mathcal{A}3'$) i ($\mathcal{A}3$).

3.3 Bellmanova funkcija za poseban izbor eksponenata

U ovom odjeljku ćemo pokazati kako je za poseban izbor eksponenata p, q, r ipak lakše konstruirati Bellmanovu funkciju pomoću koje možemo dati direktan dokaz ocjene (3.3). Promatrat ćemo slučaj $q = r$, tj. visinu Banachovog trokuta na Slici 3.1, koju nismo razmatrali u Odjeljku 3.1. Još jednom napomenimo da su za ovaj posebni slučaj u literaturi već konstruirane Bellmanove funkcije, a čak su i određene optimalne konstante. Ipak, naš pristup će biti nešto drukčiji, jer ćemo raditi s dualiziranom formom, a i konstruirana Bellmanova funkcija će biti homogena. Osim toga, metodologija iz ovog odjeljka bit će nam korisna u narednim poglavljima.

Neka su f, g, h funkcije kao u Odjeljku 3.1 i $p, q \in (1, \infty)$ takvi da je

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1.$$

Definirajmo veličinu

$$\widetilde{\Lambda}(f, g) := \sum_{I \in \mathcal{D}} |I| [f]_I \Big(\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}}{2} \Big)^2.$$

Budući da iz $|\epsilon_I| \leqslant 1$ i Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$|\Lambda_\epsilon(f, g, h)| \leqslant \widetilde{\Lambda}(f, g)^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Lambda}(f, h)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

dovoljno je dokazati da vrijedi ocjena

$$\widetilde{\Lambda}(f, g) \leqslant \mathcal{C}_{p,q,q} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}, \tag{3.19}$$

za neku pozitivnu konstantu $\mathcal{C}_{p,q,q}$ koja ovisi samo o eksponentima p i q. Tada iz (3.18) i (3.19) dobijemo (3.3).

Sada da bismo dokazali (3.19) trebamo konstruirati Bellmanovu funkciju $\tilde{\mathcal{B}}(u, v, U, V)$ koja će zadovoljavati sljedeća svojstva.

($\tilde{\mathcal{B}}$1) *Domena:* Sve četvorke (u, v, U, V) koje zadovoljavaju

$$u, v, U, V \geqslant 0, \quad u^p \leqslant U, \quad v^q \leqslant V.$$

($\tilde{\mathcal{B}}$2) *Slika:*

$$0 \leqslant \tilde{\mathcal{B}}(u, v, U, V) \leqslant \mathcal{C}_{p,q,q} U^{1/p} V^{2/q}.$$

($\tilde{\mathcal{B}}3$) *Glavna nejednakost:*

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) \geqslant \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{B}}(u_1,v_1,U_1,V_1) + \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{B}}(u_2,v_2,U_2,V_2) + \frac{u_1+u_2}{2}\left|\frac{v_1-v_2}{2}\right|^2,$$

za sve četvorke (u,v,U,V) i (u_i,v_i,U_i,V_i), $i=1,2$, koje pripadaju domeni i zadovoljavaju

$$(u,v,U,V) = \frac{1}{2}(u_1,v_1,U_1,V_1) + \frac{1}{2}(u_2,v_2,U_2,V_2).$$

Uz supstitucije

$$u = \frac{u_1+u_2}{2},\ \Delta u = \frac{u_1-u_2}{2},\ v = \frac{v_1+v_2}{2},\ \Delta v = \frac{v_1-v_2}{2},$$

glavna nejednakost se može zapisati i kao

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) \geqslant\ & \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{B}}(u+\Delta u, v+\Delta v, U+\Delta U, V+\Delta V)\\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{B}}(u-\Delta u, v-\Delta v, U-\Delta U, V-\Delta V) + u(\Delta v)^2.\end{aligned}$$

Pretpostavimo dodatno da je $1 < p \leqslant 2$. Definirat ćemo Bellmanovu funkciju $\tilde{\mathcal{B}}$ na domeni ($\tilde{\mathcal{B}}1$) kao

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) := (CU - au^p)^{\frac{1}{p}}(CV - bv^q)^{\frac{2}{q}} - duv^2, \tag{3.20}$$

gdje su C, a, b, d neke pozitivne konstante koje ćemo naknadno definirati.

Želimo dokazati da uz odgovarajući izbor konstanti funkcija definirana s (3.20) zadovoljava svojstva ($\tilde{\mathcal{B}}2$) i ($\tilde{\mathcal{B}}3$). Budući da su $u, v \geqslant 0$, očito je

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) \leqslant CU^{\frac{1}{p}}V^{\frac{2}{q}}.$$

Isto tako, budući da je $U \geqslant u^p$ i $V \geqslant v^q$ vrijedi

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) \geqslant \Big[(C-a)^{\frac{1}{p}}(C-b)^{\frac{2}{q}} - d\Big]uv^2,$$

pa je dovoljno uzeti C takav da je

$$(C-a)^{\frac{1}{p}}(C-b)^{\frac{2}{q}} \geqslant d \tag{U_1}$$

da bi $\tilde{\mathcal{B}}$ bila nenegativna. Uočimo da (U_1) direktno povlači i $C > \max\{a,b\}$. Preostaje nam dokazati da vrijedi i ($\tilde{\mathcal{B}}3$).

Zbrajanjem Taylorovih formula u točki (u,v,U,V) za $\tilde{\mathcal{B}}(u\pm\Delta u, v\pm\Delta v, U\pm\Delta U, V\pm\Delta V)$

dobit ćemo infinitezimalnu verziju svojstva ($\tilde{\mathcal{B}}3$):

$$-\frac{1}{2}(d^2\mathcal{B})(u,v,U,V)(\Delta u,\Delta v,\Delta U,\Delta V)\geqslant u(\Delta v)^2. \tag{$\tilde{\mathcal{B}}3'$}$$

Opet se kao u Odjeljku 3.2 može pokazati da su ($\tilde{\mathcal{B}}3'$) i ($\tilde{\mathcal{B}}3$) ekvivalentni, pa ćemo dokazati da vrijedi ($\tilde{\mathcal{B}}3'$). To ćemo napraviti tako da dokažemo da je matrica

$$\mathbf{B}:=\begin{bmatrix} -\partial_u^2\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_u\partial_v\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_u\partial_U\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_u\partial_V\tilde{\mathcal{B}} \\ -\partial_u\partial_v\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_v^2\tilde{\mathcal{B}}-2u & -\partial_v\partial_U\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_v\partial_V\tilde{\mathcal{B}} \\ -\partial_u\partial_U\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_v\partial_U\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_U^2\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_U\partial_V\tilde{\mathcal{B}} \\ -\partial_u\partial_V\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_v\partial_V\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_U\partial_V\tilde{\mathcal{B}} & -\partial_V^2\tilde{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

pozitivno semidefinitna na domeni. Da bismo to dokazali, pokazat ćemo da se uz odgovarajući izbor konstanti može postići da su sve četiri glavne minore nenegativne. Označimo minore s $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ i $\mathbf{B}_4$ redom. Nužan uvjet za pozitivnu semidefinitnost je $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3,\mathbf{B}_4\geqslant 0$, dok nam uvjet $\mathbf{B}_4=0$ daje svojevrsnu optimalnost. Mi ispitujemo spomenuti nužni uvjet kako bismo našli Bellmanovu funkciju, a nakon toga ćemo htjeti zaključiti da njena matrica $\mathbf{B}$ doista jest pozitivno semidefinitna. Sylvesterov kriterij se može primijeniti samo ako su prve tri minore $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3$ strogo pozitivne, a determinanta $\mathbf{B}_4$ je nenegativna. Ovdje to ne mora biti slučaj za funkciju $\tilde{\mathcal{B}}$ uz optimizirane parametre, ali vrijedi za svaku veću vrijednost parametra C pa puštanjem na limes također zaključujemo pozitivnu semidefinitnost.

Uz pomoć softwarea Mathematica [60] i uz supstitucije

$$x=\frac{U}{u^p}\quad \text{i}\quad y=\frac{V}{v^q}$$

dobiju se sljedeći izrazi.

(1) Prva minora:

$$\mathbf{B}_1=Caxuv^2(p-1)(Cx-a)^{-2+\frac{1}{p}}(Cy-b)^{1-\frac{1}{p}}.$$

(2) Druga minora:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2=-4d^2v^2+2abv^2(Cx-a)^{-2+\frac{2}{p}}(Cy-b)^{-\frac{2}{p}}\Big(-2ab-Cxb(p-1)+C^2(p+1)xy\Big)\\ +2av^2(Cx-a)^{-2+\frac{1}{p}}(Cy-b)^{-\frac{1}{p}}\Big(C^2(p-1)(d-1)xy-4abd\\ -Cxb(dp-5d-p+1)\Big).\end{aligned}$$

(3) Treća minora:

$$\mathbf{B}_3=\frac{2C^2(p-1)(Cx-a)^{-2+\frac{1}{p}}(Cy-b)^{\frac{2}{p}}}{p^2u^{2p-1}v^{2q-4}}\Big(ab(p+1)(Cx-a)^{\frac{2}{p}-1}(Cy-b)^{1-\frac{2}{p}}$$

$$+ a(d-1)(p-1)(Cx-a)^{\frac{1}{p}-1}(Cy-b)^{1-\frac{1}{p}} - 2d^2\Big).$$

(4) Determinanta:

$$\mathbf{B}_4 = \det \mathbf{B} = 0.$$

Uočimo da zbog $x, y \geqslant 1$ i (U_1) vrijedi da je $\mathbf{B}_1 > 0$. Dakle, trebamo još odrediti uz koje uvjete su druga i treća minora nenegativne. Pritom ćemo voditi računa o tome da konstante biramo optimalno.

Lako se vidi da je $\mathbf{B}_3 \geqslant 0$ ako i samo ako je

$$ab(p+1)z^{\frac{2}{p}-1} + a(d-1)(p-1)z^{\frac{1}{p}-1} \geqslant 2d^2 \quad \text{za svaki } z > 0, \tag{U_2}$$

gdje je $z = \frac{Cx-a}{Cy-b}$. (Očito je $z > 0$ zbog (U_1) i $x, y \geqslant 1$.) Štoviše, iz (U_2) slijedi i nenegativnost druge minore, jer je tada

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2 \geqslant\ & 2abv^2(Cx-a)^{-2}(Cy-b)z^{\frac{2}{p}}\Big(2bz + (p+1)a\Big) \\ & + 2av^2(Cx-a)^{-2}(Cy-b)z^{\frac{1}{p}}\Big(4bdz + (p-1)(d-1)a\Big) > 0.\end{aligned}$$

Prvo ćemo promatrati slučaj $p = 2$. Tada (U_2) postaje

$$a(d-1)z^{-\frac{1}{2}} + 3ab \geqslant 2d^2 \quad \text{za svaki } z > 0,$$

pa očito mora biti $d \geqslant 1$. Budući da gornja nejednakost mora vrijediti za svaki $z > 0$, puštanjem $z \to \infty$ slijedi

$$3ab \geqslant d^2.$$

S druge strane, iz (U_1) imamo

$$(C-a)^{\frac{1}{2}}(C-b)^{\frac{1}{2}} \geqslant d.$$

Preostaje nam optimizirati po a, b i d koji zadovoljavaju gornje uvjete da bi dobili

$$d = 1, \quad a = b = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{i} \quad C = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}. \tag{3.22}$$

Neka je sada $p < 2$. Iz (U_2) vidimo da mora biti $d > 1$, jer u slučaju $d \leqslant 1$ možemo postići da nejednakost ne vrijedi kada $z \to 0+$. Iz težinske nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi

$$\begin{aligned}(p-1)\frac{ab(p+1)}{p-1}z^{\frac{2}{p}-1} + (2-p)a(d-1)\frac{p-1}{2-p}z^{\frac{1}{p}-1} \\ \geqslant ab^{p-1}(d-1)^{2-p}(p+1)^{p-1}(p-1)^{3-2p}(2-p)^{p-2},\end{aligned}$$

gdje se jednakost postiže za z takav da je

$$z^{\frac{1}{p}} = \frac{(d-1)(p-1)^2}{(p+1)(2-p)b}.$$

Stoga iz (U_2) zaključujemo da mora vrijediti

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{2}{q}} \geqslant 2^{\frac{1}{p}} d^{\frac{2}{p}} (d-1)^{-\frac{2}{p}+1} (p+1)^{-1+\frac{1}{p}} (p-1)^{2-\frac{3}{p}} (2-p)^{\frac{2}{p}-1}. \tag{U_3}$$

Sad nam optimizacija po a i b koji zadovoljavaju (U_3) i (U_1) daje

$$a = b = d^{\frac{2}{p}} (d-1)^{-\frac{2}{p}+1} \underbrace{2^{\frac{1}{p}} (p+1)^{-1+\frac{1}{p}} (p-1)^{2-\frac{3}{p}} (2-p)^{\frac{2}{p}-1}}_{:=\alpha(p)} \quad \text{i} \quad C = a + d. \tag{3.23}$$

Tražimo optimalnu konstantu C, što znači da moramo minimizirati izraz

$$C = C(d) = d + \alpha(p) d^{\frac{2}{p}} (d-1)^{-\frac{2}{p}+1}$$

po svim $d > 1$. Točka minimuma je d koji zadovoljava jednadžbu

$$d^{2-p}(d-1)^{-2}\Big(\frac{2}{p} - d\Big)^p = \alpha(p)^{-p}, \tag{3.24}$$

i tada dobijemo da konstanta C iznosi

$$C = \frac{(2-p)d}{2-pd}. \tag{3.25}$$

Time smo dokazali da funkcija $\tilde{\mathcal{B}}$ definirana s (3.20) i konstantama a, b, d i C koje iznose (3.22) za $p = 2$ i (3.23), (3.24) i (3.25) za $1 < p < 2$ zaista zadovoljava svojstvo ($\tilde{\mathcal{B}}3'$), pa stoga i ($\tilde{\mathcal{B}}3$). Sada isto kao i u Odjeljku 3.1 dokažemo da egzistencija funkcije sa svojstvima ($\tilde{\mathcal{B}}1$), ($\tilde{\mathcal{B}}2$) i ($\tilde{\mathcal{B}}3$) povlači ocjenu (3.19).

Funkciju $\tilde{\mathcal{B}}$ smo posebno izdvojili jer je homogena i zadovoljava jednadžbu $\det \mathbf{B} = 0$, pa je na neki način "bliža" optimalnoj (apstraktnoj) Bellmanovoj funkciji nego funkcija $\mathcal{B}$ definirana s (3.8) u Odjeljku 3.1.

Ipak, pokazuje se da ni ova funkcija nije prava Bellmanova funkcija, jer ne daje uvijek optimalne konstante. Naime, za $1 < p < 2$ dobijemo

$$\mathcal{C}_{p,q,q} > (z_q^*)^{-2},$$

gdje je $\mathcal{C}_{p,q,q} = C$ definirana s (3.25). S druge strane, može se vidjeti da je

$$\mathcal{C}_{p,q,q} \sim 4q \quad \text{kad } q \to \infty,$$

a iz [1] znamo da je

$$z_q^* \sim \frac{1}{\sqrt{q}} \quad \text{za velike } q,$$

pa $\mathcal{C}_{p,q,q}$ i $(z_q^*)^{-2}$ imaju bar asimptotski jednako ponašanje. Dodatno, budući da je najmanja pozitivna nultočka Hermiteovog polinoma reda 4

$$z_4^* = \sqrt{3-\sqrt{6}},$$

pa vrijedi $C = \mathcal{C}_{2,4,4} = (z_4^*)^{-2}$, u slučaju $p = 2$ zaista dobijemo i optimalnu konstantu.

Napomena 3.9 Prethodno definirana funkcija $\tilde{\mathcal{B}}$, naravno, nije jedinstvena Bellmanova funkcija za dokazivanje (3.19). Mogli smo svojstvo ($\tilde{\mathcal{B}}$2) zamijeniti s

$$0 \leqslant \tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) \leqslant \mathcal{C}_{p,q,q}\Big(\frac{1}{p}U + \frac{2}{q}V\Big), \tag{$\tilde{\mathcal{B}}2'$}$$

pa tražiti nehomogenu funkciju $\tilde{\mathcal{B}}$ definiranu na domeni ($\tilde{\mathcal{B}}$1) koja zadovoljava svojstva ($\tilde{\mathcal{B}}2'$) i ($\tilde{\mathcal{B}}$3) (kao u Odjeljku 3).

Pokazuje se da je dobar izbor funkcija

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,U,V) := \mathcal{C}_{p,q,q}\Big(\frac{1}{p}U + \frac{2}{q}V\Big) - \tilde{\mathcal{A}}(u,v),$$

gdje je $\tilde{\mathcal{A}} : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ dana s

$$\tilde{\mathcal{A}}(u,v) := \begin{cases} a_1u^p + b_1v^q + d_1uv^2; & 1 < p \leqslant 2, \\ a_2u^p + b_2v^q + d_2uv^2 + e_2u^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2}}v; & 2 < p \leqslant 3, \\ a_3u^p + b_3v^q + d_3uv^2 + e_3u^2v^{4-q}; & p > 3. \end{cases}$$

Analogno kao u Odjeljku 3.2 (samo uz puno jednostavniji račun) se vidi da uz odgovarajući izbor konstanti gore definirana funkcija zaista zadovoljava željena svojstva. Na primjer, u slučaju $1 < p \leqslant 2$ možemo uzeti

$$a_1 = 4q, \quad b_1 = 1 \quad \text{i} \quad c_1 = 2.$$

■

Poglavlje 4

L^p ocjene za paraprodukte

U ovom poglavlju ćemo na nekoliko primjera demonstrirati kako možemo iskoristiti egzistenciju Bellmanove funkcije iz Teorema 3.2. Svi problemi koje navodimo su dosta standardni i mogu se riješiti na više različitih načina, ali cilj nam je pokazati kako se mogu direktno dokazati korištenjem Teorema 3.2. Štoviše, dovoljna nam je samo egzistencija Bellmanove funkcije sa svojstvima ($\mathcal{B}1$)–($\mathcal{B}3$), iako je svojstvo ($\mathcal{B}4$) dosta korisno u Odjeljku 4.1.

4.1 Martingali s diskretnim vremenom

Krećemo s definicijom *martingalnog paraprodukta* dva martingala s diskretnim vremenom na danom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 4.1 Neka su $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ i $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ dva martingala s diskretnim vremenom adaptirana obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. *Paraprodukt* martingala X i Y je slučajni proces $\big((X \cdot Y)_n\big)_{n=0}^{\infty}$ definiran kao

$$
\begin{aligned}
&(X \cdot Y)_0 := 0, \\
&(X \cdot Y)_n := \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1}) \quad \text{za } n \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Gore definirani proces možemo shvatiti kao posebni slučaj Burkholderove martingalne transformacije (2.2) martingala Y obzirom na pomaknuti adaptirani proces X. Također, namećemo i martingalno svojstvo na X, jer želimo tretirati X i Y simetrično i jer to zahtijeva egzistencija L^p ocjena u unutrašnjosti Banachovog trokuta na Slici 3.1. Želimo dokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.2 Za sve eksponente p, q, r koji zadovoljavaju (3.4) vrijedi ocjena

$$
\|(X \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^{r'}} \lesssim_{p,q,r} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}
\tag{4.2}
$$

uniformno za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$, gdje je r' konjugirani eksponent od r, tj.

$$r' = \frac{r}{r-1}.$$

Napomena 4.3 Za dvije nenegativne veličine A i B pišemo $A \lesssim_P B$ ako postoji apsolutna konstanta $C_P > 0$ koja ovisi samo o skupu parametara P takva da je $A \leqslant C_P B$. ■

Umjesto dokazivanja ocjene (4.2) direktno, dokazat ćemo ocjenu za dualiziranu formu, tj. da za proizvoljnu slučajnu varijablu $Z \in \mathrm{L}^r$ vrijedi nejednakost

$$|\mathbb{E}\Big((X \cdot Y)_n Z\Big)| \lesssim_{p,q,r} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q} \|Z\|_{\mathrm{L}^r}. \tag{4.3}$$

Prema obratu Hölderove nejednakosti znamo da su ocjene (4.2) i (4.3) ekvivalente.

Dodatno, možemo pretpostaviti da je $\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < \infty$, $\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q} < \infty$ i $\|Z\|_{\mathrm{L}^r} < \infty$, jer u protivnome nejednakost (4.3) trivijalno slijedi.

Definirajmo sada treći martingal $Z = (Z_n)_{n=0}^\infty$ obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ kao

$$Z_n := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) \quad \text{za } n \geqslant 0.$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ slučajnu varijablu Z možemo rastaviti kao sumu

$$Z = Z_{k-1} + (Z_k - Z_{k-1}) + (Z - Z_k),$$

pa je zbog linearnosti očekivanja

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big((X \cdot Y)_n Z\Big) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})Z) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})Z_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z - Z_k)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})).
\end{aligned}$$

Budući da je $X_{k-1}Z_{k-1}$ $\mathcal{F}_{k-1}$-izmjeriva slučajna varijabla, iz svojstva uvjetnog očekivanja (Propozicija 2.4) slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})Z_{k-1}) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})Z_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})\Big) \\
&= \mathbb{E}(X_{k-1}Z_{k-1}\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi zbog martingalnog svojstva, tj. $\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$.

Analogno, $X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})$ je $\mathcal{F}_k$-izmjeriva slučajna varijabla, pa opet iz Propozicije

2.4 slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z - Z_k)) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z - Z_k)|\mathcal{F}_k)\Big)\\ &= \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})\mathbb{E}(Z - Z_k|\mathcal{F}_k))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je $\mathbb{E}(Z - Z_k|\mathcal{F}_k) = 0$, opet zbog martingalnog svojstva.

Sada vidimo da je zapravo

$$\mathbb{E}\Big((X \cdot Y)_n Z\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})).$$

Posljedično, da bismo dobili ocjenu (4.3) dovoljno je dokazati da vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.4 Za sve eksponente p, q, r koji zadovoljavaju (3.4) vrijedi

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\Big)\Big| \lesssim_{p,q,r} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r}, \tag{4.4}$$

uniformno za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$.

Očito (4.4) povlači (4.3), jer iz uvjetne Jensenove nejednakosti slijedi da je $\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant \|Z\|_{\mathrm{L}^r}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ocjena (4.4) je dobro poznata i njen dokaz koristi niz klasičnih nejednakosti.

Dokaz Propozicije 4.4. Uočimo da je

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\Big)\Big| &\leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^1}\\ &\leqslant \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2(Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}(Z_k - Z_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^1}\\ &\leqslant \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2(Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^{r'}}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Z_k - Z_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^r}.\end{aligned}$$

Ovdje druga nejednakost slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti, a treća iz Hölderove nejednakosti. Još jedna primjena Hölderove nejednakosti daje nam

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} X_{k-1}^2(Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^{r'}} &\leqslant \Big\|\max_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^{r'}}\\ &\leqslant \Big\|\max_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|\Big\|_{\mathrm{L}^p}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q},\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}(Y_k-Y_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})\Big)\Big|$$
$$\leqslant \Big\|\max_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|\Big\|_{\mathrm{L}^p}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k-Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Z_k-Z_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^r}.$$

Konačno, iz Doobove L^p nejednakosti (2.4) slijedi

$$\Big\|\max_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|\Big\|_{\mathrm{L}^p}\leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p},$$

a iz Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti (2.6)

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k-Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q}\lesssim_q \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}\quad \text{i}\quad \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Z_k-Z_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^r}\lesssim_r \|Z_n\|_{\mathrm{L}^r},$$

što nam daje upravo (4.4). □

Sada ćemo dati i alternativni, direktniji dokaz ocjene (4.4) korištenjem Bellmanove funkcije (3.8) konstruirane u prethodnom poglavlju.

Dokaz Propozicije 4.4 korištenjem Bellmanove funkcije. Dokazat ćemo (4.4) za fiksni $n\in\mathbb{N}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $X_k,Y_k,Z_k\geqslant 0$ za $0\leqslant k\leqslant n$, jer inače rastavimo varijable X_n,Y_n,Z_n na pozitivne i negativne dijelove. Uvest ćemo i tri nova martingala $(U_k)_k$, $(V_k)_k$ i $(W_k)_k$ koja definiramo na sljedeći način:

$$U_k:=\mathbb{E}(X_n^p|\mathcal{F}_k),\quad V_k:=\mathbb{E}(Y_n^q|\mathcal{F}_k),\quad W_k:=\mathbb{E}(Z_n^r|\mathcal{F}_k).$$

Neka je $\mathcal{B}$ Bellmanova funkcija definirana s (3.8). Iz Teorema 3.2 slijedi da funkcija $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstvo ($\mathcal{B}$4), pa uz oznaku $\mathbf{X}_k=(X_k,Y_k,Z_k,U_k,V_k,W_k)$ dobijemo da vrijedi

$$\mathcal{B}(\mathbf{X}_{k-1})+(d\mathcal{B})(\mathbf{X}_{k-1})(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1})\geqslant\mathcal{B}(\mathbf{X}_k)+\frac{2}{3}X_{k-1}|Y_k-Y_{k-1}||Z_k-Z_{k-1}|,$$

za svaki $k=1,\ldots,n$. Uzimanjem uvjetnog očekivanja obzirom na σ-algebru $\mathcal{F}_{k-1}$ u gornjoj nejednakosti i korištenjem martingalnog svojstva, tj. $\mathbb{E}(\mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})=0$, dobijemo

$$\mathcal{B}(\mathbf{X}_{k-1})\geqslant\mathbb{E}\Big(\mathcal{B}(\mathbf{X}_k)\Big|\mathcal{F}_{k-1}\Big)+\frac{2}{3}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}|Y_k-Y_{k-1}||Z_k-Z_{k-1}|\,\Big|\mathcal{F}_{k-1}\Big),$$

iz čega uzimanjem očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}\Big(\mathcal{B}(\mathbf{X}_{k-1})\Big)-\mathbb{E}\Big(\mathcal{B}(\mathbf{X}_k)\Big)\geqslant\frac{2}{3}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}|Y_k-Y_{k-1}||Z_k-Z_{k-1}|\Big).\tag{4.5}$$

Sada nam sumiranje (4.5) po $k = 1, \ldots, n$, teleskopiranje i svojstvo ($\mathcal{B}2$) funkcije $\mathcal{B}$ daju

$$\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}|Y_k - Y_{k-1}||Z_k - Z_{k-1}|\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\mathbb{E}\mathcal{B}(\mathbf{X}_{k-1}) - \mathbb{E}\mathcal{B}(\mathbf{X}_k)\Big) = \mathbb{E}\mathcal{B}(\mathbf{X}_0) - \underbrace{\mathbb{E}\mathcal{B}(\mathbf{X}_n)}_{\geqslant 0}$$
$$\leqslant \mathbb{E}\mathcal{B}(\mathbf{X}_0) \overset{(\mathcal{B}2)}{\leqslant} \mathcal{C}_{p,q,r}\mathbb{E}\Big(\frac{1}{p}U_0 + \frac{1}{q}V_0 + \frac{1}{r}W_0\Big) = \mathcal{C}_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}^q + \frac{1}{r}\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r}^r\Big).$$

Preostaje iskoristiti homogenost od $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}|Y_k - Y_{k-1}||Z_k - Z_{k-1}|\Big)$ i zamijeniti X_n, Y_n, Z_n s $\frac{X_n}{\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}}, \frac{Y_n}{\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}}, \frac{Z_n}{\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r}}$, da bismo dobili

$$\frac{\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\Big(X_{k-1}|Y_k - Y_{k-1}||Z_k - Z_{k-1}|\Big)}{\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r}} \leqslant \mathcal{C}_{p,q,r}.$$

Konačno, množenjem s $\frac{3}{2}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}\|Z_n\|_{\mathrm{L}^r}$ dobit ćemo traženu ocjenu (4.4), a stoga i (4.2). $\square$

4.2 Martingali s neprekidnim vremenom

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ filtrirani vjerojatnosni prostor koji zadovoljava standardne pretpostavke (Definicija 2.22) i neka su X i Y dvije slučajne varijable na tom prostoru. Definiramo martingale $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ kao

$$X_t := \mathbb{E}(X|F_t) \quad \text{i} \quad Y_t := \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) \quad \text{za svaki } t \geqslant 0.$$

Pretpostavljmo da su gore definirani martingali cádlág, tj. da radimo s njihovim cádlág verzijama.

Definicija 4.5 *Martingalni paraprodukt* procesa X i Y je slučajni proces $\Big((X \cdot Y)_t\Big)_{t\geqslant 0}$ koji se definira kao stohastički integral

$$(X \cdot Y)_t := \int_{0+}^{t} X_{s-}dY_s. \tag{4.6}$$

Budući da možemo izabrati gusti podskup na kojem gornja definicija ima smisla (i kasnije proširiti po neprekidnosti), zbog jednostavnosti možemo prepostaviti da je X slučajna varijabla ograničena u L^∞, a Y slučajna varijabla ograničena u L^2. Želimo dokazati da neprekidni martingalni paraprodukt (4.6) zadovoljava iste L^p ocjene kao i diskretni martingalni paraprodukt (4.1).

Da bismo dobili tražene ocjene, uzmimo niz $(\pi_m)_{m=0}^{\infty}$ profinjavajućih subdivizija

$$0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < t_2^{(m)} < \cdots < t_{n(m)}^{(m)} = t$$

intervala $(0,t]$ takav da očice subdizivija konvergiraju u 0, tj.

$$\lim_{m\to\infty} \Delta(\pi_m) = 0.$$

Za $m \geqslant 0$ definiramo proces $X^m = (X_t^m)_{t\geqslant 0}$ kao

$$X_t^m := \sum_{k=1}^{n(m)} X_{t_{k-1}^{(m)}} \mathbb{1}_{(t_{k-1}^{(m)}, t_k^{(m)}]}.$$

Vidimo da je X^m elementarni predvidiv proces i da X^m konvergira prema X uniformno na kompaktima po vjerojatnosti (*ukv*). Stoga se prema Definiciji 2.37 neprekidni martingalni paraprodukt (4.6) može izračunati kao limes Riemannovih suma na sljedeći način:

$$\int_{0+}^t X_{s-} dY_s = \lim_{m\to\infty} \int_{0+}^t X_{s-}^m dY_s = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n(m)} X_{t_{k-1}^{(m)}} (Y_{t_k^{(m)}} - Y_{t_{k-1}^{(m)}}). \tag{4.7}$$

Gornji limes se interpretira kao konvergencija po vjerojatnosti (za više detalja pogledati [53]).

Budući da desna strana u (4.7) konvergira prema neprekidnom martingalnom paraproduktu (4.6) po vjerojatnosti, to znači da postoji podniz $(m_l)_{l\geqslant 0}$ takav da je

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{n(m_l)} X_{t_{k-1}^{(m_l)}} (Y_{t_k^{(m_l)}} - Y_{t_{k-1}^{(m_l)}}) = \int_{0+}^t X_{s-} dY_s \qquad \text{g.s.} \tag{4.8}$$

Uočimo da je lijeva strana u (4.8) zapravo limes diskretnih martingalnih paraprodukta. Sad korištenjem Fatouove leme i primjenom (4.2) dobijemo traženu L^p ocjenu za (4.6):

$$\|(X\cdot Y)_t\|_{\mathrm{L}^{r'}} \leqslant \liminf_{l\to\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{n(m_l)} X_{t_{k-1}^{(m_l)}} (Y_{t_k^{(m_l)}} - Y_{t_{k-1}^{(m_l)}}) \Big\|_{\mathrm{L}^{r'}} \lesssim_{p,q,r} \|X_t\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_t\|_{\mathrm{L}^q}$$

za eksponente p, q, r koji zadovoljavaju (3.4).

4.3 Paraprodukti obzirom na toplinski tok

Pretpostavimo da su f, g, h funkcije klase C^∞ na $\mathbb{R}$ s kompaktnim nosačem. Neka je

$$k(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

toplinska jezgra na $\mathbb{R}$ i neka je u toplinsko proširenje od f koje definiramo kao:

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} f(y) k(x-y,t) dy.$$

Uočimo da je u rješenje jednadžbe provođenja topline

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x^2 u \quad \text{s početnim uvjetom} \quad \lim_{t\to 0+} u(x,t) = f(x). \tag{4.9}$$

Analogno definiramo v i w kao toplinska proširenja od g i h.

Definicija 4.6 *Toplinski paraprodukt*, tj. paraprodukt obzirom na toplinsku polugrupu, definiramo kao trilinearnu formu

$$\Lambda(f,g,h) := \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty u(x,t)\,\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)\,dt\,dx. \tag{4.10}$$

Uz oznake

$$\varphi_s(x) := k(x,s^2), \quad \psi_s(x) := -2^{1/2}s\,\partial_x k(x,s^2)$$

i supstituciju $t = s^2$ dobijemo malo poznatiji izraz:

$$\Lambda(f,g,h) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty (f*\varphi_s)(x)\,(g*\psi_s)(x)\,(h*\psi_s)(x)\,\frac{ds}{s}\,dx. \tag{4.11}$$

Glatki paraprodukti kao (4.11) se prirodno pojavljuju u dokazu T(1) teorema (vidi [23]), iako nam u tom slučaju treba dodatna fleksibilnost pri izboru "bump" funkcije φ_s i "bump" funkcije ψ_s srednje vrijednosti nula.

Opet želimo dokazati odgovarajuće L^p ocjene za (4.10), tj. želimo dokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.7 Za sve eksponente p,q,r koji zadovoljavalju (3.4) vrijedi

$$|\Lambda(f,g,h)| \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

U dokazu Teorema 4.7 opet ćemo koristiti Bellmanovu funkciju konstruiranu u Poglavlju 3 i imitirat ćemo "tehniku toplinskog toka" koju su koristili Petermichl i Volberg u [51], odnosno Nazarov i Volberg u [48].

Da bismo uopće mogli primijeniti konstruiranu Bellmanovu funkciju za dobivanje L^p ocjena za toplinske paraprodukte, prvo je potrebno danu funkciju "zagladiti".

Neka je $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ neka fiksna nenegativna parna funkcija klase C^∞ s nosačem u $(-1,1)^3$ za koju dodatno vrijedi da je

$$\int_{(-1,1)^3} \varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1. \tag{4.13}$$

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ definiramo funkciju $\mathcal{A}_\varepsilon\colon (\varepsilon,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ formulom

$$\mathcal{A}_\varepsilon(u,v,w) := \int_{(-\varepsilon,\varepsilon)^3} \varepsilon^{-3}\varphi(\varepsilon^{-1}a,\varepsilon^{-1}b,\varepsilon^{-1}c)\mathcal{A}(u-a,v-b,w-c)dadbdc,$$

gdje je $\mathcal{A}$ funkcija iz Poglavlja 3 definirana s (3.9). Zapravo, $\mathcal{A}_\varepsilon$ je konvolucija funkcije $\mathcal{A}$ s L^1-normaliziranom dilatacijom funkcije φ, $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3}\varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, pa je očito $\mathcal{A}_\varepsilon$ također klase C^∞.

Budući da funkcija $\mathcal{A}$ zadovoljava svojstvo ($\mathcal{A}3$) vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{A}(u_1-a, v_1-b, w_1-c) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(u_2-a, v_2-b, w_2-c) - \mathcal{A}(u-a, v-b, w-c)\\ \geqslant (u-a)\frac{|v_1-v_2|}{2}\frac{|w_1-w_2|}{2},\end{aligned} \tag{4.14}$$

za sve (u,v,w), (u_1,v_1,w_1), (u_2,v_2,w_2) iz $(\varepsilon,\infty)^3$ i (a,b,c) iz $(-\varepsilon,\varepsilon)^3$ takve da je

$$(u,v,w) = \frac{1}{2}(u_1,v_1,w_1) + \frac{1}{2}(u_2,v_2,w_2).$$

Sada možemo nejednakost (4.14) pomnožiti s $\varepsilon^{-3}\varphi(\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b, \varepsilon^{-1}c)$ i integrirati po $(-\varepsilon,\varepsilon)^3$ da bismo dobili

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{A}_\varepsilon(u_1,v_1,w_1) + \frac{1}{2}\mathcal{A}_\varepsilon(u_2,v_2,w_2) - \mathcal{A}_\varepsilon(u,v,w)\\ \geqslant \int_{(-\varepsilon,\varepsilon)^3}(u-a)|\Delta v||\Delta w|\varepsilon^{-3}\varphi(\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b, \varepsilon^{-1}c)\,dadbdc,\end{aligned}$$

gdje je $\Delta v = \frac{v_1-v_2}{2}$ i $\Delta w = \frac{w_1-w_2}{2}$. Preostaje integrirati desnu stranu gornje nejednakosti koristeći (4.13) i činjenicu da je φ parna da bismo dobili da i $\mathcal{A}_\varepsilon$ također zadovoljava uvjet ($\mathcal{A}3$). Stoga $\mathcal{A}_\varepsilon$ zadovoljava i ($\mathcal{A}3'$) u svakoj točki domene $(\varepsilon,\infty)^3$.

Isto tako, budući da $\mathcal{A}$ zadovoljava ($\mathcal{A}2$) vrijedi da je funkcija $\mathcal{A}_\varepsilon$ nenegativna i

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\varepsilon(u,v,w) &\leqslant \int_{(-\varepsilon,\varepsilon)^3}\varepsilon^{-3}\varphi(\varepsilon^{-1}a, \varepsilon^{-1}b, \varepsilon^{-1}c)\Big(A(u-a)^p + B(v-b)^q + C(w-c)^r\Big)dadbdc\\ &\leqslant \max\{2^p, 2^q, 2^r\}(Au^p + Bv^q + Cw^r),\end{aligned} \tag{4.15}$$

za $u,v,w > \varepsilon$. Ovdje smo u prvoj nejednakosti iskoristili ($\mathcal{A}2$), a u drugoj (4.13) i činjenicu da za $u,v,w > \varepsilon$ i $a,b,c \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ vrijedi $(u-a)^p \leqslant 2^p u^p$, $(v-b)^q \leqslant 2^q v^q$ i $(w-c)^r \leqslant 2^r w^r$.

Opet formulom (3.8) s $\mathcal{A}_\varepsilon$ umjesto $\mathcal{A}$ definiramo funkciju $\mathcal{B}_\varepsilon$ koja je sad klase C^∞. Budući da $\mathcal{A}_\varepsilon$ zadovoljava ($\mathcal{A}3'$), slijedi da $\mathcal{B}_\varepsilon$ zadovoljava svojstvo ($\mathcal{B}3'$) za sve $u,v,w > \varepsilon$ i $U \geqslant u^p$, $V \geqslant v^q$, $W \geqslant w^r$. Štoviše, iz (4.15) vidimo da $\mathcal{A}_\varepsilon$ zadovoljava i svojstvo ($\mathcal{A}2$) do na gubitak s faktorom $\max\{2^p, 2^q, 2^r\}$, što garantira da $\mathcal{B}_\varepsilon$ zadovoljava ($\mathcal{B}2$) za neku (dovoljno veliku) konstantu $C_{p,q,r}$ koja ne ovisi o ε.

Sada smo spremni za dokaz Teorema 4.7.

Dokaz Teorema 4.7. Pretpostavimo da su f, g i h nenegativne funkcije i da niti jedna od njih nije identički jednaka nuli. Fiksiramo $R > 0$, $\delta > 0$, $T > 2\delta$, i uočimo da je $u(x,t), v(x,t), w(x,t) > \varepsilon$ za sve $x \in [-R,R]$, $t \in [\delta, T-\delta]$ za neki dovoljno mali $\varepsilon > 0$ koji ovisi o R, δ, T i o funkcijama f,g,h. Uvodimo U, V i W kao toplinska proširenja funkcija f^p, g^q i h^r i definiramo

$$b(x,t) := \mathcal{B}_\varepsilon\Big(u(x,t), v(x,t), w(x,t), U(x,t), V(x,t), W(x,t)\Big),$$

gdje $\mathcal{B}_\varepsilon$ prethodno definirana funkcija. Računamo

$$\begin{aligned}
\partial_t b &= (\nabla\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)\cdot(\partial_t u, \partial_t v, \partial_t w, \partial_t U, \partial_t V, \partial_t W),\\
\partial_x b &= (\nabla\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)\cdot(\partial_x u, \partial_x v, \partial_x w, \partial_x U, \partial_x V, \partial_x W),\\
\partial_x^2 b &= (d^2\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)(\partial_x u, \partial_x v, \partial_x w, \partial_x U, \partial_x V, \partial_x W)\\
&\quad + (\nabla\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)\cdot(\partial_x^2 u, \partial_x^2 v, \partial_x^2 w, \partial_x^2 U, \partial_x^2 V, \partial_x^2 W),
\end{aligned}$$

i stoga je

$$\begin{aligned}
\Big(\partial_t - \tfrac{1}{2}\partial_x^2\Big)b &= (\nabla\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)\cdot\Big(\partial_t - \tfrac{1}{2}\partial_x^2\Big)(u,v,w,U,V,W)\\
&\quad - \frac{1}{2}(d^2\mathcal{B}_\varepsilon)(u,v,w,U,V,W)(\partial_x u, \partial_x v, \partial_x w, \partial_x U, \partial_x V, \partial_x W). \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

U gornjim računima smo zbog jednostavnosti izostavili pisanje varijabli x i t. Budući da u, v, w, U, V, W zadovoljavaju jednadžbu provođenja topline (4.9), prvi član na desnoj strani (4.16) je jednak nuli i iz ($\mathcal{B}3'$) stoga slijedi

$$\Big(\partial_t - \tfrac{1}{2}\partial_x^2\Big)b(x,t) \geqslant u(x,t)\,|\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)|.$$

Iz gornje nejednakosti množenjem s $k(x, T-t)$ i integriranjem po $[-R,R]\times[\delta, T-\delta]$ dobijemo

$$\begin{aligned}
&\iint_{[-R,R]\times[\delta,T-\delta]} k(x,T-t)u(x,t)\,|\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)|\,dx\,dt\\
&\qquad\leqslant \iint_{[-R,R]\times[\delta,T-\delta]} k(x,T-t)\Big(\partial_t - \tfrac{1}{2}\partial_x^2\Big)b(x,t)\,dx\,dt. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Parcijalna integracija nam daje

$$\int_{[\delta,T-\delta]} k(x,T-t)\partial_t b(x,t)\,dt = k(x,T-t)b(x,t)\Big|_{\delta}^{T-\delta} - \int_{[\delta,T-\delta]}\Big(\partial_t k(x,T-t)\Big)b(x,t)\,dt$$

i

$$\begin{aligned}
\int_{[-R,R]} k(x,T-t)\partial_x^2 b(x,t)\,dx &= k(x,T-t)\partial_x b(x,t)\Big|_{-R}^{R} - \Big(\partial_x k(x,T-t)\Big)b(x,t)\Big|_{-R}^{R}\\
&\quad + \int_{[-R,R]}\Big(\partial_x^2 k(x,T-t)\Big)b(x,t)\,dx,
\end{aligned}$$

pa slijedi da je desna strana u (4.17) jednaka

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{[-R,R]\times[\delta,T-\delta]} b(x,t)\Big(\partial_t + \tfrac{1}{2}\partial_x^2\Big)k(x,T-t)\,dx\,dt + \int_{[-R,R]} k(x,\delta)b(x,T-\delta)\,dx \\
&\underbrace{-\int_{[-R,R]} k(x,T-\delta)b(x,\delta)\,dx}_{\geqslant 0 \quad \text{zbog } b\geqslant 0\ (\mathcal{B}2)} - \frac{1}{2}\int_{[\delta,T-\delta]} k(R,T-t)\Big(\partial_1 b(R,t) - \partial_1 b(-R,t)\Big)\,dt \\
&-\frac{1}{2}\underbrace{\int_{[\delta,T-\delta]} \frac{R}{T-t}k(R,T-t)b(R,t)\,dt}_{\geqslant 0 \quad \text{zbog } b\geqslant 0\ (\mathcal{B}2)} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{[\delta,T-\delta]} \frac{R}{T-t}k(R,T-t)b(-R,t)\,dt}_{\geqslant 0 \quad \text{zbog } b\geqslant 0\ (\mathcal{B}2)}.
\end{aligned}
$$

Budući da je $\Big(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2\Big)k(x,T-t) = 0$, slijedi

$$
\begin{aligned}
&\iint_{[-R,R]\times[\delta,T-\delta]} k(x,T-t)u(x,t)\,|\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)|\,dx\,dt \\
&\qquad \leqslant \int_{[-R,R]} k(x,\delta)b(x,T-\delta)\,dx - \frac{1}{2}\int_{[\delta,T-\delta]} k(R,T-t)\Big(\partial_1 b(R,t) - \partial_1 b(-R,t)\Big)\,dt.
\end{aligned}
$$

Za toplinsku jezgru u smislu konvergencije distribucija vrijedi da je

$$
\lim_{\delta\to 0} k(x,\delta) = \delta(x),
$$

gdje je $\delta(x)$ Diracova delta funkcija. Stoga prvo puštanjem $R\to\infty$, a potom i $\delta\to 0$ dobijemo

$$
\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}} \int_{[-R,R]} k(x,\delta)b(x,T-\delta)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}} k(x,\delta)b(x,T-\delta)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)b(x,T)\,dx = b(0,T),
$$

pa je

$$
\iint_{\mathbb{R}\times(0,T)} k(x,T-t)u(x,t)\,|\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)|\,dx\,dt \leqslant b(0,T). \tag{4.18}
$$

U gornjoj nejednakosti smo iskoristili da je $\lim_{R\to\infty} k(R,T-t) = 0$, uniformo po $t \in [\delta, T-\delta]$.

Iz definicije funkcije b i svojstva ($\mathcal{B}2$) koje zadovoljava funkcija $\mathcal{B}_\varepsilon$ možemo dobiti ocjenu

$$
\begin{aligned}
b(0,T) &\leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}U(0,T) + \frac{1}{q}V(0,T) + \frac{1}{r}W(0,T)\Big) \\
&= \frac{C_{p,q,r}}{\sqrt{2\pi T}}\Big(\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} f(y)^p e^{-\frac{y^2}{2T}}\,dy + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} g(y)^q e^{-\frac{y^2}{2T}}\,dy + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}} h(y)^r e^{-\frac{y^2}{2T}}\,dy\Big).
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$
\lim_{T\to\infty} \sqrt{2\pi T}\,k(x,T-t) = 1,
$$

uniformno po $(x,t) \in [-R_1,R_1]\times(0,T_1]$ za neke fiksirane $R_1>0$ i $T_1>0$, množenje

(4.18) s $\sqrt{2\pi T}$ i puštanje $T \to \infty$ nam daje

$$\begin{aligned}\iint_{[-R_1,R_1]\times(0,T_1]} & u(x,t)\,|\partial_x v(x,t)\,\partial_x w(x,t)|\,dx\,dt \\ & \leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{q}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \frac{1}{r}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}\Big).\end{aligned}$$

Preostaje pustiti da $R_1 \to \infty$ i $T_1 \to \infty$ kako bismo dobili

$$|\Lambda(f,g,h)| \leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{q}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \frac{1}{r}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})}\Big), \tag{4.19}$$

odakle homogenizacijom (kao u Odjeljku 4.1) slijedi (4.12). □

Napomena 4.8 Ovaj trik "zaglađenja" Bellmanove funkcije se već pojavljuje u [51] i [48], i za njegovu primjenu nije nužno imati eksplicitnu formulu. ■

4.4 Martingali obzirom na Brownovsku filtraciju

Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (upotpunjena) prirodna filtracija standardnog jednodimenzionalnog Brownovog gibanja $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ i neka su $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ i $Y = (Y_t)_{t\geqslant}$ martingali adaptirani obzirom na $\mathbb{F}$. Zbog jednostavnosti, dodatno ćemo pretpostaviti i da je $Y_0 = 0$, jer u protivnome martingal $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ možemo zamijeniti martingalom $(Y_t - Y_0)_{t\geqslant 0}$. U tom slučaju martingalni paraprodukt postaje

$$(X \cdot Y)_t := \int_0^t X_s dY_s, \tag{4.20}$$

jer sada $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ imaju g.s. neprekidne puteve. Martingalne paraprodukte definirane s (4.20) su proučavali Bañuelos i Bennett u [3] i ustanovili da oni zadovoljavaju određene L^p, H^p i BMO ocjene. U svom dokazu L^p ocjena oni koriste Doobovu i Burkholder-Davis-Gundyjevu nejednakost.

Mi ćemo u ovom odjeljku prezentirati drugačiji dokaz L^p omeđenosti paraprodukta (4.20), koji koristi svojstva Bellmanove funkcije iz Teorema 3.2. Umjesto aproksimacije neprekidnog martingalnog paraprodukta limesom diskretnih martingalnih paraprodukata kao u Odjeljku 4.2, koristit ćemo Itōvu formulu. Opet će biti jednostavnije ocijeniti trilinearnu formu koju dobijemo dualizacijom paraprodukta (4.20):

$$\Lambda_t(X,Y,Z) := \mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_t Z\Big) = \mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_t(Z_t - Z_0)\Big),$$

gdje je Z slučajna varijabla, a $Z_s := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_s)$ je pripadajući martingal. Dakle, želimo dokazati da vrijedi sljedeća ocjena:

$$|\Lambda_t(X,Y,Z)| \lesssim_{p,q,r} \|X_t\|_{\mathrm{L}^p}\|Y_t\|_{\mathrm{L}^q}\|Z_t\|_{\mathrm{L}^r}, \tag{4.21}$$

uniformno za sve $t > 0$ i sve eksponente p, q, r koji zadovoljavaju (3.4).

Korištenjem Itōve izometrije (2.18) slijedi

$$\Lambda_t(X, Y, Z) = \mathbb{E}\bigg(\Big(\int_0^t X_s dY_s\Big)\Big(\int_0^t 1dZ_s\Big)\bigg) = \mathbb{E}\int_0^t X_s d\langle Y, Z\rangle_s,$$

gdje je $\langle Y, Z\rangle_t$ proces predvidive kvadratne kovarijacije, koji se u slučaju Brownovske filtracije podudara s kvadratnom kovarijacijom $[Y, Z]_t$.

Da bismo uopće mogli primijeniti Itōvu formulu, nužno je da naša Bellmanova funkcija bude klase C^2 na cijeloj domeni. To ćemo postići prelaskom na $\mathcal{B}_\varepsilon$ kao u Odjeljku 4.3.

Opet možemo pretpostavit da je $\|X_t\|_{\mathrm{L}^p} < \infty$, $\|Y_t\|_{\mathrm{L}^q} < \infty$, $\|Z_t\|_{\mathrm{L}^r} < \infty$ i da su slučajne varijable X_t, Y_t i Z_t nenegativne, jer ih u protivnom rastavimo na pozitivne i negativne dijelove. Nadalje, fiksiramo parametar $\varepsilon > 0$ i definiramo pomaknute martingale $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ formulama $\tilde{X}_s := X_s + 2\varepsilon$, $\tilde{Y}_s := Y_s + 2\varepsilon$, $\tilde{Z}_s := Z_s + 2\varepsilon$. Zamijenimo li X, Y, Z u željenoj ocjeni (4.21) redom s $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, dobit ćemo novu nejednakost, koju ćemo znati dokazati, i koja puštanjem $\varepsilon \to 0$ implicira upravo (4.21). Radi toga možemo umjesto $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ naprosto opet pisati X, Y, Z i odmah pretpostaviti da vrijedi $X_s > \varepsilon$, $Y_s > \varepsilon$, $Z_s > \varepsilon$ za svaki $s \in [0, t]$. Za fiksni t i $s \in [0, t]$ uvodimo tri nova martingala:

$$U_s := \mathbb{E}(X_t^p|\mathcal{F}_s), \quad V_s := \mathbb{E}(Y_t^q|\mathcal{F}_s), \quad W_s := \mathbb{E}(Z_t^r|\mathcal{F}_s),$$

i označimo

$$\mathbf{X}_s = (X_s, Y_s, Z_s, U_s, V_s, W_s) = (X_s^i)_{i=1}^6.$$

Sada iz Itōve formule (2.19) primijenjene na $\mathbf{X}$ i funkciju $\mathcal{B}_\varepsilon$ slijedi

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_t) - \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_0) = \sum_{i=1}^6 \int_0^t \partial_i\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s)dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^6 \int_0^t \partial_i\partial_j\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s)d[X^i, X^j]_s. \tag{4.22}$$

Budući da su X^i, $i = 1, \ldots, 6$, martingali adaptirani obzirom na prirodnu filtraciju Brownovog gibanja $(B_t)_{t\geqslant 0}$, koristeći teorem o reprezentaciji martingala (Teorem 2.40) možemo ih zapisati u obliku

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t A_s^i\, dB_s,$$

gdje su A^i, $i = 1, \ldots, 6$, predvidivi procesi. Iz (2.17) slijedi

$$[A^i \cdot B, A^j \cdot B]_s = \int_0^t A_s^i A_s^j\, d[B, B]_s,$$

a $[B, B]_s = s$, pa je $d[X^i, X^j]_s = A_s^i A_s^j ds$. Sada ($\mathcal{B}3'$) povlači

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^6 \partial_i\partial_j\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s)A_s^i A_s^j = -\frac{1}{2}(d^2\mathcal{B}_\varepsilon)(\mathbf{X}_s)(\mathbf{A}_s) \geqslant X_s^1|A_s^2||A_s^3|,$$

gdje smo označili $\mathbf{A} = (A^1, \ldots, A^6)$, pa iz (4.22) dobivamo

$$\begin{aligned}
\pm \int_0^t X_s^1 A_s^2 A_s^3 ds &\leqslant \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_0) - \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_t) - \sum_{i=1}^6 \int_0^t \partial_i \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s) dX_s^i \\
&\leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}U_0 + \frac{1}{q}V_0 + \frac{1}{r}W_0\Big) - \sum_{i=1}^6 \int_0^t \partial_i \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s) dX_s^i.
\end{aligned}$$

Ovdje smo u drugoj nejednakosti iskoristili svojstvo ($\mathcal{B}2$). Uzimanjem očekivanja slijedi

$$\begin{aligned}
\pm \mathbb{E} \int_0^t X_s^1 A_s^2 A_s^3 ds &\leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\mathbb{E}U_0 + \frac{1}{q}\mathbb{E}V_0 + \frac{1}{r}\mathbb{E}W_0\Big) \\
&= C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|X_t\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q}\|Y_t\|_{\mathrm{L}^q}^q + \frac{1}{r}\|Z_t\|_{\mathrm{L}^r}^r\Big).
\end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da je za svaki $i = 1, \ldots, 6$, proces $\Big(\int_0^t \partial_i \mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{X}_s) dX_s^i\Big)_{t \geqslant 0}$ martingal koji kreće iz nule, pa mu je očekivanje jednako nula. Konačno, iz

$$X_s^1 A_s^2 A_s^3 ds = X_s d[Y, Z]_s,$$

slijedi

$$|\Lambda_t(X, Y, Z)| \leqslant C_{p,q,r}\Big(\frac{1}{p}\|X_t\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q}\|Y_t\|_{\mathrm{L}^q}^q + \frac{1}{r}\|Z_t\|_{\mathrm{L}^r}^r\Big). \tag{4.23}$$

Preostaje nam homogenizirati (4.23) (kao u Odjeljku 4.1) da bismo dobili traženu ocjenu (4.21).

Poglavlje 5

L^p ocjene za generaliziranu martingalnu transformaciju

U ovom poglavlju uvest ćemo varijatu Burholderove martingalne transformacije pridružene dvama martingalima obzirom na dvije različite filtracije. Iako klasične metode nisu primjenjive, pokazat ćemo da takve transformacije i dalje zadovoljavaju neke L^p ocjene.

5.1 Diskretne ocjene

Definicija 5.1 Neka su $(U_k)_{k=0}^{\infty}$ i $(V_k)_{k=0}^{\infty}$ dva proizvoljna slučajna procesa s diskretnim vremenom. Definiramo novi proces $(U \cdot V)_{n=0}^{\infty}$ s

$$\begin{aligned} &(U \cdot V)_0 := 0, \\ &(U \cdot V)_n := \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}(V_k - V_{k-1}) \quad \text{za } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

U posebnom slučaju kad je $(V_k)_{k=0}^{\infty}$ martingal i $(U_k)_{k=0}^{\infty}$ ograničeni i adaptirani proces s obzirom na istu filtraciju, gornji proces je točno Burkholderova martingalna transformacija (2.2). Odgovarajuće ocjene za martingalnu transformaciju imaju važnu ulogu u nalaženju optimalnih konstanti za brojne singularne integralne operatore [5], u teoriji UMD prostora [15] i u raznim nejednakostima za stohastičke integrale [11]. (Za više detalja i referenci na relevantnu literaturu vidi [13] i [2].) Međutim, u ovom poglavlju ćemo raditi u nešto drugačijem okruženju, motiviranom vjerojatnosnim metodama koje se pojavljuju u dokazu omeđenosti određenog dvodimenzionalnog operatora (paraproduktnog tipa) proučavanog u [38].

Započinjemo s opisom vjerojatnosnog prostora na kojem ćemo raditi i dviju specifičnih filtracija $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ i $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ koje ćemo koristiti u ovom i sljedećem poglavlju.

Neka su $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{B}, \mathbb{P}_2)$ dva vjerojatnosna prostora i neka je

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2) \tag{5.2}$$

njihov produkt. Pretpostavimo da imamo dvije filtracije $(\mathcal{A}_k)_{k=0}^{\infty}$ i $(\mathcal{B}_k)_{k=0}^{\infty}$ σ-algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takve da su za svaki $k \geqslant 0$ $\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{B}_k$ σ-algebre generirane prebrojivim particijama od Ω_1 i Ω_2 redom. Definirajmo sada dvije nove filtracije na sljedeći način:

$$\mathcal{F}_k := \mathcal{A}_k \otimes \mathcal{B}, \quad \mathcal{G}_k := \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_k \qquad \text{za svaki } k \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Možemo zamišljati $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ i $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ redom kao "horizontalne" i "vertikalne" filtracije produktne σ-algebre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Lako se provjeri da je $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_\ell = \mathcal{A}_k \otimes \mathcal{B}_\ell$ za sve $k, \ell \geqslant 0$. Uočimo da dvije filtracije u (5.3) ne moraju biti nezavisne; zapravo jako rijetko to jesu. Štoviše, može se pokazati da su σ-algebre $\mathcal{F}_k$ i $\mathcal{G}_\ell$ zapravo uvjetno nezavisne obzirom na presjek σ-algebri $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_\ell$ (vidi Odjeljak 5.4).

Napomena 5.2 Budući da ćemo raditi na produktnom vjerojatnosnom prostoru (5.2), kad god pišemo samo $\mathbb{E}$, podrazumijevat ćemo da se radi o očekivanju obzirom na produktnu mjeru $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$. Slično ćemo označavati i Lebesguove prostore i njihove norme.

■

Neka su sad $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ koji poprima realne vrijednosti te $(Y_k)_{k=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ koji poprima realne vrijednosti. Konačno, neka je $(K_k)_{k=0}^{\infty}$ realni adaptirani proces obzirom na presječnu filtraciju $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$. Promatrat ćemo procese $((KX \cdot Y)_n)_{n=0}^{\infty}$ i $((K \cdot XY)_n)_{n=0}^{\infty}$, koji se prema (5.1) definiraju kao

$$\begin{aligned} (KX \cdot Y)_n &= \sum_{k=1}^{n} K_{k-1} X_{k-1} (Y_k - Y_{k-1}), \\ (K \cdot XY)_n &= \sum_{k=1}^{n} K_{k-1} (X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1}). \end{aligned}$$

Ovi procesi više nisu adaptirani obzirom na odgovarajuće filtracije, pa ih ne možemo tretirati na isti način kao i Burkholderovu martingalnu transformaciju. Svejedno se i ovakvi procesi pokazuju korisnima i zadovoljavaju odgovarajuće L^p ocjene.

Teorem 5.3 ($\mathrm{L}^{4/3}$ ocjene) Postoji apsolutna konstanta $C > 0$ takva da za svaki nenegativan cijeli broj n vrijedi:

$$\|(KX \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C \, \|X_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^2}, \tag{5.4}$$

$$\|(K \cdot XY)_n\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C \Big(\|X_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^2} + \|Y_n\|_{\mathrm{L}^4} \|(K \cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2} \Big). \tag{5.5}$$

Da bismo mogli proširiti raspon eksponenata u prethodnom teoremu potrebno je nametnuti dodatni uvjet na presječnu filtraciju $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$.

Definicija 5.4 Filtracija $(\mathcal{H}_k)_{k=0}^{\infty}$ zadovoljava svojstvo "uniformnog rasta", tj. ima "uniformno ograničene skokove", ako postoji konstanta $A > 0$ takva da vrijedi

$$\Big\|\mathbb{E}(U|\mathcal{H}_{k+1})\Big\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant A \Big\|\mathbb{E}(U|\mathcal{H}_k)\Big\|_{\mathrm{L}^\infty} \tag{5.6}$$

za svaku slučajnu varijablu $U \geqslant 0$ i proizvoljan $k \geqslant 0$.

Teorem 5.5 (L^p ocjene) Pretpostavimo da filtracija $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k=0}^\infty$ zadovoljava svojstvo (5.6). Tada za sve eksponente p, q, r za koje vrijedi $1/r = 1/p + 1/q$ i $1 < r < 2 < p, q < \infty$ postoji konstanta $C_{p,q,r} > 0$ takva da za svaki nenegativni cijeli broj n vrijedi

$$\|(KX \cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant C_{p,q,r}\, A^{3/2} \Big(\max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \|K_k\|_{\mathrm{L}^\infty} \Big) \|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \|Y_n\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{5.7}$$

Napomena 5.6 Naglašavamo da konstante C i $C_{p,q,r}$ ne ovise o filtracijama niti o pripadajućim procesima. Ne znamo je li svojstvo (5.6) nužno za ocjenu (5.7), ali ga trebamo da bismo u dokazu mogli iskoristiti argument zaustavljanja. S druge strane, ocjene (5.4) i (5.5) ne zahtijevaju nikakve dodatne uvjete na martingale. ■

Tipični primjer filtracije s uniformno ograničenim skokovima je filtracija generirana dijadskim kockama u $\mathbb{R}^n$. Zaista, nejednakost (5.7) je već dokazana u [38] u posebnom slučaju kad su $(\mathcal{A}_k)_{k=0}^\infty$ i $(\mathcal{B}_k)_{k=0}^\infty$ standardne jednodimenzionalne dijadske filtracije.

5.2 Konstrukcija kontrolnog procesa

Započinjemo s nekoliko jednostavnih redukcija u Teoremima 5.3 i 5.5. Prvo ćemo pokazati da je nejednakost (5.5) zapravo posljedica nejednakosti (5.4). Primijetimo da varijablu $(K \cdot XY)_n$ koju želimo ograničiti možemo rastaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
(K \cdot XY)_n &= \sum_{k=1}^n K_{k-1}(X_k Y_k - X_{k-1} Y_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n K_{k-1}\Big(X_{k-1}(Y_k - Y_{k-1}) + Y_{k-1}(X_k - X_{k-1}) + (X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})\Big) \\
&= (KX \cdot Y)_n + (KY \cdot X)_n + \sum_{k=1}^n K_{k-1}(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}). \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Prva dva člana na desnoj strani od (5.8), $(KX \cdot Y)_n$ i $(KY \cdot X)_n$, su analogna zbog simetrije i njihova omeđenost slijedi iz (5.4), pa nam je preostalo ograničiti treći član. Uočimo da je

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{k=1}^n K_{k-1}(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \\
&\leqslant \Big\|\Big(\sum_{k=1}^n K_{k-1}^2 (X_k - X_{k-1})^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} K_{k-1}^2(X_k-X_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^2}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k-Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^4}.$$

Ovdje prva nejednakost slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti, a druga iz Hölderove nejednakosti. Iz Burkholder-Davis-Gundyjeve nejednakosti (2.6) slijedi da postoji konstanta $\widetilde{C} > 0$ takva da je

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}(Y_k-Y_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^4} \leqslant \widetilde{C}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^4},$$

a zbog Itōve izometrije (u diskretnom vremenu) je

$$\|(K\cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} K_{k-1}^2(X_k-X_{k-1})^2 = \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n} K_{k-1}^2(X_k-X_{k-1})^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^2}^2$$

pa se lako dobije i tražena ocjena

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} K_{k-1}(X_k-X_{k-1})(Y_k-Y_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant \widetilde{C}\|(K\cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}\|Y_n\|_{\mathrm{L}^4}.$$

Nadalje, tvrdimo da bez smanjenja općenitosti možemo prepostaviti da je $K_k = 1$ za svaki $k \geqslant 0$ prilikom dokazivanja ocjena (5.4) i (5.7). Zaista, budući da je

$$(K\cdot Y)_k - (K\cdot Y)_{k-1} = K_{k-1}(Y_k - Y_{k-1}),$$

vrijedi

$$(KX\cdot Y)_n = \Big(X\cdot(K\cdot Y)\Big)_n,$$

za svaki $n \geqslant 0$. Stoga je (5.4) zapravo ocjena za martingale $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ i $\Big((K\cdot Y)_n\Big)_{n=0}^{\infty}$.

Istu pretpostavku možemo koristiti i prilikom dokaza nejednakosti (5.7), jer zbog omeđenosti martingalne transformacije (2.9) znamo da postoji konstanta $C_q > 0$ (koja ovisi samo o q) takva da vrijedi

$$\|(K\cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_q\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\|K_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big)\|Y_n\|_{\mathrm{L}^q},$$

za bilo koji $1 < q < \infty$.

Uočimo da se za $k > n$ slučajne varijable X_k i Y_k ne pojavljuju niti u jednom od gornjih izraza, pa uz oznake $X := X_n$, $Y := Y_n$, slijedi

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_k) = X_k \quad \text{i} \quad \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_k) = Y_k \quad \text{za svaki } k = 0,1,\ldots,n.$$

Sada će nam X i Y označavati i slučajne varijable i martingale $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ i $(Y_k)_{k=0}^{\infty}$. Navedene oznake koristit ćemo u cijelom poglavlju.

Prema obratu Hölderove nejednakosti slijedi da je ocjena (5.4) ekvivalentna s ocjenom

$$\left|\mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_n\, Z\Big)\right| \leqslant C\, \|X\|_{\mathrm{L}^4}\|Y\|_{\mathrm{L}^2}\|Z\|_{\mathrm{L}^4}, \tag{5.9}$$

za proizvoljnu slučajnu varijablu $Z \in \mathrm{L}^4$, dok je (5.7) ekvivalentna s

$$\left|\mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_n\, Z\Big)\right| \leqslant C_{p,q,r} A^{3/2} \|X\|_{\mathrm{L}^p}\|Y\|_{\mathrm{L}^q}\|Z\|_{\mathrm{L}^{r'}} \tag{5.10}$$

za proizvoljnu slučajnu varijablu $Z \in \mathrm{L}^{r'}$, gdje je r' konjugirani eksponent od r, tj. $r' = r/(r-1)$. Umjesto da direktno dokazujemo ocjene (5.4) i (5.7), dokazat ćemo navedene dualizirane ocjene (5.9) i (5.10).

Zbog linearnosti očekivanja je

$$\mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_n\, Z\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} X_k(Y_{k+1}-Y_k)Z\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)X_kZ\Big).$$

Slučajnu varijablu X_kZ možemo rastaviti kao

$$X_kZ = \Big(X_kZ - \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1})\Big) + \Big(\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\Big) + \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)X_kZ\Big) = \mathbb{E}\bigg(&\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(X_kZ - \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1})\Big)\Big|\mathcal{G}_{k+1}\Big)\bigg)\\ &+ \mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\Big)\Big)\\ &+ \mathbb{E}\bigg(\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\Big|\mathcal{G}_k\Big)\bigg).\end{aligned}$$

U gornjem rastavu smo koristili svojstvo uvjetnog očekivanja, tj. da za proizvoljnu slučajnu varijablu U vrijedi

$$\mathbb{E}U = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(U|\mathcal{G}_{k+1})\Big) \quad \text{i} \quad \mathbb{E}U = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(U|\mathcal{G}_k)\Big).$$

Dodatno, $(Y_{k+1}-Y_k)$ je $\mathcal{G}_{k+1}$-izmjeriva slučajna varijabla, pa vrijedi

$$\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(X_kZ-\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1})\Big)\Big|\mathcal{G}_{k+1}\Big) = (Y_{k+1}-Y_k)\mathbb{E}\Big(X_kZ-\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1})\Big|\mathcal{G}_{k+1}\Big) = 0.$$

Isto tako, $\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)$ je po definiciji $\mathcal{G}_k$-izmjeriva slučajna varijabla pa zbog martingalnog svojstva, tj. $\mathbb{E}(Y_{k+1}-Y_k|\mathcal{G}_k) = 0$, vrijedi

$$\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\Big|\mathcal{G}_k\Big) = \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\mathbb{E}(Y_{k+1}-Y_k|\mathcal{G}_k) = 0.$$

Sada lako slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)X_k Z\Big) &= \mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(\mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_k)\Big)\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(\mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_k)\Big)\Big|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k\Big)\Big)\end{aligned}$$

pa možemo pisati

$$\mathbb{E}\Big((X \cdot Y)_n\, Z\Big) = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(X,Y,Z), \tag{5.11}$$

uz oznaku

$$\alpha_k(X,Y,Z) := \mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)\Big(\mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k Z|\mathcal{G}_k)\Big)\Big|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k\Big).$$

Na taj način ćemo raditi s procesom koji je adaptiran obzirom na presječnu σ-algebru $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$, iako on nema svojstva martingalnog procesa.

Cilj nam je naći odgovarajući kontrolni proces (u smislu Propozicije 5.7) koji će nam pomoći da ograničimo sumu

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|.$$

Ovo možemo smatrati varijantom tehnike Bellmanovih funkcija. Umjesto da konstruiramo funkciju s određenim kontrolnim parametrima (kao u Poglavlju 3), naprosto ćemo konstruirati izraz Bellmanovog tipa koji zadovoljava željena svojstva konveksnosti. Zbog toga više i ne govorimo o Bellmanovoj funkciji, već o *kontrolnom procesu*.

Propozicija 5.7 Postoji proces $(\beta_k(X,Y,Z))_{k=0}^{\infty}$ koji je adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ i zadovoljava

$$|\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \mathbb{E}\Big(\beta_{k+1}(X,Y,Z)\Big|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k\Big) - \beta_k(X,Y,Z), \tag{5.12}$$

$$0 \leqslant \beta_k(X,Y,Z) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)^2 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y^2|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Z^2|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)^2 \tag{5.13}$$

za svaki nenegativni cijeli broj k.

Da bismo uopće mogli eksplicitno zapisati kontrolni proces iz Propozicije 5.7, potrebno je uvesti sljedeću notaciju.

Definicija 5.8 Operatori $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega' \to \omega}$ i $\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega' \to \omega}$ djeluju na slučajnoj varijabli U i definiraju se kao

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega' \to \omega} U(\omega') := \mathbb{E}(U|\mathcal{A}_k)(\omega) \quad \text{i} \quad \Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega' \to \omega} U(\omega') := \mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega' \to \omega} U(\omega') - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega' \to \omega} U(\omega'),$$

za $U \in \mathrm{L}^1(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$, $\omega \in \Omega_1$ i $k \geqslant 0$.

Uočimo da je $\mathbb{E}(U|\mathcal{A}_k)$ uvjetno očekivanje obzirom na pod-σ-algebru $\mathcal{A}_k$ vjerojatnosnog prostora $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$. U daljnjim računima baratat ćemo izrazima koji sadrže više varijabli, poput $V(\omega', \omega'', \ldots)$, i morat ćemo primjenjivati ove operatore po vlaknima, na primjer samo u varijabli ω'. Iz tog razloga samim oznakama $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}$ i $\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}$ želimo naglasiti da se uvjetno očekivanje uzima po varijabli ω' i da se rezultat evaluira u ω.

Analogno definiramo i operatore $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega'\to\omega}$ i $\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega'\to\omega}$.

Kroz sljedeću lemu navest ćemo svojstva ovih operatora.

Lema 5.9 (a) Za svaki $k \geqslant 0$, $V \in \mathrm{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_1, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1)$ i $\omega \in \Omega_1$ vrijedi

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}V(\omega', \omega'') = \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega}V(\omega', \omega''). \tag{5.14}$$

(b) Za sve $k, \ell \geqslant 0$, $W \in \mathrm{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1$ i $\omega_2 \in \Omega_2$ vrijedi

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}W(\omega_1', \omega_2) = \mathbb{E}(W|\mathcal{F}_k)(\omega_1, \omega_2), \quad \mathbb{E}_{\mathcal{B}_\ell}^{\omega_2'\to\omega_2}W(\omega_1, \omega_2') = \mathbb{E}(W|\mathcal{G}_\ell)(\omega_1, \omega_2), \tag{5.15}$$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_\ell}^{\omega_2'\to\omega_2}W(\omega_1', \omega_2') = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_\ell}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}W(\omega_1', \omega_2') = \mathbb{E}(W|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_\ell)(\omega_1, \omega_2). \tag{5.16}$$

(c) Za sve $k \geqslant 0$, $U_1, U_2 \in \mathrm{L}^1(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ i $\omega \in \Omega_1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\Big)\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\bigg(\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\Big) - \Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\Big)\bigg).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Podrazumijeva se da svi identiteti vrijede g.s. obzirom na odgovarajuću vjerojatnosnu mjeru. Tvrdnje (a) i (c) vrijede i u slučaju kada se filtracija $(\mathcal{A}_k)_{k=0}^{\infty}$ zamijeni s $(\mathcal{B}_k)_{k=0}^{\infty}$, a vjerojatnosni prostor $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ se zamjeni s $(\Omega_2, \mathcal{B}, \mathbb{P}_2)$.

Dokaz. (a) Prvo ćemo pokazati da (5.14) vrijedi u posebnom slučaju kad je $V = \mathbb{1}_{S_1 \times S_2}$ za neke $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$. Iz definicije operatora $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}$ i svojstva uvjetnog očekivanja slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}\mathbb{1}_{S_1}(\omega')\mathbb{1}_{S_2}(\omega'') &= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\Big(\mathbb{1}_{S_1}(\omega')\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_2}|\mathcal{A}_k)(\omega')\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{S_1}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_2}|\mathcal{A}_k)\Big|\mathcal{A}_k\Big)(\omega) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_1}|\mathcal{A}_k)(\omega)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_2}|\mathcal{A}_k)(\omega) = \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega}\mathbb{1}_{S_1}(\omega')\mathbb{1}_{S_2}(\omega''),
\end{aligned}$$

što znači da vrijedi (5.14). Ako označimo

$$P = \{S_1 \times S_2 : S_1, S_2 \in \mathcal{A}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{D} = \{S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} : \ \mathbb{1}_S \text{ zadovoljava (5.14)}\},$$

tada je očito $P \subseteq \mathcal{D}$. Primijetimo da vrijedi sljedeće:

- $\Omega_1 \times \Omega_1$ se nalazi u $\mathcal{D}$, jer se nalazi u P.
- Neka su $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ takvi da je $D_1 \subseteq D_2$. Tada je $\mathbb{1}_{D_2 \setminus D_1} = \mathbb{1}_{D_2} - \mathbb{1}_{D_1}$, pa je zbog linearnosti uvjetnog očekivanja i $D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$.

- Neka je $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ niz iz $\mathcal{D}$ takav da za svaki n vrijedi $D_n \subseteq D_{n+1}$. Tada je $\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{D_n}$, pa je zbog teorema o monotonoj konvergenciji i $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Zaključujemo da je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa, a budući da je P očito π-sistem, prema teoremu o Dynkinovim klasama vrijedi da je σ-algebra generirana s P sadržana u $\mathcal{D}$. To znači da sve slučajne varijable oblika $V = \mathbb{1}_S$, $S \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, zadovoljavaju (5.14) (jer je $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} = \sigma(P)$).

Konačno, standardnim argumentima linearnosti i aproksimacije jednostavnim funkcijama proširimo rezultat i na sve slučajne varijable $V \in \mathrm{L}^1(\Omega_1\times\Omega_1, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1)$.

(b) Relacije (5.15) su zapravo Fubinijev teorem. Da bismo dobili (5.16), dovoljno je pokazati jednakost prvog i trećeg izraza. Ta jednakost trivijalno slijedi za sve $W = \mathbf{1}_{S_1\times S_2}$, $S_1 \in \mathcal{A}$, $S_2 \in \mathcal{B}$, jer je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_l}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{1}_{S_1}(\omega_1')\mathbb{1}_{S_2}(\omega_2') &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_1}|\mathcal{A}_k)(\omega_1)\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_2}|\mathcal{B}_l)(\omega_2)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_1\times S_2}|\mathcal{A}_k\otimes\mathcal{B}_\ell)(\omega_1,\omega_2)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_1\times S_2}|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_\ell)(\omega_1,\omega_2).
\end{aligned}$$

Korištenjem teorema o Dynkinovim klasama kao u (a) pokažemo da ista jednakost vrijedi i za sve $W = \mathbb{1}_S$, za $S \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, pa se onda standardnim aproksimacijskim argumentima proširi i na sve $W \in \mathrm{L}^1(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2)$.

(c) Oduzimanje lijeve strane od desne strane u (5.17) daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\Big(\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\big)\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\big) - \big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\big)\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\big)\Big)\\
&- \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\Big(\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'') - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\big)\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'') - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\big)\Big)\\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}\Big(\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'') - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\big)\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\big)\\
&\qquad\qquad + \big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_1(\omega'')\big)\big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'') - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}U_2(\omega'')\big)\Big)\\
&= \underbrace{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(U_1|\mathcal{A}_{k+1}) - \mathbb{E}(U_1|\mathcal{A}_k)\Big|\mathcal{A}_k\Big)(\omega)}_{=0}\ \mathbb{E}(U_2|\mathcal{A}_k)(\omega)\\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}(U_1|\mathcal{A}_k)(\omega)\ \underbrace{\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(U_2|\mathcal{A}_{k+1}) - \mathbb{E}(U_2|\mathcal{A}_k)\Big|\mathcal{A}_k\Big)(\omega)}_{=0} = 0,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnje dvije jednakosti koristili definiciju operatora $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega'\to\omega}, \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega''\to\omega'}$ i $\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega''\to\omega'}$ i svojstva uvjetnog očekivanja. □

Sada smo spremni za dokaz Propozicije 5.7.

Dokaz Propozicije 5.7. Označimo

$$\gamma_k(V,W)(\omega_1,\omega_2) := \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}V(\omega_1',\omega_2')W(\omega_1'',\omega_2')\Big)^2$$

za $k \geqslant 0$ i za $V, W \in \mathrm{L}^4(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$. Sada proces (β_k) možemo definirati eksplicitno kao

$$\beta_k(X,Y,Z) := \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_k^2|\mathcal{F}_k) + \frac{1}{2}\gamma_k(X,Z) + \frac{1}{4}\gamma_k(X,X) + \frac{1}{4}\gamma_k(Z,Z).$$

Ocjena (5.13) dokazuje se direktno. Primjenom uvjetne Cauchy-Schwarzove nejednakosti i relacija (5.16) dobije se

$$\begin{aligned}\gamma_k(V,W)(\omega_1,\omega_2) &\leqslant \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}V(\omega_1',\omega_2')^2\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}W(\omega_1'',\omega_2')^2\Big)\\ &\leqslant \mathbb{E}(V^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)(\omega_1,\omega_2)\,\mathbb{E}(W^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)(\omega_1,\omega_2),\end{aligned}$$

pa stoga primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi

$$\begin{aligned}&\gamma_k(X,Z) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)^2 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Z^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)^2,\\ &\gamma_k(X,X) \leqslant \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)^2, \quad \gamma_k(Z,Z) \leqslant \mathbb{E}(Z^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)^2.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Također, uočimo i da nam uvjetna Jensenova nejednakost daje

$$\mathbb{E}(Y_k^2|\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(Y^2|\mathcal{G}_k)\Big|\mathcal{F}_k\Big) = \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k). \tag{5.19}$$

Konačno, iz svojstva pozitivnosti uvjetnog očekivanja, (5.18) i (5.19) slijedi ocjena (5.13).

Tehnički najzahtjevniji dio dokaza je uspostavljanje nejednakosti (5.12). U tu svrhu ćemo transformirati $\alpha_k(X,Y,Z)$ korištenjem formula (5.16), (5.15) i (5.14) redom da bismo dobili

$$\begin{aligned}&\alpha_k(X,Y,Z)(\omega_1,\omega_2)\\ &= \mathbb{E}\Big(\Big(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_k)\Big)\Big(\mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(X_kZ|\mathcal{G}_k)\Big)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)(\omega_1,\omega_2)\\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}Y(\omega_1',\omega_2'')\Big)\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')\Big)Z(\omega_1',\omega_2'')\Big)\\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}Y(\omega_1',\omega_2'')\Big)\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1',\omega_2'')\Big).\end{aligned} \tag{5.20}$$

S druge strane, uočimo da je $\beta_k(X,Y,Z)$ $(\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k)$-izmjeriva pa možemo raspisati desnu stranu nejednakosti (5.12) kao

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\beta_{k+1}(X,Y,Z) - \beta_k(X,Y,Z)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(\gamma_{k+1}(X,Z)-\gamma_k(X,Z)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)\\ &\quad + \frac{1}{4}\,\mathbb{E}\Big(\gamma_{k+1}(X,X)-\gamma_k(X,X)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big) + \frac{1}{4}\,\mathbb{E}\Big(\gamma_{k+1}(Z,Z)-\gamma_k(Z,Z)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big).\end{aligned}$$

U gornjem raspisu smo koristili činjenicu da zbog linearnosti uvjetnog očekivanja, martingalnog svojstva i $\mathcal{G}_k$-izmjerivosti slučajne varijable Y_k vrijedi

$$\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2|\mathcal{G}_k\Big)=\mathbb{E}(Y_{k+1}^2|\mathcal{G}_k)-2Y_k\underbrace{\mathbb{E}(Y_{k+1}|\mathcal{G}_k)}_{=Y_k}+Y_k^2=\mathbb{E}(Y_{k+1}^2|\mathcal{G}_k)-Y_k^2.$$

Ako sada označimo

$$\begin{aligned}\delta_k(V,W)(\omega_1,\omega_2)&:=\mathbb{E}\Big(\gamma_{k+1}(V,W)-\gamma_k(V,W)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)(\omega_1,\omega_2)\\&=\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}V(\omega_1'',\omega_2'')W(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2\\&\qquad-\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}V(\omega_1'',\omega_2'')W(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2\Big),\end{aligned}$$

možemo pisati

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big(\beta_{k+1}(X,Y,Z)-\beta_k(X,Y,Z)\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)\\&=\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)+\frac{1}{2}\delta_k(X,Z)+\frac{1}{4}\delta_k(X,X)+\frac{1}{4}\delta_k(Z,Z).\end{aligned}\tag{5.21}$$

Sada nam je cilj α_k ocijeniti gore navedenim izrazima, tj. izrazima koji se pojavljuju u (5.21). Prvo primijenimo nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine, $|ab|\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$, na (5.20) da bismo dobili

$$\begin{aligned}&|\alpha_k(X,Y,Z)(\omega_1,\omega_2)|\\&\leqslant\frac{1}{2}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}Y(\omega_1',\omega_2'')\Big)^2\\&\quad+\frac{1}{2}\,\underbrace{\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1',\omega_2'')\Big)^2}_{:=\varepsilon_k(X,Z)}.\end{aligned}$$

Prvi član na desnoj strani je točno $\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big)(\omega_1,\omega_2)$, a dvostruki drugi član ćemo označiti s $\varepsilon_k(X,Z)(\omega_1,\omega_2)$. Uzastopnim primjenama formula (5.17) i (5.16) možemo raspisati $\varepsilon_k(X,Z)(\omega_1,\omega_2)$ kao

$$\begin{aligned}&\varepsilon_k(X,Z)(\omega_1,\omega_2)\\&=\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1',\omega_2'')\Big)^2\\&\qquad-\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1',\omega_2'')\Big)^2\Big)\\&=\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}-\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\Big)\\&\qquad\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}Z(\omega_1',\omega_2'')Z(\omega_1',\omega_2''')\Big)\\&=\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}-\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\Big)\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\\&\qquad\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}Z(\omega_1''',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2''')\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1} \\
&\qquad\qquad \Big(\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}Z(\omega_1''',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2''')\Big)\Big) \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1} \\
&\qquad\qquad \Big(\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1'''\to\omega_1'}Z(\omega_1''',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2''')\Big) \\
&\qquad\qquad - \Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}Z(\omega_1''',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2''')\Big)\Big) \\
&= \underbrace{\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2 \\ &\qquad\qquad - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2\Big)\end{aligned}}_{\delta_k(X,Z)} \\
&\quad - \underbrace{\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1} \\ &\qquad \Big(\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}Z(\omega_1''',\omega_2'')Z(\omega_1''',\omega_2''')\Big)\Big)\end{aligned}}_{:=\zeta_k(X,Z)}.
\end{aligned}
$$

Prvi član u zadnjoj jednakosti je točno $\delta_k(X,Z)(\omega_1,\omega_2)$, a drugi član (bez minusa) ćemo označiti s $\zeta_k(X,Z)(\omega_1,\omega_2)$ pa slijedi

$$
|\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big) + \frac{1}{2}\delta_k(X,Z) + \frac{1}{2}|\zeta_k(X,Z)|. \tag{5.22}
$$

Konačno, $\zeta_k(X,Z)$ ćemo ocijeniti kao

$$
|\zeta_k(X,Z)| \leqslant \frac{1}{2}\eta_k(X) + \frac{1}{2}\eta_k(Z), \tag{5.23}
$$

gdje je

$$
\eta_k(X)(\omega_1,\omega_2) := \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\Big(\Delta_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)^2.
$$

Transformiramo $\eta_k(X)$ koristeći formulu (5.17) dva puta, slično kao za $\varepsilon_k(X,Z)$, pa dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\eta_k(X)(\omega_1,\omega_2) \\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2'''\to\omega_2'}\,\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1} \\
&\quad \Big(\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)^2 - \Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1'',\omega_2''')\Big)^2\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1'''\to\omega_1'} - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\Big)\,\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_{k+1}}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_{k+1}}^{\omega_2''\to\omega_2'}X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1''',\omega_2'')\Big)^2 \\
&\quad - \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1'}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\big(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'} X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1''',\omega_2'')\big)^2 + \big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'} X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1''',\omega_2'')\big)^2\Big) \\
= \delta_k(X,X) \; - \; &\underbrace{\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1''\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1'''\to\omega_1}\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2'\to\omega_2}\big(\Delta_{\mathcal{B}_k}^{\omega_2''\to\omega_2'} X(\omega_1'',\omega_2'')X(\omega_1''',\omega_2'')\big)^2}_{\geqslant 0}.
\end{aligned}
$$

Stoga je

$$\eta_k(X) \leqslant \delta_k(X,X), \quad \eta_k(Z) \leqslant \delta_k(Z,Z). \tag{5.24}$$

Kombiniranjem (5.22)–(5.24) dobijemo

$$|\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big((Y_{k+1}-Y_k)^2\Big|\mathcal{F}_k\cap\mathcal{G}_k\Big) + \frac{1}{2}\delta_k(X,Z) + \frac{1}{4}\delta_k(X,X) + \frac{1}{4}\delta_k(Z,Z),$$

što nam zbog (5.21) daje točno ocjenu (5.12). □

5.3 Dokaz Teorema 5.3 i 5.5

Sada smo sve pripremili za dokaz ocjena (5.9) i (5.10), koje onda uspostavljaju Teoreme 5.3 i 5.5, kao što smo već prije komentirali. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da nijedna od varijabli X, Y, Z nije identički jednaka nuli, jer u tom slučaju željene ocjene trivijalno slijede. Zbog jednostavnijeg zapisa, uvest ćemo i oznaku

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k.$$

Dokaz Teorema 5.3. Uzimanjem očekivanja u (5.12), sumiranjem po k i teleskopiranjem dobije se

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}|\alpha_k(X,Y,Z)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(\mathbb{E}\beta_{k+1}(X,Y,Z) - \mathbb{E}\beta_k(X,Y,Z)) \\
&= \mathbb{E}\beta_n(X,Y,Z) - \underbrace{\mathbb{E}\beta_0(X,Y,Z)}_{\geqslant 0} \leqslant \mathbb{E}\beta_n(X,Y,Z),
\end{aligned}
$$

gdje smo u zadnjoj nejednakosti iskoristili nenegativnost procesa $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ ((5.13)).

Posljedično, iz (5.11) i nejednakosti trokuta slijedi

$$\Big|\mathbb{E}\Big((X\cdot Y)_n\,Z\Big)\Big| \leqslant \mathbb{E}\beta_n(X,Y,Z).$$

Uzimanjem očekivanja u (5.13) i primjenom uvjetne Jensenove nejednakosti dobijemo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\beta_n(X,Y,Z) &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(X^2|\mathcal{H}_n)\big)^2 + \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{H}_n) + \big(\mathbb{E}(Z^2|\mathcal{H}_n)\big)^2\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X^4|\mathcal{H}_n) + \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{H}_n) + \mathbb{E}(Z^4|\mathcal{H}_n)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\|X\|_{\mathrm{L}^4}^4 + \frac{1}{2}\|Y\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|Z\|_{\mathrm{L}^4}^4.
\end{aligned}
$$

Konačno, preostaje iskoristiti homogenost od $\mathbb{E}((X \cdot Y)_n Z)$ i zamijeniti X, Y, Z s $\frac{X}{\|X\|_{\mathrm{L}^4}}$, $\frac{Y}{\|Y\|_{\mathrm{L}^2}}$, $\frac{Z}{\|Z\|_{\mathrm{L}^4}}$, da bismo dobili

$$\frac{\Big|\mathbb{E}\Big((X \cdot Y)_n\, Z\Big)\Big|}{\|X\|_{\mathrm{L}^4}\|Y\|_{\mathrm{L}^2}\|Z\|_{\mathrm{L}^4}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Time smo dokazali (5.9), a stoga i (5.4) i (5.5). □

Dokaz od (5.10) ćemo koristeći Propoziciju 5.7 reducirati na nešto kompliciraniji, ali svejedno standardni argument zaustavljanja kojeg preuzimamo iz [56] ili [38].

Dokaz Teorema 5.5. Fiksirajmo dva vremena zaustavljanja σ i τ obzirom na filtraciju $(\mathcal{H}_k)_{k=0}^{\infty}$ za koja vrijedi

$$\sigma \leqslant \tau \leqslant n.$$

Rastavljanjem obzirom na sve moguće vrijednosti od σ i τ, primjenom (5.12) i teleskopiranjem dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{k\in[\sigma,\tau)} |\alpha_k(X,Y,Z)|\Big|\mathcal{H}_\sigma\Big) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \mathbb{E}\Big(\sum_{k=i}^{j-1} |\alpha_k(X,Y,Z)|\Big|\mathcal{H}_i\Big)\mathbb{1}_{\{\sigma=i,\tau=j\}} \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \mathbb{E}\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\Big(\mathbb{E}(\beta_{k+1}(X,Y,Z)|\mathcal{H}_k) - \beta_k(X,Y,Z)\Big)\Big|\mathcal{H}_i\Big)\mathbb{1}_{\{\sigma=i,\tau=j\}} \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \Big(\sum_{k=i}^{j-1} \mathbb{E}\Big(\beta_{k+1}(X,Y,Z) - \beta_k(X,Y,Z)\Big|\mathcal{H}_i\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{\sigma=i,\tau=j\}} \\
&= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \Big(\mathbb{E}(\beta_j(X,Y,Z)|\mathcal{H}_i) - \beta_i(X,Y,Z)\Big)\mathbb{1}_{\{\sigma=i,\tau=j\}} \\
&= \mathbb{E}\Big(\beta_\tau(X,Y,Z)\Big|\mathcal{H}_\sigma\Big) - \beta_\sigma(X,Y,Z).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Budući da je $\beta_\sigma(X,Y,Z) \geqslant 0$ i da su obje strane nejednakosti (5.25) jednake nuli izvan skupa

$$\{\sigma < \tau\} \subseteq \{\sigma < n\} \cap \{\tau > 0\},$$

uzimanjem očekivanja u (5.25) dobijemo da je

$$\mathbb{E} \sum_{k\in[\sigma,\tau)} |\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \Big\|\beta_\tau(X,Y,Z)\mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\Big\|_{\mathrm{L}^\infty} \mathbb{P}(\sigma < n). \tag{5.26}$$

Zbog Propozicije 5.7 prirodno je uvesti tri nova martingala obzirom na filtraciju $(\mathcal{H}_k)_{k=0}^{\infty}$ koja ćemo definirati kao

$$\mathcal{X}_k := \mathbb{E}(X^2|\mathcal{H}_k), \quad \mathcal{Y}_k := \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{H}_k), \quad \mathcal{Z}_k := \mathbb{E}(Z^2|\mathcal{H}_k)$$

i pripadajuće maksimalne procese

$$\bar{\mathcal{X}}_k := \max_{0\leqslant\ell\leqslant k} \mathcal{X}_\ell, \quad \bar{\mathcal{Y}}_k := \max_{0\leqslant\ell\leqslant k} \mathcal{Y}_\ell, \quad \bar{\mathcal{Z}}_k := \max_{0\leqslant\ell\leqslant k} \mathcal{Z}_\ell.$$

Primjenom (5.13) nejednakost (5.26) postaje

$$\mathbb{E}\sum_{k\in[\sigma,\tau)} |\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\big\|\mathcal{X}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}^2 + \big\|\mathcal{Y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty} + \big\|\mathcal{Z}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}^2\Big)\mathbb{P}(\sigma<n).$$

Štoviše, iz gornje nejednakosti slijedi i (na prvi pogled jača) nejednakost

$$\mathbb{E}\sum_{k\in[\sigma,\tau)} |\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \frac{3}{2}\big\|\mathcal{X}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}\big\|\mathcal{Y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}\big\|\mathcal{Z}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}\mathbb{P}(\sigma<n). \tag{5.27}$$

(5.27) dobijemo prvo uz normalizaciju

$$\big\|\mathcal{X}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty} = \big\|\mathcal{Y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty} = \big\|\mathcal{Z}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1,$$

a onda i u općenitom slučaju koristeći homogenost od $\alpha_k(X,Y,Z)$ u svakoj od varijabli X,Y,Z. (Zamijenimo X,Y,Z s $\frac{X}{\|\mathcal{X}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}}, \frac{Y}{\|\mathcal{Y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}}, \frac{Z}{\|\mathcal{Z}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1/2}}$.)

Za svaki $m\in\mathbb{Z}$ definiramo vrijeme zaustavljanja $T_m^{\mathcal{X}}$ s obzirom na filtraciju $(\mathcal{H}_k)_{k=0}^\infty$ kao

$$T_m^{\mathcal{X}} := \inf\{k\geqslant 0 : \mathcal{X}_k \geqslant 2^{2m}\}\wedge n$$

i analogno definiramo $T_m^{\mathcal{Y}}$ i $T_m^{\mathcal{Z}}$.

Lako je uočiti da je $T_{m-1}^{\mathcal{X}} = T_m^{\mathcal{X}}$ za sve osim za konačno mnogo m. Zaista, ako je $\mathcal{X}_0^{1/2} \geqslant 2^{m_0}$ za neki $m_0\in\mathbb{Z}$, onda je $T_m^{\mathcal{X}}=0$ za svaki $m\leqslant m_0$. S druge strane, ako je $\|X\|_{\mathrm{L}^\infty} < 2^{\tilde{m}_0}$ za neki $\tilde{m}_0\in\mathbb{Z}$, onda je $T_m^{\mathcal{X}} = n$ za svaki $m\geqslant\tilde{m}_0$. Posljedično, postoji samo konačno mnogo nepraznih slučajnih intervala oblika

$$[T_{m_1-1}^{\mathcal{X}}, T_{m_1}^{\mathcal{X}}) \cap [T_{m_2-1}^{\mathcal{Y}}, T_{m_2}^{\mathcal{Y}}) \cap [T_{m_3-1}^{\mathcal{Z}}, T_{m_3}^{\mathcal{Z}}) \tag{5.28}$$

za $m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}$ i oni tvore slučajnu particiju skupa $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Sad ćemo primijeniti ocjenu (5.27) na svaki slučajni interval $[\sigma,\tau)$ oblika (5.28), tj. kad je

$$\sigma = T_{m_1-1}^{\mathcal{X}} \vee T_{m_2-1}^{\mathcal{Y}} \vee T_{m_3-1}^{\mathcal{Z}} \quad \text{i} \quad \tau = T_{m_1}^{\mathcal{X}} \wedge T_{m_2}^{\mathcal{Y}} \wedge T_{m_3}^{\mathcal{Z}}.$$

Prvo, uočimo da na skupu $\{\tau=k\}$, za $k\geqslant 1$, iz svojstva (5.6) i definicije slučajne varijable $T_{m_1}^{\mathcal{X}}$ slijedi

$$\mathcal{X}_\tau = \mathcal{X}_k \leqslant A\,\|\mathcal{X}_{k-1}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant A\,2^{2m_1} \quad \text{g.s.},$$

gdje zadnja nejednakost slijedi zbog toga što je $k-1 < \tau \leqslant T^{\mathcal{X}}_{m_1}$. Stoga dobivamo da je

$$\left\|\mathcal{X}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 2^{2m_1}A, \quad \left\|\mathcal{Y}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 2^{2m_2}A, \quad \left\|\mathcal{Z}_\tau \mathbf{1}_{\{\tau>0\}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 2^{2m_3}A. \tag{5.29}$$

Isto tako, uočimo da je

$$\begin{aligned}\{\sigma < n\} &= \left\{T^{\mathcal{X}}_{m_1-1} < n\right\} \cap \left\{T^{\mathcal{Y}}_{m_2-1} < n\right\} \cap \left\{T^{\mathcal{Z}}_{m_3-1} < n\right\} \\ &\subseteq \left\{\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m_1-2}\right\} \cap \left\{\bar{\mathcal{Y}}_n \geqslant 2^{2m_2-2}\right\} \cap \left\{\bar{\mathcal{Z}}_n \geqslant 2^{2m_3-2}\right\}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Sada iz (5.27) i (5.29) slijedi

$$\mathbb{E} \sum_{k\in[\sigma,\tau)} |\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant \frac{3}{2} A^{3/2} 2^{m_1+m_2+m_3} \mathbb{P}(\sigma < n)$$

pa nam sumiranje po svim $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ i korištenje (5.30) daje

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k(X,Y,Z)| \leqslant\ & \frac{3}{2} A^{3/2} \sum_{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}} 2^{m_1+m_2+m_3} \\ & \min\left\{\mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m_1-2}\Big), \mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{Y}}_n \geqslant 2^{2m_2-2}\Big), \mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{Z}}_n \geqslant 2^{2m_3-2}\Big)\right\}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Ovaj put ćemo normalizirati varijable X, Y, Z tako da vrijedi

$$\|X\|_{\mathrm{L}^p} = \|Y\|_{\mathrm{L}^q} = \|Z\|_{\mathrm{L}^{r'}} = 1.$$

Prisjetimo se da je $2 < p, q, r' < \infty$ pa nam Doobova L^p nejednakost i uvjetna Jensenova nejednakost daju

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\bar{\mathcal{X}}_n|^{p/2} \leqslant \left(\frac{p}{p-2}\right)^{p/2} \mathbb{E}|\mathcal{X}_n|^{p/2} &= \left(\frac{p}{p-2}\right)^{p/2} \mathbb{E}\Big(|\mathbb{E}(X^2|\mathcal{H}_n)|\Big)^{p/2} \\ &\leqslant \left(\frac{p}{p-2}\right)^{p/2} \|X\|^p_{\mathrm{L}^p} = \left(\frac{p}{p-2}\right)^{p/2}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Uočimo i da je iz Leme 2.5

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\bar{\mathcal{X}}_n|^{p/2} = \frac{p}{2}\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant t)\,dt &\geqslant \frac{p}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{2m-2}}^{2^{2m}} t^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant t)\,dt \\ &\geqslant \frac{p}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{2m-2}}^{2^{2m}} \Big(2^{2m-2}\Big)^{\frac{p}{2}-1}\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m})\,dt \\ &= \frac{3p}{2^{p+1}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mp}\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m}),\end{aligned} \tag{5.33}$$

gdje smo u drugoj nejednakosti koristili da je $t \mapsto t^{p/2-1}$ rastuća funkcija te da je $t \mapsto$

$\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant t)$ padajuća funkcija. Sada iz (5.32) i (5.33) slijedi

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mp}\,\mathbb{P}(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m}) \leqslant C_p,$$

i analogno

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mq}\,\mathbb{P}(\bar{\mathcal{Y}}_n \geqslant 2^{2m}) \leqslant C_q, \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{mr'}\mathbb{P}(\bar{\mathcal{Z}}_n \geqslant 2^{2m}) \leqslant C_r$$

za neke pozitivne konstante C_p, C_q, C_r koje ovise samo o eksponentima p, q i r redom. Da bismo mogli kontrolirati desnu stranu u (5.31) podijelit ćemo skup po kojem sumiramo, $\mathbb{Z}^3$, na tri podskupa ovisno o tome koji je od brojeva $pm_1, qm_2, r'm_3$ najveći. Zbog simetrije dovoljno je ograničiti jednu od ove tri podsume. Kad je pm_1 najveći broj vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ pm_1\geqslant qm_2,\ pm_1\geqslant r'm_3}} 2^{m_1+m_2+m_3}\min\Big\{\mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m_1-2}\Big), \mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{Y}}_n \geqslant 2^{2m_2-2}\Big), \mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{Z}}_n \geqslant 2^{2m_3-2}\Big)\Big\}\\
&\leqslant \sum_{m_1\in\mathbb{Z}} 2^{pm_1}\Bigg(\sum_{\substack{m_2\in\mathbb{Z}\\ m_2\leqslant(p/q)m_1}} 2^{m_2-(p/q)m_1}\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{m_3\in\mathbb{Z}\\ m_3\leqslant(p/r')m_1}} 2^{m_3-(p/r')m_1}\Bigg)\mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m_1-2}\Big)\\
&\leqslant 4\sum_{m_1\in\mathbb{Z}} 2^{pm_1}\mathbb{P}\Big(\bar{\mathcal{X}}_n \geqslant 2^{2m_1-2}\Big) \leqslant 2^{p+2}\,C_p,
\end{aligned}$$

gdje smo u trećem retku iskoristili da je $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$. Analogno, kada je qm_2 ili $r'm_3$ najveći, pripadajuće sume možemo ograničiti s $2^{q+2}\,C_q$ i $2^{r'+2}\,C_r$ redom. Konačno, iz (5.31) slijedi

$$\Big|\mathbb{E}((X\cdot Y)_n Z)\Big| \leqslant \underbrace{\frac{3}{2}\Big(2^{p+2}\,C_p + 2^{q+2}\,C_q + 2^{r'+2}\,C_r\Big)}_{:=C_{p,q,r}} A^{3/2}.$$

Opet preostaje iskoristiti homogenost od $\mathbb{E}((X\cdot Y)_n Z)$ i zamijeniti X, Y, Z s $\frac{X}{\|X\|_{\mathrm{L}^p}}$, $\frac{Y}{\|Y\|_{\mathrm{L}^q}}$, $\frac{Z}{\|Z\|_{\mathrm{L}^{r'}}}$. To dovršava dokaz ocjene (5.10), a prema tome i (5.7). $\square$

5.4 Uvjetna nezavisnost σ-algebri

Na kraju ovog poglavlja želimo još razviti malo bolju intuiciju o σ-algebrama iz prethodnih odjeljaka.

Dokazat ćemo da su σ-algebre $\mathcal{F}_k$ i $\mathcal{G}_\ell$ zapravo nezavisne uvjetno na njihov presjek $\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_\ell$ za bilo koje trenutke k i ℓ. U sljedećoj propoziciji promatramo općenite σ-algebre čija uvjetna očekivanja komutiraju, ali uz dodatnu tehničku pretpostavku na potpunost vjerojatnosnog prostora.

Propozicija 5.10 Neka je $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ potpuni vjerojatnosni prostor te neka su $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ σ-algebre koje sadrže sve događaje iz $\mathcal{E}$ $\mathbb{P}$-mjere nula. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) $\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}\Big)$ g.s. za svaki $X \in \mathrm{L}^1$;

(b) $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ su uvjetno nezavisne na $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, tj.

$$\mathbb{P}(A\cap B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) = \mathbb{P}(A|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\,\mathbb{P}(B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad \text{g.s.}$$

za sve $A\in\mathcal{F}$ i $B\in\mathcal{G}$.

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b): Zbog potpunosti uvjet (a) također povlači

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}\Big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad \text{g.s.} \tag{5.34}$$

Naime, lijeva strana u (a) je $\mathcal{G}$-izmjeriva funkcija koja je g.s. jednaka nekoj $\mathcal{F}$-izmjerivoj funkciji pa ona, zbog potpunosti vjerojatnosnog prostora, mora biti i $\mathcal{F}$-izmjeriva. To pak znači da imamo $(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$-izmjerivost. Primjena gornje jednakosti na indikatorsku funkciju $\mathbb{1}_B$ za neki $B\in\mathcal{G}$ daje

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{G})|\mathcal{F}\Big) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad \text{g.s.}$$

i stoga za $A\in\mathcal{F}$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B|\mathcal{F})\Big|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F})\Big|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\Big|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\\ &= \mathbb{P}(A|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\,\mathbb{P}(B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad \text{g.s.,}\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Uzmimo proizvoljan $X\in\mathrm{L}^1$. Zbog simetrije je dovoljno pokazati da je

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}\Big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \qquad \text{g.s.} \tag{5.35}$$

Uvjet nezavisnosti primijenjen na slučajne varijable $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ i $\mathbb{1}_B$ za proizvoljan $B\in\mathcal{G}$ daje nam

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbf{1}_B\Big|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Big) &= \mathbb{E}(X|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\mathbf{1}_B\Big|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Big) \qquad \text{g.s.}\end{aligned}$$

Konačno, uzimanjem očekivanja u gornjoj jednakosti dobijemo

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbf{1}_B\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\mathbf{1}_B\Big),$$

što po definiciji uvjetnog očekivanja točno dokazuje (5.35). □

U prethodnim odjeljcima nismo pretpostavljali potpunost vjerojatnosnog prostora, ali u tamo razmatranom slučaju je jednakost (5.34) dokazana u sklopu Leme 5.9 pa vrijedi analogon prethodne propozicije.

Napomena 5.11 Motivirani Propozicijom 5.10 možemo uočiti da nam uz pretpostavku potpunosti više ne treba pretpostavka da su $\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{B}_k$ σ-algebre generirane prebrojivim particijama od Ω_1 i Ω_2 koja nam je trebala za dokaz Leme 5.9 (b).

Preciznije, pretpostavit ćemo da su sada $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{B}, \mathbb{P}_2)$ dva potpuna vjerojatnosna prostora te da su filtracije $(\mathcal{A}_k)_{k=0}^\infty$ i $(\mathcal{B}_k)_{k=0}^\infty$ σ-algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takve da $\mathcal{A}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{A}$ $\mathbb{P}_1$-mjere nula, a $\mathcal{B}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{B}$ $\mathbb{P}_2$-mjere nula. To je upravo diskretna varijantna standardnih pretpostavki na filtrirane prostore. Radit ćemo na vjerojatnosnom prostoru

$$(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}),$$

gdje je $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ je produktna mjera, a $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ je upotpunjenje produktne σ-algebre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ obzirom na mjeru $\mathbb{P}$. Filtracije $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ i $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^\infty$ ćemo sada definirati kao upotpunjenja filtracija (5.3) obzirom na produktnu mjeru $\mathbb{P}$:

$$\mathcal{F}_k := \overline{\mathcal{A}_k \otimes \mathcal{B}}, \quad \mathcal{G}_k := \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_k} \qquad \text{za svaki } k \geqslant 0.$$

Lako se pokaže da i uz ovako definiran vjerojatnosni prostor i filtracije vrijedi Lema 5.9 (b). Relacije (5.15) su opet Fubinijev teorem. Prva jednakost u (5.16) trivijalno slijedi za sve $W = \mathbf{1}_{S_1 \times S_2}$, $S_1 \in \mathcal{A}$, $S_2 \in \mathcal{B}$, jer je

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1' \to \omega_1} \mathbb{E}_{\mathcal{B}_l}^{\omega_2' \to \omega_2} \mathbb{1}_{S_1}(\omega_1') \mathbb{1}_{S_2}(\omega_2') = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_1} | \mathcal{A}_k)(\omega_1) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_2} | \mathcal{B}_l)(\omega_2).$$

Korištenjem teorema o Dynkinovim klasama pokažemo da ista jednakost vrijedi i za sve $W = \mathbb{1}_S$, za $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Isto tako, očito je za $N \in \mathcal{E}$ takav da je $\mathbb{P}(N) = 0$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1' \to \omega_1} \mathbb{E}_{\mathcal{B}_l}^{\omega_2' \to \omega_2} \mathbb{1}_N(\omega_1', \omega_2') = 0 = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_l}^{\omega_2' \to \omega_2} \mathbb{E}_{\mathcal{A}_k}^{\omega_1' \to \omega_1} \mathbb{1}_N(\omega_1', \omega_2'),$$

pa se onda standardnim aproksimacijskim argumentima tvrdnja proširi i na sve $W \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Nakon što uspostavimo tu jednakost, možemo je drugačije zapisati koristeći (5.15) kao

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(W | \mathcal{G}_\ell) \Big| \mathcal{F}_k\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(W | \mathcal{F}_k) \Big| \mathcal{G}_\ell\Big), \tag{5.36}$$

pa zbog potpunosti obje strane moraju biti jednake $\mathbb{E}(W | \mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_\ell)$ (kao što smo obrazložili u Propoziciji 5.10). Napomenimo još da podrazumijevamo da svi prethodno navedeni identiteti vrijede g.s. obzirom na mjeru $\mathbb{P}$.

Ostatak Leme 5.9 i Propozicija 5.7 dokazuju se kao u Odjeljku 5.2. Stoga i u ovom slučaju vrijede ocjene iz Teorema 5.3 i 5.5. Te ocjene bit će nam važne za konstrukciju stohastičkog integrala u sljedećem poglavlju. ∎

Poglavlje 6

Zapetljani paraprodukti i stohastički integrali

U ovom poglavlju bavit ćemo se primjenom martingalnih ocjena dobivenih u Teoremima 5.3 i 5.5.

Prva primjena će biti dokaz određenih L^p ocjena za zapetljane paraprodukte s obzirom na opće dilatacije, čije se varijante pojavljuju u literaturi. Druga primjena će biti konstrukcija stohastičkog integrala $\int_0^t H_s d(X_s Y_s)$ povezanog s određenim martingalima s neprekidnim vremenom $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$. Pokazuje se da je proces $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ "dobar integrator", iako nije nužno semimartingal, jer nije čak ni adaptiran na bilo koju prigodnu filtraciju.

6.1 Zapetljani paraprodukt

Jednu verziju paraprodukta, takozvani *zapetljani paraprodukt*, uveli su Demeter i Thiele u [25], kao poseban slučaj dvodimenzionalne varijante dobro poznate bilinearne Hilbertove transformacije [42], [43].

Neka su φ, ψ dvije Schwartzove funkcije na $\mathbb{R}$ takve da je $\operatorname{supp}(\hat{\psi}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$, gdje $\operatorname{supp}(\hat{\psi})$ označava nosač funkcije $\hat{\psi}$, a $\hat{\psi}$ je *Fourierova transformacija* funkcije ψ koja se definira kao

$$\hat{\psi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx.$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definiramo i dijadske dilatacije funkcija φ i ψ,

$$\varphi_k(x) := 2^k \varphi(2^k x) \quad \text{i} \quad \psi_k(x) := 2^k \psi(2^k x).$$

Definicija 6.1 *Zapetljani paraprodukt* je operator T koji se definira kao

$$T(F,G) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (P^{(1)}_{\varphi_k} F)(P^{(2)}_{\psi_k} G), \tag{6.1}$$

za funkcije $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

U gornjoj definiciji su $P^{(1)}_{\varphi_k}$ i $P^{(2)}_{\psi_k}$ Littlewood-Paleyjeve projekcije u prvoj i drugoj varijabli, tj.

$$(P^{(1)}_{\varphi_k}F)(x,y) := \int_{\mathbb{R}} F(x-t,y)\varphi_k(t)dt \quad \text{i} \quad (P^{(2)}_{\psi_k}G)(x,y) := \int_{\mathbb{R}} G(x,y-t)\psi_k(t)dt.$$

L^p ocjene za operator (6.1) bile su glavni rezultat u članku [38].

Teorem 6.2 (Kovač)

$$\|T(F,G)\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\|F\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)}\|G\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^2)}, \tag{6.2}$$

za sve eksponente $1 < p, q < \infty, 1 \leqslant r < 2$ takve da je $1/r = 1/p + 1/q$. C je pozitivna konstanta koja ovisi samo o p, q, r.

U ovom poglavlju želimo generalizirati L^p ocjene oblika (6.2) na zapetljane paraprodukte obzirom na opću dilatacijsku strukturu.

6.1.1 Opći zapetljani paraprodukt

Iako ćemo zapravo slijediti dokaz Teorema 6.2 iz [38], želimo pokazati kako se Teorem 5.5 može prevesti u operatore konvolucijskog tipa korištenjem Christove konstrukcije dijadskih kocki u prostorima homogenog tipa ([19]) i ocjene kvadratne funkcije od Jonesa, Seegera i Wrighta ([35]).

Počet ćemo s uvođenjem opće dilatacijske strukture (koja je uglavnom preuzeta iz [55] i [35]).

Neka su d_1, d_2 dva prirodna broja i neka je $d = d_1 + d_2$, tako da se euklidski prostor $\mathbb{R}^d$ rastavlja kao $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Neka su $(\delta^{(1)}_t)_{t>0}$ i $(\delta^{(2)}_t)_{t>0}$ dvije multiplikativne *dilatacijske grupe* s jednim parametrom na $\mathbb{R}^{d_1}$ i $\mathbb{R}^{d_2}$ redom. Drugim riječima, vrijedi:

- $\delta^{(j)}_t \colon \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{R}^{d_j}$ je linearna transformacija za $t > 0$, $j = 1, 2$,
- $\delta^{(j)}_1$ je identiteta i $\delta^{(j)}_{st} = \delta^{(j)}_s \delta^{(j)}_t$ za $s, t > 0$, $j = 1, 2$,
- preslikavanje $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{R}^{d_j}$, $(t, x) \mapsto \delta^{(j)}_t x$ je neprekidno za $j = 1, 2$,
- $\lim_{t\to 0} \delta^{(j)}_t x = \mathbf{0}$ za $x \in \mathbb{R}^{d_j}$, $j = 1, 2$.

Može se pokazati da dilatacijske grupe moraju biti oblika

$$\delta^{(j)}_t = t^{A_j} = e^{(\log t)A_j}, \quad t > 0,\ j = 1, 2$$

za neke matrice $A_j \in \mathrm{M}_{d_j}(\mathbb{R})$ takve da sve njihove svojstvene vrijednosti imaju pozitivne realne dijelove (za dokaz vidi [55]). A_j je zapravo infinitezimalni generator grupe. Napomenimo da ovdje preferiramo promatrati grupe s multiplikativnim parametrom $t \in (0, +\infty)$, dok se logaritmiranjem lako prelazi u češće korišteni aditivni parametar $\tau = \log t \in \mathbb{R}$.

Primjer 6.3 *Neizotropne dilatacije* (dilatacije koje nisu uniformne u svim smjerovima) na $\mathbb{R}^n$ definiraju se kao

$$\delta_t(x_1, \ldots, x_n) := \Big(t^{a_1} x_1, \ldots, t^{a_n} x_n\Big),$$

za fiksirane parametre $a_1, \ldots, a_n > 0$. One očito čine dilatacijsku grupu u kojoj je pripadajuća generatorska matrica dijagonalna, tj. $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. ■

Neka su sad $\varphi^{(j)} \colon \mathbb{R}^{d_j} \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ dvije Schwartzove funkcije normalizirane s

$$\int_{\mathbb{R}^{d_j}} \varphi^{(j)}(x) dx = 1.$$

Njihove dilatacije obzirom na dilatacijske grupe $(\delta_t^{(j)})_{t>0}$ označavamo s

$$\varphi_t^{(j)}(x) := \Big(\det \delta_t^{(j)}\Big) \varphi^{(j)}\Big(\delta_t^{(j)} x\Big), \quad x \in \mathbb{R}^{d_j},\ t > 0,\ j = 1, 2. \tag{6.3}$$

Diskretizirat ćemo skale tako da uzmemo dva parametra $0 < \alpha, \beta < 1$ i promatramo njihove cjelobrojne potencije. U kasnijim dokazima prirodno će se pojaviti poseban izbor parametara α i β, slično kao što je prirodno uzeti $\alpha = \beta = 2$ za standardnu dijadsku dilatacijsku strukturu.

Za svaki cijeli broj $k \in \mathbb{Z}$ s $\mathrm{P}_k^{(1)}$ i $\mathrm{P}_k^{(2)}$ ćemo označiti sljedeće glatke "projekcije",

$$\begin{aligned} (\mathrm{P}_k^{(1)} f)(x, y) &:= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x - u, y) \varphi_{\alpha^k}^{(1)}(u) du, \\ (\mathrm{P}_k^{(2)} f)(x, y) &:= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y - v) \varphi_{\beta^k}^{(2)}(v) dv. \end{aligned}$$

Vidimo da su $\mathrm{P}_k^{(j)} f$, $j = 1, 2$, zapravo parcijalne konvolucije funkcije f s dilatacijama $\varphi^{(j)}$.

Po analogiji s [38] uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 6.4 *Opći zapetljani paraprodukt* je operator $T_{\alpha,\beta}$ koji se definira kao

$$T_{\alpha,\beta}(f, g) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\mathrm{P}_k^{(1)} f\Big) \Big(\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} g - \mathrm{P}_k^{(2)} g\Big). \tag{6.4}$$

Izraz (6.4) je dobro definiran za funkcije f i g klase C^1 s kompaktnim nosačem. Važna karakteristika ovog operatora paraproduktnog tipa je da ima svojstvo poništavanja iako projekcije $\mathrm{P}_k^{(1)}$ i razlike $\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} - \mathrm{P}_k^{(2)}$ djeluju na različitim skupovima varijabli.

Po uzoru na Teorem 6.2 možemo formulirati sljedeći rezultat, koji je zapravo posljedica ocjena iz Teorema 5.5.

Korolar 6.5 Postoje parametri $0 < \alpha, \beta < 1$, koji ovise samo o dilatacijskoj strukturi, takvi da ocjena

$$\Big\|T_{\alpha,\beta}(f,g)\Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \tag{6.5}$$

vrijedi za sve eksponente $1 < r < 2 < p, q < \infty$ takve da je $1/r = 1/p + 1/q$. C je pozitivna konstanta koja ovisi o p, q, r, α, β, $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ i dilatacijskim grupama.

Korolar 6.5 bi se mogao proširiti i na općenitije singularne integralne operatore, na veći raspon L^p prostora, ili čak na određene Soboljevljeve prostore kao što je i napravljeno za poseban slučaj u [7], [8], [37], [38] i [39]. U ovom radu nećemo raspravljati o navedenim generalizacijama, jer se onda previše udaljavamo od martingalne metode jednom kad uspostavimo ocjenu (6.5).

Prije dokaza Korolara 6.5 dajemo i definiciju *prostora homogenog tipa* na kojem ćemo raditi.

Definicija 6.6 Prostor homogenog tipa je uređena trojka (X, ρ, μ), gdje je X skup s kvazimetrikom ρ, a μ je pozitivna mjera na Borelovim podskupovima od X za koju vrijedi

$$\mu\Big(\mathrm{B}(x,r)\Big) < \infty \qquad \text{za sve } x \in X \text{ i } r > 0$$

i postoji konačna konstanta $C < \infty$ takva da je

$$\mu\Big(\mathrm{B}(x,2r)\Big) < C\mu\Big(\mathrm{B}(x,r)\Big) \qquad \text{za sve } x \in X \text{ i } r > 0. \tag{6.6}$$

Kvazimetrika ρ je funkcija $\rho : X \times X \to [0,\infty]$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $\rho(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ za sve $x, y \in X$;

(iii) $\rho(x, y) \leqslant C_0\rho(x, z) + C_0\rho(z, y)$ za sve $x, y, z \in X$, za neki $C_0 < \infty$.

$\mathrm{B}(x, r)$ označava kuglu sa središtem u x polumjera $r > 0$, tj.

$$\mathrm{B}(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

Svojstvo (6.6) naziva se *svojstvom dubliranja.*

Klasični primjeri prostora homogenog tipa su

- $\mathbb{R}^n$ sa standardnom euklidskom metrikom i Lebesgueovom mjerom;
- kompaktna Riemannova mnogostrukost klase C^∞ s Riemannovom metrikom i volumenom.

Definiciju prostora homogenog tipa su prvi uveli Coifman i Weiss u [21] u još većoj općenitosti. Oni su postali standarno okruženje u teoriji singularnih integrala.

6.1.2 Dokaz Korolara 6.5

Neka su $(\delta_t^{(1)})_{t>0}$ i $(\delta_t^{(2)})_{t>0}$ dilatacijske grupe iz Pododjeljka 6.1.1. Stein i Wainger su
pokazali su da se eksplicitno mogu konstruirati kvazinorme $\rho^{(j)}\colon \mathbb{R}^{d_j} \to [0,\infty)$, $j=1,2$, za koje vrijedi

$$\rho^{(j)}(\delta_t^{(j)}x) = t\,\rho^{(j)}(x) \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t>0,\ j=1,2. \tag{6.7}$$

Štoviše, $\mathbb{R}^{d_j}$ zajedno s kvazimetrikom $\tilde{\rho}^{(j)}$ (koja je inducirana kvazinormom $\rho^{(j)}$) i d_j-dimenzionalnom Lebesgueovom mjerom $|\cdot|$ postaju prostori homogenog tipa. U kontekstu Definicije 6.6 pod tim podrazumijevamo da je Lebesgueova mjera konačna na $\rho^{(j)}$-kuglama i da ima svojstvo dubliranja, tj. vrijedi

$$\left|\mathrm{B}_{\rho^{(j)}}(x,2r)\right| \leqslant M\left|\mathrm{B}_{\rho^{(j)}}(x,r)\right| \tag{6.8}$$

za sve $x\in\mathbb{R}^{d_j}$, $r>0$, $j=1,2$, uz neku apsolutnu konstantu $M>0$.

Michael Christ je u [19] dokazao da se na općenitom prostoru homogenog tipa (X,ρ,μ) može konstruirati familija otvorenih skupova $\{Q_\alpha^k : k\in\mathbb{Z}, \alpha\in I_k\}$ koje nazivamo *dijadskim kockama*. $\{Q_\alpha^k\}$ možemo zamišljati kao analogone euklidskih dijadskih kocki koji zadovoljavaju slična svojstva.

Budući da su $(\mathbb{R}^{d_j}, \tilde{\rho}^{(j)}, |\cdot|)$, $j=1,2$, prostori homogenog tipa, Christova konstrukcija nam daje egzistenciju dviju familija

$$\left\{Q_{k,i}^{(j)} \,:\, k\in\mathbb{Z},\ i\in I_k^{(j)}\right\},\quad j=1,2,\quad I_k^{(j)} \text{ su prebrojivi skupovi indeksa,}$$

$\rho^{(j)}$-otvorenih skupova $Q_{k,i}^{(j)}$ i konstanti $0<\gamma_1,\gamma_2<1$, $\varepsilon>0$, $M'<\infty$ sa sljedećim svojstvima.

(1) Za fiksni $k\in\mathbb{Z}$ i $j\in\{1,2\}$ skupovi $\{Q_{k,i}^{(j)} : i\in I_k^{(j)}\}$ tvore prebrojivu particiju od $\mathbb{R}^{d_j}$ do na skup mjere nula.

(2) Za sve $k,k'\in\mathbb{Z}$, $k>k'$, $i\in I_k^{(j)}$, $i'\in I_{k'}^{(j)}$, $j\in\{1,2\}$ ili je $Q_{k,i}^{(j)}\subseteq Q_{k',i'}^{(j)}$ ili $Q_{k,i}^{(j)}\cap Q_{k',i'}^{(j)}=\emptyset$.

(3) Za sve $k,k'\in\mathbb{Z}$, $k>k'$, $i\in I_k^{(j)}$, $j\in\{1,2\}$ postoji jedinstveni $i'\in I_{k'}^{(j)}$ takav da je $Q_{k,i}^{(j)}\subseteq Q_{k',i'}^{(j)}$.

(4) Za sve $k\in\mathbb{Z}$, $i\in I_k^{(j)}$, $j\in\{1,2\}$ postoji točka $x_{k,i}^{(j)}\in\mathbb{R}^{d_j}$ takva da je

$$\mathrm{B}_{\rho^{(j)}}\Big(x_{k,i}^{(j)},\gamma_j^k\Big)\subseteq Q_{k,i}^{(j)}\subseteq \mathrm{B}_{\rho^{(j)}}\Big(x_{k,i}^{(j)},M'\gamma_j^k\Big).$$

(5) Ako su $k \in \mathbb{Z}$, $i \in I_k^{(j)}$, $i' \in I_{k+1}^{(j)}$, $j \in \{1,2\}$ takvi da je $Q_{k+1,i'}^{(j)} \subseteq Q_{k,i}^{(j)}$, tada je

$$\left|Q_{k+1,i'}^{(j)}\right| \geqslant \varepsilon \left|Q_{k,i}^{(j)}\right|.$$

(6) Za sve $k \in \mathbb{Z}$, $i \in I_k^{(j)}$, $j \in \{1,2\}$ i $\vartheta > 0$ vrijedi

$$\left|\left\{x \in Q_{k,i}^{(j)} \ : \ \rho^{(j)}\left(x, \mathbb{R}^{d_j} \setminus Q_{k,i}^{(j)}\right) < \vartheta \gamma_j^k\right\}\right| \leqslant M' \vartheta^{\varepsilon} \left|Q_{k,i}^{(j)}\right|.$$

Napomena 6.7 Po (2) i (3) vidimo da $\{Q_{k,i}^{(j)}\}$ imaju neka svojstva euklidskih dijadskih kocaka. Svojstvo (4) nam kaže da svaka "kocka" $Q_{k,i}^{(j)}$ sadrži neku otvorenu kuglu sa središtem u $x_{k,i}^{(j)}$ i sadržana je unutar neke otvorene kugle sa središtem u $x_{k,i}^{(j)}$. Zapravo, $Q_{k,i}^{(j)}$ možemo zamišljati kao kocke ili kugle promjera otprilike γ_j^k sa središtem u $x_{k,i}^{(j)}$.

Svojstvo (6) kaže da masa *dijadske kocke* $Q_{k,i}^{(j)}$ nikad nije jako koncentrirana blizu ruba, tj. da je indikatorska funkcija od $Q_{k,i}^{(j)}$ na neki način glatka. ■

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definiramo σ-algebre

$$\mathcal{A}_k := \sigma\Big(\Big\{Q_{k,i}^{(1)} \ : \ i \in I_k^{(1)}\Big\}\Big), \quad \mathcal{B}_k := \sigma\Big(\Big\{Q_{k,i}^{(2)} \ : \ i \in I_k^{(2)}\Big\}\Big)$$

na $\mathbb{R}^{d_1}$ i $\mathbb{R}^{d_2}$ redom. Neka su sad $\mathcal{F}_k$ i $\mathcal{G}_k$ σ-algebre na $\mathbb{R}^d$ definirane s (5.3).

Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ nije konačna, ali ako ograničimo našu pozornost na samo jednu veliku "produktnu kocku" $Q_{k,i}^{(1)} \times Q_{k,i'}^{(2)}$, tada svakako možemo normalizirati mjeru da dobijemo vjerojatnosni prostor. U tom slučaju su uvjetna očekivanja obzirom na $\mathcal{F}_k$ i $\mathcal{G}_k$ jednostavno

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)(x,y) &= \left|Q_{k,i_1}^{(1)}\right|^{-1} \int_{Q_{k,i_1}^{(1)}} f(u,y)du, \\
\mathbb{E}(f|\mathcal{G}_k)(x,y) &= \left|Q_{k,i_2}^{(2)}\right|^{-1} \int_{Q_{k,i_2}^{(2)}} f(x,v)dv,
\end{aligned}$$

gdje su $i_1 \in I_k^{(1)}$, $i_2 \in I_k^{(2)}$ g.s.-jedinstveni indeksi za koje je $x \in Q_{k,i_1}^{(1)}$, $y \in Q_{k,i_2}^{(2)}$.

Štoviše, presječna filtracija $(\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)_{k \geqslant 0}$ zadovoljava uvjet (5.6) (svojstvo uniformnog rasta) jer za $f \geqslant 0$ i

$$(x,y) \in Q_{k+1,i_1'}^{(1)} \times Q_{k+1,i_2'}^{(2)} \subseteq Q_{k,i_1}^{(1)} \times Q_{k,i_2}^{(2)}$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k+1} \cap \mathcal{G}_{k+1})(x,y) \ = \ \left|Q_{k+1,i_1'}^{(1)}\right|^{-1} \left|Q_{k+1,i_2'}^{(2)}\right|^{-1} \int_{Q_{k+1,i_1'}^{(1)} \times Q_{k+1,i_2'}^{(2)}} f(u,v)\, dudv \\
&\leqslant \left(\varepsilon \left|Q_{k,i_1}^{(1)}\right|\right)^{-1} \left(\varepsilon \left|Q_{k,i_2}^{(2)}\right|\right)^{-1} \int_{Q_{k,i_1}^{(1)} \times Q_{k,i_2}^{(2)}} f(u,v)\, dudv \ = \ \varepsilon^{-2}\, \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k \cap \mathcal{G}_k)(x,y),
\end{aligned}$$

gdje nejednakost slijedi iz svojstva (5) dijadskih kocaka. Stoga možemo uzeti $A = \varepsilon^{-2}$.

Napomena 6.8 Da bismo dokazali ocjenu (6.5) za $T_{\alpha,\beta}$ dovoljno je pokazati da ista ocjena vrijedi za parcijalne sume

$$T_n(f,g) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{P}_k^{(1)} f\right) \left(\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} g - \mathrm{P}_k^{(2)} g\right) \tag{6.9}$$

s konstantom koja ne ovisi o n. Tada možemo pomaknuti indekse u sumi i zatim proširiti ocjenu s konačnog raspona indeksa k na cijeli $\mathbb{Z}$ puštanjem limesa i korištenjem Fatouove leme. ∎

Za dokaz Korolara 6.5 trebat će nam još i neke dodatne ocjene. Od velike važnosti bit će nam ocjena kvadratne funkcije Jonesa, Seegera i Wrighta ([35]), koja kontrolira razliku između konvolucija i uvjetnih očekivanja.

Neka (X, ρ, μ) prostor homogenog tipa i $\{Q_\alpha^k : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k\}$ Christova familija dijadskih kocaka koja zadovoljava svojstva (1)–(6) s konstantama $0 < \gamma < 1$, $\tilde{\varepsilon} > 0$ i $\tilde{M}' < \infty$. Ako za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definiramo σ-algebru

$$\tilde{F}_k := \sigma\Big(\Big\{Q_\alpha^k : \alpha \in I_k\Big\}\Big),$$

tada vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 6.9 (Jones, Seeger, Wright) Neka je φ Schwartzova funkcija na $\mathbb{R}^d$ takva da je $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$. Definiramo kvadratnu funkciju

$$\mathcal{S}_{\mathrm{JSW}} f := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\mathrm{P}_k f - \mathbb{E}(f|\tilde{\mathcal{F}}_k)\Big|^2\Big)^{1/2},$$

gdje je

$$\mathrm{P}_k f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\varphi_{\gamma^k}(t)dt,$$

konvolucija funkcije f s dilatacijama funkcije φ, a $\gamma \in (0,1)$ konstanta koja se pojavljuje u konstrukciji dijadskih kocki. Tako definirana kvadratna funkcija je ograničena s $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, tj. vrijedi

$$\|\mathcal{S}_{\mathrm{JSW}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za pozitivnu konstantu C_p koja ovisi samo o p.

U gornjoj propoziciji su φ_{γ^k} dilatacije funkcije φ obzirom na neku dilatacijsku grupu $(\delta_t)_{t>0}$ definirane s (6.3).

Konačno smo spremni za dokaz korolara 6.5.

Dokaz Korolara 6.5. Fiksirajmo eksponente p, q, r kao u iskazu korolara i uzmimo $f \in$

$\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Izabrat ćemo parametre $\alpha = \gamma_1$ i $\beta = \gamma_2$, gdje su γ_1 i γ_2 konstante iz konstrukcije dijadskih kocki $\{Q_{k,i}^{(j)} : k \in \mathbb{Z}, i \in I_k^j\}$, $j = 1, 2$.

Definirajmo slučajne procese $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ i $(K_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ s

$$X_k := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k), \quad Y_k := \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_k) \quad \text{i} \quad K_k = 1.$$

Na njih možemo primijeniti Teorem 5.5 da bismo dobili ocjenu

$$\Big\|\widetilde{T}_n(f,g)\Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{p,q,r} A^{3/2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \tag{6.10}$$

za operator

$$\widetilde{T}_n(f,g) := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)\Big(\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_{k+1}) - \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_k)\Big).$$

Preciznije, (5.7) se mora primijeniti na procese (X_k) i (Y_k) koji su lokalizirani na samo jednu "veliku" produktnu kocku, da bi uz odgovarajuću normalizaciju mogli dobiti vjerojatnosni prostor. Ocjena (6.10) se potom može proširiti i na cijeli $\mathbb{R}^d$ zbog odgovarajućeg skaliranja, $1/r = 1/p + 1/q$. To radimo standardnim argumentima prijenosa.

Jednom kad imamo ocjenu (6.10), dovoljno je ograničiti razliku $T_n(f,g) - \widetilde{T}_n(f,g)$, koju možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} T_n(f,g) - \widetilde{T}_n(f,g) = &\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\mathrm{P}_k^{(1)} f - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)\Big)\Big(\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} g - \mathrm{P}_k^{(2)} g\Big) \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)\Big)\Big(\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} g - \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_{k+1})\Big) \\ &+ \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)\Big(\mathrm{P}_n^{(2)} g - \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_n)\Big) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0)\Big(\mathrm{P}_0^{(2)} g - \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_0)\Big). \end{aligned}$$

Iz Propozicije 6.9, zapisano u našim oznakama, slijedi

$$\|\mathcal{S}_{\mathrm{JSW}}^{(1)} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{i} \quad \|\mathcal{S}_{\mathrm{JSW}}^{(2)} g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_q \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.11}$$

gdje su

$$\mathcal{S}_{\mathrm{JSW}}^{(1)} f := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\mathrm{P}_k^{(1)} f - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)\Big|^2\Big)^{1/2} \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{JSW}}^{(2)} g := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\mathrm{P}_k^{(2)} g - \mathbb{E}(g|\mathcal{G}_k)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Ako još označimo

$$\mathcal{S}_{\mathrm{konv}}^{(2)} g := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\mathrm{P}_{k+1}^{(2)} g - \mathrm{P}_k^{(2)} g\Big|^2\Big)^{1/2} \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{mart}}^{(1)} f := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k+1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)\Big|^2\Big)^{1/2},$$

iz nejednakosti trokuta i Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}\Big|T_n(f,g)-\widetilde{T}_n(f,g)\Big| \leqslant \Big(\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{JSW}}f\Big)\Big(\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{konv}}g\Big) + \Big(\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{mart}}f\Big)\Big(\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{JSW}}g\Big) \\ + |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)|\Big(|\mathrm{P}^{(2)}_n g| + |\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_n)|\Big) + |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0)|\Big(|\mathrm{P}^{(2)}_0 g| + |\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_0)|\Big).\end{aligned}$$

Poznato je da je “glatka” kvadratna funkcija $\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{konv}}$ ograničena u L^p (vidi [26]), dok je $\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{mart}}$ L^p ograničena prema Burkholder-Davis-Gundyjevoj nejednakosti (2.6). Dakle, vrijedi

$$\|\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{konv}}g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'_q\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \quad \text{i} \quad \|\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{mart}}f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'_p\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.12}$$

za neke pozitivne konstante C'_q i C'_p koje ovise samo o eksponentima q i p redom.

Uzimanje L^r-normi i primjena Hölderove nejednakosti i nejednakosti Minkowskog nam daje

$$\begin{aligned}\Big\|T_n(f,g)-\widetilde{T}_n(f,g)\Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Big\|\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{JSW}}f\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\Big\|\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{konv}}g\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} + \Big\|\mathcal{S}^{(1)}_{\mathrm{mart}}f\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\Big\|\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{JSW}}g\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \\ + \|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\Big\||\mathrm{P}^{(2)}_n g| + |\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_n)|\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \\ + \|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\Big\||\mathrm{P}^{(2)}_0 g| + |\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_0)|\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Preostaje primijeniti (6.11), (6.12), uvjetnu Jensenovu nejednakost i Youngovu nejednakost da bismo dobili

$$\Big\|T_n(f,g)-\widetilde{T}_n(f,g)\Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Big(C_pC'_q + C'_pC_q + 4\Big)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Konačno, iz gornje nejednakosti slijedi ocjena (6.5) za parcijalne sume (6.9), pa prema Napomeni 6.8 slijedi i ocjena (6.5) za zapetljani paraprodukt $T_{\alpha,\beta}$. □

6.2 Stohastički integrali

U ovom odjeljku cilj nam je prezentirati mogući smjer u kojem se može proširiti klasična Itōva teorija stohastičke integracije ([33]). Drugim riječima, želimo pokazati kako možemo proširiti klasu “dobrih integratora” usprkos ograničenju iz Bichteler-Dellacherie teorema.

6.2.1 Neadaptirani stohastički integral

Neka su $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ i $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$ dvije filtracije koje su konstruirane na analogan način kao u prethodnom poglavlju, u Odjeljku 5.4 (Napomena 5.11). Jedina razlika je u tome što sad promatramo filtracije s neprekidnim vremenom, dok su u Poglavlju 5 one bile s diskretnim vremenom.

Prirodan primjer se može dobiti ako uzmemo dva nezavisna slučajna procesa s neprekidnim vremenom, $(A_t)_{t\geqslant 0}$ i $(B_t)_{t\geqslant 0}$, koji su konstruirani na produktnom prostoru i definiramo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &:= \sigma\Big(\Big\{A_s : 0 \leqslant s \leqslant t\Big\}\Big) \vee \sigma\Big(\Big\{B_s : 0 \leqslant s < \infty\Big\}\Big),\\ \mathcal{G}_t &:= \sigma\Big(\Big\{A_s : 0 \leqslant s < \infty\Big\}\Big) \vee \sigma\Big(\Big\{B_s : 0 \leqslant s \leqslant t\Big\}\Big).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Intuitivno, $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ je filtracija koja progresivno slijedi prvi proces, ali ne filtrira relevante informacije za drugi proces. Analogno, $(\mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$ je filtracija koja progresivno slijedi drugi proces. Potom je još praktično dobivene filtracije augmentirati, tako da zadovoljavaju standardne pretpostavke (Definicija 2.22), ali ćemo ih i dalje označavati istim slovima. Dovoljno zanimljiv slučaj se dobije već kad je $(A_t, B_t)_{t\geqslant 0}$ dvodimenzionalno Brownovo gibanje.

Pretpostavimo sad da je $(X_s)_{s\geqslant 0}$ martingal koji poprima realne vrijednosti obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$ i da je $(Y_s)_{s\geqslant 0}$ martingal koji poprima realne vrijednosti obzirom na filtraciju $(\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$. Fiksirat ćemo $t > 0$ i dodatno pretpostaviti da su $X_t, Y_t \in \mathrm{L}^4$. Htjeli bismo konstruirati stohastički integral oblika

$$\int_0^t H_s d(X_s Y_s), \tag{6.14}$$

gdje je $(H_s)_{s\geqslant 0}$ predvidiv proces obzirom na presječnu filtraciju $(\mathcal{F}_s \cap \mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$.

Naglašavamo da (6.14) nije uobičajeni stohastički integral pa se ne mogu primjeniti rezultati iz klasične teorije integracije. Zaista, integrator $(X_s Y_s)_{s\geqslant 0}$ nije nužno adaptiran obzirom na neku razumnu filtraciju i nema nužno puteve ograničene varijacije. Ono što je donekle iznenađujuće je da je taj proces i dalje “dobar integrator” u smislu Korolara 6.10 i 6.11 koji su navedeni u daljnjem tekstu.

Krećemo s konstrukcijom integrala (6.14) za elementarni $(\mathcal{F}_s \cap \mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$-predvidivi integrand. To je proces $H = (H_s)_{s\geqslant 0}$ eksplicitno definiran kao

$$H_s = \begin{cases} K_{-1} & \text{za } s = 0,\\ K_{k-1} & \text{za } t_{k-1} < s \leqslant t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,\\ 0 & \text{za } s > t,\end{cases} \tag{6.15}$$

gdje je

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t \tag{6.16}$$

particija segmenta $[0, t]$, K_{-1} je $(\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{G}_0)$-izmjeriva slučajna varijabla i K_k je $(\mathcal{F}_{t_k} \cap \mathcal{G}_{t_k})$-izmjeriv za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. U ovom posebnom slučaju integral (6.14) se definira direktno kao

$$\int_0^t H_s d(X_s Y_s) := \sum_{k=1}^{n} K_{k-1}(X_{t_k} Y_{t_k} - X_{t_{k-1}} Y_{t_{k-1}}). \tag{6.17}$$

Uočimo da gornja definicija ne ovisi o načinu na koji reprezentiramo $(H_s)_{s\geqslant 0}$, jer ako je $K_{k-2} = K_{k-1}$, tada vrijedi

$$K_{k-2}(X_{t_k} Y_{t_k} - X_{t_{k-2}} Y_{t_{k-2}}) = K_{k-2}(X_{t_{k-1}} Y_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}} Y_{t_{k-2}}) + K_{k-1}(X_{t_k} Y_{t_k} - X_{t_{k-1}} Y_{t_{k-1}}).$$

Jednostavna posljedica Teorema 5.3 je sljedeći rezultat.

Korolar 6.10 Uz prethodno navedene uvjete skup

$$\Big\{ \int_0^t H_s d(X_sY_s) \ :\ (H_s)_{s\geqslant 0} \textit{ je elementaran } (\mathcal{F}_s \cap \mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}\textit{-predvidiv}, \ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|H_s\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 1 \Big\}$$

je ograničen u $\mathrm{L}^{4/3}$ te stoga i po vjerojatnosti.

Bichteler-Dellacherie teorem naveden u Odjeljku 2.3 karakterizira semimartingale ("dobre integratore") kao càdlàg procese $(Z_s)_{s\geqslant 0}$ koji imaju svojstvo da je skup integrala $\int_0^t H_s dZ_s$ s obzirom na ograničene elementarne predvidive integrande ograničen po vjerojatnosti. Korolar 6.10 je zanimljiv jer pokazuje da proces $(X_sY_s)_{s\geqslant 0}$ također posjeduje to svojstvo, iako nije nužno semimartingal, pa čak niti adaptiran obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_s \cap \mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$. Štoviše, ne postoji kanonski način na koji ga možemo rastaviti kao sumu procesa konačne varijacije i lokalnog martingala (više u Pododjeljku 6.2.3).

Za elementarni predvidiv proces definiran s (6.15) možemo definirati i pripadajuću polunormu

$$\|H\|_{X,Y,t} := \Big(\mathbb{E} \sum_{k=1}^n K_{k-1}^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 + \mathbb{E} \sum_{k=1}^n K_{k-1}^2 (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2 \Big)^{1/2}. \tag{6.18}$$

Definicija (6.18) opet ne ovisi o reprezentaciji procesa $(H_s)_{s\geqslant 0}$, jer ako je $K_{k-2} = K_{k-1}$, vrijedi identitet

$$\mathbb{E}\, K_{k-2}^2 (X_{t_k} - X_{t_{k-2}})^2 = \mathbb{E}\, K_{k-2}^2 \Big((X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})^2 + (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \Big).$$

Gornji identitet je zapravo posljedica od

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, K_{k-2}^2 (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(K_{k-2}^2 (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}} \Big) \Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(K_{k-2}^2 (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})\, \mathbb{E}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \Big) = 0, \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili da je $K_{k-2}^2 (X_{t_{k-1}} - X_{t_{k-2}})$ $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-izmjerivo, a u trećoj jednakosti smo koristili martingalno svojstvo, tj. $\mathbb{E}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 0$.

Sljedeći rezultat će također biti direktna posljedica Teorema 5.3. Preciznije, ocjena (5.5) će biti zamjena za Itōvu izometriju u klasičnoj konstrukciji.

Korolar 6.11 Postoji apsolutna konstanta $C > 0$ takva da za prethodno definirane procese $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$, $(\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$, $(X_s)_{s\geqslant 0}$ i $(Y_s)_{s\geqslant 0}$, za svaki $t \geqslant 0$ i za svaki elementarni $(\mathcal{F}_s \cap \mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$-predvidiv proces $(H_s)_{s\geqslant 0}$ vrijedi

$$\Big\| \int_0^t H_s d(X_sY_s) \Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C\, \|H\|_{X,Y,t} \Big(\|X_t\|_{\mathrm{L}^4} + \|Y_t\|_{\mathrm{L}^4} \Big). \tag{6.19}$$

Posljedično, ako je

$$\left(H_s^{(j)}\right)_{s\geqslant 0}, \quad j=1,2,\ldots$$

Cauchyjev niz elementarnih $(\mathcal{F}_s\cap\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$-predvidivih procesa obzirom na polunormu $\|\cdot\|_{X,Y,t}$, tada niz slučajnih varijabli

$$\int_0^t H_s^{(j)} d(X_sY_s), \quad j=1,2,\ldots \tag{6.20}$$

konvergira u $\mathrm{L}^{4/3}$.

Skup svih elementarnih $(\mathcal{F}_s\cap\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$-predvidivih procesa (6.15) s konačnom polunormom (6.18) je vektorski prostor u kojem možemo identificirati sve H i $\widetilde{H}$ za koje je

$$\|H-\widetilde{H}\|_{X,Y,t}=0.$$

U tom slučaju ćemo s $\mathcal{P}_{X,Y,t}$ označiti upotpunjenje dobivenog normiranog prostora s obzirom na normu $\|\cdot\|_{X,Y,t}$. Korolar 6.11 proširuje definiciju stohastičkog integrala (6.14) po neprekidnosti na sve procese iz $\mathcal{P}_{X,Y,t}$. Integrale (6.20) možemo doživljavati kao Riemannove sume od (6.14). Stoga je stohastički integral zapravo definiran kao limes u $\mathrm{L}^{4/3}$, pa prema tome i po vjerojatnosti.

Namjerno se nisu spominjale kvadratne varijacije martingala $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$. Međutim, ako obje filtracije zadovoljavaju standardne prepostavke (Definicija 2.22) i kvadratne varijacije $([X]_s)_{s\geqslant 0}$ i $([Y]_s)_{s\geqslant 0}$ postoje, tada Korolar 6.11 zapravo može proširiti definiciju integrala (6.14) i na predvidive integrande $(H_s)_{s\geqslant 0}$ koji zadovoljavaju

$$\mathbb{E}\int_0^t H_s^2\, d\Big([X]_s+[Y]_s\Big)<\infty.$$

Jedna (možda pomalo naivna) interpretacija veličine (6.14) je sljedeća. Cijena dionice se formira kao produkt dva martingala $(X_s)_{s\geqslant 0}$ i $(Y_s)_{s\geqslant 0}$ koji prate dva nezavisna procesa $(A_s)_{s\geqslant 0}$ i $(B_s)_{s\geqslant 0}$. Međutim, X_t ovisi o količini informacije koja je dostupna iz prvog procesa sve do trenutka t, ali ne znamo na koji način ovisi o drugom procesu. To bi značilo da je X_t izmjeriv s obzirom na σ-algebru $\mathcal{F}_t$ definiranu s (6.13). Analogan zahtjev ćemo postaviti i na martingal $(Y_s)_{s\geqslant 0}$. Slučajna varijabla (6.14) će u tom slučaju biti jednaka akumuliranom dobitku do trenutka t ako koristimo strategiju trgovanja $(H_s)_{s\geqslant 0}$.

Završit ćemo ovaj odjeljak s komentarom da nismo inzistirali na traženju minimalnih dovoljnih uvjeta koji bi omogućavali konstrukciju (6.14). Na primjer, dva martingala su mogla biti i lokalna u smislu da ih niz vremena zaustavljanja s obzirom na $(\mathcal{F}_s\cap\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$ reducira do L^4 martingala. S druge strane, particija segmenta $[0,t]$ je mogla biti i slučajna, tj. sastojati se od vremena zaustavljanja obzirom na $(\mathcal{F}_s\cap\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$, kao u [53]. Što jednostavnije pretpostavke su nam pomogle da težište ipak stavimo na ocjene (5.4) i (5.5) iz Odjeljka 5.1 i nove rezultate koje dobivamo njihovom primjenom.

6.2.2 Dokaz Korolara 6.10 i 6.11

Neka su $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$, $(\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$, $(X_s)_{s\geqslant 0}$, $(Y_s)_{s\geqslant 0}$ i $(H_s)_{s\geqslant 0}$ kao u prethodnom odjeljku i fiksirajmo $t>0$. Oba korolara su direktna posljedica diskretno-vremenske ocjene (5.5).

Dokaz Korolara 6.11. Neka je $H=(H_s)_{s\geqslant 0}$ elementarni predvidiv proces (6.15) povezan s nekom particijom (6.16) segmenta $[0,t]$. Definiramo i procese $X=(X_{t_k})_{k=0}^n$, $Y=(Y_{t_k})_{k=0}^n$ i $K=(K_k)_{k=0}^{n-1}$ s diskretnim vremenom da bismo na njih mogli primijeniti ocjenu (5.5).

Uočimo sada da za $0\leqslant i<j\leqslant n-1$ iz $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjerivosti slučajne varijable $K_iK_j(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ i martingalnog svojstva slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(K_iK_j(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})\Big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(K_iK_j(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})(X_{t_{j+1}}-X_{t_j})|\mathcal{F}_{t_j}\Big)\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(K_iK_j(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\underbrace{\mathbb{E}(X_{t_{j+1}}-X_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j})}_{=0}\Big)=0,\end{aligned}$$

pa je

$$\|(K\cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2=\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n K_{k-1}(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})\Big)^2=\mathbb{E}\sum_{k=1}^n K_{k-1}^2(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2. \tag{6.21}$$

Primijetimo da identitet (6.21) zapravo nije ništa drugo nego Itōva izometrija u diskretnom vremenu. Analogan identitet vrijedi i za Y, pa slijedi

$$\|H\|_{X,Y,t}^2=\|(K\cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2+\|(K\cdot Y)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2. \tag{6.22}$$

Konačno, iz (5.5) i (6.22) slijedi (6.19).

Druga tvrdnja Korolara 6.11 tada slijedi iz (6.19) i linearnosti. Zaista, za $i,j\in\mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\Big\|\int_0^t H_s^{(i)}d(X_sY_s)-\int_0^t H_s^{(j)}d(X_sY_s)\Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}} &= \Big\|\int_0^t \Big(H_s^{(i)}-H_s^{(j)}\Big)d(X_sY_s)\Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}}\\ &\leqslant C\,\|H^{(i)}-H^{(j)}\|_{X,Y,t}\Big(\|X_t\|_{\mathrm{L}^4}+\|Y_t\|_{\mathrm{L}^4}\Big).\end{aligned}$$

Stoga, ako je $\big(H_s^{(j)}\big)_{s\geqslant 0}$, $j\in\mathbb{N}$, Cauchyjev niz elementarnih $(\mathcal{F}_s\cap\mathcal{G}_s)_{s\geqslant 0}$-predvidivih procesa s obzirom na polunormu $\|\cdot\|_{X,Y,t}$, onda je $\int_0^t H_s^{(j)}d(X_sY_s)$, $j\in\mathbb{N}$, Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^{4/3}$. Budući da je $\mathrm{L}^{4/3}$ potpun prostor, slijedi i konvergencija u $\mathrm{L}^{4/3}$. □

Dokaz Korolara 6.10. Opet neka je $H=(H_s)_{s\geqslant 0}$ elementarni predvidiv proces (6.15) povezan s nekom particijom (6.16) segmenta $[0,t]$ i neka su $X=(X_{t_k})_{k=0}^n$, $Y=(Y_{t_k})_{k=0}^n$ i $K=(K_k)_{k=0}^{n-1}$ procesi s diskretnim vremenom. Dodatno, pretpostavimo da je i $\|K_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\leqslant 1$

za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Sad iz definicije (6.18) i $\mathbb{E}(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 = \mathbb{E}X_{t_k}^2 - \mathbb{E}X_{t_{k-1}}^2$ slijedi

$$\begin{aligned} \|H\|_{X,Y,t}^2 &\leqslant \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2 + \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}(Y_{t_k}-Y_{t_{k-1}})^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(X_t^2 - X_0^2 + Y_t^2 - Y_0^2\Big) \leqslant \|X_t\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|Y_t\|_{\mathrm{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Konačno, korištenjem (6.19) dobije se sljedeća ocjena za $\mathrm{L}^{4/3}$-normu od (6.14),

$$\Big\| \int_0^t H_s d(X_s Y_s) \Big\|_{\mathrm{L}^{4/3}} \leqslant C\Big(\|X_t\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|Y_t\|_{\mathrm{L}^2}^2\Big)^{1/2}\Big(\|X_t\|_{\mathrm{L}^4} + \|Y_t\|_{\mathrm{L}^4}\Big). \tag{6.23}$$

Desna strana od (6.23) je konačna jer smo pretpostavili da su $X_t, Y_t \in \mathrm{L}^4$, pa je time dokaz završen. □

6.2.3 Primjer dobrog integratora koji nije semimartingal

U ovom pododjeljku ćemo na jednostavnom primjeru pokazati da se konstrukcija opisana u Pododjeljku 6.2.1 ne može realizirati metodama klasične teorije.

Pretpostavimo da su $(A_t)_{t\geqslant 0}$ i $(B_t)_{t\geqslant 0}$ dva standardna jednodimenzionalna Brownova gibanja konstruirana na potpunim vjerojatnosnim prostorima $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{B}, \mathbb{P}_2)$ redom. Neka su dvije filtracije na produktnom prostoru dane s (6.13), tako da je

$$\mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_t = \sigma\Big(\Big\{A_s, B_s : 0 \leqslant s \leqslant t\Big\}\Big)$$

zapravo kanonska filtracija dvodimenzionalnog Brownovog gibanja. Potom se sve tri filtracije augmentiraju, kao što je već bilo rečeno. Definiramo slučajne procese $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ kao

$$X_t(\omega_1, \omega_2) := A_t(\omega_1)V(\omega_2), \quad Y_t(\omega_1, \omega_2) := U(\omega_1)B_t(\omega_2), \tag{6.24}$$

za neku $\mathcal{A}$-izmjerivu slučajnu varijablu U i neku $\mathcal{B}$-izmjerivu slučajnu varijablu V. U svakom trenutku $t = \varepsilon > 0$ imamo

$$(X_\varepsilon Y_\varepsilon)(\omega_1, \omega_2) = (A_\varepsilon U)(\omega_1)(B_\varepsilon V)(\omega_2).$$

Budući da je $\mathbb{P}_1(A_\varepsilon = 0) = \mathbb{P}_2(B_\varepsilon = 0) = 0$, vidimo da može vrijediti

$$X_\varepsilon Y_\varepsilon = \mathbb{1}_{C\times D} \qquad \text{g.s.}$$

za bilo koji skup $C \times D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. To povlači da upotpunjenje σ-algebre generirane produktima $X_\varepsilon Y_\varepsilon$ može sadržavati cijelu σ-algebru $\mathcal{E}$, tj. upotpunjenje produktne σ-algebre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, za bilo koji fiksni trenutak $\varepsilon > 0$. To znači da proces $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ ne mora biti adaptiran obzirom na upotpunjenje filtracije $(\mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_t)_{t\geqslant 0}$.

S druge strane, putevi od $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ ne moraju nužno biti ograničene varijacije, što se može vidjeti još jednostavnijim kontraprimjerom. Definirajmo

$$X_t(\omega_1, \omega_2) := A_t(\omega_1), \quad Y_t(\omega_1, \omega_2) := 1.$$

Budući da Brownovo gibanje ima puteve neograničene varijacije, i proces $(X_t Y_t)_{t \geqslant 0}$ ima puteve neograničene varijacije.

Primjer (6.24) također isključuje mogućnost kanonske dekompozicije procesa $(X_t Y_t)_{t \geqslant 0}$ kao sume procesa konačne varijacije i lokalnog martingala (što je svojstvo semimartingala). Na primjer, u slučaju neprekidnih martingala s obzirom na istu Brownovsku filtraciju produktni proces bismo mogli dekomponirati kao

$$X_t Y_t = \langle X_t, Y_t \rangle + M_t,$$

gdje je

$$\langle X_t, Y_t \rangle := \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \Big(X_{\frac{kt}{m}} - X_{\frac{(k-1)t}{m}} \Big) \Big(Y_{\frac{kt}{m}} - Y_{\frac{(k-1)t}{m}} \Big)$$

kvadratna kovarijacija i gornji limes se interpretira kao limes po vjerojatnosti. Ta ista dekompozicija u primjeru (6.24) ne daje nužno proces $(M_t)_{t \geqslant 0}$ koji je adaptiran obzirom na upotpunjenje presječne filtracije $(\mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_t)_{t \geqslant 0}$.

POGLAVLJE 7

Nekomutativni martingalni paraprodukti

U ovom poglavlju proučavat ćemo L^p ocjene za martingalne paraprodukte i kvadratnu varijaciju nekomutativnih dijadskih martingala koji poprimaju vrijednosti u algebri. Za poseban slučaj eksponenata konstruirat ćemo i odgovarajuću Bellmanovu funkciju koja će nam dati ocjenu s optimalnom konstantom.

7.1 Nekomutativni L^p prostori

Neka je H kompleksan Hilbertov prostor i označimo s $B(H)$ algebru svih ograničenih linearnih operatora na H. Uz preslikavanje $* : B(H) \to B(H)$, koje operator $x \in B(H)$ preslikava u adjungirani operator x^*, $B(H)$ postaje *C^*-algebra s jedinicom.* Jedinica je u ovom slučaju identiteta na H koju označavamo s $\mathbf{1}$. Preslikavanje $* : B(H) \to B(H)$ ima sljedeća svojstva:

(i) za svaki $x \in B(H)$ vrijedi $(x^*)^* = x$ (involucija),

(ii) za sve $x, y \in B(H)$ vrijedi $(x + y)^* = x^* + y^*$ i $(xy)^* = y^*x^*$,

(iii) za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i svaki $x \in B(H)$ vrijedi $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$,

(iv) za svaki $x \in B(H)$ vrijedi $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\| = \|x\|^2$.

Definicija 7.1 *Von Neummanova algebra* na H je C^*-podalgebra $\mathcal{M}$ od $B(H)$ koja sadrži operator identitete $\mathbf{1}$ i koja je w^*-zatvorena.

Pozitivan dio od $\mathcal{M}$ označavamo s $\mathcal{M}_+$. Svaki element iz $\mathcal{M}$ se može prikazati kao linearna kombinacija četiri pozitivna elementa. *Modul (apsolutna vrijednost)* operatora $\mathcal{M}$ se definira kao

$$|x| := (x^*x)^{1/2},$$

pri čemu je funkcija $(\cdot)^{1/2}$ primijenjena na hermitski operator x^*x putem neprekidnog funkcionalnog računa.

Definicija 7.2 Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra i $\mathcal{M}_+$ njen pozitivan dio. *Normalni vjerni konačni trag* na M je linearni funkcional $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ koji je

(i) pozitivan: $\tau(x) \geqslant 0$ za $x \in \mathcal{M}_+$,

(ii) normaliziran: $\tau(\mathbf{1}) = 1$,

(iii) zadovoljava $\tau(xy) = \tau(yx)$ za $x, y \in \mathcal{M}$.

Ako je M von Neumannova algebra, a $\tau : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ normalni vjerni konačni trag na $\mathcal{M}$, tada $(\mathcal{M}, \tau)$ nazivamo *nekomutativnim vjerojatnosnim prostorom.*

Definicija 7.3 Za $1 \leqslant p < \infty$ definiramo *p-normu*, $\|\cdot\|_p : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ na $\mathcal{M}$ s

$$\|x\|_p := \tau(|x|^p)^{1/p},$$

gdje je $|x|$ modul operatora.

Svojstva p-norme dana su sljedećom propozicijom iz [61].

Propozicija 7.4 Neka je $\mathcal{M}$ von Neumannova algebra, $1 \leqslant p < \infty$ i p' konjugirani eksponent od p. Vrijedi:

(a) $\|x\|_p = \||x|\|_p = \|x^*\|_p$, za svaki $x \in \mathcal{M}$;

(b) za svaki $x \in \mathcal{M}$
$$\|x\|_p := \sup\{|\tau(xy)| : y \in \mathcal{M}, \|y\|_{p'} \leqslant 1\};$$

(c) Hölderova nejednakost

$$|\tau(xy)| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}, \quad x, y \in \mathcal{M};$$

(d) nejednakost Minkowskog

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathcal{M};$$

(e) Cauchy-Schwarzova nejednakost

$$|\tau(xy^*)|^2 \leqslant \tau(x^*x)\tau(y^*y), \quad x, y, \in \mathcal{M}.$$

Uočimo i da iz (e) i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi i

$$|\tau(xy^*)| \leqslant \frac{c}{2}\tau(x^*x) + \frac{1}{2c}\tau(y^*y), \tag{A–G}$$

za bilo koji realan broj $c > 0$.

Definicija 7.5 Upotpunjenje od $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_p)$ nazivamo *nekomutativnim* L^p*-prostorom* asociranim s $(\mathcal{M}, \tau)$ i označavamo s $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, \tau)$.

Zbog jednostavnosti $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}, \tau)$ ćemo označavati s $\mathrm{L}^p(\mathcal{M})$. S $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{M})$ označavamo von Neumannovu algebru $\mathcal{M}$ opremljenu s operatorskom normom, tj. $\|x\|_\infty = \|x\|$.

Primjer 7.6 (Nekomutativni L^p-prostori)

(1) Komutativan slučaj

Neka je $\mathcal{M} = \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za neki vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za funkciju $f \in \mathrm{L}^\infty$ možemo definirati njen trag kao

$$\tau(f) := \int_\Omega f \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}f.$$

Pokazuje se da je τ normalni vjerni konačni trag na $\mathcal{M}$, a iz definicije p-norme na $\mathcal{M}$ se vidi da je u tom slučaju $\mathrm{L}^p(\mathcal{M}) = \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Stoga vidimo da klasični (komutativni) L^p prostori spadaju u klasu nekomutativnih L^p prostora.

(2) Schattenove klase

Neka je $\mathcal{M} = M_d(\mathbb{C})$, algebra kompleksnih matrica dimenzija $d \times d$. Za $A \in \mathcal{M}$ možemo definirati trag kao

$$\tau(A) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(A),$$

gdje je $\mathrm{Tr}(A)$ standardni trag matrice A. S tako definiranim tragom τ nekomutativni L^p prostori, $\mathrm{L}^p(\mathcal{M})$, postaju Schatennove klase, S_d^p.

■

Više svojstava i primjera nekomutativnih L^p prostora može se naći u [61].

7.2 Nekomutativni dijadski paraprodukti

Na nekomutativnim L^p prostorima definiranim u prethodnom odjeljku ima smisla definirati i nekomutativne martingale. Međutim, nas neće zanimati općeniti nekomutativni martingali, već samo dijadski martingali koji poprimaju vrijednosti u von Neummanovoj algebri $\mathcal{M}$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor takav da je $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$ i $\mathbb{P}$ je Lebesgueova mjera na $[0,1)$. Promatrat ćemo prostore $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{L}^p(\mathcal{M}))$ Bochner p-integrabilnih funkcija na Ω koje poprimaju vrijednosti u $\mathrm{L}^p(\mathcal{M})$. Odgovorajuće p-norme na $\mathrm{L}^p(\Omega; L^p(\mathcal{M}))$ se definiraju kao

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))} := \Big(\int_\Omega \tau(|f(\omega)|^p)\, d\mathbb{P}(\omega)\Big)^{1/p}.$$

Neka je sad $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ standardna dijadska filtracija na $[0,1)$:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{D}_n), \quad \mathcal{D}_n := \Big\{\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big) : k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\Big\}.$$

Definicija 7.7 *Nekomutativni dijadski martingal* je niz $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{P}$-g.s. klasa $\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija koje poprimaju vrijednosti u $\mathcal{M}$ (tj. niz slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathcal{M}$) za koje vrijedi

$$\mathbb{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n) = f_n, \qquad \text{za svaki } n \geqslant 0.$$

Uvjetno očekivanje iz gornje definicije se definira kao

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) := \sum_{I \in \mathcal{D}_n} \mathbb{1}_I [f]_I,$$

gdje $[f]_I$ označava prosjek vektorske funkcije f na intervalu I.

Definicija 7.8 Neka su $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ dva martingala koji poprimaju vrijednosti u $\mathcal{M}$. Tada je *diskretni stohastički integral* od $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ s obzirom na $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ slučajni proces $\Big((f \cdot g)_n\Big)_{n=0}^{\infty}$ kojeg definiramo kao

$$\begin{aligned} &(f \cdot g)_0 := 0, \\ &(f \cdot g)_n := \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(g_k - g_{k-1}) \qquad \text{za } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Uočimo da je $(f \cdot g)_n$ također slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathcal{M}$, i to za svaki $n \geqslant 0$.

Napomena 7.9 Primjenom nekomutativne Hölderove nejednakosti Definiciju 7.8 bismo mogli proširiti i na martingale $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ koji poprimaju vrijednosti u $\mathrm{L}^p(\mathcal{M})$ i $\mathrm{L}^q(\mathcal{M})$. Međutim, budući da je $\mathcal{M}$ gust potprostor od $\mathrm{L}^p(\mathcal{M})$ i $\mathrm{L}^q(\mathcal{M})$, to nećemo raditi. ■

Definicija 7.10 *Martingalni paraprodukt* od $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ se definira kao

$$\Pi(f, g) := (f \cdot g)_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k-1}(g_k - g_{k-1}) \tag{7.2}$$

kad god gornji red konvergira u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{L}^p(\mathcal{M}))$ za neki $p \geqslant 1$.

Budući da nas zanimaju apriorne ocjene za (7.2), uvijek ćemo razmatrati konačne parcijalne sume $(f \cdot g)_n$.

U neprekidnom vremenu za Brownovsku filtraciju ovu terminologiju su koristili Bañuelos i Bennet u [3]. U nekomutativnom okruženju neki autori gornji izraz označavaju s Π^r jer se na neki način radi o *retčanom paraproduktu*, a *stupčani paraprodukt* bi u tom slučaju bila analogna veličina

$$\Pi^c(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty}(g_k - g_{k-1})f_{k-1}.$$

Gornje oznake također ovise o gledištu; da li želimo naglasiti da se radi o operatoru koji djeluje na f ili na g. Mi ćemo na (7.2) gledati simetrično i promatrati ga kao bilinearni operator.

Neka su sada f, g, h tri slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koje imaju separabilne slike (ili čak poprimaju samo konačno mnogo vrijednosti) i poprimaju vrijednosti u $\mathcal{M}$. Za njih definiramo odgovarajuće martingale

$$f_n := \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n), \quad g_n := \mathbb{E}(g|\mathcal{F}_n), \quad h_n := \mathbb{E}(h|\mathcal{F}_n) \quad \text{za svaki } n \geqslant 0.$$

Dualizirat ćemo paraprodukt s obzirom na trag tenzorskog produkta $\mathbb{E} \otimes \tau$ na von Neumannovoj algebri

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \mathrm{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \overline{\otimes} \mathcal{M}.$$

$\widetilde{\mathcal{M}}$ je zapravo w^*-zatvarač linearne ljuske generirane elementarnim tenzorima oblika $\varphi \otimes x$, $\varphi \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $x \in \mathcal{M}$. Na taj način za fiksni $n \geqslant 0$ dobijemo trilinearnu formu:

$$\Lambda_n(f,g,h) := \mathbb{E}\tau((f \cdot g)_n h). \tag{7.3}$$

Neka je $(\mathcal{F}_n \overline{\otimes} \mathcal{M})_{n=0}^{\infty}$ produktna filtracija i neka su $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ odgovarajući operatori uvjetnog očekivanja definirani kao

$$\mathcal{E}_n := \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_n) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}. \tag{7.4}$$

Korisno je uočiti da je zapravo $\mathcal{E}_n = \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_n)$, jer se ta projekcija s (7.4) podudara na elementarnim tenzorima oblika $\varphi \otimes x$, $\varphi \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $x \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{E}_n(\varphi \otimes x) = \mathbb{E}(\varphi|\mathcal{F}_n) \otimes x = \mathbb{E}(\varphi \otimes x|\mathcal{F}_n).$$

Rastavom $h = h_{k-1} + (h_k - h_{k-1}) + (h - h_k)$, te korištenjem linearnosti i martingalnog svojstva dobijemo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(f,g,h) &= \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f_{k-1}(g_k - g_{k-1})h\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f_{k-1}\underbrace{\mathcal{E}_{k-1}(g_k - g_{k-1})}_{=0}h_{k-1}\Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f_{k-1}(g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1})\Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f_{k-1}(g_k - g_{k-1})\underbrace{\mathcal{E}_k(h - h_k)}_{=0}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\tau\Big(f_{k-1}(g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1})\Big).$$

Štoviše,

$$\begin{aligned}\Lambda_n(f,g,h) &= \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f_{k-1}\mathcal{E}_{k-1}((g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1}))\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}\otimes\tau)\Big(f\mathcal{E}_{k-1}((g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1}))\Big) = \mathbb{E}\tau\Big(f\langle g,h\rangle_n\Big), \end{aligned} \tag{7.5}$$

gdje smo označili

$$\langle g,h\rangle_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big((g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}\Big).$$

Proces $(\langle g,h\rangle_n)_{n=0}^{\infty}$ se naziva *predvidivom kvadratnom kovarijacijom* dijadskih martingala $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(h_n)_{n=0}^{\infty}$.

Uočimo da je $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ zapravo bilinearni adjungirani operator paraprodukta Π definiranog s (7.2). Budući da su martingali dijadski, $(g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1})$ je zapravo $\mathcal{F}_{k-1}$-izmjeriva slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathcal{M}$, pa slijedi

$$\langle g,h\rangle_n := \sum_{k=1}^{n} (g_k - g_{k-1})(h_k - h_{k-1}),$$

odnosno predvidiva kvadratna kovarijacija jednaka je kvadratnoj kovarijaciji. Ako u gornji izraz uvrstimo $g = h^*$, kao poseban slučaj dobit ćemo i *nekomutativnu dijadsku kvadratnu funkciju*

$$Sh := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k - h_{k-1}|^2\Big)^{1/2} = \langle h^*, h\rangle_\infty^{1/2}. \tag{7.6}$$

7.3 L^p ocjene

Želimo dokazati da trilinearna forma $\Lambda_n(f,g,h)$ zadovoljava određene L^p ocjene, tj. da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 7.11 Trilinearna forma Λ_n definirana s (7.5) zadovoljava

$$|\Lambda_n(f,g,h)| \leqslant C_{p,q,r}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))}, \tag{7.7}$$

za sve eksponente $p \in (1,\infty]$, $q, r \in (1,\infty)$ koji zadovoljavaju $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ i to uniformno za svaki $n \geqslant 1$.

Napomena 7.12 Zbog monotonosti L^p normi prethodno navedene ocjene povlače i ocjene za eksponente koji zadovoljavaju $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, ali njima se nećemo baviti jer nemaju lijepi uvjet skaliranja (i ne mogu se transferirati s $[0,1)$ na cijeli $\mathbb{R}$). ■

U prošlom odjeljku smo vidjeli da ocjene tipa (7.7) generaliziraju i ocjene za dijadski paraprodukt i ocjene za dijadsku kvadratnu funkciju. Za potonje samo moramo uočiti da je

$$\Lambda_\infty(f, g^*, g) = \mathbb{E}\tau\Big(f(Sg)^2\Big).$$

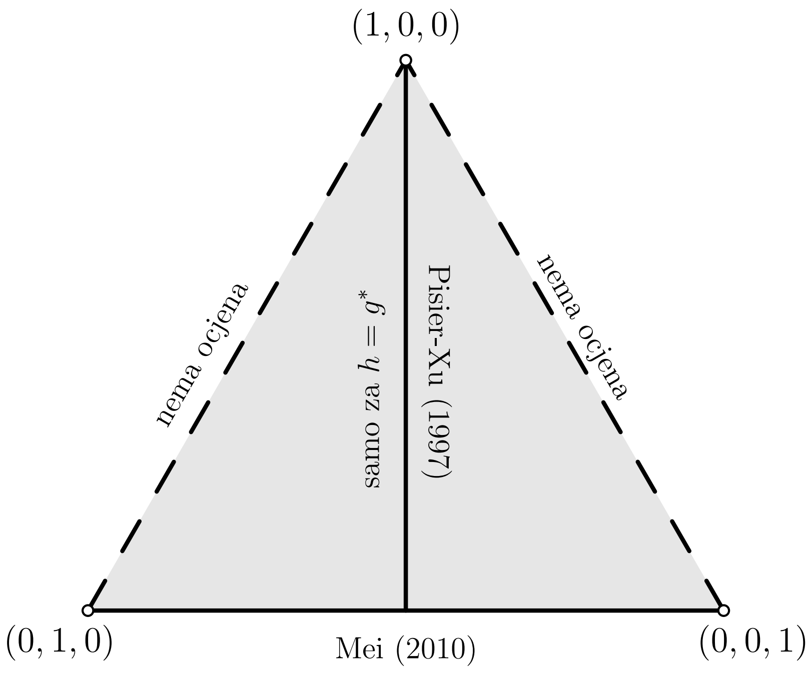
Tada iz (7.7) po obratu Hölderove nejednakosti i iz definicije norme operatora slijedi

$$\|S\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))\to\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))} \leqslant \sqrt{C_{p,q,q}}$$

za sve $1 < p < \infty$ i $2 \leqslant q < \infty$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1$. U slučaju optimalne konstante nejednakost prelazi u jednakost.

U nekomutativnom slučaju (čak i kad je $\mathcal{M}$ algebra matrica) nema ocjena na stranicama $q = \infty$ i $r = \infty$ Banachovog trokuta na Slici 7.1. Za odgovarajuće definiran BMO prostor, Nazarov, Pisier, Treil i Volberg su u [49] dokazali da nema ocjena s $\|g\|_{BMO}$, odnosno $\|h\|_{BMO}$. Da nema ocjena čak ni s $\|g\|_{\mathrm{L}^\infty}$, tj. $\|h\|_{\mathrm{L}^\infty}$ pokazao je Mei u [45]. Zaista, za $\mathcal{M} = M_d(\mathbb{C})$ konstanta $C_{2,\infty,2}$ raste kao $\log d$ kad $d \to \infty$. Štoviše, dokazano je i da je to najbolji mogući red rasta u [36] i [49].

I dalje postoje ocjene na donjoj stranici Banachovog trokuta i u unutrašnjosti kao što je prikazano na Slici 7.1.



Slika 7.1: Banachov trokut s baricentričnim koordinatama $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r})$.

Ocjene na donjoj stranici ($p = \infty$) i na visini ($q = r$) Banachovog trokuta na Slici 7.1 dokazuju se korištenjem nekomutativnih Burkholder-Gundy ocjena od Pisiera i Xua (vidi [52]). One kažu da za $f \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{L}^p(\mathcal{M}))$ i pripadnu kvadratnu funkciju $S(f)$ definiranu s (7.6) vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 7.13 (Pisier-Xu) Neka je $f \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{L}^p(\mathcal{M}))$ i $S(f)$ kvadratna funkcija (7.6).

(i) Za $2 \leqslant p < \infty$ vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))} \sim_p \max\{\|S(f)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}, \|S(f^*)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}\}. \tag{7.8}$$

(ii) Za $1 < p < 2$ vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))} \sim_p \inf\{\|S(f_1)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))} + \|S(f_2^*)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))} : f = f_1 + f_2\}. \tag{7.9}$$

U Propoziciji 7.13 oznaka $A \sim_P B$ znači da postoji konstanta c_P, koja ovisi samo o skupu parametara P, takva da je $c_P^{-1} A \leqslant B \leqslant c_P A$.

Bit će nam potrebna i sljedeća Lema preuzeta iz [44].

Lema 7.14 (Mei) Neka su $(a_k)_{k=1}^n \in \mathrm{L}^p(\mathcal{M})$, $(b_k)_{k=1}^n \in \mathrm{L}^q(\mathcal{M})$. Tada vrijedi

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k^* b_k \Big\|_{\mathrm{L}^r(\mathcal{M})} \leqslant \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{M})} \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{M})}, \tag{7.10}$$

za sve $p, q \in (1, \infty)$ i $r \in [1, \infty)$ takve da je $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Isto tako, vrijedi

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k^* b_k \Big\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{M})} \leqslant \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n |a_k^*|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{M})} \Big\| \Big(\sum_{k=1}^n |b_k^*|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{M})}, \tag{7.11}$$

za sve $p, q \in (1, \infty)$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dokaz. Uložimo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u prvi stupac matrice $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ u prvi stupac matrice $\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je

$$\mathbf{A}^*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & \ldots & a_n^* \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_k^* b_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjenom Hölderove nejednakosti na $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}$ dobijemo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}^*\mathbf{B}\|_{\mathrm{L}^r(M_n(\mathbb{C})\otimes\mathcal{M})} &\leqslant \|\mathbf{A}\|_{\mathrm{L}^p(M_n(\mathbb{C})\otimes\mathcal{M})}\|\mathbf{B}\|_{\mathrm{L}^q(M_n(\mathbb{C})\otimes\mathcal{M})} \\
&= \|(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p(M_n(\mathbb{C})\otimes\mathcal{M})}\|(\mathbf{B}^*\mathbf{B})^{1/2}\|_{\mathrm{L}^q(M_n(\mathbb{C})\otimes\mathcal{M})}.
\end{aligned}$$

Očito iz gornje nejednakosti slijedi željena ocjena (7.10).

Za (7.11) uočimo da iz Propozicije 7.4 i svojstva traga slijedi

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^n a_k^* b_k\Big\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{M})} &= \sup_{v,\|v\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1}\Big|\tau\sum_{k=1}^n v a_k^* b_k\Big| = \sup_{v,\|v\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1}\Big|\tau\sum_{k=1}^n b_k(v a_k^*)\Big| \\
&= \sup_{v,\|v\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1}\Big|\tau\sum_{k=1}^n (b_k^*)^*(v a_k^*)\Big| \leqslant \sup_{v,\|v\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1}\Big\|\sum_{k=1}^n (b_k^*)^*(v a_k^*)\Big\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{M})}.
\end{aligned}$$

Preostaje primijeniti (7.10) da dobijemo

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^n a_k^* b_k\Big\|_{\mathrm{L}^1(\mathcal{M})} &\leqslant \sup_{v,\|v\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |b_k^*|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{M})}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |v a_k^*|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{M})} \\
&\leqslant \Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |a_k^*|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{M})}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^n |b_k^*|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathcal{M})},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj nejednakosti iskoristili da za $\|v\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$ vrijedi $|v a_k^*|^2 \leqslant |a_k^*|^2$. □

Korištenjem Propozicije 7.13 i Leme 7.14 Mei je u [44] dokazao i ocjene za kvadratnu kovarijaciju definiranu s (7.2).

Propozicija 7.15 (Mei) Za $g \in \mathrm{L}^q(\Omega; \mathrm{L}^q(\mathcal{M}))$, $h \in \mathrm{L}^r(\Omega; \mathrm{L}^r(\mathcal{M}))$ i $1 < q, r < \infty$ takve da je $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ vrijedi

$$\big\|\langle g, h\rangle_n\big\|_{\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{L}^1(\mathcal{M}))} \leqslant C_{q,r}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))}, \tag{7.12}$$

gdje je $C_{q,r} > 0$ konstanta koja ovisi samo o q i r.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r < q$ (jer ćemo slučaj $q = r$ posebno razmotriti) i fiksirajmo funkciju $h \in \mathrm{L}^r(\Omega; \mathrm{L}^r(\mathcal{M}))$. Slijedi $r < 2$, pa zbog (7.9) možemo izabrati funkcije h_1 i h_2 takve da je $h = h_1 + h_2$ i vrijedi

$$\|S(h_1)\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))} + \|S(h_2^*)\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))} \leqslant c_r\|h\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))} + \varepsilon. \tag{7.13}$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\big\|\langle g, h\rangle_n\big\|_{\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{L}^1(\mathcal{M}))} &\leqslant \big\|\langle g, h_1\rangle_n\big\|_{\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{L}^1(\mathcal{M}))} + \big\|\langle g, h_2\rangle_n\big\|_{\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{L}^1(\mathcal{M}))} \\
&\leqslant \|S(g)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|S(h_1)\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))} \\
&\qquad + \|S(g^*)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|S(h_2^*)\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))}
\end{aligned}$$

$$\leqslant c_q(c_r+\varepsilon)\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\Omega;\mathrm{L}^r(\mathcal{M}))},$$

gdje smo u prvoj nejednakosti primijenili nejednakost Minkowskog, u drugoj Lemu 7.14, a u trećoj (7.8) i (7.13). Preostaje pustiti $\varepsilon \to 0$ da bismo dobili (7.12). □

Ako sada uzmemo $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathrm{L}^\infty(\mathcal{M}))$ iz (7.12) lako dobijemo da za $p=\infty$ vrijedi ocjena (7.7).

Malom modifikacijom dokaza Propozicije 7.15 možemo dobiti i L^p ocjene na visini Banachovog trokuta na Slici 7.1.

Propozicija 7.16 Neka su $f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))$ i $g,h \in \mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))$. Tada trilinearna forma (7.3) zadovoljava

$$|\Lambda_n(f,g,h)| \leqslant C_{p,q,q}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}, \tag{7.14}$$

za sve eksponente $p \in (1,\infty], q \in (1,\infty)$ koji zadovoljavaju $\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=1$ i to uniformno za svaki $n \geqslant 1$.

Dokaz. Neka je p' konjugirani eksponent od p. Budući da je $q>2$ iz Leme 7.14, (7.10), i definicije kvadratne kovarijacije (7.2) direktno slijedi

$$\begin{aligned}\left\|\langle g,h\rangle_n\right\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathrm{L}^{p'}(\mathcal{M}))} &\leqslant \left\|\langle g,g^*\rangle_n^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\left\|\langle h^*,h\rangle_n^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\\ &\leqslant \|S(g^*)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|S(h)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\\ &\leqslant c_q^2\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}.\end{aligned}$$

Ovdje smo u zadnjoj nejednakosti koristili nekomutativnu Burkholder-Gundy nejednakost Pisiera i Xua (7.8).

Sada korištenjem Hölderove nejednakosti lako slijedi

$$\begin{aligned}|\Lambda_n(f,g,h)| &\leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}\left\|\langle g,h\rangle_n\right\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathrm{L}^{p'}(\mathcal{M}))}\\ &\leqslant c_q^2\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathrm{L}^p(\mathcal{M}))}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))}\|h\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathrm{L}^q(\mathcal{M}))},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Konačno smo spremni i za dokaz ocjene (7.7).

Dokaz Teorema 7.11. Iz Propozicija 7.15 i 7.16 slijedi da ocjena (7.7) vrijedi na stranici $p=\infty$ i na visini $q=r$ Banachovog trokuta na Slici 7.1. Interpolacijom tih ocjena dobijemo da (7.7) vrijedi i u cijeloj unutrašnjosti Banachovog trokuta. □

7.4 Bellmanova funkcija

U ovom odjeljku želimo vidjeti da li možemo nešto reći o ponašanju konstanti $C_{p,q,r}$ iz Teorema 7.11 korištenjem tehnike Bellmanovih funkcija.

Zbog jednostavnosti promatramo samo poseban slučaj eksponenata $(p, q, r) = (2, 4, 4)$. Budući da bismo htjeli naći optimalnu konstantu $C_{2,4,4}$, već smo komentirali na početku Odjeljka 7.3 da je dovoljno naći optimalnu konstantu u L^4 ocjeni za kvadratnu funkciju. Dakle, tražimo optimalnu konstantu C takvu da je

$$|\Lambda(f, g^*, g)| \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,1);\mathrm{L}^2(\mathcal{M}))}\|g\|^2_{\mathrm{L}^4([0,1);\mathrm{L}^2(\mathcal{M}))}. \tag{7.15}$$

Dodatno ćemo pretpostaviti da su f i g samoadjungirane, tj. $f^* = f$ i $g^* = g$.

Konstantu C ćemo naći tako da konstruiramo odgovarajući Bellmanovu funkciju. Po uzoru na funkcije u Poglavlju 3, cilj nam je pronaći (konstruirati) funkciju $\mathcal{B}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva.

($\mathcal{B}$1) *Domena:* Sve četvorke (u, v, U, V) koje zadovoljavaju

$$u \in \mathcal{M}_+,\ v \in \mathcal{M}_h, \quad U, V \in \mathbb{R}_+, \quad \tau(u^2) \leqslant U, \quad \tau(v^4) \leqslant V.$$

($\mathcal{B}$2) *Slika:*

$$0 \leqslant \mathcal{B}(u, v, U, V) \leqslant C\Big(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V\Big).$$

($\mathcal{B}$3) *Glavna nejednakost:*

$$\mathcal{B}(u, v, U, V) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, v_1, U_1, V_1) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, v_2, U_2, V_2) + \tau\Big(u\Big|\frac{v_1 - v_2}{2}\Big|^2\Big)$$

za sve četvorke (u, v, U, V), (u_1, v_1, U_1, V_1) i (u_2, v_2, U_2, V_2) koje pripadaju domeni i zadovoljavaju

$$(u, v, U, V) = \frac{1}{2}(u_1, v_1, U_1, V_1) + \frac{1}{2}(u_2, v_2, U_2, V_2).$$

Pokažimo sad kako iz egzistencije funkcije sa svojstvima ($\mathcal{B}$1)–($\mathcal{B}$3) lako slijedi i ocjena (7.15). Opet postupamo kao u Poglavlju 3.

Uočimo prvo da je

$$\Lambda(f, g, g) = \int_{[0,1)} \tau\Big(f(Sg)^2\Big) = \sum_{I\in\mathcal{D}} |I|\tau\Big([f]_I\Big|\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}}{2}\Big|^2\Big),$$

zbog

$$|g_n - g_{n-1}|^2 = \sum_{|I|=2^{-n+1}} \Big|\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}} - [g]_{I_{\text{desni}}}}{2}\Big|^2 \mathbb{1}_I.$$

Budući da za svaki dijadski interval $I \in \mathcal{D}$ iz ($\mathcal{B}3$) slijedi

$$\begin{aligned}|I|\tau\Big([f]_I\Big|\frac{[g]_{I_{\text{lijevi}}}-[g]_{I_{\text{desni}}}}{2}\Big|^2\Big) &\overset{(\mathcal{B}3)}{\leqslant} |I|\mathcal{B}([f]_I,[g]_I,\tau[f^2]_I,\tau[g^4]_I) \\ &\quad - |I_{\text{lijevi}}|\mathcal{B}([f]_{I_{\text{lijevi}}},[g]_{I_{\text{lijevi}}},\tau[f^2]_{I_{\text{lijevi}}},\tau[g^4]_{I_{\text{lijevi}}}) \\ &\quad - |I_{\text{desni}}|\mathcal{B}([f]_{I_{\text{desni}}},[g]_{I_{\text{desni}}},\tau[f^2]_{I_{\text{desni}}},\tau[g^4]_{I_{\text{desni}}}),\end{aligned}$$

sumiranjem po svim dijadskim intervalima $I \in \mathcal{D}$ i teleskopiranjem dobijemo

$$\begin{aligned}\Lambda(f,g,g) &\leqslant \mathcal{B}([f]_{[0,1)},[g]_{[0,1)},\tau[f^2]_{[0,1)},\tau[g^4]_{[0,1)}) \\ &\overset{(\mathcal{B}2)}{\leqslant} C\Big(\frac{1}{2}\tau[f^2]_{[0,1)}+\frac{1}{2}\tau[g^4]_{[0,1)}\Big) \\ &= C\Big(\frac{1}{2}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1);\mathrm{L}^2(\mathcal{M}))}+\frac{1}{2}\|g\|^4_{\mathrm{L}^4([0,1);\mathrm{L}^4(\mathcal{M}))}\Big).\end{aligned} \tag{7.16}$$

Sada treba iskoristiti homogenost od $\Lambda(f,g,g)$ i zamijeniti f i g s $\frac{f}{\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,1);\mathrm{L}^2(\mathcal{M}))}}$ i $\frac{g}{\|g\|_{\mathrm{L}^4([0,1);\mathrm{L}^4(\mathcal{M}))}}$ da bismo dobili (7.15).

Definirat ćemo Bellmanovu funkciju $\mathcal{B}$ na domeni ($\mathcal{B}1$) kao

$$\mathcal{B}(u,v,U,V) := \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)U + \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)V - \mathcal{A}(u,v),$$

gdje je

$$\mathcal{A}(u,v) = \tau\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}u^2+\frac{1}{\sqrt{6}}v^4+uv^2\Big).$$

Moramo pokazati da ovako definirana funkcija zadovoljava i svojstva ($\mathcal{B}2$) i ($\mathcal{B}3$).

Iz (A–G) slijedi

$$|\tau(uv^2)| \leqslant \frac{1}{2}\tau(u^2)+\frac{1}{2}\tau(v^4),$$

pa je zbog pozitivnosti traga

$$0 \leqslant \mathcal{A}(u,v) \leqslant \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)\Big(\tau(u^2)+\tau(v^4)\Big).$$

Budući da na domeni ($\mathcal{B}1$) vrijedi $\tau(u^2) \leqslant U$ i $\tau(v^4) \leqslant V$ očito je

$$0 \leqslant \mathcal{B}(u,v,U,V) \leqslant \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)(U+V),$$

čime smo pokazali da vrijedi ($\mathcal{B}2$).

Preostalo nam je još pokazati da $\mathcal{B}$ zadovoljava glavnu nejednakost ($\mathcal{B}3$), a za to je dovoljno dokazati da $\mathcal{A}$ zadovoljava nejednakost

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(u+\Delta u, v+\Delta v)+\frac{1}{2}\mathcal{A}(u-\Delta u,v-\Delta v)-\mathcal{A}(u,v) \geqslant \tau(u|\Delta v|^2), \tag{7.17}$$

gdje smo označili $\Delta u = \frac{u_1 - u_2}{2}$ i $\Delta v = \frac{v_1 - v_2}{2}$. Raspisivanjem se lako dobije da je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(u+\Delta u)^2 + \frac{1}{2}(u-\Delta u)^2 - u^2 = (\Delta u)^2 \\
&\frac{1}{2}(v+\Delta v)^4 + \frac{1}{2}(v-\Delta v)^4 - v^4 = v^2(\Delta v)^2 + (\Delta v)^2 v^2 + (\Delta v)^4 + (v\Delta v + \Delta v v)^2 \\
&\frac{1}{2}(u+\Delta u)(v+\Delta v)^2 + \frac{1}{2}(u-\Delta u)(v-\Delta v)^2 - uv^2 = u(\Delta v)^2 + \Delta u v \Delta v + \Delta u \Delta v v,
\end{aligned}$$

pa slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathcal{A}(u+\Delta u, v+\Delta v) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(u-\Delta u, v-\Delta v) - \mathcal{A}(u,v) \\
&\qquad = \tau\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}(\Delta u)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}v^2(\Delta v)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(\Delta v)^2 v^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(\Delta v)^4 + \frac{1}{\sqrt{6}}(v\Delta v + \Delta v v)^2 \\
&\qquad\qquad + u(\Delta v)^2 + \Delta u v \Delta v + \Delta u \Delta v v\Big).
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Desnu stranu jednakosti (7.18) drugačije mozemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\tau\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}(\Delta u)^2 + \frac{\sqrt{6}}{4}(v\Delta v + \Delta v v)^2 + \Delta u(v\Delta v + \Delta u \Delta v v)\Big)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\tau\Big((\Delta v)^4\Big)}_{\geqslant 0} + \tau\Big(u(\Delta v)^2\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{2\sqrt{6}}\tau\Big(2v^2(\Delta v)^2 + 2(\Delta v)^2 v^2 - (v\Delta v + \Delta v v)^2\Big).
\end{aligned}$$

Prva dva člana gornjeg izraza su nenegativna zbog (A–G) i pozitivnosti traga, a za četvrti član vrijedi

$$\tau\Big(2v^2(\Delta v)^2 + 2(\Delta v)^2 v^2 - (v\Delta v + \Delta v v)^2\Big) = \tau\Big(|v\Delta v|^2 + |\Delta v v|^2 - (v\Delta v)^2 - (\Delta v v)^2\Big) \geqslant 0.$$

Stoga zaključujemo da je desna strana u (7.18) barem $\tau\Big(u(\Delta v)^2\Big)$, iz čega slijedi (7.17), pa smo gotovi.

Važno je uočiti da nam konsturirana Bellmanova funkcija zaista daje optimalnu konstantu

$$C = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Znamo da je konstanta optimalna, jer je optimalna i u realnom slučaju (Odjeljak 3.3). Slijedi da je L^4 norma kvadratne funkcije (7.6)

$$\|S\|_{\mathrm{L}^4([0,1);\mathrm{L}^4(\mathcal{M}))\to\mathrm{L}^4([0,1);\mathrm{L}^4(\mathcal{M}))} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

Napomena 7.17 Zanimljivo bi bilo odrediti i optimalne konstante za druge izbore eksponenata ili barem opisati asimptotsko ponašanje konstanti. Međutim, to je još uvijek otvoreni problem. ■

Zaključak

Dosad nisu bile konstruirane Bellmanove funkcije za multilinearne martingalne ocjene, čak ni u posebnom slučaju dijadskih martingala. Stoga su ciljevi ovog rada bili prilagoditi tehniku Bellmanovih funkcija na trilinearne martingalne forme i potom primijeniti konstruirane Bellmanove funkcije na neke nove i neke već poznate probleme.

U radu je dana eksplicitna formula za Bellmanovu funkciju povezanu s L^p ograničenošću dijadskih paraprodukata. Konstruirana funkcija je potom iskorištena za davanje alternativnog dokaza L^p ograničenosti martingalnih paraprodukata (s diskretnim i neprekidnim vremenom) i paraprodukta obzirom na toplinski tok. Također, dana je i eksplicitna formulacija kontrolnog procesa za zapetljani paraprodukt, na nivou dva martingala obzirom na dvije različite filtracije. Posljedično, dobivene su prve L^p ocjene za zapetljani paraprodukt obzirom na poopćenu dilatacijsku strukturu. Isti kontrolni proces iskorišten je i za konstrukciju stohastičkog integrala u jednom specifičnom kontekstu kada integrator nije nužno semimartingal.

Pored navedenih rezultata, očekivano je da će konstrukcija spomenutih Bellmanovih funkcija i kontrolnih procesa imati brojne primjene u budućim projektima, npr. u problemima iz ergodičke teorije.

Bibliografija

[1] M. Abramowitz i I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover Publications, Inc., 1992.

[2] R. Bañuelos. "The foundational inequalities of D. L. Burkholder and some of their ramifications". *Illinois Journal of Mathematics* 54.3 (2010), str. 789–868.

[3] R. Bañuelos i A.G. Bennett. "Paraproducts and commutators of martingale transforms". *Proceedings of the American Mathematical Society* 103.4 (1988), str. 1226–1234.

[4] R. Bañuelos i A. Osękowski. "On the Bellman function of Nazarov, Treil and Volberg". *Mathematische Zeitschrift* 278.1–2 (2014), str. 385–399.

[5] R. Bañuelos i G. Wang. "Sharp inequalities for martingales with applications to the Beurling-Ahlfors and Riesz transforms". *Duke Mathematical Journal* 80.3 (1995), str. 575–600.

[6] 'A. Bényi, D. Maldonado i V. Naibo. "What is a Paraproduct?": *Notices of the Amererican Mathematical Society* 57.7 (2010), str. 858–860.

[7] F. Bernicot. "Fiber-wise Calderón-Zygmund decomposition and application to a bi-dimensional paraproduct". *Illinois Journal of Mathematics* 56.2 (2012), str. 415–422.

[8] F. Bernicot i V. Kovač. "Sobolev norm estimates for a class of bilinear multipliers". *Communications on Pure and Applied Analysis* 13.3 (2014), str. 1305–1315.

[9] K. Bichteler. "Stochastic integration and L^p-theory of semimartingales". *Annals of Probability* 9.1 (1981), str. 49–89.

[10] K. Bichteler. "Stochastic integrators". *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.)* 1.5 (1979), str. 761–765.

[11] D.L. Burkholder. "A sharp and strict L^p-inequality for stochastic integrals". *Annals of Probability* 15.1 (1987), str. 268–273.

[12] D.L. Burkholder. "Boundary value problems and sharp inequalites for martingale transforms". *Annals of Probability* 14.3 (1984), str. 647–702.

[13] D.L. Burkholder. “Explorations in Martingale Theory and its Applications”. *’Ecole d’Été de Probabilités de Saint-Flour XIX–1989.* Sv. 1464. Lecture Notes in Math. Springer, 1991, str. 1–66.

[14] D.L. Burkholder. “Martingale transforms”. *The Annals of Mathematical Statistics* 37 (1966), str. 1494–1504.

[15] D.L. Burkholder. “Martingales and Singular Integrals in Banach Spaces”. *Handbook on the Geometry of Banach spaces vol. 1.* Elsevier, 2001. Pogl. 6, str. 233–269.

[16] D.L. Burkholder, B.J. Davis i R.F. Gundy. “Integral inequalities for convex functions of operators on martingales”. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 2 (1972), str. 223–240.

[17] A. Carbonaro i O. Dragičević. “Bellman function and linear dimension-free estimates in a theorem of Bakry”. *Journal of Functional Analysis* 265.7 (2013), str. 1085–1104.

[18] A. Carbonaro i O. Dragičević. “Functional calculus for generators of symmetric contraction semigroups”. *Duke Mathematical Journal* 166.5 (2017), str. 937–974.

[19] M. Christ. “A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral”. *Colloquium Mathematicum* 60/61.2 (1990), str. 601–628.

[20] D.L. Cohn. *Measure Theory.* 2nd edition. Birkhäuser, 2013.

[21] R. Coifman i G. Weiss. *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes.* Springer, 1971.

[22] B. Davis. “On the L^p norms of stochastic integrals and other martingales”. *Duke Mathematical Journal* 43.4 (1976), str. 697–704.

[23] G. Davis i Journé J.-L. “A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators”. *Annals of Mathematics* 120.2 (1984), str. 371–397.

[24] C. Dellacherie. “Un survol de la théorie de l’intégrale stochastique”. *Stochastic Processes and their Applications* 10.2 (1980), str. 115–144.

[25] C. Demeter i C. Thiele. “On the two-dimensional bilinear Hilbert transform”. *American Journal of Mathematics* 132.1 (2010), str. 201–256.

[26] J. Duoandikoetxea i J.L. Rubio de Francia. “Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates”. *Inventiones mathematicae* 84.3 (1986), str. 541–561.

[27] P. Durcik. “An L^4 estimate for a singular entangled quadrilinear form”. *Mathematical Research Letters* 22.5 (2015), str. 1317–1332.

[28] P. Durcik. “L^p estimates for a singular entangled quadrilinear form”. prihvaćeno za objavljivanje u *Transactions of the American Mathematical Society*, dostupno na arXiv:1506.08150. 2015.

[29] P. Durcik, V. Kovač, K.A. Škreb i C. Thiele. “Norm-variation of ergodic averages with respect to two commuting transformations”. prihvaćeno za objavljivanje u *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, dostupno na arXiv:1603.00631. 2016.

[30] R. Durett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth, Inc., 1984.

[31] R. Durett. *Probability: Theory and Examples.* Cambridge University Press, 2010.

[32] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[33] K. Itō. “Stochastic integral”. *Proceedings of the Imperial Academy of Japan, Tokyo* 20 (1944), str. 519–524.

[34] S. Janson i J. Peetre. “Paracommutators-Boundedness and Schatten-Von Neumann Properties”. *Transactions of the American Mathematical Society* 305.2 (1988), str. 467–504.

[35] R.L. Jones, A. Seeger i J. Wright. “Strong variational and jump inequalities in harmonic analysis”. *Transactions of the American Mathematical Society* 360.12 (2008), str. 6711–6742.

[36] N.H. Katz. “Matrix valued paraproducts”. *The Journal of Fourier Analysis and Applications* 300 (1997), str. 913–921.

[37] V. Kovač. “Bellman function technique for multilinear estimates and an application to generalized paraproducts”. *Indiana University Mathematics Journal* 60.3 (2011), str. 813–846.

[38] V. Kovač. “Boundedness of the twisted paraproduct”. *Revista Matemática Iberoamericana* 28.4 (2012), str. 1143–1164.

[39] V. Kovač i C. Thiele. “A T(1) theorem for entangled multilinear dyadic Calderón-Zygmund operators”. *Illinois Journal of Mathematics* 57.3 (2013), str. 775–799.

[40] V. Kovač i K.A. Škreb. “Bellman functions and L^p estimates for paraproducts”. preprint, dostupno na arXiv:1609.02895. 2016.

[41] V. Kovač i K.A. Škreb. “One modification of the martingale transform and its applications to paraproducts and stochastic integrals”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 426.2 (2015), str. 1143–1163.

[42] M. Lacey i C. Thiele. “L^p estimates on the bilinear Hilbert transform for $2 < p < \infty$”. *Annals of Mathematics (2)* 146.3 (1997), str. 693–724.

[43] M. Lacey i C. Thiele. “On Calderón’s conjecture”. *Annals of Mathematics (2)* 149.2 (1999), str. 475–496.

[44] T. Mei. “An extrapolation of operator-valued dyadic paraproducts”. *Journal of the London Mathematical Society* 81.3 (2010), str. 650–662.

[45] T. Mei. “Notes on matrix valued paraproducts”. *Indiana University Mathematics Journal* 55.2 (2006), str. 747–760.

[46] F. Nazarov i S. Treil. “The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis”. *Algebra i Analiz* 8.5 (1997), str. 721–824.

[47] F. Nazarov, S. Treil i A. Volberg. “The Bellman functions and two-weight inequalities for Haar multipliers”. *Journal of the American Mathematical Society* 8.4 (1999), str. 909–928.

[48] F. Nazarov i A. Volberg. “Heating of the Ahlfors–Beurling operator and estimates of its norm”. *St. Petersburg Mathematical Journal* 15.4 (2004), str. 563–573.

[49] F. Nazarov, G. Pisier, S. Treil i A. Volberg. “Sharp estimates in vector Carleson imbedding theorem and for vector paraproducts”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 542 (2002), str. 147–171.

[50] A. Osękowski. *Sharp martingale and semimartingale inequalities.* Monografie Matematyczne 72. Springer, 2012.

[51] S. Petermichl i A. Volberg. “Heating of the Ahlfors–Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular”. *Duke Mathematical Journal* 112.2 (2002), str. 281–305.

[52] G. Pisier i Q. Xu. “Non-commutative martingale inequalities”. *Communications in Mathematical Physics* 189 (1997), str. 667–698.

[53] P.E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* 2nd edition. Springer-Verlag, 2005.

[54] E.M. Stein. *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, 1993.

[55] E.M. Stein i S. Wainger. “Problems in harmonic analysis related to curvature”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 84.6 (1978), str. 1239–1295.

[56] C. Thiele. “Time-frequency analysis in the discrete phase plane”. Disertacija. Yale University, 1995.

[57] C. Thiele. *Wave Packet Analysis.* CBMS Reg. Conf. Ser. Math., 105, AMS, 2006.

[58] V. Vasyunin i A. Volberg. “Bellster and others”. preprint. 2008.

[59] Z. Vondraček. “Slučajni procesi”. Web skripta, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`. 2010.

[60] Wolfram Research, Inc. *Mathematica.* Ver. 9.0, Champaign, IL. 2012.

[61] Q. Xu. “Operator spaces and noncommutative L^p”. Lectures in the Summer School on Banach spaces and Operator spaces. 2007.

Životopis

Kristina Ana Škreb rođena je 5. srpnja 1987. godine u Zagrebu gdje pohađa osnovnu i srednju školu. Godine 2005. upisuje preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu kojeg završava u srpnju 2008. godine. Iste godine upisuje i diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je u srpnju 2010. godine s radom *De Finettijev teorem*, pod vodstvom izv. prof. dr. sc. Miljenka Huzaka. Tijekom studija dobila je *Dekanovu nagradu za izuzetan uspjeh na studiju* kao i *Nagradu Vijeća voditelja studija za najbolju studenticu diplomskog sveučilišnog studija Matematička statistika*.

Doktorski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisuje u studenom 2010. godine. Sudjeluje u radu *Seminara za teoriju vjerojatnosti* i suradnica je na projektima *Stohastičke metode u analitičkim i primijenjenim problemima* (podržanim od strane Hrvatske zaklade za znanost) te *Multilinearni singularni integrali i primjene* (MZO-DAAD hrvatsko-njemački bilateralni projekt). U listopadu 2011. godine zapošljava se kao asistent na Zavodu za matematiku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Od 2010. godine sudjeluje i u radu Državnog povjerenstva za provedbu natjecanja iz matematike i pripremi učenika za međunarodna natjecanja.

Kristina Ana Škreb objavila je dva znanstvena rada u časopisima, jedan rad u zbornicima skupova s recenzijom i ima jedan znanstveni rad prihvaćen za objavljivanje. Također, sudjelovala je u radu nekoliko međunarodnih konferencija i radionica.

Popis objavljenih radova

Znanstveni radovi u časopisima

(1) Durcik, Polona; Kovač, Vjekoslav; Škreb, Kristina Ana; Thiele, Christoph. *Norm-variation of ergodic averages with respect to two commuting transformations*, prihvaćen za objavljivanje u Ergodic Theory and Dynamical Systems (2017).

(2) Kovač, Vjekoslav; Škreb, Kristina Ana. *One modification of the martingale transform and its applications to paraproducts and stochastic integrals*, Journal of mathematical analysis and applications, **426** (2015), str. 1143–1163.

(3) Burcar Dunović, Ivana; Radujković, Mladen; Škreb, Kristina Ana. *Towards a new model of complexity - the case of large infrastructure projects*, Procedia – Social and Behavioral Sciences, **119** (2014), str. 730–738.

Radovi u zbornicima skupova s recenzijom

(1) Štirmer, Nina; Baričević, Ana; Škreb, Kristina Ana; Kufrin, Jasna; Bulat, Vibor. *Gospodarenje građevnim otpadom*, EU i hrvatsko graditeljstvo, Zagreb: Hrvatski savez građevinskih inženjera (2016), str. 825–835.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Kristina Ana Škreb, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom:

Tehnika Bellmanovih funkcija za multilinearne martingalne ocjene,

isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, 1. lipnja 2017.

Potpis