Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sonja Žunar

NEPONIŠTAVANJA POINCARÉOVIH REDOVA NA METAPLEKTIČKOJ GRUPI I PRIMJENE

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Sonja Žunar

NON-VANISHING OF POINCARÉ SERIES ON THE METAPLECTIC GROUP AND APPLICATIONS

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2018

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sonja Žunar

NEPONIŠTAVANJA POINCARÉOVIH REDOVA NA METAPLEKTIČKOJ GRUPI I PRIMJENE

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Sonja Žunar

NON-VANISHING OF POINCARÉ SERIES ON THE METAPLECTIC GROUP AND APPLICATIONS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:

Prof. Goran Muić, PhD

Zagreb, 2018

Zahvala

Ove disertacije ne bi bilo bez potpore mnogih divnih ljudi.

Prije svega, zahvaljujem svojem mentoru, Goranu Muiću, na njegovu uvijek nasmiješenom vodstvu, poticaju i potpori, stalnoj dostupnosti, bezgraničnoj strpljivosti, razumijevanju i mnogim diskusijama.

Zahvaljujem i svojoj obitelji, koja je kroz cijeli moj život, pa i na ponekad izazovnom putu kroz doktorski studij, bila moj najveći oslonac i izvor snage.

Zahvaljujem i svim prijateljima i kolegama s Fakulteta koji su me na ovom putu podupirali i ispunili mi zadnje četiri godine srećom, toplinom i lijepim uspomenama. Posebno zahvaljujem Zvonku Iljazoviću, koji je svakodnevno bio glas iskustva i zdravog razuma u našem uredu i pravi prijatelj, te kolegama sa Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme, posebno profesorima Marceli Hanzer i Nevenu Grbcu te Dariji Brajković, Igoru Ciganoviću i Petru Bakiću, koji su mi kroz cijeli doktorski studij Seminar činili izvorom motivacije, prijateljstva, podrške i korisnih savjeta.

Sažetak

U ovoj se disertaciji proučava neponištavanje Poincaréovih redova na metaplektičkom natkrivaču, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ i istražuju se primjene tih redova u teoriji modularnih formi polucijele težine. Pritom se koriste tri osnovna alata: Harish-Chandrin pristup teoriji reprezentacija povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom, klasična korespondencija između kusp-formi polucijele težine i kuspidalnih automorfnih formi na grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i integralni kriterij neponištavanja za Poincaréove redove na lokalno kompaktnim Hausdorffovim grupama koji je dokazao G. Muić.

U disertaciji su pomoću Poincaréovih redova K-konačnih matričnih koeficijenata integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ konstruirani sustavi izvodnica za prostore kusp-formi polucijele težine $m \geq \frac{5}{2}$. Dokazana je i formula za Peterssonov skalarni produkt spomenutih Poincaréovih redova s proizvoljnom kuspidalnom automorfnom formom na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ iste težine. Iz te formule i njena dokaza proizašao je niz rezultata o kusp-formama polucijele težine.

Nadalje, dokazane su blago ojačane varijante Muićeva integralnog kriterija neponištavanja za Poincaréove redove na Liejevim grupama i za Poincaréove redove polucijele težine na gornjoj kompleksnoj poluravnini. Njihovom su primjenom dokazani rezultati o neponištavanju Poincaréovih redova pridruženih K-konačnim matričnim koeficijentima integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i pripadnih kusp-formi polucijele težine, rezultati o neponištavanju nekih klasičnih Poincaréovih redova polucijele težine i rezultati o neponištavanju L-funkcija pridruženih kusp-formama polucijele težine $m \geq \frac{9}{2}$ u točkama pruge $\mathbb{C}_{\frac{m}{2} < \Re(s) < m-1}$.

Ključne riječi: neponištavanje Poincaréovih redova, metaplektički natkrivač grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, modularne forme polucijele težine, K-konačni matrični koeficijenti, L-funkcije kusp-formi polucijele težine.

Summary

In this thesis, we study the non-vanishing of Poincaré series on the metaplectic cover, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ and investigate their applications in the theory of modular forms of half-integral weight. Our methods rely on the following three tools: Harish-Chandra's approach to representation theory of connected semisimple Lie groups with finite center, the classical correspondence between cusp forms of half-integral weight and cuspidal automorphic forms on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, and the integral non-vanishing criterion for Poincaré series on locally compact Hausdorff groups that was proved by G. Muić.

In the thesis, we use the Poincaré series of K-finite matrix coefficients of integrable representations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ to construct spanning sets for spaces of cusp forms of half-integral weight $m \geq \frac{5}{2}$. We prove a formula for the Petersson inner product of these Poincaré series with any cuspidal automorphic form on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ of the same weight. From this formula and its proof, we derive a series of results on cusp forms of half-integral weight.

Next, we prove strengthened variants of Muić's integral non-vanishing criterion for Poincaré series on Lie groups and for Poincaré series of half-integral weight on the upper half-plane. Using these criteria, we prove results on the non-vanishing of Poincaré series of K-finite matrix coefficients of integrable representations of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ and of corresponding cusp forms, results on the non-vanishing of some classical Poincaré series of half-integral weight, and results on the non-vanishing of L-functions associated to cusp forms of half-integral weight $m \geq \frac{9}{2}$ in points of the strip $\mathbb{C}_{\frac{m}{2}<\Re(s)<m-1}$.

Keywords: non-vanishing of Poincaré series, metaplectic cover of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, modular forms of half-integral weight, K-finite matrix coefficients, L-functions associated to cusp forms of half-integral weight.

Extended Summary

In this thesis, we study the non-vanishing of Poincaré series on the metaplectic cover, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ and investigate their applications in the theory of modular forms of half-integral weight. Our methods rely on the following three tools: Harish-Chandra's approach to representation theory of connected semisimple Lie groups with finite center, the classical correspondence between cusp forms of half-integral weight and cuspidal automorphic forms on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, and the integral non-vanishing criterion [31, Theorem 4-1] for Poincaré series on locally compact Hausdorff groups.

We define modular forms of half-integral weight in a very general setting: for every $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, we define the spaces $M_m(\Gamma, \chi)$ of modular forms and $S_m(\Gamma, \chi)$ of cusp forms for every discrete subgroup Γ that is of finite covolume in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ and for every character $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ of finite order. Among these spaces are the standardly defined spaces $M_m(N, \psi)$ and $S_m(N, \psi)$ from [57], where $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ and ψ is a Dirichlet character modulo N. In our general setting, we give detailed proofs of many facts about cusp forms of half-integral weight. For example, we prove that the classical lift $f \mapsto F_f$ from the space $S_m(\Gamma, 1)$ to the space $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ of cuspidal automorphic forms for Γ of weight m is a unitary isomorphism.

To build a representation-theoretic foundation for our main results, we investigate the infinitesimal structure of the principal series of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ and construct realizations of the holomorphic and antiholomorphic discrete series of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ on spaces of (anti)holomorphic functions on the upper half-plane $\mathcal{H}$ and on the unit disk $\mathcal{D}$. Next, for every square integrable representation π of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, we compute the K-finite matrix coefficients of π that transform on both sides as characters of K. We do this in three ways: the first way is a calculation from the principal series; the second way is a calculation from our realization of the antiholomorphic discrete series on spaces of antiholomorphic functions on $\mathcal{D}$; the third way uses some Harish-Chandra's results to reveal a connection between the K-finite matrix coefficients of the antiholomorphic discrete series and the K-finite vectors in our realization of the holomorphic discrete series on spaces of holomorphic functions on $\mathcal{H}$.

In the main part of the thesis, we prove that for every $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, the Poincaré series of certain K-finite matrix coefficients $F_{k,m}$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) from the previous paragraph span the space $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. We also prove the formula for the Petersson inner product of these Poincaré series with any element of $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. By transferring

these results to $S_m(\Gamma, 1)$ via the inverse of the lift $f \mapsto F_f$, we construct spanning sets for spaces $S_m(\Gamma, \chi)$ and reveal a connection between their elements and the cusp forms $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} \in S_m(\Gamma, \chi)$ that represent, in the sense of the Riesz representation theorem, the linear functionals $S_m(\Gamma, \chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f^{(k)}(\xi)$, for $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $\xi \in \mathcal{H}$. In this way, we obtain a representation-theoretic proof of formulae for cusp forms $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$. Moreover, our proofs incidentally produce a few corollaries about cusp forms of half-integral weight. For example, we obtain some bounds on the derivatives of classical Poincaré series and prove that every $f \in S_m(\Gamma, \chi)$, where $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, satisfies $\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f^{(k)}(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}+k} \right| < \infty$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Under some additional assumptions, we find the Fourier expansion of cusp forms $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ and their expansion in a series of classical Poincaré series. We also prove formulae for the action of standardly defined Hecke operators on $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ in terms of the latter expansion. Most of these results are half-integral weight variants of results of [32], [34], [35], and [36].

Next, we prove strengthened variants of the integral non-vanishing criteria [31, Theorem 4-1] and [33, Lemmas 2-1 and 3-1] for Poincaré series on Lie groups and for Poincaré series of half-integral weight on $\mathcal{H}$. By applying these criteria, we study the non-vanishing of the Poincaré series of matrix coefficients $F_{k,m}$ and of the corresponding cusp forms. We also prove the non-vanishing of some classical Poincaré series of half-integral weight.

In the last part of the thesis, we adapt the techniques of [35] to study the analytic continuation and non-vanishing of L-functions associated to cusp forms of half-integral weight. We construct the Poincaré series $\Psi_{\Gamma,m,\chi,s} \in S_m(\Gamma, \chi)$ that, in the sense of the Riesz representation theorem, correspond up to a multiplicative constant to the linear functionals $S_m(\Gamma, \chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto L(m - \overline{s}, f)$, where $m \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ is a discrete subgroup of finite covolume in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$ with a cusp at ∞, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^{\times}$ is an appropriate character, and s is an appropriate complex number. We use the series $\Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}$ to prove a result on the analytic continuation of L-functions associated to cusp forms in $S_m(\Gamma, \chi)$ from the half-plane $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1}$ to the half-plane $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}}$. Finally, by applying our non-vanishing criteria, we prove a result on the non-vanishing of cusp forms $\Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}$ that translates into a sufficient condition for the inequality $L(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}) > 0$ to hold.

Sadržaj

Uvod

Poincaréovi redovi predstavljaju vrlo općenitu metodu konstrukcije automorfnih i modularnih formi ([2, §11], [3], [4, §II.6]), što ih čini važnim alatom u analitičkoj teoriji brojeva i teoriji reprezentacija. U ovom radu proučavamo Poincaréove redove na metaplektičkom natkrivaču grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ koji posredstvom klasičnog lifta odgovaraju kusp-formama polucijele težine. Primjenom ojačanih integralnih kriterija neponištavanja iz [31] i [33] dokazujemo rezultate o neponištavanju takvih redova i istražujemo njihove primjene u teoriji modularnih formi. Da bismo motivirali ovo istraživanje i uklopili ga u povijesni i matematički kontekst, navedimo neke poznate rezultate o primjenama Poincaréovih redova u teoriji modularnih formi i teoriji reprezentacija te o problemu njihova neponištavanja.

Jedna su od najpoznatijih i najranije proučavanih familija Poincaréovih redova tzv. klasični Poincaréovi redovi – kusp-forme $\psi_{\Gamma,n,m,\chi}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, koje u smislu Rieszova teorema do na multiplikativnu konstantu reprezentiraju linearne funkcionale $S_m(\Gamma,\chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto a_n(f)$, gdje je $a_n(f)$ n-ti Fourierov koeficijent kusp-forme $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) e^{2\pi i k \frac{z}{h}}$. Ovdje su $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, Γ Fuchsova grupa prve vrste s kuspom u ∞, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ prikladan karakter konačnog reda i $h \in \mathbb{R}_{>0}$ konstanta koja ovisi samo o Γ. Klasične su Poincaréove redove proučavali već H. Poincaré [45] i H. Petersson [43]. Oni su dokazali formule za Fourierove koeficijente klasičnih Poincaréovih redova u terminima Kloostermanovih suma i Besselovih funkcija: Poincaré u slučaju kad je $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, a Petersson za općenitije grupe.

Naizgled jednostavno pitanje jesu li pojedini (ne nužno klasični) Poincaréovi redovi identički jednaki 0 kao netrivijalan problem spominje već H. Poincaré u svojem memoaru [46, str. 249] iz 1882. godine. Čak je i za klasične Poincaréove redove problem neponištavanja i, općenitije, određivanja svih linearnih relacija među tim redovima do danas ostao otvoreno pitanje, koje postavlja i H. Iwaniec u [16, str. 54]. Razni su pristupi tom pitanju uspjeli dati samo djelomične odgovore. Prije svega, dobro je poznato da redovi $\psi_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),n,m,1}$, $n \in \{1, 2, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\}$, čine bazu prostora $S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ pa posebno nisu identički jednaki 0. Nadalje, R. A. Rankin je u [51] ocjenom n-tog Fourierova koeficijenta kusp-forme $\psi_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),n,m,1}$ dokazao da postoje $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $B \in \mathbb{R}_{>4\ln 2}$ takvi da $\psi_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),n,m,1} \not\equiv 0$ za sve $m \in 2\mathbb{Z}_{\geq m_0}$ i $n \in \mathbb{Z} \cap \left]0, m^{2-\frac{B}{\ln\ln m}}\right]$. Istom su metodom J. Lehner [26] odnosno C. J. Mozzochi [29] dokazali varijante Rankinova rezultata za opću Fuchsovu grupu Γ koja posjeduje translacije odnosno za grupe $\Gamma_0(N)$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. G. Muić je u [33] dokazao rezultate o neponištavanju nekih klasičnih Poincaréovih redova koristeći profinjenje [33, Lema 2-1] svojeg integralnog kriterija neponištavanja [31, Teorem 4-1]. Još je jedan pristup ovom problemu istražio R. C. Rhoades u [52]: on postojanje linearne relacije među klasičnim Poincaréovim redovima iz $S_m(\Gamma_0(N))$, gdje je $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, interpretira u terminima postojanja slabo holomorfne modularne forme s propisanim glavnim dijelom Fourierova razvoja u kuspovima. Spomenimo i da je znatno bolji rezultat o neponištavanju nego u prosječnom slučaju dokazan numeričkim metodama za klasične Poincaréove redove iz $S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, čije je neponištavanje ekvivalentno Lehmerovoj slutnji da Ramanujanova tau-funkcija $\tau : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{C}$ nema nultočaka: provjereno je da $\psi_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),n,12,1} \not\equiv 0$ (ili ekvivalentno da $\tau(n) \neq 0$) za $n < 816212624008487344127999 \approx 8 \cdot 10^{23}$ [7].

Klasični Poincaréovi redovi nisu jedina zanimljiva klasa kusp-formi konstruiranih u obliku Poincaréovih redova. Primjerice, H. Petersson je u [44] uveo tzv. eliptički i hiperbolički Fourierov razvoj modularnih formi i s njima povezane eliptičke i hiperboličke Poincaréove redove, koji se i danas intenzivno proučavaju (vidi npr. [34], [36] i [41]).

S druge strane, u [32] je G. Muić za prostor kusp-formi $S_m(\Gamma)$ konstruirao sustav izvodnica čiji elementi preko klasičnog lifta Φ prostora $S_m(\Gamma)$ u prostor kuspidalnih automorfnih formi $\mathcal{A}_{cusp}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ odgovaraju Poincaréovim redovima K-konačnih matričnih koeficijenata $F_{k,m}$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, pri čemu se matrični koeficijenti $F_{k,m}$ s obiju strana transformiraju kao karakteri grupe $K = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Ovdje su $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ i Γ proizvoljna Fuchsova grupa prve vrste. Konstruirane su kusp-forme poseban slučaj Peterssonovih eliptičkih Poincaréovih redova [36, §4]. U [32] je primjenom integralnog kriterija neponištavanja [31, Teorem 4-1] dokazano neponištavanje mnogih konstruiranih Poincaréovih redova. Nadalje, u [36] je tehnikama iz teorije reprezentacija dokazana formula za Peterssonov skalarni produkt proizvoljne $\varphi \in \Phi(S_m(\Gamma))$ s Poincaréovim redovima funkcija $F_{k,m}$. Ta formula otkriva vezu konstruiranih kusp-formi s kusp-formama $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} \in S_m(\Gamma,\chi)$ koje u smislu Rieszova teorema reprezentiraju linearne funkcionale $S_m(\Gamma,\chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f^{(k)}(\xi)$, gdje su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H} := \mathbb{C}_{\Im(z)>0}$. Otkrivena veza predstavlja reprezentacijski dokaz formula za kusp-forme $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ u terminima Poincaréovih redova.

Konstrukcija u [32] Poincaréovih redova iz prethodnog odlomka bila je motivirana sljedećom primjedbom D. Miličića [37, Lema 6-6]. Neka su G povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom, K maksimalna kompaktna podgrupa od G i Γ diskretna podgrupa od G. Tada Poincaréovi redovi K-konačnih matričnih koeficijenata proizvoljne integrabilne reprezentacije π grupe G razapinju π-izotipičnu komponentu u reprezentaciji grupe G desnim translacijama u $L^2(\Gamma\backslash G)$. Ovaj rezultat ilustrira ulogu Poincaréovih redova u teoriji reprezentacija grupe G, preciznije u proučavanju spektralne dekompozicije reprezentacije $L^2(\Gamma\backslash G)$. Ona je još jasnija iz činjenice da su Poincaréovi redovi klasična metoda konstrukcije automorfnih formi, a dobro je poznato da je prostor $\mathcal{A}^2(\Gamma\backslash G)$ kvadratno integrabilnih automorfnih formi za Γ gust u zatvaraču sume svih zatvorenih ireducibilnih podreprezentacija od $L^2(\Gamma\backslash G)$ (vidi npr. [30, Teorem 1-6]). Navedimo još dva primjera ovakve primjene Poincaréovih redova: G. Savin u [53] dokazuje rezultate o konstrukciji kuspidalnih automorfnih formi pomoću Poincaréovih redova, dok G. Muić u [30] dokazuje rezultate o spektralnoj dekompoziciji reprezentacije $L^2(\Gamma\backslash G)$ u kokompaktnom slučaju koristeći spektralnu dekompoziciju kompaktno nošenih Poincaréovih redova.

Teorija Poincaréovih redova prirodno se prevodi i na adelički jezik (vidi [31]). Primjerice, G. Henniart [14], M.-F. Vignéras [59] i F. Shahidi [55] su pomoću kompaktno nošenih (adeličkih) Poincaréovih redova razvili metodu konstrukcije kuspidalnih automorfnih reprezentacija s propisanim lokalnim ponašanjem u nekom konačnom mjestu. Profinjenjem ove ideje G. Muić je u [38] pomoću kompaktno nošenih (adeličkih) Poincaréovih redova proučavao problem egzistencije kuspidalnih automorfnih formi.

Za kraj ovog kratkog i ni približno sveobuhvatnog pregleda poznatih rezultata o Poincaréovim redovima, spomenimo još jednu primjenu Poincaréovih redova u teoriji modularnih formi koja je u uskoj vezi sa zadnjim dijelom ovog rada. U nizu je radova započetom Kohnenovim radom [22] pomoću Poincaréovih redova proučavano neponištavanje L-funkcija pridruženih kusp-formama. Objasnimo pobliže ovaj problem na primjeru kusp-formi za $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Neka je $m \in 2\mathbb{Z}_{>0}$. L-funkcija kusp-forme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z}$ iz $S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ definirana je formulom

$$L(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}, \qquad \Re(s) > \frac{m+1}{2}.$$

Dobro je poznato da se funkcija $L^*(s,f) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$ proširuje do cijele funkcije koja zadovoljava funkcionalnu jednadžbu $L^*(s,f) = (-1)^{\frac{m}{2}} L^*(m-s,f)$. Nadalje, ako je f Heckeova eigenforma, tj. zajednička svojstvena funkcija svih Heckeovih operatora na $S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, tada se sve nultočke funkcije $L^*(\,\cdot\,,f)$ nalaze u kritičnoj pruzi $\frac{m-1}{2} < \Re(s) < \frac{m+1}{2}$, a generalizirana Riemannova hipoteza predviđa da sve one leže na pravcu $\Re(s) = \frac{m}{2}$. W. Kohnen je u [22] dokazao rezultate o neponištavanju sume L-funkcija prikladno normaliziranih Heckeovih eigenformi u točkama kritične pruge. Dokaz se temelji na ocjeni prvog Fourierova koeficijenta kusp-forme $R_{m,s} \in S_m(SL_2(\mathbb{Z}))$ koja do na multiplikativnu konstantu u smislu Rieszova teorema reprezentira linearni funkcional $S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto L^*(s,f)$, gdje je $0 < \left|\Re(s) - \frac{m}{2}\right| < \frac{1}{2}$. Kohnenovu je metodu A. Raghuram u [49] prilagodio L-funkcijama kusp-formi nivoa $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ s karakterom, u [50] je primijenjena na L-funkcije kusp-formi težine $m \in \frac{7}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i nivoa $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ s karakterom, a u [23] na L-funkcije kusp-formi iz Kohnenova plus-prostora $S_m^+(\Gamma(4))$, gdje je $m \in \frac{1}{2} + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Motiviran Kohnenovom metodom, u [35] je G. Muić proučavao L-funkcije kusp-formi iz prostora $S_m(\Gamma,\chi)$, gdje su Γ proizvoljna Fuchsova grupa s regularnim kuspom u ∞, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 5}$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ prikladan karakter. Za $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ s Fourierovim razvojem

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n \frac{z}{h}}$, L-funkcija od f je definirana formulom

$$L(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}, \qquad \Re(s) > \frac{m}{2} + 1.$$

U [35] su određeni Poincaréovi redovi $P_{\Gamma,m,\chi,s} \in S_m(\Gamma,\chi)$ sa sljedećim svojstvom: formula

$$L(s,f) = \langle f,\, P_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}} \rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}, \qquad f \in S_m(\Gamma,\chi),$$

definira holomorfno proširenje funkcije $L(\,\cdot\,,f)$ na poluravninu $\mathbb{C}_{\Re(s)>\frac{m}{2}}$. Nadalje, primjenom integralnog kriterija neponištavanja [33, Lema 3-1] na redove $P_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}$ dokazano je nekoliko rezultata o neponištavanju L-funkcija kusp-formi iz $S_m(\Gamma,\chi)$.

U ovom radu dokazujemo sljedeće ojačanje (Teorem 7.1) integralnog kriterija neponištavanja [31, Teorem 4-1] odnosno [33, Lema 2-1] za Poincaréove redove na Liejevim grupama:

Teorem 0.1. *Neka su G povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom, dg Haarova mjera na G, Γ diskretna podgrupa od G, Λ podgrupa od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter. Neka je $\varphi : G \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa sljedećim svojstvima:*

(F1) $\varphi(\lambda g) = \chi(\lambda)\varphi(g), \quad \lambda \in \Lambda,\ g \in G.$

(F2) $|\varphi| \in L^1(\Lambda\backslash G)$.

Tada Poincaréov red

$$\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(g) := \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\varphi(\gamma g),$$

koji konvergira apsolutno gotovo svuda na G, zadovoljava

$$\int_{\Gamma\backslash G} \left|\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(g)\right| dg > 0$$

ako postoji Borel-izmjeriv skup $C \subseteq G$ sa sljedećim svojstvima:

(C1) $CC^{-1} \cap \Gamma \subseteq \Lambda$.

(C2) *Uz oznaku $(\Lambda C)^c := G \setminus \Lambda C$, vrijedi*

$$\int_{\Lambda\backslash\Lambda C} \lvert\varphi(g)\rvert\, dg > \int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c} \lvert\varphi(g)\rvert\, dg$$

za neku izmjerivu funkciju $\lvert\,\cdot\,\rvert : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sa sljedećim svojstvima:

(M1) $\lvert 0 \rvert = 0$.

(M2) $\lvert z \rvert = \lvert\, |z|\, \rvert, \quad z \in \mathbb{C}$.

(M3) $\lvert \sum_{n=1}^{\infty} z_n \rvert \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lvert z_n \rvert$ *za svaki $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$.*

Spomenimo da, ako je $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konkavna funkcija takva da je $f(0) = 0$, tada je funkcija $|\!|\!| \cdot |\!|\!| := f(|\cdot|) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ izmjeriva i ima svojstva (M1) – (M3) iz Teorema 0.1 (Lema 7.4).

Općenitije, Teorem 0.1 vrijedi, s analognim dokazom, ako je G unimodularna lokalno kompaktna Hausdorffova grupa koja zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. U ovom radu pomoću tog teorema dokazujemo rezultate o neponištavanju nekoliko klasa Poincaréovih redova povezanih s kusp-formama polucijele težine. Objasnimo to detaljnije.

Za razliku od kusp-formi cijele težine, standardno se definirane kusp-forme polucijele težine (vidi npr. [40] ili [57]) ne dižu prirodno do automorfnih formi na grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, nego do automorfnih formi na metaplektičkom natkrivaču grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, koji kraće zovemo metaplektičkom grupom. Dobro je poznato da metaplektička grupa nema vjernih konačnodimenzionalnih reprezentacija, dakle ne može se realizirati kao podgrupa grupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ni za koji $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mi uvodimo tri njene korisne realizacije, sugestivno označene sa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$ (vidi potpoglavlje 1.2). Za naše je potrebe najvažnija realizacija

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim := \Bigg\{ \sigma = \left(g_\sigma = \begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}, \eta_\sigma \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^{\mathcal{H}} : \\ \eta_\sigma \text{ je holomorfna i } \eta_\sigma^2(z) = c_\sigma z + d_\sigma \text{ za sve } z \in \mathcal{H} \Bigg\}\end{aligned}$$

s pravilom množenja

$$\sigma_1 \sigma_2 := \left(g_{\sigma_1} g_{\sigma_2}, \eta_{\sigma_1}(g_{\sigma_2}.z) \eta_{\sigma_2}(z) \right), \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim.$$

Uz kraću oznaku $(g_\sigma, \eta_\sigma(i))$ za elemente $\sigma = (g_\sigma, \eta_\sigma) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, grupa

$$K := \left\{ \kappa_t := \left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{i\frac{t}{2}} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

je maksimalna kompaktna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Unitarni dual grupe K čine karakteri $\chi_n : K \to \mathbb{C}^\times$, $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

$$\chi_n(\kappa_t) := e^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

U nastavku neka je $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ djeluje slijeva na $\mathcal{H}$ po formuli

$$\sigma.z := \frac{a_\sigma z + b_\sigma}{c_\sigma z + d_\sigma}, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \ z \in \mathcal{H},$$

i zdesna na $\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ po formuli

$$\left(f\big|_m \sigma \right)(z) := f(\sigma.z)\ \eta_\sigma(z)^{-2m}, \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}}, \ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \ z \in \mathcal{H}. \tag{0.1}$$

U odnosu na djelovanje (0.1) prirodno definiramo prostore $M_m(\Gamma, \chi)$ modularnih formi i $S_m(\Gamma, \chi)$ kusp-formi za svaku diskretnu podgrupu Γ koja je konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i za svaki karakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda. Ova definicija kao poseban slučaj uključuje prostore $M_m(N, \psi)$ i $S_m(N, \psi)$ iz [57], gdje su $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i ψ Dirichletov karakter modulo N (vidi potpoglavlje 3.6). U uvedenoj općenitosti detaljno dokazujemo mnoga svojstva kusp-formi polucijele težine. Primjerice, dokazujemo da je klasični lift funkcije $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ do funkcije $F_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$, $F_f(\sigma) := \left(f\big|_m \sigma\right)(i)$, unitarni izomorfizam s prostora $S_m(\Gamma) := S_m(\Gamma, 1)$ na prostor $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m \subseteq L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ kuspidalnih automorfnih formi za Γ težine m (Teorem 3.25). Pritom $S_m(\Gamma, \chi)$ promatramo kao konačnodimenzionalan Hilbertov prostor s Peterssonovim skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} := \varepsilon_\Gamma^{-1} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\, dv(z), \qquad f_1, f_2 \in S_m(\Gamma, \chi),$$

gdje su $\varepsilon_\Gamma := \left|\Gamma \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\right|$ i $dv(x + iy) := \frac{dx\,dy}{y^2}$ za $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Najjednostavnija je metoda konstrukcije modularnih formi iz $M_m(\Gamma, \chi)$ konstrukcija u obliku Poincaréovih redova

$$P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f := \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\, f\big|_m \gamma,$$

gdje je Λ podgrupa od Γ, a f je prikladna funkcija $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Pomoću Teorema 0.1 u Lemi 7.5 i Teoremu 7.6 dokazujemo sljedeći kriterij neponištavanja za takve Poincaréove redove:

Teorem 0.2. *Neka su* $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ *diskretna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, Λ *podgrupa od* Γ *i* $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *unitarni karakter. Neka je* $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *izmjeriva funkcija sa sljedećim svojstvima:*

(f1) $f\big|_m \lambda = \chi(\lambda) f, \quad \lambda \in \Lambda.$

(f2) $\int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv(z) < \infty.$

Tada vrijedi:

(i) Ako je $\chi\big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \neq \chi_m\big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}$, *tada je* $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f \equiv 0$.

(ii) Pretpostavimo da je $\chi\big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} = \chi_m\big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}$. *Tada vrijedi*

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left|\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv(z) > 0$$

ako postoji Borel-izmjeriv skup $S \subseteq \mathcal{H}$ *sa sljedećim svojstvima:*

(S1) *Za sve* $z_1, z_2 \in S$ *vrijedi: ako je* $z_1 \neq z_2$, *tada je* $\Gamma.z_1 \neq \Gamma.z_2$.

(S2) *Uz oznaku* $(\Lambda.S)^c := \mathcal{H} \setminus \Lambda.S$, *vrijedi*

$$\int_{\Lambda\setminus\Lambda.S} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv(z) > \int_{\Lambda\setminus(\Lambda.S)^c} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv(z)$$

za neku izmjerivu funkciju $\lvert\!\lvert \cdot \rvert\!\rvert : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *sa svojstvima* (M1) – (M3) *iz Teorema 0.1.*

Pomoću Teorema 0.1 i 0.2 u ovom radu dokazujemo rezultate o neponištavanju triju klasa Poincaréovih redova. Prva je od njih opisana sljedećim teoremom, koji slijedi iz Propozicije 4.9 i iz Teorema 6.3 i 6.4.

Teorem 0.3. *Neka su* $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda. Za svaki* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *definiramo funkciju* $f_{k,m} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$f_{k,m}(z) := (2i)^m \frac{(z-i)^k}{(z+i)^{m+k}}.$$

Vrijedi:

(i) Funkcije $F_{f_{k,m}}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, *K-konačni su matrični koeficijenti do na unitarnu ekvivalenciju jedinstvene ireducibilne unitarne reprezentacije grupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *koja se kao reprezentacija grupe* K *rastavlja u ortogonalnu sumu* $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{m+2n}$.

(ii) $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ P_{\Gamma,1} F_{f_{k,m}} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$.

(iii) $S_m(\Gamma, \chi) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{ P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$.

Da bismo izgradili reprezentacijske temelje za dokaz Teorema 0.3, u radu istražujemo infinitezimalnu strukturu reprezentacija iz osnovne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i realiziramo reprezentacije iz holomorfne i antiholomorfne diskretne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na prostorima (anti)holomorfnih funkcija na $\mathcal{H}$ i na jediničnom disku $\mathcal{D}$. Nadalje, za svaku kvadratno integrabilnu reprezentaciju π grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ računamo K-konačne matrične koeficijente od π koji se s obiju strana transformiraju kao karakteri grupe K. To radimo na tri načina: prvi je izračun iz osnovne serije; drugi je izračun iz realizacija reprezentacija iz antiholomorfne diskretne serije na prostorima antiholomorfnih funkcija na $\mathcal{D}$; treći se način temelji na tehnici iz [32]: pomoću nekih Harish-Chandrinih rezultata otkrivamo vezu između K-konačnih matričnih koeficijenata reprezentacija iz antiholomorfne diskretne serije i K-konačnih vektora u realizacijama reprezentacija iz holomorfne diskretne serije na prostorima holomorfnih funkcija na $\mathcal{H}$, odakle lako proizlaze formule za tražene K-konačne matrične koeficijente.

Da bismo dokazali Teorem 0.3.(ii)–(iii), tehnikama iz teorije reprezentacija računamo Peterssonov skalarni produkt Poincaréovih redova $P_{\Gamma,1} F_{f_{k,m}}$ s proizvoljnom $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$. Pomoću dokazane formule (Teorem 6.3) dokazujemo i sljedeći teorem (Teorem 6.8):

Teorem 0.4. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda,* $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $\xi \in \mathcal{H}$. *Za* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *definiramo funkciju* $\delta_{k,m,\xi} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$\delta_{k,m,\xi}(z) := \frac{(2i)^m}{4\pi} \left(\prod_{r=0}^{k} (m-1+r) \right) \frac{1}{\left(z-\bar{\xi}\right)^{m+k}},$$

i označimo $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} := P_{\Gamma,\chi}\delta_{k,m,\xi}$. *Vrijedi:*

(i) Skup $\{\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ *je sustav izvodnica prostora* $S_m(\Gamma,\chi)$.

(ii) $\langle f, \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = f^{(k)}(\xi), \quad f \in S_m(\Gamma,\chi),\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

Spomenimo da se jednakost iz Teorema 0.4.(ii) u slučaju kad je $k = 0$ može dokazati i bez korištenja tehnika iz teorije reprezentacija, prilagodbom dokaza teorema [28, Teorem 6.3.3] na slučaj polucijele težine. Jednakost u slučaju kad je $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ iz nje slijedi k-terostrukim deriviranjem (Vidi Lemu 6.7. Da je $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} \in S_m(\Gamma,\chi)$, može se dokazati primjenom Leme 5.10.).

Iz naših dokaza proizlazi i nekoliko korolara o kusp-formama težine $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Primjerice, dokazujemo neke ocjene derivacija klasičnih Poincaréovih redova (Korolar 6.14). Nadalje, dokazujemo da svaka $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ zadovoljava $\sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f^{(k)}(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}+k}\right| < \infty$ za svaki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (Korolar 6.10). Uz neke dodatne pretpostavke na Γ i χ određujemo Fourierov razvoj kusp-formi $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ i njihov razvoj u red klasičnih Poincaréovih redova (Teorem 6.13), u terminima kojeg dokazujemo i formule za djelovanje standardno definiranih Heckeovih operatora na kusp-forme $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ (Korolar 6.15). Većina su ovih rezultata polucijelotežinske varijante rezultata iz [32], [34], [35] i [36].

Nadalje, primjenom Teorema 0.1 dokazujemo sljedeći rezultat o neponištavanju Poincaréovih redova $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m}$ i pripadnih kusp-formi (Lema 7.7 i Teorem 7.9). U njegovu se iskazu pojavljuje pojam medijana $\mathrm{M}(a,b)$ beta-distribucije s parametrima $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ – jedinstvenog $\mathrm{M}(a,b) \in \,]0,1[$ takvog da je

$$\int_0^{\mathrm{M}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_{\mathrm{M}(a,b)}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Definirajmo i projekciju $P : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $P(\sigma) := g_\sigma$.

Teorem 0.5. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda. Neka su* $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada vrijedi:*

(i) Ako je $\chi\big|_{\Gamma\cap K} \neq \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma\cap K}$, *tada je* $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \equiv 0$ *i* $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \equiv 0$.

(ii) Neka je $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Pretpostavimo da je* $P(\Gamma) \subseteq \Gamma(N)$ *i da vrijedi* $\chi\big|_{\Gamma\cap K} = \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma\cap K}$. *Ako je*

$$N > \frac{4\,\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)},$$

tada $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \not\equiv 0$ *i* $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \not\equiv 0$.

Druga klasa Poincaréovih redova čije neponištavanje proučavamo u ovom radu jesu klasični Poincaréovi redovi polucijele težine. Naš je osnovni rezultat o njihovu neponištavanju sljedeći teorem, koji slijedi iz Leme 5.11 i Teorema 7.19. U njegovu se iskazu pojavljuje pojam medijana $\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)}$ gama-distribucije s parametrima $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ – jedinstvenog $\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)} \in \mathbb{R}_{>0}$ takvog da je

$$\int_0^{\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)}} x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}\, dx = \int_{\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)}}^{\infty} x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}\, dx.$$

Teorem 0.6. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$ *takva da je* ∞ *kusp od* $P(\Gamma)$, $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda takav da vrijedi* $\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma)$ *za sve* $\gamma \in \Gamma_\infty$. *Neka je* $h \in \mathbb{R}_{>0}$ *takav da je* $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\Gamma_\infty = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\langle n_h\rangle$. *Definiramo*

$$N := \inf\left\{|c| : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P(\Gamma) \ \ i\ c \neq 0\right\} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Tada red*

$$\psi_{\Gamma,n,m,\chi} := P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$. *Nadalje, ako je*

$$\frac{2\pi n}{Nh} < \mathrm{M}_{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1,1\right)},$$

tada $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \not\equiv 0$.

U zadnjem dijelu ovog rada prilagodbom metoda iz [35] proučavamo problem analitičkog proširenja i neponištavanja L-funkcija pridruženih kusp-formama polucijele težine. Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$ takva da je ∞ kusp od $P(\Gamma)$, $m \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda takav da je $\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma)$ za sve $\gamma \in \Gamma_\infty$. Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\Gamma_\infty = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\langle n_h\rangle$. Tada svaka $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ ima Fourierov razvoj oblika

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H}.$$

L-funkcija od f jest funkcija $L(\,\cdot\,, f) : \mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1} \to \mathbb{C}$,

$$L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}.$$

Sljedeći rezultat o analitičkom proširenju funkcije $L(\,\cdot\,, f)$ na poluravninu $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}}$ slijedi iz Leme 8.4 i Teorema 8.5.

Teorem 0.7. *Neka su* Γ, m, χ *i* h *kao gore. Neka je* $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. *Tada za* $\Re(s) < \frac{m}{2}$ *red*

$$\Psi_{\Gamma,m,\chi,s} := P_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma,\chi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}\right)$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$ *i definira element iz* $S_m(\Gamma, \chi)$, *a formula*

$$L(s,f) = \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \left\langle f,\, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} \tag{0.2}$$

definira holomorfno proširenje funkcije $L(\,\cdot\,, f)$ *na poluravninu* $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}}$.

Jednakost (0.2) omogućuje nam da na kraju rada primjenom Teorema 0.2 na Poincaréove redove $\Psi_{\Gamma,m,\chi,s}$ dokažemo sljedeći rezultat o neponištavanju L-funkcija pridruženih kuspformama polucijele težine (Korolar 8.7).

Teorem 0.8. *Neka su* Γ, m, χ *i* h *kao gore. Neka je* $\frac{m}{2} < \Re(s) < m-1$. *Pretpostavimo da je* $\frac{Nh}{\pi}$ *veći od ili jednak*

$$\max\left\{\frac{4}{m-\frac{8}{3}},\, \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{\pi}\Gamma\left(\frac{m-\Re(s)+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\Re(s)-1}{2}\right)\frac{1}{\Re(s)-\frac{m}{2}}\frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\right)^{\frac{1}{\Re(s)-\frac{m}{2}}}\right\}.$$

Tada je

$$L\left(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}\right) > 0.$$

Slijedi kratak pregled sadržaja po poglavljima.

Poglavlje 1 uvodi osnovne pojmove i rezultate na kojima se temelji ostatak rada. Nakon pregleda nama važnih dijelova teorije reprezentacija povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom, uvodimo tri realizacije metaplektičke grupe i istražujemo njihova svojstva. Dajemo i kratak pregled rezultata o djelovanju diskretnih podgrupa grupe $G \in \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$ na gornju kompleksnu poluravninu $\mathcal{H}$. Na kraju Poglavlja 1 definiramo korisne Radonove mjere na kvocijentnim prostorima $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ i $\Gamma\backslash G$, gdje je Γ diskretna podgrupa grupe $G \in \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$.

U Poglavlju 2 proučavamo reprezentacije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$: istražujemo infinitezimalnu strukturu reprezentacija iz osnovne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i konstruiramo realizacije holomorfne i antiholomorfne diskretne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na Hilbertovim prostorima sastavljenim od (anti)holomorfnih funkcija definiranih na poluravnini $\mathcal{H}$ odnosno na jediničnom disku $\mathcal{D}$.

U Poglavlju 3 izlažemo osnove teorije modularnih formi polucijele težine. Dokazujemo da je klasični lift s prostora $S_m(\Gamma)$ u prostor $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ unitarni izomorfizam. Ovdje su $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

U Poglavlju 4 na tri načina dokazujemo formule za K-konačne matrične koeficijente kvadratno integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ koji se s obiju strana transformiraju kao karakteri njene maksimalne kompaktne podgrupe K.

U Poglavlju 5 izlažemo niz rezultata o konvergenciji Poincaréovih redova na Liejevim grupama i Poincaréovih redova polucijele težine na $\mathcal{H}$.

U Poglavlju 6 dokazujemo da određeni Poincaréovi redovi pridruženi K-konačnim matričnim koeficijentima integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ pipadaju prostoru $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. Određujemo Peterssonov skalarni produkt tih Poincaréovih redova s proizvoljnom $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ i pomoću njih konstruiramo sustav izvodnica za prostor $S_m(\Gamma, \chi)$. Ovdje su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. Dokazujemo i niz korolara o kusp-formama polucijele težine.

U Poglavlju 7 proučavamo neponištavanje Poincaréovih redova: dokazujemo ojačane varijante integralnih kriterija neponištavanja iz [31] i [33] za Poincaréove redove na Liejevim grupama odnosno na $\mathcal{H}$. Primjenom tih kriterija dokazujemo rezultate o neponištavanju Poincaréovih redova iz Poglavlja 6 i o neponištavanju klasičnih Poincaréovih redova polucijele težine.

U Poglavlju 8 primjenom razvijene teorije konvergencije i neponištavanja Poincaréovih redova dokazujemo rezultate o analitičkom proširenju i neponištavanju L-funkcija pridruženih kusp-formama polucijele težine.

Napomenimo da su neki rezultati ovog istraživanja objavljeni u [61].

Oznake

$\Re(z)$	realni dio kompleksnog broja z
$\Im(z)$	imaginarni dio kompleksnog broja z
i	imaginarna jedinica, tj. $(0,1) \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\mathcal{H}$	$\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$
$\mathcal{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$
$\mathcal{D}^\times$	$\mathcal{D} \setminus \{0\}$
$\mathbb{T}$	$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$
$\mathbb{P}$	skup prostih brojeva.

Za otvoren podskup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$:

$\mathrm{Hol}(\Omega)$	prostor svih holomorfnih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$.

Za topološku mnogostrukost M i $f : M \to \mathbb{C}$:

$C(M)$	prostor neprekidnih funkcija $M \to \mathbb{C}$
$C_c(M)$	prostor neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem $M \to \mathbb{C}$
$\operatorname{supp} f$	nosač funkcije f, tj. zatvarač u M skupa $\{p \in M : f(p) \neq 0\}$.

Za glatku mnogostrukost M:

$C^\infty(M)$	prostor glatkih funkcija $M \to \mathbb{C}$
$C_c^\infty(M)$	prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem $M \to \mathbb{C}$
$C_\mathbb{R}^\infty(M)$	prostor glatkih funkcija $M \to \mathbb{R}$.

Za grupu G:

1_G	neutralni element u G.

Za Liejevu grupu G:

$\mathrm{Lie}(G)$	Liejeva algebra od G.

Za prostor mjere (X, μ) i izmjerivu $f : X \to \mathbb{C}$:

$\|f\|_\infty$	esencijalni supremum funkcije f.

Za topološki prostor X i $A \subseteq X$:

$\mathbb{1}_A$	karakteristična funkcija skupa A u X
$\mathrm{Cl}_X A$	zatvarač skupa A u X.

Za prsten R i $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$\mathrm{M}_n(R)$	prsten kvadratnih matrica reda n s koeficijentima iz R.

Poglavlje 1

Osnove

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove i rezultate na kojima se temelji ostatak rada:

- Potpoglavlje 1.1 je kratak pregled nama važnih dijelova teorije reprezentacija povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom.
- U potpoglavlju 1.2 uvodimo tri realizacije metaplektičke grupe: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$, i istražujemo njihova svojstva.
- Potpoglavlje 1.3 je pregled poznatih rezultata o djelovanju diskretnih podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ na gornju kompleksnu poluravninu $\mathcal{H}$, kao i varijanti tih rezultata za diskretne podgrupe grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.
- U potpoglavlju 1.4 definiramo korisne Radonove mjere na kvocijentima $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ i $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ odnosno $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, gdje je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ odnosno od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

1.1 Reprezentacije povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom

Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom. Neka je K njena maksimalna kompaktna podgrupa. Označimo sa $\mathfrak{g}$ Liejevu algebru od G, sa $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ univerzalnu omotačku algebru kompleksifikacije od $\mathfrak{g}$, a sa $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ centar algebre $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Neka je $\exp : \mathfrak{g} \to G$ eksponencijalno preslikavanje od G.

Ovo je potpoglavlje pregled nama važnih dijelova teorije reprezentacija grupe G. U odjeljku 1.1.1 izlažemo poznati Harish-Chandrin rezultat o kompleksnim funkcijama na grupi G, Teorem 1.3, koji ćemo često koristiti u kasnijim poglavljima. U odjeljku 1.1.2 definiramo dopustive reprezentacije grupe G na Hilbertovim prostorima i izlažemo temelje Harish-Chandrina pristupa proučavanju tih reprezentacija pomoću pripadnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula. U odjeljku 1.1.3 izlažemo osnovne informacije o matričnim koeficijentima reprezentacija grupe G na Hilbertovim prostorima, a u odjeljku 1.1.4 detaljnije proučavamo unitarnu reprezentaciju grupe G desnim translacijama u $L^2(\Gamma\backslash G)$, gdje je Γ diskretna podgrupa od G.

Kao povezana poluprosta Liejeva grupa, G je unimodularna [18, Korolar 8.31]. Fiksirajmo njenu Haarovu mjeru μ_G.

1.1.1 Kompleksne funkcije na grupi G

Za $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ i izmjerivu $f : G \to \mathbb{C}$, označimo

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f|^p \, d\mu_G\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ovime je definirana norma $\|\cdot\|_p$ Banachova prostora $L^p(G)$ sastavljenog od klasa ekvivalencije, po relaciji jednakosti μ_G-gotovo svuda, izmjerivih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ takvih da je $\|f\|_p < \infty$. $L^2(G)$ ćemo promatrati kao Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle f,\, g\rangle_{L^2(G)} := \int_G f\overline{g}\, d\mu_G, \qquad f, g \in L^2(G).$$

Definiramo i prostor $L^1_{loc}(G)$ sastavljen od klasa ekvivalencije, po relaciji jednakosti μ_G-gotovo svuda, izmjerivih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ takvih da je $\int_C |f| \, d\mu_G < \infty$ za svaki kompaktan skup $C \subseteq G$.

Definicija 1.1. *Neka su $f, g : G \to \mathbb{C}$ izmjerive funkcije takve da vrijedi jedno od sljedećeg:*

(a) *$f, g \in L^1(G)$.*

(b) *$f \in L^1(G)$, a g je ograničena na G, ili obratno.*

(c) *$f \in C_c(G)$, a $g \in L^1_{loc}(G)$, ili obratno.*

Formula

$$(f * g)(x) := \int_G f\left(xy^{-1}\right) g(y)\, dy, \qquad x \in G,$$

definira funkciju $f * g : G \to \mathbb{C}$ (u slučaju (a) *kao element prostora $L^1(G)$), koju zovemo* ***konvolucijom funkcija*** *f* ***i*** *g.*

Pridruživanje elementu $X \in \mathfrak{g}$ lijevoinvarijantnog diferencijalnog operatora $X : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$,

$$(Xf)(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x \exp(tX)), \qquad x \in G,\ f \in C^\infty(G), \tag{1.1}$$

na jedinstven se način proširuje do izomorfizma unitalne asocijativne $\mathbb{C}$-algebre $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ i algebre lijevoinvarijantnih linearnih diferencijalnih operatora $C^\infty(G) \to C^\infty(G)$. Pritom se $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ preslikava na podalgebru biinvarijantnih linearnih diferencijalnih operatora

$C^\infty(G) \to C^\infty(G)$. U nastavku ćemo elemente iz $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ identificirati s odgovarajućim lijevoinvarijantnim diferencijalnim operatorima.

Definicija 1.2. *$f \in C^\infty(G)$ je:*

(a) $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$***-konačna*** *ako je*

$$\dim Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})f < \infty.$$

(b) K***-konačna slijeva*** *ako je*

$$\dim \operatorname{span}_\mathbb{C}\{f(k\,\cdot\,) : k \in K\} < \infty.$$

(c) K***-konačna zdesna*** *ako je*

$$\dim \operatorname{span}_\mathbb{C}\{f(\,\cdot\,k) : k \in K\} < \infty.$$

Sljedeći je teorem poseban slučaj teorema [13, Teorem 1].

Teorem 1.3. *Neka je $f \in C^\infty(G)$ $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačna i K-konačna zdesna. Neka je U otvorena okolina od 1_G u G. Tada postoji $\alpha \in C_c^\infty(G)$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\operatorname{supp} \alpha \subseteq U$.

(ii) $\alpha(kxk^{-1}) = \alpha(x), \quad x \in G,\ k \in K$.

(iii) $f = f * \alpha$.

Koristit ćemo i "lijevu" varijantu Teorema 1.3:

Teorem 1.4. *Neka je $f \in C^\infty(G)$ $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačna i K-konačna slijeva. Neka je U otvorena okolina od 1_G u G. Tada postoji $\beta \in C_c^\infty(G)$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\operatorname{supp} \beta \subseteq U$.

(ii) $\beta(kxk^{-1}) = \beta(x), \quad x \in G,\ k \in K$.

(iii) $f = \beta * f$.

Dokaz. Primjenom Teorema 1.3 na funkciju $f(\,\cdot\,^{-1})$. □

1.1.2 Reprezentacije na Hilbertovim prostorima

U ovom odjeljku uvodimo osnovne pojmove iz teorije reprezentacija povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom na Hilbertovim prostorima i iznosimo temelje Harish-Chandrina pristupa proučavanju tih reprezentacija pomoću pripadnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula. Ovaj je pregled sastavljen po uzoru na [19, Uvod].

I dalje koristimo oznake s početka ovog poglavlja. Neka je $(H, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_H)$ separabilan kompleksan Hilbertov prostor. Označimo sa $\mathrm{GL}(H)$ grupu svih neprekidnih invertibilnih linearnih operatora $H \to H$ čiji je inverz neprekidan. Neka je $\pi : G \to \mathrm{GL}(H)$ homomorfizam grupa takav da je $(x, v) \mapsto \pi(x)v$ neprekidno preslikavanje $G \times H \to H$. Uređen par (π, H) zovemo **reprezentacijom grupe** G na prostoru H. Ponekad je kraće označavamo sa π ili sa H. π je **ireducibilna** ako H ima točno dva zatvorena G-invarijantna potprostora: 0 i H. π je **unitarna** ako su svi operatori $\pi(x)$, $x \in G$, unitarni.

Kažemo da su unitarne reprezentacije (π_1, H_1) i (π_2, H_2) grupe G **unitarno ekvivalentne** ako postoji unitarni izomorfizam $A : H_1 \to H_2$ takav da je

$$A\pi_1(x) = \pi_2(x)A, \qquad x \in G.$$

U tom slučaju operator A zovemo **unitarnom ekvivalencijom** reprezentacija π_1 i π_2. Skup svih klasa unitarne ekvivalencije ireducibilnih unitarnih reprezentacija grupe G označava se sa $\widehat{G}$ i zove **unitarni dual** grupe G.

Definicija 1.5. *$v \in H$ je **gladak vektor** reprezentacije π ako je $x \mapsto \pi(x)v$ glatko preslikavanje $G \to H$. Prostor svih takvih vektora označavamo sa H^∞.*

H^∞ je G-invarijantan potprostor od H na kojem reprezentacija π inducira **izvedenu reprezentaciju** Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ definiranu formulom

$$\pi(X)v := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi(\exp(tX))v, \qquad X \in \mathfrak{g},\ v \in H^\infty.$$

Izvedena reprezentacija od $\mathfrak{g}$ na jedinstven se način proširuje do reprezentacije algebre $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ na prostoru H^∞, koju također označavamo sa π.

L. Gårding je dokazao da je prostor H^∞ gust u H [9]. Preciznije, **Gårdingov potprostor**

$$\{\pi(f)v : f \in C_c^\infty(G),\ v \in H\}$$

je sadržan u H^∞ i gust u H. Ovdje je $\pi(f)$ ograničen linearan operator $H \to H$ definiran za svaku $f \in C_c(G)$, a u slučaju kad je π unitarna i za svaku $f \in L^1(G)$, formulom

$$\pi(f)v := \int_G f(x)\pi(x)v\, d\mu_G(x), \qquad v \in H,$$

pri čemu je vrijednost integrala na desnoj strani definirana zahtjevom da vrijedi

$$\left\langle \int_G f(x)\pi(x)v\, d\mu_G(x),\, w \right\rangle_H = \int_G f(x) \left\langle \pi(x)v,\, w\right\rangle_H\, d\mu_G(x), \qquad w \in H.$$

Harish-Chandra je primijetio još neke potprostore od H korisne za razvoj algebarskog pristupa teoriji reprezentacija grupe G (vidi [11]):

Definicija 1.6. (i) *$v \in H$ je **analitički vektor** reprezentacije π ako je $x \mapsto \pi(x)v$ realno analitičko preslikavanje $G \to H$. Prostor svih takvih vektora označavamo sa H^ω.*

(ii) *$v \in H$ je **K-konačan vektor** reprezentacije π ako je*

$$\dim \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \pi(K)v < \infty.$$

Prostor svih takvih vektora označavamo sa H_K.

Prostori $H^\infty \cap H_K$ i $H^\omega \cap H_K$ su gusti u H [11, Teorem 4], a izvedena reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i reprezentacija $\pi\big|_K$ grupe K opskrbljuju ih strukturom $(\mathfrak{g}, K)$-modula:

Definicija 1.7. *$(\mathfrak{g}, K)$**-modul** je kompleksan vektorski prostor V s reprezentacijom Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i reprezentacijom grupe K na V takvima da vrijedi:*

(i) *Za svaki $v \in V$, $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} K.v$ je konačnodimenzionalan vektorski prostor na koji K djeluje neprekidno.*

(ii) $X.v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tX).v, \quad v \in V,\ X \in \operatorname{Lie}(K).$

(iii) $(\operatorname{Ad}(k)X).v = k.X.k^{-1}.v, \quad v \in V,\ X \in \mathfrak{g},\ k \in K.$

Homomorfizam $(\mathfrak{g}, K)$-modula V_1 i V_2 je linearan operator $A : V_1 \to V_2$ koji je ujedno preplitanje pripadnih reprezentacija od K i od $\mathfrak{g}$. Ako je A bijektivan, zovemo ga **izomorfizmom $(\mathfrak{g}, K)$-modula** V_1 i V_2 i tada kažemo da su $(\mathfrak{g}, K)$-moduli V_1 i V_2 **izomorfni**.

$(\mathfrak{g}, K)$-modul $H_K \cap H^\infty$ zove se **$(\mathfrak{g}, K)$-modul (K-konačnih vektora) reprezentacije** π. Kažemo da su reprezentacije (π_1, H_1) i (π_2, H_2) grupe G **infinitezimalno ekvivalentne** ako su njihovi $(\mathfrak{g}, K)$-moduli izomorfni.

Za ireducibilnu reprezentaciju grupe K ekvivalentnu reprezentacijama iz klase $\gamma \in \widehat{K}$ kažemo da je **tipa** γ. Iz [19, Propozicija 1.18] slijedi:

Propozicija 1.8. *Neka je V $(\mathfrak{g}, K)$-modul. Za $\gamma \in \widehat{K}$, označimo sa V_γ sumu svih ireducibilnih K-invarijantnih potprostora od V tipa γ. Vrijedi rastav u direktnu sumu*

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \widehat{K}} V_\gamma \tag{1.2}$$

*i za svaku se $\gamma \in \widehat{K}$ prostor V_γ (tzv. γ**-izotipična ili** K**-izotipična komponenta** $(\mathfrak{g}, K)$**-modula** V) rastavlja u direktnu sumu ireducibilnih K-invarijantnih potprostora tipa γ.*

Kažemo da je $(\mathfrak{g}, K)$-modul V **dopustiv** ako su sve njegove K-izotipične komponente konačnodimenzionalne.

Neka su $\chi \in \gamma \in \widehat{K}$. Suma svih ireducibilnih K-invarijantnih potprostora od H tipa γ zove se **K-izotipična**, **γ-izotipična** ili **χ-izotipična komponenta reprezentacije** π; označavamo je sa H_γ ili H_χ. Kažemo da je π **dopustiva** ako su sve njezine K-izotipične komponente konačnodimenzionalne. U tom slučaju vrijedi $H^\omega \cap H_K = H^\infty \cap H_K = H_K$ [11, Lema 34]. Nadalje, Harish-Chandra je u [11, Teorem 5] dokazao da vrijedi:

Teorem 1.9. *Pretpostavimo da je π dopustiva. Tada su zatvoreni G-invarijantni potprostori od H u 1-1 korespondenciji s $\mathfrak{g}$-invarijantnim potprostorima od H_K, pri čemu je korespondencija $W \leftrightarrow V$ dana sa*

$$V = W_K \qquad i \qquad W = \mathrm{Cl}_H\, V.$$

Kažemo da je $(\mathfrak{g}, K)$-modul V **infinitezimalno unitaran** ako postoji pozitivno definitna hermitska forma $\langle\,\cdot\,,\ \cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:

(i) $\langle k.v_1,\, k.v_2\rangle = \langle v_1,\, v_2\rangle\,, \quad v_1, v_2 \in V,\ k \in K.$

(ii) $\langle X.v_1,\, v_2\rangle = -\langle v_1,\, X.v_2\rangle\,, \quad v_1, v_2 \in V,\ X \in \mathfrak{g}.$

Teorem 1.10 svodi klasifikaciju ireducibilnih unitarnih reprezentacija grupe G na klasifikaciju ireducibilnih dopustivih infinitezimalno unitarnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula. Tvrdnju (iii) tog teorema dokazao je Harish-Chandra [11, Teorem 8]. Tvrdnja (ii) slijedi iz teorema [11, Teorem 9] po subkvocijentnom teoremu [12, Teorem 4] u slučaju kad je G linearna, a po subkvocijentnom teoremu koji su neovisno dokazali J. Lepowsky [27, Teorem 1.1] i C. Rader [48] u općem slučaju.

Teorem 1.10. *Vrijedi:*

(i) *$(\mathfrak{g}, K)$-modul svake ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G ireducibilan je, dopustiv i infinitezimalno unitaran.*

(ii) *Svaki ireducibilan dopustiv infinitezimalno unitaran $(\mathfrak{g}, K)$-modul izomorfan je $(\mathfrak{g}, K)$-modulu neke ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G.*

(iii) *Dvije ireducibilne unitarne reprezentacije grupe G ekvivalentne su ako i samo ako su infinitezimalno ekvivalentne.*

1.1.3 Matrični koeficijenti unitarnih reprezentacija

Neka je π reprezentacija grupe G na Hilbertovu prostoru $(H, \langle\,\cdot\,,\ \cdot\,\rangle_H)$. Za $v, w \in H$, preslikavanje $c_{v,w} : G \to \mathbb{C}$,

$$c_{v,w}(x) := \langle \pi(x)v,\, w\rangle_H\,,$$

zovemo **matričnim koeficijentom** reprezentacije π. Ako su $v, w \in H_K$, zovemo ga **K-konačnim matričnim koeficijentom** reprezentacije π.

Iz [5, Teorem 8.7] slijedi:

Teorem 1.11. *Neka su (π_1, H_1) i (π_2, H_2) dopustive reprezentacije grupe G na Hilbertovim prostorima. Ako su (π_1, H_1) i (π_2, H_2) infinitezimalno ekvivalentne, tada imaju isti prostor K-konačnih matričnih koeficijenata.*

Desna regularna reprezentacija r_G i **lijeva regularna reprezentacija** l_G grupe G njene su unitarne reprezentacije na prostoru $L^2(G)$ definirane formulama

$$r_G(x)f := f(\,\cdot\, x), \quad l_G(x)f := f\left(x^{-1}\,\cdot\,\right), \qquad x \in G,\ f \in L^2(G).$$

Dobro je poznato da su sljedeće dvije definicije dobre:

Definicija 1.12. *Kažemo da je ireducibilna unitarna reprezentacija (π, H) grupe G **kvadratno integrabilna** ili da pripada **diskretnoj seriji** reprezentacija grupe G ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*

(a) *Postoje $v, w \in H \setminus \{0\}$ takvi da je $c_{v,w} \in L^2(G)$.*

(b) *Svi su matrični koeficijenti reprezentacije π u $L^2(G)$.*

(c) *π je unitarno ekvivalentna nekoj podreprezentaciji od l_G.*

(d) *π je unitarno ekvivalentna nekoj podreprezentaciji od r_G.*

Definicija 1.13. *Kažemo da je ireducibilna unitarna reprezentacija (π, H) grupe G **integrabilna** ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*

(a) *Postoje $v, w \in H_K \setminus \{0\}$ takvi da je $c_{v,w} \in L^1(G)$.*

(b) *Svi su K-konačni matrični koeficijenti reprezentacije π u $L^1(G)$.*

Kako su svi matrični koeficijenti reprezentacije π ograničene funkcije, za sve $v, w \in H$ vrijedi implikacija

$$c_{v,w} \in L^1(G) \quad \Rightarrow \quad c_{v,w} \in L^2(G).$$

Odavde slijedi:

Lema 1.14. *Ako je reprezentacija π integrabilna, tada je i kvadratno integrabilna.*

1.1.4 Reprezentacija desnim translacijama u $L^2(\Gamma\backslash G)$

Neka je Γ diskretna podgrupa od G. Kvocijentni prostor $\Gamma\backslash G$ promatrat ćemo kao glatku mnogostrukost s jedinstvenom glatkom strukturom za koju je kvocijentno preslikavanje $x \mapsto \Gamma x$ lokalni difeomorfizam $G \to \Gamma\backslash G$. Funkciju $f : G \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$f(\gamma\,\cdot\,) = f, \qquad \gamma \in \Gamma, \tag{1.3}$$

možemo identificirati s funkcijom $\Gamma\backslash G \to \mathbb{C}$, $\Gamma x \mapsto f(x)$. Time dobivamo i identifikacije

$$C(\Gamma\backslash G) \equiv \{f \in C(G) : f(\gamma\,\cdot\,) = f \text{ za sve } \gamma \in \Gamma\},$$
$$C^\infty(\Gamma\backslash G) \equiv \{f \in C^\infty(G) : f(\gamma\,\cdot\,) = f \text{ za sve } \gamma \in \Gamma\}.$$

Označimo sa $\mu_{\Gamma\backslash G}$ jedinstvenu Radonovu mjeru na $\Gamma\backslash G$ takvu da je

$$\int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)\, d\mu_{\Gamma\backslash G}(x) = \int_G f\, d\mu_G, \qquad f \in C_c(G).$$

(Detaljnije o njoj u potpoglavlju 1.4.2.)

Za svaki $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ definiramo Banachov prostor $L^p(\Gamma\backslash G)$ kao prostor klasa ekvivalencije, po relaciji jednakosti $\mu_{\Gamma\backslash G}$-gotovo svuda, izmjerivih funkcija $f : \Gamma\backslash G \to \mathbb{C}$ za koje je

$$\|f\|_{L^p(\Gamma\backslash G)} := \left(\int_{\Gamma\backslash G} |f|^p \; d\mu_{\Gamma\backslash G}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

s normom $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma\backslash G)}$. $L^2(\Gamma\backslash G)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)} := \int_{\Gamma\backslash G} f_1\, \overline{f_2}\, d\mu_{\Gamma\backslash G}, \qquad f_1, f_2 \in L^2(\Gamma\backslash G).$$

Definiramo i prostor $L^1_{loc}(\Gamma\backslash G)$ svih klasa ekvivalencije, po relaciji jednakosti $\mu_{\Gamma\backslash G}$-gotovo svuda, izmjerivih funkcija $f : \Gamma\backslash G \to \mathbb{C}$ takvih da je $\int_C |f|\; d\mu_{\Gamma\backslash G} < \infty$ za svaki kompaktan skup $C \subseteq \Gamma\backslash G$.

Definiramo unitarnu reprezentaciju r_Γ grupe G na prostoru $L^2(\Gamma\backslash G)$ formulom

$$r_\Gamma(x)f := f(\,\cdot\, x), \qquad x \in G,\; f \in L^2(\Gamma\backslash G). \tag{1.4}$$

Sljedeći je niz rezultata, od Leme 1.15 do Leme 1.20, dobro poznat, ali u literaturi najčešće dokazan samo u slučaju kad je $\Gamma = \{1_G\}$. Radi potpunosti ih ovdje dokazujemo.

Lema 1.15. *Ako je $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G)^\infty$, tada je*

$$r_\Gamma(X)f = Xf, \qquad X \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da jednakost vrijedi za $X \in \mathfrak{g}$. Neka je $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ niz u $\mathbb{R}$ koji konvergira prema 0. Tada je po definiciji izvedene reprezentacije

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{f(\,\cdot\, \exp(t_n X)) - f}{t_n} - r_\Gamma(X)f \right\|_{L^2(\Gamma\backslash G)} = 0.$$

Kako svaki L^2-konvergentan niz ima podniz koji konvergira gotovo svuda (s istim limesom), postoji podniz $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ niza (t_n) takav da je gotovo za sve $x \in G$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x\exp(t_{n_k}X)) - f(x)}{t_{n_k}} = (r_\Gamma(X)f)(x).$$

Po (1.1) je limes na lijevoj strani jednak $(Xf)(x)$. Tvrdnja slijedi. $\square$

Lema 1.16. *Neka su $F \in L^1(G)$ i $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$. Tada vrijedi*

$$(r_\Gamma(F)f)(x) = \int_G F(y)f(xy)\,d\mu_G(y) \tag{1.5}$$

gotovo za sve $x \in G$. Preciznije, integral na desnoj strani je definiran i konačan gotovo za sve $x \in G$ pa je desna strana gotovo svuda definirana funkcija $\Gamma\backslash G \to \mathbb{C}$ varijable x; ona definira element iz $L^2(\Gamma\backslash G)$ koji je jednak $r_\Gamma(F)f$.

Dokaz. Element $r_\Gamma(F)f$ iz $L^2(\Gamma\backslash G)$ jedinstveno je određen svojstvom da za svaku $h \in L^2(\Gamma\backslash G)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle r_\Gamma(F)f,\, h\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)} &= \int_G F(y)\,\langle r_\Gamma(y)f,\, h\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G)}\,d\mu_G(y)\\
&= \int_G\int_{\Gamma\backslash G} F(y)\,f(xy)\,\overline{h(x)}\,d\mu_{\Gamma\backslash G}(x)\,d\mu_G(y)\\
&= \int_{\Gamma\backslash G}\underbrace{\int_G F(y)\,f(xy)\,d\mu_G(y)}_{=:\,\varphi(x)}\,\overline{h(x)}\,d\mu_{\Gamma\backslash G}(x),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

pri čemu je primjena Fubinijeva teorema u zadnjoj jednakosti opravdana činjenicom da je, koristeći Hölderovu nejednakost,

$$\int_G\int_{\Gamma\backslash G}\left|F(y)\,f(xy)\,\overline{h(x)}\right|\,d\mu_{\Gamma\backslash G}(x)\,d\mu_G(y) \le \|F\|_1\,\|f\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}\,\|h\|_{L^2(\Gamma\backslash G)}\,.$$

Posebno je $\varphi\,\overline{h}$ dobro definiran element prostora $L^1(\Gamma\backslash G)$; kako to vrijedi za svaku $h \in L^2(\Gamma\backslash G)$, pa posebno za karakteristične funkcije svih kompaktnih skupova u $\Gamma\backslash G$, slijedi da je φ dobro definiran element prostora $L^1_{loc}(\Gamma\backslash G)$. Štoviše, jednakost (1.6) pokazuje da je $\varphi = r_\Gamma(F)f$. $\square$

Korolar 1.17. *Neka su $F \in L^1(G)$ i $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$. Pretpostavimo da je f neprekidna i ograničena. Tada integral u jednakosti* (1.5) *konvergira za svaki $x \in G$ i ta je jednakost formula za neprekidnog predstavnika od $r_\Gamma(F)f$.*

Lema 1.18. *Neka je $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G)$ $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačna i K-konačna zdesna. Tada je $f \in L^2(\Gamma\backslash G)^\infty$.*

Dokaz. Po Teoremu 1.3 postoji $\alpha \in C_c^\infty(G)$ takva da je $f = f * \alpha$. Kako je po (1.5) $f * \alpha = r_\Gamma(\alpha(\,\cdot\,^{-1}))\,f$, slijedi da f pripada Gårdingovu potprostoru od r_Γ pa je posebno f gladak vektor reprezentacije r_Γ. $\square$

Lema 1.19. *Neka je* $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G)$ $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$*-konačna i* K*-konačna zdesna. Tada je* $(\mathfrak{g}, K)$*-podmodul od* $L^2(\Gamma\backslash G)^\infty \cap L^2(\Gamma\backslash G)_K$ *generiran sa* f *dopustiv i konačne duljine.*

Dokaz. Slijedi iz [60, Korolar 3.4.7 i Teorem 4.2.1]. □

Lema 1.20. *Neka je* $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G)$, $f \not\equiv 0$, $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$*-konačna i* K*-konačna zdesna. Označimo sa* H *najmanji zatvoren* G*-invarijantan potprostor od* $L^2(\Gamma\backslash G)$ *koji sadrži* f*. Vrijedi:*

(i) $H_K = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).f$.

(ii) *H je ortogonalna suma konačno mnogo zatvorenih ireducibilnih G-invarijantnih potprostora.*

Dokaz. Označimo sa V $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od $L^2(\Gamma\backslash G)^\infty \cap L^2(\Gamma\backslash G)_K$ generiran sa f, dakle $V = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).f$. Kao u [13, §8, dokaz Teorema 1], K-konačnost i $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačnost funkcije f povlače da je V gust u H. Dokažimo sad (i) i (ii).

(i) Dovoljno je dokazati da za proizvoljan $\delta \in \widehat{K}$ vrijedi $V_\delta = H_\delta$. Očito je $V_\delta \subseteq H_\delta$ pa je za dokaz jednakosti, s obzirom da je po Lemi 1.19 V_δ konačnodimenzionalan vektorski prostor, dovoljno dokazati da je V_δ gust u H_δ, tj. dokazati da je proizvoljan $h \in H_\delta$ limes nekog niza s članovima iz V_δ. Kako je V gust u H, proizvoljan je $h \in H_\delta$ limes nekog niza $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq V$, pa onda i niza $((h_n)_\delta)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ ortogonalnih projekcija članova niza (h_n) na H_δ. S obzirom da ortogonalna projekcija na H_δ na potprostoru V djeluje kao ortogonalna projekcija na V_δ, $((h_n)_\delta)$ je niz u V_δ, što dokazuje tvrdnju.

(ii) Po tvrdnji (i) i Lemi 1.19 $(\mathfrak{g}, K)$-modul H_K je dopustiv i konačne duljine; posebno je reprezentacija H dopustiva. Odaberimo ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul V_1 od H_K. Po Teoremu 1.9 je $H_1 := \mathrm{Cl}_H V_1$ zatvoren ireducibilan G-invarijantan potprostor od H. Njegov je ortogonalni komplement $(H_1)^\perp$ u H zatvoren G-invarijantan potprostor od H čiji je $(\mathfrak{g}, K)$-modul K-konačnih vektora izomorfan $(\mathfrak{g}, K)$-modulu H_K/V_1, koji je duljine za 1 manje od duljine $(\mathfrak{g}, K)$-modula H_K. Nastavkom opisanog postupka dobivamo konačnu familiju međusobno ortogonalnih zatvorenih G-invarijantnih potprostora od H koji u sumi daju H. □

1.2 Metaplektička grupa

U ovom potpoglavlju konstruiramo tri realizacije metaplektičke grupe: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$. Najopširnije opisujemo grupu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$, koja se pokazala najkorisnijom za naše istraživanje zahvaljujući svojoj bliskoj vezi s modularnim formama polucijele težine. Grupa $\mathrm{SU}(1,1)^\sim \subseteq \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$, dobivena iz $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ "konjugiranjem" Cayleyjevom transformacijom $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, u potpoglavlju će 2.3 olakšati proučavanje K-konačne strukture reprezentacija iz holomorfne i antiholomorfne diskretne serije. Napokon, realizacija $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$ metaplektičke grupe pomoću 2-kociklusa ima elemente najjednostavnijeg oblika, ali u ostatku rada nije korištena.

1.2.1 Osnovne oznake

Za $z \in \mathbb{C}^\times$ definiramo $\arg(z) \in \left]-\pi, \pi\right]$ zahtjevom da vrijedi $z = |z|\, e^{i \arg(z)}$. Glavna grana kompleksnog logaritma, $\mathrm{Ln} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, dana je formulom

$$\mathrm{Ln}(z) := \ln|z| + i \arg(z), \tag{1.7}$$

a glavna grana drugog korijena, $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, formulom

$$\sqrt{z} := \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(z)} = |z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2}\arg(z)}, & \text{ako je } z \neq 0, \\ 0, & \text{ako je } z = 0. \end{cases}$$

Dakle, $\arg(\sqrt{z}) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ za sve $z \in \mathbb{C}^\times$. Na skupu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ funkcije Ln i $\sqrt{\cdot}$ su holomorfne, a funkcija arg glatka. Uvedimo oznaku

$$z^m := \left(\sqrt{z}\right)^{2m}, \qquad z \in \mathbb{C}^\times,\ m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Grupa $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ djeluje slijeva na $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Möbiusovim transformacijama:

$$g.z := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Pritom djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ima tri orbite: $\mathcal{H}$, $-\mathcal{H}$ i $\partial\mathcal{H} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definiramo $j : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) := cz + d.$$

Vrijedi

$$j(g_1 g_2, z) = j(g_1, g_2.z)\, j(g_2, z) \tag{1.8}$$

za sve $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ i $z \in \mathbb{C}$ takve da je $j(g_2, z) \neq 0$. Korisna je i relacija

$$\Im(g.z) = \frac{\Im(z)}{|j(g,z)|^2}, \qquad g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ z \in \mathcal{H}. \tag{1.9}$$

1.2.2 Prva realizacija metaplektičke grupe

Definiramo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim := \left\{\sigma = (g_\sigma, \eta_\sigma) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{H}) : \eta_\sigma^2(z) = j(g_\sigma, z) \text{ za sve } z \in \mathcal{H}\right\}.$$

Propozicija 1.21. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *je grupa s množenjem*

$$\sigma_1\sigma_2 := \left(g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}, \eta_{\sigma_1}(g_{\sigma_2}.z)\eta_{\sigma_2}(z)\right), \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim. \tag{1.10}$$

Dokaz. Neka su $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Zatvorenost od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na množenje jasna je iz jednakosti

$$\left(\eta_{\sigma_1}(g_{\sigma_2}.z)\eta_{\sigma_2}(z)\right)^2 = j(g_{\sigma_1}, g_{\sigma_2}.z)\, j(g_{\sigma_2}, z) \overset{(1.8)}{=} j(g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}, z), \qquad z \in \mathcal{H}.$$

Asocijativnost množenja dokazuje jednakost

$$(\sigma_1\sigma_2)\,\sigma_3 = \left(g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}g_{\sigma_3}, \eta_{\sigma_1}(g_{\sigma_2}g_{\sigma_3}.z)\eta_{\sigma_2}(g_{\sigma_3}.z)\eta_{\sigma_3}(z)\right) = \sigma_1\,(\sigma_2\sigma_3)\,.$$

Lako se provjeri i da je neutralni element za množenje $(I_2, 1)$, dok je inverz elementa σ dan sa

$$\sigma^{-1} = \left(g_\sigma^{-1}, \frac{1}{\eta_\sigma\left(g_\sigma^{-1}.z\right)}\right). \qquad \square$$

Lema 1.22. *Projekcija*

$$P : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \qquad P(\sigma) := g_\sigma, \tag{1.11}$$

jest epimorfizam grupa. Za svaki $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *vrijedi*

$$P^{-1}(\{g\}) = \left\{\left(g, \sqrt{j(g,\,\cdot\,)}\right), \left(g, -\sqrt{j(g,\,\cdot\,)}\right)\right\}. \tag{1.12}$$

Dokaz. P je očito homomorfizam grupa. Neka je $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Definiramo $\eta := \sqrt{j(g,\,\cdot\,)}$. η je holomorfna funkcija na $\mathcal{H}$. Naime, ako je $c = 0$, η je konstantna funkcija; ako $c \neq 0$, slika funkcije $j(g,\,\cdot\,)$ sadržana je u skupu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, na kojem je funkcija $\sqrt{\cdot}$ holomorfna. Jasno je i da je $\eta^2 = j(g,\,\cdot\,)$, pa su (g, η) i $(g, -\eta)$ (različiti, s obzirom da funkcija $j(g,\,\cdot\,)$, pa onda ni funkcija η, nije nulfunkcija, štoviše uopće nema nultočaka) elementi grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ u vlaknu $P^{-1}(\{g\})$. Posebno, P je surjekcija.

Da bismo dokazali (1.12), trebamo još dokazati da nijedno vlakno epimorfizma P nema više od 2 elementa. Kako su za epimorfizme grupa sva vlakna istog kardinaliteta, dovoljno je provjeriti da je

$$P^{-1}\left(\{I_2\}\right) = \{(I_2, 1), (I_2, -1)\}. \tag{1.13}$$

Za svaku $\eta \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ vrijedi niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}(I_2, \eta) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \quad &\Leftrightarrow \quad \eta^2 = j(I_2, \cdot\,) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \eta(\mathcal{H}) \subseteq \{\pm 1\} \\ &\Leftrightarrow \quad \eta \equiv 1 \quad \text{ili} \quad \eta \equiv -1,\end{aligned}$$

pri čemu zadnja ekvivalencija vrijedi jer je η neprekidna funkcija s povezanom domenom pa ima diskretnu sliku ako i samo ako je konstantna. (1.13) slijedi. $\square$

Iz Leme je 1.22 jasno da je

$$\sigma \quad \mapsto \quad (g_\sigma, \eta_\sigma(i))$$

bijekcija između $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i odgovarajućeg podskupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^\times$; u nastavku ćemo je radi jednostavnijeg zapisa elemenata grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ koristiti kao identifikaciju.

Definiramo topologiju i glatku strukturu na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ zahtjevom da bijekcija $\boldsymbol{\mathcal{I}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{I}}(x, y, t + 4\pi\mathbb{Z}) &:= \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \left(\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, y^{-\frac{1}{4}} \right) \left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, e^{i\frac{t}{2}} \right) \qquad (1.14) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, y^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{t}{2}} \right),\end{aligned}$$

bude difeomorfizam s produkta Liejevih grupa $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}_{>0}, \,\cdot\,) \times (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}, +)$ na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Time $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ postaje glatka mnogostrukost s globalnom glatkom parametrizacijom $\mathcal{I} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$,

$$\mathcal{I}(x, y, t) := \boldsymbol{\mathcal{I}}(x, y, t + 4\pi\mathbb{Z}), \qquad (1.15)$$

koju zovemo **Iwasawinom parametrizacijom grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Karte $(U_r, \mathcal{I}_r^{-1})$, $r \in \mathbb{R}$, gdje je

$$\begin{aligned}U_r &:= \mathcal{I}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \,]r, r + 2\pi[), \qquad (1.16) \\ \mathcal{I}_r &:= \mathcal{I}\Big|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times]r, r+2\pi[} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \,]r, r + 2\pi[\, \to U_r, \qquad (1.17)\end{aligned}$$

čine glatki atlas za $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Faktore u produktu na desnoj strani jednakosti (1.14) označimo, slijeva nadesno, sa n_x, a_y i κ_t. Lako se vidi da je centar $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ dan sa

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) = P^{-1}\left(\{\pm I_2\}\right) = \{\kappa_{n\pi} : n \in \mathbb{Z}\} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +).$$

Sjetimo se sad standardne definicije Liejeve grupe:

Definicija 1.23. ***Liejeva grupa*** *je grupa G koja je ujedno glatka mnogostrukost takva da su množenje i invertiranje glatka preslikavanja $G \times G \to G$ odnosno $G \to G$.*

Propozicija 1.24. *S upravo definiranom topologijom i glatkom strukturom grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ je Liejeva grupa.*

U dokazu ćemo Propozicije 1.24 koristiti sljedeću poznatu lemu [25, Problem 7-3].

Lema 1.25. *Neka je G grupa koja je ujedno glatka mnogostrukost takva da je množenje u G glatko preslikavanje $G \times G \to G$. Tada je G Liejeva grupa.*

Dokaz. Potrebno je dokazati da je invertiranje u G glatko. Definiramo $F : G\times G \to G\times G$,

$$F(g, h) := (g, gh).$$

F je glatka bijekcija s inverzom $F^{-1} : G \times G \to G \times G$,

$$F^{-1}(g, h) = \left(g, g^{-1}h\right).$$

Invertiranje u G je kompozicija triju preslikavanja: (glatke) inkluzije $(\,\cdot\,, 1_G) : G \to G \times G$, preslikavanja F^{-1} i (glatke) projekcije $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto h$. Dakle, da bismo dokazali da je invertiranje u G glatko, dovoljno je dokazati da je F difeomorfizam.

Kako je F glatka bijekcija, po Globalnom je teoremu o rangu [25, Teorem 4.14.(c)] dovoljno dokazati da je F konstantnog ranga. Kako je množenje u G glatko, za svaki su $(x, y) \in G \times G$ preslikavanja $L_{x,y}, R_{x,y} : G \times G \to G \times G$,

$$L_{x,y}(g, h) := (xg, xhy), \qquad R_{x,y}(g, h) := (xg, hy),$$

difeomorfizmi. Uz to, vrijedi

$$L_{x,y} \circ F = F \circ R_{x,y},$$

odakle uzimanjem diferencijala lijeve i desne strane u $1_{G\times G}$ dobivamo

$$d\left(L_{x,y}\right)_{1_{G\times G}} \circ dF_{1_{G\times G}} = dF_{(x,y)} \circ d\left(R_{x,y}\right)_{1_{G\times G}}. \tag{1.18}$$

S obzirom da su $L_{x,y}$ i $R_{x,y}$ difeomorfizmi, operatori $d\left(L_{x,y}\right)_{1_{G\times G}}$ i $d\left(R_{x,y}\right)_{1_{G\times G}}$ su linearni izomorfizmi pa iz (1.18) vidimo da su operatori $dF_{(x,y)}$ i $dF_{1_{G\times G}}$ istog ranga. Dakle, F je konstantnog ranga. $\square$

Dokaz Propozicije 1.24. Po Lemi 1.25 trebamo dokazati samo da je množenje $m : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $m(\sigma_1, \sigma_2) := \sigma_1\sigma_2$, glatko. Dovoljno je dokazati da je preslikavanje

$$\mathbf{m} := \boldsymbol{\mathcal{I}}^{-1} \circ m \circ (\boldsymbol{\mathcal{I}} \times \boldsymbol{\mathcal{I}}) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$$

glatko.

Lako se vidi da je

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}^{-1}(\sigma) = (\Re\left(g_\sigma.i\right), \Im\left(g_\sigma.i\right), 2\arg\left(\eta_\sigma(i)\right) + 4\pi\mathbb{Z}), \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \tag{1.19}$$

pa, uz definiciju $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{0,1\}$,

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } t \in \left]-\pi, \pi\right] + 4\pi\mathbb{Z}, \\ 1, & \text{ako je } t \in \left]\pi, 3\pi\right] + 4\pi\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1.20}$$

za sve $(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z}), (x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ imamo

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z}, x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z}) \\ &\quad = \boldsymbol{\mathcal{I}}^{-1}\Big(\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z})\,\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z})\Big) \\ &\quad = \boldsymbol{\mathcal{I}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^{\frac{1}{2}} & \\ & y_1^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 \\ \sin t_1 & \cos t_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2^{\frac{1}{2}} & \\ & y_2^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t_2 & -\sin t_2 \\ \sin t_2 & \cos t_2 \end{pmatrix},\right. \\ &\qquad \left. (-1)^{\varepsilon(t_1)} y_1^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\cos t_1 + (x_2 + iy_2)\sin t_1}\, y_2^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{t_2}{2}} \right) \\ &\quad = (x, y, t + 4\pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

gdje je po (1.19)

$$\begin{aligned} x + iy &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^{\frac{1}{2}} & \\ & y_1^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 \\ \sin t_1 & \cos t_1 \end{pmatrix}.(x_2 + iy_2), \\ t &= 2\pi\varepsilon(t_1) + t_2 + \arg\left(\cos t_1 + (x_2 + iy_2)\sin t_1\right). \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $\mathbf{m}$ glatko na skupu

$$S := \Big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \left(\left]-\pi, \pi\right[+ 2\pi\mathbb{Z}\right)/4\pi\mathbb{Z}\Big) \times \Big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}\Big).$$

Naime, funkcije x i y su očito glatke na cijeloj domeni od $\mathbf{m}$. Nadalje, preslikavanje $(x_1, y_1, t_1+4\pi\mathbb{Z}, x_2, y_2, t_2+4\pi\mathbb{Z}) \mapsto \cos t_1+(x_2+iy_2)\sin t_1$ na S poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\le 0}$, na kojem je funkcija arg glatka, a preslikavanje $(x_1, y_1, t_1+4\pi\mathbb{Z}, x_2, y_2, t_2+4\pi\mathbb{Z}) \mapsto \varepsilon(t_1)$ je konstantno na svakoj komponenti povezanosti od S. Odavde je jasno da je i preslikavanje t glatko na S.

Sjetimo se sad da je $\kappa_\pi = (-I_2, i) \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i da je $\kappa_\pi^{-1} = \kappa_{-\pi}$ pa imamo

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z})\,\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z}) \\ &\quad = \Big(\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z})\kappa_\pi\Big)\Big(\boldsymbol{\mathcal{I}}(x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z})\kappa_{-\pi}\Big) \end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\mathcal{I}}(x_1, y_1, t_1 + \pi + 4\pi\mathbb{Z})\, \boldsymbol{\mathcal{I}}(x_2, y_2, t_2 - \pi + 4\pi\mathbb{Z}).$$

Primjenom $\boldsymbol{\mathcal{I}}^{-1}$ na ovu jednakost dobivamo relaciju

$$\mathbf{m}(x_1, y_1, t_1 + 4\pi\mathbb{Z}, x_2, y_2, t_2 + 4\pi\mathbb{Z}) = \mathbf{m}(x_1, y_1, t_1 + \pi + 4\pi\mathbb{Z}, x_2, y_2, t_2 - \pi + 4\pi\mathbb{Z}),$$

koja u kombinaciji s glatkoćom od $\mathbf{m}$ na S povlači da je $\mathbf{m}$ glatko i na skupu

$$T := \Big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times (]0, 2\pi[+ 2\pi\mathbb{Z})\,/4\pi\mathbb{Z}\Big) \times \Big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}\Big).$$

Kako je $S \cup T$ domena od $\mathbf{m}$, ovime je dokaz završen. □

Lema 1.26. *Liejeva grupa* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *je povezana.*

Dokaz. Jasno iz povezanosti domene njezine globalne glatke parametrizacije $\mathcal{I}$. □

Definicija 1.27 ([25, str. 91])**.** *Neka su $\widetilde{S}$ i S povezane glatke mnogostrukosti. Glatko surjektivno preslikavanje $\pi : \widetilde{S} \to S$ sa svojstvom da svaki $p \in S$ ima otvorenu okolinu U takvu da π svaku komponentu povezanosti od $\pi^{-1}(U)$ preslikava difeomorfno na U zovemo **glatkim natkrivanjem**. Sva vlakna glatkog natkrivanja π imaju isti kardinalitet, koji zovemo **stupnjem natkrivanja** π.*

Definicija 1.28. *Neka su $\widetilde{G}$ i G povezane Liejeve grupe. Ako postoji homomorfizam grupa $\pi : \widetilde{G} \to G$ koji je ujedno glatko natkrivanje stupnja $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, kažemo da je π **natkrivajući homomorfizam** $\widetilde{G} \to G$ **stupnja** k i da je $\widetilde{G}$ **natkrivajuća grupa od** G **stupnja** k.*

Sljedeća propozicija pokazuje da je projekcija P natkrivajući homomorfizam $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ stupnja 2. U njenom ćemo dokazu koristiti Iwasawinu parametrizaciju $\underline{\mathcal{I}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ definiranu formulom

$$\underline{\mathcal{I}}(x, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

i glatki atlas $\left\{\left(\underline{U}_r, \underline{\mathcal{I}}_r^{-1}\right) : r \in \mathbb{R}\right\}$ za $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zadan sa

$$\begin{aligned} \underline{U}_r &:= \underline{\mathcal{I}}\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times]r, r + 2\pi[\right), \\ \underline{\mathcal{I}}_r &:= \underline{\mathcal{I}}\Big|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times]r, r+2\pi[} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times]r, r + 2\pi[\to \underline{U}_r. \end{aligned}$$

(Usp. (1.15) – (1.17).)

Propozicija 1.29. *Projekcija P je natkrivajući homomorfizam* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *stupnja 2.*

Dokaz. Budući da su $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ povezane Liejeve grupe (vidi Lemu 1.26), a P je epimorfizam grupa čije je svako vlakno kardinaliteta 2 (Lema 1.22), dovoljno je dokazati da za proizvoljan $r \in \mathbb{R}$ projekcija P svaku komponentu povezanosti od $P^{-1}(\underline{U}_r)$ preslikava difeomorfno na U_r.

Očito su komponente povezanosti od $P^{-1}(\underline{U}_r)$ skupovi U_r i $U_{r+2\pi}$ (vidi (1.16)). Restrikcije $P\big|_{U_r} : U_r \to \underline{U}_r$ i $P\big|_{U_{r+2\pi}} : U_{r+2\pi} \to \underline{U}_r$ su difeomorfizmi s obzirom da je prikaz od $P\big|_{U_r} : U_r \to \underline{U}_r$ u koordinatama induciranim glatkim kartama $(U_r, \mathcal{I}_r^{-1})$ i $\left(\underline{U}_r, \underline{\mathcal{I}}_r^{-1}\right)$ identiteta, kao i prikaz od $P\big|_{U_{r+2\pi}} : U_{r+2\pi} \to \underline{U}_r$ u koordinatama induciranim glatkim kartama $\left(U_{r+2\pi}, \mathcal{I}_{r+2\pi}^{-1}\right)$ i $\left(\underline{U}_r, \underline{\mathcal{I}}_{r+2\pi}^{-1}\right)$. $\square$

Dakle, Liejeva grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ je natkrivajuća grupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ stupnja 2 – tzv. **metaplektički natkrivač grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ili kraće **metaplektička grupa**. Definiramo njeno glatko lijevo djelovanje na $\mathcal{H}$ formulom

$$\sigma.z := g_\sigma.z, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \ z \in \mathcal{H}.$$

1.2.3 Iwasawina dekompozicija

Dobro je poznato da su

$$\underline{N} := \left\{ \underline{n}_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \underline{A} := \left\{ \underline{a}_y := \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

i

$$\underline{K} := \left\{ \underline{\kappa}_t := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

zatvorene Liejeve podgrupe grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ i da je preslikavanje $\underline{N} \times \underline{A} \times \underline{K} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$,

$$(n, a, k) \mapsto nak,$$

difeomorfizam koji definira **Iwasawinu dekompoziciju grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Pomoću Iwasawine dekompozicije lako se vidi da je $\underline{K}$ maksimalna kompaktna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. U ovom potpoglavlju dokazujemo analogne rezultate o grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Propozicija 1.30 (**Iwasawina dekompozicija metaplektičke grupe**).

(i) *Sljedeći su podskupovi zatvorene Liejeve podgrupe od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$*:*

$$N := \{n_x : x \in \mathbb{R}\}, \qquad A := \{a_y : y \in \mathbb{R}_{>0}\}, \qquad K := \{\kappa_t : t \in \mathbb{R}\}. \qquad (1.22)$$

(ii) *Preslikavanja*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{I}}_1 :&\quad (\mathbb{R},+) &&\to N, &\boldsymbol{\mathcal{I}}_1(x) &:= n_x,\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_2 :&\quad (\mathbb{R}_{>0},\cdot) &&\to A, &\boldsymbol{\mathcal{I}}_2(y) &:= a_y,\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_3 :&\ (\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z},+) &&\to K, &\boldsymbol{\mathcal{I}}_3(t+4\pi\mathbb{Z}) &:= \kappa_t, \end{aligned}$$

jesu izomorfizmi Liejevih grupa.

(iii) *Preslikavanje* $\Phi : N \times A \times K \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$,

$$\Phi\,(n,a,k) := nak,$$

jest difeomorfizam.

Dokaz. (i) Podgrupe N, A i K su zatvorene u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ kao slike zatvorenih podskupova ($\mathbb{R}\times\{1\}\times\{0\}$, $\{0\}\times\mathbb{R}_{>0}\times\{0\}$ odnosno $\{0\}\times\{1\}\times\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$) direktnog produkta Liejevih grupa $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ po difeomorfizmu $\boldsymbol{\mathcal{I}}$.

(ii) $\boldsymbol{\mathcal{I}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{I}}_2$ i $\boldsymbol{\mathcal{I}}_3$ su očito bijekcije, i to glatke (svaka je od njih kompozicija kanonskog ulaganja jedne od Liejevih grupa $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}_{>0},\,\cdot\,)$ i $(\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z},+)$ u njihov direktni produkt i difeomorfizma $\boldsymbol{\mathcal{I}}$). Lako se provjeri da je svaka od njih i homomorfizam grupa: za $\boldsymbol{\mathcal{I}}_3$ to slijedi iz raspisa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{I}}_3(t+4\pi\mathbb{Z})\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_3(s+4\pi\mathbb{Z}) &= \kappa_t\kappa_s\\ &= \Big(\underline{\kappa}_t\underline{\kappa}_s, \eta_{\kappa_t}(\kappa_s.i)\eta_{\kappa_s}(i)\Big)\\ &= \Big(\underline{\kappa}_{t+s}, \eta_{\kappa_t}(i)\eta_{\kappa_s}(i)\Big)\\ &= \Big(\underline{\kappa}_{t+s}, e^{i\frac{t}{2}}e^{i\frac{s}{2}}\Big)\\ &= \kappa_{t+s}\\ &= \boldsymbol{\mathcal{I}}_3((t+4\pi\mathbb{Z})+(s+4\pi\mathbb{Z})), \quad s,t\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

a provjera za $\boldsymbol{\mathcal{I}}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{I}}_2$ još je jednostavnija. Kako je svaki homomorfizam Liejevih grupa konstantnog ranga [25, Teorem 7.5], po Globalnom teoremu o rangu [25, Teorem 4.14.(c)] slijedi da su $\boldsymbol{\mathcal{I}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{I}}_2$ i $\boldsymbol{\mathcal{I}}_3$ izomorfizmi Liejevih grupa.

(iii) Definiramo $\phi : N\times A\times K \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$,

$$\phi\,(n_x, a_y, \kappa_t) := (x, y, t+4\pi\mathbb{Z})\,.$$

Iz (ii) slijedi da je ϕ izomorfizam Liejevih grupa pa je, s obzirom da je $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ difeomorfizam, i kompozicija $\Phi = \boldsymbol{\mathcal{I}}\circ\phi$ difeomorfizam. □

Propozicija 1.31. *K je maksimalna kompaktna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. *Njen unitarni* *dual sastoji se od karaktera* $\chi_n : K \to \mathbb{C}^\times$, $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, *definiranih sa*

$$\chi_n(\kappa_t) := e^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Kompaktnost i tvrdnja o unitarnom dualu grupe K slijede iz činjenice da je po Propoziciji 1.30.(ii) K posredstvom izomorfizma $\boldsymbol{\mathcal{I}}_3^{-1}$ izomorfna kompaktnoj Liejevoj grupi $(\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}, +)$, čiji unitarni dual čine karakteri

$$t + 4\pi\mathbb{Z} \mapsto e^{-int}, \qquad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Preostaje dokazati tvrdnju o maksimalnosti, tj. dokazati da za kompaktnu podgrupu C grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ vrijedi:

$$C \supseteq K \quad \Rightarrow \quad C \subseteq K.$$

Ako je C kompaktna podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $C \supseteq K$, tada je $P(C)$, s obzirom da je P neprekidan homomorfizam grupa, kompaktna podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, i $P(C) \supseteq P(K) = \underline{K}$, pa je, s obzirom da je $\underline{K}$ maksimalna kompaktna podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $P(C) = \underline{K}$, dakle $C \subseteq P^{-1}(\underline{K}) = K$. □

Definicija 1.32. *Neka su* $f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$ *i* $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. *Kažemo da se f* ***transformira zdesna kao*** χ_n *ako vrijedi*

$$f(\sigma\kappa) = f(\sigma)\,\chi_n(\kappa), \qquad \kappa \in K,\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim.$$

Kažemo da se f ***transformira slijeva kao*** χ_n *ako vrijedi*

$$f(\kappa\sigma) = \chi_n(\kappa)\,f(\sigma), \qquad \kappa \in K,\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim.$$

1.2.4 Lijevoinvarijantni diferencijalni operatori

U ovom odjeljku definiramo istaknute elemente iz $U\left(\mathrm{Lie}\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_\mathbb{C}\right)$ i dokazujemo formule u Iwasawinim koordinatama za njihovo djelovanje kao lijevoinvarijantnih diferencijalnih operatora na $C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$.

Označimo sa P_* homomorfizam Liejevih algebri $\mathrm{Lie}\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \to \mathrm{Lie}\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\right)$ induciran natkrivajućim homomorfizmom $P : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. P_* svakom lijevoinvarijantnom vektorskom polju X na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ pridružuje jedinstveno lijevoinvarijantno vektorsko polje P_*X na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ koje zadovoljava

$$(P_*X)_{1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}} = dP_{1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}} X_{1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}}$$

ili ekvivalentno

$$(P_*X)\, f \circ P = X(f \circ P), \qquad f \in C^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})). \tag{1.23}$$

Lema 1.33. *Neka su* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ *i* $X_1, \ldots, X_m \in \mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)$. *Neka su*

$$X_1 \cdots X_m f \circ \mathcal{I} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} (f \circ \mathcal{I})}{\partial x^\alpha}, \qquad f \in C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim), \qquad (1.24)$$

$$P_*(X_1) \cdots P_*(X_m) f \circ \underline{\mathcal{I}} = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} (f \circ \underline{\mathcal{I}})}{\partial x^\alpha}, \qquad f \in C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})),$$

gdje su $a_\alpha, b_\alpha \in C^\infty (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R})$, *prikazi lijevoinvarijantnih diferencijalnih operatora* $X_1 \cdots X_m$ *i* $P_*(X_1) \cdots P_*(X_m)$ *u Iwasawinim koordinatama za* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *odnosno za* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. *Tada je*

$$a_\alpha = b_\alpha, \qquad |\alpha| \leq m.$$

Dokaz. S obzirom da je $\underline{\mathcal{I}} = P \circ \mathcal{I}$, za svaku $f \in C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ imamo

$$\begin{aligned} P_*(X_1) P_*(X_2) \cdots P_*(X_m) f \circ \underline{\mathcal{I}} &= P_*(X_1) \left(P_*(X_2) \cdots P_*(X_m) f \right) \circ P \circ \mathcal{I} \\ &\overset{(1.23)}{=} X_1 \left(P_*(X_2) \cdots P_*(X_m) f \circ P \right) \circ \mathcal{I} \\ &= \ldots \\ &= X_1 \cdots X_m \left(f \circ P \right) \circ \mathcal{I} \\ &\overset{(1.24)}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} (f \circ P \circ \mathcal{I})}{\partial x^\alpha} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} (f \circ \underline{\mathcal{I}})}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

□

Kako je P lokalni difeomorfizam, P_* je izomorfizam Liejevih algebri $\mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim) \to \mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, što nam omogućuje da identificiramo Liejeve algebre

$$\mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim) \overset{P_*}{\equiv} \mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \equiv \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}).$$

Ova se identifikacija realnih Liejevih algebri na jedinstven način proširuje do identifikacije univerzalnih omotačkih algebri njihovih kompleksifikacija:

$$U \left(\mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)_\mathbb{C} \right) \equiv U \left(\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))_\mathbb{C} \right) \equiv U \left(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \right).$$

Lemu 1.33 sada možemo ekvivalentno zapisati na sljedeći koristan način:

Propozicija 1.34. *Neka je* $u \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. *Tada su prikazi u Iwasawinim koordinatama odgovarajućeg lijevoinvarijantnog diferencijalnog operatora na* $C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)$ *i onog na* $C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ *jednaki.*

U nastavku ćemo pomoću gornjih rezultata definirati neke istaknute elemente algebre $U \left(\mathrm{Lie}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)_\mathbb{C} \right)$ i odrediti formule u Iwasawinim koordinatama za odgovarajuće lijevoinvarijantne diferencijalne operatore na $C^\infty (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)$.

Matrice

$$h := \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

čine standardnu bazu za $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (i za $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$), a matrice

$$k^\circ := \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad n^+ := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad n^- := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

za $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: vrijede komutacijske relacije

$$\begin{aligned} &[e,f] = h, && [h,e] = 2e, && [h,f] = -2f, \\ &\left[n^+, n^-\right] = k^\circ, && \left[k^\circ, n^+\right] = 2n^+, && \left[k^\circ, n^-\right] = -2n^-. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Definiramo **Casimirov element** $\mathcal{C} \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ sa

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \frac{1}{2}h^2 + ef + fe \\ &= \frac{1}{2}\left(k^\circ\right)^2 + n^+n^- + n^-n^+ \\ &= \frac{1}{2}\left(k^\circ\right)^2 - k^\circ + 2n^+n^- && (1.26) \\ &= \frac{1}{2}\left(k^\circ\right)^2 + k^\circ + 2n^-n^+. && (1.27) \end{aligned}$$

Dobro je poznato da je $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ centar algebre $U\left(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\right)$.

Korolar 1.35. *Djelovanje elemenata k°, n^+, n^-, $\mathcal{C} \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ kao lijevoinvarijantnih diferencijalnih operatora na $C^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ i na $C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ u Iwasawinim je koordinatama dano formulama:*

$$\begin{aligned} k^\circ &= i\frac{\partial}{\partial t}, && (1.28) \\ n^+ &= iye^{-2it}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}e^{-2it}\frac{\partial}{\partial t}, && (1.29) \\ n^- &= -iye^{2it}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}e^{2it}\frac{\partial}{\partial t}, && (1.30) \\ \mathcal{C} &= 2y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}. && (1.31) \end{aligned}$$

Dokaz. Rezultat za grupu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dobiva se elementarnim računom koristeći činjenicu da je njena eksponencijalna funkcija matrični eksponencijal (vidi npr. [24]). Rezultat za grupu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ tada slijedi primjenom Propozicije 1.34. □

1.2.5 Haarova mjera

U ovom potpoglavlju dokazujemo formulu u Iwasawinim koordinatama za Haarovu mjeru na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Sljedeća je propozicija dobro poznata (vidi npr. [28, §1.4]).

Propozicija 1.36. *Radonova mjera $v_{\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ zadana relacijom*

$$\int_{\mathcal{H}} f\, dv_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(x+iy) \frac{dx\, dy}{y^2}, \qquad f \in C_c(\mathcal{H}),$$

jest $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*-invarijantna.*

Sljedeći je teorem poseban slučaj teorema [18, Teorem 8.36].

Teorem 1.37. *Neka je G unimodularna Liejeva grupa s Haarovom mjerom μ_G i neka je H zatvorena unimodularna podgrupa od G s Haarovom mjerom μ_H. Tada na lokalno kompaktnom Hausdorffovu prostoru G/H postoji do na multiplikativnu konstantu jedinstvena netrivijalna G-invarijantna Radonova mjera $\mu_{G/H}$. Pogodno normalizirana, $\mu_{G/H}$ zadovoljava*

$$\int_G f\, d\mu_G = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh)\, d\mu_H(h) \right) d\mu_{G/H}(gH), \qquad f \in C_c(G).$$

Kao povezana poluprosta Liejeva grupa, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ je unimodularna [18, Korolar 8.30.(b)]. I njena podgrupa K je unimodularna, s Haarovom mjerom

$$f \mapsto \int_K f\, d\mu_K := \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} f(\kappa_t)\, dt, \qquad f \in C(K). \tag{1.32}$$

Propozicija 1.38. *Radonova mjera na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ zadana formulom*

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} := \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{\mathcal{H}} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt, \quad f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right), \tag{1.33}$$

jest Haarova mjera na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Dokaz. Radonova mjera $\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K}$ na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K$ zadana formulom

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K} := \int_{\mathcal{H}} f\left(n_x a_y K\right)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy), \quad f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K\right), \tag{1.34}$$

očito je netrivijalna i (zbog $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invarijantnosti mjere $v_{\mathcal{H}}$) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$-invarijantna. Dakle, po Teoremu 1.37 Radonova mjera μ na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ zadana formulom

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} f\, d\mu := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K} \left(\int_K f(\sigma\kappa)\, d\mu_K(\kappa) \right) d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/K}(\sigma K), \quad f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right),$$

jest Haarova mjera na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Uvrštavanjem (1.32) i (1.34) u ovu formulu vidimo da je $\mu = \mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$. □

Analogno se može dokazati poznata $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-varijanta Propozicije 1.38:

Propozicija 1.39. *Radonova mjera na* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *zadana formulom*

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{H}} f(\underline{n}_x \underline{a}_y \underline{\kappa}_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt, \quad f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\right),$$

jest Haarova mjera na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

1.2.6 Cartanova dekompozicija

U ovom odjeljku definiramo Cartanovu dekompoziciju grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i dokazujemo formulu u Cartanovim koordinatama za Haarovu mjeru $\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$.

Uz oznaku

$$\underline{A}^+ := \left\{ \underline{h}_t := \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

preslikavanje

$$\underline{K} \times \underline{A}^+ \times \underline{K} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \qquad (k_1, a, k_2) \mapsto k_1 a k_2,$$

zove se **Cartanova dekompozicija grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Njegova je slika $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \underline{K}$, a vlakno elementa $k_1 a k_2$ jest

$$\left\{ \left(m k_1, a, m^{-1} k_2 \right) : m \in Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \right\}$$

(vidi npr. [24, str. 139]). Odavde lako slijedi, uz oznake

$$h_t := \left(\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix}, e^{-\frac{t}{2}} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \qquad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{1.35}$$

i

$$A^+ := \{ h_t : t \in \mathbb{R}_{>0} \} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,$$

sljedeća lema.

Lema 1.40. *Slika preslikavanja*

$$K \times A^+ \times K \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \qquad (k_1, a, k_2) \mapsto k_1 a k_2, \tag{1.36}$$

jest $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \setminus K$*, a vlakno elementa* $k_1 a k_2$ *jest*

$$\left\{ \left(m k_1, a, m^{-1} k_2 \right) : m \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \right) \right\}.$$

Preslikavanje (1.36) zovemo **Cartanovom dekompozicijom grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Lema 1.41. *Za svaku* $f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ *vrijedi*

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{4\pi} f(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) \sinh(2t)\, d\theta_1\, dt\, d\theta_2. \tag{1.37}$$

Dokaz. Elementaran račun pokazuje da za $\sigma = n_x a_y \kappa_s = \kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$ vrijedi

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{(e^{4t} - 1)\sin\theta_1 \cos\theta_1 + ie^{2t}}{e^{4t}\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1} = \frac{\sinh(2t)\sin(2\theta_1) + i}{\cosh(2t) - \sinh(2t)\cos(2\theta_1)}, \\ y^{-\frac{1}{2}} e^{is} &= \left(ie^t \sin\theta_1 + e^{-t}\cos\theta_1\right) e^{i\theta_2}, \end{aligned}$$

odakle je jasno da je

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \theta_2} = 1,$$

pa je

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta_1, t, \theta_2) &:= \begin{vmatrix} \partial_{\theta_1} x & \partial_t x & \partial_{\theta_2} x \\ \partial_{\theta_1} y & \partial_t y & \partial_{\theta_2} y \\ \partial_{\theta_1} s & \partial_t s & \partial_{\theta_2} s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{\theta_1} x & \partial_t x \\ \partial_{\theta_1} y & \partial_t y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2y^2 \sinh(2t)\left(\cos(2\theta_1)\cosh(2t) - \sinh(2t)\right) & 2y^2 \sin(2\theta_1) \\ -2y^2 \sinh(2t)\sin(2\theta_1) & 2y^2\left(\cosh(2t)\cos(2\theta_1) - \sinh(2t)\right) \end{vmatrix} \\ &= 4y^2 \sinh(2t). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Posebno, $\mathcal{J}$ ne iščezava ni u jednoj točki $(\theta_1, t, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ pa je po Teoremu o inverznoj funkciji preslikavanje

$$(\theta_1, t, \theta_2) \mapsto (x, y, t)$$

lokalni difeomorfizam $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Sada po Teoremu o zamjeni varijabli, koristeći svojstva Cartanove dekompozicije iz Leme 1.40, za sve $f \in C_c\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)$ imamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} f \, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} &\overset{(1.33)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(n_x a_y \kappa_s) y^{-2} \, dx \, dy \, ds \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} f(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) \, y(\theta_1, t, \theta_2)^{-2} \left|\mathcal{J}(\theta_1, t, \theta_2)\right| d\theta_1 \, dt \, d\theta_2 \\ &\overset{(1.38)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} f(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) \sinh(2t) \, d\theta_1 \, dt \, d\theta_2. \end{aligned}$$

□

1.2.7 Druga realizacija metaplektičke grupe

Zatvorena Liejeva podgrupa $\mathrm{SU}(1,1)$ grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ definirana je formulom

$$\mathrm{SU}(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}.$$

Dobro je poznato da je konjugiranje sa $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ izomorfizam Liejevih grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SU}(1,1)$ i da Cayleyjeva transformacija $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ definira analitički izomorfizam $\mathcal{H} \to \mathcal{D}$.

Motivirani time, uvodimo oznake

$$\begin{aligned} C \quad = \quad (g_C, \eta_C) \quad &:= \left(\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}, \sqrt{\frac{z+i}{2i}}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{H}), \\ C^{-1} = (g_{C^{-1}}, \eta_{C^{-1}}) &:= \left(\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \sqrt{1-w}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{D}) \end{aligned}$$

i definiramo C-konjugat $\sigma^C \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ elementa $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ formulom

$$\sigma^C = \left(g_\sigma^C, \eta_\sigma^C\right) := \left(g_C g_\sigma g_C^{-1}, \eta_C\left(g_\sigma g_{C^{-1}}.w\right)\eta_\sigma\left(g_{C^{-1}}.w\right)\eta_{C^{-1}}(w)\right).$$

Napokon, definiramo Liejevu grupu $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ zahtjevom da $\cdot^C$ bude izomorfizam Liejevih grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SU}(1,1)^\sim$. Lako se vidi da je

$$\mathrm{SU}(1,1)^\sim = \left\{\sigma = (g_\sigma, \eta_\sigma) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{D}) : \eta_\sigma(w)^2 = j(g_\sigma, w) \text{ za sve } w \in \mathcal{D}\right\}.$$

Množenje u $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ dano je formulom

$$\sigma_1\sigma_2 = \left(g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}, \eta_{\sigma_1}\left(g_{\sigma_2}.w\right)\eta_{\sigma_2}(w)\right)$$

(usp. (1.10)), dok je projekcija na prvu koordinatu natkrivajući homomorfizam $\mathrm{SU}(1,1)^\sim \to \mathrm{SU}(1,1)$ stupnja 2.

1.2.8 Treća realizacija metaplektičke grupe

Definicija 1.42. *Egzaktan niz grupa i homomorfizama grupa*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

takav da se grupa A ulaže u centar grupe G zovemo ***centralnim proširenjem grupe*** *H* ***grupom*** *A.*

Pogledajmo centralno proširenje

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \xrightarrow{\ P\ } \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow 1,$$

gdje je homomorfizam $\iota : \{\pm 1\} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ dan formulama

$$\iota(1) := (I_2, 1), \qquad \iota(-1) := (I_2, -1),$$

a P je projekcija definirana formulom (1.11). Fiksirajmo sekciju

$$\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \qquad \phi(g) := \left(g, \sqrt{j(g,\,\cdot\,)}\right),$$

od P. Definiramo $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$,

$$\psi(g_1, g_2) := \frac{\sqrt{j(g_1, g_2.z)}\sqrt{j(g_2, z)}}{\sqrt{j(g_1 g_2, z)}}, \qquad g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ z \in \mathcal{H}.$$

Očito je

$$\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)\, \iota\left(\psi(g_1, g_2)\right), \qquad g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

što zbog asocijativnosti množenja u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ povlači da vrijedi

$$\psi\left(g_1, g_2 g_3\right)\, \psi(g_2, g_3) = \psi(g_1 g_2, g_3)\, \psi(g_1, g_2), \qquad g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),$$

dakle ψ je 2-kociklus grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s koeficijentima u $\{\pm 1\}$ (vidi npr. [54, VII, §3, odjeljak *The Group* $H^2(G, A)$]).

Lako se provjeri:

Lema 1.43. *Funkcija* $T : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \{\pm 1\}$,

$$T\left(g, \omega\sqrt{j(g, z)}\right) := (g, \omega), \quad g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ \omega \in \{\pm 1\},$$

jest izomorfizam grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *na grupu* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$ *definiranu kao skup* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \{\pm 1\}$ *s množenjem*

$$(g_1, \omega_1)(g_2, \omega_2) := (g_1 g_2, \omega_1 \omega_2 \psi(g_1, g_2)), \qquad g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ \omega_1, \omega_2 \in \{\pm 1\}.$$

Prenesimo izomorfizmom T glatku strukturu sa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$. Time $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$ postaje povezana Liejeva grupa izomorfna sa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, a projekcija na prvu koordinatu postaje glatki natkrivajući homomorfizam stupnja 2 sa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_\psi \{\pm 1\}$ na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Imamo

$$T(N) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}, 1 \right) : x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad T(A) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & \\ & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, 1 \right) : y \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$

i

$$T(K) = \left\{ (\underline{\kappa}_t, \omega) : t \in \mathbb{R},\ \omega \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Zabilježimo i dva jednostavna svojstva 2-kociklusa ψ:

Lema 1.44. (a) *Postoji otvorena okolina* U *od* (I_2, I_2) *u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *takva da je* $\psi\big|_U = 1$.

(b) *Za sve* $s, t, \in \left]-\pi, \pi\right]$ *vrijedi*

$$\psi(\underline{\kappa}_t, \underline{\kappa}_s) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } t + s \in \left]-\pi, \pi\right] \\ -1, & \textit{ako je } t + s \in \left]-2\pi, -\pi\right] \cup \left]\pi, 2\pi\right]. \end{cases}$$

Dokaz. (a) Zbog neprekidnosti funkcija $(g_1, g_2) \mapsto j(g_1, g_2.i)$, $g \mapsto j(g, i)$ i $(g_1, g_2) \mapsto j(g_1 g_2, i)$ postoji okolina U od $1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ takva da za sve $g_1, g_2 \in U$ vrijedi

$$\{j(g_1, g_2.i),\ j(g_2, i),\ j(g_1 g_2, i)\} \subseteq \arg^{-1}\left(\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[\right)$$

pa je

$$\psi(g_1, g_2) = \frac{\sqrt{j(g_1, g_2.i)}\sqrt{j(g_2, i)}}{\sqrt{j(g_1 g_2, i)}} \in \arg^{-1}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

i posebno $\psi(g_1, g_2) \neq -1$; kako je $\psi(g_1, g_2) \in \{\pm 1\}$, slijedi $\psi(g_1, g_2) = 1$.
(b) Slijedi direktno iz jednakosti

$$\psi(\underline{\kappa}_t, \underline{\kappa}_s) = \frac{\sqrt{j(\underline{\kappa}_t, \underline{\kappa}_s.i)}\sqrt{j(\underline{\kappa}_s, i)}}{\sqrt{j(\underline{\kappa}_t \underline{\kappa}_s, i)}} = \frac{\sqrt{e^{it}}\sqrt{e^{is}}}{\sqrt{e^{i(t+s)}}} = \frac{e^{i\frac{t}{2}} e^{i\frac{s}{2}}}{\sqrt{e^{i(t+s)}}}, \qquad t, s \in \left]-\pi, \pi\right]. \qquad \square$$

1.3 Fuchsove grupe

U ovom potpoglavlju dajemo pregled poznatih rezultata o djelovanju diskretnih podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ na gornju kompleksnu poluravninu $\mathcal{H}$, kao i varijanti tih rezultata za diskretne podgrupe grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Diskretna podgrupa Γ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zove se **Fuchsova grupa**. Najpoznatiji su primjeri Fuchsovih grupa sljedeće kongruencijske podgrupe od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod N \right\}, \\
\Gamma_1(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0,\ a \equiv d \equiv 1 \pmod N \right\}, \\
\Gamma(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : b \equiv c \equiv 0,\ a \equiv d \equiv 1 \pmod N \right\},
\end{aligned}$$

gdje je $N \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Definicija 1.45. *Za* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ *kažemo da je:*

- ***hiperbolički*** *ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*

  (a) $|\operatorname{Tr} g| > 2$.

(b) *g je konjugiran u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *matrici* $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ *za neki* $\lambda \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$.

(c) *g ima dvije realne svojstvene vrijednosti (*λ *i* λ^{-1}*).*

(d) *g ima točno dvije fiksne točke u* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *i obje su u* $\partial\mathcal{H}$*.*

- ***parabolički*** *ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*

(a) $|\operatorname{Tr} g| = 2$.

(b) *g je konjugiran u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} \text{ ili } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) *g ima samo jednu svojstvenu vrijednost (*1 *ili* -1*).*

(d) *g ima jedinstvenu fiksnu točku u* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *i ona je u* $\partial\mathcal{H}$*.*

- ***eliptički*** *ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*

(a) $|\operatorname{Tr} g| < 2$.

(b) *g je konjugiran u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *matrici* $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ *za neki* $t \in \,]0, \pi[\, \cup \,]\pi, 2\pi[$.

(c) *g ima dvije svojstvene vrijednosti koje su međusobno kompleksno konjugirane (*e^{it} *i* e^{-it}*).*

(d) *g ima točno dvije fiksne točke u* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *i one su međusobno kompleksno konjugirani elementi skupa* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*.*

Definicija 1.46. *Neka je* Γ *Fuchsova grupa.*

(i) *Za* $z \in \mathcal{H}$ *kažemo da je* ***eliptička točka*** *za* Γ *ako je fiksiran nekim eliptičkim elementom grupe* Γ*.*

(ii) *Za* $x \in \partial\mathcal{H}$ *kažemo da je* ***parabolička točka*** *ili* ***kusp*** *za* Γ *ako je fiksiran nekim paraboličkim elementom grupe* Γ*.*

(iii) *Za* $x \in \partial\mathcal{H}$ *kažemo da je* ***hiperbolička točka*** *za* Γ *ako je fiksiran nekim hiperboličkim elementom grupe* Γ*.*

Definicija 1.47. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$*. Kažemo da je* $z \in \mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}$ ***eliptička točka****,* ***parabolička točka*** *ili* ***kusp****, odnosno* ***hiperbolička točka*** *za* Γ *ako je takva za* $P(\Gamma)$*.*

Neka je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ili od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Označimo

$$\mathbb{P}_\Gamma := \{\text{kuspovi za } \Gamma\}.$$

Iz [28, Korolar 1.5.5] slijedi:

Lema 1.48. *Ako je Γ' podgrupa konačnog indeksa u Γ, tada je $\mathbb{P}_{\Gamma'} = \mathbb{P}_\Gamma$.*

Iz [56, Propozicija 1.19] slijedi:

Lema 1.49. *Skup eliptičkih točaka za Γ nema gomilište u $\mathcal{H}$.*

Nadalje, iz [28, Teorem 1.5.4.(2)] slijedi:

Lema 1.50. *Neka je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Neka je $x \in \mathbb{P}_\Gamma$. Označimo $\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma : \gamma.x = x\}$. Neka je $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$. Tada je*

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\sigma^{-1}\Gamma_x\sigma = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_h\rangle \tag{1.39}$$

za jedinstven $h \in \mathbb{R}_{>0}$.

Definiramo

$$\mathcal{H}^*_\Gamma := \mathcal{H} \cup \mathbb{P}_\Gamma$$

i, za $l \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\mathcal{U}_l := \{z \in \mathcal{H} : \Im(z) > l\}, \qquad \mathcal{U}^*_l := \mathcal{U}_l \cup \{\infty\}. \tag{1.40}$$

Neka je τ jedinstvena topologija na $\mathcal{H}^*_\Gamma$ takva da vrijedi:

- $\mathcal{H}$ je otvoren potprostor od $\mathcal{H}^*_\Gamma$.
- Za $x = g.\infty \in \mathbb{P}_\Gamma$ (gdje je $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$), familija $\{g.\mathcal{U}^*_l : l \in \mathbb{R}_{>0}\}$ je baza okolina točke x.

$(\mathcal{H}^*_\Gamma, \tau)$ je Hausdorffov prostor na koji Γ djeluje neprekidno. Kvocijentni prostor $\Gamma\backslash\mathcal{H}^*_\Gamma$ također je Hausdorffov, štoviše ima prirodnu strukturu Riemannove plohe (kompleksne mnogostrukosti dimenzije 1). (Za detalje i dokaze vidi [28, §1.7, §1.8].)

Definicija 1.51. *Fuchsova grupa Γ takva da je $\Gamma\backslash\mathcal{H}^*_\Gamma$ kompaktan zove se* ***Fuchsova grupa prve vrste****.*

Teorem 1.52 ([28, Teorem 1.7.8])**.** *Ako je Γ Fuchsova grupa prve vrste, tada je broj klasa Γ-ekvivalencije eliptičkih točaka i kuspova za Γ konačan.*

Definicija 1.53. *Neka je Γ Fuchsova grupa.* **Fundamentalna domena za Γ u $\mathcal{H}$** *jest povezan podskup $F \subseteq \mathcal{H}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $F = \mathrm{Cl}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Int}\, F)$

(ii) $\mathcal{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.F$

(iii) $\gamma.\, \mathrm{Int}\, F \cap \mathrm{Int}\, F = \emptyset$ *za sve* $\gamma \in \Gamma \setminus \{\pm I_2\}$.

Standardnu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invarijantnu metriku $d_{\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ [28, §1.4] možemo definirati na sljedeći način. Za $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$, neka je $C \subseteq \mathcal{H}$ kružni luk sa središtem na realnoj osi ili vertikalna dužina, s rubovima z_1 i z_2. Neka su $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ glatke funkcije takve da je $\gamma_1 + i\gamma_2$ bijekcija $[0,1] \to C$. Definiramo

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) := \int_0^1 \frac{|\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)}\, dt.$$

Prvi dio teorema [28, Teorem 1.6.2.] i njegov dokaz pokazuju da vrijedi:

Teorem 1.54. *Neka je* Γ *Fuchsova grupa. Neka je* $z_0 \in \mathcal{H}$ *točka koja nije eliptička za* Γ. *Tada je skup*

$$F := \{z \in \mathcal{H} : d_{\mathcal{H}}(z, z_0) \le d_{\mathcal{H}}(z, \gamma.z_0) \text{ za sve } \gamma \in \Gamma\}$$

fundamentalna domena za Γ *u* $\mathcal{H}$, *s interiorom*

$$\mathrm{Int}\, F = \{z \in \mathcal{H} : d_{\mathcal{H}}(z, z_0) < d_{\mathcal{H}}(z, \gamma.z_0) \text{ za sve } \gamma \in \Gamma \setminus \{\pm I_2\}\}.$$

Korolar 1.55. *Neka su* Γ, z_0 *i* F *kao u Teoremu 1.54, i označimo* $\partial F := \mathrm{Cl}_{\mathcal{H}} F \setminus \mathrm{Int}\, F$. *Tada je* $v_{\mathcal{H}}(\partial F) = 0$.

Dokaz. Iz Teorema 1.54 vidimo da je ∂F sadržan u uniji skupova

$$C_\gamma := \{z \in \mathcal{H} : d(z, z_0) = d(z, \gamma.z_0)\}, \qquad \gamma \in \Gamma \setminus \{\pm I_2\}.$$

Po [28, Korolar 1.4.2.(2) i Lema 1.4.1.(1)] svaki je C_γ dio kružnice ili pravca pa je $v_{\mathcal{H}}(C_\gamma) = 0$. Primjenom σ-subaditivnosti mjere $v_{\mathcal{H}}$ slijedi $v_{\mathcal{H}}(\partial F) = 0$. □

Teorem 1.56 (Siegel, [28, Teorem 1.9.1])**.** *Neka je* Γ *Fuchsova grupa. Tada je* Γ *prve vrste ako i samo ako za fundamentalnu domenu* F *iz Teorema 1.54 vrijedi* $v_{\mathcal{H}}(F) < \infty$.

Primjer 1.57. Svaka podgrupa Γ konačnog indeksa u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ Fuchsova je grupa prve vrste i zadovoljava $\mathbb{P}_\Gamma = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

1.4 Fundamentalne domene i mjere na kvocijentnim prostorima

Cilj je ovog potpoglavlja definirati Radonove mjere na kvocijentnim prostorima $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ i $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ odnosno $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, gdje je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ odnosno od

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Teorija koju u ovom poglavlju izlažemo dobro je poznata, ali je zbog nedostatka prikladne reference razvijamo s detaljnim dokazima.

1.4.1 Osnovni rezultati

Neka je M topološka mnogostrukost, tj. Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti i lokalno je homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$ za neki $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Neka je Γ prebrojiva diskretna grupa. Neka je zadano neprekidno lijevo djelovanje $\theta : \Gamma \times M \to M$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$, grupe Γ na M. Označimo sa π kvocijentno preslikavanje $M \to \Gamma \backslash M$. Po [25, Lema 21.1] π je otvoreno preslikavanje.

Lema 1.58. *Neka je $C \subseteq \Gamma \backslash M$ kompaktan. Tada postoji kompaktan skup $C_0 \subseteq M$ takav da je $C \subseteq \pi(C_0)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za M sastavljen od relativno kompaktnih skupova. Kako je π surjektivno i otvoreno preslikavanje, $\{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ je otvoren pokrivač za $\Gamma \backslash M$ pa, s obzirom da je C kompaktan podskup od $\Gamma \backslash M$, postoje $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n \pi(U_j)$. Skup $C_0 := \bigcup_{j=1}^n \mathrm{Cl}_M U_j$ očito ima tražena svojstva. $\square$

Kažemo da je djelovanje θ **slobodno** ako je za svaki $\gamma \in \Gamma$ stabilizator $\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ jednak $\{1_\Gamma\}$. Kažemo da je djelovanje θ **pravo** (engl. *proper*) ako za svaki kompaktan $C \subseteq M$ vrijedi

$$\#\{\gamma \in \Gamma : \gamma C \cap C \neq \emptyset\} < \infty.$$

Po [25, Propozicija 21.5.(a)$\Leftrightarrow$(c)] naša je definicija pravog djelovanja poseban slučaj definicije pravog djelovanja iz [25, §21]. Sljedeća lema slijedi iz [25, Lema 21.11].

Lema 1.59. *Pretpostavimo da je djelovanje θ slobodno. Tada je θ pravo ako i samo ako ima sljedeća dva svojstva:*

(a) *Svaki $x \in M$ ima otvorenu okolinu U_x takvu da za sve $\gamma \in \Gamma \backslash \{1_\Gamma\}$ vrijedi $\gamma U_x \cap U_x = \emptyset$.*

(b) *Ako su $x, x' \in M$ međusobno Γ-neekvivalentni, tada postoje otvorene okoline V od x i V' od x' u M takve da je $\Gamma V \cap \Gamma V' = \emptyset$.*

Lema 1.60. *Pretpostavimo da je θ pravo i slobodno. Tada je s kvocijentnom topologijom $\Gamma \backslash M$ topološka mnogostrukost dimenzije* $\dim M$*, a $\pi : M \to \Gamma \backslash M$ je lokalni homeomorfizam.*

Dokaz. Kvocijentni prostor $\Gamma \backslash M$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti s obzirom da ga zadovoljava M i da π kao otvoreno kvocijentno preslikavanje svaku bazu topologije prostora M preslikava u bazu topologije prostora $\Gamma\backslash M$. Nadalje, svojstvo (b) iz Leme 1.59 očito je ekvivalentno s hausdorffovošću prostora $\Gamma\backslash M$.

Da bismo dokazali da je M lokalno homeomorfan sa $\mathbb{R}^m$, dovoljno je dokazati da je kvocijentno preslikavanje π lokalni homeomorfizam $M \to \Gamma\backslash M$. Po Lemi 1.59.(a) svaki $x \in M$ ima otvorenu okolinu U_x takvu da je $\pi\big|_{U_x} : U_x \to \pi(U_x)$ bijekcija. Kako je uz to π otvoreno i neprekidno, $\pi\big|_{U_x}$ je zapravo homeomorfizam. Time je tvrdnja dokazana. □

Lema 1.61. *Pretpostavimo da je θ pravo i slobodno. Za svaku $f \in C_c(M)$ definiramo $f_\Gamma : \Gamma\backslash M \to \mathbb{C}$ formulom*

$$f_\Gamma(\Gamma x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x), \qquad x \in M. \tag{1.41}$$

Preslikavanje $f \mapsto f_\Gamma$ je dobro definirana surjekcija $C_c(M) \to C_c(\Gamma\backslash M)$.

Dokaz. Ovaj je dokaz dobiven prilagodbom dokaza Leme [58, Lema B.33].

Neka je $f \in C_c(M)$. Primijetimo da je za svaki kompaktan $C \subseteq M$

$$\#\left\{\gamma \in \Gamma : f(\gamma x) \neq 0 \text{ za neki } x \in C\right\} < \infty,$$

naime

$$\begin{aligned}\{\gamma \in \Gamma : f(\gamma x) \neq 0 \text{ za neki } x \in C\} &\subseteq \{\gamma \in \Gamma : \gamma C \cap \operatorname{supp} f \neq \emptyset\}\\ &\subseteq \{\gamma \in \Gamma : \gamma(C \cup \operatorname{supp} f) \cap (C \cup \operatorname{supp} f) \neq \emptyset\},\end{aligned}$$

a zadnji je skup konačan jer je θ pravo. Dakle, desna strana jednakosti (1.41) definira neprekidnu funkciju na svakom kompaktu $C \subseteq M$. Kako je M lokalno kompaktan te je projekcija $M \to \Gamma\backslash M$ lokalni homeomorfizam, slijedi da je f_Γ dobro definirana funkcija iz $C(\Gamma\backslash M)$. Očito je i $\operatorname{supp} f_\Gamma \subseteq \pi(\operatorname{supp} f)$ pa je $f_\Gamma \in C_c(\Gamma\backslash M)$.

Preostaje dokazati surjektivnost preslikavanja $f \mapsto f_\Gamma$. Neka je $g \in C_c(\Gamma\backslash M)$. Konstruirat ćemo $h \in C_c(M)$ takvu da je $h_\Gamma = g$. Primjenom Leme 1.58 odaberimo kompaktan $C_0 \subseteq M$ takav da je $\operatorname{supp} g \subseteq \pi(C_0)$, tj. $\pi^{-1}(\operatorname{supp} g) \subseteq \Gamma C_0$. Primjenom Urysohnove Leme [8, Lema 4.32] odaberimo $\eta \in C_c(M)$, $\eta(M) \subseteq [0,1]$, takvu da je $\eta\big|_{C_0} = 1$. Po prvom je dijelu dokaza η_Γ dobro definirana funkcija iz $C_c(\Gamma\backslash M)$ i vrijedi $\eta_\Gamma(M) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ pa je dobro definirana funkcija $h : M \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{\eta(x)}{\eta_\Gamma(\Gamma x)} g(\Gamma x), & \text{ako je } \eta_\Gamma(\Gamma x) > 0,\\ 0, & \text{ako je } \eta_\Gamma(\Gamma x) = 0.\end{cases}$$

h je očito neprekidna na otvorenom skupu $U_1 := \{x \in M : \eta_\Gamma(\Gamma x) > 0\} \supseteq \Gamma C_0$ i iščezava na otvorenom skupu $U_2 := M \setminus \pi^{-1}(\operatorname{supp} g) \supseteq M\backslash\Gamma C_0$. Kako je $U_1 \cup U_2 = M$, slijedi da je $h \in C(M)$. Uz to je očito $\operatorname{supp} h \subseteq \operatorname{supp} \eta$ pa je $h \in C_c(M)$. Lako se provjeri da je $h_\Gamma = g$. $\square$

Borel-izmjeriv podskup $F \subseteq M$ koji sadrži točno po jedan element svake orbite djelovanja θ zovemo **strogom fundamentalnom domenom** za Γ u M.

Lema 1.62. *Pretpostavimo da je θ pravo i slobodno. Tada vrijedi:*

(i) *Postoji otvoren pokrivač $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ za M takav da je*

$$\gamma V_n \cap V_n = \emptyset, \qquad \gamma \in \Gamma \setminus \{1_\Gamma\},\ n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

(ii) *Neka su $A \subseteq B$ Borel-izmjerivi podskupovi od M sa svojstvima:*

- $\Gamma B = M$
- $\gamma A \cap A = \emptyset, \quad \gamma \in \Gamma \setminus \{1_\Gamma\}$.

Tada postoji stroga fundamentalna domena F za Γ u M takva da je $A \subseteq F \subseteq B$.

Dokaz. (i) Po Lemi 1.59.(a) svaki $x \in M$ ima otvorenu okolinu U_x takvu da za sve $\gamma \in \Gamma \backslash \{1_\Gamma\}$ vrijedi $\gamma U_x \cap U_x = \emptyset$. Familija $\{U_x\}_{x \in M}$ je otvoren pokrivač za M pa, s obzirom da M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, ima prebrojiv potpokrivač, koji očito ima traženo svojstvo.

(ii) Neka je $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ otvoren pokrivač za M iz (i). Induktivno definiramo niz $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ podskupova od M:

$$F_0 := A,$$
$$F_{n+1} := V_{n+1} \cap \left(B \setminus \bigcup_{j=0}^{n} \Gamma F_j \right), \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Očito je

$$F := \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

tražena stroga fundamentalna domena za Γ u M. $\square$

Propozicija 1.63. *Pretpostavimo da je θ pravo i slobodno. Tada vrijedi:*

(i) *Ako je ν Γ-invarijantna Borelova mjera na M, tada je formulom*

$$\nu_{\Gamma \backslash M}(A) := \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap F\right), \qquad A \subseteq \Gamma \backslash M \text{ Borel-izmjeriv}, \tag{1.42}$$

gdje je F proizvoljna stroga fundamentalna domena za Γ u M, dobro definirana Borelova mjera na $\Gamma \backslash M$.

(ii) *Ako je ν Γ-invarijantna Radonova mjera na M, tada je mjera $\nu_{\Gamma\backslash M}$ iz* (i) *Radonova mjera na $\Gamma\backslash M$ ekvivalentno zadana zahtjevom*

$$\int_{\Gamma\backslash M} f \, d\nu_{\Gamma\backslash M} = \int_F f(\Gamma x) \, d\nu(x), \qquad f \in C_c(\Gamma\backslash M), \tag{1.43}$$

gdje je F proizvoljna stroga fundamentalna domena za Γ u M, ili zahtjevom

$$\int_{\Gamma\backslash M} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x) \, d\nu_{\Gamma\backslash M}(\Gamma x) = \int_M f \, d\nu, \qquad f \in C_c(M). \tag{1.44}$$

Dokaz. (i) Očito za fiksan izbor stroge fundamentalne domene F za Γ u M formula

$$\nu_F(A) := \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap F\right), \qquad A \subseteq \Gamma\backslash M \text{ Borel-izmjeriv},$$

definira Borelovu mjeru ν_F na $\Gamma\backslash M$. Preostaje dokazati da je za stroge fundamentalne domene F_1 i F_2 za Γ u M

$$\nu_{F_1} = \nu_{F_2}.$$

Kako je Γ prebrojiva i djeluje na M slobodno, M je prebrojiva disjunktna unija

$$M = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma F_1 = \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma F_2 \tag{1.45}$$

pa za svaki Borel-izmjeriv skup $A \subseteq \Gamma\backslash M$ imamo

$$\begin{aligned}
\nu_{F_1}(A) &= \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap F_1\right) \\
&\overset{(1.45)}{=} \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap F_1 \cap \gamma F_2\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu\left(\gamma^{-1}\pi^{-1}(A) \cap \gamma^{-1} F_1 \cap F_2\right) && (\Gamma\text{-invarijantnost mjere } \nu) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap \gamma F_1 \cap F_2\right) && (\gamma^{-1}\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(A),\ \gamma \leftrightarrow \gamma^{-1}) \\
&\overset{(1.45)}{=} \nu\left(\pi^{-1}(A) \cap F_2\right) \\
&= \nu_{F_2}(A),
\end{aligned}$$

dakle $\nu_{F_1} = \nu_{F_2}$.

(ii) Uz dodatnu pretpostavku da je ν Radonova, dokažimo da je $\nu_{\Gamma\backslash M}$ Radonova mjera na kvocijentnom prostoru $\Gamma\backslash M$. Budući da je $\Gamma\backslash M$ po Lemi 1.60 topološka mnogostrukost, pa posebno lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, po [8, Teorem 7.8] je dovoljno dokazati da za svaki kompaktan skup $C \subseteq \Gamma\backslash M$ vrijedi $\nu_{\Gamma\backslash M}(C) < \infty$. Odaberimo primjenom Leme 1.58 kompaktan skup $C_0 \subseteq M$ takav da je $\pi^{-1}(C) \subseteq \Gamma C_0$. Primjenom Leme 1.62.(ii) odaberimo strogu fundamentalnu domenu $F_1 \subseteq C_0$ za Γ u ΓC_0, a zatim i strogu fundamentalnu domenu $F \supseteq F_1$ za Γ u M. Koristeći definiciju mjere $\nu_{\Gamma\backslash M}$ i monotonost mjere ν, imamo ocjenu

$$\nu_{\Gamma\backslash M}(C) = \nu\left(\pi^{-1}(C) \cap F\right) \leq \nu\left(\Gamma C_0 \cap F\right) = \nu(F_1) \leq \nu(C_0),$$

čija je desna strana konačna s obzirom da je ν Radonova, a C_0 kompaktan. Dakle, $\nu_{\Gamma\backslash M}(C) < \infty$.

Dokažimo (1.43). (1.42) pokazuje da jednakost (1.43) vrijedi u slučaju kad je f karakteristična funkcija proizvoljnog Borel-izmjeriva podskupa od $\Gamma\backslash M$. Odatle standardnim argumentom slijedi da jednakost (1.43) vrijedi i za sve nenegativne izmjerive funkcije f na $\Gamma\backslash M$ te za sve $f \in L^1(\Gamma\backslash M)$, pa posebno vrijedi za sve $f \in C_c(\Gamma\backslash M)$.

Da zahtjev (1.42) jedinstveno određuje Radonovu mjeru $\nu_{\Gamma\backslash M}$, slijedi iz Rieszova teorema reprezentacije Radonovih mjera pomoću pozitivnih linearnih funkcionala [8, Teorem 7.2].

Dokažimo (1.44). Neka je $f \in C_c(M)$. Primjenom Leme 1.62.(ii) odaberimo strogu fundamentalnu domenu F za Γ u M. Imamo

$$\int_M f\, d\nu = \int_M f \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{1}_{\gamma F}\, d\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\gamma F} f\, d\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_F f(\gamma x)\, d\nu(x) = \int_F \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)\, d\nu(x), \tag{1.46}$$

pri čemu drugu i zadnju jednakost opravdava Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji: parcijalne sume reda $f \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{1}_{\gamma F}$ apsolutno dominira funkcija $|f| \in L^1(M, \nu)$, a parcijalne sume reda $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)$ funkcija $\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma x)|$, za koju se računom sličnim gornjem vidi da je integrabilna na F. Nadalje, po Lemi 1.61 podintegralna funkcija na desnoj strani jednakosti (1.46) pripada $C_c(\Gamma\backslash M)$ pa je po (1.43) desna strana u (1.46) jednaka

$$\int_{\Gamma\backslash M} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)\, d\nu_{\Gamma\backslash M}(\Gamma x),$$

što dokazuje (1.44).

Zahtjev (1.44) jedinstveno određuje Radonovu mjeru $\nu_{\Gamma\backslash M}$ po Rieszovu teoremu reprezentacije Radonovih mjera pomoću pozitivnih linearnih funkcionala, s obzirom da je po Lemi 1.61 svaka $g \in C_c\left(\Gamma\backslash M\right)$ oblika $g(\Gamma x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)$ za neku $f \in C_c(M)$. $\square$

1.4.2 Mjera na kvocijentu Liejeve grupe po diskretnoj podgrupi

Neka su G Liejeva grupa i Γ njena diskretna podgrupa. Lako se vidi da je preslikavanje $\Gamma \times G \to G$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$, glatko, slobodno i pravo lijevo djelovanje grupe Γ na G. Prema tome, po Teoremu o kvocijentnoj mnogostrukosti [25, Teorem 21.10] $\Gamma\backslash G$ možemo promatrati kao glatku mnogostrukost s jedinstvenom glatkom strukturom za koju je kvocijentno preslikavanje $\pi : G \to \Gamma\backslash G$, $\pi(x) := \Gamma x$, lokalni difeomorfizam. Nadalje, iz Leme 1.61 slijedi:

Korolar 1.64. *Preslikavanje $C_c(G) \mapsto C_c(\Gamma\backslash G)$,*

$$f \mapsto P_\Gamma f := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma\,\cdot\,),$$

jest dobro definirana surjekcija.

Iz Propozicije 1.63 slijedi:

Korolar 1.65. *Neka je μ_l lijeva Haarova mjera na G. Tada na kvocijentnoj mnogostrukosti $\Gamma\backslash G$ postoji jedinstvena Radonova mjera $\mu_{\Gamma\backslash G}$ sa sljedećim ekvivalentnim svojstvima:*

(i) *Za sve Borel-izmjerive podskupove $A \subseteq \Gamma\backslash G$,*

$$\mu_{\Gamma\backslash G}(A) = \mu_l\left(\pi^{-1}(A) \cap F\right),$$

gdje je F proizvoljna stroga fundamentalna domena za Γ u G.

(ii) *Za sve $f \in C_c(\Gamma\backslash G)$,*

$$\int_{\Gamma\backslash G} f\,d\mu_{\Gamma\backslash G} = \int_F f\,d\mu_l,$$

gdje je F proizvoljna stroga fundamentalna domena za Γ u G.

(iii) *Za sve $f \in C_c(G)$,*

$$\int_{\Gamma\backslash G} P_\Gamma f\,d\mu_{\Gamma\backslash G}(x) = \int_G f\,d\mu_l.$$

Korisno je primijetiti: ako je grupa Γ u Korolaru 1.65 konačna, tada lako slijedi da je

$$\int_{\Gamma\backslash G} f\,d\mu_{\Gamma\backslash G} = |\Gamma|^{-1}\int_G f\,d\mu_l, \qquad f \in C_c(\Gamma\backslash G). \tag{1.47}$$

Uvrštavanjem u Korolar 1.65 grupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ s Haarovom mjerom $\mu_l = \mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$, za svaku diskretnu podgrupu Γ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ definiramo Radonovu mjeru $\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$ na kvocijentnoj mnogostrukosti $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Analogno, uvrštavanjem u Korolar 1.65 grupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s Haarovom mjerom $\mu_l = \mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, za svaku diskretnu podgrupu Γ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ definiramo Radonovu mjeru $\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ na kvocijentnoj mnogostrukosti $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

1.4.3 Mjera na kvocijentu $\Gamma\backslash\mathcal{H}$

Neka je Γ diskretna podgrupa grupe $G \in \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$. Lijevo je djelovanje $\Gamma\times\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(\gamma, z) \mapsto \gamma.z$, grupe Γ na $\mathcal{H}$ neprekidno i po [28, Korolar 1.5.3] pravo. Iako općenito nije slobodno pa ne možemo direktno primijeniti Propoziciju 1.63, u Propoziciji 1.66 ćemo konstruirati korisnu mjeru na kvocijentu $\Gamma\backslash\mathcal{H}$.

Označimo sa $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ skup svih točaka $z \in \mathcal{H}$ koje nisu eliptičke za Γ, a sa π kvocijentno preslikavanje $\mathcal{H} \to \Gamma\backslash\mathcal{H}$, $z \mapsto \Gamma.z$. S kvocijentnom je topologijom $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ otvoren topološki potprostor Riemannove plohe $\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^*$, pa je posebno topološka mnogostrukost, i vrijedi:

Propozicija 1.66. *Postoji jedinstvena Radonova mjera $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$ na $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ takva da za svaku strogu fundamentalnu domenu F za Γ u $\mathcal{H}$ vrijedi*

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(A) = v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}(A) \cap F\right), \qquad A \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{H} \text{ Borel-izmjeriv,} \tag{1.48}$$

ili ekvivalentno

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} = \int_F f \, dv_{\mathcal{H}}, \qquad f \in C_c(\Gamma\backslash\mathcal{H}). \tag{1.49}$$

Dokaz. $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ je Γ-invarijantan i po Lemi 1.49 otvoren topološki potprostor od $\mathcal{H}$, na koji grupa $\Gamma/(\Gamma \cap Z(G))$ djeluje neprekidno, pravo i slobodno pa po Propoziciji 1.63 postoji jedinstvena Radonova mjera $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ}$ takva da za proizvoljnu strogu fundamentalnu domenu F° za Γ u $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ vrijedi

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ}(A) = v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}(A) \cap F^\circ\right), \qquad A \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ \text{ Borel-izmjeriv.} \tag{1.50}$$

Definiramo Borelovu mjeru $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$ na $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ formulom

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(A) := v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ}\left(A \cap (\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ)\right), \qquad A \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{H} \text{ Borel-izmjeriv.} \tag{1.51}$$

Dokažimo da vrijedi (1.48). Za svaku strogu fundamentalnu domenu F° za Γ u $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ i za svaki Borel-izmjeriv $A \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{H}$ imamo

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(A) \underset{(1.50)}{\overset{(1.51)}{=}} v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}\left(A \cap (\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^\circ)\right) \cap F^\circ\right) = v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}(A) \cap \mathcal{H}_\Gamma^\circ \cap F^\circ\right) = v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}(A) \cap F^\circ\right). \tag{1.52}$$

Kako svaka stroga fundamentalna domena za Γ u $\mathcal{H}$ izbacivanjem (prebrojivo mnogo) eliptičkih točaka za Γ prelazi u strogu fundamentalnu domenu za Γ u $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$, iz (1.52) slijedi (1.48).

Dokažimo da je mjera $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$ Radonova. S obzirom da je $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ topološka mnogostrukost, pa posebno lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, po [8, Teorem 7.8] je dovoljno dokazati da za proizvoljan kompaktan $C \subseteq \Gamma\backslash\mathcal{H}$ vrijedi $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(C) < \infty$. Primjenom Leme 1.58 odaberimo kompaktan $C_0 \subseteq \mathcal{H}$ takav da je $\pi^{-1}(C) \subseteq \Gamma C_0$. Primjenom Leme 1.62.(ii) odaberimo strogu fundamentalnu domenu $F_1^\circ \subseteq C_0$ za Γ u $\Gamma C_0 \cap \mathcal{H}_\Gamma^\circ$, a zatim i strogu fundamentalnu domenu $F^\circ \supseteq F_1^\circ$ za Γ u $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$. Dakle, $\Gamma C_0 \cap F^\circ = F_1^\circ$. Sada koristeći monotonost mjere $v_{\mathcal{H}}$ imamo

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(C) \overset{(1.52)}{=} v_{\mathcal{H}}\left(\pi^{-1}(C) \cap F^\circ\right) \leq v_{\mathcal{H}}\left(\Gamma C_0 \cap F^\circ\right) = v_{\mathcal{H}}\left(F_1^\circ\right) \leq v_{\mathcal{H}}(C_0),$$

a desna je strana konačna jer je $v_{\mathcal{H}}$ Radonova, a C_0 kompaktan.

(1.49) slijedi iz (1.48) kao u dokazu jednakosti (1.43), a jedinstveno određuje Radonovu mjeru $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}$ po Rieszovu teoremu reprezentacije Radonovih mjera pomoću pozitivnih linearnih funkcionala [8, Teorem 7.2]. □

Lema 1.67. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa grupe* $G \in \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$*. Neka su* $A \subseteq B$ *Borel-izmjerivi podskupovi od* $\mathcal{H}$ *sa svojstvima:*

- $\Gamma.B = \mathcal{H}$
- $\gamma.A \cap A = \emptyset, \quad \gamma \in \Gamma \setminus Z(G).$

Tada postoji stroga fundamentalna domena F *za* Γ *u* $\mathcal{H}$ *takva da je* $A \subseteq F \subseteq B$*.*

Dokaz. Djelovanje grupe $\Gamma / (Z(G) \cap \Gamma)$ na $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ zadovoljava pretpostavke Leme 1.62 pa primjenom Leme 1.62.(ii) možemo odabrati strogu fundamentalnu domenu F° za Γ u $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$ takvu da je $A \subseteq F^\circ \subseteq B \cap \mathcal{H}_\Gamma^\circ$. Dodamo li joj (prebrojiv, pa Borel-izmjeriv) potpun skup $E \subseteq B$ predstavnika orbita eliptičkih točaka za Γ, dobivamo traženu strogu fundamentalnu domenu za Γ u $\mathcal{H}$. □

Za diskretnu podgrupu Γ grupe $G \in \{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$, označimo

$$\varepsilon_\Gamma := |\Gamma \cap Z(G)| . \tag{1.53}$$

Lema 1.68. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa grupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$*. Neka je* F° *stroga fundamentalna domena za* Γ *u* $\mathcal{H}_\Gamma^\circ$*. Tada je*

$$\Omega^\circ := \left\{ n_x a_y \kappa_t : x + iy \in F^\circ,\ t \in \left[0, 4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}\right[\right\} \tag{1.54}$$

stroga fundamentalna domena za djelovanje grupe Γ *lijevim množenjem na*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim\circ}_{\ \Gamma} := \{ n_x a_y \kappa : x + iy \in \mathcal{H}_\Gamma^\circ,\ \kappa \in K \} .$$

Dokaz. Dokažimo da je proizvoljan $n_x a_y \kappa_t \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim\circ}_{\ \Gamma}$ (sa $x + iy \in \mathcal{H}_\Gamma^\circ$ i $t \in \mathbb{R}$) Γ-ekvivalentan nekom elementu iz Ω°. Odaberimo $\gamma \in \Gamma$ i $x' + iy' \in F^\circ$ takve da je $\gamma.(x + iy) = x' + iy'$. Očito je $\gamma n_x a_y \kappa_t = n_{x'} a_{y'} \kappa_{t'}$ za neke $\gamma \in \Gamma$ i $t' \in \mathbb{R}$. Množenjem elementa γ pogodnim elementom grupe $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap \Gamma = \left\langle \kappa_{4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}} \right\rangle$ možemo postići da vrijedi $t' \in \left[0, 4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}\right[$, tj. $n_{x'} a_{y'} \kappa_{t'} \in \Omega^\circ$.

Preostaje dokazati: ako za neke $x + iy, x' + iy' \in F^\circ$ i $t, t' \in \left[0, 4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}\right[$ postoji $\gamma \in \Gamma$ takav da je $\gamma n_x a_y \kappa_t = n_{x'} a_{y'} \kappa_{t'}$, tada je $x + iy = x' + iy'$ i $t = t'$. Djelovanjem pretpostavljene jednakosti na i dobivamo $\gamma.(x+iy) = x'+iy'$ pa je nužno $x+iy = x'+iy'$, a onda i $\gamma.(x+iy) = x+iy$. Kako je $x+iy \in \mathcal{H}_\Gamma^\circ$, odatle slijedi da je $\gamma \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap \Gamma$ pa zapravo imamo $n_x a_y \kappa_t \gamma = n_x a_y \kappa_{t'}$, dakle $\kappa_{t'-t} = \gamma \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap \Gamma = \left\{ \kappa_{4n\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. Kako su $t, t' \in \left[0, 4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}\right[$, slijedi $t = t'$. □

Lema 1.69. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa grupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$*. Tada za sve* $f \in C_c\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ *vrijedi*

$$\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} f \, d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Gamma} \int_0^{4\pi} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(n_x a_y \kappa_t) \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(x + iy) \, dt. \tag{1.55}$$

Dokaz. Neka su F° i Ω° kao u Lemi 1.68. Dodavanjem skupu F° potpunog skupa E predstavnika orbita eliptičkih točaka za Γ dobivamo strogu fundamentalnu domenu F za Γ u $\mathcal{H}$. Kako je skup $F \setminus F^\circ = E$ prebrojiv, vrijedi

$$v_{\mathcal{H}}\left(F \setminus F^\circ\right) = 0. \tag{1.56}$$

Slično, stroga fundamentalna domena Ω° za Γ u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim\circ}_{\Gamma}$ može se po Lemi 1.62.(ii) dopuniti do stroge fundamentalne domene Ω za Γ u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$. Pritom je $\Omega \setminus \Omega^\circ \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim\circ}_{\Gamma}$ pa je

$$\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}}\left(\Omega \setminus \Omega^\circ\right) = 0. \tag{1.57}$$

Sada za sve $f \in C_c\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)$ imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} f\, d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} &= \int_{\Omega} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} \\
&\overset{(1.57)}{=} \int_{\Omega^\circ} f\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}} \\
&\underset{(1.54)}{\overset{(1.33)}{=}} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}}\int_{F^\circ} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&\overset{(1.56)}{=} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}}\int_{F} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Gamma}\sum_{l=1}^{\varepsilon_\Gamma}\int_{4\pi(l-1)\varepsilon_\Gamma^{-1}}^{4\pi l\varepsilon_\Gamma^{-1}}\int_{F} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Gamma}\int_0^{4\pi}\int_{F} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&\overset{(1.49)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Gamma}\int_0^{4\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(x+iy)\, dt,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u petoj jednakosti iskoristili invarijantnost funkcije f na desne translacije elementima iz $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right) \cap \Gamma = \left\{\kappa_{4n\pi\varepsilon_\Gamma^{-1}} : n \in \mathbb{Z}\right\}$. □

Potpuno analogno dokaže se $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-verzija Leme 1.69:

Lema 1.70. *Neka je Γ Fuchsova grupa. Tada za sve $f \in C_c\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\right)$ vrijedi*

$$\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} f\, d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_\Gamma}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(\underline{n}_x \underline{a}_y \underline{\kappa}_t)\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(x+iy)\, dt. \tag{1.58}$$

Korolar 1.71. *Neka je Γ diskretna podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$. Tada je ekvivalentno:*

(a) $\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right) < \infty$.

(b) $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$.

(c) *$P(\Gamma)$ je Fuchsova grupa prve vrste.*

Za grupu Γ sa svojstvima iz Korolara 1.71 kažemo da je **konačnog kovolumena u** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}$.

Dokaz Korolara 1.71. (a) $\Leftrightarrow$ (b): Očito iz (1.55).

(b) $\Rightarrow$ (c): Neka je F fundamentalna domena za $P(\Gamma)$ u $\mathcal{H}$ definirana u Teoremu 1.54. Kako vrijedi $P(\Gamma).F = \mathcal{H}$ i $\gamma.\operatorname{Int} F \cap \operatorname{Int} F = \emptyset$ za sve $\gamma \in P(\Gamma) \setminus \{\pm I_2\}$, po Lemi 1.67 postoji stroga fundamentalna domena F' za $P(\Gamma)$ u $\mathcal{H}$ takva da je $\operatorname{Int} F \subseteq F' \subseteq F$. Imamo

$$v_{\mathcal{H}}(F) = v_{\mathcal{H}}(\operatorname{Int} F) + v_{\mathcal{H}}(\partial F) \overset{\text{Korolar 1.55}}{\leq} v_{\mathcal{H}}(F') + 0 \overset{(1.48)}{=} v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}) \overset{(b)}{<} \infty$$

pa je po Teoremu 1.56 $P(\Gamma)$ Fuchsova grupa prve vrste.

(c) $\Rightarrow$ (b): Neka su F i F' kao gore. Imamo

$$v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}) \overset{(1.48)}{=} v_{\mathcal{H}}(F') \leq v_{\mathcal{H}}(F) \underset{\text{Teorem 1.56}}{\overset{(c)}{<}} \infty. \qquad \square$$

Naravno, vrijedi i očita $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-verzija Korolara 1.71, s analognim dokazom.

Poglavlje 2

Reprezentacije metaplektičke grupe

Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, a K maksimalna kompaktna podgrupa grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ definirana sa (1.22). U ovom poglavlju konstruiramo neke familije reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Preciznije:

- U potpoglavlju 2.1 uvodimo nekoliko klasa ireducibilnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula i dokazujemo njihova svojstva koja će biti važna u kasnijim poglavljima.
- U potpoglavlju 2.2 definiramo osnovnu seriju reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i opisujemo infinitezimalnu strukturu reprezentacija iz osnovne serije.
- U potpoglavlju 2.3 realiziramo holomorfnu i antiholomorfnu diskretnu seriju grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na Hilbertovim prostorima sastavljenim od (anti)holomorfnih funkcija definiranih na $\mathcal{H}$ odnosno na $\mathcal{D}$.

2.1 Ireducibilni $(\mathfrak{g}, K)$-moduli

Lema 2.1. *Neka je V $(\mathfrak{g}, K)$-modul. Neka su $v \in V$ i $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Ekvivalentno je:*

(a) $v \in V_{\chi_m}$.

(b) $k^\circ.v = mv$.

Dokaz. Ako vrijedi (a), tada imamo

$$k^\circ.v = i\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(-itk^\circ).v = i\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \kappa_t.v \overset{(a)}{=} i\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{-imt}v = mv.$$

Obrat je direktna posljedica upravo dokazane implikacije i činjenice da se po Propozicijama 1.8 i 1.31 V rastavlja u direktnu sumu

$$V = \bigoplus_{l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_{\chi_l}$$

svojih K-izotipičnih komponenata. □

Propozicija 2.2. *Neka je $m \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$. Tada postoji do na izomorfizam jedinstven $(\mathfrak{g}, K)$-modul V koji je kao K-modul izomorfan direktnoj sumi $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{m+2l}$. Takav je V ireducibilan i zadovoljava*

$$V = \sum_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C} v_{m+2l}$$

za neku familiju $(v_{m+2l})_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subseteq V \setminus \{0\}$ sa sljedećim svojstvima:

(i) $\kappa . v_{m+2l} = \chi_{m+2l}(\kappa) v_{m+2l}, \quad \kappa \in K,\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

(ii) $k^\circ . v_{m+2l} = (m + 2l)\, v_{m+2l}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

(iii) $n^+ . v_{m+2l} = v_{m+2l+2}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

(iv) $n^- . v_{m+2l} = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } l = 0, \\ l(1 - m - l)\, v_{m+2l-2}, & \textit{ako je } l \in \mathbb{Z}_{>0}. \end{cases}$

(v) $\mathcal{C} . v_{m+2l} = m\left(\frac{m}{2} - 1\right) v_{m+2l}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

Klasu ekvivalencije $(\mathfrak{g}, K)$-modula iz Propozicije 2.2 označavat ćemo sa D_m^+.

Dokaz Propozicije 2.2. Pretpostavimo da je V $(\mathfrak{g}, K)$-modul koji je kao K-modul izomorfan direktnoj sumi $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{m+2l}$. Odaberimo $v_m \in V_{\chi_m} \setminus \{0\}$ i definirajmo

$$v_{m+2l} := \left(n^+\right)^l . v_m, \qquad l \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{2.1}$$

Dokažimo da familija $(v_{m+2l})_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ zadovoljava uvjete iz propozicije.

Svojstvo (iii) je trivijalno zadovoljeno. Svojstvo (i) je po Lemi 2.1 ekvivalentno sa svojstvom (ii), koje možemo dokazati indukcijom po $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: kako je $v_m \in V_{\chi_m}$, za $l = 0$ (ii) vrijedi po Lemi 2.1; nadalje, ako za neki $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi $k^\circ . v_{m+2l} = (m + 2l) v_{m+2l}$, tada je i

$$\begin{aligned} k^\circ . v_{m+2l+2} = k^\circ n^+ . v_{m+2l} = \left(n^+ k^\circ + \left[k^\circ, n^+\right]\right) . v_{m+2l} &\overset{(1.25)}{=} \left(n^+ k^\circ + 2n^+\right) . v_{m+2l} \\ = (m + 2l + 2)\, n^+ . v_{m+2l} = (m + 2l + 2) v_{m+2l+2}. \end{aligned}$$

Slično se dokaže da je $k^\circ . \left(n^- . v_m\right) = (m - 2)\, n^- . v_m$, odakle po Lemi 2.1 slijedi da je $n^- . v_m \in V_{\chi_{m-2}} = 0$, dakle (iv) vrijedi u slučaju kad je $l = 0$. Posebno je

$$0 = 2n^+ n^- . v_m \overset{(1.26)}{=} \left(\mathcal{C} - \frac{1}{2}\left(k^\circ\right)^2 + k^\circ\right) . v_m \overset{\text{(ii)}}{=} \mathcal{C} . v_m + \left(-\frac{1}{2} m^2 + m\right) v_m,$$

dakle $\mathcal{C}.v_m = m\left(\frac{m}{2}-1\right)v_m$. Kako je $\mathcal{C} \in Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, slijedi (v). Sada relaciju (iv) za $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ dokazuje račun

$$\begin{aligned} n^-.v_{m+2l} &= n^-n^+.v_{m+2l-2} \\ &\overset{(1.27)}{=} \frac{1}{2}\left(\mathcal{C} - \frac{1}{2}(k^\circ)^2 - k^\circ\right).v_{m+2l-2} \\ &\overset{\text{(v) i (ii)}}{=} \frac{1}{2}\left(m\left(\frac{m}{2}-1\right) - \frac{1}{2}(m+2l-2)(m+2l)\right)v_{m+2l-2} \\ &= l(1-m-l)\,v_{m+2l-2}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $l(1-m-l) \neq 0$ za sve $l \in \mathbb{Z}_{>0}$, iz ove formule slijedi da je $v_{m+2l} \neq 0$ za sve $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ (inače bi njena uzastopna primjena povlačila da je $v_m = 0$). Po (i) slijedi da je $v_{m+2l} \in V_{\chi_{m+2l}} \setminus \{0\}$, dakle $V = \sum_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}v_{m+2l}$.

Time je dokazano da postoji familija $(v_{m+2l})_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subseteq V \setminus \{0\}$ koja razapinje V i zadovoljava (i) – (v). Ovo svojstvo očito jednoznačno određuje klasu ekvivalencije $(\mathfrak{g}, K)$-modula V, dakle V je jedinstven do na izomorfizam.

Dokažimo da je V ireducibilan. Kako je svaka njegova K-izotipična komponenta jednodimenzionalna, svaki je njegov $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul $W \neq 0$ suma neke potfamilije tih komponenata pa je $v_{m+2r} \in W$ za neki $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Iz (iii) i (iv) slijedi da je $v_{m+2l} \in W$ za svaki $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dakle $W = V$.

Dokaz egzistencije $(\mathfrak{g}, K)$-modula V dat ćemo u potpoglavlju 2.2 njegovom konstrukcijom kao $(\mathfrak{g}, K)$-podmodula u $(\mathfrak{g}, K)$-modulu K-konačnih vektora jedne reprezentacije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ iz osnovne serije. □

Lema 2.3. *Neka je $m \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$. Neka je V ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)$-modul takav da postoji $v_m \in V \setminus \{0\}$ sa svojstvima:*

(a) $\kappa.v_m = \chi_m(\kappa)\,v_m, \quad \kappa \in K.$

(b) $\mathcal{C}.v_m = m\left(\frac{m}{2}-1\right)v_m.$

Tada je $V \in D_m^+$.

Dokaz. Budući da $\mathcal{C} \in Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ djeluje skalarom $m\left(\frac{m}{2}-1\right)$ na v_m, djeluje istim skalarom na cijeli $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}).v_m = V$. Definiramo

$$\begin{aligned} v_{m+2l} &:= \left(n^+\right)^l.v_m, \\ v_{m-2l} &:= \left(n^-\right)^l.v_m, \qquad l \in \mathbb{Z}_{>0}. \end{aligned}$$

Slično kao u dokazu Propozicije 2.2 vidi se da za sve $\kappa \in K$ i $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\kappa.v_{m-2l} &= \chi_{m-2l}(\kappa)\, v_{m-2l}, \\
k^\circ.v_{m-2l} &= (m-2l)\, v_{m-2l}, \\
n^-.v_{m-2l} &= v_{m-2l-2}, \\
n^+.v_{m-2l} &= (m-l)(l-1)\, v_{m-2l+2}.
\end{aligned}$$

Odatle je, primijetimo li da je posebno $n^+.v_{m-2} = 0$, jasno da je $\sum_{l\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}v_{m-2l}$ pravi (jer ne sadrži $v_m \in V_{\chi_m} \setminus \{0\}$) $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od V pa je jednak 0 s obzirom da je V ireducibilan. Posebno je $0 = v_{m-2} = n^-.v_m$. Koristeći to i argumente iz dokaza Propozicije 2.2, lako se pokaže da je $(v_{m+2l})_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subseteq V \setminus \{0\}$ i da ta familija ima svojstva (i) – (v) iz Propozicije 2.2, dakle $W := \sum_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}v_{m+2l}$ je $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od V iz klase D_m^+. Kako je V ireducibilan, nužno je $V = W$, dakle $V \in D_m^+$. □

Analogno Propoziciji 2.2 dokaže se:

Propozicija 2.4. *Neka je $m \in \mathbb{Z}_{<0} \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$. Tada postoji do na izomorfizam jedinstven (ireducibilan) $(\mathfrak{g}, K)$-modul V koji je kao K-modul izomorfan direktnoj sumi $\bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{m-2l}$.*

Klasu ekvivalencije $(\mathfrak{g}, K)$-modula iz Propozicije 2.4 označavat ćemo sa D_m^-.

Lako se vidi da su za svaki $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$ $(\mathfrak{g}, K)$-moduli iz klasa D_m^+ i D_{-m}^- infinitezimalno unitarni pa po Teoremu 1.10 vrijedi:

Lema 2.5. *Neka je $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$. Tada postoje do na unitarnu ekvivalenciju jedinstvene ireducibilne unitarne reprezentacije*

$$\left(\pi_{D_m^+}, H_{D_m^+}\right) \qquad i \qquad \left(\pi_{D_{-m}^-}, H_{D_{-m}^-}\right)$$

grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ čiji $(\mathfrak{g}, K)$-moduli K-konačnih vektora pripadaju redom klasama D_m^+ i D_{-m}^-.

Iz Propozicija 2.2 i 2.4 slijedi:

Korolar 2.6. *Neka je $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$. Neka je (π, H) unitarna reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Tada vrijedi:*

(i) *Ako je kao K-modul*
$$H_K \cong \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{m+2l},$$
tada je π unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$.

(ii) *Ako je kao K-modul*
$$H_K \cong \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{-m-2l},$$
tada je π unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D_{-m}^-}$.

Sljedeća je lema važna za dokaz Teorema 3.24, Leme 4.7 i Teorema 6.3.

Lema 2.7. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$. *Pretpostavimo da* $\varphi \in C^\infty\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$, $\varphi \not\equiv 0$, *ima sljedeća svojstva:*

(a) φ *se transformira zdesna kao* χ_m.

(b) $\mathcal{C}\varphi = m\left(\frac{m}{2} - 1\right)\varphi$.

Tada je najmanji zatvoren $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$*-invarijantan potprostor* W *od* $\left(r_\Gamma, L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\right)$ *koji sadrži* φ *unitarno ekvivalentan reprezentaciji* $\pi_{D_m^+}$.

Dokaz. Po Lemi 1.20.(ii) prostor W je ortogonalna suma zatvorenih ireducibilnih $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$-invarijantnih potprostora $W_1, W_2, \ldots, W_k$ za neki $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Vrijedi

$$\varphi = \sum_{n=1}^{k} \varphi_n \qquad \text{za neke } \varphi_n \in W_n \setminus \{0\}.$$

Iz (a) i (b) slijedi da za svaki $n \in \{1, \ldots, k\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} r_\Gamma(\kappa)\varphi_n &= \chi_m(\kappa)\varphi_n, \qquad \kappa \in K, \\ r_\Gamma(\mathcal{C})\varphi_n &= m\left(\frac{m}{2} - 1\right)\varphi_n, \end{aligned}$$

pa su po Lemama 2.3 i 2.5 reprezentacije W_n unitarno ekvivalentne reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$, a funkcije φ_n pripadaju njihovim χ_m-izotipičnim komponentama. Sada sumiranjem po $n \in \{1, \ldots, k\}$ relacija (i) – (iv) iz Propozicije 2.2 sa $v_{m+2l} := (n^+)^l \varphi_n$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dobivamo da iste relacije vrijede za $v_{m+2l} := (n^+)^l \varphi$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dakle φ generira $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul V od W_K iz klase D_m^+. $\mathrm{Cl}_W V$ je po Teoremu 1.9 zatvoren $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$-invarijantan potprostor od W unitarno ekvivalentan reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$. Kako je $\varphi \in V$, nužno je $\mathrm{Cl}_W V = W$. Time je tvrdnja dokazana. □

Struktura konačnodimenzionalnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula opisana je sljedećim dvjema propozicijama koje slijede iz [15, Propozicija 1.1.12].

Propozicija 2.8. *Neka je* $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada postoji do na izomorfizam jedinstven ireducibilan* $(\mathfrak{g}, K)$*-modul* V *dimenzije* $m + 1$, *i kao* K*-modul je izomorfan direktnoj sumi* $\bigoplus_{l=0}^{m} \chi_{-m+2l}$.

Klasu ekvivalencije $(\mathfrak{g}, K)$-modula iz Propozicije 2.8 označavat ćemo sa F_m.

Propozicija 2.9. *Svaki je konačnodimenzionalan* $(\mathfrak{g}, K)$*-modul direktna suma konačno mnogo* $(\mathfrak{g}, K)$*-modula iz klasa* F_m, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

2.2 Osnovna serija

U ovom potpoglavlju definiramo osnovnu seriju reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i opisujemo infinitezimalnu strukturu reprezentacija iz osnovne serije.

Uvedimo još dvije oznake za zatvorene Liejeve podgrupe grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$:

$$M := Z_K(A) = P^{-1}(\{\pm I_2\}) = \langle \kappa_\pi \rangle = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right),$$

$$P_0 := MAN = P^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : c = 0\right\}\right)$$

Lema 2.10. *Modularni karakter δ_{P_0} grupe P_0 dan je formulom*

$$\delta_{P_0}(ma_yn) = y, \qquad m \in M,\ y \in \mathbb{R}_{>0},\ n \in N. \tag{2.2}$$

Dokaz. Haarove mjere μ_M, μ_A i μ_N na unimodularnim Liejevim grupama M, A i N dane su sa

$$\begin{aligned} \int_M f\, d\mu_M &= \sum_{m\in M} f(m), && f \in \mathbb{C}^M, \\ \int_A f\, d\mu_A &= \int_0^\infty f(a_y)\frac{dy}{y}, && f \in C_c(A), \\ \int_N f\, d\mu_N &= \int_{\mathbb{R}} f(n_x)\, dx, && f \in C_c(N). \end{aligned}$$

Uz to, za $m, m_1 \in M$, $y, y_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ i $x, x_1 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(m_1 a_{y_1} n_{x_1})\,(m a_y n_x) = (m_1 m)\,(a_{y_1} a_y)\,(n_{y^{-1}x_1} n_x)$$

pa je produktna mjera

$$\mu_{P_0} := \mu_M \times \mu_A \times \mu_N$$

P_0-lijevoinvarijantna, dakle μ_{P_0} je lijeva Haarova mjera na P_0 pa imamo

$$\mu_{P_0}(Sp) = \delta_{P_0}(p)^{-1}\mu_{P_0}(S), \qquad S \subseteq P_0 \text{ Borel-izmjeriv},\ p \in P_0. \tag{2.3}$$

S druge strane, za sve Borel-izmjerive skupove $M_1 \subseteq M$, $A_1 \subseteq A$, $N_1 \subseteq N$ i za sve $m \in M$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$ i $n \in N$ imamo

$$\begin{aligned} \mu_{P_0}(M_1A_1N_1ma_yn) &= \mu_{P_0}(mM_1A_1a_ya_y^{-1}N_1a_yn) \\ &= \mu_M(mM_1)\,\mu_A(A_1a_y)\,\mu_N\left(\left(a_y^{-1}N_1a_y\right)n\right) \\ &= \mu_M(M_1)\,\mu_A(A_1)\,y^{-1}\mu_N(N_1) \\ &= y^{-1}\mu_{P_0}(M_1A_1N_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Iz (2.3) i (2.4) slijedi (2.2). □

Neka je μ_K normalizirana Haarova mjera na K, dakle

$$\int_K f\,d\mu_K = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} f(\kappa_t)\,dt, \qquad f \in C(K).$$

Sjetimo se da su karakteri Liejeve grupe K funkcije $\chi_n : K \to \mathbb{C}^\times$,

$$\chi_n(\kappa_t) := e^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

(vidi Propoziciju 1.31). Nadalje, karakteri Liejeve grupe M su funkcije $\tau_r : M \to \mathbb{C}^\times$,

$$\tau_r(\kappa_t) := e^{-irt}, \qquad t \in \pi\mathbb{Z},\ r \in \left\{0, 1, \pm\frac{1}{2}\right\},$$

a karakteri Liejeve grupe A su funkcije $\alpha_s : A \to \mathbb{C}^\times$,

$$\alpha_s(a_y) := y^{\frac{s}{2}} := e^{\frac{s}{2}\ln y}, \qquad y \in \mathbb{R}_{>0},\ s \in \mathbb{C}.$$

Neka su $r \in \left\{0, 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$ i $s \in \mathbb{C}$. Definiramo karakter $\tau_r \otimes \alpha_s$ grupe P_0 sa

$$(\tau_r \otimes \alpha_s)(man) := \tau_r(m)\,\alpha_s(a), \qquad m \in M,\ a \in A,\ n \in N,$$

tj.

$$(\tau_r \otimes \alpha_s)(\kappa_t a_y n_x) := e^{-irt} y^{\frac{s}{2}}, \qquad t \in \pi\mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}_{>0},\ x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $H_{r,s}^\infty$ prostor svih funkcija $f \in C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ koje zadovoljavaju

$$f(p\sigma) = \delta_{P_0}^{\frac{1}{2}}(p)\,(\tau_r \otimes \alpha_s)(p)\,f(\sigma), \qquad p \in P_0,\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,$$

tj., po (2.2),

$$f(\kappa_t a_y n_x \sigma) = e^{-irt} y^{\frac{s+1}{2}} f(\sigma), \qquad t \in \pi\mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}_{>0},\ x \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim, \tag{2.5}$$

sa skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2\rangle_{L^2(K)} := \int_K f_1\,\overline{f_2}\,d\mu_K, \qquad f_1, f_2 \in H_{r,s}^\infty.$$

Djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ desnim translacijama na $H_{r,s}^\infty$ na jedinstven se način proširuje do Hilbertove reprezentacije $I_{r,s}$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na upotpunjenju $H_{r,s}$ prostora $H_{r,s}^\infty$. Reprezentacija $I_{r,s}$ je unitarna ako je karakter $\tau_r \otimes \alpha_s$ unitaran, tj. ako je $s \in i\mathbb{R}$. Reprezentacije $I_{r,s}$ čine **osnovnu seriju reprezentacija grupe** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Prostor glatkih vektora reprezentacije $I_{r,s}$ upravo je $H_{r,s}^\infty$, dok je njen prostor K-

konačnih vektora algebarska suma

$$(H_{r,s})_K = \sum_{l \in r+2\mathbb{Z}} \mathbb{C}\varepsilon_{l,s},$$

gdje su funkcije $\varepsilon_{l,s} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$ zadane formulom

$$\varepsilon_{l,s}(n_x a_y \kappa_t) := y^{\frac{s+1}{2}} e^{-ilt}, \qquad t, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_{>0},\ l \in r + 2\mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Pritom je za svaki $l \in r + 2\mathbb{Z}$ potprostor $\mathbb{C}\varepsilon_{l,s}$ χ_l-izotipična komponenta od $H_{r,s}$. Za izvedenu reprezentaciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vrijedi

$$I_{r,s}(X)f = Xf, \qquad X \in \mathfrak{g},\ f \in H^\infty_{r,s},$$

pa iz formula (1.28) – (1.31) vidimo da za sve $l \in r + 2\mathbb{Z}$ vrijedi

$$I_{r,s}(k^\circ)\,\varepsilon_{l,s} = l\varepsilon_{l,s}, \tag{2.7}$$

$$I_{r,s}\left(n^+\right)\varepsilon_{l,s} = \frac{s+1+l}{2}\varepsilon_{l+2,s}, \tag{2.8}$$

$$I_{r,s}\left(n^-\right)\varepsilon_{l,s} = \frac{s+1-l}{2}\varepsilon_{l-2,s}, \tag{2.9}$$

$$I_{r,s}(\mathcal{C})\,\varepsilon_{l,s} = \frac{s^2-1}{2}\varepsilon_{l,s}.$$

Infinitezimalna struktura reprezentacija iz osnovne serije

Neka je $(r,s) \in \left\{0, 1, \pm\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{C}$. S obzirom da su sve K-izotipične komponente $\mathbb{C}\varepsilon_{l,s}$, $l \in r + 2\mathbb{Z}$, reprezentacije $I_{r,s}$ jednodimenzionalne, svaki je $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od $(H_{r,s})_K$ suma neke potfamilije tih komponenata, pa posebno svaki $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul $V \neq 0$ od $(H_{r,s})_K$ sadrži barem jednu od funkcija $\varepsilon_{l,s}$ sa $l \in r + 2\mathbb{Z}$. Ako $\pm(s+1) \notin r + 2\mathbb{Z}$, tada iz (2.8) – (2.9) vidimo da svaki $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od $(H_{r,s})_K$ koji sadrži jednu od funkcija $\varepsilon_{l,s}$ sadrži njih sve, dakle u tom je slučaju nužno $V = (H_{r,s})_K$, tj. $(\mathfrak{g}, K)$-modul $(H_{r,s})_K$ je ireducibilan. To dokazuje sljedeću lemu.

Lema 2.11. *Neka je* $(r,s) \in \left\{0, 1, \pm\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{C}$. $I_{r,s}$ *je ireducibilna reprezentacija grupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *ako vrijedi nešto od sljedećega:*

(i) $r \in \{0, 1\}$ *i* $s - r \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

(ii) $r \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ *i* $s - r \notin \mathbb{Z}$.

Infinitezimalnu strukturu reprezentacija $I_{r,s}$ za preostale parove indeksa (r,s) opisuju sljedeće dvije leme.

Lema 2.12. *Neka je* $(r,s) \in \{0,1\} \times \mathbb{C}$ *takav da je* $s - r \in 2\mathbb{Z}+1$. *Tada imamo sljedeće egzaktne nizove* $(\mathfrak{g}, K)$*-modula:*

$$\begin{array}{lllll} 0 \longrightarrow & F_{-s-1} & \longrightarrow (H_{r,s})_K \longrightarrow & D^-_{s-1} \oplus D^+_{-s+1} \longrightarrow 0, & \textit{ako je } s \in \mathbb{Z}_{<0}, \\ 0 \longrightarrow & D^-_{-1} \oplus D^+_1 & \longrightarrow (H_{r,s})_K \longrightarrow & 0, & \textit{ako je } s = 0, \\ 0 \longrightarrow & D^-_{-s-1} \oplus D^+_{s+1} & \longrightarrow (H_{r,s})_K \longrightarrow & F_{s-1} \longrightarrow 0, & \textit{ako je } s \in \mathbb{Z}_{>0}. \end{array}$$

Dokaz. Iz (2.8) i (2.9) vidimo da u $(\mathfrak{g}, K)$-modulu $(H_{r,s})_K$ za svaki $l \in r + 2\mathbb{Z}$ vrijedi

$$n^+.\varepsilon_{l,s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = -s-1, \tag{2.10}$$

$$n^-.\varepsilon_{l,s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = s+1, \tag{2.11}$$

odakle u kombinaciji s (2.7) – (2.9) lako slijedi tvrdnja.

Primjerice, u slučaju kad je $s \in \mathbb{Z}_{<0}$ vrijedi $s+1 \leq -s-1$ pa je iz (2.7) – (2.9) jasno da je $V := \sum_{l \in \{s+1, s+3, \ldots, -s-1\}} \mathbb{C}\varepsilon_{l,s}$ ireducibilan $(\mathfrak{g}, K)$-podmodul od $(H_{r,s})_K$ koji je kao K-modul izomorfan direktnoj sumi $\bigoplus_{l \in \{s+1, s+3, \ldots, -s-1\}} \chi_l$ pa pripada klasi F_{-s-1}. Nadalje, kvocijent $(H_{r,s})_K / V$ se rastavlja u direktnu sumu dvaju ireducibilnih $(\mathfrak{g}, K)$-modula koji su kao K-moduli izomorfni sa $\bigoplus_{l \in s-1+2\mathbb{Z}_{\leq 0}} \chi_l$ odnosno sa $\bigoplus_{l \in -s+1+2\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_l$ pa pripadaju klasama D^-_{s-1} odnosno D^+_{-s+1}. Ostali se slučajevi dokažu analogno. □

Lema 2.13. *Neka je* $(r,s) \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{C}$ *takav da je* $s - r \in \mathbb{Z}$. *Tada imamo sljedeće egzaktne nizove* $(\mathfrak{g}, K)$*-modula:*

$$\begin{array}{ll} 0 \longrightarrow D^-_{-s-1} \longrightarrow (H_{r,s})_K \longrightarrow D^+_{-s+1} \longrightarrow 0, & \textit{ako je } s - r \in 2\mathbb{Z}, \\ 0 \longrightarrow D^+_{s+1} \longrightarrow (H_{r,s})_K \longrightarrow D^-_{s-1} \longrightarrow 0, & \textit{ako je } s - r \in 2\mathbb{Z}+1. \end{array}$$

Dokaz. Iz (2.8) i (2.9) vidimo da, ako je $s - r \in 2\mathbb{Z}$, u $(\mathfrak{g}, K)$-modulu $(H_{r,s})_K$ za svaki $l \in r + 2\mathbb{Z}$ vrijedi

$$n^+.\varepsilon_{l,s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = -s-1,$$

$$n^-.\varepsilon_{l,s} \neq 0.$$

Analogno, ako je $s - r \in 2\mathbb{Z}+1$, tada u $(\mathfrak{g}, K)$-modulu $(H_{r,s})_K$ za svaki $l \in r + 2\mathbb{Z}$ vrijedi

$$n^+.\varepsilon_{l,s} \neq 0,$$

$$n^-.\varepsilon_{l,s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = s+1.$$

Odavde u kombinaciji s (2.7) – (2.9) tvrdnja slijedi kao u dokazu Leme 2.12. □

Reprezentacija (π, H) grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ je **prava** (engl. *genuine*) ako nije oblika $\rho \circ P$

ni za koju reprezentaciju ρ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, tj. ako

$$\pi(\kappa_{2\pi}) \neq \mathrm{Id}_H.$$

Lema 2.14. *Neka je* $(r,s) \in \left\{0, 1, \pm\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{C}$. *Reprezentacija* $I_{r,s}$ *je prava ako i samo ako je* $r \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$.

Dokaz. Koristeći da je $\kappa_{2\pi} \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$, imamo

$$I_{r,s}(\kappa_{2\pi})f = f\left(\,\cdot\,\kappa_{2\pi}\right) = f\left(\kappa_{2\pi}\,\cdot\,\right) \overset{(2.5)}{=} e^{-2\pi i r} f, \qquad f \in H^\infty_{r,s}.$$

Dakle, $I_{r,s}(\kappa_{2\pi}) = \mathrm{Id}_{H_{r,s}}$ ako i samo ako je $r \in \{0, 1\}$. Tvrdnja slijedi. □

2.3 Holomorfna i antiholomorfna diskretna serija

Neka je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Konstruirat ćemo realizacije reprezentacija $\pi_{D^-_{-m}}$ odnosno $\pi_{D^+_m}$ na Hilbertovim prostorima sastavljenim od holomorfnih odnosno antiholomorfnih funkcija. Ova konstrukcija poopćuje konstrukciju holomorfne i antiholomorfne diskretne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ opisanu u [24, IX, §2 i §3].

Definiramo desno djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na $\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ formulom

$$\left(f\Big|_m \sigma\right)(z) := f(g_\sigma.z)\,\eta_\sigma(z)^{-2m} \tag{2.12}$$

za sve $f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $z \in \mathcal{H}$. Nadalje, definiramo Hilbertov prostor

$$H_m := \left\{f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H}) : \int_{\mathcal{H}} \left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) < \infty\right\}$$

sa skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2\rangle_{H_m} := \int_{\mathcal{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z).$$

Pripadnu normu označimo sa $\|\cdot\|_{H_m}$. Napokon, definiramo reprezentaciju (π_m, H_m) grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ formulom

$$\pi_m(\sigma)f := f\Big|_m \sigma^{-1}, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,\ f \in H_m. \tag{2.13}$$

Lema 2.15. *Reprezentacija* π_m *je unitarna.*

Dokaz. Za sve $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $f \in H_m$ imamo

$$\begin{aligned}\left\|\pi_m\left(\sigma^{-1}\right)f\right\|^2_{H_m} &= \int_{\mathcal{H}} \left|\left(f\Big|_m\sigma\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) \overset{(1.9)}{=} \int_{\mathcal{H}} \left|f(\sigma.z)\Im(\sigma.z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z)\\ &= \int_{\mathcal{H}} \left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) = \|f\|^2_{H_m}.\end{aligned}$$

□

Da bismo lakše istražili K-konačnu strukturu reprezentacije π_m, konstruirat ćemo njoj unitarno ekvivalentnu reprezentaciju (ρ_m, R_m) na potprostoru od $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})$.

Formulom (2.12) možemo definirati i desno djelovanje grupe $\mathrm{SU}(1,1)^\sim$ na $\mathbb{C}^{\mathcal{D}}$. Nadalje, uvrštavanjem $\sigma = C$ odnosno $\sigma = C^{-1}$ u (2.12) (vidi odjeljak 1.2.7) definiramo linearni izomorfizam $\cdot\big|_m C : \mathbb{C}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ i njegov inverz $\cdot\big|_m C^{-1} : \mathbb{C}^{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}^{\mathcal{D}}$. Napokon, definiramo reprezentaciju (ρ_m, R_m) grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ zahtjevom da prikladna restrikcija operatora $\cdot\big|_m C^{-1}$ bude unitarna ekvivalencija $H_m \to R_m$.

Lema 2.16. *Vrijedi*

$$R_m = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D}) : \int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2 \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv < \infty \right\}$$

(pišemo $w = u + iv$ sa $u, v \in \mathbb{R}$). Skalarni produkt u R_m dan je formulom

$$\langle f_1,\, f_2 \rangle_{R_m} = 4 \int_{\mathcal{D}} f_1(w) \overline{f_2(w)} \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv, \qquad f_1, f_2 \in R_m.$$

Dokaz. Zamjenom varijabli $z = g_{C^{-1}}.w$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H_m}^2 &= \int_{\mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left| f\left(g_{C^{-1}}.w\right)\right|^2 \Im\left(g_{C^{-1}}.w\right)^{m-2} \left| \frac{\partial}{\partial z}\bigg|_{z=w} g_{C^{-1}}.z \right|^2 du\, dv \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left| \left(f\Big|_m C^{-1} \right)(w) \left(\sqrt{1-w}\right)^{2m} \right|^2 \left(\frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} \right)^{m-2} \left| \frac{2i}{(1-w)^2} \right|^2 du\, dv \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left| \left(f\Big|_m C^{-1} \right)(w) \right|^2 \cdot 4 \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv, \qquad f \in H_m.
\end{aligned}$$

Tvrdnje slijede. $\square$

Lako se vidi i da je

$$\rho_m(\sigma) f = f\Big|_m \left(\sigma^C\right)^{-1}, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,\ f \in R_m. \tag{2.14}$$

Istražimo K-konačnu strukturu reprezentacije ρ_m. Za sve $t \in \mathbb{R}$ i $f \in R_m$ imamo

$$\rho_m(\kappa_t) f = f\Big|_m \left(\kappa_t^C\right)^{-1} = f\Big|_m \left(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, e^{-i\frac{t}{2}} \right) = f(e^{2it} \cdot\,)\, e^{imt}.$$

Posebno za svaki $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ funkcija $p_n \in R_m$ zadana formulom

$$p_n(w) := w^n, \qquad w \in \mathcal{D}, \tag{2.15}$$

pripada χ_{-m-2n}-izotipičnoj komponenti reprezentacije ρ_m.

Integriranjem u polarnim koordinatama dokaže se:

Lema 2.17. *Neka su $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ međusobno različiti. Tada za svaki $R \in]0, 1]$ vrijedi*

$$\int_{|w|<R} p_k(w)\overline{p_l(w)} \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv = 0.$$

Lema 2.18. *Familija $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ je ortogonalna baza Hilbertova prostora R_m.*

Dokaz. Lema 2.17 dokazuje da za međusobno različite $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi

$$\langle p_k,\, p_l\rangle_{R_m} = 0. \tag{2.16}$$

Preostaje dokazati da je linearna ljuska familije $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gusta u R_m. Dovoljno je dokazati da je Taylorov razvoj oko 0 proizvoljne funkcije $f \in R_m$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n, \qquad \text{gdje je } a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

konvergentan u R_m. Kako je R_m potpun, dovoljno je dokazati da je niz parcijalnih suma $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n p_n\right)_{N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ Cauchyjev u R_m, što slijedi iz ocjene, za sve $N, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sa $N \leq M$,

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} a_n p_n - \sum_{n=0}^{M} a_n p_n\right\|_{R_m}^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} a_n p_n\right\|_{R_m}^2 \overset{(2.16)}{=} \sum_{n=N+1}^{M} \|a_n p_n\|_{R_m}^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|a_n p_n\|_{R_m}^2$$

čim dokažemo da je $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n p_n\|_{R_m}^2 < \infty$. Za svaki $R \in]0, 1[$ imamo

$$\begin{aligned}
&\int_{|w|\leq R} |f(w)|^2 \cdot 4\left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv \\
&\quad = \int_{|w|\leq R} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(w)\right) \overline{\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l p_l(w)\right)} \cdot 4\left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|w|\leq R} |a_n p_n(w)|^2 \cdot 4\left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

pri čemu se zadnja jednakost dobiva zamjenom poretka dvostruke sume i integrala i primjenom Leme 2.17; pritom je zamjena poretka dvostruke sume i integrala opravdana jer red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n$ konvergira normalno na $\{w \in \mathbb{C} : |w| \leq R\}$. Puštanjem $\lim\limits_{R\nearrow 1}$ na jednakost (2.17) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n p_n\|_{R_m}^2 = \|f\|_{R_m}^2 < \infty.$$

Time je dokaz završen. □

Dakle, ρ_m se kao reprezentacija grupe K rastavlja u ortogonalnu sumu $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \chi_{-m-2n}$ i pritom je

$$(R_m)_{\chi_{-m-2n}} = \mathbb{C}p_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Po Korolaru 2.6.(ii) slijedi:

Lema 2.19. *Neka je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je reprezentacija ρ_m unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D^-_{-m}}$. Za svaki je $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ χ_{-m-2n}-izotipična komponenta od ρ_m razapeta funkcijom p_n.*

Prenesemo li ovaj rezultat na H_m posredstvom unitarne ekvivalencije dane restrikcijom operatora $\cdot\big|_m C$, dobivamo sljedeću lemu.

Lema 2.20. *Neka je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je reprezentacija π_m unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D^-_{-m}}$. Za svaki je $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ χ_{-m-2n}-izotipična komponenta od π_m razapeta funkcijom*

$$f_{n,m} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \qquad f_{n,m}(z) := (2i)^m \frac{(z-i)^n}{(z+i)^{m+n}}. \tag{2.18}$$

Nadalje, na Hilbertovu prostoru

$$\overline{H_m} := \left\{ \overline{f} : f \in H_m \right\}$$

sa skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2 \rangle_{\overline{H_m}} := \int_{\mathcal{H}} f_1(z) \overline{f_2(z)} \Im(z)^m \, dv_{\mathcal{H}}(z), \qquad f_1, f_2 \in \overline{H_m},$$

definiramo unitarnu reprezentaciju $\overline{\pi_m}$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ formulom

$$\overline{\pi_m}(\sigma)\overline{f} := \overline{\pi_m(\sigma) f}, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,\ f \in H_m.$$

Iz Leme 2.20 lako slijedi da je $\left\{ \overline{f_{n,m}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ortogonalna baza prostora $\overline{H_m}$ i da je

$$\overline{\pi_m}(\kappa) \overline{f_{n,m}} = \chi_{m+2n}(\kappa) \overline{f_{n,m}}, \qquad \kappa \in K,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Po Korolaru 2.6.(i) slijedi:

Lema 2.21. *Neka je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je reprezentacija $\overline{\pi_m}$ unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D^+_m}$. Za svaki je $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ χ_{m+2n}-izotipična komponenta od $\overline{\pi_m}$ razapeta funkcijom $\overline{f_{n,m}}$.*

Analogno, na Hilbertovu prostoru

$$\overline{R_m} := \left\{ \overline{f} : f \in R_m \right\}$$

sa skalarnim produktom

$$\langle f_1,\, f_2 \rangle_{\overline{R_m}} := 4 \int_{\mathcal{D}} f_1(w) \overline{f_2(w)} \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv, \qquad f_1, f_2 \in \overline{R_m},$$

definiramo unitarnu reprezentaciju $\overline{\rho_m}$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ formulom

$$\overline{\rho_m}(\sigma)\overline{f} := \overline{\rho_m(\sigma) f}, \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,\ f \in R_m.$$

Iz Leme 2.19 kao gore slijedi:

Lema 2.22. *Neka je* $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada je reprezentacija* $\overline{\rho_m}$ *unitarno ekvivalentna reprezentaciji* $\pi_{D_m^+}$. *Za svaki je* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ χ_{m+2n}*-izotipična komponenta od* $\overline{\rho_m}$ *razapeta funkcijom* $\overline{p_n}$.

Poglavlje 3

Modularne forme polucijele težine

U ovom poglavlju izlažemo osnove teorije modularnih formi polucijele težine:

- Potpoglavlje 3.1 okuplja niz standardnih rezultata o klasičnom liftu funkcije $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ do funkcije $F_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$.

- U potpoglavlju 3.2 definiramo prostore $M_m(\Gamma, \chi)$ modularnih formi i $S_m(\Gamma, \chi)$ kusp-formi težine $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, gdje su Γ proizvoljna diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda.

- U potpoglavlju 3.3 dokazujemo niz korisnih karakterizacija uvjeta rasta iz definicije modularnih formi i kusp-formi polucijele težine.

- U potpoglavlju 3.4 uvodimo Peterssonov skalarni produkt na prostoru $S_m(\Gamma, \chi)$.

- U potpoglavlju 3.5 uspostavljamo unitarni izomorfizam između prostora $S_m(\Gamma, 1)$ i prostora kuspidalnih automorfnih formi težine m za Γ.

- U potpoglavlju 3.6 standardno definirane prostore $M_m(N, \psi)$ odnosno $S_m(N, \psi)$ (vidi npr. [57]), gdje su $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i ψ paran Dirichletov karakter modulo N, prepoznajemo kao prostore $M_m(\Gamma, \chi)$ odnosno $S_m(\Gamma, \chi)$ za prikladne Γ i χ.

- U potpoglavlju 3.7 za svaki prost broj p uvodimo standardno definiran Heckeov operator T_{p^2} na prostoru $S_m(N, \chi)$ i dokazujemo da je, ako $p \nmid N$, operator $\overline{\chi(p)}\, T_{p^2}$ hermitski.

3.1 Dizanje funkcija na $\mathcal{H}$ do funkcija na metaplektičkoj grupi

Neka je $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definiramo desno djelovanje grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ na skup $\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ svih funkcija $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ formulom

$$\left(f\Big|_m \sigma\right)(z) := f(\sigma.z)\,\eta_\sigma(z)^{-2m}, \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}},\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,\ z \in \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Primjerice,

$$\left(f\Big|_m n_x\right)(z) = f(z+x), \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}},\ x \in \mathbb{R},\ z \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Nadalje, za svaki je $\delta \in Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$

$$f\Big|_m \delta = \chi_m(\delta) f, \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}}, \tag{3.3}$$

naime $\delta = \kappa_{l\pi}$ za neki $l \in \mathbb{Z}$ pa δ na $\mathcal{H}$ djeluje trivijalno i vrijedi

$$\eta_\delta(z)^{-2m} = \left(e^{i\frac{l\pi}{2}}\right)^{-2m} = \chi_m(\kappa_{l\pi}) = \chi_m(\delta), \qquad z \in \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Definiramo i klasični lift funkcije $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ do funkcije $F_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$,

$$F_f(\sigma) := \left(f\Big|_m \sigma\right)(i) = f(\sigma.i)\,\eta_\sigma(i)^{-2m}, \tag{3.5}$$

tj., u Iwasawinim koordinatama,

$$F_f(n_x a_y \kappa_t) = f(x+iy)\, y^{\frac{m}{2}}\, e^{-imt}, \qquad x,t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{3.6}$$

Lema 3.1. *Preslikavanje $f \mapsto F_f$ je bijekcija*

$$\mathbb{C}^{\mathcal{H}} \to \left(\mathbb{C}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right)_{\chi_m} := \left\{F : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C} : F \textit{ se transformira zdesna kao } \chi_m\right\}.$$

Dokaz. Iz (3.6) je očito da se za svaku $f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ funkcija $F_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$ transformira zdesna kao χ_m, dakle preslikavanje iz leme je dobro definirano. Lako se provjeri da je preslikavanje koje funkciji $F \in \left(\mathbb{C}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right)_{\chi_m}$ pridružuje funkciju $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) := F(n_x a_y)\, y^{-\frac{m}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_{>0},$$

njemu inverzno, dakle radi se o bijekciji. □

Lema 3.2. *Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$. Tada je $F_f \in C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i vrijedi:*

(i) $\mathcal{C}F_f = m\left(\frac{m}{2} - 1\right) F_f$.

(ii) *Za svaki* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *vrijedi*

$$\left(\left(n^{+}\right)^{k} F_f\right)(n_x a_y \kappa_t) = \chi_{m+2k}(\kappa_t) y^{\frac{m}{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (2iy)^{l} \left(\prod_{r=l+1}^{k} (m-1+r)\right) f^{(l)}(x+iy) \tag{3.7}$$

za sve $x, t \in \mathbb{R}$ *i* $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dokaz. Iz (3.6) je očito da je $F_f \in C^{\infty}\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)$.

Dokažimo (i). Za sve $x, t \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}F_f)(n_x a_y \kappa_t) &\overset{(1.31)}{\underset{(3.6)}{=}} \left(2y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2y\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t}\right)\left(f(x+iy) y^{\frac{m}{2}} e^{-imt}\right) \\
&= 2y^{\frac{m}{2}+2} e^{-imt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x+iy) \\
&\quad -2imy^{\frac{m}{2}+1} e^{-imt}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy) \\
&\quad +m\left(\frac{m}{2}-1\right) y^{\frac{m}{2}} e^{-imt} f(x+iy).
\end{aligned}$$

Kako je f holomorfna, vrijedi $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$ pa ostaje samo

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}F_f)(n_x a_y \kappa_t) &= m\left(\frac{m}{2}-1\right) y^{\frac{m}{2}} e^{-imt} f(x+iy) \\
&\overset{(3.6)}{=} m\left(\frac{m}{2}-1\right) F_f(n_x a_y \kappa_t),
\end{aligned}$$

što dokazuje (i).

Tvrdnju (ii) ćemo dokazati matematičkom indukcijom po $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. U slučaju kad je $k = 0$ jednakost (3.7) je samo (3.6). Pretpostavimo sada da (3.7) vrijedi za neki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\left(\left(n^{+}\right)^{k+1} F_f\right)(n_x a_y \kappa_t) &\overset{(1.29)}{=} \left(iye^{-2it}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}e^{-2it}\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&\quad \left(e^{-i(m+2k)t} y^{\frac{m}{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (2iy)^{l} \left(\prod_{r=l+1}^{k} (m-1+r)\right) f^{(l)}(x+iy)\right).
\end{aligned}$$

Koristeći da je $\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f^{(l)} = 2f^{(l+1)}$ za sve $l \in \{0, 1, \ldots, k\}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(\left(n^{+}\right)^{k+1} F_f\right)(n_x a_y \kappa_t) &= e^{-i(m+2k+2)t} y^{\frac{m}{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (2iy)^{l+1} \left(\prod_{r=l+1}^{k} (m-1+r)\right) f^{(l+1)}(x+iy) \\
&\quad + e^{-i(m+2k+2)t} y^{\frac{m}{2}} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (2iy)^{l} \left(\prod_{r=l+1}^{k} (m-1+r)\right) (m+k+l) f^{(l)}(x+iy).
\end{aligned}$$

Iteriranjem u prvoj sumi na desnoj strani po $l+1$ umjesto po l i koristeći oznaku $\binom{k}{-1} := 0$, ovo možemo zapisati u obliku

$$\left(\left(n^+\right)^{k+1} F_f\right)(n_x a_y \kappa_t) = e^{-i(m+2k+2)t} y^{\frac{m}{2}}$$
$$\cdot \sum_{l=0}^{k+1} \left(\binom{k}{l-1} \frac{m+l-1}{m+k} + \binom{k}{l} \frac{m+k+l}{m+k} \right) (2iy)^l \left(\prod_{r=l+1}^{k+1} (m-1+r) \right) f^{(l)}(x+iy).$$

Kako je za svaki $l \in \{0, 1, \dots, k+1\}$

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{l-1} \frac{m+l-1}{m+k} + \binom{k}{l} \frac{m+k+l}{m+k} \\
&\quad = \binom{k}{l-1} + \binom{k}{l} + \frac{1}{m+k} \left(\binom{k}{l} l - \binom{k}{l-1} (k-l+1) \right) \\
&\quad = \binom{k+1}{l} + \frac{1}{m+k} \left(\binom{k}{l} l - \binom{k}{l} l \right) \\
&\quad = \binom{k+1}{l},
\end{aligned}$$

vidimo da (3.7) vrijedi za $k+1$. Po principu matematičke indukcije slijedi (ii). □

Lema 3.3. *Neka su $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $c \in \mathbb{C}$. Tada je ekvivalentno:*

(i) $f\big|_m \gamma = cf$

(ii) $F_f(\gamma\,\cdot\,) = cF_f$.

Dokaz. S obzirom da je $\mathcal{H} = \{\sigma.i : \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\}$, jednakost (i) možemo ekvivalentno zapisati u obliku

$$\left(f\big|_m \gamma\right)(\sigma.i) = cf(\sigma.i), \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,$$

odnosno, množenjem sa $\eta_\sigma(i)^{-2m}$, u obliku

$$\left(f\big|_m \gamma\sigma\right)(i) = c\left(f\big|_m \sigma\right)(i), \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,$$

što je očito ekvivalentno s (ii). □

Lema 3.4. *Neka su Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter i $p \in \mathbb{R}_{>0}$. Neka je $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija takva da je*

$$f\big|_m \gamma = \chi(\gamma) f, \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{3.8}$$

Tada vrijedi:

(i) $F_f(\gamma\,\cdot\,) = \chi(\gamma) F_f, \quad \gamma \in \Gamma$.

(ii) $\left|f(\gamma.z)\Im(\gamma.z)^{\frac{m}{2}}\right| = \left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|, \quad \gamma \in \Gamma,\ z \in \mathcal{H}$.

(iii) $\int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_f|^p \, d\mu_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \varepsilon_\Gamma^{-1} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z)$.

Dokaz. (i) Slijedi iz Leme 3.3.

(ii) Imamo

$$\left| f(\gamma.z)\Im(\gamma.z)^{\frac{m}{2}} \right| \overset{(1.9)}{=} \left| \left(f\Big|_m \gamma \right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \overset{(3.8)}{=} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|, \qquad \gamma \in \Gamma, \ z \in \mathcal{H}.$$

(iii) Slijedi iz (1.55) i (3.6). □

Izdvojimo kao korolar slučaj kad je $\Gamma = \left\{ 1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \right\}$.

Korolar 3.5. *Neka su $p \in \mathbb{R}_{>0}$ i $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija. Tada je*

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_f|^p \, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \int_{\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p \, dv_{\mathcal{H}}(z).$$

3.2 Definicija modularnih formi polucijele težine

Neka je Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i neka je $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lema 3.6. *Neka su $x \in \mathbb{P}_\Gamma$, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$ i $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da vrijedi* (1.39). *Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi*

$$f\Big|_m \gamma = f, \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{3.9}$$

Tada $f\Big|_m \sigma \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ ima Fourierov razvoj oblika

$$\left(f\Big|_m \sigma \right)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\pi i n \frac{z}{2h}}, \qquad z \in \mathcal{H}, \tag{3.10}$$

za neki $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$. Pritom red (3.10) *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.*

Fourierov razvoj (3.10) zovemo **Fourierovim razvojem funkcije f u kuspu** x (s obzirom na σ).

Dokaz Leme 3.6. Iz (3.9) slijedi

$$f\Big|_m \sigma\Big|_m \delta = f\Big|_m \sigma, \qquad \delta \in \sigma^{-1}\Gamma\sigma.$$

Uvrštavanjem $\delta \in \sigma^{-1}\Gamma_x\sigma \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) n_h$ u ovu jednakost vidimo, koristeći (3.2) i (3.3), da je

$$\left| \left(f\Big|_m \sigma \right)(z+h) \right| = \left| \left(f\Big|_m \sigma \right)(z) \right|, \qquad z \in \mathcal{H}, \tag{3.11}$$

a uvrštavanjem njegove četvrte potencije n_{4h} da je

$$\left(f\Big|_m \sigma \right)(z+4h) = \left(f\Big|_m \sigma \right)(z), \qquad z \in \mathcal{H}, \tag{3.12}$$

dakle $f\Big|_m \sigma \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ je $4h$-periodična pa je dobro definirana funkcija $\left(f\Big|_m \sigma\right)_{\mathcal{D}^\times} \in \mathrm{Hol}\left(\mathcal{D}^\times\right)$ zahtjevom

$$\left(f\Big|_m \sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}\left(e^{\pi i \frac{z}{2h}}\right) = \left(f\Big|_m \sigma\right)(z), \qquad z \in \mathcal{H}.$$

Laurentov razvoj funkcije $\left(f\Big|_m \sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}$ oko 0,

$$\left(f\Big|_m \sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n, \qquad q \in \mathcal{D}^\times, \tag{3.13}$$

supstitucijom $q = e^{\pi i \frac{z}{2h}}$ prelazi u Fourierov razvoj funkcije $f\Big|_m \sigma$:

$$\left(f\Big|_m \sigma\right)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\pi i n \frac{z}{2h}}, \qquad z \in \mathcal{H}. \tag{3.14}$$

S obzirom da Laurentov red (3.13) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{D}^\times$, red (3.14) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$. □

Funkcija $f\Big|_m \sigma$, pa onda i Fourierov razvoj funkcije f u $x \in \mathbb{P}_\Gamma$, ovise o izboru elementa $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takvog da je $\sigma.\infty = x$. Međutim, vrijedi:

Lema 3.7. *Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi (3.9) i neka je $x \in \mathbb{P}_\Gamma$. Neka su $\sigma, \sigma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takvi da je $\sigma.\infty = \sigma'.\infty = x$. Neka je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\pi i n \frac{z}{2h}}$ Fourierov razvoj funkcije f u kuspu x s obzirom na σ, a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{\pi i n \frac{z}{2h'}}$ s obzirom na σ'. Tada postoji $C \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je*

$$|b_n| = C\,|a_n|\,, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Dokaz. Imamo $\sigma^{-1}\sigma'.\infty = \infty$ pa je

$$\sigma^{-1}\sigma' = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ & a^{-1}\end{pmatrix}, \omega a^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{3.15}$$

za neke $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ i $\omega \in \{\pm 1\}$. Nadalje, raspis

$$\begin{aligned} Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_{h'}\rangle &\overset{(1.39)}{=} Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\sigma'^{-1}\Gamma_x\sigma' \\ &= Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\left(\sigma^{-1}\sigma'\right)^{-1}\sigma^{-1}\Gamma_x\sigma\left(\sigma^{-1}\sigma'\right) \\ &\underset{(3.15)}{\overset{(1.39)}{=}} Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_{a^{-2}h}\rangle \end{aligned}$$

pokazuje da je

$$h' = a^{-2}h. \tag{3.16}$$

Sad imamo

$$\begin{aligned}\left(f\Big|_m\sigma'\right)(z) &\overset{(3.15)}{=} \left(f\Big|_m\sigma\right)\left(a^2z+ab\right)\omega^{-2m}a^m\\ &= \omega^{-2m}a^m\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{\pi in\frac{a^2z+ab}{2h}}\\ &\overset{(3.16)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\omega^{-2m}e^{\pi in\frac{ab}{2h}}a^ma_n\right)e^{\pi in\frac{z}{2h'}}, \qquad z\in\mathcal{H},\end{aligned}$$

odakle zbog jedinstvenosti Laurentova razvoja funkcije $\left(f\Big|_m\sigma'\right)_{\mathcal{D}^\times}$ oko 0 slijedi

$$b_n = \omega^{-2m}e^{\pi in\frac{ab}{2h}}a^ma_n, \qquad n\in\mathbb{Z},$$

dakle

$$|b_n| = |a^m|\,|a_n|\,, \qquad n\in\mathbb{Z}. \qquad \square$$

Definicija 3.8. *Neka je $f\in\mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi* (3.9) *i neka je $x\in\mathbb{P}_\Gamma$. Neka je $\sigma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$ i neka je $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{\pi in\frac{z}{2h}}$ Fourierov razvoj funkcije f u kuspu x s obzirom na σ.*

- *Kažemo da je f **meromorfna u** x ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*
  (a) *Funkcija $\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}$ u 0 ima pol ili uklonjiv singularitet.*
  (b) $\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty\\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}}\left|\left(f\Big|_m\sigma\right)(z)\right| = \lim_{q\to0}\left|\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}(q)\right| \in \mathbb{R}_{\geq0}\cup\{+\infty\}$.
  (c) *Postoji $n_0\in\mathbb{Z}$ takav da je $a_n = 0$ za sve $n\in\mathbb{Z}_{<n_0}$.*

- *Kažemo da je f **holomorfna u** x ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*
  (a) *Funkcija $\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}$ u 0 ima uklonjiv singularitet.*
  (b) *Postoji* $\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty\\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}}\left(f\Big|_m\sigma\right)(z) = \lim_{q\to0}\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}(q)\in\mathbb{C}$.
  (c) $a_n = 0$ *za sve* $n\in\mathbb{Z}_{<0}$.

- *Kažemo da f **iščezava u** x ako ima sljedeća ekvivalentna svojstva:*
  (a) *Funkcija $\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}$ iščezava u 0.*
  (b) $\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty\\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}}\left(f\Big|_m\sigma\right)(z) = \lim_{q\to0}\left(f\Big|_m\sigma\right)_{\mathcal{D}^\times}(q) = 0$.
  (c) $a_n = 0$ *za sve* $n\in\mathbb{Z}_{\leq0}$.

Lema 3.7 pokazuje da ova definicija ne ovisi o izboru elementa σ. Štoviše, vrijedi:

Lema 3.9. *Neka je $f\in\mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi* (3.9). *Ako je f meromorfna / holomorfna / iščezava u nekom $x\in\mathbb{P}_\Gamma$, tada ima isto svojstvo i u svakom $x'\in\Gamma.x$.*

Dokaz. Neka je $\gamma \in \Gamma$ i neka je $x' = \gamma.x$. Ako je $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$, tada je $(\gamma\sigma).\infty = x'$ pa iz

$$f\Big|_m \gamma\sigma = f\Big|_m \gamma\Big|_m \sigma \overset{(3.9)}{=} f\Big|_m \sigma$$

slijedi tvrdnja. □

Definicija 3.10. *Funkciju $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ koja zadovoljava (3.9) i holomorfna je u svakom $x \in \mathbb{P}_\Gamma$ zovemo **modularnom formom za** Γ **težine** m. Ako f uz to iščezava u svakom $x \in \mathbb{P}_\Gamma$, zovemo je **kusp-formom za** Γ **težine** m. Prostor modularnih formi za Γ težine m označavamo sa $M_m(\Gamma)$, a prostor kusp-formi za Γ težine m sa $S_m(\Gamma)$.*

Definirajmo i modularne forme polucijele težine s karakterom:

Definicija 3.11. *Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter grupe Γ konačnog reda. Funkciju $f \in M_m(\ker\chi)$ koja zadovoljava*

$$f\Big|_m \gamma = \chi(\gamma)\, f, \qquad \gamma \in \Gamma, \tag{3.17}$$

*zovemo **modularnom formom za** Γ **težine** m **s karakterom** χ. Ako je dodatno $f \in S_m(\ker\chi)$, zovemo je **kusp-formom za** Γ **težine** m **s karakterom** χ. Prostor svih modularnih formi za Γ težine m s karakterom χ označavamo sa $M_m(\Gamma,\chi)$, a prostor svih kusp-formi za Γ težine m s karakterom χ označavamo sa $S_m(\Gamma,\chi)$.*

U gornjim bi se definicijama mogle dopustiti i težine $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, čime bismo zapravo definirali klasične modularne forme cijele težine za grupu $P(\Gamma)$. Međutim, korištenje dvolisnog natkrivača grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ nepotrebno komplicira njihovu tradicionalnu definiciju pa smo odlučili propustiti tu mogućnost.

Korisno je primijetiti:

Lema 3.12. *Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. Pretpostavimo da je*

$$\chi\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \neq \chi_m\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}. \tag{3.18}$$

Tada je $S_m(\Gamma,\chi) = 0$.

Dokaz. Slijedi iz jednakosti

$$\chi(\gamma)f \overset{(3.17)}{=} f\Big|_m \gamma \overset{(3.3)}{=} \chi_m(\gamma)f, \qquad \gamma \in \Gamma \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right),\ f \in S_m(\Gamma,\chi).$$ □

3.3 Karakterizacije uvjeta rasta

Sljedeća je lema proširena polucijelotežinska varijanta leme [35, Lema 2-1].

Lema 3.13. *Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$. Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ h-periodična i neka je*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H},$$

njen Fourierov razvoj. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(a) *$a_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.*

(b) *Za sve $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ i $m \in \mathbb{R}$,*

$$\sup_{\Im(z)\geq\varepsilon} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| < \infty.$$

(c) *Postoje $\varepsilon, m \in \mathbb{R}_{>0}$ takvi da je*

$$\sup_{\Im(z)\geq\varepsilon} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| < \infty.$$

(d) *Za sve $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $m \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}_{>0}$,*

$$\int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\mathcal{H}}(z) < \infty.$$

(e) *Postoje $\varepsilon, m \in \mathbb{R}_{>0}$ i $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ takvi da je $mp \geq 2$ i*

$$\int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\mathcal{H}}(z) < \infty.$$

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Pretpostavimo da vrijedi (a). Tada za sve $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ i $m \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} \sup_{\Im(z)\geq\varepsilon} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| &= \sup_{\Im(z)\geq\varepsilon} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i (n-1)\frac{z}{h}} \right| e^{-2\pi\frac{\Im(z)}{h}} \Im(z)^{\frac{m}{2}} \\ &\leq \left(\sup_{|q|\leq e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1} \right| \right) \left(\sup_{y\in[\varepsilon,\infty[} e^{-2\pi\frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}} \right) < \infty. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) i (d) $\Rightarrow$ (e): Očito.

(b) $\Rightarrow$ (d) i (c) $\Rightarrow$ (e): Očito s obzirom da je $v_{\mathcal{H}}([0,h]\times[\varepsilon,\infty[) < \infty$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Pretpostavimo da vrijedi (e). Neka je $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Neka je $q \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ takav da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Kako je za sve $y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$a_n = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+iy) e^{-2\pi i n \frac{x+iy}{h}}\, dx,$$

imamo

$$\begin{aligned}|a_n|\, y^{\frac{m}{2}-\frac{2}{p}} e^{-2\pi n \frac{y}{h}} &\le \frac{1}{h}\int_0^h \left| f(x+iy) y^{\frac{m}{2}} \right| y^{-\frac{2}{p}}\, dx \\ &\le \frac{1}{h}\left(\int_0^h \left| f(x+iy) y^{\frac{m}{2}} \right|^p y^{-2}\, dx\right)^{\frac{1}{p}} h^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

primjenom Hölderove nejednakosti, odakle slijedi

$$|a_n|^p\, y^{\frac{mp}{2}-2} e^{-2\pi n p \frac{y}{h}} \le \frac{1}{h}\int_0^h \left| f(x+iy) y^{\frac{m}{2}} \right|^p y^{-2}\, dx, \qquad y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Integriranjem obiju strana po $y \in [\varepsilon, \infty[$ dobivamo

$$\int_\varepsilon^\infty |a_n|^p\, y^{\frac{mp}{2}-2} e^{-2\pi n p \frac{y}{h}}\, dy \le \frac{1}{h}\int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\mathcal{H}}(z) \overset{\text{(e)}}{<} \infty.$$

Kad bi vrijedilo $a_n \neq 0$, lijeva bi strana bila jednaka $+\infty$ s obzirom da je $n \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ i $\frac{mp}{2} - 2 \ge -1$. Dakle, $a_n = 0$. □

Dokaz implikacije (e) $\Rightarrow$ (a) u Lemi 3.13 dokazuje i sljedeću lemu.

Lema 3.14. *Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$. Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ h-periodična i neka je*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H},$$

njen Fourierov razvoj. Ako postoje $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $m \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$ takvi da je

$$\int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\mathcal{H}}(z) < \infty,$$

tada je $a_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{<0}$.

Sljedeća propozicija uključuje polucijelotežinske varijante teorema [28, Teoremi 2.1.5 i 6.3.1].

Propozicija 3.15. *Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi (3.17). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *$f \in S_m(\Gamma, \chi)$.*

(b) *$\sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| < \infty$.*

(c) *$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) < \infty$ za sve $p \in \mathbb{R}_{>0}$.*

(d) *$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|^p dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) < \infty$ za neki $p \in \mathbb{R}_{\ge \max\left\{\frac{2}{m},1\right\}}$.*

(e) F_f *je ograničena.*

(f) $\int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_f|^p \, d\mu_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} < \infty$ *za sve* $p \in \mathbb{R}_{>0}$.

(g) $|F_f| \in L^p\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ *za neki* $p \in \mathbb{R}_{\geq \max\left\{\frac{2}{m},1\right\}}$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Neka je $f \in S_m(\Gamma,\chi)$. Po Lemi 3.4.(ii) dobro je definirana funkcija $f_\circ : \Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^* \to \mathbb{C}$,

$$f_\circ(z) := \begin{cases} \left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|, & \text{ako je } z \in \mathcal{H}, \\ 0, & \text{ako je } z \in \mathbb{P}_\Gamma. \end{cases}$$

Dokazat ćemo da je $f_\circ \in C\left(\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^*\right)$, što povlači (b) s obzirom da je $\Gamma\backslash\mathcal{H}_\Gamma^*$ kompaktan.

$f_\circ$ je očito neprekidna na $\mathcal{H}$. Dokažimo da je neprekidna u proizvoljnom $x \in \mathbb{P}_\Gamma$. Neka je $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$ i neka je $\left(f\big|_m \sigma\right)(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\pi i n \frac{z}{2h}}$ Fourierov razvoj od f u x s obzirom na σ. Kako je $\{\sigma.\mathcal{U}_l^*\}_{l\in\mathbb{R}_{>0}}$ baza okolina točke x u $\mathcal{H}_\Gamma^*$ (vidi (1.40)), dovoljno je pokazati da je

$$\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} f_\circ(\sigma.z) = 0.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} f_\circ(\sigma.z) &\overset{(1.9)}{=} \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} \left|\left(f\big|_m \sigma\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| \\ &= \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} \left|\sum_{n=1}^\infty a_n e^{\pi i (n-1)\frac{z}{2h}}\right| \Im(z)^{\frac{m}{2}} e^{-\pi\frac{\Im(z)}{2h}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

s obzirom da je

$$\lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} \left|\sum_{n=1}^\infty a_n e^{\pi i (n-1)\frac{z}{2h}}\right| = |a_1|.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Očito s obzirom da je $v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}) < \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Očito.

(d) $\Rightarrow$ (a): Pretpostavimo da vrijedi (d). Trebamo dokazati da f iščezava u svakom $x \in \mathbb{P}_\Gamma$. Neka su $x \in \mathbb{P}_\Gamma$ i $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma.\infty = x$. Neka su $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\sigma^{-1}(\ker\chi)_x\,\sigma = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_h\rangle,$$

i $h_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\sigma^{-1}\Gamma_x\sigma = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_{h_1}\rangle.$$

Iz (3.17) slijedi da je $f\big|_m \sigma \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ $4h$-periodična (vidi (3.12)). Dokazat ćemo da iščezava u ∞ primjenom implikacije (e) $\Rightarrow$ (a) Leme 3.13. Kako je $\left|f\big|_m\sigma\right|$ h_1-periodična (to slijedi iz (3.17) kao u dokazu (3.11)), da bismo dokazali da $f\big|_m\sigma$ zadovoljava uvjet (e) Leme 3.13, dovoljno je dokazati da je $\int_{[0,h_1[\times]h_1,\infty[}\left|\left(f\big|_m\sigma\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^p dv_{\mathcal{H}}(z)<\infty$. Imamo

$$\begin{aligned}\int_{[0,h_1[\times]h_1,\infty[}\left|\left(f\big|_m\sigma\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^p dv_{\mathcal{H}}(z) &\overset{(1.9)}{=} \int_{[0,h_1[\times]h_1,\infty[}\left|f(\sigma.z)\Im(\sigma.z)^{\frac{m}{2}}\right|^p dv_{\mathcal{H}}(z)\\ &= \int_{\sigma.([0,h_1[\times]h_1,\infty[)}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^p dv_{\mathcal{H}}(z)\\ &\leq \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^p dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z)\\ &\overset{(d)}{<} \infty.\end{aligned}$$

Nejednakost $\leq$ u ovom raspisu vrijedi jer su različite točke skupa $\sigma.([0,h_1[\times]h_1,\infty[)$ po [28, Korolar 1.7.5] međusobno Γ-neekvivalentne.

(b) $\Leftrightarrow$ (e): Jasno iz (3.6).

(c) $\Leftrightarrow$ (f), (d) $\Leftrightarrow$ (g): Slijedi iz Leme 3.4.(iii). $\square$

Korolar 3.16. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda i* $m\in\frac{3}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Neka je* $f\in\mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ *takva da vrijedi* (3.17). *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $f\in S_m(\Gamma,\chi)$.

(b) $\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}|F_f|^2\, d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}<\infty$.

Dokaz. Slijedi iz Propozicije 3.15.(a) $\Leftrightarrow$ (f) $\Leftrightarrow$ (g) s obzirom da je $m\geq 1$. $\square$

Sada možemo dokazati i standardnu polucijelotežinsku varijantu korolara [28, Korolar 2.1.6].

Lema 3.17. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda i* $m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Neka je* $f\in S_m(\Gamma,\chi)$. *Neka je*

$$\left(f\big|_m\sigma\right)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\pi i n\frac{z}{2h}},\qquad z\in\mathcal{H},$$

Fourierov razvoj od f *u* $x=\sigma.\infty\in\mathbb{P}_\Gamma$. *Tada je*

$$a_n=O\left(n^{\frac{m}{2}}\right).$$

Dokaz. Za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h \left(f\Big|_m \sigma \right)(x+iy) e^{-\pi i n \frac{x+iy}{2h}}\, dx \right| \\
&\le \frac{1}{h} \int_0^h \left| \left(f\Big|_m \sigma \right)(x+iy) y^{\frac{m}{2}} \right| dx\, e^{\pi n \frac{y}{2h}} y^{-\frac{m}{2}} \\
&\le \left(\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| \left(f\Big|_m \sigma \right)(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \right) e^{\pi n \frac{y}{2h}} y^{-\frac{m}{2}} \\
&\overset{(1.9)}{=} \left(\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f(\sigma.z) \Im(\sigma.z)^{\frac{m}{2}} \right| \right) e^{\pi n \frac{y}{2h}} y^{-\frac{m}{2}} \\
&= \left(\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \right) e^{\pi n \frac{y}{2h}} y^{-\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $y = \frac{1}{n}$ dobivamo

$$|a_n| \le \left(\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \right) e^{\frac{\pi}{2h}} n^{\frac{m}{2}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Kako po Propoziciji 3.15.(a)$\Rightarrow$(b) vrijedi $\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| < \infty$, tvrdnja slijedi. $\square$

Sljedeća ćemo dva rezultata trebati u dokazu Teorema 3.25. Analogno dokazu implikacija (g) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) Propozicije 3.15, primjenom Leme 3.14 dokaže se sljedeća propozicija:

Propozicija 3.18. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda i* $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\ge 0}$. *Neka je* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ *takva da vrijedi* (3.17). *Ako za neki* $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$ *vrijedi*

$$\int_{\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_f|^p \, d\mu_{\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} < \infty,$$

tada je $f \in M_m(\Gamma, \chi)$.

Sljedeća je lema motivirana diskusijom u [4, §7.2].

Lema 3.19. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\ge 0}$. *Neka su* $x \in \mathbb{P}_\Gamma$, $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *takav da je* $\sigma.\infty = x$ *i* $h \in \mathbb{R}_{>0}$ *takav da je* $Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \sigma^{-1} \Gamma_x \sigma = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \langle n_h \rangle$. *Neka su* $f \in M_m(\Gamma)$ *i* $\xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. *Tada je ekvivalentno:*

(a) f *iščezava u* x.

(b) $\displaystyle\int_{N/\langle n_{4h} \rangle} F_f(\sigma n \xi) \, d\mu_{N/\langle n_{4h} \rangle}(n) = 0.$

Ovdje je $\mu_{N/\langle n_{4h} \rangle}$ *normirana Haarova mjera na torusu* $N/\langle n_{4h} \rangle$, *dana formulom*

$$\int_{N/\langle n_{4h} \rangle} \phi \, d\mu_{N/\langle n_{4h} \rangle} = \int_0^1 \phi(n_{4ht}) \, dt, \qquad \phi \in C\left(N/\langle n_{4h} \rangle\right).$$

Dokaz. Da je funkcija $n \mapsto F_f(\sigma n \xi)$ $\langle n_{4h}\rangle$-invarijantna, pa je integral u (b) dobro definiran, jasno je iz raspisa

$$F_f(\sigma n_{4h} n\xi) = F_f\left(\left(\sigma n_{4h}\sigma^{-1}\right)\sigma n\xi\right) = F_f(\sigma n\xi), \qquad n \in N,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je $\sigma n_{4h}\sigma^{-1} \in \Gamma_x \subseteq \Gamma$, a F_f je po Lemi 3.3 slijeva Γ-invarijantna.

Nadalje, neka je

$$\left(f\big|_m \sigma\right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\pi i n \frac{z}{2h}}, \qquad z \in \mathcal{H},$$

Fourierov razvoj od f u kuspu x s obzirom na σ. Imamo

$$\begin{aligned}
\int_{N/\langle n_{4h}\rangle} F_f(\sigma n\xi)\, d\mu_{N/\langle n_{4h}\rangle}(n) &= \int_0^1 F_f(\sigma n_{4ht}\xi)\, dt \\
&\overset{(3.5)}{=} \int_0^1 \left(f\big|_m \sigma\right)(\xi.i + 4ht)\, dt\, \eta_\xi(i)^{-2m} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\pi i k\left(\frac{\xi.i}{2h}+2t\right)}\, dt\, \eta_\xi(i)^{-2m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\pi i k \frac{\xi.i}{2h}} \int_0^1 e^{2\pi i k t}\, dt\, \eta_\xi(i)^{-2m} \\
&= a_0\, \eta_\xi(i)^{-2m}.
\end{aligned}$$

Predzadnju jednakost opravdava Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji s obzirom da su parcijalne sume reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\pi i k\left(\frac{\xi.i}{2h}+2t\right)}$ za $t \in [0,1]$ apsolutno dominirane konstantom $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k e^{\pi i k \frac{\xi.i}{2h}}\right|$. Tvrdnja slijedi. $\square$

3.4 Peterssonov skalarni produkt kusp-formi

Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definiramo **Peterssonov skalarni produkt** na prostoru $S_m(\Gamma, \chi)$ formulom

$$\langle f_1,\, f_2\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} := \varepsilon_\Gamma^{-1} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\, \overline{f_2(z)}\, \Im(z)^m\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z), \qquad f_1, f_2 \in S_m(\Gamma,\chi), \tag{3.19}$$

gdje je ε_Γ definiran sa (1.53). Pripadnu normu na $S_m(\Gamma,\chi)$ označimo sa $\|\cdot\|_{S_m(\Gamma,\chi)}$.

Da bismo se uvjerili da je definicija Peterssonova skalarnog produkta dobra, tj. da je integral na desnoj strani u (3.19) definiran i konačan, dovoljno je primijetiti da je podintegralna funkcija Γ-invarijantna po (1.9) i (3.17) i da vrijedi ocjena

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left|f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\right| dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \leq \left(\sup_{z\in\mathcal{H}} \left|f_1(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right) \left(\sup_{z\in\mathcal{H}} \left|f_2(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right) v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}),$$

čija je desna strana konačna po Propoziciji 3.15.(a)⇒(b).

Lema 3.20. *Vrijedi*

$$\|f\|_{S_m(\Gamma,\chi)} = \|F_f\|_{L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}, \qquad f \in S_m(\Gamma, \chi). \tag{3.20}$$

Dokaz. Slijedi iz Leme 3.4.(iii). □

Za $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, označimo

$$\chi^\sigma := \chi\left(\sigma \cdot \sigma^{-1}\right) : \sigma^{-1}\Gamma\sigma \to \mathbb{C}^\times. \tag{3.21}$$

Lema 3.21. *Neka je $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Tada je preslikavanje*

$$f \mapsto f\Big|_m \sigma$$

izometrični izomorfizam $S_m(\Gamma,\chi) \to S_m\left(\sigma^{-1}\Gamma\sigma, \chi^\sigma\right)$.

Dokaz. Uvjerimo se da za proizvoljnu $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ vrijedi $f\big|_m \sigma \in S_m\left(\sigma^{-1}\Gamma\sigma, \chi^\sigma\right)$. Očito je $f\big|_m \sigma \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ i vrijedi

$$f\Big|_m \sigma\Big|_m \delta = f\Big|_m \sigma\delta\sigma^{-1}\Big|_m \sigma \overset{(3.17)}{=} \chi^\sigma(\delta)\, f\Big|_m \sigma, \qquad \delta \in \sigma^{-1}\Gamma\sigma.$$

Nadalje, neka je $x \in \mathbb{P}_{\sigma^{-1}\Gamma\sigma} = \sigma^{-1}.\mathbb{P}_\Gamma$ i neka je $\sigma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takav da je $\sigma'.\infty = x$. Tada je $\sigma\sigma'.\infty = \sigma.x \in \mathbb{P}_\Gamma$ pa je

$$0 = \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} \left(f\Big|_m \sigma\sigma'\right)(z) = \lim_{\substack{\Im(z)\to+\infty \\ \text{unif. po } \Re(z)\in\mathbb{R}}} \left(f\Big|_m \sigma\Big|_m \sigma'\right)(z),$$

dakle $f\big|_m \sigma$ iščezava u x. Prema tome, $f\big|_m \sigma \in S_m\left(\sigma^{-1}\Gamma\sigma, \chi^\sigma\right)$.

Dakle, preslikavanje iz leme je dobro definirano, a očito je i linearni izomorfizam. Preostaje dokazati da je izometrija. Odaberimo strogu fundamentalnu domenu F za Γ u $\mathcal{H}$. Kako je $\sigma^{-1}.F$ stroga fundamentalna domena za $\sigma^{-1}\Gamma\sigma$ u $\mathcal{H}$, imamo

$$\begin{aligned}
\left\|f\Big|_m \sigma\right\|^2_{S_m(\sigma^{-1}\Gamma\sigma,\chi^\sigma)} &= \varepsilon^{-1}_{\sigma^{-1}\Gamma\sigma} \int_{\sigma^{-1}.F} \left|\left(f\Big|_m \sigma\right)(z)\, \Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(1.9)}{=} \varepsilon_\Gamma^{-1} \int_{\sigma^{-1}.F} \left|f(\sigma.z)\, \Im(\sigma.z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \varepsilon_\Gamma^{-1} \int_F \left|f(z)\, \Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|^2 dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \|f\|^2_{S_m(\Gamma,\chi)}, \qquad\qquad f \in S_m(\Gamma,\chi),
\end{aligned}$$

dakle preslikavanje iz leme je izometrija. □

Lema 3.22. *Neka je $f \in S_m(\ker\chi)$. Tada je*

$$P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f := \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\, f\Big|_m \gamma \in S_m(\Gamma,\chi)$$

i za svaku $f_1 \in S_m(\Gamma,\chi)$ vrijedi

$$\Big\langle f_1,\, P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f\Big\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = \langle f_1,\, f\rangle_{S_m(\ker\chi)}\,. \tag{3.22}$$

Dokaz. Dokažimo da je $P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f \in S_m(\Gamma,\chi)$. Za svaki $\gamma' \in \Gamma$ imamo

$$\Big(P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f\Big)\Big|_m \gamma' = \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\, f\Big|_m \gamma\gamma' = \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \overline{\chi\left(\gamma\gamma'^{-1}\right)}\, f\Big|_m \gamma = \chi\left(\gamma'\right) P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f,$$

pri čemu je druga jednakost dobivena prijelazom (desnom translacijom za γ'^{-1}) na novi skup predstavnika desnih klasa iz $\ker\chi\backslash\Gamma$. Holomorfnost i iščezavanje u kuspovima za Γ $P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f$ nasljeđuje od funkcija $f\Big|_m \gamma \in S_m\left(\gamma^{-1}\left(\ker\chi\right)\gamma\right)$, $\gamma \in \ker\chi\backslash\Gamma$ (vidi Leme 3.21 i 1.48). Prema tome, $P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f \in S_m(\Gamma,\,\chi)$.

Preostaje dokazati da za svaku $f_1 \in S_m(\Gamma,\chi)$ vrijedi (3.22). Neka je F stroga fundamentalna domena za Γ u $\mathcal{H}$. Za svaku $f_1 \in S_m(\Gamma,\chi)$ imamo

$$\begin{aligned}
\Big\langle f_1,\, P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} f\Big\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} &= \varepsilon_\Gamma^{-1} \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \int_F f_1(z)\,\chi(\gamma)\, \overline{\Big(f\Big|_m\gamma\Big)(z)}\; \Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(3.17)}{=} \varepsilon_\Gamma^{-1} \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \int_F \Big(f_1\Big|_m\gamma\Big)(z)\, \overline{\Big(f\Big|_m\gamma\Big)(z)}\; \Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(1.9)}{=} \varepsilon_\Gamma^{-1} \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \int_F f_1(\gamma.z)\, \overline{f(\gamma.z)}\, \Im(\gamma.z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \varepsilon_\Gamma^{-1} \sum_{\gamma\in\ker\chi\backslash\Gamma} \int_{\gamma.F} f_1(z)\, \overline{f(z)}\, \Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \varepsilon_{\ker\chi}^{-1} \sum_{\gamma\in(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\ker\chi\backslash\Gamma} \int_{\gamma.F} f_1(z)\, \overline{f(z)}\, \Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Odaberimo potpun skup predstavnika $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ desnih klasa iz $(\Gamma\cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right))\ker\chi\backslash\Gamma$. Lako se vidi da su podskupovi neeliptičkih točaka za Γ u $\gamma_j.F$, $j\in\{1,\ldots,r\}$, u parovima disjunktni i da u uniji čine skup neeliptičkih točaka za Γ neke stroge fundamentalne domene za $\ker\chi$ u $\mathcal{H}$, pa je (3.23) zapravo

$$\varepsilon_{\ker\chi}^{-1} \int_{\ker\chi\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\, \overline{f(z)}\, \Im(z)^m\, dv_{\ker\chi\backslash\mathcal{H}}(z) = \langle f_1,\, f\rangle_{S_m(\ker\chi)}\,. \qquad \square$$

3.5 Kusp-forme kao automorfne forme na metaplektičkoj grupi

Definicija 3.23. *Neka su Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.* ***Kvadratno integrabilna automorfna forma težine*** m ***za*** Γ *jest funkcija $\varphi \in C^\infty\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ sa sljedećim dvama svojstvima:*

(A1) *φ se transformira zdesna kao χ_m.*

(A2) $\mathcal{C}\varphi = m\left(\frac{m}{2} - 1\right)\varphi$.

Kažemo da je φ ***kuspidalna automorfna forma težine*** m ***za*** Γ *ako ima i svojstvo*

(A3) *Ako su $x \in \mathbb{P}_\Gamma$ i $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takvi da je $\sigma.\infty = x$, tada vrijedi*

$$\int_{N/\langle n_{4h}\rangle} \varphi(\sigma n \xi)\, d\mu_{N/\langle n_{4h}\rangle}(n) = 0, \qquad \xi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,$$

gdje je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ definiran zahtjevom (1.39).

Prostor svih kvadratno integrabilnih automorfnih formi težine m za Γ sa skalarnim produktom naslijeđenim iz $L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ označavamo sa $\mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$, a njegov potprostor svih kuspidalnih automorfnih formi težine m za Γ sa $\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$.

Glavni je rezultat ovog potpoglavlja sljedeći teorem.

Teorem 3.24. *Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada pravilo*

$$f \mapsto F_f$$

definira izometrični izomorfizam $S_m(\Gamma) \to \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$.

Dokaz. Leme 3.1, 3.2.(i), 3.3 i 3.20 dokazuju da je $f \mapsto F_f$ dobro definirana izometrija $S_m(\Gamma) \to \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. Dokažimo njenu surjektivnost. Neka je $\varphi \in \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$, $\varphi \not\equiv 0$. Definiramo $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) := \varphi(n_x a_y) y^{-\frac{m}{2}}$. Očito je $f \in C^\infty(\mathcal{H})$ i $F_f = \varphi$. Preostaje dokazati da je $f \in S_m(\Gamma)$. Po Lemi 2.7 φ razapinje χ_m-izotipičnu komponentu zatvorene podreprezentacije od r_Γ unitarno ekvivalentne reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$. Posebno je $r_\Gamma\left(n^-\right)\varphi = 0$ po Propoziciji 2.2.(iv) pa je po Lemi 1.15 za sve $x, t \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(n^-\varphi\right)(n_x a_y \kappa_t) = \left(n^- F_f\right)(n_x a_y \kappa_t) \\ &\overset{(1.30)}{\underset{(3.6)}{=}} \left(-iye^{2it}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}e^{2it}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(f(x+iy)y^{\frac{m}{2}}e^{-imt}\right) \\ &= -iy^{\frac{m}{2}+1}e^{-i(m-2)t}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy), \end{aligned}$$

dakle $(\partial_x + i\partial_y) f = 0$ pa je f holomorfna. Nadalje, činjenica da je $\varphi \in C\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ po Lemi 3.3 povlači da f zadovoljava (3.9). Kako je uz to $\varphi \in L^2\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$, po Korolaru 3.16 slijedi da je $f \in S_m(\Gamma)$. □

Sljedeći je teorem polucijelotežinska varijanta leme [32, Lema 4-1]. Njegov je djelomičan dokaz (bez dokaza surjektivnosti) za standardno definirane kusp-forme polucijele težine za $\Gamma_1(N)$, gdje je $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$, dan u [10, §3.1].

Teorem 3.25. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada pravilo*

$$f \mapsto F_f$$

definira izometrični izomorfizam

$$S_m(\Gamma) \to \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m .$$

Dokaz. Leme 3.1, 3.2.(i), 3.3, 3.19 i 3.20 dokazuju da je $f \mapsto F_f$ dobro definirana izometrija $S_m(\Gamma) \to \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. Njena se surjektivnost može dokazati kao u dokazu Teorema 3.24, samo se u zadnjem koraku umjesto Korolara 3.16 primijene Propozicija 3.18 i Lema 3.19. □

Iz Teorema 3.24 i 3.25 slijedi:

Korolar 3.26. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada je*

$$\mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m = \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m .$$

Korolar 3.27. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. *Neka su* $m = \frac{1}{2}$ *i* $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ *ili* $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $\varphi \in \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. *Tada je* φ *ograničena.*

Dokaz. Po Teoremu 3.25 odnosno 3.24 vrijedi $\varphi = F_f$ za neku $f \in S_m(\Gamma)$ pa je φ ograničena po Propoziciji 3.15.(a)⇔(e). □

Kao u dokazu teorema [4, Teorem 8.5] vidi se da su prostori automorfnih formi iz Korolara 3.27 zatvoreni u $L^2\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ pa su po Korolaru 3.27 i po [4, Lema 8.3] konačnodimenzionalni. Po Teoremu 3.25 slijedi:

Korolar 3.28. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada je prostor* $S_m(\Gamma)$ *konačnodimezionalan.*

3.6 Klasični prostori modularnih formi polucijele težine

Definiramo automorfni faktor $J : \Gamma_0(4) \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$J(\gamma, z) := \frac{\Theta(\gamma.z)}{\Theta(z)},$$

gdje je $\Theta \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ dana formulom $\Theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z}$. Da bismo iskazali eksplicitnu formulu za J, trebamo sljedeće dvije definicije.

Definicija 3.29 (**Generalizirani Legendreov simbol**). *Neka je $c \in \mathbb{Z}$. Za $p \in \mathbb{P}_{>2}$ definiramo*

$$\left(\frac{c}{p}\right) := \begin{cases} 0, & \text{ako } p \mid c, \\ 1, & \text{ako } p \nmid c \text{ i } c \text{ je kvadratni ostatak modulo } p, \\ -1, & \text{ako } c \text{ nije kvadratni ostatak modulo } p. \end{cases}$$

Nadalje,

$$\left(\frac{c}{1}\right) := 1, \qquad \left(\frac{c}{-1}\right) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } c \geq 0, \\ -1, & \text{ako je } c < 0. \end{cases}$$

Napokon, definiramo generalizirani Legendreov simbol $\left(\frac{c}{d}\right)$ za proizvoljan $d \in 2\mathbb{Z}+1$ proširenjem gornjih definicija po multiplikativnosti u donjoj varijabli:

$$\left(\frac{c}{\prod_{l=1}^n p_l}\right) := \prod_{l=1}^n \left(\frac{c}{p_l}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},\ p_l \in \mathbb{P}_{>2} \cup \{\pm 1\}.$$

Definicija 3.30. *Definiramo funkciju $\varepsilon : 2\mathbb{Z}+1 \to \mathbb{C}$,*

$$\varepsilon_d := \varepsilon(d) := \sqrt{\left(\frac{-1}{d}\right)} = \sqrt{(-1)^{\frac{d-1}{2}}} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } d \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{ako je } d \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [21, III.4].

Teorem 3.31. *Vrijedi*

$$J(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} \sqrt{cz+d}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4),\ z \in \mathcal{H}.$$

Iz Teorema 3.31 lako slijedi da je za svaki $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$

$$\mathbf{\Gamma}_0(N) := \{(\gamma, J(\gamma, \cdot)) : \gamma \in \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(4)\}$$

diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Neka su $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$. Neka je χ paran Dirichletov karakter modulo N. χ možemo identificirati s karakterom grupe $\Gamma_0(N)$ danim sa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \chi(d)$ za sve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, i s karakterom grupe $\mathbf{\Gamma}_0(N)$ danim sa $(\gamma, J(\gamma, \cdot)) \mapsto \chi(\gamma)$ za sve $\gamma \in \Gamma_0(N) \cap \Gamma_1(4)$. Definiramo

$$\begin{aligned} M_m(N, \chi) &:= M_m(\mathbf{\Gamma}_0(N), \chi), \\ S_m(N, \chi) &:= S_m(\mathbf{\Gamma}_0(N), \chi). \end{aligned}$$

Lako se vidi da je ova definicija prostora $M_m(N, \chi)$ i $S_m(N, \chi)$ ekvivalentna onoj iz [57] (u [57] se $M_m(N, \chi)$ označava sa $G_m(N, \chi)$). U [57] su prostori $M_m(N, \chi)$ i $S_m(N, \chi)$ definirani neovisno o parnosti karaktera χ, ali se u slučaju neparnog karaktera χ radi o nulprostorima.

Peterssonov skalarni produkt na prostoru $S_m(N, \chi)$ dan je formulom

$$\langle f, g \rangle_{S_m(N,\chi)} = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} \Im(z)^m \, dv_{\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}}(z), \qquad f, g \in S_m(N, \chi).$$

3.7 Heckeovi operatori

U ovom potpoglavlju kao u [57, str. 450] definiramo Heckeove operatore T_{p^2} na prostorima $S_m(N, \chi)$, gdje su p prost broj, $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i χ paran Dirichletov karakter modulo N. U Propoziciji 3.40 dokazujemo da je, ako $p \nmid N$, operator $\overline{\chi(p)}\, T_{p^2}$ hermitski s obzirom na Peterssonov skalarni produkt na $S_m(N, \chi)$. Ovaj je rezultat dobro poznat, ali nismo uspjeli naći prikladnu referencu pa ga ovdje dokazujemo s obzirom da je presudan za dokaz Korolara 6.15. Naš je dokaz Propozicije 3.40 dobiven prilagodbom dokaza teorema [28, Teorem 4.5.4.(1)] na slučaj polucijele težine.

Kao u [57, str. 443], definiramo grupu

$$\mathcal{G} := \left\{ \sigma = (g_\sigma, \eta_\sigma) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathrm{Hol}(\mathcal{H}) : \eta_\sigma^2 = t_\sigma \left(\det g_\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} j(g_\sigma, \cdot) \text{ za neki } t_\sigma \in \mathbb{T} \right\}$$

s pravilom množenja

$$\sigma_1 \sigma_2 = \left(g_{\sigma_1} g_{\sigma_2}, \eta_{\sigma_1} \left(g_{\sigma_2}.z \right) \eta_{\sigma_2}(z) \right), \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}.$$

Očito je $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ normalna podgrupa od $\mathcal{G}$. Nadalje, vrijedi

$$\Im(\sigma.z) = \frac{\Im(z)}{|\eta_\sigma(z)|^4}, \qquad \sigma \in \mathcal{G}, \; z \in \mathcal{H}. \tag{3.24}$$

Lema 3.32. *Neka su $\sigma \in \mathcal{G}$ i Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Tada je $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i vrijedi*

$$v_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}}\left(\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}\right) = v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H}). \tag{3.25}$$

Dokaz. Jasno s obzirom da je $\sigma\Gamma\sigma^{-1} = \tau\Gamma\tau^{-1}$ za

$$\tau := \sigma\left((\det g_\sigma)^{-\frac{1}{2}} I_2, t_\sigma^{-1}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim. \tag{3.26}$$

□

Grupa $\mathcal{G}$ djeluje na $\mathcal{H}$ po formuli

$$\sigma.z := g_\sigma.z, \qquad \sigma \in \mathcal{G},\ z \in \mathcal{H},$$

i za svaki $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zdesna na $\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ po formuli

$$\left(f\big|_m \sigma\right)(z) := f(\sigma.z)\eta_\sigma(z)^{-2m}, \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}},\ \sigma \in \mathcal{G},\ z \in \mathcal{H}.$$

Lema 3.33. *Neka su $m \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $\sigma \in \mathcal{G}$. Definiramo karakter χ^σ grupe $\sigma^{-1}\Gamma\sigma$ formulom* (3.21). *Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Tada je*

$$f\big|_m \sigma \in S_m\left(\sigma^{-1}\Gamma\sigma, \chi^\sigma\right).$$

Dokaz. Neka je $\tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ definiran formulom (3.26). Vrijedi

$$f\big|_m \sigma = f\big|_m \tau\big|_m \left((\det g_\sigma)^{\frac{1}{2}} I_2, t_\sigma\right) = t_\sigma^{-2m} f\big|_m \tau,$$

a desna strana po Lemi 3.21 pripada prostoru $S_m\left(\tau^{-1}\Gamma\tau, \chi^\tau\right) = S_m\left(\sigma^{-1}\Gamma\sigma, \chi^\sigma\right)$. □

Za podgrupe Γ_1 i Γ_2 neke grupe G kažemo da su **koizmjerive** ako je

$$[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty \qquad \text{i} \qquad [\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty.$$

Pišemo $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$.

Koizmjerivost je relacija ekvivalencije na skupu svih podgrupa od G.

Za $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, označimo $\Gamma(N)^\sim := P^{-1}(\Gamma(N)) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Dokaz sljedeće leme dobiven je prilagodbom dokaza leme [28, Lema 4.5.1].

Lema 3.34. *Neka je $\sigma \in \mathcal{G}$ takav da je $g_\sigma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. Neka je Γ podgrupa od $\mathcal{G}$ koizmjeriva sa $\Gamma(1)^\sim$. Tada je $\sigma\Gamma\sigma^{-1} \approx \Gamma$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\Gamma = \Gamma(1)^\sim$. Fiksirajmo $c \in \mathbb{Z}_{>0}$

takav da je $cg_\sigma \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Definiramo $\alpha := (cI_2, 1)\sigma = (cg_\sigma, \eta_\sigma) \in \mathcal{G}$. Očito je $\sigma\Gamma\sigma^{-1} = \alpha\Gamma\alpha^{-1}$.

Označimo $m := \det(g_\alpha)$. Dokažimo da vrijedi $\Gamma(m)^{\sim} \subseteq \alpha\Gamma\alpha^{-1}$, tj. $\alpha^{-1}\Gamma(m)^{\sim}\alpha \subseteq \Gamma$, tj. $P\left(\alpha^{-1}\Gamma(m)^{\sim}\alpha\right) \subseteq \Gamma(1)$, tj. $g_\alpha^{-1}\Gamma(m)g_\alpha \subseteq \Gamma(1)$. Ako je $\gamma \in \Gamma(m)$, tada su $mg_\alpha^{-1}, \gamma, g_\alpha \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ i vrijedi

$$\left(mg_\alpha^{-1}\right)\gamma g_\alpha \equiv \left(mg_\alpha^{-1}\right) I_2 g_\alpha = mI_2 \equiv 0 \pmod{\mathrm{M}_2(m\mathbb{Z})},$$

dakle $g_\alpha^{-1}\gamma g_\alpha \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Kako je $\det\left(g_\alpha^{-1}\gamma g_\alpha\right) = 1$, slijedi da je $g_\alpha^{-1}\gamma g_\alpha \in \Gamma(1)$.

Dakle, $\Gamma(m)^{\sim} \subseteq \Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma \cap \sigma\Gamma\sigma^{-1}$. Kako je $[\Gamma : \Gamma(m)^{\sim}] < \infty$, slijedi da je $[\Gamma : \Gamma \cap \sigma\Gamma\sigma^{-1}] < \infty$. Budući da cijeli ovaj argument vrijedi i za σ^{-1}, vrijedi i

$$\infty > \left[\Gamma : \Gamma \cap \sigma^{-1}\Gamma\sigma\right] = \left[\sigma\Gamma\sigma^{-1} : \sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma\right].$$

Dakle, $\sigma\Gamma\sigma^{-1} \approx \Gamma$. □

Fiksirajmo $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$, paran Dirichletov karakter χ modulo N, prost broj p i $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definiramo

$$\xi := \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^2 \end{pmatrix}, p^{\frac{1}{2}}\right) \in \mathcal{G}.$$

Označimo

$$\Gamma_0 := \Gamma_0(N) \qquad \text{i} \qquad \Delta_0 := \left\{(\gamma, J(\gamma, \cdot)) : \gamma \in \Gamma_0(N)\right\}.$$

Δ_0 je podgrupa od $\mathcal{G}$ koizmjeriva s $\Gamma(1)^{\sim}$, naime $\Delta_0 \cap \Gamma(1)^{\sim} = \mathbf{\Gamma}_0(N)$ je očito konačnog indeksa i u Δ_0 i u $\Gamma(1)^{\sim}$. Po Lemi 3.34 slijedi da je $[\Delta_0 : \xi^{-1}\Delta_0\xi \cap \Delta_0] < \infty$ pa je rastav u disjuktnu uniju desnih klasa

$$\Delta_0\xi\Delta_0 = \bigsqcup_{\alpha \in \xi^{-1}\Delta_0\xi\cap\Delta_0 \backslash \Delta_0} \Delta_0\xi\alpha$$

konačan. Kao u [57, str. 450], definiramo Heckeov operator $T_{p^2} : S_m(N, \chi) \to S_m(N, \chi)$,

$$f\Big|T_{p^2} := p^{m-2}\sum_{\nu=1}^{r} \chi(a_\nu) f\Big|_m \xi_\nu,$$

gdje su $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $\xi_\nu = \left(\begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix}, \eta_{\xi_\nu}\right) \in \mathcal{G}$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, takvi da je

$$\Delta_0\xi\Delta_0 = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \Delta_0\xi_\nu.$$

Lako se vidi da definicija ne ovisi o izboru takvih $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

U dokazu će Propozicije 3.40 biti korisno preslikavanje $\cdot^\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,

$$\sigma^\iota := ((\det g_\sigma)\, I_2, 1)\, \sigma^{-1}.$$

Očito je

$$f\Big|_m \sigma^\iota = f\Big|_m \sigma^{-1}, \qquad f \in \mathbb{C}^{\mathcal{H}},\ \sigma \in \mathcal{G}. \tag{3.27}$$

Lema 3.35. *Neka su $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}$. Tada vrijedi:*

(i) $(\sigma_1\sigma_2)^\iota = \sigma_2^\iota \sigma_1^\iota$.

(ii) $(\sigma^\iota)^\iota = \sigma$.

(iii) $\Delta_0^\iota = \Delta_0$.

(iv) *Ako $p \nmid N$, tada je $\Delta_0 \xi^\iota \Delta_0 = \Delta_0 \xi \Delta_0$.*

(v) *Ako $p \nmid N$, tada je $(\Delta_0 \xi \Delta_0)^\iota = \Delta_0 \xi \Delta_0$.*

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) elementarno se provjere, a tvrdnja (iii) je očita. Tvrdnja (iv) slijedi iz jednakosti

$$\xi^\iota \underbrace{\left(\begin{pmatrix} a & b \\ N & p^2 \end{pmatrix}, \sqrt{Nz + p^2} \right)}_{\in \Delta_0} = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} p^2 a & b \\ N & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{Nz + 1} \right)}_{\in \Delta_0} \xi,$$

gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $ap^2 - bN = 1$. Tvrdnju (v) dokazuje raspis

$$(\Delta_0 \xi \Delta_0)^\iota \overset{\text{(i)}}{=} \Delta_0^\iota \xi^\iota \Delta_0^\iota \overset{\text{(iii)}}{=} \Delta_0 \xi^\iota \Delta_0 \overset{\text{(iv)}}{=} \Delta_0 \xi \Delta_0.$$ □

Korisno je uvesti i verziju Peterssonova skalarnog produkta iz [28]:

Definicija 3.36. *Za diskretnu podgrupu Γ konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i karakter $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda, definiramo*

$$\langle f_1,\, f_2 \rangle_\Gamma := \frac{1}{v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H})} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z), \qquad f_1, f_2 \in S_m(\Gamma, \psi).$$

Lema 3.37. *Neka su Γ_1 i Γ_2 diskretne podgrupe konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. Neka su $\chi_l : \Gamma_l \to \mathbb{C}^\times$, $l \in \{1, 2\}$, karakteri konačnog reda. Pretpostavimo da je $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$. Tada je*

$$\langle f_1,\, f_2 \rangle_{\Gamma_1} = \langle f_1,\, f_2 \rangle_{\Gamma_2}, \qquad f_1, f_2 \in S_m(\Gamma_1, \chi_1) \cap S_m(\Gamma_2, \chi_2).$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$, dakle $[\Gamma_1 : \Gamma_2] < \infty$. Neka je S potpun skup predstavnika desnih klasa iz $\Gamma_2 \left(\Gamma_1 \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\right) \backslash \Gamma_1$, dakle

$$\Gamma_1 = \bigsqcup_{\gamma \in S} \Gamma_2 \left(\Gamma_1 \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\right) \gamma.$$

Ako je F° skup neeliptičkih točaka za Γ_1 neke stroge fundamentalne domene za Γ_1 u $\mathcal{H}$, tada je

$$\bigsqcup_{\gamma\in S} \gamma.F^\circ$$

skup neeliptičkih točaka za Γ_1 neke stroge fundamentalne domene za Γ_2 u $\mathcal{H}$ pa za sve $f_1, f_2 \in S_m(\Gamma_1, \chi_1)$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle f_1,\, f_2\rangle_{\Gamma_2} &= \frac{1}{v_{\mathcal{H}}\left(\bigsqcup_{\gamma\in S}\gamma.F^\circ\right)} \sum_{\gamma\in S} \int_{\gamma.F^\circ} f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \frac{1}{|S|\, v_{\Gamma_1\backslash\mathcal{H}}\left(\Gamma_1\backslash\mathcal{H}\right)}\ |S| \int_{\Gamma_1\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \langle f_1,\, f_2\rangle_{\Gamma_1}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 3.38. *Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $\sigma \in \mathcal{G}$ takav da je $\sigma\Gamma\sigma^{-1} \approx \Gamma$. Neka su $f_1 \in S_m\left(\sigma\Gamma\sigma^{-1}, \chi\left(\sigma^{-1}\,\cdot\,\sigma\right)\right)$ i $f_2 \in S_m(\Gamma, \chi)$. Tada je*

$$\left\langle f_1\big|_m\sigma,\, f_2\right\rangle_\Gamma = \left\langle f_1,\, f_2\big|_m\sigma^\iota\right\rangle_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}}. \tag{3.28}$$

Dokaz. Po Lemi 3.33 i po (3.27) obje su strane jednakosti (3.28) dobro definirane. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\left\langle f_1\big|_m\sigma,\, f_2\right\rangle_\Gamma &= \frac{1}{v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H})} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f_1(\sigma.z)\eta_\sigma(z)^{-2m}\overline{f_2(z)}\Im(z)^m\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&= \frac{1}{v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H})} \int_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\eta_\sigma\left(\sigma^{-1}.z\right)^{-2m}\overline{f_2\left(\sigma^{-1}.z\right)}\Im\left(\sigma^{-1}.z\right)^m\, dv_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(3.24)}{=} \frac{1}{v_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(\Gamma\backslash\mathcal{H})} \int_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\eta_{\sigma^{-1}}(z)^{2m}\overline{f_2\left(\sigma^{-1}.z\right)}\frac{\Im(z)^m}{\left|\eta_{\sigma^{-1}}(z)\right|^{4m}}\, dv_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(3.25)}{=} \frac{1}{v_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}}\left(\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}\right)} \int_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}} f_1(z)\overline{\left(f_2\big|_m\sigma^{-1}\right)(z)}\Im(z)^m\, dv_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&= \left\langle f_1,\, f_2\big|_m\sigma^{-1}\right\rangle_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} \\
&\overset{(3.27)}{=} \left\langle f_1,\, f_2\big|_m\sigma^\iota\right\rangle_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Iz [57, $(1.8_b) \Leftrightarrow (1.8_c)$ i (1.15)] slijedi:

Lema 3.39. *Preslikavanje*

$$\Delta_0\xi\Delta_0 \to \Gamma_0 g_\xi \Gamma_0, \qquad \sigma \mapsto g_\sigma,$$

jest bijekcija.

Propozicija 3.40. *Pretpostavimo da* $p \nmid N$. *Neka su* $f_1, f_2 \in S_m(N, \chi)$. *Tada je*

$$\left\langle \overline{\chi(p)} f_1 \middle| T_{p^2},\, f_2 \right\rangle_{S_m(N,\chi)} = \left\langle f_1,\, \overline{\chi(p)}\, f_2 \middle| T_{p^2} \right\rangle_{S_m(N,\chi)}. \tag{3.29}$$

Dokaz. Množenjem jednakosti (3.29) sa $\frac{\chi(p)}{v_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}}(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H})}$ vidimo da je ona ekvivalentna jednakosti

$$\left\langle f_1 \middle| T_{p^2},\, f_2 \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N)} = \left\langle f_1,\, \overline{\chi\left(p^2\right)}\, f_2 \middle| T_{p^2} \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N)}. \tag{3.30}$$

Dokažimo (3.30). Po [28, (4.5.19)] postoje $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ takvi da je

$$\Gamma_0 g_\xi \Gamma_0 = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \Gamma_0 \alpha_\nu = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu \Gamma_0.$$

Po Lemi 3.39 za svaki $\nu \in \{1, 2, \ldots, r\}$ postoji jedinstven $\xi_\nu = \left(\begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu \\ c_\nu & d_\nu \end{pmatrix}, \eta_{\xi_\nu} \right) \in \Delta_0 \xi \Delta_0$ takav da je $g_{\xi_\nu} = \alpha_\nu$, i vrijedi

$$\Delta_0 \xi \Delta_0 = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \Delta_0 \xi_\nu = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \xi_\nu \Delta_0.$$

Odavde slijedi

$$(\Delta_0 \xi \Delta_0)^\iota = \left(\bigsqcup_{\nu=1}^{r} \xi_\nu \Delta_0 \right)^\iota,$$

tj., po Lemi 3.35, koristeći da $p \nmid N$,

$$\Delta_0 \xi \Delta_0 = \bigsqcup_{\nu=1}^{r} \Delta_0 \xi_\nu^\iota. \tag{3.31}$$

Nadalje, po Lemi 3.34 za svaki $\nu \in \{1, 2, \ldots, r\}$ vrijedi

$$\xi_\nu^{-1} \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu \approx \mathbf{\Gamma}_0(N) \approx \xi_\nu \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu^{-1}$$

pa je po Lemama 3.33 i 3.38 opravdan sljedeći račun:

$$\begin{aligned}
\left\langle f_1 \middle| T_{p^2},\, f_2 \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N)} &= \left\langle p^{m-2} \sum_{\nu=1}^{r} \chi(a_\nu) f_1 \Big|_m \xi_\nu,\, f_2 \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N) \cap \bigcap_{\nu=1}^{r} \xi_\nu^{-1} \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu} \\
&= p^{m-2} \sum_{\nu=1}^{r} \chi(a_\nu) \left\langle f_1 \Big|_m \xi_\nu,\, f_2 \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N) \cap \xi_\nu^{-1} \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu} \\
&\overset{(3.28)}{=} p^{m-2} \sum_{\nu=1}^{r} \chi(a_\nu) \left\langle f_1,\, f_2 \Big|_m \xi_\nu^\iota \right\rangle_{\xi_\nu \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu^{-1} \cap \mathbf{\Gamma}_0(N)} \\
&= \left\langle f_1,\, p^{m-2} \sum_{\nu=1}^{r} \overline{\chi(a_\nu)} f_2 \Big|_m \xi_\nu^\iota \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N) \cap \bigcap_{\nu=1}^{r} \xi_\nu \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu^{-1}}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Za svaki $\nu \in \{1, 2, \ldots, r\}$ označimo

$$\begin{pmatrix} a_\nu^\iota & b_\nu^\iota \\ c_\nu^\iota & d_\nu^\iota \end{pmatrix} := g_{\xi_\nu^\iota} = \begin{pmatrix} d_\nu & -b_\nu \\ -c_\nu & a_\nu \end{pmatrix}.$$

Kako je $\xi_\nu \in \Delta_0 \xi \Delta_0$, vrijedi $c_\nu \equiv 0 \pmod N$ pa je

$$\chi(a_\nu)\chi(d_\nu) = \chi(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) = \chi\left(\det g_{\xi_\nu}\right) = \chi\left(p^2\right),$$

dakle

$$\overline{\chi(a_\nu)} = \overline{\chi\left(p^2\right)}\chi(d_\nu) = \overline{\chi\left(p^2\right)}\chi\left(a_\nu^\iota\right).$$

Uvrstimo li ovo u (3.32), dobivamo

$$\begin{aligned} \left\langle f_1 \middle| T_{p^2},\, f_2 \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N)} &= \left\langle f_1,\, \overline{\chi\left(p^2\right)} p^{m-2} \sum_{\nu=1}^{r} \chi\left(a_\nu^\iota\right) f_2\Big|_m \xi_\nu^\iota \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N) \cap \bigcap_{\nu=1}^r \xi_\nu \mathbf{\Gamma}_0(N) \xi_\nu^{-1}} \\ &\overset{(3.31)}{=} \left\langle f_1,\, \overline{\chi\left(p^2\right)}\, f_2 \middle| T_{p^2} \right\rangle_{\mathbf{\Gamma}_0(N)}. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 4

Matrični koeficijenti nekih reprezentacija metaplektičke grupe

U ovom poglavlju za svaki $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pronalazimo eksplicitne formule za matrične koeficijente reprezentacija $\pi_{D_m^+}$ i $\pi_{D_{-m}^-}$ koji se slijeva i zdesna transformiraju kao karakteri grupe K. U potpoglavlju 4.1 to postižemo izračunom iz osnovne serije (vidi Propoziciju 4.5). U sljedećim dvama potpoglavljima pojednostavljujemo glavni korak izračuna u slučaju kad je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$: u potpoglavlju 4.2 računanjem matričnih koeficijenata reprezentacije $\overline{\rho_m}$, a u potpoglavlju 4.3 uočavanjem veze između funkcija $f_{k,m} \in H_m$ i K-konačnih matričnih koeficijenata reprezentacije $\overline{\pi_m}$.

4.1 Izračun iz osnovne serije

Neka je $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Po Teoremu 1.11 K-konačne matrične koeficijente reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ možemo izračunati kao K-konačne matrične koeficijente njoj infinitezimalno ekvivalentne podreprezentacije reprezentacije $I_{(-1)^{m-\frac{1}{2}}\frac{1}{2},\, m-1}$ iz osnovne serije (vidi Lemu 2.13). Označimo tu podreprezentaciju sa I_m. Prostor K-konačnih vektora reprezentacije I_m jest algebarska direktna suma

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}\varepsilon_{m+2k,m-1}.$$

Za svaki je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ prostor K-konačnih matričnih koeficijenata reprezentacije I_m koji se zdesna transformiraju kao χ_m, a slijeva kao χ_{m+2k} razapet funkcijom $\Phi_{k,m} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$,

$$\Phi_{k,m}(\sigma) := \langle I_m(\sigma)\varepsilon_{m,m-1},\, \varepsilon_{m+2k,m-1}\rangle_{L^2(K)}\,.$$

Propozicija 4.1. *Neka je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada za sve $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ i $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vrijedi*

$$\Phi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = \left(4^{-k}\binom{2k}{k}\prod_{l=1}^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{m-l}+1\right)\right)e^{-i(m+2k)\theta_1}\frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)}e^{-im\theta_2}. \tag{4.1}$$

Neka je $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ funkcija definirana sa (1.20). Pripremimo se za dokaz Propozicije 4.1 dvjema tehničkim lemama:

Lema 4.2. *Neka je* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada vrijedi:*

(i) $\varepsilon_{m,m-1}(\sigma) = \eta_\sigma(i)^{-2m}, \quad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

(ii) $\varepsilon_{m,m-1}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = (-1)^{\varepsilon(\theta_1)} \dfrac{e^{-im\theta_2}}{(ie^t \sin\theta_1 + e^{-t}\cos\theta_1)^m}, \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) $\varepsilon_{m+2k,m-1}(\kappa_\theta) = e^{-i(m+2k)\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Dokaz. (i) Za $\sigma = n_x a_y \kappa_t \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ imamo

$$\varepsilon_{m,m-1}(\sigma) \overset{(2.6)}{=} y^{\frac{m}{2}} e^{-imt} = \left(y^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{t}{2}}\right)^{-2m} = \eta_\sigma(i)^{-2m}.$$

(ii) Računamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m,m-1}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) &\overset{\text{(i)}}{=} \eta_{\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}}(i)^{-2m} \\
&= \left(\eta_{\kappa_{\theta_1}}(h_t \kappa_{\theta_2}.i)\, \eta_{h_t}(\kappa_{\theta_2}.i)\, \eta_{\kappa_{\theta_2}}(i)\right)^{-2m} \\
&= \left(\eta_{\kappa_{\theta_1}}\left(e^{2t} i\right)\, \eta_{h_t}(i)\, \eta_{\kappa_{\theta_2}}(i)\right)^{-2m} \\
&= \left((-1)^{\varepsilon(\theta_1)} \sqrt{ie^{2t}\sin\theta_1 + \cos\theta_1}\, e^{-\frac{t}{2}}\, e^{i\frac{\theta_2}{2}}\right)^{-2m} \\
&= (-1)^{\varepsilon(\theta_1)} \frac{e^{-im\theta_2}}{(ie^t \sin\theta_1 + e^{-t}\cos\theta_1)^m}.
\end{aligned}$$

(iii) Jasno iz (2.6). □

Lema 4.3. *Vrijedi:*

(i) $ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta = e^{i\theta}\cosh(t) - e^{-i\theta}\sinh(t), \quad t, \theta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\sqrt{ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta} = (-1)^{\varepsilon(2\theta)} \cosh^{\frac{1}{2}}(t) e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{e^{2i\theta} - \tanh(t)}, \quad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[,\ t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sqrt{ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta} = (-1)^{\varepsilon(\theta)} \cosh^{\frac{1}{2}}(t) e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - e^{-2i\theta}\tanh(t)}, \quad \theta, t \in \mathbb{R}$.

Dokaz. (i) Računamo

$$ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta = e^t \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} + e^{-t}\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = e^{i\theta}\cosh(t) - e^{-i\theta}\sinh(t).$$

(ii) Neka je $t \in \mathbb{R}$. Definiramo $A_t : \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}$,

$$A_t(\theta) := \frac{\sqrt{ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta}}{\cosh^{\frac{1}{2}}(t) e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{e^{2i\theta} - \tanh(t)}} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{\sqrt{e^{i\theta} - \tanh(t) e^{-i\theta}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{e^{2i\theta} - \tanh(t)}}.$$

Trebamo dokazati da je $A_t(\theta) = (-1)^{\varepsilon(2\theta)}$, $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$. S obzirom da je funkcija $\sqrt{\cdot}$ neprekidna na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, funkcija A_t je neprekidna na $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Kako je uz to $A_t^2 = 1$, A_t je konstantna na svakom od intervala $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ i $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Lako se vidi da vrijedi

$$A_t(0) = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{\theta \searrow -\pi} A_t(\theta) = \lim_{\theta \nearrow \pi} A_t(\theta) = -1,$$

dakle

$$A_t(\theta) = (-1)^{\varepsilon(2\theta)}, \qquad \theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,$$

a direktno se provjeri da ova jednakost vrijedi i za $\theta \in \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.

(iii) Budući da su obje strane jednakosti (iii) 2π-periodične funkcije varijable θ, dovoljno je dokazati da ona vrijedi za $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$. Neka je $t \in \mathbb{R}$. Definiramo $B_t : \left]-\pi, \pi\right] \to \mathbb{R}$,

$$B_t(\theta) := \frac{\sqrt{ie^t \sin\theta + e^{-t}\cos\theta}}{\cosh^{\frac{1}{2}}(t) e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - e^{-2i\theta}\tanh(t)}} \overset{\text{(i)}}{=} \frac{\sqrt{e^{i\theta}\left(1 - e^{-2i\theta}\tanh(t)\right)}}{e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - e^{-2i\theta}\tanh(t)}}.$$

Trebamo dokazati da je $B_t(\theta) = (-1)^{\varepsilon(\theta)}$, $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$. S obzirom da je funkcija $\sqrt{\cdot}$ neprekidna na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, funkcija B_t je neprekidna na $\left]-\pi, \pi\right[$. Kako je uz to $B_t^2 = 1$, B_t je konstantna na intervalu $\left]-\pi, \pi\right[$, dakle

$$B_t(\theta) = B_t(0) = 1 = (-1)^{\varepsilon(\theta)}, \qquad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Direktno se provjeri da ova jednakost vrijedi i za $\theta = \pi$. $\square$

Dokaz Propozicije 4.1. Po neprekidnosti je (4.1) dovoljno dokazati u slučaju kad je $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Neka su $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ i $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) &= \left\langle I_m(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2})\varepsilon_{m,m-1},\, \varepsilon_{m+2k,m-1}\right\rangle_{L^2(K)} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \varepsilon_{m,m-1}\left(\kappa_{u+\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}\right) \overline{\varepsilon_{m+2k,m-1}\left(\kappa_u\right)}\, du \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \varepsilon_{m,m-1}\left(\kappa_u h_t \kappa_{\theta_2}\right) \overline{\varepsilon_{m+2k,m-1}\left(\kappa_{u-\theta_1}\right)}\, du \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} - \int_{\pi}^{3\pi}\right) \frac{e^{-im\theta_2}}{\left(ie^t \sin u + e^{-t}\cos u\right)^m}\, e^{i(m+2k)(u-\theta_1)}\, du,
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi po Lemama 4.2.(ii) i (iii). Supstitucijom $u \mapsto u - 2\pi$ integral $-\int_{\pi}^{3\pi}$ na desnoj strani prelazi u $\int_{-\pi}^{\pi}$ pa dobivamo

$$\Phi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = \frac{1}{2\pi} e^{-im\theta_2}\, e^{-i(m+2k)\theta_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(m+2k)u}}{\left(ie^t \sin u + e^{-t}\cos u\right)^m}\, du,$$

što po Lemi 4.3.(ii) možemo zapisati i u obliku

$$\Phi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = \frac{e^{-im\theta_2}\, e^{-i(m+2k)\theta_1}}{2\pi \cosh^m(t)} \left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \frac{e^{2i(m+k)u}}{\left(e^{2iu} - \tanh(t)\right)^m}\, du.$$

Supstitucijom $u \mapsto u + \pi$ integral $-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$ na desnoj strani prelazi u $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, a supstitucijom $u \mapsto u - \pi$ integral $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ prelazi u $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$ pa dobivamo

$$\Phi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = \frac{e^{-im\theta_2}\, e^{-i(m+2k)\theta_1}}{\pi \cosh^m(t)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2i(m+k)u}}{\left(e^{2iu} - \tanh(t)\right)^m}\, du. \tag{4.2}$$

Označimo $a := \tanh^{\frac{1}{2}}(t) \in \,]0,1[$. Definiramo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f := \sum_{r=1}^{m-\frac{1}{2}} A_r f_{1,r} + \sum_{r=1}^{k} B_r f_{2,r} + C f_3,$$

gdje su $f_{1,r}, f_{2,r}, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadane sa

$$\begin{aligned}
f_{1,r}(u) &:= \frac{e^{2i(m-r+k)u}}{\left(e^{2iu} - a^2\right)^{m-r}}, \qquad r = 1, 2, \ldots, m - \frac{1}{2},\\
f_{2,r}(u) &:= \left(\frac{e^{iu} + \sqrt{e^{2iu} - a^2}}{a}\right)^{2r} - \left(\frac{e^{iu} + \sqrt{e^{2iu} - a^2}}{a}\right)^{-2r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, k,\\
f_3(u) &:= \operatorname{Ln}\left(e^{iu} + \sqrt{e^{2iu} - a^2}\right),
\end{aligned}$$

dok su $A_r, B_r, C \in \mathbb{C}$ sljedeće konstante:

$$\begin{aligned}
A_r &:= \frac{i}{2(m-r)} \prod_{l=1}^{r-1} \left(\frac{k}{m-l} + 1\right), \qquad r = 1, 2, \ldots, m - \frac{1}{2},\\
B_r &:= -\frac{i}{2r} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k+r} \prod_{l=1}^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{m-l} + 1\right), \qquad r = 1, \ldots, k,\\
C &:= -i \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k} \prod_{l=1}^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{m-l} + 1\right).
\end{aligned}$$

Funkcije $f_{1,r}$, $f_{2,r}$ i f_3 u svakoj točki skupa $\mathbb{R}$ imaju konačne jednostrane limese. Štoviše, funkcije $f_{1,r}$ i $f_{2,r}$ diferencijabilne su na $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, a funkcija f_3 na $\mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\right)$, i elementarno je pokazati da vrijedi

$$f'(u) = \frac{e^{2i(m+k)u}}{\left(e^{2iu} - a^2\right)^m}, \qquad u \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\right),$$

dakle

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2i(m+k)u}}{(e^{2iu}-a^2)^m}\,du &= \lim_{u\nearrow\frac{\pi}{2}} f(u) - \lim_{u\searrow-\frac{\pi}{2}} f(u)\\
&= \sum_{r=1}^{m-\frac{1}{2}} A_r\left(\lim_{u\nearrow\frac{\pi}{2}} f_{1,r}(u) - \lim_{u\searrow-\frac{\pi}{2}} f_{1,r}(u)\right) + \sum_{r=1}^{k} B_r\left(\lim_{u\nearrow\frac{\pi}{2}} f_{2,r}(u) - \lim_{u\searrow-\frac{\pi}{2}} f_{2,r}(u)\right)\\
&\quad +C\left(\lim_{u\nearrow\frac{\pi}{2}} f_3(u) - \lim_{u\searrow-\frac{\pi}{2}} f_3(u)\right)\\
&= C\pi i.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (4.2) dobivamo (4.1). □

Korolar 4.4. *Neka su $m \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je funkcija $F_{k,m} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$,*

$$F_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) := \chi_{m+2k}(\kappa_{\theta_1}) \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \chi_m(\kappa_{\theta_2}), \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{4.3}$$

do na multiplikativnu konstantu jedinstven K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se zdesna transformira kao χ_m, a slijeva kao χ_{m+2k}.

Općenitije, imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.5. *Neka su $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada vrijedi:*

(i) *Funkcija $(n^+)^l F_{k,m}$ je do na multiplikativnu konstantu jedinstven K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se zdesna transformira kao χ_{m+2l}, a slijeva kao χ_{m+2k}.*

(ii) *Funkcija $\overline{(n^+)^l F_{k,m}} = (n^-)^l \overline{F_{k,m}}$ je do na multiplikativnu konstantu jedinstven K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_{-m}^-}$ koji se zdesna transformira kao χ_{-m-2l}, a slijeva kao χ_{-m-2k}.*

Dokaz. (i) Struktura $(\mathfrak{g}, K)$-modula $\left(H_{D_m^+}\right)_K$ opisana je u Propoziciji 2.2. Iz nje je jasno da, ako je $v_m \in \left(H_{D_m^+}\right)_{\chi_m} \setminus \{0\}$, tada za svaki $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vektor $v_{m+2r} := \pi_{D_m^+}(n^+)^r v_m$ razapinje $\left(H_{D_m^+}\right)_{\chi_{m+2r}}$. Dakle, do na multiplikativnu konstantu jedinstven K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se transformira zdesna kao χ_{m+2l}, a slijeva kao χ_{m+2k} jest funkcija

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}, \qquad \sigma \mapsto \left\langle \pi_{D_m^+}(\sigma)\pi_{D_m^+}\left(n^+\right)^l v_m,\, v_{m+2k}\right\rangle_{H_{D_m^+}},$$

tj., po definiciji izvedene reprezentacije i neprekidnosti reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ i skalarnog produkta, funkcija

$$\sigma \mapsto \left(\left(n^+\right)^l \left\langle \pi_{D_m^+}(\,\cdot\,)v_m,\, v_{m+2k}\right\rangle_{H_{D_m^+}}\right)(\sigma), \qquad \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim.$$

Kako po Korolaru 4.4 postoji $C \in \mathbb{C}^\times$ takav da je $\left\langle \pi_{D_m^+}(\,\cdot\,)v_m,\, v_{m+2k} \right\rangle_{H_{D_m^+}} = CF_{k,m}$, (i) slijedi.

(ii) Označimo sa I_{-m} podreprezentaciju od $I_{(-1)^{m+\frac{1}{2}}\frac{1}{2},m-1}$ infinitezimalno ekvivalentnu reprezentaciji $\pi_{D_{-m}^-}$ (vidi Lemu 2.13). Za svaki je $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ χ_{-m-2r}-izotipična komponenta reprezentacije I_{-m} razapeta funkcijom $\varepsilon_{-m-2r,m-1} = \overline{\varepsilon_{m+2r,m-1}}$. Dakle, do na multiplikativnu konstantu jedinstven matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_{-m}^-}$ koji se transformira zdesna kao χ_{-m-2l}, a slijeva kao χ_{-m-2k} jest funkcija

$$\sigma \mapsto \langle I_{-m}(\sigma)\overline{\varepsilon_{m+2l,m-1}},\, \overline{\varepsilon_{m+2k,m-1}}\rangle_{L^2(K)} = \overline{\langle I_m(\sigma)\varepsilon_{m+2l,m-1},\, \varepsilon_{m+2k,m-1}\rangle_{L^2(K)}},$$

koja je po (i) do na multiplikativnu konstantu jednaka $\overline{(n^+)^l\, F_{k,m}} \underset{(1.30)}{\overset{(1.29)}{=}} (n^-)^l\, \overline{F_{k,m}}$. □

Korolar 4.6. (i) *Reprezentacija $\pi_{D_{\frac{1}{2}}^+}$ nije kvadratno integrabilna.*

(ii) *Reprezentacija $\pi_{D_{\frac{3}{2}}^+}$ je kvadratno integrabilna, ali nije integrabilna.*

(iii) *Reprezentacije $\pi_{D_m^+}$, $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, jesu integrabilne.*

Dokaz. Neka je $m \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Po Definicijama 1.12 i 1.13 reprezentacija $\pi_{D_m^+}$ je integrabilna odnosno kvadratno integrabilna ako i samo ako je njen K-konačan matrični koeficijent $F_{0,m}$ integrabilan odnosno kvadratno integrabilan. Imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_{0,m}|^2\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} &\overset{(1.37)}{=} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{4\pi} |F_{0,m}(\kappa_{\theta_1}h_t\kappa_{\theta_2})|^2 \sinh(2t)\, d\theta_1\, dt\, d\theta_2 \\
&\overset{(4.3)}{=} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{4\pi} \frac{\sinh(2t)}{\cosh^{2m}(t)}\, d\theta_1\, dt\, d\theta_2 \\
&= 8\pi \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(t)}{\cosh^{2m-1}(t)}\, dt \\
&= 8\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m-1}} \\
&= \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } m \leq 1, \\ < \infty, & \text{ako je } m > 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

pri čemu je treća jednakost dobivena primjenom identiteta $\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$, a četvrta supstitucijom $x = \cosh(t)$. Potpuno analognim računom dobivamo

$$\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_{0,m}|\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = 8\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{m-1}} = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je } m \leq 2, \\ < \infty, & \text{ako je } m > 2. \end{cases}$$

Tvrdnje slijede. □

4.2 Izračun iz antiholomorfne diskretne serije

U slučaju kad je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ matrične koeficijente reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ možemo računati kao matrične koeficijente njoj unitarno ekvivalentne reprezentacije $\overline{\rho_m}$ (vidi Lemu 2.22). To nam omogućuje da damo sljedeći alternativan dokaz Korolara 4.4 u slučaju kad je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dokaz Korolara 4.4 za $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Po Lemi 2.22, do na multiplikativnu konstantu jedinstven matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se zdesna transformira kao χ_m, a slijeva kao χ_{m+2k} jest funkcija $\varphi_{k,m} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_{k,m}(\sigma) := \langle \overline{\rho_m}(\sigma)\overline{p_0}, \overline{p_k} \rangle_{\overline{R_m}},$$

tj., u Cartanovim koordinatama,

$$\varphi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = \chi_{m+2k}(\kappa_{\theta_1}) \left\langle \overline{\rho_m(h_t)p_0}, \overline{p_k} \right\rangle_{\overline{R_m}} \chi_m(\kappa_{\theta_2}), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Za $t \in \mathbb{R}_{>0}$, izračunajmo

$$A(t) := \left\langle \overline{\rho_m(h_t)p_0}, \overline{p_k} \right\rangle_{\overline{R_m}}.$$

Imamo

$$\rho_m(h_t)p_0 \overset{(2.14)}{=} p_0\Big|_m \left(h_t^C\right)^{-1} \overset{(2.15)}{=} \eta^{-2m}_{\left(h_t^{-1}\right)^C}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\left(h_t^{-1}\right)^C &= \left(\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & \\ & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{2i}\left(e^{-2t} i \frac{1+w}{1-w} + i \right) e^{\frac{t}{2}} \sqrt{1-w}} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \sqrt{\cosh(t) - w\sinh(t)} \right),
\end{aligned}$$

slijedi

$$\rho_m(h_t)p_0 = (\cosh(t) - w\sinh(t))^{-m},$$

dakle

$$A(t) = 4 \int_{\mathcal{D}} (\cosh(t) - \overline{w}\sinh(t))^{-m} \, w^k \left(1 - |w|^2\right)^{m-2} du\, dv.$$

Prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \frac{4}{i} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{ir\tanh(t)e^{iu}}{(1 - r\tanh(t)e^{iu})^m \left(r\tanh(t)e^{iu}\right)^{k+1}} du \left(1 - r^2\right)^{m-2} r^{2k+1} dr \\
&= \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \frac{4}{i} \int_0^1 \int_{|z|=r\tanh(t)} \frac{1}{(1-z)^m z^{k+1}} dz \left(1 - r^2\right)^{m-2} r^{2k+1} dr
\end{aligned}$$

$$= \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} 8\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1-z)^m z^{k+1}}, 0\right) \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{m-2} r^{2k+1}\, dr,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi po Teoremu o reziduumu. Dakle,

$$A(t) = C_{k,m} \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)}, \qquad t \in \mathbb{R}_{>0},$$

za neki $C_{k,m} \in \mathbb{R}_{>0}$ koji ovisi samo o k i m. Uvrštavanjem u (4.4) slijedi

$$\varphi_{k,m}(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}) = C_{k,m}\, \chi_{m+2k}(\kappa_{\theta_1}) \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \chi_m(\kappa_{\theta_2}), \qquad t \in \mathbb{R}_{>0},\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}.$$

Po neprekidnosti jednakost vrijedi i za $t = 0$. Time je tvrdnja Korolara 4.4 dokazana. □

4.3 Izračun iz veze s holomorfnom diskretnom serijom

U slučaju kad je $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ K-konačne matrične koeficijente reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ iz Korolara 4.4 možemo izračunati i metodom iz dokaza leme [32, Lema 3-5]. Temelj je te metode sljedeći rezultat.

Lema 4.7. *Neka su $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pretpostavimo da $\varphi \in C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap L^2\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ ima sljedeća svojstva:*

(1) $\mathcal{C}\varphi = m\left(\frac{m}{2} - 1\right)\varphi$.

(2) *φ se transformira zdesna kao χ_m.*

(3) *φ se transformira slijeva kao χ_{m+2k}.*

Tada je φ K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $\varphi \not\equiv 0$. Po Lemi 2.7 najmanji zatvoren $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$-invarijantan potprostor W reprezentacije $\left(r_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}, L^2\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\right)$ koji sadrži φ unitarno je ekvivalentan reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$. Nadalje, po Teoremu 1.4 postoji $\beta \in C_c^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ takva da je $\varphi = \overline{\beta\left(\,\cdot\,^{-1}\right)} * \varphi$. Označimo sa β_W ortogonalnu projekciju od β na W. Imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \left(\overline{\beta\left(\,\cdot\,^{-1}\right)} * \varphi\right)(x) \\
&= \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \varphi(yx)\overline{\beta(y)}\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(y) \\
&= \left\langle r_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(x)\varphi,\ \beta\right\rangle_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \\
&= \left\langle r_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(x)\varphi,\ \beta_W\right\rangle_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}, \qquad x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim,
\end{aligned}$$

dakle φ je matrični koeficijent reprezentacije W, pa onda i njoj unitarno ekvivalentne reprezentacije $\pi_{D_m^+}$. Kako uz to vrijede (2) i (3), φ je K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$. $\square$

Za svaki ćemo $m \in \frac{3}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ konstruirati funkcije koje zadovoljavaju pretpostavke Leme 4.7 pomoću funkcija $f_{k,m}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, iz Leme 2.20. Pritom će biti korisna sljedeća lema.

Lema 4.8. *Neka je $m \in \frac{3}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada pravilo $f \mapsto F_f$ definira izometriju $\Phi : H_m \to L^2\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ koja preplića reprezentacije π_m i $l_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$. Posebno za svaki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi $F_{f_{k,m}} \in L^2\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i*

$$F_{f_{k,m}}(\kappa\sigma) = \chi_{m+2k}(\kappa) F_{f_{k,m}}(\sigma), \qquad \kappa \in K,\ \sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim. \tag{4.5}$$

Dokaz. Φ je dobro definirana izometrija po Korolaru 3.5. Da preplića reprezentacije π_m i $l_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$, dokazuje sljedeći raspis: za sve $\sigma, \tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $f \in H_m$,

$$\left(l_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(\tau)\, F_f\right)(\sigma) = F_f\left(\tau^{-1}\sigma\right) \overset{(3.5)}{=} \left(f\Big|_m \tau^{-1}\sigma\right)(i) \overset{(2.13)}{=} \left(\left(\pi_m(\tau) f\right)\Big|_m \sigma\right)(i) \overset{(3.5)}{=} F_{\pi_m(\tau)f}(\sigma).$$

U slučaju kad je $\tau = \kappa^{-1}$ i $f = f_{k,m} \in (H_m)_{\chi_{-m-2k}}$ (vidi Lemu 2.20) ova je jednakost relacija (4.5). $\square$

Sada smo spremni za dokaz sljedeće propozicije.

Propozicija 4.9. *Neka su $m \in \frac{3}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je funkcija $F_{f_{k,m}}$ do na multiplikativnu konstantu jedinstven K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se zdesna transformira kao χ_m, a slijeva kao χ_{m+2k}.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom Leme 4.7 na funkciju $F_{f_{k,m}}$, koja zadovoljava pretpostavke Leme 4.7 po Lemama 3.1, 3.2.(i) i 4.8. $\square$

Korolar 4.10. *Neka su $m \in \frac{3}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je*

$$F_{f_{k,m}} = F_{k,m}, \tag{4.6}$$

gdje je funkcija $F_{k,m}$ definirana formulom (4.3).

Dokaz. Po Propoziciji 4.9 vrijedi

$$F_{f_{k,m}}\left(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2}\right) = \chi_{m+2k}\left(\kappa_{\theta_1}\right) F_{f_{k,m}}\left(h_t\right) \chi_m\left(\kappa_{\theta_2}\right), \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Kako je uz to za sve $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$F_{f_{k,m}}\left(h_t\right) \overset{(3.5)}{=} f_{k,m}(h_t.i)\eta_{h_t}(i)^{-2m} \overset{(1.35)}{=} f_{k,m}\left(e^{2t} i\right)\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)^{-2m} \overset{(2.18)}{=} \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)},$$

tvrdnja slijedi. $\square$

Poglavlje 5

Poincaréovi redovi

U ovom poglavlju izlažemo niz rezultata o konvergenciji Poincaréovih redova:

- Poincaréovih redova na Liejevim grupama u potpoglavlju 5.1
- Poincaréovih redova polucijele težine na $\mathcal{H}$ u potpoglavlju 5.2
- redova klasičnih Poincaréovih redova polucijele težine u potpoglavlju 5.3 (vidi Lemu 5.13).

5.1 Poincaréovi redovi na Liejevim grupama

Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom, Haarovom mjerom μ_G i Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$. Neka su Γ diskretna podgrupa od G, Λ podgrupa od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter. Ovo je potpoglavlje kratak pregled rezultata koji čine jezgru klasične teorije Poincaréovih redova na G. Sastavljeno je kao prijevod s adeličkog na realni jezik osnovnih rezultata o konvergenciji Poincaréovih redova s obzirom na Γ iz [31, Teorem 3-10], uz poopćenje na Poincaréove redove s obzirom na kvocijent $\Lambda\backslash\Gamma$ s karakterom χ.

Za funkciju $\varphi : G \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$\varphi(\lambda g) = \chi(\lambda)\varphi(g), \qquad \lambda \in \Lambda,\ g \in G, \tag{5.1}$$

red

$$P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi := \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\varphi(\gamma\,\cdot\,) \tag{5.2}$$

zovemo **Poincaréovim redom** funkcije φ s obzirom na $\Lambda\backslash\Gamma$ s karakterom χ. Kraće pišemo $P_{\Lambda\backslash\Gamma}\varphi := P_{\Lambda\backslash\Gamma,1}\varphi$.

Lema 5.1. *Neka je $\varphi \in C_c(\Lambda\backslash G)$. Tada je $P_{\Lambda\backslash\Gamma}\varphi \in C_c(\Gamma\backslash G)$ i vrijedi*

$$\int_{\Gamma\backslash G} P_{\Lambda\backslash\Gamma}\varphi\, d\mu_{\Gamma\backslash G} = \int_{\Lambda\backslash G} \varphi\, d\mu_{\Lambda\backslash G}. \tag{5.3}$$

Dokaz. Po Korolaru 1.64 je $\varphi = P_\Lambda f$ za neku $f \in C_c(G)$ pa je

$$P_{\Lambda\backslash\Gamma}\varphi = P_{\Lambda\backslash\Gamma}P_\Lambda f = P_\Gamma f \in C_c(\Gamma\backslash G)$$

i imamo

$$\int_{\Gamma\backslash G} P_{\Lambda\backslash\Gamma}\varphi\, d\mu_{\Gamma\backslash G} = \int_{\Gamma\backslash G} P_\Gamma f\, d\mu_{\Gamma\backslash G} = \int_G f\, d\mu_G = \int_{\Lambda\backslash G} P_\Lambda f\, d\mu_{\Lambda\backslash G} = \int_{\Lambda\backslash G} \varphi\, d\mu_{\Lambda\backslash G}. \qquad \square$$

Lema 5.2. *Neka je $\varphi : G \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa svojstvom* (5.1) *takva da je $|\varphi| \in L^1(\Lambda\backslash G)$. Tada vrijedi:*

(i) *Red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi$ konvergira apsolutno gotovo svuda na G.*

(ii) $\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(\gamma\,\cdot\,) = \chi(\gamma)P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi, \quad \gamma \in \Gamma.$

(iii) $\left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right| \in L^1(\Gamma\backslash G)$ *i*

$$\int_{\Gamma\backslash G} \left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right|\, d\mu_{\Gamma\backslash G} \le \int_{\Lambda\backslash G} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G}.$$

Dokaz. Tvrdnja (i) vrijedi jer je

$$\int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} |\varphi(\gamma g)|\, d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \overset{(5.3)}{=} \int_{\Lambda\backslash G} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G} < \infty,$$

tvrdnja (ii) je jasna iz definicije reda $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi$, a tvrdnja (iii) vrijedi jer je

$$\int_{\Gamma\backslash G} \left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right|\, d\mu_{\Gamma\backslash G} \le \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} |\varphi(\gamma g)|\, d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \overset{(5.3)}{=} \int_{\Lambda\backslash G} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G}. \qquad \square$$

Lema 5.3. *Svaki $g \in G$ ima kompaktnu okolinu C u G sa sljedećim svojstvom:*

($\heartsuit$) *Postoji kompaktna okolina U od 1_G u G takva da vrijedi:*

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \qquad \gamma_1 \ne \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 C U^{-1} \cap \gamma_2 C U^{-1} = \emptyset. \tag{5.4}$$

Dokaz. Neka je $g \in G$. Uvjet (5.4) je očito ekvivalentan jednakosti

$$CU^{-1}UC^{-1} \cap \Gamma = \{1_G\}. \tag{5.5}$$

Da postoje kompaktne okoline C od g i U od 1_G u G sa svojstvom (5.5), očito je iz neprekidnosti u $(g, 1_G, 1_G, g)$ funkcije $G^4 \to G$, $(g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto g_1 g_2^{-1} g_3 g_4^{-1}$. $\square$

Propozicija 5.4. *Neka je $\varphi \in C^\infty(G)$ sa svojstvom* (5.1) *takva da je $|\varphi| \in L^1(\Lambda\backslash G)$. Pretpostavimo da je φ K-konačna zdesna i $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačna. Tada vrijedi:*

(i) *Redovi* $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi$ *i* $P_{\Lambda\backslash\Gamma}|\varphi|$ *konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na* G.

(ii) $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi \in C^\infty(G)$.

(iii) *Funkcija* $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi$ *je* K*-konačna zdesna i* $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$*-konačna. Preciznije, vrijedi*

$$(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)(\,\cdot\,\kappa) = P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(\varphi(\,\cdot\,\kappa)), \qquad \kappa \in K, \tag{5.6}$$

$$X(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi) = P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(X\varphi), \qquad X \in \mathfrak{g}. \tag{5.7}$$

Dokaz. (i) Po Lemi 5.3 je dovoljno dokazati da red

$$\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} |\varphi(\gamma g)|$$

konvergira uniformno po g iz proizvoljnog kompaktnog skupa $C \subseteq G$ sa svojstvom ($\heartsuit$). Za takav C, i odgovarajuću U iz ($\heartsuit$), koristeći Teorem 1.3 odaberimo $\alpha \in C_c^\infty(G)$ sa $\operatorname{supp}\alpha \subseteq U$ takvu da je $\varphi = \varphi * \alpha$. Za sve $\gamma \in \Gamma$ i $g \in C$ imamo

$$\begin{aligned}
|\varphi(\gamma g)| &= |(\varphi * \alpha)(\gamma g)| \\
&\le \int_U \left|\varphi\left(\gamma g h^{-1}\right)\alpha(h)\right| d\mu_G(h) \\
&\le |\alpha|_\infty \int_{\gamma g U^{-1}} |\varphi|\, d\mu_G \\
&\le |\alpha|_\infty \int_{\gamma C U^{-1}} |\varphi|\, d\mu_G \\
&\overset{(\heartsuit)}{=} |\alpha|_\infty \int_{\Lambda\backslash\Lambda\gamma C U^{-1}} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G} =: M_C(\gamma).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} M_C(\gamma) = |\alpha|_\infty \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \int_{\Lambda\backslash\Lambda\gamma C U^{-1}} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G} \overset{(\heartsuit)}{\le} |\alpha|_\infty \int_{\Lambda\backslash G} |\varphi|\, d\mu_{\Lambda\backslash G} < \infty,$$

po Weierstrassovu M-testu slijedi da red $\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}|\varphi(\gamma g)|$ konvergira uniformno po $g \in C$.

(ii) Neka je opet $\alpha \in C_c^\infty(G)$ takva da je $\varphi = \varphi * \alpha$. Iz (i) slijedi da je $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi \in C(G)$ pa je konvolucija $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi * \alpha$ dobro definirana funkcija iz $C^\infty(G)$. Dakle, dovoljno je dokazati da je $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi = P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi * \alpha$.

Za svaki $g \in G$ suma i integral na desnoj strani jednakosti

$$\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(g) = \left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(\varphi * \alpha)\right)(g) = \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} \int_{\operatorname{supp}\alpha} \varphi\left(\gamma g h^{-1}\right)\alpha(h)\, d\mu_G(h)$$

komutiraju (red $\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\overline{\chi(\gamma)}\varphi\left(\gamma g h^{-1}\right)$ po (i) konvergira uniformno po $h \in \operatorname{supp}\alpha$, dok je

α ograničena) pa imamo

$$\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(g)=\int_{\operatorname{supp}\alpha}\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\overline{\chi(\gamma)}\varphi\left(\gamma gh^{-1}\right)\alpha(h)\,d\mu_G(h)=\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi*\alpha\right)(g),\quad g\in G.$$

(iii) Jednakost (5.6) očito vrijedi. Za dokaz jednakosti (5.7) sjetimo se da za $\gamma\in\Gamma$, $g\in G$ i $X\in\mathfrak{g}$ primjena Newton-Leibnizove formule na funkciju

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\qquad F(t):=\varphi(\gamma g\exp(tX)),$$

daje

$$\varphi(\gamma g\exp(tX))-\varphi(\gamma g)=\int_0^t(X\varphi)(\gamma g\exp(sX))\,ds,\qquad t\in\mathbb{R},$$

što množenjem sa $\overline{\chi(\gamma)}$ i sumiranjem po $\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma$ daje

$$(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)(g\exp(tX))-(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)(g)=\sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma}\overline{\chi(\gamma)}\int_0^t(X\varphi)(\gamma g\exp(sX))\,ds,\quad t\in\mathbb{R}.\tag{5.8}$$

Suma i integral na desnoj strani formule (5.8) komutiraju. Naime, red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(X\varphi)$ konvergira lokalno uniformno primjenom (i) na funkciju $X\varphi$, koja očito zadovoljava (5.1), glatka je i $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-konačna; K-konačna je zdesna s obzirom da za svaki $\kappa\in K$ vrijedi

$$(X\varphi)(\,\cdot\,\kappa)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi(\,\cdot\,\kappa\exp(tX))=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi(\,\cdot\,\exp(t\operatorname{Ad}(\kappa)X)\kappa)=(\operatorname{Ad}(\kappa)X)\,(\varphi(\,\cdot\,\kappa))$$

i pritom je desna strana element konačnodimenzionalnog prostora $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{Y\,(\varphi(\,\cdot\,\kappa)):Y\in\mathfrak{g},\ \kappa\in K\}$; napokon, $|X\varphi|\in L^1(\Lambda\backslash G)$ jer je $X\varphi=\varphi*X\alpha$ pa imamo ocjenu

$$\int_{\Lambda\backslash G}|X\varphi|\,d\mu_{\Lambda\backslash G}\le\|\varphi\|_{L^1(\Lambda\backslash G)}\,\|X\alpha\|_{L^1(G)}<\infty.$$

Dakle, iz (5.8) slijedi

$$(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)(g\exp(tX))-(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)(g)=\int_0^t\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(X\varphi)\right)(g\exp(sX))\,ds,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Deriviranjem u $t=0$,

$$\left(X(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi)\right)(g)=\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}(X\varphi)\right)(g),$$

što je trebalo pokazati. □

Propozicija 5.5. *Neka je $\varphi\in C^\infty(G)\cap L^1(G)$. Pretpostavimo da je φ K-konačna slijeva* *i $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-konačna. Tada postoji $M \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\varphi(\gamma g)| \leq M, \qquad g \in G.$$

Dokaz. Neka je U okolina od 1_G u G takva da je $UU^{-1} \cap \Gamma = \{1_G\}$. Koristeći Teorem 1.4, odaberimo $\beta \in C_c^\infty(G)$ sa $\operatorname{supp} \beta \subseteq U$ takvu da je $\varphi = \beta * \varphi$. Za sve $\gamma \in \Gamma$ i $g \in G$ imamo

$$|\varphi(\gamma g)| = |(\beta * \varphi)(\gamma g)| \leq \int_U \left|\beta(h) \varphi\left(h^{-1}\gamma g\right)\right| \, d\mu_G(h) \leq |\beta|_\infty \int_{U^{-1}\gamma g} |\varphi| \, d\mu_G. \tag{5.9}$$

Primijetimo da su za svaki $g \in G$ elementi familije $\{U^{-1}\gamma g\}_{\gamma \in \Gamma}$ u parovima disjunktni: za sve $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ vrijedi niz implikacija

$$U^{-1}\gamma_1 g \cap U^{-1}\gamma_2 g \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \gamma_2^{-1} \in UU^{-1} \cap \Gamma = \{1_G\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Dakle, sumiranjem nejednakosti (5.9) po $\gamma \in \Gamma$ slijedi

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\varphi(\gamma g)| \leq |\beta|_\infty \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{U^{-1}\gamma g} |\varphi| \, d\mu_G \leq |\beta|_\infty \int_G |\varphi| \, d\mu_G, \qquad g \in G. \qquad \square$$

Korolar 5.6. *Neka je $\varphi \in C^\infty(G) \cap L^1(G)$. Pretpostavimo da je φ K-konačna zdesna, K-konačna slijeva i $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-konačna. Tada vrijedi:*

(i) *Redovi $P_{\Gamma,\chi}\varphi$ i $P_\Gamma |\varphi|$ konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na G.*

(ii) *$P_{\Gamma,\chi}\varphi \in C^\infty(G)$.*

(iii) *Funkcije $P_{\Gamma,\chi}\varphi$ i $P_\Gamma |\varphi|$ su ograničene.*

(iv) *$P_\Gamma |\varphi| \in \bigcap_{p=1}^\infty L^p(\Gamma \backslash G)$.*

(v) *Funkcija $P_{\Gamma,\chi}\varphi$ je K-konačna zdesna i $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-konačna. Preciznije, vrijedi*

$$\begin{aligned} (P_{\Gamma,\chi}\varphi)(\,\cdot\,\kappa) &= P_{\Gamma,\chi}(\varphi(\,\cdot\,\kappa)), \qquad && \kappa \in K, \\ X(P_{\Gamma,\chi}\varphi) &= P_{\Gamma,\chi}(X\varphi), && X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Dokaz. Sve tvrdnje slijede iz Leme 5.2.(iii) i Propozicija 5.4 i 5.5, uz prisjećanje da za svaki prostor mjere (X, ν) vrijedi

$$L^1(X,\nu) \cap L^\infty(X,\nu) \subseteq \bigcap_{p=1}^\infty L^p(X,\nu). \qquad \square$$

5.2 Poincaréovi redovi na gornjoj poluravnini

Neka su $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, Λ podgrupa od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter.

Za funkciju $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$f\Big|_m \lambda = \chi(\lambda) f, \qquad \lambda \in \Lambda, \tag{5.10}$$

red

$$P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f := \sum_{\gamma \in \Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} f\Big|_m \gamma$$

zovemo **Poincaréovim redom** (težine m) funkcije f s obzirom na $\Lambda\backslash\Gamma$ s karakterom χ. Pišemo $P_{\Lambda\backslash\Gamma} f := P_{\Lambda\backslash\Gamma,1} f$.

Sljedeća lema povezuje Poincaréove redove na $\mathcal{H}$ s Poincaréovim redovima na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Lema 5.7. *Neka je $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Tada red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f$ konvergira apsolutno gotovo svuda odnosno apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$ ako i samo ako red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f$ konvergira na isti način na* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$. *U tom je slučaju*

$$F_{P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f} = P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f. \tag{5.11}$$

Dokaz. Slijedi direktno iz definicija. □

Lema 5.8. *Neka je $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa svojstvom* (5.10) *takva da je*

$$\int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z) < \infty. \tag{5.12}$$

Tada vrijedi:

(i) *Red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f$ konvergira apsolutno gotovo svuda na $\mathcal{H}$.*

(ii) $\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f\right)\Big|_m \gamma = \chi(\gamma) P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f, \quad \gamma \in \Gamma.$

(iii) $\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \left| \left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f\right)(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \leq \frac{\varepsilon_\Gamma}{\varepsilon_\Lambda} \int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z).$

Dokaz. Ovu lemu nije teško dokazati direktno; njen se sljedeći dokaz temelji na činjenici da je ona verzija Leme 5.2 za Poincaréove redove na $\mathcal{H}$.

Po Lemi 3.4 vrijedi

$$F_f(\lambda\,\cdot\,) = \chi(\lambda) F_f, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

i $|F_f| \in L^1\left(\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ pa po Lemi 5.2 vrijedi:

(1) Red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f$ konvergira apsolutno gotovo svuda na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

(2) $\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f\right)(\gamma\,\cdot\,) = \chi(\gamma) P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f, \quad \gamma \in \Gamma.$

(3) $\left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}F_f\right| \in L^1\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i

$$\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}F_f\right|\,d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \leq \int_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}|F_f|\,d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}.$$

Po Lemi 5.7 svojstvo (1) povlači tvrdnju (i) i jednakost (5.11). Zbog (5.11) po Lemi 3.3 svojstvo (2) povlači tvrdnju (ii), dok po Lemi 3.4.(iii) svojstvo (3) povlači tvrdnju (iii). □

Lema 5.9. *Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi* (5.10) *i* (5.12). *Tada red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Po Lemi 5.7 je dovoljno dokazati da red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}F_f$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, a to vrijedi po Propoziciji 5.4.(i): funkcija F_f zadovoljava uvjete te propozicije s obzirom da je po Lemi 3.1 K-konačna zdesna, po Lemi 3.2 glatka i $Z\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\right)$-konačna, dok po Lemi 3.4 vrijedi $|F_f| \in L^1\left(\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i $F_f(\lambda\,\cdot\,) = \chi(\lambda)F_f$, $\lambda \in \Lambda$. □

Lema 5.10. *Pretpostavimo da su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, Λ podgrupa od Γ, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Neka je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takva da vrijedi* (5.10) *i* (5.12). *Tada red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$ i definira element iz $S_m(\Gamma,\chi)$.*

Dokaz. Red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$ po Lemi 5.9. Posebno je $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$. Kako uz to po Lemi 5.8 $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f$ zadovoljava tvrdnje (ii) i (iii) te leme, vrijedi $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f \in S_m(\Gamma,\chi)$ po implikaciji (d) $\Rightarrow$ (a) Propozicije 3.15. □

5.3 Klasični Poincaréovi redovi polucijele težine

Neka su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. Nadalje, pretpostavimo da je ∞ kusp od Γ i da vrijedi

$$\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma_\infty. \tag{5.13}$$

Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\Gamma_\infty = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_h\rangle\,.$$

Definiramo klasične Poincaréove redove

$$\psi_{\Gamma,n,m,\chi} := P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}e^{2\pi i n\frac{\cdot}{h}}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

Sljedeća je lema dobro poznat rezultat koji se može dokazati primjenom Lema 5.9 i 5.10.

Lema 5.11. *Neka je $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tada vrijedi:*

(i) *Red* $\psi_{\Gamma,n,m,\chi}$ *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na* $\mathcal{H}$.

(ii) *Ako je dodatno* Γ *konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, *tada je* $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \in S_m(\Gamma, \chi)$.

U nastavku radimo pod dodatnom pretpostavkom da je Γ konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, dakle $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \in S_m(\Gamma, \chi)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Uvrštavanjem $\gamma \in \Gamma_\infty \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) n_h$ u (3.17) vidimo da je zbog (5.13) svaka $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ h-periodična pa ima Fourierov razvoj

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H},$$

za neki niz $(a_n(f))_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$.

Sljedeća je lema polucijelotežinska varijanta nama važnog dijela teorema [28, Teorem 2.6.10].

Lema 5.12. *Neka je* $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. *Tada vrijedi*

$$a_n(f) = \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi n)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \left\langle f, \psi_{\Gamma,n,m,\chi} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

pri čemu simbol Γ *u nazivniku označava funkciju* $\Gamma : \mathbb{C}_{\Re(s)>0} \to \mathbb{C}$, $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$.

Dokaz. Fiksirajmo strogu fundamentalnu domenu F_Γ za Γ u $\mathcal{H}$. Tvrdnja slijedi iz raspisa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\Gamma \left\langle f, \psi_{\Gamma,n,m,\chi} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} &= \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \chi(\gamma) \overline{\left(e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \Big|_m \gamma \right)(z)} \Im(z)^m \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(3.17)}{=} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \left(f \Big|_m \gamma \right)(z) \overline{\left(e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \Big|_m \gamma \right)(z)} \Im(z)^m \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{(1.9)}{=} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} f(\gamma.z) \overline{e^{2\pi i n \frac{\gamma.z}{h}}} \Im(\gamma.z)^m \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\overset{\text{LTDK}}{=} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{F_\Gamma} f(\gamma.z) \overline{e^{2\pi i n \frac{\gamma.z}{h}}} \Im(\gamma.z)^m \, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} f(z) \overline{e^{2\pi i n \frac{z}{h}}} \Im(z)^m \, dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&= \int_0^h \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty a_k(f) e^{2\pi i k \frac{x+iy}{h}} \overline{e^{2\pi i n \frac{x+iy}{h}}} y^{m-2} \, dy \, dx \\
&\overset{\text{LTDK}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^h \int_\varepsilon^\infty \underbrace{\sum_{k=1}^\infty a_k(f) e^{2\pi i k \frac{x+iy}{h}}}_{\substack{\text{konvergira normalno} \\ \text{na } [0,h]\times[\varepsilon,\infty[}} \underbrace{e^{-2\pi i n \frac{x}{h}} e^{-2\pi n \frac{y}{h}} y^{m-2}}_{\substack{\text{integrabilno} \\ \text{na } [0,h]\times[\varepsilon,\infty[}} \, dy \, dx \\
&\overset{\text{LTDK}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{k=1}^\infty a_k(f) \int_0^h e^{2\pi i (k-n) \frac{x}{h}} \, dx \int_\varepsilon^\infty e^{-2\pi (k+n) \frac{y}{h}} y^{m-2} \, dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} a_n(f) h \int_\varepsilon^\infty e^{-4\pi n \frac{y}{h}} y^{m-2} \, dy \\
&= a_n(f) \frac{h^m}{(4\pi n)^{m-1}} \Gamma(m-1).
\end{aligned}$$

Pritom kratica LTDK označava primjenu Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji. Naglasimo da je njegova primjena u četvrtoj jednakosti gornjeg raspisa opravdana jer su parcijalne sume reda pod integralom u trećem retku apsolutno dominirane podintegralnom funkcijom u integralu

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \left| f(\gamma.z) e^{2\pi i n \frac{\gamma.z}{h}} \Im(\gamma.z)^m \right| \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} \left| f(z) e^{2\pi i n \frac{z}{h}} \Im(z)^m \right| \, dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\quad \leq \sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \cdot \int_0^h \int_0^\infty e^{-2\pi \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2} \, dy \, dx = \frac{h^{\frac{m}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}-1}} \Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) \sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|,
\end{aligned}$$

a desna je strana konačna po Propoziciji 3.15.(a)⇒(b). □

Sljedeća je lema polucijelotežinska varijanta teorema [35, Teorem 2-10] koja poopćuje konstrukciju klasičnih Poincaréovih redova.

Lema 5.13. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$ takav da je $\sum_{n=1}^\infty |a_n| \, n^{1-\frac{m}{2}} < \infty$. Tada dvostruki red*

$$S := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \sum_{n=1}^\infty \overline{\chi(\gamma)} a_n e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \Big|_m \gamma \tag{5.14}$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$, pripada prostoru $S_m(\Gamma,\chi)$ i jednak je

$$P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}\right) = \sum_{n=1}^\infty a_n \psi_{\Gamma,n,m,\chi}. \tag{5.15}$$

Redovi na objema stranama jednakosti (5.15) *konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno, a red na desnoj strani i u topologiji prostora $S_m(\Gamma,\chi)$.*

Dokaz. Članovi reda S dobro su definirani, tj. vrijedi

$$e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \Big|_m \gamma = \chi(\gamma) e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}, \qquad \gamma\in\Gamma_\infty, \tag{5.16}$$

s obzirom da je zbog (5.13) jednakost (5.16) ekvivalentna h-periodičnosti funkcije $e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}$.

Da dvostruki red S konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$, slijedi po [28, Korolar 2.6.4] iz ocjene

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \sum_{n=1}^\infty \left| a_n \left(e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \Big|_m \gamma \right)(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\quad \overset{(1.9)}{=} \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \left| e^{2\pi i n \frac{\gamma.z}{h}} \Im(\gamma.z)^{\frac{m}{2}} \right| \, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\quad = \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} \left| e^{2\pi i n \frac{z}{h}} \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| \, dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) \qquad (5.17) \\
&\quad = \sum_{n=1}^\infty |a_n| \int_0^h \int_0^\infty e^{-2\pi n \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2} \, dy \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n^{1-\frac{m}{2}} \frac{h^{\frac{m}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}-1}} \Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) \\
&< \infty
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Posebno je $S =$ (5.15), pri čemu redovi na objema stranama jednakosti (5.15) konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.

Kako je $S_m(\Gamma, \chi)$ konačnodimenzionalan Hausdorffov topološki vektorski prostor, on je zatvoren potprostor prostora $C(\mathcal{H})$ s topologijom lokalno uniformne konvergencije. Dakle, lokalno uniformna konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_{\Gamma,n,m,\chi}$ prema S povlači da je $S \in S_m(\Gamma, \chi)$ i da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_{\Gamma,n,m,\chi}$ konvergira prema S u topologiji prostora $S_m(\Gamma, \chi)$. $\square$

Poglavlje 6

Poincaréovi redovi K-konačnih matričnih koeficijenata i primjene

Neka su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. U ovom poglavlju pomoću Poincaréovih redova $P_\Gamma F_{k,m}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, konstruiramo sustave izvodnica za prostore $S_m(\Gamma, \chi)$ i dokazujemo niz rezultata o kusp-formama polucijele težine. Većina su tih rezultata polucijelotežinske varijante rezultata iz [32], [34], [35] i [36]. Detaljnije:

- U potpoglavlju 6.1 dokazujemo da za svaki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ red $P_\Gamma F_{k,m}$ pripada prostoru $\mathcal{A}\left(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ i u Teoremu 6.3 određujemo njegov skalarni produkt s proizvoljnom $\varphi \in \mathcal{A}\left(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$.

- U potpoglavlju 6.2 prevodimo rezultate iz potpoglavlja 6.1 u rezultate o kusp-formama iz prostora $S_m(\Gamma, \chi)$.

- U potpoglavlju 6.3 određujemo Poincaréove redove $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} \in S_m(\Gamma, \chi)$ koji u smislu Rieszova teorema reprezentiraju linearne funkcionale $S_m(\Gamma, \chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f^{(k)}(\xi)$, za $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Ujedno dokazujemo da za sve $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ vrijedi $\sup_{z \in \mathcal{H}} \Im(z)^{\frac{m}{2}+k} \left| f^{(k)}(z) \right| < \infty$ i $\sup_{z,\xi \in \mathcal{H}} \Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k} \Im(z)^{\frac{m}{2}} \left| \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) \right| < \infty$.

- U potpoglavlju 6.4 uz neke dodatne pretpostavke na Γ i χ određujemo Fourierov razvoj i razvoj u red klasičnih Poincaréovih redova kusp-formi $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$. Kao posljedicu dobivamo ocjene derivacija klasičnih Poincaréovih redova polucijele težine.

- U potpoglavlju 6.5 određujemo formulu za djelovanje Heckeovih operatora $T_{p^2} : S_m(N, \chi) \to S_m(N, \chi)$ na kusp-forme $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ u terminima razvoja potonjih u red klasičnih Poincaréovih redova. Ovdje su $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i p prost broj takav da $p \nmid N$.

6.1 Poincaréovi redovi matričnih koeficijenata $F_{k,m}$

Lema 6.1. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada redovi* $P_\Gamma |F_{k,m}|$ *i* $P_\Gamma F_{k,m}$ *konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *i* $P_\Gamma F_{k,m} \in \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$.

Dokaz. Po Korolaru 4.4 funkcija $F_{k,m}$ je K-konačan matrični koeficijent reprezentacije $\pi_{D_m^+}$ koji se zdesna transformira kao χ_m, a slijeva kao χ_{m+2k}. Posebno je $F_{k,m} \in C^\infty\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i, s obzirom da $\mathcal{C}$ na $\left(H_{D_{m^+}}\right)_K$ po Propoziciji 2.2.(v) djeluje skalarom $m\left(\frac{m}{2}-1\right)$, vrijedi $\mathcal{C}F_{k,m} = m\left(\frac{m}{2}-1\right)F_{k,m}$ (ovo slijedi i iz Leme 3.2.(i) s obzirom da je $F_{k,m} = F_{f_{k,m}}$ po Korolaru 4.10). Posebno je funkcija $F_{k,m}$ $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$-konačna. Kako je reprezentacija $\pi_{D_m^+}$ po Korolaru 4.6.(iii) integrabilna, vrijedi i $F_{k,m} \in L^1\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$. Po Korolaru 5.6 i Lemi 5.2.(ii) slijedi da redovi $P_\Gamma |F_{k,m}|$ i $P_\Gamma F_{k,m}$ konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i da funkcija $P_\Gamma F_{k,m}$ pripada prostoru $C^\infty\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap L^2\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ i ima svojstva (A1) – (A2) iz Definicije 3.23, dakle $P_\Gamma F_{k,m} \in \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. □

Lema 6.2. *Neka su* $m \in \frac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Tada vrijedi:*

(i) $\|F_{k,m}\|^2_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} = \dfrac{4\pi k!}{\prod_{r=0}^k (m-1+r)}$.

(ii) $\left((n^+)^k F_{k,m}\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}) = k!$.

Dokaz. (i) Imamo

$$\|F_{k,m}\|^2_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \overset{(1.37)}{\underset{(4.3)}{=}} \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\int_0^\infty\int_0^{4\pi} \frac{\tanh^{2k}(t)}{\cosh^{2m}(t)}\sinh(2t)\,d\theta_1\,dt\,d\theta_2,$$

što je, uvođenjem supstitucije $x = \tanh^2(t)$ i korištenjem identiteta $\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$ i $\frac{1}{\cosh^2(t)} = 1 - \tanh^2(t)$, jednako

$$4\pi\int_0^1 x^k(1-x)^{m-2}\,dx = \frac{4\pi k!}{\prod_{r=0}^k(m-1+r)}.$$

Zadnja je jednakost dobivena parcijalnom integracijom.

(ii) Po Korolaru 4.10 je $F_{k,m} = F_{f_{k,m}}$ pa tvrdnja slijedi primjenom (3.7) na funkciju $f_{k,m}$ sa $x = t = 0$ i $y = 1$. □

Teorem 6.3. *Neka su* Γ *diskretna podgrupa konačnog kovolumena u* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $m \in \frac{5}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $\varphi \in \mathcal{A}\left(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. *Tada vrijedi*

$$\langle \varphi,\, P_\Gamma F_{k,m}\rangle_{L^2(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} = \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^k(m-1+r)}\left(\left(n^+\right)^k\varphi\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}). \tag{6.1}$$

Dokaz. U slučaju kad je $\varphi \equiv 0$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da $\varphi \not\equiv 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
\langle \varphi,\, P_\Gamma F_{k,m} \rangle_{L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} &= \int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \varphi(\sigma) \overline{\sum_{\gamma\in\Gamma} F_{k,m}(\gamma\sigma)}\, d\mu_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(\sigma) \\
&= \int_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(\gamma\sigma) \overline{F_{k,m}(\gamma\sigma)}\, d\mu_{\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(\sigma) \\
&= \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \varphi \overline{F_{k,m}}\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}. \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Sjetimo se da je $F_{k,m} \in L^1\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$, dok je φ neprekidna i po Korolaru 3.27 ograničena. Po Korolaru 1.17 slijedi da je funkcija $r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi \in L^2\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \cap C\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ dana formulom

$$\left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)(x) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \overline{F_{k,m}(y)}\varphi(xy)\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(y), \qquad x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim. \qquad (6.3)$$

Posebno je

$$\left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)\left(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \varphi \overline{F_{k,m}}\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$$

pa (6.2) povlači da je

$$\langle \varphi,\, P_\Gamma F_{k,m} \rangle_{L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} = \left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)\left(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right). \qquad (6.4)$$

Da bismo izračunali $\left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)\left(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right)$, primijetimo da po Lemi 2.7 φ generira χ_m-izotipičnu komponentu neke zatvorene podreprezentacije H_φ od r_Γ unitarno ekvivalentne reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$. Očito je $r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi \in H_\varphi$. Preciznije, $r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi$ pripada χ_{m+2k}-izotipičnoj komponenti od H_φ: kako se $F_{k,m}$ transformira slijeva kao χ_{m+2k}, imamo

$$\begin{aligned}
\left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)(x\kappa) &\overset{(6.3)}{=} \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \overline{F_{k,m}(y)}\varphi(x\kappa y)\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(y) \\
&= \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \overline{F_{k,m}\left(\kappa^{-1}y\right)}\varphi(xy)\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(y) \\
&= \chi_{m+2k}(\kappa) \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \overline{F_{k,m}(y)}\varphi(xy)\, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}(y) \\
&\overset{(6.3)}{=} \chi_{m+2k}(\kappa)\left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

za sve $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\kappa \in K$. Po svojstvima (i) i (iii) iz Propozicije 2.2 slijedi da je

$$r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi = \lambda\left(n^+\right)^k \varphi \qquad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (6.5)$$

Da bismo izračunali λ, primijenimo Lemu 2.7, sa $\Gamma = \left\{1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right\}$, na funkciju $F_{k,m}$. (Da funkcija $F_{k,m}$ zadovoljava sve uvjete Leme 2.7, vidi se kao u dokazu Leme 6.1.) Dobivamo da $F_{k,m}$ razapinje χ_m-izotipičnu komponentu neke zatvorene podreprezentacije $H_{F_{k,m}}$ od r unitarno ekvivalentne reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$. Neka je $\Phi : H_\varphi \to H_{F_{k,m}}$ unitarna ekvivalencija.

Kako funkcije φ odnosno $F_{k,m}$ razapinju χ_m-izotipične komponente reprezentacija H_φ odnosno $H_{F_{k,m}}$, vrijedi

$$\Phi\varphi = sF_{k,m} \quad \text{za neki } s \in \mathbb{C}^\times. \tag{6.6}$$

Primjenom Φ na obje strane jednakosti (6.5) dobivamo

$$r\left(\overline{F_{k,m}}\right)\Phi\varphi = \lambda\left(n^+\right)^k \Phi\varphi$$

pa je po (6.6)

$$r\left(\overline{F_{k,m}}\right)F_{k,m} = \lambda\left(n^+\right)^k F_{k,m}.$$

Evaluacijom (neprekidnih predstavnika) obiju strana ove jednakosti u $1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}$ i koristeći da je $\left(r\left(\overline{F_{k,m}}\right)F_{k,m}\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}) = \|F_{k,m}\|^2_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}$ po Korolaru 1.17, dobivamo

$$\lambda = \frac{\|F_{k,m}\|^2_{L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}}{\left(\left(n^+\right)^k F_{k,m}\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim})} = \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^k (m-1+r)}, \tag{6.7}$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi po Lemi 6.2.

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi,\, P_\Gamma F_{k,m}\rangle_{L^2(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} &\overset{(6.4)}{=} \left(r_\Gamma\left(\overline{F_{k,m}}\right)\varphi\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}) \\
&\overset{(6.5)}{=} \lambda\left(\left(n^+\right)^k\varphi\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}) \\
&\overset{(6.7)}{=} \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^k (m-1+r)}\left(\left(n^+\right)^k\varphi\right)(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}).
\end{aligned}$$

□

6.2 Pripadni Poincaréovi redovi na $\mathcal{H}$

Teorem 6.4. *Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. Neka su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada vrijedi:*

(i) *Red $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.*

(ii) *$P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \in S_m(\Gamma,\chi)$.*

(iii) *Za svaku $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ vrijedi*

$$\langle f,\, P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l}(2i)^l \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^l (m-1+r)} f^{(l)}(i).$$

(iv) *Skup $\{P_{\Gamma,\chi} f_{n,m} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ je sustav izvodnica za $S_m(\Gamma,\chi)$.*

Dokaz. (i) Po Lemi 5.7 dovoljno je dokazati da red $P_{\Gamma,\chi} F_{f_{k,m}} \overset{(4.6)}{=} P_{\Gamma,\chi} F_{k,m}$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, što vrijedi jer po Lemi 6.1 red $P_\Gamma |F_{k,m}|$ konvegira lokalno uniformno na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$.

Dokažimo sad tvrdnje (ii) i (iii) u slučaju kad je $\chi = 1$:

(ii) Budući da funkcija $F_{P_\Gamma f_{k,m}} \overset{(4.6)}{\underset{(5.11)}{=}} P_\Gamma F_{k,m}$ pripada prostoru $\mathcal{A}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$ po Lemi 6.1, po Lemi 3.1 i Teoremu 3.24 funkcija $P_\Gamma f_{k,m}$ pripada prostoru $S_m(\Gamma)$.

(iii) Neka je $f \in S_m(\Gamma)$. Po Teoremu 3.24 vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle f,\, P_\Gamma f_{k,m}\rangle_{S_m(\Gamma)} &= \left\langle F_f,\, F_{P_\Gamma f_{k,m}}\right\rangle_{L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \\
&\overset{(4.6)}{\underset{(5.11)}{=}} \langle F_f,\, P_\Gamma F_{k,m}\rangle_{L^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \\
&\overset{(6.1)}{=} \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)} \left(\left(n^+\right)^k F_f\right)\left(1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}\right) \\
&\overset{(3.7)}{=} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (2i)^l \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^{l}(m-1+r)} f^{(l)}(i).
\end{aligned}$$

Tvrdnje (ii) i (iii) u slučaju kad je $\chi \neq 1$ slijede iz upravo dokazanih tvrdnji o $P_{\ker\chi} f_{k,m}$ primjenom Leme 3.22, s obzirom da je

$$P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} = P_{\ker\chi\backslash\Gamma,\chi} P_{\ker\chi} f_{k,m}.$$

(iv) Dovoljno je dokazati da je svaka $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ koja zadovoljava

$$\langle f,\, P_{\Gamma,\chi} f_{n,m}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

identički jednaka 0. Iz (iii) indukcijom po $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ slijedi da takva f zadovoljava $f^{(n)}(i) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ pa je $f \equiv 0$ s obzirom da je $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$. □

6.3 Kusp-forme $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$

Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Za $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ definiramo funkciju $\delta_{k,m,\xi} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$\delta_{k,m,\xi}(z) := \frac{(2i)^m}{4\pi}\left(\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)\right)\frac{1}{\left(z-\overline{\xi}\right)^{m+k}}. \tag{6.8}$$

Očito je $\delta_{k,m,\xi}(z) = \left(\frac{d}{d\overline{\xi}}\right)^k \delta_{0,m,\xi}(z)$.

Propozicija 6.5. *Neka su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada red*

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) := \left(P_{\Gamma,\chi}\delta_{k,m,\xi}\right)(z) = \frac{(2i)^m}{4\pi}\left(\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)\right)\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{\overline{\chi(\gamma)}}{\left(\gamma.z-\overline{\xi}\right)^{m+k}}\eta_\gamma(z)^{-2m} \tag{6.9}$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$ i pripada prostoru $S_m(\Gamma, \chi)$.

Dokaz. Ovo se može dokazati primjenom Leme 5.10. Ovdje dajemo alternativan dokaz. Imamo

$$f_{k,m} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-2i)^l \frac{4\pi}{\prod_{r=0}^{l}(m-1+r)} \delta_{l,m,i}, \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{6.10}$$

dakle po binomnoj formuli inverzije vrijedi

$$\delta_{k,m,i} = \frac{\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)}{4\pi(2i)^k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l f_{l,m}, \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

pa tvrdnja u slučaju kad je $\xi = i$ slijedi iz Teorema 6.4.(i) i (ii). Tvrdnja za proizvoljan $\xi = x + iy \in \mathcal{H}$ (sa $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$) sad slijedi po Lemi 3.21 iz identiteta

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} = y^{-\frac{m}{2}-k} \Delta_{(n_x a_y)^{-1}\Gamma n_x a_y,k,m,i,\chi^{n_x a_y}}\Big|_m (n_x a_y)^{-1}, \tag{6.11}$$

koji se lako provjeri slijedeći definicije. $\square$

Glavni je rezultat ovog potpoglavlja Teorem 6.8. U njegovu ćemo analitičkom dokazu koristiti sljedeće dvije tehničke leme.

Lema 6.6. *Neka su (X, dx) prostor mjere i D otvoren podskup od $\mathbb{C}$. Neka je $f : D \times X \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa sljedećim svojstvima:*

(a) *Za svaki $x \in X$ vrijedi $f(\,\cdot\,, x) \in \mathrm{Hol}(D)$.*

(b) *Za svaku kružnicu $C \subseteq D$ vrijedi $\int_{C\times X} |f(z,x)|\, d(z,x) < \infty$.*

Tada je $F : D \to \mathbb{C}$,

$$F(z) := \int_X f(z,x)\, dx, \tag{6.12}$$

dobro definirana funkcija iz $\mathrm{Hol}(D)$ i vrijedi

$$F^{(k)}(z) = \int_X \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^k f(\zeta, x)\Big|_{\zeta=z} dx, \qquad z \in D,\ k \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{6.13}$$

Dokaz. Bez (6.13) ovo je [28, Lema 6.1.5]. Dokažimo (6.13). Neka je $z \in D$. Fiksirajmo $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \leq \delta\} \subseteq D$. Za svaki $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ imamo

$$\begin{aligned} F^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\delta} \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\, d\zeta \\ &\overset{(6.12)}{=} \int_X \left(\frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\delta} \frac{f(\zeta,x)}{(\zeta-z)^{k+1}}\, d\zeta \right) dx \\ &= \int_X \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^k f(\zeta,x)\Big|_{\zeta=z} dx \end{aligned}$$

primjenom Cauchyjeve integralne formule za derivacije u prvoj i trećoj te Fubinijeva teorema u drugoj jednakosti. $\square$

Lema 6.7. *Neka je $f \in S_m(\Gamma,\chi)$. Tada je funkcija $I_f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,*

$$I_f(\xi) := \langle f,\, \Delta_{\Gamma,0,m,\xi,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}\,,$$

holomorfna i vrijedi $I_f^{(k)}(\xi) = \langle f,\, \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}$ za sve $\xi \in \mathcal{H}$ i $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Dokaz. Za sve $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle f,\, \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} &\overset{(3.19)}{\underset{(6.9)}{=}} \varepsilon_\Gamma^{-1}\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z)\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi(\gamma)\overline{\left(\delta_{k,m,\xi}\big|_m\gamma\right)(z)}\,\Im(z)^m\,dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z)\\
&\overset{(3.17)}{=} \varepsilon_\Gamma^{-1}\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(f\big|_m\gamma\right)(z)\overline{\left(\delta_{k,m,\xi}\big|_m\gamma\right)(z)}\,\Im(z)^m\,dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z)\\
&\overset{(1.9)}{=} \varepsilon_\Gamma^{-1}\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma.z)\overline{\delta_{k,m,\xi}(\gamma.z)}\,\Im(\gamma.z)^m\,dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z)\\
&= \int_{\mathcal{H}} f(z)\overline{\delta_{k,m,\xi}(z)}\,\Im(z)^m\,dv_{\mathcal{H}}(z)\\
&\overset{(6.8)}{=} \frac{(-2i)^m}{4\pi}\left(\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)\right)\int_{\mathcal{H}}\frac{f(z)}{\left(\overline{z}-\xi\right)^{m+k}}\Im(z)^m\,dv_{\mathcal{H}}(z).
\end{aligned}\tag{6.14}$$

Tvrdnja leme slijedi iz (6.14) primjenom Leme 6.6. Uvjet (b) Leme 6.6 je zadovoljen s obzirom da vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}}\frac{|f(z)|}{\left|\overline{z}-\xi\right|^{m+k}}\Im(z)^m\,dv_{\mathcal{H}}(z) &\leq \left(\sup_{z\in\mathcal{H}}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right)\int_{\mathcal{H}}\frac{\Im(z)^{\frac{m}{2}}}{\left|z-\overline{\xi}\right|^{m+k}}\,dv_{\mathcal{H}}(z)\\
&= \left(\sup_{z\in\mathcal{H}}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right)\int_{\mathcal{H}}\frac{\Im(z)^{\frac{m}{2}}}{\left|z+i\right|^{m+k}}\,dv_{\mathcal{H}}(z)\frac{1}{\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}}
\end{aligned}\tag{6.15}$$

(uvođenjem supstitucije $z \mapsto n_{\Re(\xi)}a_{\Im(\xi)}.z$ za zadnju jednakost), a desna je strana po Propoziciji 3.15.(a)$\Rightarrow$(b) ograničena za ξ iz proizvoljne kružnice $C \subseteq \mathcal{H}$. $\square$

Teorem 6.8. *Neka je $\xi \in \mathcal{H}$. Tada vrijedi*

$$\langle f,\, \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = f^{(k)}(\xi), \qquad f \in S_m(\Gamma,\chi),\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{6.16}$$

Nadalje, skup $\{\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ je sustav izvodnica prostora $S_m(\Gamma,\chi)$.

Dokaz. Koristeći (6.10), Teorem 6.4.(iii) možemo zapisati na sljedeći način: za sve $f \in S_m(\Gamma,\chi)$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(2i)^l\frac{4\pi}{\prod_{r=0}^{l}(m-1+r)}\langle f,\, \Delta_{\Gamma,l,m,i,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(2i)^l\frac{4\pi}{\prod_{r=0}^{l}(m-1+r)}f^{(l)}(i).$$

Odavde indukcijom po $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ slijedi da za sve $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi

$$\langle f,\, \Delta_{\Gamma,k,m,i,\chi} \rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} = f^{(k)}(i). \tag{6.17}$$

Sada jednakost (6.16) za proizvoljan $\xi = x + iy \in \mathcal{H}$ (sa $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}_{>0}$) možemo dokazati na dva načina. Prvi je algebarski (usp. dokaz leme [36, Lema 3-8]). Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Računanjem k-te derivacije u $z = i$ obiju strana jednakosti $f(x + yz) = y^{-\frac{m}{2}} \left(f\big|_m n_x a_y \right)(z)$ dobivamo, koristeći Lemu 3.21, da je

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(\xi) &= y^{-\frac{m}{2}-k} \left(f\big|_m n_x a_y \right)^{(k)}(i) \\
&\overset{(6.17)}{=} y^{-\frac{m}{2}-k} \left\langle f\big|_m n_x a_y,\, \Delta_{(n_x a_y)^{-1}\Gamma n_x a_y,k,m,i,\chi^{n_x a_y}} \right\rangle_{S_m\left((n_x a_y)^{-1}\Gamma n_x a_y, \chi^{n_x a_y}\right)} \\
&= \left\langle f,\, y^{-\frac{m}{2}-k} \Delta_{(n_x a_y)^{-1}\Gamma n_x a_y,k,m,i,\chi^{n_x a_y}}\big|_m (n_x a_y)^{-1} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} \\
&\overset{(6.11)}{=} \langle f,\, \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi} \rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}.
\end{aligned}$$

Drugi način da dokažemo (6.16) iz (6.17) je analitički. Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Po Lemi 6.7 jedakost (6.17) pokazuje da vrijedi

$$I_f^{(k)}(i) = f^{(k)}(i), \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

dakle funkcije f i I_f imaju isti Taylorov razvoj u i. Kako su obje holomorfne na $\mathcal{H}$, po jedinstvenosti analitičkog proširenja slijedi da je

$$I_f^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi), \qquad \xi \in \mathcal{H},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

a ovo je po Lemi 6.7 jednakost (6.16).

Druga tvrdnja teorema slijedi iz (6.16) kao u dokazu Teorema 6.4.(iv). □

Jednakosti (6.16) i (6.14) dokazuju sljedeću integralnu formulu:

Korolar 6.9. *Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Tada za sve $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ vrijedi*

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{(-2i)^m}{4\pi} \left(\prod_{r=0}^{k} (m - 1 + r) \right) \int_{\mathcal{H}} \frac{f(z)}{(\overline{z} - \xi)^{m+k}} \Im(z)^m \, dv_{\mathcal{H}}(z).$$

Općenitije, Korolar 6.9 vrijedi za sve $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ takve da je $\sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| < \infty$. To slijedi iz polucijelotežinske verzije teorema [28, Teorem 6.2.2].

Korolar 6.9 ima sljedeću jednostavnu posljedicu.

Korolar 6.10. *Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Tada za svaki $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi*

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}} \left| f^{(k)}(\xi)\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k} \right| < \infty.$$

Dokaz. Po Korolaru 6.9 i nejednakosti (6.15) vrijedi

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\left|f^{(k)}(\xi)\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\right| \leq \frac{2^m}{4\pi}\left(\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)\right)\left(\sup_{z\in\mathcal{H}}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right)\int_{\mathcal{H}}\frac{\Im(z)^{\frac{m}{2}}}{|z+i|^{m+k}}\,dv_{\mathcal{H}}(z),$$

a desna je strana konačna po Propoziciji 3.15.(a)⇒(b). □

Sad lako možemo dokazati sljedeći rezultat (usp. [35, (1-5)]).

Propozicija 6.11. *Neka je $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada vrijedi*

$$\sup_{z,\xi\in\mathcal{H}}\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\Im(z)^{\frac{m}{2}}\left|\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z)\right|<\infty.$$

Dokaz. Fiksirajmo ortonormiranu bazu $\{f_1,\ldots,f_d\}$ za $S_m(\Gamma,\chi)$. Imamo

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z)=\sum_{l=1}^{d}\langle\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi},\,f_l\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}\,f_l(z)\overset{(6.16)}{=}\sum_{l=1}^{d}\overline{f_l^{(k)}(\xi)}f_l(z),$$

dakle

$$\sup_{z,\xi\in\mathcal{H}}\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\Im(z)^{\frac{m}{2}}\left|\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z)\right|\leq\sum_{l=1}^{d}\left(\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\left|f_l^{(k)}(\xi)\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\right|\right)\left(\sup_{z\in\mathcal{H}}\left|f_l(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|\right),$$

a desna je strana konačna po Korolaru 6.10. □

6.4 Dva razvoja kusp-formi $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$

Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m\in\frac{5}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nadalje, pretpostavimo da je ∞ kusp od Γ i da vrijedi

$$\eta_\gamma^{-2m}=\chi(\gamma),\qquad\gamma\in\Gamma_\infty.$$

Neka je $h\in\mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\Gamma_\infty=Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_h\rangle.$$

Sjetimo se da je za svaki $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ definiran klasičan Poincaréov red

$$\psi_{\Gamma,n,m,\chi}:=P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}e^{2\pi in\frac{\cdot}{h}}\in S_m(\Gamma,\chi)$$

(vidi početak potpoglavlja 5.3). Nadalje, po Lemi 5.12 svaka $f\in S_m(\Gamma,\chi)$ ima sljedeći

Fourierov razvoj:

$$f(z) = \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}}{\Gamma(m-1)h^m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \left\langle f,\, \psi_{\Gamma,n,m,\chi} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H}. \tag{6.18}$$

Ovdje koristimo standardnu oznaku za gama-funkciju: $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$, $\Re(s) > 0$.

Glavni je rezultat ovog poglavlja Teorem 6.13 – polucijelotežinska verzija teorema [34, Teorem 3-5] koja daje Fourierov razvoj kusp-formi $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ i njihov razvoj u red klasičnih Poincaréovih redova. Lema 6.12 će riješiti probleme s konvergencijom u dokazu Teorema 6.13.

Lema 6.12. *Neka su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+k-1} e^{-2\pi i n \frac{\overline{\xi}}{h}} \psi_{\Gamma,n,m,\chi} \tag{6.19}$$

konvergira u $S_m(\Gamma, \chi)$ i apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom Leme 5.13 na $a_n := n^{m+k-1} e^{-2\pi i n \frac{\overline{\xi}}{h}}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Da je zadovoljen uvjet $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n^{1-\frac{m}{2}} < \infty$, dokazuje jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{m+k-1} e^{-2\pi i n \frac{\overline{\xi}}{h}} \right| n^{1-\frac{m}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{m}{2}+k} e^{-2\pi n \frac{\Im(\xi)}{h}},$$

naime desna je strana konačna po d'Alembertovu kriteriju konvergencije. $\square$

Teorem 6.13. *Neka su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada vrijedi:*

(i) $\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}$ *ima sljedeći Fourierov razvoj:*

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) = \frac{\varepsilon_\Gamma\, (4\pi)^{m-1}}{\Gamma(m-1)h^m} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1} \overline{\psi^{(k)}_{\Gamma,n,m,\chi}(\xi)} e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H}. \tag{6.20}$$

(ii) *Vrijedi*

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) = \frac{\varepsilon_\Gamma\, (4\pi)^{m-1}\, (-2\pi i)^k}{\Gamma(m-1)h^{m+k}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+k-1} e^{-2\pi i n \frac{\overline{\xi}}{h}} \psi_{\Gamma,n,m,\chi}(z), \qquad z \in \mathcal{H}. \tag{6.21}$$

Pritom desna strana konvergira u $S_m(\Gamma, \chi)$ i apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H}$.

Dokaz. Ovo se može dokazati analogno dokazu teorema [34, Teorem 3-5], pri čemu sve probleme s konvergencijom rješava Lema 6.12. Ovdje dajemo kraći dokaz.

(i) Jednakost (6.20) slijedi iz (6.18) s obzirom da je

$$\left\langle \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi},\, \psi_{\Gamma,n,m,\chi} \right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} \overset{(6.16)}{=} \overline{\psi^{(k)}_{\Gamma,n,m,\chi}(\xi)}.$$

(ii) Imamo

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) &\overset{(6.16)}{=} \langle \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi},\, \Delta_{\Gamma,0,m,z,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} \overset{(6.16)}{=} \overline{\Delta^{(k)}_{\Gamma,0,m,z,\chi}(\xi)} \\
&\overset{(6.20)}{=} \overline{\frac{\varepsilon_\Gamma\,(4\pi)^{m-1}}{\Gamma(m-1)h^m}\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\psi_{\Gamma,n,m,\chi}(z)\Big(\frac{2\pi i n}{h}\Big)^k e^{2\pi i n\frac{\xi}{h}}} \\
&= \frac{\varepsilon_\Gamma\,(4\pi)^{m-1}\,(-2\pi i)^k}{\Gamma(m-1)h^{m+k}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{m+k-1}e^{-2\pi i n\frac{\overline{\xi}}{h}}\psi_{\Gamma,n,m,\chi}(z), \qquad z\in\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Tvrdnja o konvergenciji slijedi iz Leme 6.12. □

Sad lako možemo dokazati neke ocjene derivacija klasičnih Poincaréovih redova (usp. [35, Teorem 1-2]):

Korolar 6.14. *Neka je $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada je*

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathcal{H},\\ n\in\mathbb{Z}_{>0}}} n^{\frac{m}{2}-1}\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\left|\psi^{(k)}_{\Gamma,n,m,\chi}(\xi)\right| < \infty.$$

Dokaz. Fiksirajmo ortonormiranu bazu $\{f_1, f_2, \ldots, f_d\}$ za $S_m(\Gamma,\chi)$. Za svaki $l\in\{1,2,\ldots,d\}$ neka je $f_l(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_l)e^{2\pi i n\frac{z}{h}}$ Fouierov razvoj kusp-forme f_l. Imamo

$$\Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi}(z) = \sum_{l=1}^{d}\langle \Delta_{\Gamma,k,m,\xi,\chi},\, f_l\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}\, f_l(z) \overset{(6.16)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{d}\overline{f_l^{(k)}(\xi)}a_n(f_l)\right)e^{2\pi i n\frac{z}{h}}, \quad z,\xi\in\mathcal{H},$$

pa je po Teoremu 6.13.(i)

$$\frac{\varepsilon_\Gamma\,(4\pi)^{m-1}}{\Gamma(m-1)h^m}n^{m-1}\overline{\psi^{(k)}_{\Gamma,n,m,\chi}(\xi)} = \sum_{l=1}^{d}\overline{f_l^{(k)}(\xi)}a_n(f_l), \qquad n\in\mathbb{Z}_{>0},\ \xi\in\mathcal{H}.$$

Dakle, vrijedi

$$\sup_{\substack{\xi\in\mathcal{H},\\ n\in\mathbb{Z}_{>0}}} n^{\frac{m}{2}-1}\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\left|\psi^{(k)}_{\Gamma,n,m,\chi}(\xi)\right| \leq \frac{\Gamma(m-1)h^m}{\varepsilon_\Gamma(4\pi)^{m-1}}\sum_{l=1}^{d}\left(\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\left|f_l^{(k)}(\xi)\Im(\xi)^{\frac{m}{2}+k}\right|\right)\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}\frac{|a_n(f_l)|}{n^{\frac{m}{2}}}\right),$$

i pritom je desna strana konačna po Korolaru 6.10 i Lemi 3.17. □

6.5 Primjena na Heckeove operatore

Neka su $m\in\frac{5}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $N\in 4\mathbb{Z}_{>0}$. Neka je χ paran Dirichletov karakter modulo N. Za sve $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi, z\in\mathcal{H}$ imamo

$$\Delta_{\Gamma_0(N),k,m,\xi,\chi}(z) \overset{(6.9)}{=} \frac{(2i)^m}{8\pi}\left(\prod_{r=0}^{k}(m-1+r)\right)\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)}\frac{\overline{\chi(\gamma)}}{\left(\gamma.z-\overline{\xi}\right)^{m+k}}J(\gamma,z)^{-2m}.$$

Grupa $\mathbf{\Gamma}_0(N)$ i karakter χ zadovoljavaju pretpostavke prvog odlomka potpoglavlja 6.4 pa imamo klasične Poincaréove redove

$$\psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n,m,\chi}(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \overline{\chi(\gamma)} e^{2\pi i n\gamma . z} J(\gamma, z)^{-2m}, \qquad z \in \mathcal{H},\ n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

i kusp-forme $\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi}$ imaju razvoj (6.21) u red klasičnih Poincaréovih redova. U Korolaru 6.15 u terminima tog razvoja izražavamo djelovanje Heckeovih operatora polucijele težine na kusp-forme $\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi}$ (usp. [34, Lema 5-8]).

Za svaki je prost broj p Heckeov operator $T_{p^2} : S_m(N, \chi) \to S_m(N, \chi)$ dan formulom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}\Big| T_{p^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) e^{2\pi i n z},$$

gdje je

$$b(n) = a\left(p^2 n\right) + \left(\frac{-1}{p}\right)^{m-\frac{1}{2}} \chi(p) \left(\frac{n}{p}\right) p^{m-\frac{3}{2}} a(n) + \chi\left(p^2\right) p^{2m-2} a\left(n/p^2\right) \tag{6.22}$$

[57, Teorem 1.7]. Ovdje podrazumijevamo da je $a\left(n/p^2\right) = 0$ ako $p^2 \nmid n$, dok je $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ uobičajeni Legendreov simbol ako je p neparan, a identički jednak 0 ako je $p = 2$.

Ako $p \nmid N$, tada po Propoziciji 3.40 vrijedi

$$\left\langle f_1 \Big| T_{p^2},\, f_2 \right\rangle_{S_m(N,\chi)} = \chi\left(p^2\right) \left\langle f_1,\, f_2 \Big| T_{p^2} \right\rangle_{S_m(N,\chi)}, \qquad f_1, f_2 \in S_m\left(N, \chi\right). \tag{6.23}$$

To nam omogućuje da dokažemo sljedeći korolar.

Korolar 6.15. *Neka su $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$, $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Neka je χ paran Dirichletov karakter modulo N. Tada za svaki prost broj p takav da $p \nmid N$ operator T_{p^2} preslikava kusp-formu*

$$\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi}(z) = \frac{(4\pi)^{m-1} (-2\pi i)^k}{\Gamma(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+k-1} e^{-2\pi i n \bar{\xi}} \psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n,m,\chi}(z) \tag{6.24}$$

u kusp-formu

$$\left(\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi} \Big| T_{p^2}\right)(z) = \frac{(4\pi)^{m-1} (-2\pi i)^k}{\Gamma(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m+k-1} E_{p,k,n,m,\chi}(\xi) \psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n,m,\chi}(z), \tag{6.25}$$

gdje je

$$E_{p,k,n,m,\chi}(\xi) := \mathbb{1}_{p^2\mathbb{Z}}(n) \frac{\chi\left(p^2\right)}{p^{2k}} e^{-2\pi i \frac{n}{p^2} \bar{\xi}} + \left(\frac{-1}{p}\right)^{m-\frac{1}{2}} \chi(p) \left(\frac{n}{p}\right) p^{m-\frac{3}{2}} e^{-2\pi i n \bar{\xi}} + p^{2m+2k-2} e^{-2\pi i p^2 n \bar{\xi}}.$$

Dokaz. Jednakost (6.24) je poseban slučaj jednakosti (6.21). Dokaz jednakosti (6.25) analogan je onome leme [34, Lema 5-8]. Za svaki $z \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi}\middle|T_{p^2}\right)(z) &\overset{(6.16)}{=} \left\langle \Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi}\middle|T_{p^2},\, \Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),0,m,z,\chi}\right\rangle_{S_m(N,\chi)} \\ &\overset{(6.23)}{=} \chi\left(p^2\right)\left\langle \Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),k,m,\xi,\chi},\, \Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),0,m,z,\chi}\middle|T_{p^2}\right\rangle_{S_m(N,\chi)} \\ &\overset{(6.16)}{=} \chi\left(p^2\right)\overline{\left(\Delta_{\mathbf{\Gamma}_0(N),0,m,z,\chi}\middle|T_{p^2}\right)^{(k)}(\xi)}.\end{aligned}$$

Po (6.20) i (6.22) desna je strana jednaka

$$\begin{aligned}\frac{(4\pi)^{m-1}}{\Gamma(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-2\pi i n)^k\Bigg(\chi\left(p^2\right)\left(p^2 n\right)^{m-1}\psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),p^2 n,m,\chi}(z) \\ +\left(\frac{-1}{p}\right)^{m-\frac{1}{2}}\chi(p)\left(\frac{n}{p}\right)p^{m-\frac{3}{2}}n^{m-1}\psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n,m,\chi}(z) \\ +p^{2m-2}\left(n/p^2\right)^{m-1}\psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n/p^2,m,\chi}(z)\Bigg)e^{-2\pi i n\bar{\xi}}.\end{aligned}$$

Promijenimo li poredak sumacije tako da se sumira po indeksu n u $\psi_{\mathbf{\Gamma}_0(N),n,m,\chi}(z)$, dobivamo (6.25). Ova je promjena poretka sumacije opravdana po Lemi 6.12. $\square$

Poglavlje 7

Neponištavanje Poincaréovih redova

U ovom poglavlju dokazujemo niz rezultata o neponištavanju Poincaréovih redova:

- Glavni su rezultati potpoglavlja 7.1 Teoremi 7.1 i 7.6 – ojačane verzije općih integralnih kriterija neponištavanja [31, Teorem 4-1] i [33, Leme 2-1 i 3-1] za Poincaréove redove na Liejevim grupama odnosno na $\mathcal{H}$.

- U potpoglavlju 7.2 dobivamo rezultate o neponištavanju redova $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m}$ i odgovarajućih kusp-formi $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m}$, gdje su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ podgrupa konačnog indeksa u $P^{-1}(\Gamma(N))$ za neki $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. U Lemi 7.7 dokazujemo da vrijedi $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \equiv 0$ i $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \equiv 0$ ako je $\chi\big|_{\Gamma\cap K} \neq \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma\cap K}$. U preostalom slučaju primjenom Teorema 7.1 dobivamo dovoljan uvjet na parametre k, m i N za neponištavanje funkcija $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m}$ i $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m}$. Taj je uvjet nejednakost integrala slična onoj u [32, Lema 6-5]. Obje nejednakosti interpretiramo na nov način, u terminima medijana beta-distribucije (vidi Teoreme 7.9 i 7.10), što nam omogućuje da dokažemo nekoliko razjašnjujućih korolara.

- U potpoglavlju 7.3 primjenom Teorema 7.6 dobivamo rezultate o neponištavanju klasičnih Poincaréovih redova. Glavni rezultat, Teorem 7.19, polucijelotežinska je varijanta teorema [33, Teoremi 1-7.(i) i 1-8.(i)] zapisana u terminima medijana gama-distribucije, što slično kao u potpoglavlju 7.2 otvara lagan put do razjašnjujućih korolara.

7.1 Opći kriterij neponištavanja

7.1.1 Neponištavanje Poincaréovih redova na Liejevim grupama

Neka je G povezana poluprosta Liejeva grupa s konačnim centrom. Neka je μ_G Haarova mjera na G. Neka su Γ diskretna podgrupa od G, Λ podgrupa od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter. Neka je $\varphi : G \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa sljedećim svojstvima:

(F1) $\varphi(\lambda g) = \chi(\lambda)\varphi(g), \quad \lambda \in \Lambda,\ g \in G.$

(F2) $|\varphi| \in L^1(\Lambda\backslash G)$.

Po Lemi 5.2 red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi$ konvergira apsolutno gotovo svuda na G, vrijedi

$$\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right)(\gamma\,\cdot\,) = \chi(\gamma)P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi, \quad \gamma \in \Gamma,$$

i $\left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right| \in L^1(\Gamma\backslash G)$.

Teorem 7.1. *Vrijedi*

$$\int_{\Gamma\backslash G} \left|P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right| \, d\mu_{\Gamma\backslash G} > 0$$

ako postoji Borel-izmjeriv skup $C \subseteq G$ sa sljedećim svojstvima:

(C1) $CC^{-1} \cap \Gamma \subseteq \Lambda$.

(C2) *Uz oznaku* $(\Lambda C)^c := G \setminus \Lambda C$,

$$\int_{\Lambda\backslash\Lambda C} \lvert\varphi\rvert \, d\mu_{\Lambda\backslash G} > \int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c} \lvert\varphi\rvert \, d\mu_{\Lambda\backslash G} \tag{7.1}$$

za neku izmjerivu funkciju $\lvert\,\cdot\,\rvert : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *sa sljedećim svojstvima:*

(M1) $\lvert 0\rvert = 0$.

(M2) $\lvert z\rvert = \lvert\, |z| \,\rvert, \quad z \in \mathbb{C}$.

(M3) $\lvert \sum_{n=1}^{\infty} z_n \rvert \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lvert z_n\rvert$ *za svaki* $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$ *takav da je* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji Borel-izmjeriv skup $C \subseteq G$ sa svojstvima (C1) i (C2). Uz oznaku $\mathbb{1}_A$ za karakterističnu funkciju skupa $A \subseteq G$, vrijedi:

$$\text{za fiksni } g \in G,\ \#\left\{\gamma \in \Lambda\backslash\Gamma : \mathbb{1}_{\Lambda C}(\gamma g) \neq 0\right\} \leq 1. \tag{7.2}$$

Naime, ako je $\mathbb{1}_{\Lambda C}(\gamma g) \neq 0$ i $\mathbb{1}_{\Lambda C}(\gamma' g) \neq 0$ za neke $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, tj. ako su $\gamma g, \gamma' g \in \Lambda C$, tada vrijedi $\gamma\gamma'^{-1} = (\gamma g)(\gamma' g)^{-1} \in \Lambda C C^{-1}\Lambda \cap \Gamma = \Lambda\left(CC^{-1} \cap \Gamma\right)\Lambda \overset{\text{(C1)}}{=} \Lambda$, dakle $\Lambda\gamma = \Lambda\gamma'$.

Sad imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G} \left\lvert P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\left(\varphi \cdot \mathbb{1}_{\Lambda C}\right)\right\rvert d\mu_{\Gamma\backslash G} &= \int_{\Gamma\backslash G} \left\lvert \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\varphi(\gamma g)\mathbb{1}_{\Lambda C}(\gamma g)\right\rvert d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \\
&\overset{(7.2)}{\underset{\text{(M1),(M2)}}{=}} \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \lvert\varphi(\gamma g)\mathbb{1}_{\Lambda C}(\gamma g)\rvert \, d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \\
&\overset{(5.3)}{=} \int_{\Lambda\backslash G} \lvert\varphi \cdot \mathbb{1}_{\Lambda C}\rvert \, d\mu_{\Lambda\backslash G} \\
&\overset{\text{(M1)}}{=} \int_{\Lambda\backslash\Lambda C} \lvert\varphi\rvert \, d\mu_{\Lambda\backslash G}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G} \left| P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\left(\varphi \cdot \mathbb{1}_{(\Lambda C)^c}\right) \right| d\mu_{\Gamma\backslash G} &= \int_{\Gamma\backslash G} \left| \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)}\varphi(\gamma g)\mathbb{1}_{(\Lambda C)^c}(\gamma g)\right| d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \\
&\overset{\text{(M3),(M2)}}{\leq} \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Lambda\backslash\Gamma} \left|\varphi(\gamma g)\mathbb{1}_{(\Lambda C)^c}(\gamma g)\right| d\mu_{\Gamma\backslash G}(g) \\
&\overset{(5.3)}{=} \int_{\Lambda\backslash G} \left|\varphi \cdot \mathbb{1}_{(\Lambda C)^c}\right| d\mu_{\Lambda\backslash G} \\
&\overset{\text{(M1)}}{=} \int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c} \left|\varphi\right| d\mu_{\Lambda\backslash G}. \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Primijetimo i da je

$$\left|z+w\right| \overset{\text{(M3)}}{\geq} \left|z\right| - \left|-w\right| \overset{\text{(M2)}}{=} \left|z\right| - \left|w\right|, \qquad z,w\in\mathbb{C}. \qquad (7.5)$$

Sad dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma\backslash G}\left| P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\varphi\right| d\mu_{\Gamma\backslash G} \\
&\overset{(7.5)}{\geq} \int_{\Gamma\backslash G}\left| P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\left(\varphi\cdot\mathbb{1}_{\Lambda C}\right)\right| d\mu_{\Gamma\backslash G} - \int_{\Gamma\backslash G}\left| P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}\left(\varphi\cdot\mathbb{1}_{(\Lambda C)^c}\right)\right| d\mu_{\Gamma\backslash G} \\
&\underset{(7.4)}{\overset{(7.3)}{\geq}} \int_{\Lambda\backslash\Lambda C}\left|\varphi\right| d\mu_{\Lambda\backslash G} - \int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c}\left|\varphi\right| d\mu_{\Lambda\backslash G} \\
&\overset{(7.1)}{>} 0.
\end{aligned}$$

□

Očit je primjer funkcije $\left|\ \cdot\ \right|$ sa svojstvima (M1) – (M3) iz Teorema 7.1 funkcija apsolutne vrijednosti $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sljedeći će nas niz lema dovesti do još primjera takvih funkcija (vidi Lemu 7.4).

Lema 7.2. *Neka je $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konkavna, tj. takva da vrijedi*

$$f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x)+tf(y), \qquad t\in[0,1],\ x,y\in\mathbb{R}_{\geq 0}. \qquad (7.6)$$

Tada je f rastuća.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ takvi da je $f(a) > f(a+\delta)$. Tada za svaki $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ imamo

$$f(a+\delta) \overset{(7.6)}{\geq} \frac{n-1}{n}f(a) + \frac{1}{n}f(a+n\delta),$$

dakle

$$f(a+n\delta) \leq f(a+\delta) - (n-1)(f(a)-f(a+\delta)) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty,$$

što je nemoguće s obzirom da je kodomena od f skup $\mathbb{R}_{\geq 0}$. □

Lema 7.3. *Neka je* $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konkavna funkcija takva da je* $f(0) = 0$. *Tada za svaki* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ *takav da je* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ *vrijedi*

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n). \tag{7.7}$$

Dokaz. Primijetimo najprije da je f subaditivna: kako je konkavna i vrijedi $f(0) = 0$, za sve $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ takve da je $x + y > 0$ imamo

$$f(x)+f(y) \overset{(7.6)}{\geq} \left(\frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(0)\right) + \left(\frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y)\right) = f(x+y),$$

a u slučaju kad je $x = y = 0$ prethodna je nejednakost trivijalno zadovoljena.

Neka je sad $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. Ako je $x_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tada (7.7) očito vrijedi pa možemo pretpostaviti da je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Budući da je f subaditivna, imamo

$$f\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} f(x_n), \qquad N \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Kako je f zbog konkavnosti neprekidna na $\mathbb{R}_{>0}$ [39, Teorem 1.3.3], primjenom $\lim_{N\to\infty}$ na ovu nejednakost dobivamo (7.7). □

Lema 7.4. *Neka je* $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konkavna funkcija takva da je* $f(0) = 0$. *Tada je funkcija* $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\boldsymbol{|} z \boldsymbol{|} := f\left(|z|\right),$$

izmjeriva i ima svojstva (M1) – (M3) *iz Teorema 7.1.*

Dokaz. S obzirom da je po Lemi 7.2 funkcija f rastuća, funkcija $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|}$ je izmjeriva, a očito ima i svojstva (M1) i (M2). Dokažimo da ima svojstvo (M3). Za svaki $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \subseteq \mathbb{C}$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$ imamo

$$\left\boldsymbol{|} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right\boldsymbol{|} = f\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right|\right) \leq f\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(|z_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{|} z_n \boldsymbol{|},$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi po Lemi 7.2, a druga po Lemi 7.3. □

7.1.2 Neponištavanje Poincaréovih redova na $\mathcal{H}$

Neka su $m \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, Λ podgrupa od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ unitarni karakter. Neka je $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija sa sljedećim svojstvima:

(f1) $f\big|_m \lambda = \chi(\lambda) f, \quad \lambda \in \Lambda.$

(f2) $\int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z) < \infty.$

Tada po Lemi 5.8 red $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f$ konvergira apsolutno gotovo svuda na $\mathcal{H}$, vrijedi

$$\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f\right)\Big|_m\gamma = \chi(\gamma)P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f, \qquad \gamma\in\Gamma, \tag{7.8}$$

i

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}\left|\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \le \frac{\varepsilon_\Gamma}{\varepsilon_\Lambda}\int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z).$$

Lema 7.5. *Ako je*

$$\chi\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} \neq \chi_m\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}, \tag{7.9}$$

tada je $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f\equiv 0$.

Dokaz. Tvrdnja je jasna iz jednakosti

$$\chi(\gamma)P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f \overset{(7.8)}{=} \left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f\right)\Big|_m\gamma \overset{(3.3)}{=} \chi_m(\gamma)P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f, \qquad \gamma\in\Gamma\cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right). \qquad \square$$

Teorem 7.6. *Pretpostavimo da je*

$$\chi\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)} = \chi_m\Big|_{\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}. \tag{7.10}$$

Tada vrijedi

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}\left|\left(P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f\right)(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) > 0 \tag{7.11}$$

ako postoji Borel-izmjeriv skup $S\subseteq\mathcal{H}$ *sa sljedećim svojstvima:*

(S1) *Za sve* $z_1,z_2\in S$ *vrijedi: ako je* $z_1\neq z_2$*, tada je* $\Gamma.z_1\neq\Gamma.z_2$*.*

(S2) *Uz oznaku* $(\Lambda.S)^c := \mathcal{H}\setminus\Lambda.S$*, vrijedi*

$$\int_{\Lambda\backslash\Lambda.S}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z) > \int_{\Lambda\backslash(\Lambda.S)^c}\left|f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z)$$

za neku izmjerivu funkciju $|\ \cdot\ |:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ *sa svojstvima* (M1) – (M3) *iz Teorema 7.1.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi}f &= \sum_{\gamma\in\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\backslash\Gamma}\ \sum_{\delta\in\Lambda\backslash\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))}\overline{\chi(\delta\gamma)}f\Big|_m\delta\gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\backslash\Gamma}\ \sum_{\delta\in\Lambda\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)\backslash\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}\overline{\chi(\delta\gamma)}f\Big|_m\delta\gamma \\
&\underset{(7.10)}{\overset{(3.3)}{=}} \sum_{\gamma\in\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\backslash\Gamma}\ \sum_{\delta\in\Lambda\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)\backslash\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)}\overline{\chi(\gamma)}f\Big|_m\gamma \\
&= \frac{\varepsilon_\Gamma}{\varepsilon_\Lambda}P_{\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\backslash\Gamma,\chi}f,
\end{aligned}$$

dakle dovoljno je dokazati neponištavanje reda $P_{\Lambda(\Gamma\cap Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim))\backslash\Gamma,\chi}f$. Drugim riječima, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\Gamma \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) \subseteq \Lambda$. Pod tom pretpostavkom skup

$$C := \{n_x a_y : x + iy \in S \text{ nije eliptička za } \Gamma\}\, K \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$$

po (S1) zadovoljava $CC^{-1} \cap \Gamma \subseteq \Gamma \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right) = \Lambda \cap Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ pa ima svojstvo (C1) iz Teorema 7.1.

Dokažimo da funkcija F_f zadovoljava pretpostavke (F1) i (F2) s početka potpoglavlja 7.1.1. Zbog (f1) je po Lemi 3.4.(i)

$$F_f(\lambda\,\cdot\,) = \chi(\lambda) F_f, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

a po Lemi 3.4.(iii) vrijedi

$$\int_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} |F_f|\, d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \varepsilon_\Lambda^{-1} \int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| f(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z) \overset{(\mathrm{f2})}{<} \infty,$$

dakle $|F_f| \in L^1\left(\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$.

Napokon, dokažimo da C i F_f zadovoljavaju uvjet (C2) Teorema 7.1. Očito je

$$\Lambda C = \{n_x a_y : x + iy \in \Lambda.S \text{ nije eliptička za } \Gamma\}\, K \tag{7.12}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda\backslash\Lambda C} \left| F_f \right| d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} &\overset{(1.55)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Lambda} \int_0^{4\pi} \int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| F_f(n_x a_y \kappa_t) \right| \mathbb{1}_{\Lambda C}(n_x a_y \kappa_t)\, dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&\underset{(7.12)}{\overset{(3.6),\,(\mathrm{M2})}{=}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_\Lambda} \int_0^{4\pi} \int_{\Lambda\backslash\mathcal{H}} \left| f(x+iy) y^{\frac{m}{2}} \right| \mathbb{1}_{\Lambda.S}(x+iy)\, dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(x+iy)\, dt \\
&= \varepsilon_\Lambda^{-1} \int_{\Lambda\backslash\Lambda.S} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Analogno je, uz oznaku $(\Lambda C)^c := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \setminus \Lambda C$,

$$\int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c} \left| F_f \right| d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} = \varepsilon_\Lambda^{-1} \int_{\Lambda\backslash(\Lambda.S)^c} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Lambda\backslash\mathcal{H}}(z). \tag{7.14}$$

Po (7.13) i (7.14) iz (S2) slijedi

$$\int_{\Lambda\backslash\Lambda C} \left| F_f \right| d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} > \int_{\Lambda\backslash(\Lambda C)^c} \left| F_f \right| d\mu_{\Lambda\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim},$$

dakle C i F_f zadovoljavaju uvjet (C2) Teorema 7.1.

Dakle, po Teoremu 7.1 vrijedi $\int_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} \left| P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f \right| d\mu_{\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} > 0$. Kako je po Lemi 5.7 $P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} F_f = F_{P_{\Lambda\backslash\Gamma,\chi} f}$, po Lemi 3.4.(iii) slijedi (7.11). □

7.2 Neponištavanje Poincaréovih redova funkcija $F_{k,m}$ i $f_{k,m}$

7.2.1 Glavni rezultat

Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda. Neka su $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Po Lemi 6.1 i Teoremu 6.4 redovi $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m}$ odnosno $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}$ konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno na $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ odnosno na $\mathcal{H}$. Nadalje, $P_\Gamma F_{k,m} \in \mathcal{A}\left(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$, $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \in S_m(\Gamma, \chi)$ te po Korolaru 4.10 i Lemi 5.7 vrijedi

$$F_{P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}} = P_{\Gamma,\chi} F_{k,m}.$$

Posebno po Lemi 3.1 vrijedi ekvivalencija

$$P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \equiv 0. \tag{7.15}$$

Lema 7.7. *Pretpostavimo da je*

$$\chi\Big|_{\Gamma\cap K} \neq \chi_{m+2k}\Big|_{\Gamma\cap K}. \tag{7.16}$$

Tada je $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \equiv 0$ *i* $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \equiv 0$.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} &= \sum_{\gamma \in \Gamma\cap K\backslash\Gamma} \sum_{\delta\in\Gamma\cap K} \overline{\chi(\delta\gamma)} F_{k,m}(\delta\gamma\,\cdot\,) \\ &\overset{(4.5)}{=} \sum_{\gamma \in \Gamma\cap K\backslash\Gamma} \underbrace{\left(\sum_{\delta\in\Gamma\cap K} \overline{\chi(\delta)} \chi_{m+2k}(\delta) \right)}_{\substack{=0 \text{ po } (7.16) \\ \text{kao suma svih vrijednosti netrivijalnog} \\ \text{karaktera konačne Abelove grupe}}} \overline{\chi(\gamma)} F_{k,m}(\gamma\,\cdot\,), \end{aligned} \tag{7.17}$$

dakle $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \equiv 0$ pa je po (7.15) i $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \equiv 0$. $\square$

U iskazu će se Teorema 7.9 o neponištavanju Poincaréovih redova $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m}$ i $P_{\Gamma,\chi} f_{k.m}$ pojaviti sljedeći pojam iz teorije vjerojatnosti.

Definicija 7.8. ***Medijan beta-distribucije*** $\mathrm{Beta}(a, b)$ *s parametrima* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest jedinstven* $\mathrm{M}(a, b) \in \left]0, 1\right[$ *takav da je*

$$\int_0^{\mathrm{M}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \int_{\mathrm{M}(a,b)}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx. \tag{7.18}$$

Teorem 7.9. *Neka je $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pretpostavimo da je $\Gamma \subseteq P^{-1}(\Gamma(N))$ i da vrijedi*

$$\chi\Big|_{\Gamma\cap K} = \chi_{m+2k}\Big|_{\Gamma\cap K}. \tag{7.19}$$

Ako je

$$N > \frac{4\,\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)} =: N_{k,m}, \tag{7.20}$$

tada $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \not\equiv 0$ i $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \not\equiv 0$.

Dokaz. Iz (7.19) po (7.17) slijedi

$$P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} = |\Gamma\cap K|\ P_{\Gamma\cap K\backslash\Gamma,\chi}F_{k,m},$$

što zajedno s ekvivalencijom (7.15) pokazuje da je dovoljno dokazati da je

$$P_{\Gamma\cap K\backslash\Gamma,\chi}F_{k,m} \not\equiv 0.$$

To ćemo napraviti primjenom Teorema 7.1 na red $P_{\Gamma\cap K\backslash\Gamma,\chi}F_{k,m}$, koristeći skup C oblika

$$C_r := K\,\{h_t : t\in[0,r]\}\,K$$

za neki $r \in \mathbb{R}_{>0}$ i stavljajući $\boldsymbol{|}\cdot\boldsymbol{|} := |\cdot|$ (usp. s drugom tvrdnjom leme [32, Lema 6-5]).

Uvjerimo se da funkcija $F_{k,m}$ zadovoljava uvjete (F1) i (F2) za $\Lambda = \Gamma\cap K$. Uvjet (F1) je zadovoljen po (4.5) i (7.19). Kako je $F_{k,m} \in L^1\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)$ (vidi dokaz Leme 6.1), po (1.47) vrijedi i (F2).

Da bismo istražili uvjet (C1) Teorema 7.1 za $C = C_r$ sa $r \in \mathbb{R}_{>0}$, definiramo funkciju

$$\|\cdot\| : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \to \mathbb{R}, \qquad \left\|\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \eta\right)\right\| := \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Iz [32, Lema 6-20] slijedi da je

$$\|\sigma\| \le \sqrt{2\cosh(4r)}, \qquad \sigma\in C_rC_r^{-1}.$$

S druge strane, [32, Lema 6-21] povlači da je

$$\|\sigma\| \ge \sqrt{N^2+2}, \qquad \sigma \in \Gamma\setminus P^{-1}(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) = \Gamma\setminus K.$$

Dakle, ako $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zadovoljava

$$\sqrt{N^2+2} > \sqrt{2\cosh(4r)}$$

ili ekvivalentno

$$\tanh^2(r) < \left(\sqrt{\frac{4}{N^2}+1} - \frac{2}{N}\right)^2, \tag{7.21}$$

tada je $C_r C_r^{-1} \cap \Gamma \subseteq \Gamma \cap K$, tj. tada C_r zadovoljava uvjet (C1) Teorema 7.1.

Uvjet (C2) Teorema 7.1 za $C = C_r$, $\varphi = F_{k,m}$ i $\left| \cdot \right| = |\cdot|$ po (1.47) je ekvivalentan sljedećoj nejednakosti:

$$\int_{C_r} |F_{k,m}| \, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim} > \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \setminus C_r} |F_{k,m}| \, d\mu_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim}.$$

Po (1.37) i (4.3) ova je nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$\int_0^r \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \sinh(2t)\, dt > \int_r^\infty \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \sinh(2t)\, dt,$$

koja supstitucijom $x = \tanh^2(t)$ prelazi u

$$\int_0^{\tanh^2(r)} x^{\frac{k}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}-2}\, dx > \int_{\tanh^2(r)}^1 x^{\frac{k}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}-2}\, dx,$$

što je očito ekvivalentno sa

$$\tanh^2(r) > \mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right). \tag{7.22}$$

Dakle, ako neki $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zadovoljava (7.21) i (7.22), tada skup C_r zadovoljava uvjete (C1) i (C2) Teorema 7.1 pa je po tom teoremu $P_{\Gamma\cap K\setminus\Gamma,\chi} F_{k,m} \not\equiv 0$. Jasno je da $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sa svojstvima (7.21) i (7.22) postoji ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right) < \left(\sqrt{\frac{4}{N^2}+1} - \frac{2}{N}\right)^2,$$

koja je ekvivalentna sa (7.20). Ovime je teorem dokazan. □

Analogan nam račun omogućuje da zapišemo drugu tvrdnju leme [32, Lema 6-5] u terminima medijana beta-distribucije, štoviše Teorem 7.10 koji slijedi proširuje tu lemu na slučaj netrivijalnog karaktera χ. Prije nego što ga iskažemo, sjetimo se da unitarni dual grupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ čine karakteri $\nu_n : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$, $n \in \mathbb{Z}$, zadani sa

$$\nu_n\left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\right) := e^{-int}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, za $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ definiramo funkciju $F_{k,m} \in C^\infty(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \cap L^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$

formulom

$$F_{k,m}\Big(P(\kappa_{\theta_1} h_t \kappa_{\theta_2})\Big) := \chi_{m+2k}(\kappa_{\theta_1}) \, \frac{\tanh^k(t)}{\cosh^m(t)} \, \chi_m(\kappa_{\theta_2}), \qquad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

U [32] je dokazano da je funkcija $F_{k,m}$ K-konačan matrični koeficijent ireducibilne unitarne reprezentacije $\overline{\pi_m}$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ koja se kao reprezentacija grupe K rastavlja u ortogonalnu sumu $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \nu_{m+2n}$ (dakle reprezentacija $\overline{\pi_m} \circ P$ je unitarno ekvivalentna reprezentaciji $\pi_{D_m^+}$). Definiramo i funkciju $f_{k,m} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$,

$$f_{k,m}(z) := (2i)^m \frac{(z-i)^k}{(z+i)^{m+k}}.$$

Funkcije $F_{k,m}$ i $f_{k,m}$ povezane su klasičnim liftom težine m: vrijedi

$$F_{k,m}(g) = f_{k,m}(g.i) j(g,i)^{-m}, \qquad g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Nadalje, po [32, Lema 4-2] za svaku Fuchsovu grupu Γ prve vrste i karakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda redovi $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m}$ i $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}$ konvergiraju apsolutno i lokalno uniformno, i $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m}$ pripada standardno definiranom prostoru kusp-formi $S_m(\Gamma, \chi)$.

Teorem 7.10. *Neka su $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $N \in \mathbb{Z}_{>0}$. Neka su Γ podgrupa konačnog indeksa u $\Gamma(N)$ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda.*

(i) *Ako je*

$$\chi\Big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} \neq \nu_{m+2k}\Big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})},$$

tada je $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \equiv 0$ i $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \equiv 0$.

(ii) *Ako vrijede jednakost*

$$\chi\Big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} = \nu_{m+2k}\Big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$$

i nejednakost (7.20)*, tada $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \not\equiv 0$ i $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \not\equiv 0$.*

7.2.2 Posljedice

Da bismo razjasnili posljedice Teorema 7.9 i 7.10, prikupimo nekoliko svojstava medijana M u sljedećoj lemi.

Lema 7.11. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Tada vrijedi:*

(i) *Funkcija* $\mathrm{M}(\,\cdot\,, b) : \mathbb{R}_{>0} \to \,]0,1[$ *je rastući difeomorfizam.*

(ii) *Funkcija* $\mathrm{M}(a, \,\cdot\,) : \mathbb{R}_{>0} \to \,]0,1[$ *je padajući difeomorfizam.*

(iii) *Vrijedi* $\mathrm{M}(1,b) = 1 - 2^{-\frac{1}{b}}$, $\mathrm{M}(a,1) = 2^{-\frac{1}{a}}$ *i* $\mathrm{M}(a,a) = \frac{1}{2}$.

(iv) *Ako je* $1 < a < b$, *tada je* $\frac{a-1}{a+b-2} < \mathrm{M}(a,b) < \frac{a}{a+b}$.

(v) *Ako je* $1 < b < a$, *tada je* $\frac{a}{a+b} < \mathrm{M}(a,b) < \frac{a-1}{a+b-2}$.

(vi) *Ako je* $1 \leq a \leq b > 1$, *tada je* $\frac{a-1}{a+b-2} \leq \mathrm{M}(a,b) \leq \frac{a}{a+b}$.

(vii) *Ako je* $1 \leq b \leq a > 1$, *tada je* $\frac{a}{a+b} \leq \mathrm{M}(a,b) \leq \frac{a-1}{a+b-2}$.

Dokaz. Tvrdnja (ii) slijedi iz tvrdnje (i) i elementarne jednakosti $\mathrm{M}(a,b) = 1 - \mathrm{M}(b,a)$. Jednakosti u (iii) dokažu se elementarnom provjerom. Tvrdnje (iv) i (v) su dobro poznate nejednakosti između matematičkog očekivanja, medijana i moda beta-distribucije; njihov se elementarni dokaz može naći u [42]. Tvrdnje (vi) i (vii) slijede po neprekidnosti iz (iv) i (v).

Dokažimo (i). Koristeći monotonost Lebesgueova integrala, za sve $a, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{M}(a,b)} x^{a+\varepsilon-1}(1-x)^{b-1}\,dx &< \mathrm{M}(a,b)^{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{M}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\\ &\overset{(7.18)}{=} \mathrm{M}(a,b)^{\varepsilon}\int_{\mathrm{M}(a,b)}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx < \int_{\mathrm{M}(a,b)}^{1} x^{a+\varepsilon-1}(1-x)^{b-1}\,dx,\end{aligned}$$

što povlači da je $\mathrm{M}(a,b) < \mathrm{M}(a+\varepsilon,b)$. Dakle, $\mathrm{M}(\,\cdot\,,b)$ je strogo rastuća funkcija.

Da je funkcija $\mathrm{M}(\,\cdot\,,b)$ glatka, možemo dokazati primjenom Teorema o implicitnoj funkciji: graf funkcije $\mathrm{M}(\,\cdot\,,b)$ jednak je $F_b^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, gdje je $F_b : \mathbb{R}_{>0} \times \,]0,1[\, \to \mathbb{R}$ glatka funkcija dana formulom

$$F_b(a,x) := \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Ovdje je $\mathrm{B} : \mathbb{C}_{\Re(z)>0} \times \mathbb{C}_{\Re(z)>0} \to \mathbb{C}$ beta-funkcija: $\mathrm{B}(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$. S obzirom da vrijedi

$$\frac{\partial F_b}{\partial x}(a,x) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \neq 0, \qquad (a,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times \,]0,1[\,,$$

po Teoremu o implicitnoj funkciji je nivo-skup $F_b^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ u okolini svake svoje točke graf lokalnog difeomorfizma $\mathbb{R}_{>0} \to]0,1[$. Drugim riječima, funkcija $\mathrm{M}(\,\cdot\,,b)$ je lokalni difeomorfizam.

Napokon, funkcija $\mathrm{M}(\,\cdot\,,b) : \mathbb{R}_{>0} \to]0,1[$ je surjekcija jer je, s obzirom da je neprekidna i strogo rastuća, njena slika otvoren interval

$$\left]\lim_{a\to 0+}\mathrm{M}(a,b),\ \lim_{a\to+\infty}\mathrm{M}(a,b)\right[=]0,1[\,.$$

Obrazložimo detaljnije zadnju jednakost. Dokažimo najprije da je $\lim_{a\to+\infty}\mathrm{M}(a,b) = 1$.

Za fiksni $x \in \,]0,1[$ vrijedi

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt}{\int_x^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt} = \frac{\lim_{a\to+\infty}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt}{\lim_{a\to+\infty}\int_x^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt} = \left(\frac{0}{\infty}\right) = 0$$

(primjenom Lebesgueova teorema o dominiranoj odnosno o monotonoj konvergenciji za izračun limesa u brojniku odnosno u nazivniku) pa posebno za dovoljno velike $a \in \mathbb{R}_{>0}$ vrijedi

$$\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt < \int_x^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt, \qquad \text{tj.} \qquad x < \mathrm{M}(a,b)(<1).$$

Ovo dokazuje da je $\lim_{a\to+\infty}\mathrm{M}(a,b)=1$. Da je $\lim_{a\to0+}\mathrm{M}(a,b)=0$, slijedi analogno iz raspisa

$$\lim_{a\to0+} \frac{\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt}{\int_x^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt} = \frac{\int_0^x \frac{(1-t)^{b-1}}{t}\,dt}{\int_x^1 \frac{(1-t)^{b-1}}{t}\,dt} = +\infty,$$

pri čemu smo u prvoj jednakosti na brojnik i nazivnik primijenili Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji, dok druga jednakost slijedi iz primjedbe da je (elementarnim ocjenama podintegralnih funkcija) integral u brojniku jednak $+\infty$, dok je integral u nazivniku strogo pozitivna konstanta. □

Neke posljedice za fiksne k i m

Uvjet (7.20) u Teoremima 7.9 i 7.10 ekvivalentan je nejednakosti $N \geq \lfloor N_{k,m}\rfloor + 1$. U programskom jeziku R 3.3.2 [47] $\mathrm{M}(a,b)$ je implementiran kao `qbeta(0.5,a,b)` pa je lako izračunati vrijednosti $\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1$. Za $m \in \left\{\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots, 8\right\}$ i $k \in \{0,1,2,\ldots,18\}$ one su dane u Tablici 7.1.

U sljedećoj lemi dajemo ocjenu odozgo vrijednosti $\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1$ elementarnim funkcijama za $k \leq 1000$ i $m > 4$. Naša je motivacija za tvrdnje (i) i (ii) Leme 7.12 ideja iz [17] da se vrijednosti $\mathrm{M}(a,b)$ za sve $a,b \in \mathbb{R}_{>1}$ aproksimiraju sa $\mathrm{M}_\alpha(a,b) := \frac{a-\alpha}{a+b-2\alpha}$ za neki $\alpha \in \,]0,1[$. Zamijenimo li M sa $\mathrm{M}_{0.3131}$ u definiciji od $N_{k,m}$, dobivamo:

Lema 7.12. *Neka su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $m \in \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definiramo $C := 1.3738$ i*

$$N_{k,m}^{close} := 4\sqrt{\frac{k+C}{m-4+C}\left(1+\frac{k+C}{m-4+C}\right)}. \tag{7.23}$$

Vrijedi:

(i) *Ako je $k \leq 1000$, tada je $\left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204\right\rceil \in \{\lfloor N_{k,m}\rfloor+1, \lfloor N_{k,m}\rfloor+2, \ldots, \lfloor N_{k,m}\rfloor+8\}$.*

(ii) *Ako je $k \leq 158$, tada je $\left\lceil N_{k,m}^{close} + 0.8018\right\rceil \in \{\lfloor N_{k,m}\rfloor+1, \lfloor N_{k,m}\rfloor+2\}$.*

Tablica 7.1
Vrijednosti $\lfloor N_{k,m} \rfloor + 1$ za $m \in \left\{\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots, 8\right\}$ i $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 18\}$.
Uvjet (7.20) u Teoremima 7.9 i 7.10 ekvivalentan je nejednakosti $N \geq \lfloor N_{k,m} \rfloor + 1$.

k \ m	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7	$\frac{15}{2}$	8
0	62	14	8	6	5	4	4	4	3	3	3	3
1	107	23	13	9	7	6	5	5	4	4	4	4
2	151	32	17	12	9	8	7	6	6	5	5	5
3	197	40	21	15	12	10	8	7	7	6	6	5
4	242	49	26	18	14	11	10	9	8	7	7	6
5	288	58	30	21	16	13	11	10	9	8	7	7
6	334	67	35	24	18	15	13	11	10	9	8	8
7	379	75	39	26	20	16	14	12	11	10	9	8
8	425	84	43	29	22	18	15	13	12	11	10	9
9	471	93	48	32	24	20	17	15	13	12	11	10
10	516	102	52	35	27	22	18	16	14	13	12	11
11	562	111	57	38	29	23	20	17	15	14	13	12
12	608	119	61	41	31	25	21	18	16	15	13	12
13	654	128	65	44	33	27	22	19	17	16	14	13
14	699	137	70	47	35	28	24	21	18	16	15	14
15	745	146	74	50	37	30	25	22	19	17	16	15
16	791	154	79	52	39	32	27	23	20	18	17	15
17	837	163	83	55	42	33	28	24	21	19	18	16
18	882	172	87	58	44	35	29	25	22	20	18	17

(iii) *Ako su* $k \leq 1000$ *i* $m \geq 26.4 + 16.9431k$, *tada je* $\lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 = 1$.
Ako su $k \leq 1000$ *i* $m \leq 25.34 + 16.9431k$, *tada je* $\lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 > 1$.

Dokaz. Račun u R-u [47] (vidi Dodatak) pokazuje da (i) vrijedi za $m < 16970$. S obzirom da su $N_{k,m}$ i $N_{k,m}^{close}$ rastuće funkcije varijable k i padajuće funkcije varijable m (za $N_{k,m}$ to slijedi iz Leme 7.11.(i) – (ii)), za $m \geq 16970$ i $k \leq 1000$ vrijedi

$$1 \leq \lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 \leq \lfloor N_{1000,16970} \rfloor + 1 \overset{\mathrm{R}}{=} 1, \quad \text{dakle} \quad \lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 = 1,$$
$$7 \leq \left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204 \right\rceil \leq \left\lceil N_{1000,16970}^{close} + 6.204 \right\rceil \overset{\mathrm{R}}{=} 8, \quad \text{dakle} \quad \left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204 \right\rceil \in \{7, 8\},$$

što dovršava dokaz tvrdnje (i). Tvrdnja (ii) se dokaže analogno: u R-u se provjeri da vrijedi za $m \leq 2702$, dok je $\lfloor N_{158,2702.5} \rfloor + 1 = 1$ i $\left\lceil N_{158,2702.5}^{close} + 0.8018 \right\rceil = 2$.

Kako je $N_{k,m}$ padajuća funkcija varijable m, dokaz tvrdnje (iii) svodi se na provjeru u R-u da za sve $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$ vrijedi

$$\left\lfloor N_{k,\,m(k)} \right\rfloor + 1 = 1, \quad \text{gdje je} \quad m(k) := \min\left(\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}\right) \cap \mathbb{R}_{\geq 26.4 + 16.9431k}\right),$$
$$\left\lfloor N_{k,\,m'(k)} \right\rfloor + 1 > 1, \quad \text{gdje je} \quad m'(k) := \max\left(\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}\right) \cap \mathbb{R}_{\leq 25.34 + 16.9431k}\right). \qquad \square$$

Korolar 7.13. *Neka su* $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $m \in \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Neka je* Γ

$$\begin{cases} \textit{podgrupa od } P^{-1}(\Gamma(N)), & \textit{ako je } m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \textit{podgrupa od } \Gamma(N), & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}. \end{cases}$$

Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda takav da je*

$$\begin{cases} \chi\big|_{\Gamma \cap K} = \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma \cap K}, & \textit{ako je } m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \chi\big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} = \nu_{m+2k}\big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}, & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}. \end{cases}$$

Tada $P_{\Gamma,\chi} F_{k,m} \not\equiv 0$ *i* $P_{\Gamma,\chi} f_{k,m} \not\equiv 0$ *ako vrijedi barem jedna od sljedećih tvrdnji:*

(i) $k \leq 1000$ *i* $m \geq 26.4 + 16.9431k$

(ii) $k \leq 158$ *i* $N \geq \left\lceil N_{k,m}^{close} + 0.8018 \right\rceil$

(iii) $k \leq 1000$ *i* $N \geq \left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204 \right\rceil$.

Pomoću Leme 7.11 možemo dobiti čitak (ali u mnogim slučajevima pokrivenim Korolarom 7.13 slabiji) rezultat za sve $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – Korolar 7.14. Po Lemi 7.11.(iii) vrijedi

$$N_{0,m} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{m-2}} \sqrt{4^{\frac{1}{m-2}} - 1}, \qquad N_{k,4} = \frac{4}{2^{\frac{1}{k+2}} - 2^{-\frac{1}{k+2}}}, \qquad N_{k,k+4} = 4\sqrt{2} \tag{7.24}$$

za sve $m \in \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nadalje, ocjene odozgo medijana M iz Leme 7.11.(iv) – (v) povlače sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} N_{k,m} &< 4\sqrt{\frac{k+2}{m-2}\left(1 + \frac{k+2}{m-2}\right)}, && \text{ako je } 0 < k < m-4, \\ N_{k,m} &< 4\sqrt{\frac{k}{m-4}\left(1 + \frac{k}{m-4}\right)}, && \text{ako je } 0 < m-4 < k. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Po (7.24) i (7.25) iz Teorema 7.9 i 7.10 slijedi:

Korolar 7.14. *Neka su* $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $m \in \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Neka je* Γ

$$\begin{cases} \textit{podgrupa od } P^{-1}(\Gamma(N)), & \textit{ako je } m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \textit{podgrupa od } \Gamma(N), & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}. \end{cases}$$

Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda takav da je*

$$\begin{cases} \chi\big|_{\Gamma \cap K} = \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma \cap K}, & \textit{ako je } m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \chi\big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} = \nu_{m+2k}\big|_{\Gamma \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}, & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}. \end{cases}$$

Tada $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \not\equiv 0$ *i* $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \not\equiv 0$ *ako vrijedi barem jedna od sljedećih tvrdnji:*

(i) $k = 0$ *i* $N > 4 \cdot 2^{\frac{1}{m-2}}\sqrt{4^{\frac{1}{m-2}} - 1}$

(ii) $m = 4$ *i* $N > \dfrac{4}{2^{\frac{1}{k+2}} - 2^{-\frac{1}{k+2}}}$

(iii) $0 < k \le m-4$ *i* $N \ge 4\sqrt{\frac{k+2}{m-2}\left(1 + \frac{k+2}{m-2}\right)}$

(iv) $0 < m-4 \le k$ *i* $N \ge 4\sqrt{\frac{k}{m-4}\left(1 + \frac{k}{m-4}\right)}$.

Neke posljedice za fiksne N i m

Iz Leme 7.11.(i) lako slijedi da je, kao funkcija varijable k, $N_{k,m}$ rastući difeomorfizam $\mathbb{R}_{>-2} \to \mathbb{R}_{>0}$. Zato za fiksne $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $m \in \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0}$ postoji jedinstveno rješenje $k_{N,m} \in \mathbb{R}_{>-2}$ sljedeće jednadžbe s nepoznanicom k:

$$N = \frac{4\,\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)}. \tag{7.26}$$

Nadalje, uvjet (7.20) u Teoremima 7.9 i 7.10 ekvivalentan je nejednakosti $k < k_{N,m}$, tj. $k \le \lceil k_{N,m} \rceil - 1$.

Vrijednosti $\lceil k_{N,m} \rceil - 1$ za $m \in \left\{\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots, 8\right\}$ i $N \in \{1, 2, \ldots, 19\}$, izračunate u R-u rješavanjem jednadžbe (7.26) uz korištenje paketa `rootSolve 1.7`, dane su u Tablici 7.2.

Pomoću Leme 7.11 možemo izračunati ili ocijeniti odozdo brojeve $k_{N,m}$ za neke vrijednosti N i m:

Lema 7.15. *Neka su* $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ *i* $m \in 4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0}$. *Tada vrijedi:*

(i) *Ako je* $m = 4$, *tada je* $k_{N,m} = \dfrac{1}{\log_2\left(\sqrt{\frac{4}{N^2}+1} + \frac{2}{N}\right)} - 2$.

(ii) *Ako je* $m > 4$ *i* $N \ge 6$, *tada je* $k_{N,m} \ge \frac{m-4}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{N^2}{4}} - 1\right)$.

(iii) *Ako je* $m > 4$ *i* $N \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *tada je* $\max\{k_{N,m}, 0\} \ge \frac{m-2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{N^2}{4}} - 1\right) - 2$.

Dokaz. Tvrdnja (i) se dobije rješavanjem jednadžbe (7.26) nakon uvrštavanja u nju vrijednosti medijana iz Leme 7.11.(iii) sa $a = \frac{k}{2} + 1$.

(ii) S obzirom da je desna strana jednadžbe (7.26) rastuća funkcija varijable $k \in \mathbb{R}_{>-2}$, vrijedi: ako neki $k \in \mathbb{R}_{>-2}$ zadovoljava

$$N \ge \frac{4\,\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)}, \tag{7.27}$$

Tablica 7.2
Vrijednosti $\lceil k_{N,m} \rceil - 1$ za $m \in \left\{\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots, 8\right\}$ i $N \in \{1, 2, \ldots, 19\}$.
Uvjet (7.20) u Teoremima 7.9 i 7.10 ekvivalentan je nejednakosti $k \leq \lceil k_{N,m} \rceil - 1$.

N \ m	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7	$\frac{15}{2}$	8
1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
4	-2	-2	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	1
5	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	1	2	2	3
6	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2	3	3	4
7	-2	-1	-1	0	1	1	2	3	3	4	5	5
8	-2	-1	0	0	1	2	3	3	4	5	6	7
9	-2	-1	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8
10	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	-2	-1	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10
12	-2	-1	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12
13	-2	-1	1	2	3	5	6	8	9	10	12	13
14	-2	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14
15	-2	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16
16	-2	0	1	3	5	7	8	10	12	14	15	17
17	-2	0	2	3	5	7	9	11	13	15	16	18
18	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
19	-2	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	21

tada je $k_{N,m} \geq k$.

Pretpostavimo da je $m > 4$. Svojstvo (7.27), s obzirom da funkcija $f(x) := \frac{4\sqrt{x}}{1-x}$ strogo raste na intervalu $]0, 1[$, po desnoj nejednakosti iz Leme 7.11.(vii) ima svaki $k \in \mathbb{R}_{\geq m-4}$ takav da vrijedi

$$N \geq f\left(\frac{k}{k+m-4}\right) = 4\sqrt{\frac{k}{m-4}\left(1 + \frac{k}{m-4}\right)},$$

tj.

$$\frac{k}{m-4} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{N^2}{4}} - 1\right),$$

dakle svaki

$$k \in \left[m-4, \frac{m-4}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{N^2}{4}} - 1\right)\right].$$

Očito takav k postoji ako i samo ako je $\sqrt{1 + \frac{N^2}{4}} \geq 3$, tj. samo za $N \geq \left\lceil 4\sqrt{2} \right\rceil = 6$. Ovo dokazuje tvrdnju (ii).

(iii) Pretpostavimo da su $m > 4$ i $N \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Slično kao u dokazu tvrdnje (ii), koristeći ovaj put desnu nejednakost iz Leme 7.11.(vi), vidimo da svojstvo (7.27) ima svaki

$k \in [0, m-4]$ takav da vrijedi

$$N \geq f\left(\frac{k+2}{k+m}\right) = 4\sqrt{\frac{k+2}{m-2}\left(2+\frac{k+2}{m-2}\right)},$$

tj.

$$\frac{k+2}{m-2} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{N^2}{4}}-1\right),$$

tj. svaki

$$k \in \left[0, \min\left\{\frac{m-2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{N^2}{4}}-1\right)-2, m-4\right\}\right] = \left[0, \frac{m-2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{N^2}{4}}-1\right)-2\right]$$

(zadnja jednakost vrijedi jer je $N \leq 4\sqrt{2}$). Tvrdnja slijedi. $\square$

Korolar 7.16. *Neka su $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $m \in 4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Neka je Γ*

$$\begin{cases} \textit{podgrupa od } P^{-1}(\Gamma(N)), & \textit{ako je } m \in \frac{9}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \textit{podgrupa od } \Gamma(N), & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 4}. \end{cases}$$

Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda takav da je

$$\begin{cases} \chi\big|_{\Gamma\cap K} = \chi_{m+2k}\big|_{\Gamma\cap K}, & \textit{ako je } m \in \frac{9}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \chi\big|_{\Gamma\cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})} = \nu_{m+2k}\big|_{\Gamma\cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}, & \textit{ako je } m \in \mathbb{Z}_{\geq 4}. \end{cases}$$

Tada $P_{\Gamma,\chi}F_{k,m} \not\equiv 0$ i $P_{\Gamma,\chi}f_{k,m} \not\equiv 0$ ako vrijedi nešto od sljedećeg:

(i) $m = 4$ *i* $k < \frac{1}{\log_2\left(\sqrt{\frac{4}{N^2}+1}+\frac{2}{N}\right)} - 2$

(ii) $m > 4$, $N \geq 6$ *i* $k < \frac{m-4}{2}\left(\sqrt{1+\frac{N^2}{4}}-1\right)$

(iii) $m > 4$, $N \in \{1,2,3,4,5\}$ *i* $k < \frac{m-2}{2}\left(\sqrt{1+\frac{N^2}{4}}-1\right)-2$.

7.3 Neponištavanje klasičnih Poincaréovih redova

Neka je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takva da je ∞ kusp od Γ. Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\Gamma_\infty = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)\langle n_h\rangle. \tag{7.28}$$

Nadalje, definiramo

$$N := \inf\left\{|c| : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P(\Gamma) \text{ i } c \neq 0\right\}. \tag{7.29}$$

Iz [28, Lema 1.7.3] slijedi da je

$$hN \geq 1 \tag{7.30}$$

pa je posebno $N > 0$.

Lema 7.17. *Svake su dvije različite točke skupa*

$$S := [0, h[\times \left]\frac{1}{N}, \infty\right[$$

međusobno Γ*-neekvivalentne.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $z \in S$ i $\gamma = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \eta_\gamma\right) \in \Gamma$ takvi da je $\gamma.z \in S$. Trebamo dokazati da je $\gamma.z = z$. Najprije primijetimo da je $c = 0$, inače bi vrijedilo

$$\frac{1}{N} < \Im(\gamma.z) \overset{(1.9)}{=} \frac{\Im(z)}{(c\,\Re(z) + d)^2 + \left(c\,\Im(z)\right)^2} \leq \frac{\Im(z)}{\left(c\,\Im(z)\right)^2} = \frac{1}{c^2\Im(z)} < \frac{1}{N^2 \cdot \frac{1}{N}} = \frac{1}{N}.$$

Dakle, $\gamma \in \Gamma_\infty$ pa je po (7.28) $\gamma.z = z + kh$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako su $\Re(z), \Re(\gamma.z) \in [0, h[$, nužno je $k = 0$, dakle $\gamma.z = z$. □

U iskazu će se Teorema 7.19 o neponištavanju klasičnih Poincaréovih redova pojaviti sljedeći pojam iz teorije vjerojatnosti.

Definicija 7.18. ***Medijan gama-distribucije s parametrima*** $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest jedinstven* $\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)} \in \mathbb{R}_{>0}$ *takav da je*

$$\int_0^{\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)}} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}\, dx = \int_{\mathrm{M}_{\Gamma(a,b)}}^\infty x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}\, dx.$$

Teorem 7.19. *Neka je* Γ *diskretna podgrupa od* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ *takva da je* ∞ *kusp od* Γ*. Neka su* $h \in \mathbb{R}_{>0}$ *odnosno* $N \in \mathbb{R}_{>0}$ *definirani sa* (7.28) *odnosno sa* (7.29)*. Neka je* $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ *karakter konačnog reda takav da vrijedi* (5.13)*. Neka su* $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$*. Ako je*

$$\frac{2\pi n}{Nh} < \mathrm{M}_{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1,1\right)}, \tag{7.31}$$

tada $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \not\equiv 0$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom Teorema 7.6 na red $\psi_{\Gamma,N,m,\chi} = P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi} e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}$, sa skupom S iz Leme 7.17 i sa $\lVert \cdot \rVert = |\cdot|$. Uvjerimo se da su zadovoljene sve pretpostavke tog teorema.

Lako se provjeri da funkcija $e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H})$ ima svojstva (f1) i (f2) s početka potpoglavlja 7.1.2 za $\Lambda = \Gamma_\infty$. Da je zadovoljena jednakost (7.10), slijedi iz (5.13) po (3.4). Skup S po Lemi 7.17 zadovoljava uvjet (S1) Teorema 7.6. Napokon, uvjet (S2) Teorema 7.6 ekvivalentan je, uz oznaku $(\Gamma_\infty.S)^c := \mathcal{H} \setminus \Gamma_\infty.S$, nejednakosti

$$\int_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\infty.S} \left| e^{2\pi i n \frac{z}{h}} \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) > \int_{\Gamma_\infty\backslash(\Gamma_\infty.S)^c} \left| e^{2\pi i n \frac{z}{h}} \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z),$$

tj., s obzirom da je $[0,h[\times]0,\infty[$ stroga fundamentalna domena za Γ_∞ u $\mathcal{H}$, nejednakosti

$$\int_0^h \int_{\frac{1}{N}}^\infty e^{-2\pi n \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy\, dx > \int_0^h \int_0^{\frac{1}{N}} e^{-2\pi n \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy\, dx,$$

tj., integriranjem po $2\pi n \frac{y}{h}$,

$$\int_{\frac{2\pi n}{Nh}}^\infty e^{-y} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy > \int_0^{\frac{2\pi n}{Nh}} e^{-y} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy,$$

koja je ekvivalentna sa (7.31). □

Teorem 7.19 je polucijelotežinska varijanta teorema [33, Teoremi 1-7.(i) i 1-8.(i)]. Njihova blaga generalizacija u smislu da grupa Γ ne mora biti konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, iskazana u terminima medijana gama-distribucije, jest sljedeći teorem, koji se dokaže analogno Teoremu 7.19.

Teorem 7.20. *Neka je Γ diskretna podgrupa od $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ takva da je ∞ kusp od Γ. Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je*

$$Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))\,\Gamma_\infty = Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \left\langle \begin{pmatrix} 1 & h \\ & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Označimo

$$N := \inf \left\{ |c| : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ c \neq 0 \right\}.$$

Neka je $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda takav da je

$$j(\gamma, \cdot)^{-m} = \chi(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma_\infty.$$

Neka su $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ i $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ako vrijedi nejednakost (7.31)*, tada funkcija*

$$\psi_{\Gamma,n,m,\chi} := P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi} e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}} \in S_m(\Gamma, \chi)$$

nije identički jednaka 0.

Poznata je ocjena [6, Teorem 1]

$$a - \frac{1}{3} < \mathrm{M}_{\Gamma(a,1)} < a, \qquad a \in \mathbb{R}_{>0}, \tag{7.32}$$

dakle Teoremi 7.19 i 7.20 vrijede i ako u njima uvjet (7.31) zamijenimo sa

$$\frac{2\pi n}{hN} \leq \frac{m}{2} - \frac{4}{3},$$

tj.

$$n \leq \frac{hN}{4\pi}\left(m - \frac{8}{3}\right),$$

tj.

$$m \geq \frac{4\pi n}{hN} + \frac{8}{3}.$$

Korolar 7.21. *Pretpostavimo da je zadan $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i jedno od sljedećeg:*

(a) *$m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ i karakter χ grupe $\Gamma := \Gamma_0(N)$ konačnog reda sa svojstvima $\chi(\underline{n}_1) = 1$ i $\chi(-I_2) = (-1)^m$*

(b) *$m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ i karakter χ grupe $\Gamma := \Gamma_1(N)$ konačnog reda sa svojstvom $\chi(\underline{n}_1) = 1$*

(c) *$m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i karakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda grupe $\Gamma := \mathbf{\Gamma}_0(N)$ sa svojstvom $\chi(n_1) = 1$*

(d) *$m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i karakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda grupe*

$$\Gamma := \mathbf{\Gamma}_1(N) := \{(\gamma, J(\gamma, \cdot)) : \gamma \in \Gamma_1(N)\}$$

sa svojstvom $\chi(n_1) = 1$.

Tada $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \not\equiv 0$ ako vrijedi

$$n \leq \frac{N}{4\pi}\left(m - \frac{8}{3}\right),$$

tj.

$$m \geq \frac{4\pi n}{N} + \frac{8}{3}.$$

Primjerice, $\psi_{\Gamma,1,m,\chi} \not\equiv 0$ ako vrijedi nešto od sljedećeg:

$N = 1$ *i* $m \geq \frac{31}{2}$	$N = 5$ *i* $m \geq \frac{11}{2}$
$N = 2$ *i* $m \geq 9$	$N = 6$ *i* $m \geq 5$
$N = 3$ *i* $m \geq 7$	$7 \leq N \leq 9$ *i* $m \geq \frac{9}{2}$
$N = 4$ *i* $m \geq 6$	$10 \leq N \leq 15$ *i* $m \geq 4$

$16 \leq N \leq 37$ *i* $m \geq \frac{7}{2}$ $\qquad$ $N \geq 38$ *i* $m \geq 3$.

Korolar 7.22. *Pretpostavimo da je zadan* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *i jedno od sljedećeg:*

(a) $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $N = 2$ *i karakter* χ *konačnog reda grupe* $\Gamma := \Gamma(2)$ *sa svojstvima* $\chi(\underline{n}_2) = 1$ *i* $\chi(-I_2) = (-1)^m$

(b) $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ *i karakter* χ *konačnog reda grupe* $\Gamma := \Gamma(N)$ *sa svojstvom* $\chi(\underline{n}_N) = 1$.

(c) $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in 4\mathbb{Z}_{>0}$ *i karakter* χ *konačnog reda grupe*

$$\Gamma := \mathbf{\Gamma}(N) := \{(\gamma, J(\gamma, \cdot\,)) : \gamma \in \Gamma(N)\}$$

sa svojstvom $\chi(n_N) = 1$.

Tada $\psi_{\Gamma,n,m,\chi} \not\equiv 0$ *ako vrijedi*

$$n \leq \frac{N^2}{4\pi}\left(m - \frac{8}{3}\right),$$

tj.

$$m \geq \frac{4\pi n}{N^2} + \frac{8}{3}.$$

Primjerice, $\psi_{\Gamma,1,m,\chi} \not\equiv 0$ *ako vrijedi nešto od sljedećeg:*

$N = 2$ *i* $m \geq 6$ $\qquad$ $4 \leq N \leq 6$ *i* $m \geq \frac{7}{2}$

$N = 3$ *i* $m \geq \frac{9}{2}$ $\qquad$ $N \geq 7$ *i* $m \geq 3$.

Poglavlje 8

Analitičko proširenje i neponištavanje L-funkcija

Neka su $m \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takva da je ∞ kusp od Γ i $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda takav da je $\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma)$ za sve $\gamma \in \Gamma_\infty$. U ovom potpoglavlju metodama iz [35] dokazujemo rezultate o analitičkom proširenju i neponištavanju L-funkcija pridruženih kusp-formama iz $S_m(\Gamma, \chi)$:

- Potpoglavlje 8.1 okuplja nekoliko rezultata o gama-funkciji koje ćemo koristiti u sljedećim dvama potpoglavljima.
- U potpoglavlju 8.2 definiramo L-funkciju $L(\,\cdot\,, f) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1}\right)$ pridruženu kusp-formi $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Dokazujemo da se $L(\,\cdot\,, f)$ proširuje do holomorfne funkcije na $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}}$, i to proučavanjem Poincaréovih redova $\Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}$ koji do na multiplikativnu konstantu u smislu Rieszova teorema reprezentiraju linearne funkcionale $S_m(\Gamma, \chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto L(s, f)$.
- U potpoglavlju 8.3 primjenom Teorema 7.6 dokazujemo Teorem 8.6 – rezultat o neponištavanju redova $\Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}$ iz kojeg slijede dovoljni uvjeti za nejednakost $L\left(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}}\right) > 0$: Korolari 8.7 i 8.8.

8.1 Gama-funkcija

Gama-funkcija se najčešće definira kao funkcija $\Gamma \in \mathrm{Hol}\left(\mathbb{C}_{\Re(s)>0}\right)$ dana formulom

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt, \qquad \Re(s) > 0.$$

Analitički se proširuje na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ po formuli

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{s-1}}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}, \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \tag{8.1}$$

[1, Definicija 1.1.1 i Korolar 1.1.5]. Vrijedi

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}. \tag{8.2}$$

U dokazu Teorema 8.5 koristit ćemo sljedeću lemu.

Lema 8.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$. Tada vrijedi*

$$\Gamma(a) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^a} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right). \tag{8.3}$$

Dokaz. Dobro je poznato da je $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, što dokazuje drugu jednakost u (8.3). Prvu jednakost u (8.3) dokazuje raspis

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^a} &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x^2+1}\right)^{a-1} e^{-y} \frac{dy}{x^2+1}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-\left(x^2+1\right)t}\, dt\, dx \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x^2 t}\, dx \right) t^{a-1} e^{-t}\, dt \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{tu}} \right) t^{a-1} e^{-t}\, dt \\
&= \left(\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\, du \right) \left(\int_0^\infty t^{a-\frac{3}{2}} e^{-t}\, dt \right) \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a - \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

čija je druga jednakost dobivena supstitucijom $t = \frac{y}{x^2+1}$, a četvrta supstitucijom $u = x^2 t$ u unutrašnjem integralu. □

U dokazu Korolara 8.7 koristit ćemo sljedeću lemu.

Lema 8.2. *Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(n) n^s} = 1, \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

Dokaz. Imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(n) n^s} \overset{(8.2)}{=} \lim_{n\to\infty} \Gamma(s) \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!\, n^{s-1}} \overset{(8.1)}{=} \Gamma(s) \frac{1}{\Gamma(s)} = 1.$$ □

8.2 Analitičko proširenje L-funkcija

Neka su Γ diskretna podgrupa konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ karakter konačnog reda i $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pretpostavimo da je ∞ kusp od Γ i da vrijedi

$$\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma_\infty. \tag{8.4}$$

Neka je $h \in \mathbb{R}_{>0}$ takav da je

$$Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\Gamma_\infty = Z\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\sim}\right)\langle n_h\rangle .$$

Po Lemi 5.12 svaka $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ ima Fourierov razvoj

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n \frac{z}{h}}, \qquad z \in \mathcal{H},$$

gdje je

$$a_n(f) = \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi n)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \langle f,\, \psi_{\Gamma,n,m,\chi}\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}, \qquad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{8.5}$$

Definicija 8.3. *L-**funkcija** kusp-forme $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ jest funkcija $L(\,\cdot\,, f) : \mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1} \to \mathbb{C}$,*

$$L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}. \tag{8.6}$$

Iz Leme 3.17 je jasno da red na desnoj strani jednakosti (8.6) konvergira apsolutno i lokalno uniformno za $\Re(s) > \frac{m}{2} + 1$, dakle $L(\,\cdot\,, f) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1}\right)$.

Definiramo $F : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F(z, s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n \frac{z}{h}}.$$

Red na desnoj strani očito konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$, dakle $F \in \mathrm{Hol}(\mathcal{H} \times \mathbb{C})$.

Neka je sad $\Re(s) > \frac{m}{2} + 1$. Imamo

$$L(s, f) \overset{(8.5)}{=} \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f,\, n^{m-1-\overline{s}} \psi_{\Gamma,n,m,\chi}\right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}. \tag{8.7}$$

Kako po Lemi 5.13 red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1-\overline{s}} \psi_{\Gamma,n,m,\chi}$ konvergira u $S_m(\Gamma, \chi)$ i jednak je apsolutno i lokalno uniformno konvergentnom redu

$$P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1-\overline{s}} e^{2\pi i n \frac{\cdot}{h}}\right) = P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}(F(\,\cdot\,, m-\overline{s})),$$

iz (8.7) slijedi

$$L(s, f) = \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \left\langle f,\, P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}(F(\,\cdot\,, m-\overline{s}))\right\rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}. \tag{8.8}$$

Ovo daje naslutiti važnost Poincaréovih redova iz sljedeće leme.

Lema 8.4. *Neka je $\Re(s) < \frac{m}{2} - 1$ ili $1 < \Re(s) < \frac{m}{2}$. Tada red*

$$\Psi_{\Gamma,m,\chi,s} := P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}(F(\,\cdot\,, s))$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno i pripada prostoru $S_m(\Gamma,\chi)$.

Dokaz. U slučaju kad je $\Re(s) < \frac{m}{2} - 1$ tvrdnju dokazuje gornja diskusija.

Dokažimo tvrdnju u slučaju kad je $1 < \Re(s) < \frac{m}{2}$ primjenom Leme 5.10 na Poincaréov red $P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}(F(\,\cdot\,,s))$. Trivijalno su zadovoljeni svi uvjeti Leme 5.10 osim možda nejednakosti

$$\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} \left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) < \infty, \qquad 1 < \Re(s) < \frac{m}{2}. \tag{8.9}$$

Dokažimo nejednakost (8.9). Njenu lijevu stranu za svaki $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ možemo zapisati kao sumu

$$\underbrace{\int_{[0,h]\times]0,\varepsilon[} \left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\mathcal{H}}(z)}_{=:\,I_1} + \underbrace{\int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\mathcal{H}}(z)}_{=:\,I_2}.$$

Ocijenimo najprije I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{[0,h]\times[\varepsilon,\infty[} \left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n \frac{z}{h}} \Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\mathcal{H}}(z) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\Re(s)-1} \int_0^h \int_\varepsilon^\infty e^{-2\pi n \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy\, dx \\ &\le \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\Re(s)-1} e^{-2\pi(n-1)\frac{\varepsilon}{h}}\right)}_{<\infty \text{ po d'Alembertovu kriteriju}} h \underbrace{\int_\varepsilon^\infty e^{-2\pi \frac{y}{h}} y^{\frac{m}{2}-2}\, dy}_{\le\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)<\infty}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Za ocjenu integrala I_1 koristit ćemo Lipschitzovu formulu sumacije (vidi [20, Teorem 1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{2\pi i n z} = \Gamma(s)(2\pi)^{-s} e^{i\frac{\pi}{2}s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^s}, \qquad z \in \mathcal{H},\ \Re(s) > 1, \tag{8.11}$$

gdje je

$$z^s := e^{s\,\mathrm{Ln}(z)} \overset{(1.7)}{=} e^{s(\ln|z| + i\arg(z))}, \qquad z \in \mathcal{H},\ s \in \mathbb{C}.$$

Primijetimo da je za sve $z \in \mathcal{H}$ i $s \in \mathbb{C}$

$$|z^s| = |z|^{\Re(s)} e^{-\Im(s)\arg(z)} \in \left[|z|^{\Re(s)} \min\left\{e^{-\pi\Im(s)}, 1\right\}, |z|^{\Re(s)} \max\left\{e^{-\pi\Im(s)}, 1\right\}\right]. \tag{8.12}$$

Sad za $1 < \Re(s) < \frac{m}{2}$ imamo

$$\begin{aligned} I_1 &\overset{(8.11)}{=} \int_{[0,h]\times]0,\varepsilon[} \left|\Gamma(s)(2\pi)^{-s} e^{i\frac{\pi}{2}s} h^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+nh)^s} \Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\mathcal{H}}(z) \\ &\overset{(8.12)}{\le} \Gamma(\Re(s)) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)} e^{-\frac{\pi}{2}\Im(s)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,h]\times]0,\varepsilon[} \frac{\Im(z)^{\frac{m}{2}}}{|z+nh|^{\Re(s)}}\, dv_{\mathcal{H}}(z)\, \max\left\{e^{\pi\Im(s)}, 1\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(\Re(s)) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)} e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|} \int_{\mathbb{R}\times]0,\varepsilon[} \frac{\Im(z)^{\frac{m}{2}}}{|z|^{\Re(s)}}\, dv_{\mathcal{H}}(z) \\
&= \Gamma(\Re(s)) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)} e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\varepsilon} \frac{y^{\frac{m}{2}-\Re(s)-2}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)^{\frac{\Re(s)}{2}}}\, dy\, dx \\
&= \Gamma(\Re(s)) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)} e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{\Re(s)}{2}}} \cdot \int_0^{\varepsilon} y^{\frac{m}{2}-\Re(s)-1}\, dy \\
&\overset{(8.3)}{=} \Gamma(\Re(s)) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)} e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\Re(s)-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\Re(s)}{2}\right)} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{m}{2}-\Re(s)}}{\frac{m}{2}-\Re(s)} \qquad (8.13) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Ovo završava dokaz nejednakosti (8.9). □

Glavni je rezultat ovog potpoglavlja sljedeći teorem.

Teorem 8.5. *Neka je $f \in S_m(\Gamma, \chi)$. Tada je funkcija $\ell(\,\cdot\,, f) : \mathbb{C}_{\Re(s)>\frac{m}{2}+1} \cup \mathbb{C}_{\frac{m}{2}<\Re(s)<m-1} \to \mathbb{C}$,*

$$
\ell(s, f) := \frac{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \langle f,\, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\overline{s}} \rangle_{S_m(\Gamma,\chi)}\,, \qquad (8.14)
$$

dobro definirana i holomorfna. Ako je $m > 4$, tada je $\ell(\,\cdot\,, f)$ analitičko proširenje funkcije $L(\,\cdot\,, f)$ na poluravninu $\mathbb{C}_{\Re(s)>\frac{m}{2}}$.

Dokaz. Funkcija $\ell(\,\cdot\,, f)$ je dobro definirana po Lemi 8.4, a jednakost (8.8) dokazuje da je na $\mathbb{C}_{\Re(s)>\frac{m}{2}+1}$ jednaka $L(\,\cdot\,, f)$.

Da bismo dokazali da je $\ell(\,\cdot\,, f)$ holomorfna na $\mathbb{C}_{\frac{m}{2}<\Re(s)<m-1}$, zapišimo je u obliku

$$
\begin{aligned}
\ell(s, f) &\overset{(8.14)}{=} \frac{(4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} f(z) \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)\left(F\left(\,\cdot\,, m-\overline{s}\right)\big|_m \gamma\right)(z)}\, \Im(z)^m\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\underset{(1.9)}{\overset{(3.17)}{=}} \frac{(4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} f(\gamma.z)\overline{F\left(\gamma.z, m-\overline{s}\right)}\Im(\gamma.z)^m\, dv_{\Gamma\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&= \frac{(4\pi)^{m-1}}{h^m \Gamma(m-1)} \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} f(z)\overline{F\left(z, m-\overline{s}\right)}\Im(z)^m\, dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z),
\end{aligned}
$$

odakle tvrdnja slijedi primjenom Leme 6.6: uvjet (a) te leme očito je zadovoljen; da je zadovoljen uvjet (b), dokazuje ocjena

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} \left| f(z)\overline{F\left(z, m-\overline{s}\right)}\Im(z)^m \right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) \\
&\qquad \leq \left(\sup_{z\in\mathcal{H}} \left| f(z)\Im(z)^{\frac{m}{2}} \right|\right) \cdot \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}} \left| F\left(z, m-\overline{s}\right) \Im(z)^{\frac{m}{2}} \right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z),
\end{aligned}
$$

čija je desna strana ograničena za s iz proizvoljnog kompakta u $\mathbb{C}_{\frac{m}{2}<\Re(s)<m-1}$ po Propoziciji 3.15.(a)$\Rightarrow$(b) i po ocjeni lijeve strane nejednakosti (8.9) sumom desnih strana u (8.10) i (8.13).

Dokažimo sad zadnju tvrdnju teorema. Ako je $m > 4$, tada je $m - 1 > \frac{m}{2} + 1$ pa je domena funkcije $\ell(\,\cdot\,, f)$ poluravnina $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}}$. Kako se po (8.8) $\ell(\,\cdot\,, f)$ na poluravnini $\mathbb{C}_{\Re(s) > \frac{m}{2}+1}$ podudara sa $L(\,\cdot\,, f)$, tvrdnja slijedi. $\square$

8.3 Neponištavanje L-funkcija

Neka su Γ, χ, m i h zadani kao u prvom odlomku potpoglavlja 8.2. Temeljni je rezultat ovog potpoglavlja sljedeći teorem.

Teorem 8.6. *Neka je $N \in \mathbb{R}_{>0}$ definiran formulom* (7.29)*. Pretpostavimo da vrijedi*

$$m \geq \frac{4\pi}{Nh} + \frac{8}{3}. \tag{8.15}$$

Neka je $1 < \Re(s) < \frac{m}{2}$. Ako vrijedi

$$e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}\Gamma\left(\frac{\Re(s)+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\Re(s)-1}{2}\right)\frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\frac{\left(\frac{\pi}{Nh}\right)^{\frac{m}{2}-\Re(s)}}{\frac{m}{2}-\Re(s)} \leq \pi, \tag{8.16}$$

tada $\Psi_{\Gamma,m,\chi,s} \not\equiv 0$.

Dokaz. Teorem ćemo dokazati primjenom Teorema 7.6 na red $\Psi_{\Gamma,m,\chi,s} = P_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma,\chi}\left(F\left(\,\cdot\,,s\right)\right)$ sa $\|\,\cdot\,\| = |\cdot|$. Uvjerimo se da su zadovoljene pretpostavke tog teorema. Funkcija $F(\,\cdot\,, s)$ zadovoljava uvjet (f1) s početka potpoglavlja 7.1.2 za $\Lambda = \Gamma_\infty$ jer je h-periodična i vrijedi (8.4), a po (8.9) ima i svojstvo (f2). Uvjet (7.10) je zadovoljen zbog (8.4) po (3.4).

Definiramo

$$S := [0, h[\times \left]\frac{1}{N}, \infty\right[.$$

Po Lemi 7.17 skup S ima svojstvo (S1) iz Teorema 7.6. Preostaje dokazati da ima i svojstvo (S2), tj. da, uz oznaku $(\Gamma_\infty.S)^c := \mathcal{H} \setminus \Gamma_\infty.S$, vrijedi

$$\int_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\infty.S}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) > \int_{\Gamma_\infty\backslash(\Gamma_\infty.S)^c}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z). \tag{8.17}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\infty.S}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) &\overset{\text{(S1)}}{=} \int_{[0,h[\times]\frac{1}{N},\infty[}\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}e^{2\pi i n\frac{z}{h}}\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right| dv_{\mathcal{H}}(z)\\
&= \int_{\frac{1}{N}}^{\infty}\int_0^h\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}e^{2\pi i(n-1)\frac{x+iy}{h}}\right| dx\, e^{-2\pi\frac{y}{h}}y^{\frac{m}{2}-2}\, dy\\
&\geq \int_{\frac{1}{N}}^{\infty}\left|\int_0^h\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}e^{2\pi i(n-1)\frac{x+iy}{h}}\, dx\right| e^{-2\pi\frac{y}{h}}y^{\frac{m}{2}-2}\, dy\\
&\overset{\text{LTDK}}{=} \int_{\frac{1}{N}}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^h n^{s-1}e^{2\pi i(n-1)\frac{x+iy}{h}}\, dx\right| e^{-2\pi\frac{y}{h}}y^{\frac{m}{2}-2}\, dy
\end{aligned}$$

$$= h\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}-1}\int_{\frac{2\pi}{Nh}}^{\infty} e^{-y}y^{\frac{m}{2}-2}\,dy.$$

Kako je

$$\frac{2\pi}{Nh} \overset{(8.15)}{\leq} \frac{m}{2}-\frac{4}{3} \overset{(7.32)}{<} M_{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1,1\right)},$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_\infty.S}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z) &> h\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}-1}\int_{\mathrm{M}_{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1,1\right)}}^{\infty} e^{-y}y^{\frac{m}{2}-2}\,dy\\
&= h\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-y}y^{\frac{m}{2}-2}\,dy\\
&= \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\pi^{1-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right). \qquad (8.18)
\end{aligned}$$

S druge strane, kako je $[0,h[\times]0,\infty[$ stroga fundamentalna domena za Γ_∞ u $\mathcal{H}$, imamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\infty\backslash(\Gamma_\infty.S)^c}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|dv_{\Gamma_\infty\backslash\mathcal{H}}(z)\\
&\quad= \int_{[0,h[\times]0,\frac{1}{N}]}\left|F(z,s)\Im(z)^{\frac{m}{2}}\right|dv_{\mathcal{H}}(z)\\
&\quad\overset{(8.13)}{\leq} e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{\Re(s)}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\Re(s))}{\Gamma\left(\frac{\Re(s)}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{\Re(s)-1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m}{2}-\Re(s)}}{\frac{m}{2}-\Re(s)}\\
&\quad= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}\left(\frac{h}{\pi}\right)^{\Re(s)}\Gamma\left(\frac{\Re(s)+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\Re(s)-1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m}{2}-\Re(s)}}{\frac{m}{2}-\Re(s)}, \qquad (8.19)
\end{aligned}$$

pri čemu je zadnja jednakost dobivena primjenom Legendreove duplikacijske formule [1, Teorem 1.5.1]:

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)}{2^{2z}\Gamma(z)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

Iz ocjena (8.18) i (8.19) vidimo da nejednakost (8.17) vrijedi ako je

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\pi^{1-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) \geq \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}\left(\frac{h}{\pi}\right)^{\Re(s)}\Gamma\left(\frac{\Re(s)+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\Re(s)-1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m}{2}-\Re(s)}}{\frac{m}{2}-\Re(s)},$$

a ova je nejednakost očito ekvivalentna nejednakosti (8.16). □

Korolar 8.7. *Pretpostavimo da je* $m\in\frac{9}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. *Neka je* $\frac{m}{2}<\Re(s)<m-1$. *Pretpostavimo da je* $\frac{Nh}{\pi}$ *veći od ili jednak*

$$\max\left\{\frac{4}{m-\frac{8}{3}},\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{\pi}\Gamma\left(\frac{m-\Re(s)+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-\Re(s)-1}{2}\right)\frac{1}{\Re(s)-\frac{m}{2}}\frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}\right)^{\frac{1}{\Re(s)-\frac{m}{2}}}\right\}.$$

Tada je

$$L\left(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}\right) > 0.$$

Dokaz. Po Teoremu 8.6 je $\Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}} \in S_m(\Gamma,\chi) \setminus \{0\}$ pa je

$$0 < \langle \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}} \rangle_{S_m(\Gamma,\chi)} \overset{(8.14)}{=} \frac{h^m \Gamma(m-1)}{\varepsilon_\Gamma (4\pi)^{m-1}} \ell(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}),$$

dakle $\ell(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}) > 0$. Kako je $m > 4$, po Teoremu 8.5 to znači da je $L(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}) > 0$. □

Korolar 8.8. *Neka su $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$, $\nu \in \mathbb{R}_{>\varepsilon}$ i $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$. Za $m \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiramo*

$$C_m := \left[\frac{m}{2} + \varepsilon, \frac{m}{2} + \nu\right] \times [-\eta, \eta] \subseteq \mathbb{C}.$$

Tada postoji $m_0 \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da za sve $m \in m_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i sve $s \in C_m$, za svaku diskretnu podgrupu Γ konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ takvu da je ∞ kusp od Γ i za svaki karakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ konačnog reda koji zadovoljava $\eta_\gamma^{-2m} = \chi(\gamma)$ za sve $\gamma \in \Gamma_\infty$, vrijedi

$$L\left(s, \Psi_{\Gamma,m,\chi,m-\bar{s}}\right) > 0.$$

Dokaz. Ako je $m > 2\nu + 2$, tada je $\frac{m}{2} + \nu < m - 1$ pa je $C_m \subseteq \mathbb{C}_{\frac{m}{2} < \Re(s) < m-1}$. Dakle, po Korolaru 8.7 i po (7.30) dovoljno je dokazati da postoji $m_0 \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ takav da za sve $m \in m_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i za sve $s \in C_m$ vrijedi

$$\frac{1}{\pi} \geq \frac{4}{m - \frac{8}{3}} \tag{8.20}$$

i

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\Re(s) - \frac{m}{2}} \geq \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\Im(s)|}}{\pi} \Gamma\left(\frac{m - \Re(s) + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m - \Re(s) - 1}{2}\right) \frac{1}{\Re(s) - \frac{m}{2}} \frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}. \tag{8.21}$$

(8.20) očito vrijedi za sve $m \geq \frac{8}{3} + 4\pi$. Nadalje, ako je $m \geq 2\nu + 10$, tada se za svaki $s \in C_m$ brojevi $\frac{m - \Re(s) + 1}{2}$ i $\frac{m - \Re(s) - 1}{2}$ nalaze u segmentu $\left[2, \frac{m}{4} + \frac{1-\varepsilon}{2}\right]$, na kojemu je funkcija Γ rastuća, pa je desna strana nejednakosti (8.21) za sve $s \in C_m$ odozgo ograničena sa

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}\eta}}{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{4} + \frac{1-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{4} - \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}.$$

Kako je uz to lijeva strana nejednakosti (8.21) za sve $s \in C_m$ veća od ili jednaka $\left(\frac{1}{\pi}\right)^\nu$, (8.21) vrijedi za sve $s \in C_m$ ako je

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\nu} \geq \frac{e^{\frac{\pi}{2}\eta}}{\pi}\Gamma\left(\frac{m}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{4}-\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon}\frac{2^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}$$

tj. ako vrijedi

$$\frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{\pi}{2}\eta}\pi^{\frac{1}{2}-\nu} \geq \Gamma\left(\frac{m}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{4}-\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\frac{2^{\frac{m}{2}-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} =: R(m).$$

Da bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je dokazati da je $\lim_{m\to\infty} R(m) = 0$. Primjenom Legendreove duplikacijske formule [1, Teorem 1.5.1]

$$\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\leq 0},$$

dobivamo da je

$$R(m) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{4}-\frac{1+\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{4}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{4}\right)}.$$

Pisanjem $m = 4n + l$ sa $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ i $l \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$, ovo možemo zapisati u obliku

$$R\left(4n+l\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{l}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(n)n^{\frac{l}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{l}{4}+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(n)n^{\frac{l}{4}-\frac{1+\varepsilon}{2}}} \left(\frac{\Gamma\left(n+\frac{l}{4}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)n^{\frac{l}{4}-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{l}{4}\right)}{\Gamma(n)n^{\frac{l}{4}}}\right)^{-1} n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{8.22}$$

Za svaki $l \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ desna strana jednakosti (8.22) teži u 0 kad $n \to \infty$ s obzirom da po Lemi 8.2 vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n)n^s} = 1, \qquad s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{<0},$$

dok je $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Dakle, $\lim_{m\to\infty} R(m) = 0$. Time je tvrdnja dokazana. □

Zaključak

U ovoj je disertaciji dokazan niz originalnih rezultata o Poincaréovim redovima na metaplektičkom natkrivaču $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, s naglaskom na rezultate o neponištavanju tih redova i na njihove primjene u teoriji modularnih formi polucijele težine. Dokazi se temelje na trima osnovnim alatima: Harish-Chandrinu pristupu teoriji reprezentacija povezanih poluprostih Liejevih grupa s konačnim centrom, klasičnoj vezi između kusp-formi polucijele težine i kuspidalnih automorfnih formi na grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i integralnom kriteriju neponištavanja za Poincaréove redove na lokalno kompaktnim Hausdorffovim grupama koji je u svojem osnovnom obliku dokazan u [31, Teorem 4-1].

Opišimo ukratko znanstveni doprinos ovog rada.

Kao temelj iz teorije modularnih formi, u radu je uvedena definicija prostora $M_m(\Gamma,\chi)$ odnosno $S_m(\Gamma,\chi)$ modularnih formi odnosno kusp-formi težine $m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ za proizvoljnu diskretnu podgrupu Γ konačnog kovolumena u $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ i karakter $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ konačnog reda. Ona kao posebne slučajeve uključuje definicije standardnih prostora $M_m(N,\chi)$ i $S_m(N,\chi)$ iz [57], gdje su $m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N\in 4\mathbb{Z}_{>0}$ i χ paran Dirichletov karakter modulo N. Detaljno je dokazana poznata, ali u dostupnoj nam literaturi u ovoj općenitosti nedokazana, činjenica da je klasični lift kusp-formi polucijele težine do automorfnih formi na grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ unitarni izomorfizam prostora $S_m(\Gamma,1)$ i prostora $\mathcal{A}_{cusp}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)_m$ kuspidalnih automorfnih formi težine m za Γ.

Kao temelj iz teorije reprezentacija, ali i samostalno zanimljiva tema, istražena je infinitezimalna struktura reprezentacija iz osnovne serije grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, a njena holomorfna i antiholomorfna diskretna serija realizirane su na prostorima (anti)holomorfnih funkcija na gornjoj kompleksnoj poluravnini $\mathcal{H}$ i na jediničnom disku $\mathcal{D}$. Nadalje, izračunati su K-konačni matrični koeficijenti pravih (engl. genuine) kvadratno integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ koji se s obiju strana transformiraju kao karakteri grupe K. Među njima su izdvojeni K-konačni matrični koeficijenti $F_{k,m}$ ($k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$) integrabilnih reprezentacija grupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ čiji Poincaréovi redovi razapinju prostore $\mathcal{A}_{cusp}(\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim)_m$, gdje je $m\in\frac{5}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Od pripadnih su kusp-formi konstruirani sustavi izvodnica za prostore $S_m(\Gamma,\chi)$.

U glavnom su dijelu rada dokazane ojačane varijante integralnih kriterija neponištavanja [31, Teorem 4-1] i [33, Lema 2-1] odnosno [33, Lema 3-1] za Poincaréove redove na Liejevim grupama odnosno za Poincaréove redove polucijele težine na $\mathcal{H}$. Njihovom su primjenom dobiveni rezultati o neponištavanju nekih od Poincaréovih redova matričnih koeficijenata $F_{k,m}$, odnosno o neponištavanju pripadnih kusp-formi. Dokazani su i rezultati o neponištavanju nekih klasičnih Poincaréovih redova polucijele težine i, u zadnjem dijelu rada, o neponištavanju L-funkcija pridruženih kusp-formama težine $m \in \frac{9}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ u točkama pruge $\mathbb{C}_{\frac{m}{2} < \Re(s) < m-1}$.

Nadalje, tehnikama iz teorije reprezentacija izračunat je Peterssonov skalarni produkt Poincaréovih redova pridruženih matričnim koeficijentima $F_{k,m}$ s proizvoljnom $\varphi \in \mathcal{A}_{cusp}\left(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim\right)_m$. Taj je rezultat otkrio vezu pripadnih kusp-formi s kusp-formama koje u smislu Rieszova teorema reprezentiraju linearne funkcionale $S_m(\Gamma, \chi) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f^{(k)}(\xi)$, čime je nastao i reprezentacijski dokaz formula za potonje. Iz dokaza ovih rezultata proizašli su i kratki dokazi nekoliko zanimljivih rezultata o kusp-formama polucijele težine, npr. dokazane su neke ocjene derivacija klasičnih Poincaréovih redova, kao i činjenica da za svaku kusp-formu $f \in S_m(\Gamma, \chi)$ težine $m \in \frac{5}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vrijedi $\sup_{z \in \mathcal{H}} \left| f^{(k)}(z) \Im(z)^{\frac{m}{2}+k} \right| < \infty$ za sve $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dakle, u ovom je radu na nekoliko načina iskorištena poznata veza između teorije modularnih formi i teorije reprezentacija koja tradicionalno pojednostavljuje mnoge probleme iz teorije modularnih formi i daje novi uvid u njih. Nadalje, blago je ojačan, i primijenjen na tri neovisna problema, opći integralni kriterij za neponištavanje Poincaréovih redova originalno razvijen u [31]. U svakom je od triju spomenutih problema proučavana zanimljiva familija Poincaréovih redova na grupi $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$, ali dobiveni su rezultati o neponištavanju samo redova iz neke njene prave potfamlije. To stvara poticaj i potrebu za daljnjim istraživanjem, s jedne strane s ciljem ojačanja postojećih i otkrivanja novih kriterija neponištavanja, a s druge strane s ciljem njihove primjene na neponištavanje Poincaréovih redova na Liejevim grupama višeg ranga.

Dodatak

Dokaz Leme 7.12 upotpunjen računom u R-u

Najprije se sjetimo definicije od $N_{k,m}$:

$$N_{k,m} := \frac{4\,\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\mathrm{M}\left(\frac{k}{2}+1, \frac{m}{2}-1\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \in \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

gdje je $\mathrm{M}(a,b)$ medijan beta-distribucije $\mathrm{Beta}(a,b)$ s parametrima $a,b \in \mathbb{R}_{>0}$, implementiran u programskom jeziku R 3.3.2 [47] kao `qbeta(0.5,a,b)`.

Izračunajmo $\lfloor N_{k,m} \rfloor + 1$ za $k \in \{0,1,2,\ldots,1000\}$ i $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cap \left[\frac{9}{2}, 16970\right]$. (Ovaj račun traje nekoliko minuta.)

```
k <- seq(0, 1000, by=1)
m <- seq(9/2, 16970, by=1/2)
f <- function(a, b)
    floor(4*sqrt(qbeta(0.5,a/2+1,b/2-1))/(1-qbeta(0.5,a/2+1,b/2-1)))+1
fp1_N_km <- outer(k, m, f)
```

Lema 7.12. *Neka su $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ i $m \in \frac{9}{2}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definiramo $C := 1.3738$ i*

$$N^{close}_{k,m} := 4\sqrt{\frac{k+C}{m-4+C}\left(1+\frac{k+C}{m-4+C}\right)}. \tag{8.23}$$

Vrijedi:

(i) *Ako je $k \leq 1000$, tada je $\left\lceil N^{close}_{k,m} + 6.204 \right\rceil \in \{\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1, \lfloor N_{k,m}\rfloor + 2, \ldots, \lfloor N_{k,m}\rfloor + 8\}$.*

(ii) *Ako je $k \leq 158$, tada je $\left\lceil N^{close}_{k,m} + 0.8018 \right\rceil \in \{\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1, \lfloor N_{k,m}\rfloor + 2\}$.*

(iii) *Ako su $k \leq 1000$ i $m \geq 26.4 + 16.9431k$, tada je $\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1 = 1$.*
Ako su $k \leq 1000$ i $m \leq 25.34 + 16.9431k$, tada je $\lfloor N_{k,m}\rfloor + 1 > 1$.

Dokaz. Račun u R-u pokazuje da (i) vrijedi za $m < 16970$:

```
g <- function(a, b) 4*sqrt((a+1.3738) / (b-2.6262) * (1 + (a+1.3738) /
    (b-2.6262)))
N_km_close <- outer(k, m, g)
min(ceiling(N_km_close+6.204) - fp1_N_km)
max(ceiling(N_km_close+6.204) - fp1_N_km)
```

Output:
```
[1] 0
[1] 7
```

S obzirom da su $N_{k,m}$ i $N_{k,m}^{close}$ rastuće funkcije varijable k i padajuće funkcije varijable m (za $N_{k,m}$ to slijedi iz Leme 7.11.(i) – (ii)), za $m \geq 16970$ i $k \leq 1000$ vrijedi

$$1 \leq \lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 \leq \lfloor N_{1000,16970} \rfloor + 1 \overset{\mathrm{R}}{=} 1, \quad \text{dakle} \quad \lfloor N_{k,m} \rfloor + 1 = 1,$$

```
fp1_N_km[which(k==1000), which(m==16970)]
```

Output:
```
[1] 1
```

$$7 \leq \left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204 \right\rceil \leq \left\lceil N_{1000,16970}^{close} + 6.204 \right\rceil \overset{\mathrm{R}}{=} 8, \quad \text{dakle} \quad \left\lceil N_{k,m}^{close} + 6.204 \right\rceil \in \{7, 8\},$$

```
ceiling(N_km_close[which(k==1000), which(m==16970)]+6.204)
```

Output:
```
[1] 8
```

što dovršava dokaz tvrdnje (i). Tvrdnja (ii) se dokaže analogno: u R-u se provjeri da vrijedi za $m \leq 2702$,

```
min(ceiling(N_km_close[1:which(k==158),1:which(m==2702)]+0.8018) -
    fp1_N_km[1:which(k==158),1:which(m==2702)])
max(ceiling(N_km_close[1:which(k==158),1:which(m==2702)]+0.8018) -
    fp1_N_km[1:which(k==158),1:which(m==2702)])
```

Output:
```
[1] 0
[1] 1
```

dok je $\lfloor N_{158,2702.5} \rfloor + 1 = 1$

```
fp1_N_km[which(k==158),which(m==2702.5)]
```

Output: [1] 1

i $\left\lceil N_{158,2702.5}^{close} + 0.8018 \right\rceil = 2$.

```
ceiling(N_km_close[which(k==158),which(m==2702.5)]+0.8018)
```

Output: [1] 2

Kako je $N_{k,m}$ padajuća funkcija varijable m, dokaz tvrdnje (iii) svodi se na provjeru u R-u da za sve $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$ vrijedi

$$\left\lfloor N_{k,\,m(k)} \right\rfloor + 1 = 1, \quad \text{gdje je} \quad m(k) := \min\left(\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0} \right) \cap \mathbb{R}_{\geq 26.4+16.9431k} \right),$$

```
for(a in 0:1000){
   if(fp1_N_km[which(k==a),which(m==ceiling(2*(26.4+16.9431*a))/2)]>1)
      {print("F")}
}
print("DONE")
```

Output: [1] "DONE"

$$\left\lfloor N_{k,\,m'(k)} \right\rfloor + 1 > 1, \quad \text{gdje je} \quad m'(k) := \max\left(\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0} \right) \cap \mathbb{R}_{\leq 25.34+16.9431k} \right).$$

```
for(a in 0:1000){
   if(fp1_N_km[which(k==a),which(m==floor(2*(25.34+16.9431*a))/2)]==1)
      {print("F")}
}
print("DONE")
```

Output: [1] "DONE"

□

Bibliografija

[1] G. E. Andrews, R. Askey i R. Roy. *Special Functions*. Sv. 71. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, 1999.

[2] W. L. Baily Jr. *Introductory Lectures on Automorphic Forms*. Sv. 12. Publications of the Mathematical Society of Japan. Princeton University Press, 1973.

[3] A. Borel. “Introduction to automorphic forms”. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Ur. A. Borel i G. D. Mostow. Sv. 9. Amer. Math. Soc., 1966, str. 199–210.

[4] A. Borel. *Automorphic Forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Sv. 130. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[5] W. Casselman i D. Miličić. “Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations”. *Duke Math. J.* 49.4 (1982), str. 869–930.

[6] J. Chen i H. Rubin. “Bounds for the difference between median and mean of gamma and Poisson distributions”. *Statist. Probab. Lett.* 4.6 (1986), str. 281–283.

[7] M. Derickx, M. van Hoeij i J. Zeng. “Computing Galois representations and equations for modular curves $X_H(\ell)$”. *Preprint* arXiv:1610.05483v2 (2014).

[8] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. izdanje. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, 1999.

[9] L. Gårding. “Note on continuous representations of Lie groups”. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 33.11 (1947), str. 331–332.

[10] S. S. Gelbart. *Weil’s representation and the spectrum of the metaplectic group*. Sv. 530. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1976.

[11] Harish-Chandra. “Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 75.2 (1953), str. 185–243.

[12] Harish-Chandra. “Representations of semisimple Lie groups. II”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 76 (1954), str. 26–65.

[13] Harish-Chandra. “Discrete series for semisimple Lie groups. II: Explicit determination of the characters”. *Acta Math.* 116 (1966), str. 1–111.

[14] G. Henniart. “La conjecture de Langlands locale pour GL(3)”. *Mémoires de la Société Mathématique de France* 11–12 (1983), str. 1–186.

[15] R. Howe i T. E. Chye. *Non-Abelian Harmonic Analysis: Applications of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Universitext. Springer, New York, 1992.

[16] H. Iwaniec. *Topics in Classical Automorphic Forms.* Sv. 17. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1997.

[17] J. Kerman. “A closed-form approximation for the median of the beta distribution”. *Preprint* arXiv:1111.0433 (2011).

[18] A. W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction.* 2. izdanje. Sv. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 2002.

[19] A. W. Knapp i D. A. Vogan Jr. *Cohomological Induction and Unitary Representations.* Sv. 45. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1995.

[20] M. Knopp i S. Robins. “Easy proofs of Riemann's functional equation for $\zeta(s)$ and of Lipschitz summation”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 129.7 (2001), 1915—1922.

[21] N. Koblitz. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms.* 2. izdanje. Sv. 97. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1993.

[22] W. Kohnen. “Nonvanishing of Hecke L-functions associated to cusp forms inside the critical strip”. *J. Number Theory* 67.2 (1997), str. 182–189.

[23] W. Kohnen i W. Raji. “Non-vanishing of L-functions associated to cusp forms of half-integral weight in the plus space”. *Res. Number Theory* 3 (2017). DOI: https://doi.org/10.1007/s40993-017-0072-z.

[24] S. Lang. $SL_2(\mathbf{R})$. Sv. 105. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1985.

[25] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2. izdanje. Sv. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2012.

[26] J. Lehner. “On the non-vanishing of Poincaré series”. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 23 (1980), 225—228.

[27] J. Lepowsky. “Algebraic results on representations of semisimple Lie groups”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 176 (1973), str. 1–44.

[28] T. Miyake. *Modular forms.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2006.

[29] C. J. Mozzochi. “On the non-vanishing of Poincaré series”. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 32 (1989), 131—137.

[30] G. Muić. “On the decomposition of $L^2(\Gamma\backslash G)$ in the cocompact case”. *J. Lie Theory* 18.4 (2008), str. 937–949.

[31] G. Muić. “On a construction of certain classes of cuspidal automorphic forms via Poincaré series”. *Math. Ann.* 343.1 (2009), str. 207–227.

[32] G. Muić. “On the cuspidal modular forms for the Fuchsian groups of the first kind”. *J. Number Theory* 130.7 (2010), str. 1488–1511.

[33] G. Muić. “On the non-vanishing of certain modular forms”. *Int. J. Number Theory* 7.2 (2011), str. 351–370.

[34] G. Muić. “Modular curves and bases for the spaces of cuspidal modular forms”. *Ramanujan J.* 27.2 (2012), str. 181–208.

[35] G. Muić. “On the analytic continuation and non-vanishing of L-functions”. *Int. J. Number Theory* 8.8 (2012), str. 1831–1854.

[36] G. Muić. “On the inner product of certain automorphic forms and applications”. *J. Lie Theory* 22.4 (2012), str. 1091–1107.

[37] G. Muić. “Smooth cuspidal automorphic forms and integrable discrete series”. *Preprint* arXiv:1610.05483v2 (2016).

[38] Goran Muić. “Spectral decomposition of compactly supported Poincaré series and existence of cusp forms”. *Compos. Math.* 146.1 (2010), 1—20.

[39] C. P. Niculescu i L. E. Persson. *Convex Functions and their Applications: A Contemporary Approach.* CMS Books in Mathematics. Springer, New York, 2006.

[40] K. Ono. *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q-series.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 102. American Mathematical Society, 2004.

[41] C. O’Sullivan i K. Taylor. “Hyperbolic Fourier coefficients of Poincaré series”. *Ramanujan J.* 41.1 (2016), str. 465–518.

[42] M. E. Payton, L. J. Young i J. H. Young. “Bounds for the difference between median and mean of beta and negative binomial distributions”. *Metrika* 36 (1989), str. 347–354.

[43] H. Petersson. “Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen”. *Acta Math.* 58 (1932), str. 169–215.

[44] H. Petersson. “Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art”. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* 14 (1941), str. 22–60.

[45] H. Poincaré. “Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes”. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques (3)* 3 (1911), str. 125–149.

[46] H. Poincaré. “Mémoire sur les fonctions fuchsiennes”. *Acta Math.* 1 (1882), str. 193–294.

[47] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria, 2016. URL: https://www.R-project.org/.

[48] C. Rader. *Spherical functions on a semi-simple Lie group.* Lecture notes in representation theory. University of Chicago, Dept. of Mathematics, 1976.

[49] A. Raghuram. “Non-vanishing of L-functions of cusp forms inside the critical strip”. Number theory, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. 1. Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2005, str. 97–105.

[50] B. Ramakrishnan i K. D. Shankhadhar. “Nonvanishing of L-functions associated to cusp forms of half-integral weight. In: Automorphic forms”. *Springer Proc. Math. Stat.* 115 (2014).

[51] R. A. Rankin. “The vanishing of Poincaré series”. *Proc. Edinb. Math. Soc.* 23.2 (1980), 151—161.

[52] R. C. Rhoades. “Linear relations among Poincaré series via harmonic weak Maass forms”. *Ramanujan J.* 29.1–3 (2012), str. 311–320.

[53] G. Savin. “Cusp forms”. *Israel J. Math.* 80.1 (1992), str. 195–205.

[54] J.P. Serre. *Local Fields.* Sv. 67. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1979.

[55] F. Shahidi. “A proof of Langlands’ conjecture on Plancherel measures; complementary series of p-adic groups”. *Ann. of Math.* 132.2 (1990), str. 273–330.

[56] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Sv. 11. Publications of the Mathematical Society of Japan. Princeton University Press, 1971.

[57] G. Shimura. “On modular forms of half integral weight”. *Ann. of Math. (2)* 97.3 (1973), str. 440–481.

[58] S. Tornier. *On a Theorem of Shalom (Master Thesis).* ETH Zürich, 2016. DOI: https://doi.org/10.3929/ethz-a-010590629.

[59] M.-F. Vignéras. “Correspondances entre representations automorphe de GL(2) sur une extension quadratique de GSp(4) sur $\mathbb{Q}$, conjecture locale de Langlands pour GSp(4)”. *Contemp. Math.* 53 (1986), str. 463–527.

[60] N. R. Wallach. *Real Reductive Groups I.* Sv. 132. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, San Diego, 1988.

[61] S. Žunar. “On the non-vanishing of Poincaré series on the metaplectic group”. *Manuscripta Math.* (2018). DOI: https://doi.org/10.1007/s00229-018-1011-6.

Životopis

Sonja Žunar rođena je 20. veljače 1991. u Varaždinu. Osnovnu školu i opću gimnaziju završila je u Ivancu. 2009. godine upisala je preddiplomski sveučilišni studij Matematika, a 2012. godine diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je 2014. godine s temom diplomskog rada *Analitičke metode modularnih formi* i iste godine upisala doktorski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

Tijekom preddiplomskog i diplomskog studija primala je državnu stipendiju za darovite studente Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske. Bila je demonstratorica iz kolegija Diferencijalni račun funkcija više varijabli i Kompleksna analiza, a 2012. i 2014. godine primila je Pohvalnice Fakultetskog vijeća za izuzetan uspjeh u studiju.

Od 2015. do 2017. godine bila je zaposlena kao stručni suradnik, a od 2017. godine zaposlena je kao asistent na projektu Automorfne forme, reprezentacije i primjene financiranom od Hrvatske zaklade za znanost (br. 9364), u Zavodu za algebru i osnove matematike Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Od 2014. godine aktivno sudjeluje u radu Seminara za unitarne reprezentacije i automorfne forme. Držala je vježbe iz kolegija Matematička analiza 1 i Osnove matematičke analize na Matematičkom odsjeku te iz kolegija Matematika 1 i Matematika 2 na Kemijskom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Autorica je jednog znanstvenog rada:

- S. Žunar. "On the non-vanishing of Poincaré series on the metaplectic group". *Manuscripta Math.* (2018). DOI: https://doi.org/10.1007/s00229-018-1011-6