Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kontrec

REPREZENTACIJE NEKIH IRACIONALNIH W-ALGEBRI

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ana Kontrec

REPRESENTATIONS OF CERTAIN IRRATIONAL W-ALGEBRAS

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2019

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Kontrec

REPREZENTACIJE NEKIH IRACIONALNIH W-ALGEBRI

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Dražen Adamović

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ana Kontrec

REPRESENTATIONS OF CERTAIN IRRATIONAL W-ALGEBRAS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Prof. Dražen Adamović, PhD

Zagreb, 2019

Zahvala

Dugujem osobitu zahvalnost svom mentoru, prof. dr. sc. Draženu Adamoviću koji mi je pružio priliku za rad u znanstvenom okruženju i prihvatio se mentorstva u procesu izrade ove doktorske disertacije. Zahvalna sam mu na usmjeravanju i velikoj podršci, svakom ohrabrenju i stručnom savjetu, razumijevanju i iskazanom strpljenju.

Želim izraziti veliku zahvalnost svojim roditeljima, za svu njihovu požrtvovnost, razumijevanje i ohrabrivanje tijekom cijelog mog školovanja i rada na disertaciji.

Ana Kontrec je na doktorskom studiju financirana sredstvima Hrvatske zaklade za znanost projekta 2634 ”Algebarske i kombinatorne metode u teoriji verteks algebri”. Također, ova disertacija je djelomično izrađena sredstvima ”QuantiXLie - Znanstvenog centra izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri”, projekta sufinanciranog od Vlade Republike Hrvatske i Europske unije, iz Europskog fonda za regionalni razvoj - Operativni program Kompetitivnost i kohezija (KK.01.1.1.01.0004).

Sažetak

U disertaciji proučavamo neke iracionalne $\mathcal{W}$-algebre i njihove reprezentacije. Glavni primjer koji istražujemo je prosta Bershadsky-Polyakov verteks algebra $\mathcal{W}_k(= \mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta))$, tj. minimalna afina $\mathcal{W}$-algebra pridružena sl_3. T. Arakawa je dokazao u članku [9] da je $\mathcal{W}_k$ racionalna ako je k polucijeli broj veći od $-3/2$. Mi proučavamo slučajeve kad je $\mathcal{W}_k$ iracionalna, te klasificiramo $\mathcal{W}_k$–module za neke k. Klasifikacija ireducibilnih modula koristi Zhuovu teoriju i formule za singularne vektore. Istaknimo da je Zhuova algebra realizirana kao kvocijent Smithove algebre iz [44]. Klasifikacija ireducibilnih jakih modula za algebru $\mathcal{W}_k$ (tj. modula s konačno-dimenzionalnim težinskim potprostorima za operator $L(0)$) je zato povezana s klasifikacijom konačno-dimenzionalnih reprezentacija Smithove algebre.

U slučaju $k = -5/3$ pokazujemo da je $\mathcal{W}_k$ realizirana kao verteks podalgebra Weylove verteks algebre. Dokazujemo da tada $\mathcal{W}_k$ ima točno 6 ireducibilnih jakih modula. U slučaju $k = -9/4$, $\mathcal{W}_k$ je važan primjer logaritamske verteks algebre. Klasificiramo jake $\mathcal{W}_k$ module za $k = -9/4$ i dokazujemo da $\mathcal{W}_k$ ima točno 3 ireducibilna jaka modula. Da bi pokazali da je $\mathcal{W}_k$ iracionalna, konstruiramo neprebrojivu familiju težinskih modula za $\mathcal{W}_k$ izvan kategorije $\mathcal{O}$.

Konstruiramo familiju singularnih vektora koja generalizira Arakawine formule za singularne vektore za k polucijeli broj iz [9]. U slučajevima $k = -1$ i $k = 0$ klasificiramo sve module u kategoriji $\mathcal{O}$. U slučaju $k = 0$, dajemo eksplicitnu realizaciju verteks algebre $\mathcal{W}_k$ i njenih modula kao određene iracionalne podalgebre verteks algebri pridruženih rešetkama. Također proučavamo algebru $\mathcal{W}_k$ u slučaju kad je k cijeli broj veći od -1.

Ključne riječi: verteks algebre, afine $\mathcal{W}$–algebre, Bershadsky-Polaykov algebra, Smithova algebra, Zhuova algebra

Summary

In this thesis we study certain irrational $\mathcal{W}$–algebras and their representations. Main example that we investigate is the simple Bershadsky-Polyakov vertex algebra $\mathcal{W}_k(= \mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta))$, i.e. the minimal affine $\mathcal{W}$–algebra associated to sl_3. T. Arakawa proved in [9] that $\mathcal{W}_k$ is rational if k is a half integer greater that $-3/2$. We study cases where $\mathcal{W}_k$ is irrational, and classify $\mathcal{W}_k$–modules for certain k. Main tools that we use to classify irreducible modules are Zhu's theory and formulas for singular vectors. Zhu algebra is realized as a quotient of the Smith algebra from [44]. Classification of irreducible strong modules for $\mathcal{W}_k$ (i.e. modules with finite dimensional weight subspaces for the the operator $L(0)$) is hence connected to the classification of finite dimensional representations of the Smith algebra.

In the case $k = -\frac{5}{3}$, we show that $\mathcal{W}_k$ is realized as a vertex subalgebra of the Weyl vertex algebra. We prove that in this case $\mathcal{W}_k$ has exactly 6 irreducible strong modules. In the case $k = -\frac{9}{4}$, $\mathcal{W}_k$ is an important example of a logarithmic vertex algebra. We classify strong $\mathcal{W}_k$–modules for $k = -9/4$ and prove that $\mathcal{W}_k$ has exactly 3 irreducible strong modules. In order to show that $\mathcal{W}_k$ is irrational, we construct an uncountable family of weight modules for $\mathcal{W}_k$ outside of category $\mathcal{O}$.

We construct a family of singular vectors which generalizes Arakawa's formulas for singular vectors for k half integer from [9]. For $k = -1$ and $k = 0$ we classify all modules in the category $\mathcal{O}$. In the case $k = 0$, we give an explicit realization of the vertex algebra $\mathcal{W}_k$ and its modules as certain irrational subalgebras of lattice VOAs. We also study the algebra $\mathcal{W}_k$ when k is an integer greater that -1.

Keywords: vertex algebras, affine $\mathcal{W}$–algebras, Bershadsky-Polaykov algebra, Smith algebra, Zhu algebra

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Verteks algebre i algebre verteks operatora potječu iz konformne teorije polja i teorije struna, gdje su proučavane kao matematičke formulacije tzv. kiralnih algebri ([13]). Aksiomatska teorija je razvijena u radovima R. Borcherdsa ([16]) te I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman ([26]). Sustavni pregled teorije se može naći u monografijama J. Lepowsky, H. Li ([42]); E. Frenkel, D. Ben-Zvi ([27]); V. Kac ([31]). Jedan od bitnih primjera verteks algebri su $\mathcal{W}$-algebre, koje su zadnjih godina predmet intenzivnog znanstvenog istraživanja.

V. Kac, S.S. Roan i M. Wakimoto su u [32] definirali $\mathcal{W}$-algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ pridružene prostoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g}$, proizvoljnom kompleksnom broju k, i proizvoljnom nilpotentom elementu f pomoću tzv. kvantne Drinfeld-Sokolovljeve redukcije. U slučaju kada je $f = f_\theta$ korijenski vektor pridružen maksimalnom korijenu θ, poznati su generatori i λ-zagrade za $\mathcal{W}$-algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ pridruženih minimalnim gradacijama ([33], [6]), što ih čini mnogo lakšima za proučavanje. Bitan rezultat o strukturi minimalnih afinih $\mathcal{W}$-algebri je sljedeći teorem iz [33]: verteks algebra $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ je strogo generirana vektorima

- $G^{\{u\}}$, $u \in \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}}$, konformne težine $\frac{3}{2}$
- $J^{\{a\}}$, $a \in \mathfrak{g}^\natural$, konformne težine 1
- ω konformni vektor centralnog naboja

$$c(\mathfrak{g}, k) = \frac{k\,\mathrm{dim}\mathfrak{g}}{k + h^\vee} - 6k + h^\vee - 4.$$

Zanimljivo je da su ovim posebnim slučajem pokrivene mnoge bitne verteks algebre. Na primjer, za $\mathfrak{g} = sl_2$ dobivamo Virasorovu verteks algebru, dok za $\mathfrak{g} = sl_3$ dobivamo Bershadsky-Polyakov verteks algebru $\mathcal{W}^k(sl_3, f_\theta)$.

U disertaciji ćemo se fokusirati na neke iracionalne $\mathcal{W}$-algebre i njihove reprezentacije. Glavni primjer koji istražujemo je prosta Bershadsky-Polyakov verteks algebra $\mathcal{W}_k$(=

$\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$, koja je originalno definirana u člancima A. M. Polyakova i M. Bershadskog ([15], [43]) pomoću generatora i relacija. Ta se algebra može dobiti redukcijom i izomorfna je minimalnoj afinoj $\mathcal{W}$-algebri $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ za $\mathfrak{g} = sl_3$ ([32], [33], [12]).

T. Arakawa je dokazao u članku [9] da je $\mathcal{W}_k$ racionalna ako je k polucijeli broj veći od $-3/2$ (tj. ima konačno mnogo ireducibilnih modula i svaki konačno generirani modul je potpuno reducibilan). Mi proučavamo slučajeve kad je $\mathcal{W}_k$ iracionalna, te klasificiramo $\mathcal{W}_k$–module za neke k.

Općenito, moduli najveće težine za $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ mogu se konstruirati primjenom kvantne redukcije na module najveće težine za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa k. Za klasifikaciju ireducibilnih modula koristimo Zhuovu teoriju i formule za singularne vektore.

Pomoću Zhuove korespondencije, klasifikacija ireducibilnih reprezentacija najveće težine od $\mathcal{W}_k$ se svodi na određivanje reprezentacija najveće težine od pripadne Zhuove algebre. Pokazat ćemo da je Zhuova algebra pridružena $\mathcal{W}_k$ realizirana kao kvocijent Smithove algebre iz [44]. Smithova algebra je originalno definirana kao asocijativna algebra $R(f)$ parametrizirana polinomom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, takva da generatori $\{A, B, H\}$ zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$HA - AH = A,\ HB - BH = -B,\ AB - BA = f(H).$$

U [44] su definirani pojmovi poput modula najveće težine i kategorije $\mathcal{O}$ za $R(f)$-module. Kao jedan od glavnih rezultata je pokazano da za određene polinome f, $R(f)$ ima slična svojstva kao $U(sl_2)$.

Mi proširujemo originalnu definiciju Smithove algebre na asocijativne algebre $R(g)$ gdje je g polinom u dvije varijable (cf. Definicija 5.2.1 u Poglavlju 5):

Definicija 5.2.1. *Neka je $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ proizvoljni polinom. Asocijativna algebra $R(g)$ **Smithovog tipa** je generirana sa $\{E, F, X, Y\}$ takvim da je Y centralni element i vrijede sljedeće relacije:*

$$XE - EX = E,\ XF - FX = -F,\ EF - FE = g(X, Y).$$

Pokazat ćemo da vrijedi (cf. Propozicija 5.2.2 u Poglavlju 5):

Propozicija 5.2.2. *Zhuova algebra $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ je kvocijent Smithove algebre $R(g)$ za*

$$g(x, y) = -(3x^2 - (2k + 3)x - (k + 3)y).$$

Klasifikacija ireducibilnih jakih modula za algebru $\mathcal{W}_k$ (tj. modula s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za operator $L(0)$) je zato povezana s klasifikacijom konačnodimenzionalnih reprezentacija Smithove algebre.

U literaturi je proučavana veza Smithove algebre i Zhuove algebre $A(V)$ pridružene određenim verteks algebrama V u kontekstu teorije reprezentacija verteks algebri. Osim članka ([9]), gdje je Zhuova algebra pridružena Bershadsky-Polyakov algebri $\mathcal{W}^k$ povezana sa Smithovom algebrom, također je pokazano da poluprosti kvocijenti Smithove algebre daju Zhuovu algebru za verteks algebre pridružene parnim pozitivno definitnim rešetkama ranga jedan ([19]).

U disertaciji ćemo se posebno baviti analizom Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k$ i njenih modula na određenim nivoima. Nivoi $k = -5/3$ i $k = -9/4$ su prvi primjeri dopustivih nivoa. Kažemo da je kompleksni broj k *dopustiv* za $\widehat{sl_3}$ ako i samo ako vrijedi $k + 3 = p/q$, gdje su p i q relativno prosti cijeli brojevi, $p \geq 3$. Tada $V_k(sl_3)$ ima konačno mnogo ireducibilnih reprezentacija u kategoriji $\mathcal{O}$ (cf. [10]). U univerzalnoj afinoj verteks algebri $V^k(sl_3)$ je maksimalni podmodul generiran jednim singularnim vektorom, koji se kvantnom redukcijom šalje u singularni vektor u $\mathcal{W}^k(sl_3)$.

Općenito, formule za singularni vektor su izrazito komplicirane i ne mogu se izraziti u PBW bazi. Zato ćemo proučavati slučajeve gdje je to moguće.

U slučaju $k = -5/3$ realiziramo Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k$ kao verteks podalgebru Weylove verteks algebre. Prvo pokazujemo da se za $k = -5/3$ prosta verteks algebra $\mathcal{W}_k$ može uložiti u Weylovu verteks algebru W (cf. Propozicija 4.1.1 u Poglavlju 4). Ključan element dokaza je egzistencija i jedinstvenost singularnog vektora W_4 na nivou 4.

Propozicija 4.1.1. *Neka je*

$$J = -\frac{1}{3}a^+_{-1}a^-_{-1}\mathbb{1},\ \omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1},$$

$$G^+ = \frac{1}{3}\left(a^+_{-1}\right)^3\mathbb{1},\ G^- = \frac{1}{9}\left(a^-_{-1}\right)^3\mathbb{1},$$

gdje su $\{a^\pm_n : n \in \mathbb{Z}\}$ generatori Weylove verteks algebre W. Verteks podalgebra Weylove verteks algebre W generirana vektorima $J, \omega, G^\pm$ je izomorfna nekom kvocijentu od $\mathcal{W}^k$.

Pokazujemo da Bershadsky-Polyakov algebra $\mathcal{W}_k$ ima strukturu $\mathbb{Z}_3$-invarijantne podalgebre (orbifolda) Weylove verteks algebre (cf. Propozicija 4.2.3 u Poglavlju 4):

Propozicija 4.2.3. *Neka je W Weylova verteks algebra, g automorfizam od W reda 3 i neka je*

$$W = W^{(0)} + W^{(1)} + W^{(-1)},$$

gdje je

$$W^{(j)} = \{v \in W|\ gv = e^{\frac{-2\pi i}{3}j}v\},\quad j = 0, 1, 2.$$

Vrijedi:

(1) $\mathcal{W}_k = W^{(0)}$.

(2) $W^{(\pm 1)}$ *je ireducibilan* $\mathcal{W}_k$*–modul najveće težine* $(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

U slučaju $k = -5/3$, dokazujemo da algebra $\mathcal{W}_k$ ima točno 6 ireducibilnih jakih modula (cf. Propozicija 6.2.5 u Poglavlju 6):

Propozicija 6.2.5. *Neka je* $k = -5/3$. *Definiramo*

$$\mathcal{S}_k = \{(-\frac{1}{9}, 0), (0, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}), (-\frac{7}{9}, \frac{2}{3})\}.$$

(1) Za sve $(x, y) \in \mathcal{S}_k$, $L(x, y)$ *je ireducibilni* $\mathcal{W}_k$*–modul.*

(2) Pretpostavimo da je $L(x, y)$ *ireducibilni* $\mathcal{W}_k$*–modul s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za* $L(0)$. *Tada je* $(x, y) \in \mathcal{S}_k$.

Ireducibilne module iz skupa $\mathcal{S}_k$ realiziramo kao određene podalgebre Weylove algebre. Koristit ćemo rezultate iz Poglavlja 4, gdje smo pokazali da je Weylova verteks algebra W direktna suma tri ireducibilna $\mathcal{W}_k$–modula.

U slučaju $k = -9/4$, $\mathcal{W}_k$ je važan primjer logaritamske verteks algebre. Klasificiramo jake $\mathcal{W}_k$ module za $k = -9/4$ i dokazujemo da $\mathcal{W}_k$ ima točno 3 ireducibilna jaka modula (cf. Propozicija 6.1.4 u Poglavlju 6). Za realizaciju ovih modula koristimo konstrukciju jedne familije težinskih modula izvan kategorije $\mathcal{O}$ iz Poglavlja 7.

Propozicija 6.1.4. *Neka je* $k = -9/4$. *Definiramo*

$$\mathcal{S}_k = \{(-\frac{1}{2}, 0), (0, 0), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})\}.$$

(i) Za sve $(x, y) \in \mathcal{S}_k$, $L(x, y)$ *je* $\mathcal{W}_k$*–modul.*

(ii) Pretpostavimo da je $L(x, y)$ *ireducibilni* $\mathcal{W}_k$*–modul s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za* $L(0)$. *Tada je* $(x, y) \in \mathcal{S}_k$.

Pri klasifikaciji $\mathcal{W}_k$-modula ćemo koristiti operator $\Delta(h, z)$, definiran u članku H. Lia ([39]), koji svakom ireducibilnom V-modulu M pridružuje novu strukturu ireducibilnog V-modula. Bitno svojstvo Δ-operatora je da djeluje bijektivno na skupu ireducibilnih modula.

Bershadsky-Polyakov verteks algebra $\mathcal{W}_k$ je dio serije verteks algebri koje se realiziraju pomoću verteks algebri iz logaritamske konformne teorije polja. To su takozvane B_p–algebre i vezane su novim teorijama. Za $p = 3$, verteks algebra B_3 realizirana je u članku D. Adamovića [3] kao afina verteks algebra pridružena $\widehat{sl_2}$ na nivou $-4/3$. Algebre B_p za $p \geq 4$ su definirane u članku T. Creutziga, D. Ridouta i S. Wooda [17] gdje je i navedena slutnja da se te algebre mogu realizirati preko kvantne redukcije. Slutnja za sad nije dokazana općenito, ali u slučaju $p = 4$ je provjerena i radi se baš o našoj verteks algebri $\mathcal{W}_k$, odnosno vrijedi $\mathcal{W}_k \cong B_4$.

Koristeći ovu realizaciju, konstruiramo familiju težinskih modula izvan kategorije $\mathcal{O}$ (tzv. *relaxed highest weight modules*), s najmanjom konformnom težinom $-1/2$ (cf. Propozicija 7.2.1, Teorem 7.2.2).

Teorem 7.2.2. *(1) Za svaki $r \in \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{-1}(r)$ je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiran $\mathcal{W}_k$–modul s najmanjom konformnom težinom $-1/2$:*

$$\mathcal{M}_{-1}(r) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}_{-1}(r)(m), \quad L(0)|\mathcal{M}_{-1}(r)(m) \equiv (-\frac{1}{2} + m)Id.$$

(2) Pretpostavimo da $4r \notin \mathbb{Z}$ za neki $r \in \mathbb{C}$. Tada je

(i) $\mathcal{M}_{-1}(r)(0)$ ireducibilan modul za Smithovu algebru $R(g)$, gdje je

$$g(x,y) = -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y)$$

pri čemu je $y = -1/2$.

(ii) $\mathcal{W}_k$–modul $\mathcal{M}_{-1}(r)$ ireducibilan.

U članku [9] je konstruirana familija singularnih vektora u slučaju kada je k polucijeli broj. Mi generaliziramo tu konstrukciju za k cijeli broj veći ili jednak -1, te dajemo nužan uvjet za težine ireducibilnih reprezentacija od $\mathcal{W}_k$ (cf. Propozicija 8.1.4 u Poglavlju 8).

Definiramo polinome (cf. Poglavlje 5.3)

$$\begin{aligned} h_i(x,y) &= \frac{1}{i}(g(x,y) + g(x+1,y) + ... + g(x+i-1,y)) \\ &= -i^2 + ki - 3xi + 3i - 3x^2 - k + 2kx + 6x + ky + 3y - 2. \end{aligned}$$

Propozicija 8.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$. Skup klasa ekvivalencije ireducibilnih $\widetilde{\mathcal{W}}_k$-modula je sadržan u skupu*

$$\mathcal{S}_k = \{L(x,y) \ | h_i(x,y) = 0, \ 1 \leq i \leq k+2\}.$$

Međutim, dokazati da ti moduli zaista postoje, odnosno realizirati ih kao $\mathcal{W}_k$–module predstavlja znatno teži problem. Mi ćemo ga u ovoj disertaciji pokazati samo u slučajevima $k = -1, 0$. Vjerujemo da tvrdnja vrijedi za opći k, no nažalost ovim metodama to ne možemo dokazati.

Ireducibilne $\mathcal{W}_k$–module za $k = -1$ realiziramo pomoću rezultata iz članka D. Adamovića, V. G. Kaca, P. Möseneder-Frajrije, P. Papija i O. Peršea [6] (cf. Teorem 8.3.1 u Poglavlju 8).

Teorem 8.3.1. *Skup*

$$\mathcal{S}_{-1} = \{L(x,y) \mid h_1(x,y) = 0\}$$

daje sve ireducibilne $\mathcal{W}_{-1}$–module.

Za $k = 0$ konstruiramo $\mathcal{W}_k$–module kao bozonsku varijantu fermionske realizacije algebre $\mathcal{W}_0(sl_3, f_\theta)$ iz članka [11].

Sljedeći teorem će biti dokazan u Poglavlju 8 (cf. Teorem 8.3.2).

Teorem 8.3.2.

(1) Prosta verteks algebra $\mathcal{W}_0$ je realizirana kao verteks podalgebra od $V[D]$ generirana vektorima

$$\begin{aligned}
J &\mapsto \alpha_2(-1)\\
L &\mapsto \frac{1}{2}\big(\alpha_1(-1)^2 - \alpha_1(-2) + \alpha_2(-1)^2 + \alpha_2(-2)\big)\\
G^+ &\mapsto \sqrt{3}e^{\alpha_1+\alpha_2}\\
G^- &\mapsto -\sqrt{3}\alpha_1(-1)e^{-\alpha_1-\alpha_2}
\end{aligned}$$

(2) $\mathcal{W}_0$ ima dvije familije ireducibilnih modula najveće težine $U_i(x)$, $i = 0, 1$, $x \in \mathbb{C}$ realizirane kao

$$U_i(x) = W_0(sl(3), \theta).e^{-i\alpha_1 - x(\alpha_1-\alpha_2)},$$

Najveća težina od $U_i(x)$ s obzirom na (J_0, L_0) je $(x, x^2 + (i-1)x)$.

U nastavku dajemo kratak pregled sadržaja po poglavljima.

U Poglavlju 2 uvodimo osnovne definicije vezane uz verteks algebre, algebre verteks operatora i njihove module. Navodimo metode konstrukcije verteks algebri pomoću Teorema o generirajućim poljima te pomoću teorije konformnih algebri. Zatim dajemo primjere verteks algebri koje će nam kasnije trebati za realizacije algebre $\mathcal{W}_k$, te opisujemo strukturu minimalnih afinih $\mathcal{W}$-algebri. Također navodimo osnovna svojstva Zhuove teorije i Δ-operatora koji će nam biti bitni za klasifikaciju $\mathcal{W}_k$–modula.

U Poglavlju 3 iskazujemo definiciju Bershadsky-Polyakov verteks algebre $\mathcal{W}_k$, dajemo karakterizaciju ireducibilnih modula najveće težine za $\mathcal{W}_k$ te opisujemo strukturu Zhuove algebre $A(\mathcal{W}_k)$.

U Poglavlju 4 konstruiramo eksplicitnu realizaciju Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k$ pomoću Weylove verteks algebre. Računamo formulu za singularni vektor na nivou 4 i projekciju u Zhuovu algebru, te pokazujemo da $\mathcal{W}_k$ ima strukturu $\mathbb{Z}_3$–invarijantne podalgebre (orbifolda) Weylove algebre.

U Poglavlju 5 definiramo Smithovu algebru $R(f)$ i module za Smithovu algebru. Uvodimo generalizaciju Smithove algebre pridružene polinomima $g \in \mathbb{C}[x, y]$, te navodimo neka svojstva konačnodimenzionalnih reprezentacija od $R(g)$. Dokazujemo da je Zhuova algebra $A(\mathcal{W}_k)$ kvocijent Smithove algebre $R(g)$.

U Poglavlju 6 klasificiramo ireducibilne reprezentacije od $\mathcal{W}_k$ za $k = -9/4$ i $k = -5/3$ u kategoriji jakih modula, odnosno modula koji imaju konačnodimenzionalne svojstvene potprostore za $L(0)$.

U Poglavlju 7 konstruiramo neprebrojivu familiju težinskih modula za $\mathcal{W}_k$ izvan kategorije $\mathcal{O}$ za $k = -9/4$, te dovršavamo dokaz klasifikacije jakih modula za $\mathcal{W}_{-9/4}$ iz Poglavlja 6.

U Poglavlju 8 proučavamo Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k$ u slučaju kad je k cijeli broj veći od -1. Konstruiramo familiju singularnih vektora za $\mathcal{W}_k$ te klasificiramo sve module u kategoriji $\mathcal{O}$ u slučajevima $k = -1$ i $k = 0$.

Poglavlje 2

Verteks algebre

Pojam verteks algebri, algebri verteks operatora te modula za verteks algebre je uveden u radovima [16], [26]. Detaljan pregled aksiomatske teorije, definicija i osnovnih rezultata o verteks algebrama i njihovim modulima može se naći u monografijama [26], [27], [31], [42]. Od posebnog interesa će nam biti neki primjeri verteks algebri, čiji kratki pregled dajemo u Poglavlju 2.3.

2.1 Verteks algebre i moduli za verteks algebre

U ovom poglavlju navodimo definiciju verteks algebre, te modula za verteks algebre.

2.1.1 Verteks algebre i algebre verteks operatora

Definicija 2.1.1. ***Verteks superalgebra*** *je trojka* $(V, Y, \mathbb{1})$*, gdje je* $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ $\mathbb{Z}_2$*-graduirani vektorski prostor nad* $\mathbb{C}$*,* $\mathbb{1} \in V_{\bar{0}}$ *istaknuti vektor (kojeg zovemo vakuum vektor) te* Y *operator*

$$Y : V \longrightarrow (End\, V)[[z, z^{-1}]], \quad Y(v, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$$

takav da za svaki $a \in V_{\bar{i}}$*,* $b \in V_{\bar{j}}$*,* $i, j \in \{0, 1\}$ *vrijedi:*

(1) $Y(a, z)b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b z^{-n-1}$ *ima konačno mnogo negativnih potencija,*

(2) $Y(\mathbb{1}, z) = Id$*,*

(3) $Y(a, z)\mathbb{1} \in V[[z]]$ *i* $\lim_{z\to 0} Y(a, z)\mathbb{1} = a$*,*

(4) $[D, Y(a, z)] = \frac{d}{dz} Y(a, z))$*, gdje je* $D \in End\, V$ *definiran sa* $Da = a_{-2}\mathbb{1}$*,*

(5) $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *takav da*

$$(z_1 - z_2)^N Y(a, z_1)Y(b, z_2) = (-1)^{ij}(z_1 - z_2)^N Y(b, z_2)Y(a, z_1).$$

Ako je $V = V_{\bar{0}}$, onda kažemo da je $(V, Y, \mathbb{1})$ **verteks algebra**.

Napomena 2.1.2. *U ostatku disertacije nam neće trebati struktura verteks superalgebre, te ćemo s $(V, Y, \mathbb{1})$ uvijek označavati verteks algebru.*

Definicija 2.1.3. *Kažemo da je $\omega \in V$ **konformni vektor** ako $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n z^{-n-1}$ zadovoljava*

$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}(rank\ V).$$

Pomoću konformnog vektora dobivamo dodatnu strukturu na verteks algebri:

Definicija 2.1.4. ***Algebra verteks operatora** (VOA) $(V, Y, \mathbb{1}, \omega)$ je graduirani vektorski prostor*

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V^{(n)}$$

sa strukturom verteks algebre $(V, Y, \mathbb{1})$ i s konformnim vektorom $\omega \in V$ koji zadovoljava

(1) $D = L(-1)$,

(2) $L(0)$ *djeluje poluprosto na* V,

(3) $L(0) \restriction_{V^{(n)}} = nId_{V^{(n)}}$,

(4) $dim\, V^{(n)} < \infty,, \forall n \in \mathbb{Z}$,

(5) $V^{(n)} = 0$ *za* $n \leq N$.

Za verteks algebre i algebre verteks operatora možemo definirati standarne algebarske pojmove poput homomorfizma, podalgebre, ideala i kvocijentne algebre. Naravno, oni moraju poštovati dodatnu strukturu verteks algebre (odnosno algebre verteks operaora).

Definicija 2.1.5. *Neka su $(V_1, Y, \mathbb{1})$ i $(V_2, Y, \mathbb{1})$ verteks algebre. **Homomorfizam** verteks algebri je linearno preslikavanje $\Phi : V_1 \to V_2$ takvo da vrijedi*

$$\Phi(Y(a,x)b) = Y(\Phi(a), x)\Phi(b) \quad za\ a, b \in V_1,$$

ili ekvivalentno

$$\Phi(a_n b) = \Phi(a)_n \Phi(b) \quad za\ a, b \in V_1, n \in \mathbb{Z},\ i\ \Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Definicija 2.1.6. ***Verteks podalgebra** je vektorski potprostor U od V takav da je $\mathbb{1} \in U$ i $(U, Y, \mathbb{1})$ je verteks algebra.*

Neka je S podskup verteks algebre V. Verteks podalgebra $\langle S\rangle$ **generirana skupom** S je najmanja verteks podalgebra od V koja sadrži S; odnosno, $\langle S\rangle$ je presjek svih verteks podalgebri od V koje sadrže S.

Sljedeća propozicija iz [42] karakterizira podalgebru generiranu skupom:

Propozicija 2.1.7. *([42]) Neka je S podskup verteks algebre V. Tada vrijedi*

$$\langle S\rangle = span\left\{a^{(1)}_{n_1}\dots a^{(r)}_{n_r}\mathbb{1} : r\geq 0, a^{(i)}\in S, n_i\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Definicija 2.1.8. *Kažemo da je $\langle S\rangle$ **jako generirana skupom** S ako vrijedi*

$$\langle S\rangle = span\left\{a^{(1)}_{n_1}\dots a^{(r)}_{n_r}\mathbb{1} : r\geq 0, a^{(i)}\in S, n_i\in\mathbb{Z}^{<0}\right\}.$$

Definicija 2.1.9. ***Ideal** verteks algebre V je potprostor I takav da vrijedi*

$$a_n b\in I \ \ i \ b_n a\in I, \qquad za\ svaki\ a\in V, b\in I, n\in\mathbb{Z}.$$

Kažemo da je verteks algebra V **prosta** ako su jedini ideali 0 i V.

Neka je I ideal verteks algebre V. Definiramo **kvocijentnu verteks algebru** V/I sa kanonskim homomorfizmom $V\to V/I$, gdje je $\mathbb{1}+I$ vakuum vektor i

$$(a+I)_n(b+I) = a_n b + I, \qquad \text{za } a,b\in V,\ n\in\mathbb{Z}.$$

2.1.2 Moduli za verteks algebre i algebre verteks operatora

Sada navodimo definicije modula za verteks algebre i algebre verteks operatora, te osnovna svojstva koja će nam kasnije trebati.

Definicija 2.1.10. ***Modul za verteks algebru** $(V,Y,\mathbb{1})$ je uređeni par (M,Y_M), gdje je M kompleksni vektorski prostor i Y_M operator*

$$Y_M : V\longrightarrow (End\, M)[[z,z^{-1}]], \quad Y_M(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$$

koji zadovoljava sljedeće aksiome:

(1) $Y_M(\mathbb{1},z) = Id_M$,

(2) $Y_M(a,z)v\in M((z))$,

(3) $\forall\, a,b\in V$, $\forall\, v\in M$ *vrijedi Jacobijev identitet*

$$z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)v - z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2+z_1}{z_0}\right)Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)v = \\ = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(a,z_0)b,z_2)v.$$

Svaku verteks algebru V možemo shvatiti kao V-modul, tj. modul nad samom sobom.

Neka je sada $(V, Y, \mathbb{1}, \omega)$ algebra verteks operatora. Ako je (M, Y_M) modul za V promatran kao verteks algebra, tada kažemo da je (M, Y_M) **slabi modul** za V.

Trebat će nam još jedna kategorija V-modula:

Definicija 2.1.11. *Neka je $(V, Y, \mathbb{1}, \omega)$ algebra verteks operatora i (M, Y_M) slabi modul. Kažemo da je (M, Y_M) **jaki modul** ako je M oblika*

$$M = \bigoplus_{h \in \mathbb{C}} M(h),$$

gdje je $M(h) = \{w \in M : L(0)w = hw\}$, te vrijedi:

(i) $\dim M(h) < \infty$, $\forall h \in \mathbb{C}$,

(ii) $\exists N \in \mathbb{R}$ takav da je $M(h) = 0$ za $Re(h) < N$.

Sljedeća definicija je uvedena u ([29]):

Definicija 2.1.12. *Algebra verteks operatora je **racionalna** ako ima konačno mnogo ireducibilnih modula i svaki konačno generirani modul je potpuno reducibilan.*

2.2 Konstrukcija verteks algebri

2.2.1 Teorem o generirajućim poljima

Jedna od metoda konstrukcije verteks algebri je pomoću teorije lokalnih polja (cf. [42]). Navodimo teorem o generirajućim poljima pomoću kojeg se mogu konstruirati primjeri verteks algebri i njihovih modula. Teorem su prvi dokazali V. G. Kac, A. Radul, E. Frenkel i W. Wang u [28]. Dokaz ove verzije teorema može se naći u [42], [31].

Teorem 2.2.1 (o generirajućim poljima)**.** *[28]*

Neka je V vektorski prostor s istaknutim vektorom $\mathbb{1}$, $d \in End\, V$ takav da je $d\mathbb{1} = 0$, $T \subseteq V$, te Y_0 operator

$$Y_0(\cdot, z) : T \longrightarrow Hom(V, V((z))), \quad a \longmapsto Y_0(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}.$$

Pretpostavimo da vrijedi:

(1) $Y_0(a, z)\mathbb{1} \in V[[z]]$, $\lim_{z \to 0} Y_0(a, z)\mathbb{1} = a_{-1}\mathbb{1} = a$,

(2) $[d, Y_0(a, z)] = \frac{d}{dz} Y_0(a, z))$,

(3) $\forall\, a, b \in T$, $\exists\, k$ *takav da*

$$(z_1 - z_2)^k [Y_0(a, z_1), Y_0(b, z_2)] = 0.$$

(4) $V = span_{\mathbb{C}} \left\{ a^{(1)}_{n_1} \ldots a^{(r)}_{n_r} \mathbb{1} : r \geq 0, a^{(i)} \in T, n_i \in \mathbb{Z} \right\}$

Tada se Y_0 *na jedinstven način može proširiti do*

$$Y : V \longrightarrow (End\, V)[[z, z^{-1}]]$$

tako da je $(V, Y, \mathbb{1})$ *verteks algebra.*

2.2.2 Konformne algebre i univerzalna omotačka verteks algebra

Drugi način konstrukcije verteks algebri je pomoću konformnih algebri. Mnogi bitni primjeri verteks algebri (Virasorova verteks algebra, afina verteks algebra i druge) se mogu konstruirati kao univerzalne omotačke verteks algebre određenih Liejevih konformnih algebri (cf. [31], [35], [36]).

Definiramo vektorski superprostor kao $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$–graduirani vektorski prostor $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$. Za $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, neka je $p(v) = \alpha$ ako je $v \in V_\alpha$, te $p(v, w) = (-1)^{p(v)p(w)}$.

U verteks algebri V definiramo bilinearni produkt $: \cdot :$, kojeg zovemo **normalni produkt**, sa $: ab := a_{-1}b$. Označimo $Y^+(a, z) = \sum_{n<0} a_n z^{-n-1}$ i $Y^-(a, z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n-1}$. Normalni produkt polja $Y(a, z)$ i $Y(b, z)$ je definiran kao

$$: Y(a, z)Y(b, z) := Y^+(a, z)Y(b, z) + p(a, b)Y(b, z)Y^-(a, z),$$

te vrijedi

$$: Y(a, z)Y(b, z) := Y(: ab :, z).$$

Definicija 2.2.2. *[31]* ***Liejeva konformna superalgebra*** *je* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-graduirani* $\mathbb{C}[D]$*-modul* $R = R_{\overline{0}} \oplus R_{\overline{1}}$*, zajedno sa* $\mathbb{C}$*-bilinearnim preslikavanjem (*λ*-zagradom)* $[a_\lambda b] : R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$*, gdje je*

$$[a_\lambda b] = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}} \frac{\lambda^n}{n!} a_n b,$$

takvo da vrijede sljedeći aksiomi:

(1) (seskvilinearnost) $[Da_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$, $D[a_\lambda b] = [Da_\lambda b] + [a_\lambda Db]$

(2) (kosa simetrija) $[b_\lambda a] = -p(a, b)[a_{-\lambda - D} b]$

(3) (Jacobijev identitet) $[a_\lambda[b_\lambda c]] - p(a,b)[b_\lambda[a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]$.

Svaku verteks algebru možemo shvatiti kao Liejevu konformnu superalgebru s λ-zagradom $[a_\lambda b] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{\geq 0}} \frac{\lambda^n}{n!} a_n b$.

Neka je R Liejeva konformna superalgebra. **Univerzalna omotačka verteks algebra** pridružena R, u oznaci $V(R)$, je jednoznačno određena univerzalnim svojstvom: za svaki $f : R \to W$ (gdje je W verteks algebra promatrana kao Liejeva konformna superalgebra), postoji jedinstveni homomorfizam verteks algebri $\overline{f} : V(R) \to W$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & V(R) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Za uređenu bazu $\{a_i\}$ od R, monomi $\{: a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} :\}$ takvi da je $i_j \leq i_{j+1}$ odnosno $i_j < i_{j+1}$ ako je $p(a_{i_j}) = \overline{1}$, čine bazu za $V(R)$.

2.3 Primjeri verteks algebri

2.3.1 Heisenbergova verteks algebra

Neka je $\mathfrak{h}$ konačnodimenzionalni vektorski prostor s nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Promatramo $\mathfrak{h}$ kao komutativnu Liejevu algebru. Neka je

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

pridružena afina Liejeva algebra, s komutacijskim relacijama

$$[h(m), h(n)] = m\delta_{m+n,0}K, \quad [K, h(n)] = 0,$$

gdje je $h(n) = h \otimes t^n$ za $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Neka je $\mu \in \mathfrak{h}$. Promatramo inducirani $\hat{\mathfrak{h}}$-modul

$$M(1, \mu) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}K} \mathbb{C},$$

gdje $\mathfrak{h}\otimes t\mathbb{C}[t]$ djeluje trivijalno na $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ djeluje kao $\langle h, \mu \rangle$ za $h \in \mathfrak{h}$ i K djeluje kao množenje s 1. Kao vektorski prostor

$$M(1, \mu) \simeq S(\mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]).$$

Definiramo polja

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) z^{-n-1}.$$

Može se pokazati da $M(1) = M(1,0)$ ima strukturu algebre verteks operatora, generiranu poljima h koja zadovoljavaju λ-zagradu

$$[h_\lambda h] = \lambda,$$

za $h \in \mathfrak{h}$. $M(1)$ ima sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c = 1$:

$$\omega_{M(1)} = \frac{1}{2} : hh : .$$

Također vrijedi da su $M(1,\mu)$ ireducibilni moduli za $M(1)$, za svaki $\mu \in \mathfrak{h}$. Verteks algebru $M(1)$ nazivamo **Heisenbergova verteks algebra** (cf. [42]).

2.3.2 Verteks algebre pridružene rešetkama

Verteks algebre V_L pridružene parnim rešetkama L su konstruirane u [26]. U ovoj točki navodimo osnovne činjenice o rešetkama, te opisujemo konstrukciju verteks algebre V_L u slučaju kada je L pozitivno definitna parna rešetka. Također navodimo formule za n-ti produkt u verteks algebri V_L pomoću Schurovih polinoma, koje će nam trebati za realizacije $\mathcal{W}$-algebri u Poglavljima 7 i 8.

Definicija 2.3.1. *Neka je V konačnodimenzionalni $\mathbb{Q}$-vektorski prostor zajedno s nedegeneriranom simetričnom $\mathbb{Q}$-bilinearnom formom $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Q}$. Podskup $L \subset V$ se zove (racionalna)* ***rešetka*** *ranga $rk(L) = dim\ V = n$ ako vrijedi da je*

$$L = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\alpha_n,$$

gdje je $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ baza od V.

Kažemo da je rešetka L *pozitivno definitna* ako je $\mathbb{Q}$-bilinearna forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pozitivno definitna. L je *cjelobrojna* ako je $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ za sve $\alpha, \beta \in L$. Ako je $\langle \alpha, \alpha \rangle \in 2\mathbb{Z}$ za sve $\alpha \in L$, kažemo da je rešetka L *parna*. Svaka parna rešetka je cjelobrojna.

Neka je L pozitivno definitna parna rešetka. Tada postoji 2-kociklus $\epsilon : L \times L \to \langle \pm 1 \rangle$, koji zadovoljava

$$\epsilon(\alpha, \beta) = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} \epsilon(\beta, \alpha).$$

Promatramo *zakrenutu grupovnu algebru* $\mathbb{C}_\epsilon[L]$, s bazom $\{e_\alpha\}_{\alpha \in L}$ i množenjem

$$e_\alpha e_\beta = \epsilon(\alpha, \beta) e_{\alpha+\beta},$$

za $\alpha, \beta \in L$.

Rešetku $\mathfrak{h} = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ ćemo shvatiti kao Liejevu algebru i definiramo afinu Liejevu algebru pridruženu $\mathfrak{h}$ sa

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

Promatramo inducirani $\hat{\mathfrak{h}}$-modul (cf. Poglavlje 2.3.1)

$$M(1) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}K} \mathbb{C}.$$

Kao vektorski prostor, $M(1)$ je izomorfan simetričnoj algebri $S(\mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$. Posebno, $M(1)$ je razapet elementima oblika

$$h_1(-n_1) \cdots h_k(-n_k)1,$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $h_1, ..., h_k \in \mathfrak{h}$ te $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Konstrukcija verteks algebri pridruženih rešetkama

Definiramo

$$V_L := M(1) \otimes \mathbb{C}_\epsilon[L]$$

kao graduirani vektorski prostor. Tada je V_L razapet elementima oblika

$$h_1(-n_1) \cdots h_k(-n_k)1 \otimes e_\alpha,$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $h_1, ..., h_k \in \mathfrak{h}$ te $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha \in L$.

Označimo $e^\alpha := 1 \otimes e_\alpha$, za $\alpha \in L$.

Definiramo verteks operatore

$$Y(h(-1)e^0, z) := h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) z^{-n-1}$$

za $h \in \mathfrak{h}$, te

$$Y(e^\alpha, z) := Y_{\alpha,}(z) = e_\alpha z^\alpha \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(-n)\frac{z^n}{n}\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)\frac{z^{-n}}{-n}\right)$$

za $\alpha \in L$.

Teorem 2.3.2. *[26] Verteks operatori $h(z)$, $h \in \mathfrak{h}$, i $Y_{\alpha,}(z)$, $\alpha \in L$, generiraju strukturu algebre verteks operatora centralnog naboja $c = rk(L)$ na $V_L := M(1) \otimes \mathbb{C}_\epsilon[L]$, s vakuum vektorom $\mathbb{1} := e^0$ i Virasoro vektorom*

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{rk(L)} a_i(-1)a_i(-1)e^0,$$

gdje je $\{a_i\}_{i=1}^n$ ortonormirana baza od $\mathfrak{h}$.

Schurovi polinomi

Definiramo Schurove polinome

$$S_m(\alpha) = S_m(\alpha(-1), \alpha(-2), \dots)$$

za $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in L$, pomoću funkcije izvodnice

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(-n)\frac{z^n}{n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(\alpha(-1), \alpha(-2), \dots)z^m.$$

Prvih nekoliko polinoma je

$$\begin{aligned} S_m(\alpha) &= 0 \text{ za } m < 0, \\ S_0(\alpha) &= 1, \\ S_1(\alpha) &= \alpha(-1), \\ S_2(\alpha) &= \frac{1}{2}(\alpha(-1)^2 + \alpha(-2)). \end{aligned}$$

Može se pokazati da je formula za n-ti produkt $e^\alpha_n e^\beta$ dana sa (vidi npr. [19]):

$$e^\alpha_n e^\beta = \epsilon(\alpha, \beta) S_{-n-1-\langle\alpha,\beta\rangle}(\alpha) e^{\alpha+\beta},$$

za $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in L$ te vrijedi

$$e^\alpha_t e^\beta = 0 \text{ za } t \geq -\langle\alpha, \beta\rangle.$$

2.3.3 Simplektički fermioni

Simplektički fermioni (cf. [1]) $\mathcal{A}(1)$ su univerzalna verteks algebra generirana neparnim poljima b i c koja zadovoljavaju sljedeće λ–zagrade:

$$[b_\lambda c] = \lambda, \quad [b_\lambda b] = [c_\lambda c] = 0.$$

Može se pokazati da $\mathcal{A}(1)$ ima strukturu ireducibilnog modula Liejeve superalgebre s generatorima

$$b(n), c(n), n \in \mathbb{Z}$$

i relacijama

$$\{b(n), c(m)\} = n\delta_{n+m,0}.$$

Svi ostali super–komutatori su nula. Kao vektorski prostor,

$$\mathcal{A}(1) \cong \bigwedge (b(-n), c(-n),\ n \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

Nadalje $\mathcal{A}(1)$ ima sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c = -2$:

$$\omega_{\mathcal{A}(1)} =: bc : .$$

2.3.4 Cliffordova verteks algebra

Neka je $Cl(A)$ Cliffordova algebra pridružena neparnom vektorskom superprostoru $A = \mathbb{C}\Psi^+ \oplus \mathbb{C}\Psi^-$. Tada je $Cl(A)$ generirana sa

$$\Psi^{\pm}(r), \quad r \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}$$

i relacijama

$$\{\Psi^+(r), \Psi^-(s)\} = \delta_{r+s,0}, \quad \{\Psi^{\pm}(r), \Psi^{\pm}(s)\} = 0.$$

Definiramo polja

$$\Psi^{\pm}(z) = \sum_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \Psi^{\pm}(n) z^{-n-1/2}.$$

Cliffordova verteks algebra (cf. [31], [29]) F je univerzalna verteks algebra generirana neparnim poljima Ψ^+ i Ψ^- sa λ–zagradama

$$[\ \Psi^+_\lambda \Psi^-\ ] = 1, \quad [\ \Psi^{\pm}_\lambda \Psi^{\pm}\ ] = 0.$$

Može se pokazati da je F ireducibilan modul za Cliffordovu algebru $Cl(A)$. Kao vektorski prostor

$$F = \bigwedge \left(\Psi^{\pm}(1/2 - n),\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\right).$$

Bozonizacija

Neka je

$$\alpha =: \Psi^+ \Psi^- :$$

Tada $\alpha(z)$ generira Heisenbergovu verteks podalgebru od F, koju označimo sa $M(1)$. Verteks algebre $M(1)$ i F imaju sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c = 1$:

$$\omega_F = \frac{1}{2} : \alpha\alpha : .$$

2.3.5 Weylova verteks algebra

Weylova algebra *Weyl* je beskonačno-dimenzionalna asocijativna algebra s jedinicom **1** definirana pomoću generatora

$$a_n^{\pm}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

i relacija

$$[a_n^+, a_m^+] = [a_n^-, a_n^-] = 0, \quad [a_n^+, a_m^-] = \delta_{m+n+1,0}.$$

Weylova verteks algebra (cf. [37], [25], [27]) W je univerzalna verteks algebra generirana parnim poljima a^+ i a^-, koja zadovoljavaju sljedeće λ-zagrade:

$$[a^+_\lambda a^-] = 1, \quad [a^{\pm}_\lambda a^{\pm}] = 0.$$

Na vektorskom prostoru $M = \mathbb{C}[a^{\pm}_{-n} : n \in \mathbb{Z}_{>0}]$ postoji prirodna struktura ireducibilnog modula za Weylovu algebru.

Napomena 2.3.3. *Heisenbergova verteks algebra, simplektički fermioni, Cliffordova verteks algebra i Weylova verteks algebra mogu se također konstruirati pomoću Teorema o generirajućim poljima (cf. Teorem 2.2.1).*

2.3.6 Afina verteks algebra

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna prosta kompleksna Liejeva algebra. Neka je $(\cdot,\cdot)$ nedegenerirana bilinearna forma na $\mathfrak{g}$.

Afina Kac–Modyjeva Liejeva $\hat{\mathfrak{g}}$ pridružena $\mathfrak{g}$ je

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

gdje je K centralni element a struktura Liejeve algebre je zadana s

$$[x \otimes t^n, y \otimes t^m] = [x, y] \otimes t^{n+m} + n(x, y)\delta_{n+m,0}K.$$

Kažemo da $\hat{\mathfrak{g}}$–modul M ima nivo k ako centralni element K djeluje na M kao $k\mathrm{Id}$.

Neka je $k \in \mathbb{C}$. Stavimo $P = \hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K$ i definiramo 1-dimenzionalni $U(P)$–modul $\mathbb{C}v_k$ s djelovanjem $\hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t].v_k = 0$, $K.v_k = kv_k$. Definiramo

$$V^k(\hat{\mathfrak{g}}) = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(P)} \mathbb{C}v_k$$

Stavimo $x(n) = x \otimes t^n$ za $x \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$. Definiramo polje

$$x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n-1}$$

koje djeluje na restingiranim $\hat{\mathfrak{g}}$–modulima nivoa k. Tada na $V^k(\mathfrak{g})$ postoji struktura verteks algebre generirana poljima $x(z)$, $x \in \mathfrak{g}$, koju nazivamo univerzalna **afina verteks algebra** (cf. [42]).

Kao $\hat{\mathfrak{g}}$–modul, $V^k(\mathfrak{g})(:= V_{\hat{\mathfrak{g}}}(k, 0))$ je $\mathbb{Z}$-graduirani modul nivoa k. Naziva se još i *generalizirani Vermaov modul.*

2.4 Δ-operator

U članku H. Li ([39]) je definiran operator $\Delta(h, z)$ koji svakom slabom V-modulu M pridružuje novi V-modul M^h, i pritom čuva ireducibilnost. Ova konstrukcija može biti korisna u problemima vezanim uz klasifikaciju ireducibilnih modula. Na primjer, pokazano je da se svi ireducibilni V_L–moduli mogu konstruirati na ovaj način (gdje je L pozitivno definitna parna rešetka ([39])).

Neka je V algebra verteks operatora i neka je $h \in V$ koji zadovoljava sljedeće uvjete:

$$L(n)h = \delta_{n,0}h, \ h_n h = \delta_{n,1}\gamma \mathbb{1} \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (*)$$

gdje je $\gamma \in \mathbb{C}$ fiksiran. Pretpostavimo još da h_0 djeluje poluprosto na V sa cjelobrojnim svojstvenim vrijednostima. Iz uvjeta $(*)$ slijedi da operatori h_n zadovoljavaju relaciju za Heisenbergovu algebru:

$$[h_m, h_n] = m\gamma\delta_{m+n,0} \text{ za } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Definiramo

$$\Delta(h, z) = z^{h_0} exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_0}{-k}(-z)^{-k}\right).$$

Propozicija 2.4.1. *[40] Neka h, $\Delta(h, z)$ zadovoljavaju gornje uvjete i neka je M proizvoljni (ireducibilni) slabi V-modul. Stavimo*

$$(M^h, Y_h(\cdot, z)) = (M, Y(\Delta(h, z)\cdot, z)).$$

Tada vrijedi:

(1) M^h ima strukturu (ireducibilnog) slabog V-modula,

(2) ako je N slabi V-modul i f homomorfizam sa M u N, onda je f također i homomorfizam sa M^h u N^h.

Iz Propozicije 2.4.1 slijedi ([40]):
može se definirati funktor F_h iz kategorije slabih V-modula u samu sebe. Kako vrijedi

$$\Delta(h, z)\Delta(-h, z) = \Delta(-h, z)\Delta(h, z) = 1,$$

zaključujemo da je F_h izomorfizam.

Posebno, Δ je invertibilan i djeluje bijektivno na skupu ireducibilnih modula.

2.5 Zhuova teorija

Y. Zhu je u [46] konstruirao asocijativnu algebru $A(V)$ pridruženu verteks algebri V. Kao vektorski prostor, $A(V)$ je kvocijentni potprostor od V, a množenje dolazi od verteks operatora od V. Ključno svojstvo Zhuove algebre $A(V)$ je teorem o korespodenciji između modula za $A(V)$ i modula za verteks algebru V (cf. Teorem 2.5.4). Pomoću tog rezultata se klasifikacija ireducibilnih modula za verteks algebru V svodi na klasifikaciju ireducibilnih modula za asocijativnu algebru $A(V)$, čija je struktura znatno jednostavnija.

Neka je V algebra verteks operatora $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(n)$ i neka je $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ modul za V, takav da je $M(0) \neq 0$. Označimo $\deg a = n$ za $a \in V(n)$.

Za homogeni element $a \in V$, operator $o(a) := a_{\mathrm{deg}a-1}$ čuva stupanj, odnosno $o(a)M(n) \subset M(n)$.

Definicija 2.5.1. *Definiramo dva bilinearna preslikavanja* $* : V \times V \longrightarrow V$, $\circ : V \times V \longrightarrow V$ *na sljedeći način:*

$$a * b = Res_z \left(Y(a,z) \frac{(1+z)^{deg\, a}}{z} b \right),$$

$$a \circ b = Res_z \left(Y(a,z) \frac{(1+z)^{deg\, a}}{z^2} b \right),$$

za $a \in V(n)$, $b \in V$.

Označimo sa $O(V) \subset V$ *linearnu ljusku elemenata oblika* $a \circ b$. *Neka je*

$$A(V) = \frac{V}{O(V)}.$$

Kvocijentni prostor $A(V)$ *ima strukturu asocijativne algebre s jedinicom* $\mathbb{1} + O(V)$. *Algebru* $A(V)$ *nazivamo* ***Zhuova algebra*** *pridružena verteks algebri* V.

Bitno svojstvo prostora $O(V)$ je da za $a \in O(V)$, operatori $o(a)$ djeluju trivijalno na top levelu $M(0)$. Vrijedi:

Teorem 2.5.2 ([46]). *Neka je* $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ *modul za* V. *Tada je* $M(0)$ *(top level) modul za asocijativnu algebru* $A(V)$, *s djelovanjem*

$$[a].M(0) = o(a)M(0), \quad za\ a \in V.$$

Vrijedi i obrat, odnosno može se konstruirati modul za verteks algebru kojem će top level biti izomorfan modulu za pripadnu Zhuovu algebru.

Teorem 2.5.3 ([46]). *Neka je* W *modul za asocijativnu algebru* $A(V)$. *Tada postoji* V*-modul* $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ *takav da je* $M(0) \cong W$ *(kao* $A(V)$*-moduli).*

Iz ova dva teorema slijedi ključni rezultat o korespodenciji između modula za Zhuovu algebru $A(V)$ i modula za verteks algebru V.

Teorem 2.5.4 ([46]). *Postoji bijektivna korespondencija između klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od* V *i klasa ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od* $A(V)$.

Svojstva Zhuove algebre $A(V)$

Sljedeće dvije leme iz [46] će nam trebati za račune u Zhuovoj algebri:

Lema 2.5.5 ([46], Lemma 2.1.1.). *$(L_{-1}+L_0)a \in O(V)$ za svaki $a \in V$.*

Lema 2.5.6 ([46], Lemma 2.1.2.). *Za svaki homogeni $a \in V$, te $m \geq n \geq 0$, vrijedi*

$$Res_z\left(Y(a,z)\frac{(z+1)^{dega+n}}{z^{2+m}}b\right) \in O(V). \tag{2.5.1}$$

Formule za množenje i "komutator" su dane sljedećim identitetima:

Lema 2.5.7 ([46], Lemma 2.1.3.). *Za svaki homogeni $a, b \in V$, vrijedi*

$$a * b = Res_z\left(Y(b,z)\frac{(z+1)^{degb-1}}{z}a\right) + O(V), \tag{2.5.2}$$

$$a * b - b * a = Res_z\left(Y(a,z)(z+1)^{dega-1}b\right) + O(V). \tag{2.5.3}$$

Promatrat ćemo Zhuovu algebru pridruženu potkvocijentu verteks algebre. Njenu strukturu opisuje sljedeća propozicija iz članka I. Frenkel i Y. Zhu ([29]):

Propozicija 2.5.8 ([29]). *Neka je I ideal verteks algebre takav da vrijedi $\mathbb{1} \notin I$, $\omega \notin I$. Tada je $A(V/I)$ izomorfna s $A(V)/A(I)$.*

Za određivanje generatora Zhuove algebre će nam koristiti sljedeća lema koju je dokazao Abe:

Propozicija 2.5.9 ([1]). *Neka je V verteks algebra jako generirana poljima iz skupa S. Tada je Zhuova algebra $A(V)$ generirana skupom $\{[a] : a \in S\}$.*

2.6 Minimalne afine $\mathcal{W}$-algebre

V. Kac, S.S. Roan i M. Wakimoto su u članku ([32]) konstruirali $\mathcal{W}$–algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$, gdje je $\mathfrak{g}$ prosta Liejeva algebra i f proizvoljni nilpotentni element. Ako je $f = f_\theta$ korijenski vektor pridružen maksimalnom korijenu θ, verteks algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ nazivamo minimalne afine $\mathcal{W}$–algebre. Ovaj je slučaj posebno zanimljiv jer su za $\mathcal{W}$-algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ poznati generatori ([33]), te λ-zagrade ([6]).

Struktura minimalnih afinih $\mathcal{W}$-algebri

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna prosta kompleksna Liejeva algebra i $(\cdot,\cdot)$ nedegenerirana bilinearna forma na $\mathfrak{g}$.

Neka je θ maksimalni korijen za $\mathfrak{g}$. Odaberimo korijenske vektore e_θ i f_θ te $x \in \mathfrak{g}$ takve da $\{e_\theta, f_\theta, x\}$ čine sl_2-trojku, odnosno vrijedi

$$[e_\theta, f_\theta] = x, \quad [x, e_\theta] = e_\theta, \quad [x, f_\theta] = -f_\theta.$$

Tada postoji $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduirana dekompozicija od $\mathfrak{g}$ s obzirom na ad x oblika

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{g}_1,$$

gdje je $\mathfrak{g}_i = \{u \in \mathfrak{g} : [x,u] = iu\}$, te vrijedi $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{C}f_\theta$ i $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}e_\theta$.

Dekompoziciju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ koja zadovoljava gornja svojstva zovemo *minimalna gradacija.*

Definiramo

$$\mathfrak{g}^\natural = \{a \in \mathfrak{g}_0 : \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Sljedeći teorem opisuje generatore verteks algebre $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$:

Teorem 2.6.1 ([33]). *Verteks-algebra $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ je strogo generirana vektorima*

- $G^{\{u\}}$, $u \in \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}}$, *konformne težine* $\frac{3}{2}$
- $J^{\{a\}}$, $a \in \mathfrak{g}^\natural$, *konformne težine* 1
- ω *konformni vektor centralnog naboja*

$$c(\mathfrak{g}, k) = \frac{k\ dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee} - 6k + h^\vee - 4.$$

Eksplicitne formule za λ–zagrade (odnosno OPE) mogu se naći u [6], Theorem 2.1.

Verteks algebru $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ zovemo **univerzalna minimalna afina $\mathcal{W}$-algebra**. Za $k \neq -h^\vee$, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ ima jedinstveni prosti kvocijent kojeg označavamo sa $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$.

Poglavlje 3

Bershadsky-Polyakov algebra $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$

U ovom poglavlju ćemo definirati i navesti osnovna svojstva Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k(= \mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta))$, tj. minimalne afine $\mathcal{W}$-algebre pridružene sl_3. Također opisujemo strukturu Zhuove algebre pridružene $\mathcal{W}_k$, koju ćemo koristiti za proučavanje reprezentacija od $\mathcal{W}_k$.

3.1 Definicija Bershadsky-Polyakov verteks algebre $\mathcal{W}^k(sl_3, f_\theta)$

Definicija 3.1.1. *Univerzalna Bershadsky-Polyakov verteks algebra $\mathcal{W}^k(= \mathcal{W}^k(sl_3, f_\theta))$ je verteks algebra generirana poljima L, J, G^+, G^- koja zadovoljavaju sljedeće relacije:*

$$J(x)J(y) \sim \tfrac{2k+3}{3}(z-w)^{-2}, \;\; G^{\pm}(z)G^{\pm}(w) \sim 0,$$

$$J(z)G^{\pm}(w) \sim \pm G^{\pm}(w)(z-w)^{-1},$$

$$L(z)L(w) \sim -\tfrac{c_k}{2}(z-w)^{-4} + 2L(w)(z-w)^{-2} + DL(w)(z-w)^{-1}, \; (c_k = -\tfrac{(3k+1)(2k+3)}{k+3})$$

$$L(z)G^{\pm}(w) \sim \tfrac{3}{2}G^{\pm}(w)(z-w)^{-2} + DG^{\pm}(w)(z-w)^{-1},$$

$$L(z)J(w) \sim J(w)(z-w)^{-2} + DJ(w)(z-w)^{-1},$$

$$G^+(z)G^-(w) \sim (k+1)(2k+3)J(w)(z-w)^{-3} + 3(k+1)J(w)J(w)(z-w)^{-2} +$$

$$+(3 :J(w)J(w): + \tfrac{3(k+1)}{2}DJ(w) - (k+3)L(w))(z-w)^{-1}.$$

Verteks algebru $\mathcal{W}^k$ zovemo univerzalna Bershadsky-Polyakov verteks algebra na nivou k. $\mathcal{W}^k$ ima za $k \neq -3$ jedinstveni prosti kvocijent, koji ćemo označavati sa $\mathcal{W}_k$.

Neka je

$$
\begin{aligned}
L(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \\
J(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}, \\
G^+(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G^+_n z^{-n-1}, \\
G^-(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G^-_n z^{-n-1}.
\end{aligned}
$$

Vrijede sljedeće komutacijske relacije:

$[J_m, J_n] = \frac{2k+3}{3} m\delta_{m+n,0}, \quad [J_m, G^\pm_n] = \pm G^\pm_n,$

$[L_m, J_n] = -nJ_{m+n},$

$[L_m, G^\pm_n] = (\frac{1}{2}m - n + \frac{1}{2})G^\pm_{m+n},$

$[G^+_m, G^-_n] = 3(J^2)_{m+n-1} + \frac{3}{2}(k+1)(m-n)J_{m+n-1} - (k+3)L_{m+n-1} + \frac{(k+1)(2k+3)(m-1)m}{2}\delta_{m+n,1}.$

Sljedeću lemu ćemo koristiti za realizaciju Bershadsky-Polyakov verteks algebri.

Lema 3.1.2. *Pretpostavimo da verteks algebra V sadrži vektore*

$$\omega, J, G^+, G^-$$

takve da vrijede sljedeće relacije:

$$J_1 J = \frac{2k+3}{3}\mathbb{1}, \;\; G^\pm_n G^\pm = 0, \;\; J_0 G^\pm = \pm G^\pm, \; J_n G^\pm = J_{n+1} J = 0 \; za \; n \geq 1,$$

$$\omega_0\omega = D\omega, \;\; \omega_1\omega = 2\omega, \;\; \omega_2\omega = 0, \;\; \omega_3\omega = \frac{c_k}{2}, \; \omega_n\omega = 0 \; za \; n \geq 4,$$

$$\omega_0 G^\pm = DG^\pm, \;\; \omega_1 G^\pm = \frac{3}{2}G^\pm, \;\; \omega_n G^\pm = 0 \; za \; n \geq 2,$$

$$\omega_0 J = DJ, \;\; \omega_1 J = J, \;\; \omega_n J = 0 \; za \; n \geq 1,$$

$$\begin{gathered} G^+_0 G^- = 3J^2_{-1} + \frac{3(k+1)}{2}DJ - (k+3)\omega, \;\; G^+_1 G^- = 3(k+1)J \\ G^+_2 G^- = (k+1)(2k+3)\mathbb{1}, \; G^+_n G^- = 0 \; za \; n \geq 3. \end{gathered}$$

Tada postoji netrivijalni homomorfizam verteks algebri

$$\phi : \mathcal{W}^k \longrightarrow V.$$

Dokaz. Dokaz slijedi primjenom komutatorske formule za verteks algebre. $\square$

3.2 Reprezentacije najveće težine za Bershadsky - Polyakov algebru $\mathcal{W}^k(sl_3, f_\theta)$

Moduli najveće težine za verteks algebru $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ mogu se konstruirati primjenom kvantne redukcije na module najveće težine za $\hat{\mathfrak{g}}$ nivoa k. Naime, kvantna Drinfeld-Sokolovljeva redukcija daje funktor koji modulima iz kategorije $\mathcal{O}$ za $\hat{\mathfrak{g}}$–module pridružuje module iz kategorije $\mathcal{O}$ za $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$–module ([32], [33]).

Posebno, za Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}^k$ vrijedi:
Za svaki $r, s \in \mathbb{C}$ postoji ireducibilna reprezentacija $L_{r,s}$ od $\mathcal{W}^k$ generirana vektorom najveće težine $v_{r,s}$ takva da je

$$J_0 v_{r,s} = r v_{r,s}, \quad J_n v_{r,s} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$L_0 v_{r,s} = s v_{r,s}, \quad L_n v_{r,s} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$G_n^{\pm} v_{r,s} = 0 \text{ za } n \geq 1.$$

Osnovni alat koji ćemo koristiti za proučavanje reprezentacija Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}^k$ je Zhuova teorija ([46]). Prema Zhuovoj konstrukciji postoji bijektivna korespodencija između ireducibilnih $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiranih V-modula i ireducibilnih $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiranih $A(V)$-modula. Kako algebra $\mathcal{W}^k$ ima $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$–gradaciju, treba nam definicija $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduirane Zhuove algebre (cf. [38]).

Definicija 3.2.1. *Neka je V verteks algebra s konformnim vektorom ω, i neka su konformne težine Δ_v vektora $v \in V$ u $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Tada je*

$$V = \bigoplus_{r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V(r),$$

gdje je

$$V(r) = \{v \in V : \Delta_v = r\}.$$

Stavimo

$$V^0 = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} V(r), \quad V^1 = \bigoplus_{r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} V(r).$$

Definiramo dva bilinearna preslikavanja $* : V \times V \longrightarrow V$, $\circ : V \times V \longrightarrow V$ na sljedeći način: za homogene $a, b \in V$, neka je

$$a * b = \begin{cases} Res_z Y(a,z) \frac{(1+z)^{\Delta_a}}{z} b, & za\ a, b \in V^0 \\ 0, & za\ a, b \in V^1 \end{cases}$$

$$a \circ b = \begin{cases} Res_z Y(a,z) \frac{(1+z)^{\Delta_a}}{z^2} b, & za\ a \in V^0 \\ Res_z Y(a,z) \frac{(1+z)^{\Delta_a - \frac{1}{2}}}{z} b,, & za\ a \in V^1. \end{cases}$$

Proširimo $*$ i $\circ$ po linearnosti, te označimo sa $O(V) \subset V$ linearnu ljusku elemenata oblika $a \circ b$. Neka je

$$A(V) = \frac{V}{O(V)}.$$

Kvocijentni prostor $A(V)$ ima strukturu asocijativne algebre s jedinicom, s množenjem induciranim s $*$. Algebru $A(V)$ nazivamo ***Zhuova algebra*** *od V.*

Označimo sa $A(\mathcal{W}^k)$ Zhuovu algebru od $\mathcal{W}^k$. Neka je $[v]$ slika od $v \in \mathcal{W}^k$ pri preslikavanju $\mathcal{W}^k \mapsto A(\mathcal{W}^k)$.

Iz sljedeće propozicije vidimo da je Zhuova algebra $A(\mathcal{W}^k)$ izomorfna kvocijentu algebre polinoma u dvije varijable $\mathbb{C}[x, y]$.

Propozicija 3.2.2. *Postoji homomorfizam $\Psi : A(\mathcal{W}^k) \to \mathbb{C}[x, y]$ takav da*

$$\Psi([J]) = x, \ \ \Psi([\omega]) = y.$$

Dokaz. Polja G^+, G^-, J, ω strogo generiraju $\mathcal{W}^k$. Iz Propozicije 2.5.9 onda slijedi da je Zhuova algebra $A(\mathcal{W}^k)$ generirana (kao asocijativna algebra) sa $[G^+], [G^-], [J], [\omega]$. No, iz definicije Zhuove algebre dobivamo

$$\begin{aligned}
[G^{\pm}_{-1}\mathbb{1}] \circ [\mathbb{1}] &= Res_z G^{\pm}(z) \frac{(1+z)^{\Delta_{G^{\pm}_{-1}\mathbb{1}} - \frac{1}{2}}}{z} \mathbb{1} \\
&= Res_z(\ \frac{1}{z} + 1)(\sum G^{\pm}_n z^{-n-1})\mathbb{1} \\
&= G^{\pm}_{-1}\mathbb{1} = G^{\pm} \in O(V),
\end{aligned}$$

pa je zato $[G^{\pm}] = 0$ u $A(\mathcal{W}^k)$.

□

Napomena 3.2.3. *Može se pokazati da je homomorfizam Ψ zapravo izomorfizam, odnosno da vrijedi $A(\mathcal{W}^k) \cong \mathbb{C}[x, y]$.*

$L_{r,s}$ je jedinstveni $A(\mathcal{W}^k)$-modul takav da je $L_{r,s}(0) = \mathbb{C}v_{r,s}$, gdje je $\mathbb{C}v_{r,s}$ 1-dimenzionalna reprezentacija od $A(\mathcal{W}^k) \cong \mathbb{C}[x, y]$ generirana vektorom $v_{r,s}$.

Poglavlje 4

Ulaganje Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ u Weylovu verteks algebru za $k = -5/3$

U ovom poglavlju ćemo početi s detaljnijom analizom Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k$ na konkretnim nivoima.

Cilj ovog poglavlja je konstruirati eksplicitnu realizaciju Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k$ pomoću Weylove verteks algebre. Prvo ćemo pokazati da se za $k = -5/3$ prosta verteks algebra $\mathcal{W}_k$ može uložiti u Weylovu verteks algebru. Ključan element dokaza je egzistencija i jedinstvenost singularnog vektora W_4 na nivou 4.

Koristeći svojstva projekcije singularnog vektora W_4 u Zhuovoj algebri $A(\mathcal{W}^k)$, dokazat ćemo da je $\mathcal{W}_k$ izomorfna $\mathbb{Z}_3$-invarijantnoj podalgebri (orbifoldu) Weylove algebre. Ovdje koristimo metode iz teorije brojeva. Na taj način dobivamo dekompoziciju Weylove algebre kao direktne sume ireducibilnih reprezentacija za $\mathcal{W}^k$.

4.1 Konstrukcija ulaganja u Weylovu verteks algebru

Propozicija 4.1.1. *Neka je*

$$J = -\frac{1}{3}a^+_{-1}a^-_{-1}\mathbb{1},\ \omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1},$$

$$G^+ = \frac{1}{3}\left(a^+_{-1}\right)^3\mathbb{1},\ G^- = \frac{1}{9}\left(a^-_{-1}\right)^3\mathbb{1},$$

gdje su $\{a^\pm_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *generatori Weylove verteks algebre* W. *Verteks podalgebra* $\widetilde{\mathcal{W}}_k$ *Weylove verteks algebre* W *generirana vektorima* $J, \omega, G^\pm$ *je izomorfna nekom kvocijentu od* $\mathcal{W}^k$.

Poslije ćemo pokazati da je $\widetilde{\mathcal{W}}_k$ izomorfna prostom kvocijentu $\mathcal{W}_k$.

Skica dokaza. (1) Prvo pokazujemo da vektori $J, \omega, G^{\pm}$ zadovoljavaju uvjete Leme 3.1.2. To nam daje netrivijalni homomorfizam $\Phi : \mathcal{W}^k \to W$. Tvrdnja slijedi iz sljedećih lema:

Lema 4.1.2. *[37] Neka je* $\omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1}$. *Tada je* ω *Virasorov konformni vektor centralnog naboja* $c = -1$.

Lema 4.1.3. *Neka je* $G^+ = \frac{1}{3}\left(a^+_{-1}\right)^3\mathbb{1}$, $G^- = \frac{1}{9}\left(a^-_{-1}\right)^3\mathbb{1}$, $J = -\frac{1}{3}a^+_{-1}a^-_{-1}\mathbb{1}$, $\omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1}$. *Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
G^+_2 G^- &= \frac{2}{9}\mathbb{1} \\
G^+_1 G^- &= -2J \\
G^+_0 G^- &= 3J^2_{-1} - DJ - \frac{4}{3}\omega.
\end{aligned}$$

Dokazi su tehnički i dani su u Dodatku A.

(2) Zatim pokazujemo egzistenciju singularnog vektora W_4 konformne težine 4.

Lema 4.1.4. *U komponenti Weylove algebre težine 0 na nivou 4 postoji singularni vektor* W_4.

Dokaz. U Weylovoj algebri dimenzija potprostora težine 0 na nivou 4 je jednaka 12, s bazom

$$\begin{aligned}
&\{(a^+_{-2})^2(a^-_{-1})^2, (a^-_{-2})^2(a^+_{-1})^2, a^+_{-3}a^-_{-2}, a^-_{-3}a^+_{-2}, a^+_{-4}a^-_{-1}, a^-_{-4}a^+_{-1}, \\
&a^+_{-3}a^+_{-1}(a^-_{-1})^2, a^-_{-3}a^-_{-1}(a^+_{-1})^2, a^+_{-2}(a^-_{-1})^3(a^+_{-1})^2, a^-_{-2}(a^+_{-1})^3(a^-_{-1})^2, \\
&a^+_{-1}a^-_{-1}a^+_{-2}a^-_{-2}, (a^+_{-1})^4(a^-_{-1})^4\}.
\end{aligned}$$

Dimenzija potprostora u $\mathcal{W}^k$ težine 0 na nivou 4 je jednaka 13, s bazom

$$\begin{aligned}
&\{L^2_{-2}\mathbb{1}, L_{-4}\mathbb{1}, J^4_{-1}\mathbb{1}, J_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1}, J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}, J^2_{-2}\mathbb{1}, J_{-4}\mathbb{1}, L_{-2}J_{-2}\mathbb{1}, \\
&L_{-3}J_{-1}\mathbb{1}, L_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1}, G^+_{-2}G^-_{-1}\mathbb{1}, G^+_{-1}G^-_{-2}\mathbb{1}, J_{-1}G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1}\}.
\end{aligned}$$

Budući da je dimenzija potprostora u $\mathcal{W}^k$ težine 0 na nivou 4 veća od dimenzije odgovarajućeg potprostora u Weylovoj algebri, u jezgri homomorfizma $\Phi : \mathcal{W}^k \to W$ postoji netrivijalna relacija među generatorima, odnosno singularni vektor W_4 težine 0, nivoa 4. $\square$

(3) Jedinstvenost singularnog vektora W_4 slijedi iz računa (koji su dani su u Dodatku B).

Lema 4.1.5. *Singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 4 za $k = -\frac{5}{3}$ je dan sa*

$$\begin{aligned}
W_4 = &-\frac{(17k+18)(k+3)}{6(2k+3)}L_{-2}^2\mathbb{1} + \frac{(5k+6)(k+3)}{2(2k+3)}L_{-4}\mathbb{1} \\
&- \frac{3(17k^2+159k+216)}{8(2k+3)^3}J_{-1}^4\mathbb{1} - -\frac{18}{(2k+3)}J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - \\
&\frac{34k^2+129k+135)}{(2k+3)^2}J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} - \frac{3(11k^2+36k+27)}{4(2k+3)^2}J_{-2}^2\mathbb{1} - \\
&- \frac{3(2k^2+7k+9)}{2(2k+3)}J_{-4}\mathbb{1} + \frac{3(k+3)}{(2k+3)}L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + \\
&\frac{(k+3)(17k+36)}{2(2k+3)^2}L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} + G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} \\
&+ \frac{6}{(2k+3)}J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1} \\
&= -\frac{62}{9}L_{-2}^2\mathbb{1} + \frac{14}{3}L_{-4}\mathbb{1} - 18J_{-1}^4\mathbb{1} + 54J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - 130J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + \\
&\frac{33}{2}J_{-2}^2\mathbb{1} + 13J_{-4}\mathbb{1} + +0L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} - 12L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + 46L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - \\
&G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} + G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} - 18J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

□

Napomena 4.1.6. *Formula za konformni vektor iz Leme 4.1.2 je poznata (cf. [37]), ali navodimo dokaz zbog potpunosti.*

Projekcija singularnog vektora W_4 u Zhuovoj algebri

Sada dokazujemo formulu za projekciju singularnog vektora W_4 u Zhuovoj algebri, koja će nam trebati u dokazu Propozicije 4.2.3.

Lema 4.1.7. *Za projekcije elemenata PBW baze u Zhuovoj algebri $A(\mathcal{W}^k) \cong \mathbb{C}[x,y]$ vrijede sljedeće relacije:*

(1) $[L_{-2}^2\mathbb{1}] = y^2 + 2y$,

(2) $[L_{-4}\mathbb{1}] = 3y$

(3) $[J_{-1}^4\mathbb{1}] = x^4$

(4) $[J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] = -x^3$

(5) $[J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] = x^2$

(6) $[J_{-2}^2\mathbb{1}] = x^2$

(7) $[J_{-4}\mathbb{1}] = -x$

(8) $[L_{-2}J_{-2}\mathbb{1}] = -xy - 2x$

(9) $[L_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] = -2xy - x$

(10) $[L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] = x^2y + 2x^2$

(11) $[G_{-2}^+G^-\mathbb{1}] = 3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y$

(12) $[G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1}] = 6x^2 - 3(k+1)x - 2(k+3)y$

(13) $[J_{-1}G_{-1}^+G^-\mathbb{1}] = -3x^3 + \frac{3}{2}(k+1)x^2 + (k+3)xy$

Dokaz ove leme je tehnički i dan je u Dodatku B.

Propozicija 4.1.8. *Za $k = -\frac{5}{3}$, projekcija singularnog vektora W_4 u Zhuovoj algebri $A(\mathcal{W}^k) \cong \mathbb{C}[x,y]$ je dana sa*

$$[W_4] = U(x,y) = -18x^4 + 46x^2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{62}{9}y^2 - \frac{10}{9}y.$$

Dokaz. Iz Leme 4.1.5 i Leme 4.1.7 dobivamo

$$\begin{aligned}
[W_4] = &-\frac{(17k+18)(k+3)}{6(2k+3)}[L_{-2}^2\mathbb{1}] + \frac{(5k+6)(k+3)}{2(2k+3)}[L_{-4}\mathbb{1}] - \\
&\frac{3(17k^2+159k+216)}{8(2k+3)^3}[J_{-1}^4\mathbb{1}] - \frac{18}{(2k+3)}[J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] \\
&- \frac{34k^2+129k+135)}{(2k+3)^2}[J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] - \frac{3(11k^2+36k+27)}{4(2k+3)^2}[J_{-2}^2\mathbb{1}] \\
&- \frac{3(2k^2+7k+9)}{2(2k+3)}[J_{-4}\mathbb{1}] + \frac{3(k+3)}{(2k+3)}[L_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] \\
&+ \frac{(k+3)(17k+36)}{2(2k+3)^2}[L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] - [G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1}] + [G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1}] + \\
&\frac{6}{(2k+3)}[J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}] \\
&= -\frac{62}{9}[L_{-2}^2\mathbb{1}] + \frac{14}{3}[L_{-4}\mathbb{1}] - 18[J_{-1}^4\mathbb{1}] + 54[J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] - 130[J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] + \\
&\frac{33}{2}[J_{-2}^2\mathbb{1}] + 13[J_{-4}\mathbb{1}] + 0[L_{-2}J_{-2}\mathbb{1}] - 12[L_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] + 46[L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] \\
&- [G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1}] + [G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1}] - 18[J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}] \\
&= -\frac{62}{9}(y^2+2y) + \frac{14}{3}(3y) - 18(x^4) + 54(-x^3) - 130(x^2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{33}{2}(x^2) + 13(-x) + 0(-xy - 2x) - 12(-2xy - x) + 46(x^2y + 2x^2) \\
&- (3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y) + (6x^2 - 3(k+1)x - 2(k+3)y) \\
&- 18(-3x^3 + \frac{3}{2}(k+1)x^2 + (k+3)xy) \\
&= -18x^4 + 46x^2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{62}{9}y^2 - \frac{10}{9}y.
\end{aligned}
$$

□

4.2 $\mathbb{Z}_3$-orbifold Weylove verteks algebre

Neka je V verteks algebra i G grupa automorfizama od V. Tada se verteks podalgebra fiksnih točaka $V^G := \{v \in V : gv = v\}$ naziva **orbifold**.

Konstrukcija orbifolda verteks algebri jedna je od metoda za dobivanje novih verteks algebri od postojećih. U literaturi je proučavano koja se svojstva verteks algebre V nasljeđuju u orbifoldu V^G (cf. [21]), uz određene restrikcije na grupu G.

Dong i Mason su u [20] pokazali da ako je V prosta verteks operator algebra i G konačna grupa automorfizama od V, onda je podalgebra fiksnih točaka (orbifold) V^G također prosta VOA.

Jedan od problema vezanih uz teoriju orbifolda je dekompozicija verteks algebre V kao direktne sume ireducibilnih V^G–modula. Mi ćemo u ovoj točki konstruirati dekompoziciju Weylove algebre kao direktne sume tri ireducibilna $\mathcal{W}^k$–modula.

Definicija 4.2.1. ***Automorfizam verteks algebre*** *V je linearni operator $g : V \to V$ takav da vrijedi*

$$g(a_n b) = (ga)_n(gb).$$

Napomena 4.2.2. *Ako je $D \in End\, V$ derivacija, onda je $g = e^D$ automorfizam verteks algebre.*

Neka je $g = e^{\frac{2\pi i}{3}J_0}$. Tada je g automorfizam od W reda 3 i vrijedi

$$W = W^{(0)} + W^{(1)} + W^{(-1)}.$$

gdje je

$$W^{(j)} = \{v \in W \mid gv = e^{\frac{-2\pi i}{3}j}v\}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Posebno $W^{(0)}$ je prosta verteks-algebra, a $W^{(\pm1)}$ su ireducibilni $W^{(0)}$-moduli.

Propozicija 4.2.3. *Vrijedi:*

(1) $\widetilde{\mathcal{W}_k} = \mathcal{W}_k = W^{(0)}$.

(2) $W^{(\pm 1)}$ *je ireducibilan* $\mathcal{W}_k$*–modul najveće težine* $(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Dokaz. Prvo uočimo da su $a^{\pm} \in W^{(\pm 1)}$ vektori najveće težine s najvećom težinom $(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Ako pokažemo da je $\widetilde{\mathcal{W}_k} = \mathcal{W}_k = W^0$, tada automatski znamo da su $W^{(\pm 1)}$ ireducibilni $\mathcal{W}_k$-modul najveće težine $(\pm\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Dokažimo (1). Pretpostavmo da $\widetilde{\mathcal{W}_k} \neq W^{(0)}$. Tada je $W^{(0)}$ modul za $\widetilde{\mathcal{W}_k}$. $W^{(0)}$ sadrži ireducibilni $\mathcal{W}^k$–potkvocijent $L_{x,y}$ najveće težine (x, y), gdje je $x = m \in \mathbb{Z}$, a $y = \frac{n}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Kandidati za najveću težinu $(x, y) = (m, \frac{n}{2})$ su nultočke polinoma $U(x, y) = [W_4] = 0$ u Zhuovoj algebri $A(\mathcal{W}^k)$. Iz sljedećeg teorema dobivamo sva cjelobrojna rješenja (m, n).

Teorem 4.2.4. *[7] Neka je*

$$U(x, y) = -18x^4 + 46x^2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{62}{9}y^2 - \frac{10}{9}y = 0.$$

Jedino cjelobrojno rješenje (m, n) *jednadžbe*

$$V(m, n) = -\frac{1}{81}U(m, \frac{n}{2}) = 9m^2 + 324m^4 + 10n - 414m^2n + 31n^2 = 0$$

je $(0, 0)$.

Dokaz. Ako ta jednadžba ima cjelobrojno rješenje, tada diskriminanta (po varijabli n)

$$\Delta = (10 - 414m^2)^2 - 124(9m^2 + 324m^4) = 4(25 - 2349m^2 + 32805m^4)$$

mora biti kvadrat cijelog broja. Svi takvi brojevi m mogu se odrediti u programskom paketu Magma pomoću naredbe IntegralQuarticPoints([32805,0,-2349,0,25]). Rezultat u Magmi je da se jedino cjelobrojno rješenje dobije u slučaju $m = 0$. Tada jednadžba $V(m, n) = 0$ povlači da je $n = 0$ ili $n = -10/31$. Dakle $(m, n) = (0, 0)$ je jedino cjelobrojno rješenje. □

Budući da je $\widetilde{\mathcal{W}_k} = W^{(0)}$, $\widetilde{\mathcal{W}_k}$ je prosta, pa slijedi da je $\widetilde{\mathcal{W}_k} = \mathcal{W}_k$. Ovim je tvrdnja dokazana. □

Poglavlje 5

Smithova algebra

U članku S. P. Smitha [44] je uvedena klasa asocijativnih algebri $R(f)$ parametriziranih proizvoljnim polinomom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, te su definirani pojmovi poput modula najveće težine i kategorije $\mathcal{O}$ za $R(f)$-module. Kao jedan od glavnih rezultata je pokazano da za određene polinome f, $R(f)$ ima slična svojstva kao $U(sl_2)$. Posebno, ako je $f(x) = (x+1)^{n+1} - x^{n+1}$ (za n cijeli broj veći ili jednak 1), vrijedi da je svaki konačnodimenzionalni $R(f)$–modul potpuno reducibilan, dok za $n = 1$ dobivamo $R(f) \cong U(sl_2)$-

U kontekstu teorije reprezentacija verteks algebri, proučavana je veza Smithove algebre i Zhuove algebre $A(V)$ pridružene određenim verteks algebrama V: poluprosti kvocijenti Smithove algebre daju Zhuovu algebru za verteks algebre pridružene parnim pozitivno definitnim rešetkama ranga jedan ([19]); Zhuova algebra pridružena Bershadsky-Polyakov algebri $\mathcal{W}^k$ je povezana sa Smithovom algebrom ([9]).

U ovom poglavlju ćemo pokazati da je Zhuova algebra pridružena Bershadsky-Polyakov algebri $\mathcal{W}^k$ kvocijent jedne generalizacije Smithove algebre, te navesti svojstva konačnodimenzionalnih reprezentacija Smithove algebre iz članka [9]. Ove ćemo metode koristiti u idućem poglavlju kako bi klasificirali ireducibilne reprezentacije za $\mathcal{W}_k$, za $k = -9/4$ i $k = -5/3$.

5.1 Smithova algebra $R(f)$, $f \in \mathbb{C}[x]$

Definicija 5.1.1. *[44] Neka je $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ proizvoljni polinom. Asocijativna algebra $R(f)$ je generirana sa $\{A, B, H\}$ takvim da vrijede sljedeće relacije:*

$$HA - AH = A, \; HB - BH = -B, \; AB - BA = f(H).$$

$R(f)$ je $\mathbb{Z}$-graduirana algebra, s bazom $\left\{B^m H^n A^k : m, n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$.

Neka je $u(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinom stupnja (deg $f + 1$) takav da je $f(x) = \frac{1}{2}(u(x+1) - u(x))$.

Lema 5.1.2. *[44] Postoji polinom $u \in \mathbb{C}[x]$ takav da je $f(x) = \frac{1}{2}(u(x+1) - u(x))$. Za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$u(x+1) - u(x+1-k) = f(x) + f(x-1) + ... + f(x-k+1).$$

Pokazat će se da struktura konačnodimenzionalnih prostih $R(f)$-modula ovisi o funkcijama

$$u(x+1) - u(x+1-k), \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

Moduli najveće težine za Smithovu algebru $R(f)$

Neka je $\mathfrak{b}$ podalgebra od $R(f)$ generirana sa A i H. Tada je $A\mathfrak{b} = \{Aa : a \in \mathfrak{b}\}$ ideal od $\mathfrak{b}$, i $\mathfrak{b} = A\mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}[H]$. Za $\lambda \in \mathbb{C}$, neka je $\mathbb{C}v_\lambda$ 1-dimenzionalan $\mathfrak{b}$-modul takav da je $A\mathfrak{b}v_\lambda = 0$, $Hv_\lambda = \lambda v_\lambda$. Definiramo Vermaov $R(f)$-modul kao

$$V(\lambda) = R(f) \otimes_{\mathfrak{b}} \mathbb{C}v_\lambda.$$

Tada $V(\lambda)$ ima jedinstveni maksimalni podmodul. Označimo s $L(\lambda)$ prosti kvocijent od $V(\lambda)$.

Lema 5.1.3. *[44] Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$, te neka je v_λ vektor najveće težine za $V(\lambda)$. Svi podmoduli od $V(\lambda)$ su oblika*

$$\{\mathbb{C}[B]B^j v_\lambda : u(\lambda+1) - u(\lambda - j + 1) = 0, \ \textit{za } j \in \mathbb{N}\}.$$

Vidimo da postoji bijektivna korespondencija između podmodula od $V(\lambda)$ i nultočaka polinoma $u(\lambda+1) - u(\lambda - x + 1) = 0$ koje su prirodni brojevi.

Konačnodimenzionalni prosti moduli za $R(f)$ su klasificirani u [44].

Lema 5.1.4. *[44] (a) Svi konačnodimenzionalni prosti $R(g)$-moduli su oblika $L(\lambda) = V(\lambda)/B^jV(\lambda)$, gdje je $j \in \mathbb{N}$ minimalan takav da je $u(\lambda+1) - u(\lambda - j + 1) = 0$.*

(b) Broj prostih $R(g)$-modula dimenzije $j \in \mathbb{N}$ je jednak card S, gdje je

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : u(\lambda+1) - u(\lambda - j + 1) = 0, \ \textit{j je najmanji takav prirodan broj}\},$$

te vrijedi card $S \leq deg\ f$.

U idućem potpoglavlju ćemo uvesti jednu generalizaciju Smithove algebre, gdje ćemo skupu generatora dodati centralni element. Module najveće težine definiramo na analogan način kao i za originalnu Smithovu algebru $R(f)$.

5.2 Algebra Smithovog tipa $R(g)$, $g \in \mathbb{C}[x, y]$

U ovom potpoglavlju proširujemo originalnu definiciju Smithove algebre na asocijativne algebre $R(g)$, gdje je g polinom u dvije varijable. Definiramo algebru Smithovog tipa i opisujemo vezu Zhuove algebre pridružene Bershadsky-Polyakov algebri $\mathcal{W}^k$ s $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-gradacijom i algebre Smithovog tipa $R(g)$.

Definicija 5.2.1. *Neka je $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ proizvoljni polinom. Asocijativna algebra $R(g)$ **Smithovog tipa** je generirana sa $\{E, F, X, Y\}$ takvim da je Y centralni element i vrijede sljedeće relacije:*

$$XE - EX = E, \; XF - FX = -F, \; EF - FE = g(X, Y).$$

Uvodimo novo Virasorovo polje

$$\overline{L}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{L}(n) z^{-n-2} := L(z) + \frac{1}{2} DJ(z).$$

Neka je $\overline{\omega} = \omega + \frac{1}{2} DJ$ konformni vektor takav da je $\overline{\omega}_{n+1} = \overline{L}(n)$. Tada $\overline{\omega}$ ima centralni naboj

$$\bar{c}_k = -\frac{4(k+1)(2k+3)}{k+3},$$

što daje poljima J, G^+, G^- konformne težine $1, 1, 2$. Ovime smo definirali $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-gradaciju na $\mathcal{W}^k$.

Pokazat ćemo da je Zhuova algebra pridružena Bershadsky-Polyakov algebri $\mathcal{W}^k$ (s novim Virasorovim poljem $\overline{L}(z)$) kvocijent jedne algebre Smithovog tipa $R(g)$.

Stavimo

$$J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J(n) z^{-n-1},$$

$$G^+(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G^+(n) z^{-n-1},$$

$$G^-(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G^-(n) z^{-n-2}.$$

Vrijedi

$$J(n) = J_n, \; G^+(n) = G^+_n, \; G^-(n) = G^-_{n+1}.$$

Vrijede sljedeće komutacijske relacije:

$[J(m), J(n)] = \frac{2k+3}{3} m \delta_{m+n,0}, \quad [J(m), G^{\pm}(n)] = \pm G^{\pm}(m+n),$

$[\overline{L}(m), J(n)] = -nJ(m+n) - \frac{(2k+3)(m+1)m}{6} \delta_{m+n,0},$

$[\overline{L}(m), G^+(n)] = -nG^+(m+n), \quad [\overline{L}(m), G^-(n)] = (m-n)G^-(m+n),$

$[G^+(m), G^-(n)] = 3(J^2)(m+n) + (3(k+1)m - (2k+3)(m+n+1))J(m+n) - (k+3)\overline{L}(m+n) + \frac{(k+1)(2k+3)(m-1)m}{2}\delta_{m+n,0}$.

Neka je $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ Zhuova algebra pridružena $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduiranoj verteks algebri $\mathcal{W}^k$. Neka je $[v]$ slika od $v \in \mathcal{W}^k$ pri preslikavanju $\mathcal{W}^k \mapsto \overline{A}(\mathcal{W}^k)$. S novim Virasorovim vektorom $\overline{\omega}$, $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ je generirana vektorima

$$E = [G^+], \; F = [G^-], \; X = [J], \; \overline{Y} = [\overline{\omega}].$$

Propozicija 5.2.2. *Zhuova algebra $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ je kvocijent Smithove algebre $R(g)$ za $g(x, y) = -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y)$.*

Dokaz. Koristimo sljedeću formulu iz [46]:

$$u * v - v * u = Res_z(1+z)^{\Delta u - 1} Y(u, z)v + O(V).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} X * E - E * X &= Res_z(\sum J(n)z^{-n-1})G^+(-1)\mathbb{1} + O(V) \\ &= [J(0)G^+(-1)\mathbb{1}] = [G^+(-1)\mathbb{1}] \\ &= E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X * F - F * X &= Res_z(\sum J(n)z^{-n-1})G^-(-2)\mathbb{1} + O(V) \\ &= [J(0)G^-(-2)\mathbb{1}] = -[G^-(-2)\mathbb{1}] \\ &= -F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X * \overline{Y} - \overline{Y} * X &= Res_z(\sum J(n)z^{-n-1})\overline{L}(-2)\mathbb{1} + O(V) \\ &= [J(0)\overline{L}(-2)\mathbb{1}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E * F - F * E &= Res_z(\sum G^+(n)z^{-n-1})G^-(-2)\mathbb{1} + O(V) \\ &= [G^+(0)G^-(-2)\mathbb{1}] \\ &= [3J^2(-2)\mathbb{1} + (2k+3)J(-2)\mathbb{1} - (k+3)\overline{L}(-2)\mathbb{1}] \\ &= 3X^2 - (2k+3)X - (k+3)\overline{Y} \\ &= -g(X, \overline{Y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E * \overline{Y} - \overline{Y} * E &= Res_z(\sum G^+(n) z^{-n-1}) \overline{L}(-2)\mathbb{1} + O(V) \\
&= [G^+(0)\overline{L}(-2)\mathbb{1}] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F * \overline{Y} - \overline{Y} * F &= Res_z(1+z)(\sum G^-(n) z^{-n-2}) \overline{L}(-2)\mathbb{1} + O(V) \\
&= [G^-(-1)\overline{L}(-2)\mathbb{1}] + [G^-(0)\overline{L}(-2)\mathbb{1}] \\
&= [G^-(-3)\mathbb{1}] + 2[G^-(-2)\mathbb{1}] \\
&= [\overline{L}(-1)G^-(-2)\mathbb{1}] + 2[G^-(-2)\mathbb{1}] \\
&= -[\overline{L}(0)G^-(-2)\mathbb{1}] + 2[G^-(-2)\mathbb{1}] \\
&= -2[G^-(-2)\mathbb{1}] + 2[G^-(-2)\mathbb{1}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

5.3 Konačnodimenzionalne reprezentacije algebre Smithovog tipa $R(g)$, $g \in \mathbb{C}[x, y]$

Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija najveće težine od $\mathcal{W}^k$ se svodi na određivanje reprezentacija najveće težine od pripadne Zhuove algebre. Kako je Zhuova algebra $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ kvocijent Smithove, kandidati za reprezentacije od $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ su upravo reprezentacije od $R(g)$. Navodimo karakterizaciju konačnodimenzionalnih reprezentacija Smithove algebre iz članka T. Arakawe [9].

Prvo navodimo rezultat koji daje egzistenciju ireducibilnih modula najveće težine.

Propozicija 5.3.1. *Za svaki $(x, y) \in \mathbb{C}$ postoji ireducibilna reprezentacija $L(x, y)$ od $\mathcal{W}^k$ generirana vektorom najveće težine $v_{x,y}$ takva da je*

$$J(0)v_{x,y} = xv_{x,y}, \quad J(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$\overline{L}(0)v_{x,y} = yv_{x,y}, \quad \overline{L}(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$G^-(n-1)v_{x,y} = G^+(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n \geq 1.$$

Dokaz. Prvo uočimo da Smithova algebra $R(g)$ ima jedinstvenu ireducibilnu reprezentaciju najveće težine generirane vektorom $v_{x,y}$ takvu da je

$$Fv_{x,y} = 0, \quad Xv_{x,y} = xv_{x,y}, \quad \overline{Y}v_{x,y} = yv_{x,y}.$$

Sada tvrdnja jednostavno slijedi iz Zhuove teorije [46] i Propozicije 5.2.2. $\square$

Neka je

$$L(x,y)_{\text{top}} = \left\{ v \in L(x,y) : \overline{L}(0)v = yv \right\}.$$

$L(x,y)_{\text{top}}$ je (kao vektorski prostor) razapet vektorima $\{(G^+(0))^i v_{x,y},\ 0 \leq i\}$,

Za $g(x,y) = -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y)$ vrijedi

$$G^-(0)G^+(0)v_{x,y} = g(x,y)v_{x,y}.$$

Definiramo polinome $h_i(x,y)$, za $i \in \mathbb{N}$ (cf. [9]):

$$\begin{aligned} h_i(x,y) &= \frac{1}{i}(g(x,y) + g(x+1,y) + ... + g(x+i-1,y)) \\ &= -i^2 + ki - 3xi + 3i - 3x^2 - k + 2kx + 6x + ky + 3y - 2. \end{aligned}$$

Napomena 5.3.2. *Funkcije $h_i(x,y)$ su analogon funkcija $u(x+1) - u(x+1-k)$, $k \in \mathbb{N}$ iz točke 5.1.*

Lema 5.3.3 ([9])**.** *Vrijedi sljedeća relacija*

$$G^-(0)G^+(0)^i v_{x,y} = ih_i(x,y)G^+(0)^{i-1}v_{x,y}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Pretpostavimo da vrijedi

$$G^-(0)G^+(0)^i v_{x,y} = ih_i(x,y)G^+(0)^{i-1}v_{x,y}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} G^+(0)G^-(0)G^+(0)^i v_{x,y} &= ([G^+(0), G^-(0)] + G^-(0)G^+(0))G^+(0)^i v_{x,y} \\ &= (3J^2(0) - (2k+3)J(0) - (k+3)\overline{L}(0))G^+(0)^i v_{x,y} + \\ &+ G^-(0)G^+(0)^i v_{x,y}, \end{aligned}$$

pa je zato

$$\begin{aligned} G^-(0)G^+(0)^{i+1}v_{x,y} &= ih_i(x,y)G^+(0)^i v_{x,y} - 3J^2(0)G^+(0)^i v_{x,y} + (2k+3)J(0)G^+(0)^i v_{x,y} + \\ &+ (k+3)\overline{L}(0)G^+(0)^i v_{x,y} \\ &= ih_i(x,y)G^+(0)^i v_{x,y} - 3(x+i)^2 G^+(0)^i v_{x,y} + \\ &+ (2k+3)(x+i)G^+(0)^i v_{x,y} + +(k+3)yG^+(0)^i v_{x,y} \\ &= (g(x,y) + g(x+1,y) + ... + g(x+i-1,y) - 3(x+i)^2 + \\ &+ (2k+3)(x+i) + (k+3)y)G^+(0)^i v_{x,y} \\ &= (g(x,y) + g(x+1,y) + ... + g(x+i-1,y) + g(x+i,y))G^+(0)^i v_{x,y} \\ &= (i+1)h_{i+1}(x,y)G^+(0)^i v_{x,y}. \end{aligned}$$

$\square$

Sljedeća propozicija karakterizira konačnodimenzionalne reprezentacije Smithove algebre.

Propozicija 5.3.4 ([9], Proposition 2.2.)**.** *Ako je prostor $L(x, y)_{top}$ n-dimenzionalan, onda je $h_n(x, y) = 0$.*

Dokaz. Budući da je $L(x, y)_{\text{top}}$ razapet vektorima iz skupa

$$\left\{(G^+(0))^i v_{x,y},\ 0 \leq i \leq n-1\right\},$$

slijedi da ako je $L(x, y)_{\text{top}}$ n-dimenzionalan, onda je $(G^+(0))^{n-1} v_{x,y} \neq 0$ i $(G^+(0))^n v_{x,y} = 0$. Imamo

$$0 = G^-(0)(G^+(0))^n v_{x,y} = n h_n(x, y)(G^+(0))^{n-1} v_{x,y},$$

pa je $h_n(x, y) = 0$. □

$\mathcal{W}^k$-moduli $\psi(M)$

U Poglavlju 2.4 smo definirali operator $\Delta(h, z)$ koji svakom ireducibilnom V-modulu M pridružuje novu strukturu ireducibilnog V-modula. Bitno svojstvo Δ-operatora je da djeluje bijektivno na skupu ireducibilnih modula. Ovu konstrukciju ćemo koristiti u idućem poglavlju kako bi klasificirali ireducibilne module za $\mathcal{W}_k$ za $k = -9/4$ i $k = -5/3$.

Stavimo

$$\Delta(-J, z) = z^{-J(0)} exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{-J(0)}{k z^k}\right),$$

i neka je

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(a_n) z^{-n-1} = Y(\Delta(-J, z)a, z),$$

za $a \in \mathcal{W}^k$.

Za bilo koji $\mathcal{W}^k$-modul M možemo definirati novu strukturu $\mathcal{W}^k$-modula na M pomoću preslikavanja $a_n \mapsto \psi(a_n)$. Označimo tako dobiveni modul sa $\psi(M)$. Budući da ψ djeluje bijektivno na skupu ireducibilnih modula, posebno postoji inverz ψ^{-1}.

Iz definicije operatora $\Delta(-J, z)$ dobivamo

$$\psi(J(n)) = J(n) - \frac{2k+3}{3}\delta_{n,0}, \quad \psi(\overline{L}(n)) = \overline{L}(n) - J(n) + \frac{2k+3}{3}\delta_{n,0},$$

$$\psi(G^+(n)) = G^+(n-1), \quad \psi(G^-(n)) = G^-(n+1).$$

Označimo

$$G^+_{new}(n) := \psi(G^+(n)), \quad G^-_{new}(n) := \psi(G^-(n)),$$

$$\overline{L}_{new}(n) := \psi(\overline{L}(n)), \quad J_{new}(n) := \psi(J(n)).$$

Lema 5.3.5 ([9], Proposition 2.3.). *Neka je* $\dim L(x,y)_{top} = i$. *Tada je*

$$\widehat{v}_{x,y} = (G^+(0))^{i-1} v_{x,y}$$

vektor najveće težine za $\psi(L(x,y))$, *s najvećom težinom*

$$(x+i-1-\frac{2k+3}{3}, y-x-i+1+\frac{2k+3}{3}).$$

Posebno, vrijedi:

$$\psi(L(x,y)) \cong L(x+i-1-\frac{2k+3}{3}, y-x-i+1+\frac{2k+3}{3}).$$

Dokaz. Koristeći gornje formule, dobivamo

$$\begin{aligned} G^+_{new}(1)\widehat{v}_{x,y} &= (G^+(0))^i v_{x,y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^-_{new}(0)\widehat{v}_{x,y} &= G^-(1)(G^+(0))^{i-1} v_{x,y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{new}(0)\widehat{v}_{x,y} &= (J(0) - \frac{2k+3}{3})(G^+(0))^{i-1} v_{x,y} \\ &= (x+i-1-\frac{2k+3}{3})\widehat{v}_{x,y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{L}_{new}(0)\widehat{v}_{x,y} &= (\overline{L}(0) - J(0) + \frac{2k+3}{3})(G^+(0))^{i-1} v_{x,y} \\ &= (y-x-i+1+\frac{2k+3}{3})\widehat{v}_{x,y}. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 6

Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija za $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$, za $k = -9/4$ i $k = -5/3$

U ovom poglavlju ćemo klasificirati ireducibilne module za Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k$, za $k = -9/4$ i $k = -5/3$, u kategoriji jakih modula (modula koji imaju konačnodimenzionalne svojstvene potprostore za $L(0)$). Iz Zhuove teorije slijedi da se klasifikacija svodi na klasifikaciju ireducibilnih modula za Zhuovu algebru pridruženu $\mathcal{W}_k$. Budući da je ta Zhuova algebra kvocijent Smithove algebre $R(g)$, za $g(x,y) = -(3x^2+(2k+3)x-(k+3)y)$, problem je povezan s klasifikacijom konačnodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija pripadne Smithove algebre (cf. Poglavlje 5).

Ireducibilne module za $\mathcal{W}_k$ za $k = -5/3$ realiziramo kao određene podalgebre Weylove algebre. Koristit ćemo rezultate iz Poglavlja 4, gdje smo pokazali da je Weylova verteks algebra W direktna suma tri ireducibilna $\mathcal{W}_k$–modula.

Za $k = -9/4$ je realizacija ireducibilnih $\mathcal{W}_k$–modula povezana s B_p–algebrama (cf. [17]). Tu konstrukciju ćemo detaljnije istražiti u Poglavlju 7.

6.1 Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija za $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ za $k = -9/4$

Propozicija 6.1.1. *U Zhuovoj algebri $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ imamo sljedeću relaciju:*

$$[G^+]([\overline{\omega}] + \frac{1}{2}) = 0.$$

Dokaz. Koristimo sljedeću lemu:

Lema 6.1.2. *S novim Virasoro vektorom $\overline{\omega}$, singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 3 za $k =$*

$-9/4$ *je dan sa*

$$\begin{aligned}\overline{W}_3 = &\frac{3}{8}\overline{L}(-3)\mathbb{1} + J(-1)^3\mathbb{1} - \frac{9}{4}J(-2)J(-1)\mathbb{1} + \frac{19}{8}J(-3)\mathbb{1} - \\ &- \frac{3}{2}\overline{L}(-2)J(-1)\mathbb{1} + G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}.\end{aligned}$$

Budući da je $\overline{W}_3$ singularni vektor, $\overline{W}_3$ generira maksimalni ideal $\mathcal{J}^k$ u $\mathcal{W}^k$ i $\overline{W}_3 \equiv 0$ u prostom kvocijentu. $G^+(0)\overline{W}_3$ je također u maksimalnom idealu $\mathcal{J}^k$, te vrijedi $[G^+(0)\overline{W}_3] \in A(\mathcal{J}^k)$. Vrijedi

Lema 6.1.3. *Projekcija vektora $G^+(0)\overline{W}_3$ u Smithovoj algebri je dana sa*

$$[G^+(0)\overline{W}_3] = E(\frac{3}{4}\overline{Y} + \frac{3}{8}).$$

Dokazi lema su tehnički i dani su u Dodatku B.

Iz relacije

$$[G^+(0)\overline{W}_3] = E(\frac{3}{4}\overline{Y} + \frac{3}{8}) = \frac{3}{4}[G^+]([\overline{\omega}] + \frac{1}{2})$$

slijedi da je $[G^+(0)\overline{W}_3] = 0 = [G^+]([\overline{\omega}] + \frac{1}{2})$. □

Propozicija 6.1.4. *Neka je $k = -9/4$. Definiramo*

$$\mathcal{S}_k = \{(-\frac{1}{2}, 0), (0, 0), (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})\}.$$

(i) Za sve $(x, y) \in \mathcal{S}_k$, $L(x, y)$ je $\mathcal{W}_k$–modul.

(ii) Pretpostavimo da je $L(x, y)$ ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za $L(0)$. Tada je $(x, y) \in \mathcal{S}_k$.

Dokaz. Pokažimo tvrdnju (i). Iskoristit ćemo sljedeću važnu tvrdnju (cf. Poglavlje 2.4):

- Ako je M ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul, tada su i $\Psi(M)$, $\Psi^{-1}(M)$ ponovno ireducibilni $\mathcal{W}_k$–moduli.

Prvo uočimo da je $\mathcal{W}_k = L(0, 0)$, pa je prema tome $L(0, 0)$ $\mathcal{W}_k$–modul. Nadalje uočimo da je $\Psi(L(-1/2, 0)) = L(0, 0)$, pa je zato i $L(-1/2, 0) = \Psi^{-1}(L(0, 0))$ modul za verteks algebru $\mathcal{W}_k$.

Konstrukcija modula $L(-1/4, -1/4)$ je nešto teža. Uočimo da je

$$\Psi(L(-1/4, -1/4)) = L(1/4, -1/2).$$

Pokažimo sada da $L(1/4, -1/2)$ ima strukturu $\mathcal{W}_k$–modula. Tvrdimo da vrijedi:

Lema 6.1.5. *$L(1/4, -1/2)$ je $\mathcal{W}_k$–modul.*

U Poglavlju 7 ćemo konstruirati familiju $\mathcal{W}_k$–modula $\mathcal{M}_{-1}(r)$, $r \in \mathbb{C}$, te pokazati da se $L(1/4, -1/2)$ može realizirati kao potkvocijent od $\mathcal{M}_{-1}(r)$ za $r = 1/4$ (cf. Lema 7.3.1).

Slijedi da je i $L(-1/4, -1/4) = \Psi^{-1}(L(1/4, -1/2))$ modul za $\mathcal{W}_k$.

Dokažimo sad tvrdnju (ii). Neka je $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani ireducibilni modul za $\mathcal{W}_k$. Iz Zhuove teorije slijedi da je $M(0)$ modul za Zhuovu algebru $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ te je $[G^+]([\overline{\omega}] + \frac{1}{2}) \equiv 0$ na $M(0)$.

Neka je $v_{x,y}$ vektor najveće težine (x, y) za $M(0)$. Pretpostavimo da je $M(0)$ konačnodimenzionalan. Imamo dva slučaja:

(1) $G^+(0) \equiv 0$ na $M(0)$

Budući da je $G^+(0)v_{x,y} = 0$ na $M(0)$ i $G^-(0)G^+(0)v_{x,y} = g(x, y)v_{x,y}$, slijedi da je $g(x, y) = h_1(x, y) = 0 \Rightarrow M(0)$ je 1-dimenzionalni modul za Zhuovu algebru. Sad pogledajmo modul $\widehat{M} = \Psi(M)$. $\widehat{M}$ je modul najveće težine $(\hat{x}, \hat{y})$ gdje je

$$\hat{x} = x + \frac{1}{2}, \quad \hat{y} = y - x - \frac{1}{2}.$$

Uočimo da je $\widehat{y} = -\frac{1}{2}$ ako i samo ako je $y = x$. Prema tome za $y \neq x$ na top komponenti od $\widehat{M}$ vrijedi ponovno relacija $G^+(0) = 0$, pa je zato top komponenta $\widehat{M}(0)$ 1–dimenzionalna i vrijedi $h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Sada

$$h_1(x, y) = 0 = h_1(\hat{x}, \hat{y}),$$

dovodi do sustava

$$\begin{aligned} -3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y &= 0 \\ -3x^2 - \frac{21}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{15}{8} &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje je $(x, y) = (-\frac{1}{2}, 0)$. Pogledajmo sada slučaj $x = y$.

Jednadžba $h_1(x, x) = 0$ daje rješenja $x = 0$ i $x = -1/4$.

(2) Preostaje pokazati da ne postoje ireducibilni $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduirani moduli $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ takvi da je $\dim M(0) < \infty$ za koje vrijedi

$$(*) \quad \overline{L}(0) \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{Id} \quad \text{na } M(0).$$

Pretpostavimo da je $M = L(x, y)$ i $y = -1/2$. Neka je $\dim M(0) = i$. Tada je $\Psi(M)$ modul najveće težine $(\hat{x}, \hat{y})$, gdje je

$$\hat{x} = x + i - 1 + \frac{1}{2}, \quad \hat{y} = y - x - i + 1 - \frac{1}{2} = -x - i.$$

Prvo uočimo da je

$$h_i(1/2 - i, -1/2) = -\frac{1}{8}(2i-1)(4i-1) \neq 0$$

pa je prema tome nužno $x \neq -i + \frac{1}{2}$, tj. $\hat{y} \neq -\frac{1}{2}$. Tada je $h_1(x + i - \frac{1}{2}, -x - i) = 0$, što povlači

$$x + i \in \{0, -\frac{1}{4}\}.$$

Sada ćemo iskoristiti uvjet $h_i(x, -1/2) = 0$. Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} h_i(-i, -1/2) &= 1/8(-1 - 6i - 8i^2) \neq 0, \\ h_i(-1/4 - i, -1/2) &= -(11/16) - (3i)/2 - i^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Kontradikcija. Ovim je tvrdnja dokazana. □

6.2 Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija za $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ za $k = -5/3$

Propozicija 6.2.1. *U Zhuovoj algebri $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ imamo sljedeću relaciju:*

$$[G^+]^2([\overline{\omega}] + \frac{1}{9}) = 0.$$

Dokaz. Dokaz je analogan slučaju $k = -9/4$. Koristimo sljedeću lemu:

Lema 6.2.2. *S novim Virasoro vektorom $\overline{\omega}$, singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 4 za $k = -5/3$ je dan sa*

$$\begin{aligned} \overline{W}_4 = &-\frac{62}{9}\overline{L}(-2)^2\mathbb{1} + \frac{14}{3}\overline{L}(-4)\mathbb{1} - 18J(-1)^4\mathbb{1} + 31J(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - \\ &- 118J(-3)J(-1)\mathbb{1} + \frac{133}{9}J(-2)^2\mathbb{1} - \frac{8}{9}J(-4)\mathbb{1} + \frac{62}{9}\overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} - \\ &- 12\overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1} + 46\overline{L}(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1} + \\ &+ G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1} - 18J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Budući da je $\overline{W}_4$ singularni vektor, $\overline{W}_4$ generira maksimalni ideal $\mathcal{J}^k$ u $\mathcal{W}^k$ i $\overline{W}_4 \equiv 0$ u prostom kvocijentu. $(G^+(0))^2\overline{W}_4$ je također u maksimalnom idealu $\mathcal{J}^k$, te vrijedi $[(G^+(0))^2\overline{W}_4] \in A(\mathcal{J}^k)$. Vrijedi

Lema 6.2.3. *Projekcija vektora $G^+(0)\overline{W}_3$ u Smithovoj algebri je dana sa*

$$[(G^+(0))^2\overline{W}_4] = 44E^2(\overline{Y} + \frac{1}{9}).$$

Dokazi lema su tehnički i dani su u Dodatku B.

Iz relacije

$$[(G^+(0))^2\overline{W}_4] = 44E^2(\overline{Y} + \frac{1}{9}) = 44[G^+]^2([\overline{\omega}] + \frac{1}{9})$$

slijedi da je $[(G^+(0))^2\overline{W}_4] = 0 = [G^+]^2([\overline{\omega}] + \frac{1}{9})$. □

Iz Propozicije 5.7 slijedi sljedeći važan kriterij.

Lema 6.2.4. *Prepostavimo da je $L(x,y)$–ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul. Tada je $U(x, y+x/2) = 0$.*

Propozicija 6.2.5. *Neka je $k = -5/3$. Definiramo*

$$\mathcal{S}_k = \{(-\frac{1}{9}, 0), (0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}), (-\frac{7}{9}, \frac{2}{3})\}.$$

(1) Za sve $(x,y) \in \mathcal{S}_k$, $L(x,y)$ je ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul.

(2) Pretpostavimo da je $L(x,y)$ ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za $L(0)$. Tada je $(x,y) \in \mathcal{S}_k$.

Dokaz. Dokažimo prvo tvrdnju (1). Propozicija 5.10 povlači da je Weylova verteks algebra W direktna suma tri ireducibilna $\mathcal{W}_k$–modula. S novim Virasoro vektorom $\overline{L} = L + \frac{1}{2}DJ$, najveće težine s obzirom na $(J(0), \overline{L}(0))$ su redom

- $W^{(0)}$ ima vektor najveće težine $\mathbb{1}$, a najveća težina je $(0,0)$
- $W^{(1)}$ ima vektor najveće težine $a^+_{-1}\mathbb{1}$, a najveća težina je $(1/3, 1/3)$
- $W^{(-1)}$ ima vektor najveće težine $a^-_{-1}\mathbb{1}$, a najveća težina je $(-1/3, 2/3)$.

Dakle, $L(0,0)$, $L(1/3,1/3)$ i $L(-1/3,2/3)$ su ireducibilni $\mathcal{W}_k$–moduli. Tvrdnja (1) sad slijedi iz formula

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(L(0,0)) &= L(-\frac{1}{9}, 0),\\
\Psi^{-1}(L(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) &= L(-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}),\\
\Psi^{-1}(L(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) &= L(-\frac{7}{9}, \frac{2}{3}),
\end{aligned}$$

i činjenice da su za svaki ireducibilni $\mathcal{W}_k$–modul M, $\Psi(M)$ i $\Psi^{-1}(M)$ ponovno ireducibilni $\mathcal{W}_k$–moduli.

Dokažimo tvrdnju (2). Neka je $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduirani ireducibilni modul za $\mathcal{W}_k$. Iz Zhuove teorije slijedi da je $M(0)$ modul za Zhuovu algebru $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ te je $[G^+]^2([\overline{\omega}] + \frac{1}{9}) \equiv 0$ na $M(0)$.

Neka je $v_{x,y}$ vektor najveće težine (x,y) za $M(0)$. Pretpostavimo da je $M(0)$ konačnodimenzionalan. Imamo dva slučaja:

(1) $(G^+(0))^2 \equiv 0$ na $M(0)$

Budući da je $(G^+(0))^2 v_{x,y} = 0$ na $M(0)$ i $G^-(0)(G^+(0))^i v_{x,y} = ih_i(x,y)(G^+(0))^{i-1} v_{x,y}$, slijedi da je $h_2(x,y) = 0$ ili $G^+(0)v_{x,y} = 0$ (odnosno $h_1(x,y) = 0$) $\Rightarrow M(0)$ je 1-dimenzionalni ili 2-dimenzionalni modul za Zhuovu algebru. Sad pogledajmo modul $\widehat{M} = \Psi(M)$. $\widehat{M}$ je modul najveće težine $(\hat{x}, \hat{y})$ gdje je

$$\hat{x} = x + i - 1 + \frac{1}{9}, \quad \hat{y} = y - x - i + 1 - \frac{1}{9}.$$

Promotrimo prvo slučaj $G^+(0)v_{x,y} = 0$. Tada je $\hat{x} = x + \frac{1}{9}$, $\hat{y} = y - x - \frac{1}{9}$. Uočimo da je $\widehat{y} = -\frac{1}{9}$ ako i samo ako je $y = x$. Prema tome za $y \neq x$ na top komponenti od $\widehat{M}$ vrijedi ponovno relacija $G^+(0) = 0$, pa je zato top komponenta $\widehat{M}(0)$ 1–dimenzionalna i vrijedi $h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Sada

$$h_1(x,y) = 0 = h_1(\hat{x}, \hat{y}),$$

dovodi do sustava

$$\begin{aligned} -3x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y &= 0 \\ -3x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{2}{9} &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $(x,y) = (-\frac{1}{9}, 0)$.

U slučaju $x = y$, jednadžba $h_1(x,x) = 0$ daje rješenja $x = 0$ i $x = \frac{1}{3}$.

Pogledajmo sada slučaj $h_2(x,y) = 0$. Vrijedi $\hat{x} = x + \frac{10}{9}$, $\hat{y} = y - x - \frac{10}{9}$, te je $\widehat{y} = -\frac{1}{9}$ ako i samo ako je $y = x + 1$. Za $y \neq x + 1$ na top komponenti od $\widehat{M}$ opet vrijedi relacija $(G^+(0))^2 = 0$, pa je zato top komponenta $\widehat{M}(0)$ 1–dimenzionalna ili 2–dimenzionalna i vrijedi $h_1(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ ili $h_2(\hat{x}, \hat{y}) = 0$.

Ako je $M(0)$ 1-dimenzionalni modul za Zhuovu algebru, vrijedi

$$h_1(x,y) = 0 = h_2(x + \frac{1}{9}, y - x - \frac{1}{9}),$$

odnosno

$$\begin{aligned} -3x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y &= 0 \\ -3x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{20}{9} &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $(x,y) = (-\frac{4}{9}, \frac{1}{3})$.

Ako je $M(0)$ 2-dimenzionalni modul za Zhuovu algebru, imamo dvije mogućnosti: ako je

$$h_2(x, y) = 0 = h_1(\hat{x}, \hat{y}),$$

dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -3x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{3} &= 0 \\ -3x^2 - \frac{25}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{50}{9} &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (-\frac{7}{9}, \frac{2}{3})$;
ako je

$$h_2(x, y) = 0 = h_2(\hat{x}, \hat{y}),$$

dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -3x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{3} &= 0 \\ -3x^2 - \frac{34}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{95}{9} &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $(x, y) = (-\frac{10}{9}, \frac{5}{4})$. No primjenom Leme 6.2.4 vidimo da $L(-\frac{10}{9}, \frac{5}{4})$ ne može biti $\mathcal{W}_k$–modul.

U slučaju $y = x + 1$, jednadžba $h_2(x, x + 1) = 0$ daje rješenje $x = -\frac{1}{3}$.

(2) Preostaje pokazati da ne postoje ireducibilni $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduirani moduli $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M(n)$ takvi da je $\dim M(0) < \infty$, za koje vrijedi

$$(*) \quad \overline{L}(0) \equiv -\frac{1}{9}\mathrm{Id} \quad \text{na } M(0).$$

Pretpostavimo da je $M = L(x, y)$ i $y = -1/9$. Neka je $\dim M(0) = i$. Tada je $\Psi(M)$ modul najveće težine $(\hat{x}, \hat{y})$, gdje je

$$\hat{x} = x + i - 1 + \frac{1}{9}, \quad \hat{y} = y - x - i + 1 - \frac{1}{9} = -x - i + \frac{7}{9}.$$

Prvo uočimo da je

$$h_i(8/9 - i, -1/9) = -i^2 + \frac{4}{3}i - \frac{13}{27} \neq 0$$

pa je prema tome nužno $x \neq -i + \frac{8}{9}$, tj. $\hat{y} \neq -\frac{1}{9}$. Tada je $h_1(x + i - \frac{8}{9}, -x - i + \frac{7}{9}) = 0$ ili $h_2(x + i - \frac{8}{9}, -x - i + \frac{7}{9}) = 0$.

Ako je $h_1(x + i - \frac{8}{9}, -x - i + \frac{7}{9}) = 0$, vrijedi da je

$$x \in \{-i + \frac{4}{9}, -i + \frac{7}{9}\}.$$

Sada ćemo iskoristiti uvjet $h_i(x, -1/9) = 0$. Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} h_i(-i + 4/9, -1/9) &= -1/9(3i - 1)(3i + 1) \neq 0, \\ h_i(-i + 7/9, -1/9) &= -1/9(3i - 1)(3i - 2) \neq 0. \end{aligned}$$

Ako je $h_2(x + i - \frac{8}{9}, -x - i + \frac{7}{9}) = 0$, vrijedi da je

$$x \in \{-i + \frac{1}{9}\}.$$

Opet koristimo uvjet $h_i(x, -1/9) = 0$. Direktnim računom dobivamo

$$h_i(-i + 1/9, -1/9) = -1/9(3i + 1)(3i + 2) \neq 0.$$

Kontradikcija. Ovim je tvrdnja dokazana. $\square$

Poglavlje 7

Realizacija $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$-modula izvan kategorije $\mathcal{O}$ za $k = -9/4$

U ovom poglavlju ćemo proučavati ireducibilne module za Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ za $k = -9/4$. Pokazali smo da verteks algebra $\mathcal{W}_k$ ima samo tri ireducibilna jaka modula (cf. Propozicija 6.1.4). Dokaz je slijedio iz relacije

$$[G^+]([\omega] + 1/2) = 0$$

u Zhuovoj algebri. Ova relacija sugerira da bi mogli postojati $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduirani moduli s najmanjom konformnom težinom $-1/2$.

Bershadsky-Polyakov verteks algebra $\mathcal{W}_k$ je dio serije verteks algebri koje se realiziraju pomoću verteks algebri iz logaritamske konformne teorije polja, tzv. B_p–algebri ([17]). Posebno, za $p = 4$ i $k = -9/4$ vrijedi upravo $\mathcal{W}_k \cong B_4$.

Mi ćemo sad iskoristiti tu konstrukciju kako bi konstruirali familiju modula s najmanjom konformnom težinom $-1/2$ izvan kategorije $\mathcal{O}$.

7.1 Realizacija Bershadsky-Polyakov verteks algebre $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$

Opišimo prvo konstrukciju doublet verteks algebre $\mathcal{A}(4)$ koja je specijalni slučaj serije verteks algebri $\mathcal{A}(p)$ iz članka D. Adamovića i A. Milasa [5].

Označimo s L parnu rešetku.

$$L = \mathbb{Z}\gamma + \mathbb{Z}\delta \quad \langle \gamma, \gamma \rangle = -\langle \delta, \delta \rangle = 2, \ \langle \gamma, \delta \rangle = 0.$$

Neka je $\mathcal{A}(4)$ verteks algebra generirana s

$$a^- = e^{-\gamma}, a^+ = Qa^-, \omega_{\mathcal{A}(4)} = \frac{1}{4}\gamma(-1)^2 + \frac{3}{4}\gamma(-2),$$

gdje je $Q = e_0^{2\gamma}$ screening operator. Vrijede slijedeće relacije

$$\begin{aligned}
a_4^+ a^- &= -a_4^- a^+ &&= -20\mathbb{1}, \\
a_3^+ a^- &= a_3^- a^+ &&= 0, \\
a_2^+ a^- &= -a_2^- a^+ &&= 2\gamma(-1)^2 + 6\gamma(-2) = 8\omega_{\mathcal{A}(4)}.
\end{aligned}$$

Tada je verteks algebra B_4 (cf. [17]) definirana kao podalgebra od $\mathcal{A}(4) \otimes V_{\mathbb{Z}\delta} \subset V_L$ generirana s

$$\begin{aligned}
\tau^- &= -\frac{\sqrt{6}}{8} a^- \otimes e^{-\delta} = -\frac{\sqrt{6}}{8} e^{-\gamma-\delta}, \\
\tau^+ &= \frac{\sqrt{6}}{8} a^+ \otimes e^{\delta} = \frac{\sqrt{6}}{8}\frac{1}{3}(4\gamma(-1)^3 + 6\gamma(-1)\gamma(-2) + 2\gamma(-3))e^{\gamma+\delta}, \\
j &= -\frac{1}{2}\delta(-1), \\
\omega &= \omega_{\mathcal{A}(4)} - \frac{1}{4}\delta(-1)^2.
\end{aligned}$$

Direktnim računom vidimo

$$\begin{aligned}
\tau_2^+ \tau^- &= \frac{15}{8}\mathbb{1} = (k+1)(2k+3)\mathbb{1}, \\
\tau_1^+ \tau^- &= \frac{15}{8}\delta(-1) = 3(k+1)j, \\
\tau_0^+ \tau^- &= -\frac{6}{64}(8\omega_{\mathcal{A}(4)} - 10\delta(-1)^2 - 10\delta(-2)) \\
&= -\frac{3}{4}\omega_{\mathcal{A}(4)} + \frac{15}{16}(\delta(-1)^2 + \delta(-2)) \\
&= -\frac{3}{4}\omega + \frac{3}{4}\delta(-1)^2 + \frac{15}{16}\delta(-2) \\
&= -(k+3)\omega + 3J(-1)^2 + \frac{3(k+1)}{2}J(-2).
\end{aligned}$$

Propozicija 7.1.1. *[17] Vrijedi:*

$$\mathcal{W}_k \cong B_4.$$

Dokaz. Gornji račun pokazuje da $G^\pm = \tau^\pm, j, \omega$ generiraju podalgebru od $\mathcal{A}(4) \otimes V_{\mathbb{Z}\delta}$ izomorfnu nekom kvocijentu univerzalne Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}^k$. Označimo tu podalgebru s U. Navedimo samo skicu dokaza prostote. Iz realizacije, te rezultata [17], [5] se lako vidi da je U potpuno reducibilan modul za tenzorski produkt singlet verteks algebre $\mathcal{M}(p)$ (za $p = 4$) koja je prosta (cf. [2], [4]), te Heisenbergove verteks algebre generirane s $\delta(-1)$. Odavde lako slijedi da je U prosta verteks algebra i zato izomorfna $\mathcal{W}_k$. □

7.2 Konstrukcija familije $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$–modula izvan kategorije $\mathcal{O}$

Odaberimo sada novi Virasorov vektor

$$L = \omega - \frac{1}{4}\delta(-2).$$

Neka je $D = \mathbb{Z}(\gamma + \delta)$. Tada je $\mathcal{W}_k$ realizirana kao podalgebra od

$$\Pi(0) = M(1) \otimes \mathbb{C}[D].$$

Posebno, za sve $s \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{C}$ vrijedi da je

$$\mathcal{M}_s(r) := \Pi(0).e^{s\delta + r(\gamma+\delta)}$$

ireducibilni $\Pi(0)$–modul (cf. [14], [41]).

Vrijedi

$$\begin{aligned} L(n)e^{s\delta+r(\gamma+\delta)} &= 0 \quad (n \geq 1) \\ L(0)e^{s\delta+r(\gamma+\delta)} &= \frac{4r^2 - 6r - 4(r+s)^2 - 2(r+s)}{4} e^{s\delta+r(\gamma+\delta)} \\ &= \frac{-8r - 8rs - 4s^2 - 2s}{4} e^{s\delta+r(\gamma+\delta)} \end{aligned}$$

Ove formule povlače da je modul $\mathcal{M}_s(r)$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiran ako i samo ako je $s = -1$. Tada za svaki r vrijedi

$$L(0)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = -\frac{1}{2} e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}.$$

Na ovaj način smo konstruirali beskonačnu seriju $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiranih $\mathcal{W}_k$–modula s najmanjom konformnom težinom $-\frac{1}{2}$.

Propozicija 7.2.1. *Za svaki $r \in \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{-1}(r)$ je $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiran s najmanjom konformnom težinom $-\frac{1}{2}$:*

$$\mathcal{M}_{-1}(r) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}_{-1}(r)(m), \quad L(0)|\mathcal{M}_{-1}(r)(m) \equiv (-\frac{1}{2} + m)Id.$$

Dokaz. Prvo uočimo da je $e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}$ vektor $(J(0), L(0))$–težine

$$(x, y) = (r - 1, -1/2).$$

Vrijedi:

$$G^-(0)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = \tau_1^- e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = -\nu e^{-\delta+(r-1)(\gamma+\delta)} \quad (\nu = \frac{\sqrt{6}}{8}).$$

Iz relacije
$$e_0^{-\delta+r(\gamma+\delta)}\tau^+ = -\nu\binom{4r}{3}e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)}$$
dobivamo
$$G^+(0)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = \tau_0^+ e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = \nu\binom{4r}{3}e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)}.$$
Sada je
$$\begin{aligned}[G^+(0), G^-(0)]e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} &= \left(-\nu^2\binom{4r-4}{3} + \nu^2\binom{4r}{3}\right)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}\\ &= (3r^2 - 9r/2 + 15/8)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}\\ &= -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}\\ &= -g(x,y)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)}.\end{aligned}$$

□

Teorem 7.2.2. *Pretpostavimo da $4r \notin \mathbb{Z}$ za neki $r \in \mathbb{C}$. Tada vrijedi:*

(1) $\mathcal{M}_{-1}(r)(0)$ je ireducibilan modul za Smithovu algebru $R(g)$, gdje je
$$g(x,y) = -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y),$$
pri čemu je $y = -1/2$.

(2) $\mathcal{W}_k$–modul $\mathcal{M}_{-1}(r)$ je ireducibilan.

Dokaz. Iz gornjih formula slijedi da je komponenta najmanje težine modula $\mathcal{M}_{-1}(r)$ realizirana kao
$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$
i da je ona modul za Smithovu algebru $R(g)$, gdje je $g(x,y) = -(3x^2-(2k+3)x-(k+3)y$. Djelovanje Smithove algebre $R(g)$ je dano s
$$\begin{aligned}Ee^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} &= G^+(0)e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} = \nu\binom{4(r+m)}{3}e^{-\delta+(m+r+1)(\gamma+\delta)}\\ Fe^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} &= G^-(0)e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} = -\nu e^{-\delta+(m+r-1)(\gamma+\delta)}\\ Xe^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} &= J(0)e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} = (m+r-1)e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)}\\ Ye^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} &= L(0)e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)} = -\frac{1}{2}e^{-\delta+(m+r)(\gamma+\delta)}\end{aligned}$$
Odavde slijedi da je $M_{-1}(r)(0)$ ireducibilan $R(g)$–modul uz uvjet $\binom{4(r+m)}{3} \neq 0$ za sve $m \in \mathbb{Z}$, što je ispunjeno ako $4r \notin \mathbb{Z}$. Ovime je tvrdnja (1) dokazana.

Dokažimo (2). Budući da je $\mathcal{M}_{-1}(r)$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$–graduiran, iz relacije $[G^+]([\omega]+1/2) = 0$ u Zhuovoj algebri slijedi da eventualni podmodul mora imati najmanju konformnu težinu 0 ili $-1/2$. Kako je vrh $\mathcal{M}_{-1}(r)(0)$ ireducibilan modul za Zhuovu algebru težine $-1/2$, a nema vektora konformne težine 0, to je nemoguće. Ovime je dokaz teorema završen. □

7.3 Primjena na dokaz klasifikacije jakih $\mathcal{W}_{-9/4}$–modula

Konstrukciju $\mathcal{W}_k$–modula $\mathcal{M}_s(r)$ i rezultate iz Teorema 7.2.2 ćemo iskoristiti kako bi završili dokaz klasifikacije jakih $\mathcal{W}_{-9/4}$–modula iz Poglavlja 6. Preostalo je dokazati:

Lema 7.3.1. *$L(1/4,-1/2)$ je $\mathcal{W}_k$–modul, koji je realiziran kao potkvocijent od $\mathcal{W}_k$–modula $\mathcal{M}_{-1}(r)$ za $r = 1/4$.*

Dokaz. Stavimo $r = 1/4$. Vrijedi

$$\begin{aligned} G^+(0)e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} = \tau_0^+ e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} &= \nu \binom{4r}{3} e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} \\ &= \nu \binom{1}{3} e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$\Longrightarrow U := \langle e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} \rangle$ je pravi podmodul od $\mathcal{M}_{-1}(r)$.

Neka je $v_{x,y} = e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)}$. Budući da je

$$\begin{aligned} J(0)v_{x,y} &= J(0)e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} = re^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} = rv_{x,y}, \\ L(0)v_{x,y} &= L(0)e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} = -\frac{1}{2}e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} = -\frac{1}{2}v_{x,y}, \\ G^-(0)v_{x,y} &= G^-(0)e^{-\delta+(r+1)(\gamma+\delta)} = \nu e^{-\delta+r(\gamma+\delta)} + U \in U, \end{aligned}$$

slijedi da je $v_{x,y}$ vektor najveće težine

$$(x,y) = (r,-1/2) = (1/4,-1/2)$$

u kvocijentu $\mathcal{M}_{-1}(r)/U$. □

Poglavlje 8

Bershadsky-Polyakov algebra $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ za $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$

U ovom poglavlju ćemo proučavati ireducibilne module najveće težine za Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$, za k cijeli broj veći ili jednak -1. Kao i u prethodnim poglavljima, za proučavanje modula za $\mathcal{W}_k$ ćemo koristiti rezultate o konačnodimenzionalnim reprezentacijama Smithove algebre (cf. Poglavlje 5).

U članku T. Arakawe [9] su klasificirani konačnodimenzionalni ireducibilni moduli za Bershadsky-Polyakov algebru $\mathcal{W}_k$ u slučaju kada je k polucijeli broj, te je za takve k konstruirana familija singularnih vektora. U ovom poglavlju generaliziramo tu konstrukciju za k cijeli broj veći ili jednak -1 (cf. Lema 8.1.1). Također pokazujemo da su tada težine (x, y) ireducibilnih reprezentacija od $\mathcal{W}_k$ nužno nultočke polinoma $h_i(x, y) = 0$ (uvedenih u Poglavlju 5.3).

Međutim, dokazati da ti moduli zaista postoje, odnosno realizirati ih kao $\mathcal{W}_k$–module predstavlja znatno teži problem. Mi ćemo ga u ovoj disertaciji pokazati samo u slučajevima $k = -1, 0$. Ireducibilne $\mathcal{W}_k$–module za $k = -1$ ćemo realizirati pomoću rezultata iz članka D. Adamovića, V. G. Kaca, P. Möseneder-Frajrije, P. Papija i O. Peršea [6]. Za $k = 0$ ćemo konstruirati $\mathcal{W}_k$–module kao bozonsku varijantu fermionske realizacije algebre $\mathcal{W}_0(sl_3, f_\theta)$ iz članka [11].

8.1 Nužni uvjet za $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$–module, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$

Kako je Zhuova algebra $\overline{A}(\mathcal{W}^k)$ kvocijent Smithove algebre $R(g)$, za $g(x, y) = -(3x^2 - (2k+3)x - (k+3)y)$, pri proučavanju $\mathcal{W}_k$–modula služimo se svojstvima konačnodimenzionalnih reprezentacija Smithove algebre (cf. Poglavlje 5).

U Propoziciji 5.3.1 smo pokazali da za svaki $(x, y) \in \mathbb{C}$ postoji ireducibilna reprezentacija $L(x,y)$ od $\mathcal{W}^k$ generirana vektorom najveće težine $v_{x,y}$ takva da je

$$J(0)v_{x,y} = xv_{x,y}, \quad J(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$L(0)v_{x,y} = yv_{x,y}, \quad L(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n > 0,$$

$$G^-(n-1)v_{x,y} = G^+(n)v_{x,y} = 0 \text{ za } n \geq 1.$$

Označimo sa $\widetilde{\mathcal{W}_k}$ kvocijent od $\mathcal{W}^k$ po idealu generiranom vektorima

$$(G^+(-1))^n \mathbb{1},\ (G^-(-2))^n \mathbb{1},$$

za $n = k+2$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$. U ovom potpoglavlju ćemo pokazati da su vektori $(G^+(-1))^n \mathbb{1}$, $(G^-(-2))^n \mathbb{1}$ singularni, te da su kandidati za ireducibilne reprezentacije od $\widetilde{\mathcal{W}_k}$ sadržani u skupu

$$\mathcal{S}_k = \{L(x,y)\ |h_i(x,y) = 0,\ 1 \leq i \leq k+2\},$$

gdje je

$$\begin{aligned} h_i(x,y) &= \frac{1}{i}(g(x,y) + g(x+1,y) + \ldots + g(x+i-1,y)) \\ &= -i^2 + ki - 3xi + 3i - 3x^2 - k + 2kx + 6x + ky + 3y - 2. \end{aligned}$$

Prvo dokazujemo da su vektori $(G^+(-1))^n \mathbb{1}$, $(G^-(-2))^n \mathbb{1}$ singularni.

Lema 8.1.1. *Vektori*

$$(G^+(-1))^n \mathbb{1},\ (G^-(-2))^n \mathbb{1}.$$

su singularni u $\mathcal{W}^k$ za $n = k+2$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$.

Dokaz. Prvo dokazujemo da je $(G^-(-2)^{k+2} \mathbb{1}$ singularan vektor u $\mathcal{W}^k$. Tvrdimo da vrijedi

$$\begin{aligned} G^+(1)G^-(-2)^n \mathbb{1} = 3n(k-(n-2))J(-1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} + \\ n(n-1)(k-(n-2))G^-(-3)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Pretpostavimo da je

$$\begin{aligned} G^+(1)G^-(-2)^{n-1} \mathbb{1} = 3(n-1)(k-(n-3))J(-1)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1} + \\ (n-1)(n-2)(k-(n-3))G^-(-3)G^-(-2)^{n-3}\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} G^+(1)G^-(-2)^n \mathbb{1} &= ([G^+(1), G^-(-2)] + G^+(1)G^-(-2))G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \\ &= (3J^2(-1) + 3(k+1)J(-1) - (k+3)L(-1))G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} + \\ &+ G^-(-2)G^+(1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -6(n-1)J(-1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} + 3(k+1)J(-1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}- \\
&- (k+3)(n-1)G^-(-3)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1}+ \\
&+ G^-(-2)(3(n-1)(k-(n-3))J(-1)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1}+ \\
&+ (n-1)(n-2)(k-(n-3))G^-(-3)G^-(-2)^{n-3}\mathbb{1}) \\
&= (3kn - 3n^2 + 6n)J(-1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}+ \\
&+ (kn^2 - kn - n^3 + 3n^2 - 2n)G^-(-3)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1} \\
&= 3n(k-(n-2))J(-1)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}+ \\
&+ n(n-1)(k-(n-2))G^-(-3)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Zatim, tvrdimo da vrijedi

$$G^+(2)G^-(-2)^n\mathbb{1} = 2n(k-(n-2))(k-(n-2)+n/2)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Pretpostavimo da je

$$G^+(2)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} = 2(n-1)(k-(n-3))(k-(n-3)+(n-1)/2)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1}.$$

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
G^+(2)G^-(-2)^n\mathbb{1} &= ([G^+(2), G^-(-2)] + G^+(2)G^-(-2))G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= (3J^2(0) + (4k+3)J(0) - (k+3)L(0)+ \\
&(k+1)(2k+3))G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} + G^-(-2)G^+(2)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= 3(n-1)^2G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} - (n-1)(4k+3)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \\
&- (2n-2)(k+3)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} + (k+1)(2k+3)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}+ \\
&+ 2(n-1)(k-(n-3))(k-(n-3)+(n-1)/2)G^-(-2)^{n-2}\mathbb{1} \\
&= (2k^2n - 3kn^2 + 8kn + n^3 - 6n^2 + 8n)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= 2n(k-(n-2))(k-(n-2)+n/2)G^-(-2)^{n-1}\mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

Dokažimo da je $(G^+(-1))^{k+2}\mathbb{1}$ singularni vektor u $\mathcal{W}^k$. Tvrdimo da je

$$G^-(1)G^+(-1)^n\mathbb{1} = -n(k-(n-2))(2k-(n-4))G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1}.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Pretpostavimo da je

$$G^-(1)G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} = -(n-1)(k-(n-3))(2k-(n-5))G^+(-1)^{n-2}\mathbb{1}.$$

Vrijedi

$$
\begin{aligned}
G^-(1)G^+(-1)^n\mathbb{1} &= ([G^-(1), G^+(-1)] + G^+(-1)G^-(1))G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= (-3J^2(0) + (5k+6)J(0) + (k+3)L(0)-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (k+1)(2k+3))G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} + G^+(-1)G^-(1)G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= (-3(n-1)^2 + (n-1)(5k+6) + (n-1)(k+3) - (k+1)(2k+3) - \\
&- (n-1)(k-(n-3))(2k-(n-5)))G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= -(2k^2n - 3kn^2 + 8kn + n^3 - 6n^2 + 8n)G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1} \\
&= -n(k-(n-2))(2k-(n-4))G^+(-1)^{n-1}\mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

□

Prostor $L(x,y)_{\text{top}} = \{v \in L(x,y) : L(0)v = yv\}$ je razapet vektorima $\{(G^+(0))^i v_{x,y} :\ 0 \leq i\}$, te vrijedi relacija (cf. Lema 5.3.3)

$$G^-(0)G^+(0)^i v_{x,y} = i h_i(x,y) G^+(0)^{i-1} v_{x,y}.$$

Neka je $\dim L(x,y)_{\text{top}} = i$. Iz Leme 5.3.5 dobivamo

$$\psi(L(x,y)) \cong L(x+i-1-\frac{2k+3}{3}, y-x-i+1+\frac{2k+3}{3}),$$

gdje je $\psi(L(x,y))$ $\mathcal{W}^k$-modul definiran u poglavlju 5.3.

Vidimo da su kandidati za najveće težine (x,y) ireducibilnih reprezentacija najveće težine $L(x,y)$ dani rješenjima jednadžbe

$$h_i(x,y) = h_j(x+i-1-\frac{2k+3}{3}, y-x-i+1+\frac{2k+3}{3}). \tag{8.1.1}$$

U članku [9] je pokazano da jednadžba (8.1.1) ima jedinstveno racionalno rješenje kada je k polucijeli broj veći ili jednak od $-3/2$. Preciznije, vrijedi:

Lema 8.1.2 ([9], Proposition 2.4.). *Neka je* $\dim L(x,y)_{top} = i$, $\dim \psi(L(x,y))_{top} = j$ *i neka je* $k = p/2 - 3$, p *neparan cijeli broj veći ili jednak* 3. *Tada jednadžba (8.1.1) ima jedinstveno rješenje* $(x_{i,j}, y_{i,j})$, *gdje je*

$$x_{i,j} = \frac{1}{3}(-2i - j + 2k + 6),$$

$$y_{i,j} = \frac{i^2 + ji - ki - 3i + j^2 - 6j - 2jk + 3k + 6}{3(k+3)},$$

za svaki $1 \leq i \leq k+2$, $1 \leq j \leq k+3-i$.

Međutim, kada je k cijeli broj veći ili jednak -1, rješenje jednadžbe (8.1.1) može izgledati drugačije. Sljedeća lema pokazuje da se za $i + j = k + 3$ krivulje

$$h_i(x,y) = 0$$

i

$$h_j(x+i-1-\frac{2k+3}{3}, y-x-i+1+\frac{2k+3}{3}) = 0$$

podudaraju.

Dakle, primjenom automorfizma ψ nećemo dobiti nova rješenja, no zbog potpunosti ostavljamo ovaj rezultat.

Lema 8.1.3. *Za $i + j = k + 3$ vrijedi jednakost:*

$$h_i(x, y) = h_j(x + i - 1 - \frac{2k+3}{3}, y - x - i + 1 + \frac{2k+3}{3}).$$

Dokaz. Označimo

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + i - 1 - \frac{2k+3}{3},\\ \hat{y} &= y - x - i + 1 + \frac{2k+3}{3}.\end{aligned}$$

Iz definicije polinoma $h_i(x, y)$ dobivamo:

$$h_i(x, y) = (-3x^2 - 3ix + 2kx + 6x) + (ky + 3y) + (-i^2 + ki + 3i - k - 2),$$

$$\begin{aligned}h_{k+3-i}(\hat{x}, \hat{y}) &= -(k+3-i)^2 + k(k+3-i) - 3(x + i - 1 - \frac{2k+3}{3})(k+3-i)\\ &+ 3(k+3-i) - 3(x + i - 1 - \frac{2k+3}{3})^2 - k\\ &+ 2k(x + i - 1 - \frac{2k+3}{3}) + 6(x + i - 1 - \frac{2k+3}{3})\\ &+ k(y - x - i + 1 + \frac{2k+3}{3}) + 3(y - x - i + 1 + \frac{2k+3}{3})\\ &= (-3x^2 - 9x + 12x + 6x - 3x + 3xi - 3kx - 6xi + 4kx + 2kx - kx) +\\ &+ (ky + 3y) + (-i^2 + 2ki + +6i - k^2 - 6k - 9 + k^2 + 3k - ki + 3i^2 -\\ &- 5ki - 15i + 2k^2 + 12k + 18 + 3k + 9 - 3i - 3i^2 + 4ki +\\ &+ 12i - \frac{4}{3}k^2 - 8k - 12 - k + 2ki - 2k - \frac{4}{3}k^2 + 6i - 6 - 4k -\\ &- 6 - ki + k + \frac{2}{3}k^2 + k - 3i + 3 + 2k + 1)\\ &= (-3x^2 - 3ix + 2kx + 6x) + (ky + 3y) + (-i^2 + ki + 3i - k - 2).\end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $h_i(x, y) = h_{k+3-i}(\hat{x}, \hat{y})$.

$\square$

Sada dolazimo do glavnog rezultata ovog potpoglavlja, koji nam daje kandidate za ireducibilne $\mathcal{W}_k$–module najveće težine.

Propozicija 8.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$. Skup klasa ekvivalencije ireducibilnih $\widetilde{\mathcal{W}_k}$-modula je sadržan u skupu*

$$\mathcal{S}_k = \{L(x, y) \ | h_i(x, y) = 0,\ 1 \leq i \leq k + 2\}.$$

Dokaz. Neka je $L(x,y)$ ireducibilni $\widetilde{\mathcal{W}_k}$-modul s vektorom najveće težine $v_{x,y}$. Tada je $L(x,y)$ ireducibilni kvocijent Vermaovog $\mathcal{W}^k$–modula $M(x,y)$. Budući da je

$$(G^+(-1))^{k+2}\mathbb{1} = 0$$

u $\widetilde{\mathcal{W}_k}$, slijedi da je $G^+(z)^{k+2}v_{x,y} = 0$. Zaključujemo da na $L(x,y)_{top}$ vrijedi relacija

$$(G^+(0))^{k+2}v_{x,y} = 0.$$

To povlači da u Vermaovom modulu $M(x,y)$, vektor $G^+(0)^{k+2}v_{x,y}$ leži u maksimalnom podmodulu.

Zaključujemo da je vektor $G^+(0)^i v_{x,y}$ singularan u Vermaovom modulu za neki $1 \leq i \leq k+2$, te vrijedi

$$G^-(0)G^+(0)^{i-1}v_{x,y} = 0$$

za neki $1 \leq i \leq k+2$.

Slijedi da je $L(x,y)_{top}$ i-dimenzionalan za neki $1 \leq i \leq k+2$, te iz Propozicije 5.3.4 dobivamo da vrijedi $h_i(x,y) = 0$, za neki $1 \leq i \leq k+2$.

Ovime smo pokazali da je skup klasa ekvivalencije ireducibilnih $\widetilde{\mathcal{W}_k}$-modula sadržan u skupu

$$\mathcal{S}_k = \{L(x,y) \mid h_i(x,y) = 0,\ i = 1, \dots, k+2\}.$$

□

U sljedećem primjeru vidimo da za $k = 0, 1, 2$, rješavajući jednadžbu (8.1.1) za $i + j = k+3$ dobivamo krivulje, dok za $i + j \neq k+3$ dobivamo jedinstvena racionalna rješenja.

Primjer 8.1.5. *(1) Slučaj $k = 0$*

$$h_1(x,y) = -3x^2 + 3x + 3y$$

$$h_2(x,y) = -3x^2 + 3y$$

- $i = 1,\ j = 2 \Longrightarrow x^2 - x - y = 0,$
- $i = 2,\ j = 1 \Longrightarrow x^2 - y = 0.$

(2) Slučaj $k = 1$

$$h_1(x,y) = -3x^2 + 5x + 4y$$

$$h_2(x,y) = -3x^2 + 2x + 4y + 1$$

$$h_3(x,y) = -3x^2 - x + 4y$$

- $i = 1,\ j = 2 \Longrightarrow x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{1}{3}$,
- $i = 1,\ j = 3 \Longrightarrow -3x^2 + 5x + 4y = 0$,
- $i = 2,\ j = 1 \Longrightarrow x = 1,\ y = 0$,
- $i = 2,\ j = 2 \Longrightarrow -3x^2 + 2x + 4y + 1 = 0$,
- $i = 3,\ j = 1 \Longrightarrow -3x^2 - x + 4y = 0$.

(3) Slučaj $k = 2$

$$h_1(x, y) = -3x^2 + 7x + 5y$$

$$h_2(x, y) = -3x^2 + 4x + 5y + 2$$

$$h_3(x, y) = -3x^2 + x + 5y + 2$$

$$h_4(x, y) = -3x^2 - 2x + 5y$$

- $i = 1,\ j = 2 \Longrightarrow x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{11}{20}$,
- $i = 1,\ j = 3 \Longrightarrow x = \frac{5}{3},\ y = -\frac{2}{3}$,
- $i = 1,\ j = 4 \Longrightarrow -3x^2 + 7x + 5y = 0$,
- $i = 2,\ j = 1 \Longrightarrow x = \frac{5}{3},\ y = -\frac{1}{15}$,
- $i = 2,\ j = 2 \Longrightarrow x = \frac{2}{3},\ y = -\frac{4}{15}$,
- $i = 2,\ j = 3 \Longrightarrow -3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$,
- $i = 3,\ j = 1 \Longrightarrow x = 1,\ y = 0$,
- $i = 3,\ j = 2 \Longrightarrow -3x^2 + x + 5y + 2 = 0$,
- $i = 4,\ j = 1 \Longrightarrow -3x^2 - 2x + 5y = 0$.

8.2 Realizacija ireducibilnih $\mathcal{W}_k$–modula za $k = -1$

U ovom potpoglavlju ćemo pokazati da su za $k = -1$, ireducibilni $\mathcal{W}_k$–moduli parametrizirani nultočkama polinoma $h_1(x, y)$. U članku D. Adamovića, V. G. Kaca, P. Möseneder-Frajrije, P. Papija i O. Peršea [6] dokazano je da je Bershadsky-Polyakov algebra $\mathcal{W}_k(sl_3.f_\theta)$ za $k = -1$ izomorfna Heisenbergovoj verteks algebri $M(1)$, odnosno

$$\mathcal{W}_{-1} \cong M(1).$$

Preciznije govoreći, za $k = -1$ generatori $G^\pm$ od $\mathcal{W}^k$ su elementi maksimalnog ideala, pa zbog toga vrijedi $G^\pm = 0$ u prostom kvocijentu $\mathcal{W}_k$.

Također vrijedi da za $k = -1$ imamo *konformno ulaganje* (ulaganje koje čuva Virasorov (konformni) vektor) Heisenbergove verteks algebre u $\mathcal{W}_k$. Zato je (originalni) Virasorov vektor

$$\omega = \frac{3}{2} : J^2 := \frac{3}{2} J(-1)^2 \mathbb{1},$$

a novi Virasorov vektor je

$$\overline{\omega} = \omega + \frac{1}{2} DJ = \frac{3}{2} J(-1)^2 \mathbb{1} + \frac{1}{2} J(-2)\mathbb{1}.$$

Poznato je da su svi ireducibilni moduli za Heisenbergovu verteks-algebru $M(1)$ oblika $M(1, x)$ za neki $x \in \mathbb{C}$, pri čemo $J(0)$ djeluje na $M(1, x)$ kao $x\mathrm{Id}$. Tada $L(0)$ djeluje na vektoru najveće težine od $M(1, x)$ kao

$$y = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} x.$$

Ovim smo pokazali da se najveće težine ireducibilnih $\mathcal{W}_{-1} = M(1)$–modula podudaraju s nultočkama polinoma $h_1(x, y) = -3x^2 + (2k + 3)x + (k + 3)y$ za $k = -1$.

Teorem 8.2.1. *Skup*

$$\mathcal{S}_{-1} = \{L(x, y) \mid h_1(x, y) = 0\}$$

daje sve ireducibilne $\mathcal{W}_{-1}$–module.

8.3 Realizacija ireducibilnih $\mathcal{W}_k$–modula za $k = 0$

U ovom potpoglavlju ćemo klasificirati ireducibilne $\mathcal{W}_0$–module najveće težine, odnosno konstruirat ćemo ireducibilne reprezentacije iz Propozicije 8.1.4 u slučaju $k = 0$.

Važan korak u konstrukciji je fermionska realizacija određenih prostih $\mathcal{W}$–algebri $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$, na nivou $k = 0$, iz članka T. Arakawe, T. Creutziga, K. Kawasetsua i A. Linshawa [11]. Mi ćemo napisati bozonsku varijantu te realizacije za $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_0(sl_3, f_\theta)$, iz koje se može dobiti potrebna konstrukcija modula najveće težine za $\mathcal{W}_0$.

Fermionska realizacija

Simplektički fermioni $\mathcal{A}(1)$ su definirani u Poglavlju 2.3.3 kao verteks algebra generirana neparnim poljima b i c. Verteks algebra $\mathcal{A}(1)$ ima sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c = -2$:

$$\omega_{\mathcal{A}(1)} =: bc : .$$

Neka je F Cliffordova verteks algebra generirana neparnim poljima Ψ^+ and Ψ^- (cf. Poglavlje 2.3.4). Neka je $M(1)$ Heisenbergova verteks podalgebra od F generirana s

α :=: $\Psi^+\Psi^-$:. Verteks algebre $M(1)$ i F imaju sljedeći Virasorov vektor centralnog naboja $c = 1$:

$$\omega_F = \frac{1}{2} : \alpha\alpha : .$$

Teorem 8.3.1. *[11] Postoji netrivijalni homomorfizam verteks algebri*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{W}_0 = W_0(sl(3), f_\theta) &\rightarrow F \otimes \mathcal{A}(1) \\ J &\mapsto \ : \Psi^+\Psi^- : \\ T &\mapsto \omega_F + \omega_{\mathcal{A}(1)} \\ G^+ &\mapsto \sqrt{3} : \Psi^+ b : \\ G^- &\mapsto \sqrt{3} : \Psi^- c : . \end{aligned}$$

Bozonska realizacija

Iz Propozicije 8.1.4 slijedi da svaka ireducibilna reprezentacija najveće težine od $\mathcal{W}_0$ mora nužno imati težinu $(x, x^2 + (i-1)x)$ za $i = 0, 1$. Preostaje dokazati da takve ireducibilne reprezentacije zaista postoje. U Teoremu 8.3.2 ćemo konstruirati ireducibilne reprezentacije s točno tim težinama, što će nam dati klasifikaciju za slučaj $k = 0$.

Neka je $V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}[L]$ verteks algebra pridružena rešetki $L = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$ takva da je

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Promatramo podalgebru $V[D] = M(1) \otimes \mathbb{C}[D]$ od V_L, gdje je $D = \mathbb{Z}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Za svaki $x \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1$,

$$V[D - i\alpha_1 - x(\alpha_1 - \alpha_2)] = V[D].e^{-i\alpha_1 - x(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

je ireducibilni $V[D]$–modul.

Teorem 8.3.2. *[8]*

(1) Prosta verteks algebra $\mathcal{W}_0$ je realizirana kao verteks podalgebra od $V[D]$ generirana vektorima

$$\begin{aligned} J &\mapsto \alpha_2(-1) \\ L &\mapsto \frac{1}{2}\big(\alpha_1(-1)^2 - \alpha_1(-2) + \alpha_2(-1)^2 + \alpha_2(-2)\big) \\ G^+ &\mapsto \sqrt{3}e^{\alpha_1+\alpha_2} \\ G^- &\mapsto -\sqrt{3}\alpha_1(-1)e^{-\alpha_1-\alpha_2}. \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{W}_0$ ima dvije familije ireducibilnih modula najveće težine $U_i(x)$, $i = 0, 1$, $x \in \mathbb{C}$ realizirane kao

$$U_i(x) = W_0(sl(3), \theta).e^{-i\alpha_1 - x(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

Najveća težina od $U_i(x)$ s obzirom na (J_0, L_0) je $(x, x^2 + (i-1)x)$.

Dokaz. Uočimo prvo da se Cliffordova verteks algebra F može uložiti u verteks algebru V_L tako da vrijedi

$$\Psi^+ = e^{\alpha_2},\ \Psi^- = e^{-\alpha_2},\ \omega_F = \frac{1}{2}\alpha_2(-1)^2.$$

Simplektički fermioni $\mathcal{A}(1)$ su također podalgebra of V_L takva da je

$$b = e^{\alpha_1},\ c = -\alpha_1(-1)e^{-\alpha_1},\ \omega_{\mathcal{A}(1)} = \frac{1}{2}(\alpha_1(-1)^2 - \alpha_1(-2)).$$

Sada fermionska realizacija iz Teorema 8.3.1 daje eksplicitnu bozonsku realizaciju.

Označimo

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \gamma, \quad -\alpha_1 - \alpha_2 = \delta.$$

Tada je $\langle \gamma, \delta \rangle = -2$ i vrijedi (cf. Poglavlje 2.3.2)

$$\begin{aligned}
e^{\gamma}_1 e^{\delta} &= e^{\gamma+\delta},\\
e^{\gamma}_0 e^{\delta} &= \gamma(-1)e^{\gamma+\delta},\\
e^{\gamma}_{-1} e^{\delta} &= \frac{1}{2}(\gamma(-1)^2 + \gamma(-2))e^{\gamma+\delta},\\
e^{\gamma}_t e^{\delta} &= 0 \ \text{ za } t \geq 2.
\end{aligned}$$

Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned}
G^+_2 G^- &= -3e^{\alpha_1+\alpha_2}_2 \alpha_1(-1)e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= -3\alpha_1(-1)e^{\alpha_1+\alpha_2}_2 e^{-\alpha_1-\alpha_2} + 3e^{\alpha_1+\alpha_2}_1 e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= 3\mathbb{1} = (k+1)(2k+3)\mathbb{1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^+_1 G^- &= -3e^{\alpha_1+\alpha_2}_1 \alpha_1(-1)e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= -3\alpha_1(-1)e^{\alpha_1+\alpha_2}_1 e^{-\alpha_1-\alpha_2} + 3e^{\alpha_1+\alpha_2}_0 e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= -3\alpha_1(-1) + 3(\alpha_1+\alpha_2)(-1)\\
&= 3\alpha_2(-1) = 3(k+1)J,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^+_0 G^- &= -3e^{\alpha_1+\alpha_2}_0 \alpha_1(-1)e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= -3\alpha_1(-1)e^{\alpha_1+\alpha_2}_0 e^{-\alpha_1-\alpha_2} + 3e^{\alpha_1+\alpha_2}_{-1} e^{-\alpha_1-\alpha_2}\\
&= -3\alpha_1(-1)(\alpha_1+\alpha_2)(-1) + \frac{3}{2}\big((\alpha_1+\alpha_2)^2(-1) + (\alpha_1+\alpha_2)(-2)\big)\\
&= -\frac{3}{2}\alpha_1^2(-1) + \frac{3}{2}\alpha_2^2(-1) + \frac{3}{2}\alpha_1(-2) + \frac{3}{2}\alpha_2(-2)\\
&= 3J_{-1}^2 + 3J_{-2} - 3\overline{L}_{-2} = 3J_{-1}^2 + (2k+3)J_{-2} - (k+3)\overline{L}_{-2}.
\end{aligned}$$

Ovim je tvrdnja (1) dokazana.

Tvrdnja (2) slijedi iz činjenice da su vektori $e^{-i\alpha_1 - x(\alpha_1-\alpha_2)}$ upravo vektori najveće težine za $\mathcal{W}_0$ i da je najveća težina baš $(x, x^2 + (i-1)x)$.

Dakle, $\mathcal{W}_0$ ima dvije familije modula najveće težine $(x, x^2+(i-1)x)$, $i = 0, 1$. Posebno, i njihovi ireducibilni kvocijenti su moduli za $\mathcal{W}_0$. □

Dodatak A

Dokaz Propozicije 4.1.1

U ovom poglavlju dokazujemo Lemu 4.1.2 i Lemu 4.1.3 koje su potrebne za konstrukciju ulaganja Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k$ u Weylovu verteks algebru za $k = -5/3$ (cf. Propozicija 4.1.1 u Poglavlju 4).

Lema 4.1.2. *Neka je* $\omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1}$*. Tada je* ω *Virasorov vektor centralnog naboja* $c = -1$*.*

Dokaz. Stavimo $L(m) = \omega_{m+1}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\left[a^+_n, L(m)\right] &= \left[a^+_n, \omega_{m+1}\right] \\
&= (a^+_0\omega)_{m+n+1} + n(a^+_1\omega)_{m+n} = -\frac{1}{2}(Da^+)_{m+n+1} + \frac{n}{2}a^+_{n+m} \\
&= \frac{n+m+1}{2}a^+_{n+m} + \frac{n}{2}a^+_{n+m} \\
&= (\frac{1}{2}(m+1)+n)a^+_{n+m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[a^-_n, L(m)\right] &= \left[a^-_n, \omega_{m+1}\right] \\
&= (a^-_0\omega)_{m+n+1} + n(a^-_1\omega)_{m+n} = -\frac{1}{2}(Da^-)_{m+n+1} + \frac{n}{2}a^-_{n+m} \\
&= \frac{n+m+1}{2}a^-_{n+m} + \frac{n}{2}a^-_{n+m} \\
&= (\frac{1}{2}(m+1)+n)a^-_{n+m}.
\end{aligned}$$

Pokažimo sada relacije za ω:

$$\begin{aligned}
\omega_0\omega &= \frac{1}{2}L(-1)\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{2}(2a^-_{-3}a^+_{-1} + a^-_{-2}a^+_{-2} - 2a^+_{-3}a^-_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1})\mathbb{1} \\
&= D\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1\omega &= \frac{1}{2}L(0)\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{2}((2-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})a^-_{-2}a^+_{-1} - (2-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})a^+_{-2}a^-_{-1})\mathbb{1} \qquad (*) \\
&= (a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1})\mathbb{1} = 2\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2\omega &= \frac{1}{2}L(1)\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{2}(a^-_{-1}a^+_{-1} + 0 - a^+_{-1}a^-_{-1} + 0)\mathbb{1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3\omega &= \frac{1}{2}L(2)\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}a^-_0a^+_{-1} - \frac{1}{2}a^-_{-2}a^+_1 - \frac{1}{2}a^+_0a^-_{-1} + \frac{1}{2}a^+_{-2}a^-_1)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})\mathbb{1} = -\frac{1}{2}\mathbb{1} = \frac{c}{2}\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Jednakost (*) vrijedi zbog

$$\begin{aligned}
L(0)a^+_{-n_1}a^-_{-n_2} &= \left[L(0), a^+_{-n_1}\right]a^-_{-n_2} + a^+_{-n_1}\left[L(0), a^-_{-n_2}\right] \\
&= -(\frac{1}{2} - n_1)a^+_{-n_1}a^-_{-n_2} - a^+_{-n_1}(\frac{1}{2} - n_2)a^-_{-n_2} \\
&= (n_1 - \frac{1}{2} + n_2 - \frac{1}{2})a^+_{-n_1}a^-_{-n_2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.3. *Neka je*

$$J = -\frac{1}{3}a^+_{-1}a^-_{-1}\mathbb{1},\ \omega = \frac{1}{2}\left(a^-_{-2}a^+_{-1} - a^+_{-2}a^-_{-1}\right)\mathbb{1},$$

$$G^+ = \frac{1}{3}\left(a^+_{-1}\right)^3\mathbb{1},\ G^- = \frac{1}{9}\left(a^-_{-1}\right)^3\mathbb{1}.$$

Tada vrijede sljedeće relacije:

$$\begin{aligned}
G^+_2G^- &= \frac{2}{9}\mathbb{1} \\
G^+_1G^- &= -2J \\
G^+_0G^- &= 3J^2_{-1} - DJ - \frac{4}{3}\omega.
\end{aligned}$$

Dokaz. Vrijedi

$$Y\left(\frac{1}{3}\left(a^+_{-1}\right)^3, z\right) = \left(\frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^+_n z^{-n-1}\right)^3 = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} G^+_n z^{-n-1}.$$

Iz gornje formule i formule za produkt redova

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a^+_i z^{-i-1}\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a^+_j z^{-j-1}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k-1}$$

dobivamo da su koeficijenti c_k dani sa

$$c_{k+1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^+ a_{k-l}^+$$

(jer je $(-l-1)+(-k+l-1) = -(k+1)-1$). Slijedi da je

$$G_{n+1}^+ = \frac{1}{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m a_{n-m}^+ = \frac{1}{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^+ a_{m-1-l}^+\right) a_{n-m}^+.$$

Sada možemo izračunati produkte $G_2^+G^-$, $G_1^+G^-$ i $G_0^+G^-$.

- $G_2^+G^-$

  Iz formule
  $$G_2^+ = \frac{1}{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^+ a_{m-1-l}^+\right) a_{1-m}^+$$
  slijedi da jedine ne-nul elemente u produktu $G_2^+G^-$ dobivamo ako vrijedi $m \geq 1$, $m \leq 1+l \leq 1$, odnosno $m=1$ i $l=1$.

  Kako vrijedi $\left(a_0^+\right)^3\left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} = 6\mathbb{1}$, slijedi da je
  $$G_2^+G^- = \frac{1}{27}\left(a_0^+\right)^3\left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} = \frac{6}{27}\mathbb{1} = \frac{2}{9}\mathbb{1}.$$

- $G_1^+G^-$

  Iz formule
  $$G_1^+ = \frac{1}{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^+ a_{m-1-l}^+\right) a_{-m}^+$$
  slijedi da jedine ne-nul elemente u produktu $G_1^+G^-$ dobivamo ako vrijedi $m \geq 0$, $m \leq 1+l \leq 1 \Rightarrow m=1$ i $l=0$, $m=0$ i $l=0$, $m=0$ i $l=-1$.

  Kako vrijedi $\left(a_0^+\right)^2\left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} = 6a_{-1}^-\mathbb{1}$, slijedi da je
  $$\begin{aligned} G_1^+G^- &= \left(a_0^+a_{-1}^+a_0^+ + a_{-1}^+a_0^+a_0^+ + a_0^+a_0^+a_{-1}^+\right)\frac{1}{27}\left(a_{-1}^-\right)^3\mathbb{1} \\ &= \frac{3}{27}a_{-1}^+\left(a_0^+\right)^2\left(a_{-1}^-\right)^3\mathbb{1} \\ &= \frac{6}{9}a_{-1}^+a_{-1}^-\mathbb{1} = -2J. \end{aligned}$$

- $G_0^+G^-$

  Iz formule
  $$G_0^+ = \frac{1}{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^+ a_{m-1-l}^+\right) a_{-1-m}^+$$
  slijedi da jedine ne-nul elemente u produktu $G_0^+G^-$ dobivamo ako vrijedi $m \geq -1$, $m \leq 1+l \leq 1 \Rightarrow m=1$ i $l=0$, $m=0$ i $l=0$, $m=0$ i $l=-1$, $m=-1$ i $l=0$, $m=-1$ i $l=-1$, $m=-1$ i $l=-2$.

Kako vrijedi $a_0^+ \left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} = 3\left(a_{-1}^-\right)^2 \mathbb{1}$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
G_0^+ G^- &= (a_0^+ a_{-2}^+ a_0^+ + a_{-1}^+ a_{-1}^+ a_0^+ + a_{-2}^+ a_0^+ a_0^+ + a_0^+ a_{-1}^+ a_{-1}^+ + a_{-1}^+ a_0^+ a_{-1}^+ + \\
&+ a_0^+ a_0^+ a_{-2}^+) \frac{1}{27} (a_{-1}^-)^3 \mathbb{1} \\
&= \frac{3}{27} a_{-2}^+ \left(a_0^+\right)^2 \left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} + \frac{3}{27} \left(a_{-1}^+\right)^2 a_0^+ \left(a_{-1}^-\right)^3 \mathbb{1} \\
&= \frac{6}{9} a_{-2}^+ a_{-1}^- \mathbb{1} + \frac{3}{9} \left(a_{-1}^+\right)^2 \left(a_{-1}^-\right)^2 \mathbb{1} \\
&= \frac{2}{3} a_{-2}^+ a_{-1}^- \mathbb{1} + \frac{1}{3} \left(a_{-1}^+\right)^2 \left(a_{-1}^-\right)^2 \mathbb{1} \\
&= 3J_{-1}^2 - DJ - \frac{4}{3}\omega.
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi zbog

$$\begin{aligned}
3J_{-1}^2 - DJ - \frac{4}{3}\omega &= \left(\frac{1}{3} \left(a_{-1}^+\right)^2 \left(a_{-1}^-\right)^2 \mathbb{1} - \frac{1}{3} a_{-2}^+ a_{-1}^- \mathbb{1} + \frac{1}{3} a_{-2}^- a_{-1}^+ \mathbb{1}\right) + \\
&+ \frac{1}{3} \left(a_{-2}^+ a_{-1}^- + a_{-2}^- a_{-1}^+\right) \mathbb{1} - \frac{2}{3} \left(a_{-2}^- a_{-1}^+ - a_{-2}^+ a_{-1}^-\right) \mathbb{1} \\
&= \frac{2}{3} a_{-2}^+ a_{-1}^- \mathbb{1} + \frac{1}{3} \left(a_{-1}^+\right)^2 \left(a_{-1}^-\right)^2 \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

□

Dodatak B

Računi za singularne vektore W_3 i W_4

U ovom poglavlju dokazujemo formule za singularne vektore W_3 i W_4, te njihove projekcije u Zhuovu algebru. Singularni vektori W_3 i W_4 su nam potrebni za klasifikaciju ireducibilnih jakih modula za $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ u slučajevima $k = -9/4$ i $k = -5/3$ (cf. Propozicija 6.1.4 i Propozicija 6.2.5 u Poglavlju 6). Također, singularni vektor W_4 je ključan za konstrukciju ulaganja Bershadsky-Polyakov algebre $\mathcal{W}_k(sl_3, f_\theta)$ u Weylovu verteks algebru (cf. Poglavlje 4.)

B.1 Računi za singularni vektor W_3

Lema B.1.1. *Singularni vektor za Heisenberg-Virasoro dio algebre $\mathcal{W}^k(= \mathcal{W}^k(sl_3, f_\theta))$ na nivou 3 je dan formulom*

$$W_3 = \frac{k+3}{2} L_{-3}\mathbb{1} - \frac{9(k+2)}{(2k+3)^2} J_{-1}^3\mathbb{1} - 3J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - \frac{2(k^2+4k+6)}{(2k+3)} J_{-3}\mathbb{1} + \\ + \frac{3(k+3)}{2k+3} L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + G_{-1}^{+}G_{-1}^{-}\mathbb{1}.$$

U slučajevima $k = -\frac{9}{4}$ i $k = -\frac{1}{2}$, W_3 je singularni vektor za $\mathcal{W}^k$.

Dokaz. Neka je

$$W_3 = A_1 L_{-3}\mathbb{1} + A_2 J_{-1}^3\mathbb{1} + A_3 J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + A_4 J_{-3}\mathbb{1} + A_5 L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + A_6 G_{-1}^{+}G_{-1}^{-}\mathbb{1}$$

singularni vektor za $\mathcal{W}^k$ težine 0 na nivou 3, zapisan u PBW bazi.

Iz definicije singularnog vektora slijedi

- $L_1 W_3 = 0$

(1) $L_1 L_{-3}\mathbb{1} = 4L_{-2}\mathbb{1}$

(2) $L_1 J_{-1}^3 \mathbb{1} = 0$

(3) $L_1 J_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = 2J_{-1}^2 \mathbb{1}$

(4) $L_1 J_{-3} \mathbb{1} = 3J_{-2} \mathbb{1}$

(5) $L_1 L_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = 3J_{-2} \mathbb{1}$

(6) $L_1 G_{-1}^+ G_{-1}^- \mathbb{1} = 6J_{-1}^2 \mathbb{1} + 3(k+1)J_{-2} \mathbb{1} - 2(k+3)L_{-2} \mathbb{1}$

- $L_2 W_3 = 0$

(1) $L_2 L_{-3} \mathbb{1} = 0$

(2) $L_2 J_{-1}^3 \mathbb{1} = (2k+3)J_{-1} \mathbb{1}$

(3) $L_2 J_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = 0$

(4) $L_2 J_{-3} \mathbb{1} = 3J_{-1} \mathbb{1}$

(5) $L_2 L_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = (4 + \frac{c}{2})J_{-1} \mathbb{1}$

(6) $L_2 G_{-1}^+ G_{-1}^- \mathbb{1} = \frac{15}{2}(k+1)J_{-1} \mathbb{1}$

- $J_1 W_3 = 0$

(1) $J_1 L_{-3} \mathbb{1} = J_{-2} \mathbb{1}$

(2) $J_1 J_{-1}^3 \mathbb{1} = (2k+3)J_{-1}^2 \mathbb{1}$

(3) $J_1 J_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = \frac{1}{3}(2k+3)J_{-2} \mathbb{1}$

(4) $J_1 J_{-3} \mathbb{1} = 0$

(5) $J_1 L_{-2} J_{-1} \mathbb{1} = J_{-1}^2 \mathbb{1} + \frac{1}{3}(2k+3))L_{-2} \mathbb{1}$

(6) $J_1 G_{-1}^+ G_{-1}^- \mathbb{1} = 3J_{-1}^2 \mathbb{1} + \frac{3}{2}(k+1)J_{-2} \mathbb{1} - (k+3)L_{-2} \mathbb{1}$

Pomoću ovih relacija dobivamo sustav jednadžbi

- $L_1 W_3 = 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&4A_1 - 2(k+3)A_6 = 0 \\
&3A_4 + 3A_5 + 3(k+1)A_6 = 0 \\
&2A_3 + 6A_6 = 0
\end{aligned}
$$

- $L_2 W_3 = 0 \Longrightarrow$

  $(2k+3)A_2 + 3A_4 + (4+\frac{c}{2})A_5 + \frac{15}{2}(k+1)A_6 = 0$

- $J_1 W_3 = 0 \Longrightarrow$

  $\frac{1}{3}(2k+3)A_5 - (k+3)A_6 = 0$
  $A_1 + \frac{3}{2}(k+1)A_6 + \frac{1}{3}(2k+3)A_3 = 0$
  $A_5 + (2k+3)A_2 + 3A_6 = 0$

Rješavanjem sustava dobivamo da je

$$W_3 = \frac{k+3}{2} L_{-3}\mathbb{1} - \frac{9(k+2)}{(2k+3)^2} J^3_{-1}\mathbb{1} - 3J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - \frac{2(k^2+4k+6)}{(2k+3)} J_{-3}\mathbb{1} + \\ + \frac{3(k+3)}{2k+3} L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1}.$$

Iz definicije singularnog vektora slijedi da je $G^+_1 W_3 = 0$, te dobivamo relacije

(1) $G^+_1 L_{-3}\mathbb{1} = 2G^+_{-2}\mathbb{1}$

(2) $G^+_1 J^3_{-1}\mathbb{1} = -G^+_{-2}\mathbb{1} + 3J_{-1}G^+_{-1}\mathbb{1}$

(3) $G^+_1 J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} = G^+_{-2}\mathbb{1} - J_{-1}G^+_{-1}\mathbb{1}$

(4) $G^+_1 J_{-3}\mathbb{1} = -G^+_{-2}\mathbb{1}$

(5) $G^+_1 L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} = -\frac{3}{2}G^+_{-2}\mathbb{1} + \frac{3}{2}J_{-1}G^+_{-1}\mathbb{1}$

(6) $G^+_1 G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1} = -3(k+1)G^+_{-2}\mathbb{1} + 3(k+1)J_{-1}G^+_{-1}\mathbb{1}.$

Vrijede sljedeće jednadžbe:
$2A_1 - A_2 + A_3 - A_4 - \frac{3}{2}A_5 - 3(k+1)A_6 = 0,$
$3A_2 - A_3 - A_4 + \frac{3}{2}A_5 + 3(k+1)A_6 = 0,$
odnosno

$$2\frac{k+3}{2} + \frac{9(k+2)}{(2k+3)^2} - 3 + \frac{2(k^2+4k+6)}{(2k+3)} - \frac{9(k+3)}{2(2k+3)} - 3(k+1) = 0,$$

$$-3\frac{9(k+2)}{(2k+3)^2} + 3 + \frac{9(k+3)}{2(2k+3)} + 3(k+1) = 0.$$

Rješenja ovog sustava su $k = -\frac{9}{4}$, $k = -\frac{1}{2}$ i $k = -3$. Budući da je $c = -\frac{(2k+3)(3k+1)}{k+3}$, ostaju nam vrijednosti $k = -\frac{9}{4}$ i $k = -\frac{1}{2}$.

□

Iz gornjih računa slijedi:

Lema B.1.2. *Singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 3 za $k = -9/4$ je dan sa*

$$W_3 = \frac{3}{8}L_{-3}\mathbb{1} + J_{-1}^3\mathbb{1} - 3J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + \frac{11}{4}J_{-3}\mathbb{1} - \frac{3}{2}L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}.$$

B.2 Računi za singularni vektor W_4 i projekcija u Zhuovoj algebri

Lema B.2.1. *Singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 4 za $k = -5/3$ je dan sa*

$$\begin{aligned}W_4 = &-\frac{62}{9}L_{-2}^2\mathbb{1} + \frac{14}{3}L_{-4}\mathbb{1} - 18J_{-1}^4\mathbb{1} + 54J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - 130J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + \frac{33}{2}J_{-2}^2\mathbb{1} + 13J_{-4}\mathbb{1}+\\ &+ 0L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} - 12L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + 46L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} - G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} + G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} - 18J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}.\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je

$$\begin{aligned}W_4 = &A_1L_{-2}^2\mathbb{1} + A_2L_{-4}\mathbb{1} + A_3J_{-1}^4\mathbb{1} + A_4J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} + A_5J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + A_6J_{-2}^2\mathbb{1} + A_7J_{-4}\mathbb{1}+\\ &+ A_8L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} + A_9L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} + A_{10}L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} + A_{11}G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} + A_{12}G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1}+\\ &+ A_{13}J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}\end{aligned}$$

singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 4, zapisan u PBW bazi.

Iz definicije singularnog vektora slijedi:

- $L_1W_4 = 0$

  (1) $L_1L_{-2}^2\mathbb{1} = 3L_{-3}\mathbb{1}$

  (2) $L_1L_{-4}\mathbb{1} = 5L_{-3}\mathbb{1}$

  (3) $L_1J_{-1}^4\mathbb{1} = 0$

  (4) $L_1J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = 2J_{-1}^3\mathbb{1}$

  (5) $L_1J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = 3J_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

  (6) $L_1J_{-2}^2\mathbb{1} = 4J_{-2}J - 1_{-1}\mathbb{1}$

  (7) $L_1J_{-4}\mathbb{1} = 4J_{-3}\mathbb{1}$

  (8) $L_1L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} = 6J_{-3}\mathbb{1} + 2L_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

  (9) $L_1L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = 4L_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

  (10) $L_1L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = 6J_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

  (11) $L_1G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = 3G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1}$

(12) $L_1G^+_{-1}G^-_{-2}\mathbb{1} = 12J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + 6(k+1)J_{-3}\mathbb{1} - 2(k+3)L_{-3}\mathbb{1} + 3G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1}$

(13) $L_1J_{-1}G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1} = 6J^3_{-1}\mathbb{1} + 3(k+1)J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - 2(k+3)L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + 2(k+3)J_{-3}\mathbb{1}.$

- $L_2W_3 = 0$

(1) $L_2L^2_{-2}\mathbb{1} = (8+c)L_{-2}\mathbb{1}$

(2) $L_2L_{-4}\mathbb{1} = 6L_{-2}\mathbb{1}$

(3) $L_2J^4_{-1}\mathbb{1} = 2(2k+3)J^2_{-1}\mathbb{1}$

(4) $L_2J_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1} = \frac{2k+3}{3}J_{-2}\mathbb{1}$

(5) $L_2J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = 3J^2_{-1}\mathbb{1}$

(6) $L_2J^2_{-2}\mathbb{1} = 0$

(7) $L_2J_{-4}\mathbb{1} = 4J_{-2}\mathbb{1}$

(8) $L_2L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} = (8+\frac{c}{2})J_{-2}\mathbb{1}$

(9) $L_2L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = 5J_{-2}\mathbb{1}$

(10) $L_2L_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1} = (8+\frac{c}{2})J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{2k+3}{3}L_{-2}\mathbb{1}$

(11) $L_2G^+_{-2}G^-_{-1}\mathbb{1} = \frac{21}{2}J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{3(k+1)}{2}J_{-2}\mathbb{1} - (k+3)L_{-2}\mathbb{1}$

(12) $L_2G^+_{-1}G^-_{-2}\mathbb{1} = \frac{15}{2}J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{45(k+1)}{4}J_{-2}\mathbb{1} - \frac{5(k+3)}{2}L_{-2}\mathbb{1}$

(13) $L_2J_{-1}G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1} = (\frac{15(k+1)}{2}+3)J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{3(k+1)}{2}J_{-2}\mathbb{1} - (k+3)L_{-2}\mathbb{1}.$

- $J_1W_3 = 0$

(1) $J_1L^2_{-2}\mathbb{1} = 2L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - J_{-3}\mathbb{1}$

(2) $J_1L_{-4}\mathbb{1} = J_{-3}\mathbb{1}$

(3) $J_1J^4_{-1}\mathbb{1} = \frac{4(2k+3)}{3}J^3_{-1}\mathbb{1}$

(4) $J_1J_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1} = \frac{2(2k+3)}{3}J_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

(5) $J_1J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = \frac{(2k+3)}{3}J_{-3}\mathbb{1}$

(6) $J_1J^2_{-2}\mathbb{1} = 0$

(7) $J_1J_{-4}\mathbb{1} = 0$

(8) $J_1L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} = J_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

(9) $J_1L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - \frac{(2k+3)}{3}L_{-3}\mathbb{1}$

(10) $J_1L_{-2}J^2_{-1}\mathbb{1} = J^3_{-1}\mathbb{1} + \frac{2(2k+3)}{3}L_{-2}J_{-1}\mathbb{1}$

(11) $J_1 G^+_{-2} G^-_{-1}\mathbb{1} = G^+_{-1} G^-_{-1}\mathbb{1}$

(12) $J_1 G^+_{-1} G^-_{-2}\mathbb{1} = 6J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + 3(k+1)J_{-3}\mathbb{1} - (k+3)L_{-3}\mathbb{1} - G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1}$

(13) $J_1 J_{-1} G^+_{-1} G^-_{-1}\mathbb{1} = 3J^3_{-1}\mathbb{1} + \frac{3(k+1)}{2}J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} - (k+3)L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} + (k+3)J_{-3}\mathbb{1} + \frac{(2k+3)}{3}G^+_{-1}G^-_{-1}\mathbb{1}.$

- $J_2 W_3 = 0$

(1) $J_2 L^2_{-2}\mathbb{1} = 0$

(2) $J_2 L_{-4}\mathbb{1} = 2J_{-2}\mathbb{1}$

(3) $J_2 J^4_{-1}\mathbb{1} = 0$

(4) $J_2 J_{-2} J^2_{-1}\mathbb{1} = \frac{2(2k+3)}{3}J^2_{-1}\mathbb{1}$

(5) $J_2 J_{-3} J_{-1}\mathbb{1} = 0$

(6) $J_2 J^2_{-2}\mathbb{1} = \frac{4(2k+3)}{3}J_{-2}\mathbb{1}$

(7) $J_2 J_{-4}\mathbb{1} = 0$

(8) $J_2 L_{-2} J_{-2}\mathbb{1} = \frac{2(2k+3)}{3}L_{-2}\mathbb{1}$

(9) $J_2 L_{-3} J_{-1}\mathbb{1} = 2J^2_{-1}\mathbb{1}$

(10) $J_2 L_{-2} J^2_{-1}\mathbb{1} = 0$

(11) $J_2 G^+_{-2} G^-_{-1}\mathbb{1} = 3J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{3(k+1)}{2}J_{-2}\mathbb{1} - (k+3)L_{-2}\mathbb{1}$

(12) $J_2 G^+_{-1} G^-_{-2}\mathbb{1} = 3J^2_{-1}\mathbb{1} + \frac{9(k+1)}{2}J_{-2}\mathbb{1} - (k+3)L_{-2}\mathbb{1}$

(13) $J_2 J_{-1} G^+_{-1} G^-_{-1}\mathbb{1} = 3(k+1)J^2_{-1}\mathbb{1}.$

- $L_3 W_3 = 0$

(1) $L_3 L^2_{-2}\mathbb{1} = 0$

(2) $L_3 L_{-4}\mathbb{1} = 0$

(3) $L_3 J^4_{-1}\mathbb{1} = 0$

(4) $L_3 J_{-2} J^2_{-1}\mathbb{1} = \frac{4(2k+3)}{3}J_{-1}\mathbb{1}$

(5) $L_3 J_{-3} J_{-1}\mathbb{1} = 0$

(6) $L_3 J^2_{-2}\mathbb{1} = 0$

(7) $L_3 J_{-4}\mathbb{1} = 4J_{-1}\mathbb{1}$

(8) $L_3 L_{-2} J_{-2}\mathbb{1} = 10J_{-1}\mathbb{1}$

(9) $L_3L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = (6+2c)J_{-1}\mathbb{1}$

(10) $L_3L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = 0$

(11) $L_3G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = 12(k+1)J_{-1}\mathbb{1}$

(12) $L_3G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} = 18(k+1)J_{-1}\mathbb{1}$

(13) $L_3J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = 6(k+1)(k+2)J_{-1}\mathbb{1}$.

- $J_3W_3 = 0$

(1) $J_3L_{-2}^2\mathbb{1} = 3J_{-1}\mathbb{1}$

(2) $J_3L_{-4}\mathbb{1} = 3J_{-1}\mathbb{1}$

(3) $J_3J_{-1}^4\mathbb{1} = 0$

(4) $J_3J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = 0$

(5) $J_3J_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = (2k+3)J_{-1}\mathbb{1}$

(6) $J_3J_{-2}^2\mathbb{1} = 0$

(7) $J_3J_{-4}\mathbb{1} = 0$

(8) $J_3L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} = 0$

(9) $J_3L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = 0$

(10) $J_3L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = 2(2k+3)J_{-1}\mathbb{1}$

(11) $J_3G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = 3(k+1)J_{-1}\mathbb{1}$

(12) $J_3G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} = 6(k+1)J_{-1}\mathbb{1}$

(13) $J_3J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = (k+1)(2k+3)J_{-1}\mathbb{1}$.

Dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

- $L_1W_4 = 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&3A_1 + 5A_2 - 2(k+3)A_{12} = 0\\
&2A_4 + 6A_{13} = 0\\
&3A_5 + 4A_6 + 6A_{10} + 12A_{12} = 0\\
&4A_7 + 6A_8 + 6(k+1)A_{12} + 2(k+3)A_{13} = 0\\
&2A_8 + 4A_9 - 2(k+3)A_{13} = 0\\
&3A_{11} + 3A_{12} = 0
\end{aligned}
$$

- $L_2 W_4 = 0 \Longrightarrow$

$(8+c)A_1 + 6A_2 + \frac{1}{3}(2k+3)A_{10} - \frac{7}{2}(k+3)A_{11} - \frac{5}{2}(k+3)A_{12} - (k+3)A_{13} = 0$
$2(2k+3)A_3 + 3A_5 + (8+\frac{c}{2})A_{10} + \frac{21}{2}A_{11} + \frac{15}{2}A_{12} + (\frac{15}{2}(k+1)+3)A_{13} = 0$
$\frac{1}{3}(2k+3)A_4 + 4A_7 + (8+\frac{c}{2})A_8 + 5A_9 + \frac{21}{4}(k+1)A_{11} + \frac{45}{4}(k+1)A_{12} + \frac{3}{2}(k+1)A_{13} = 0$

- $J_1 W_4 = 0 \Longrightarrow$

$-A_1 + A_2 + \frac{1}{3}(2k+3)A_5 + 3(k+1)A_{12} + (k+3)A_{13} = 0$
$2A_1 + \frac{2}{3}(2k+3)A_{10} - (k+3)A_{13} = 0$
$\frac{4}{3}(2k+3)A_3 + A_{10} + 3A_{13} = 0$
$\frac{2}{3}(2k+3)A_4 + A_8 + A_9 + 6A_{12} + \frac{3}{2}(k+1)A_{13} = 0$
$\frac{1}{3}(2k+3)A_9 - (k+3)A_{12} = 0$
$A_{11} - A_{12+\frac{1}{3}(2k+3)A_{13}} = 0$

- $J_2 W_4 = 0 \Longrightarrow$

$2A_2 + \frac{4}{3}(2k+3)A_6 + \frac{3}{2}(k+1)A_{11} + \frac{9}{2}(k+1)A_{12} = 0$ $\frac{2}{3}(2k+3)A_4 + 2A_9 + 3A_{11} + 3A_{12} + 3(k+1)A_{13} = 0$
$\frac{2}{3}(2k+3)A_8 - (k+3)A_{11} - (k+3)A_{12} = 0$

- $L_3 W_4 = 0 \Longrightarrow$

$\frac{4}{3}(2k+3)A_4 + 4A_7 + 10A_8 + (6+2c)A_9 + 12(k+1)A_{11} + 18(k+1)A_{12} + 6(k+1)(k+2)A_{13} = 0$

- $J_3 W_4 = 0 \Longrightarrow$

$3A_1 + 3A_2 + (2k+3)A_5 + 2(2k+3)A_{10} + 3(k+1)A_{11} + 6(k+1)A_{12} + (2k+3)(k+1)A_{13} = 0$

Rješenja sustava su dana sa:
$A_1 = -\frac{(17k+18)(k+3)}{6(2k+3)}$
$A_2 = \frac{(5k+6)(k+3)}{2(2k+3)}$
$A_3 = \frac{3(17k^2+159k+216)}{8(2k+3)^3}$
$A_4 = \frac{18}{(2k+3)}$
$A_5 = \frac{34k^2+129k+135)}{(2k+3)^2}$
$A_6 = \frac{3(11k^2+36k+27)}{4(2k+3)^2}$
$A_7 = \frac{3(2k^2+7k+9)}{2(2k+3)}$
$A_8 = 0$
$A_9 = \frac{3(k+3)}{(2k+3)}$

$A_{10} = \frac{(k+3)(17k+36)}{2(2k+3)^2}$
$A_{11} = -1$
$A_{12} = 1$
$A_{13} = \frac{6}{(2k+3)}$.

□

Lema B.2.2. *Za projekcije elemenata PBW baze u Zhuovoj algebri $A(\mathcal{W}^k) \cong \mathbb{C}[x,y]$ vrijede sljedeće relacije:*

(1) $[L_{-2}^2\mathbb{1}] = y^2 + 2y,$

(2) $[L_{-4}\mathbb{1}] = 3y$

(3) $[J_{-1}^4\mathbb{1}] = x^4$

(4) $[J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] = -x^3$

(5) $[J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] = x^2$

(6) $[J_{-2}^2\mathbb{1}] = x^2$

(7) $[J_{-4}\mathbb{1}] = -x$

(8) $[L_{-2}J_{-2}\mathbb{1}] = -xy - 2x$

(9) $[L_{-3}J_{-1}\mathbb{1}] = -2xy - x$

(10) $[L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}] = x^2y + 2x^2$

(11) $[G_{-2}^+G^-\mathbb{1}] = 3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y$

(12) $[G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1}] = 6x^2 - 3(k+1)x - 2(k+3)y$

(13) $[J_{-1}G_{-1}^+G^-\mathbb{1}] = -3x^3 + \frac{3}{2}(k+1)x^2 + (k+3)xy$

Dokaz. Vrijedi:

$$(L_{-n-2} + 2L_{-n-1} + L_{-n})v \in O(V),$$

pa je $[L_{-3}\mathbb{1}] = -2[L_{-2}\mathbb{1}] = -2y$.

(1) Vrijedi da je

$$[(L_{-2}\mathbb{1} + L_{-1})^n\mathbb{1}] = [(L_{-2}^n\mathbb{1}] = y^n,$$

te je $[(L_{-2}\mathbb{1} + L_{-1}\mathbb{1})L_{-2}\mathbb{1}] = [L_{-2}^2\mathbb{1} + L_{-3}\mathbb{1}]$
$\Longrightarrow [L_{-2}^2\mathbb{1}] = y^2 - [L_{-3}\mathbb{1}] = y^2 + 2y.$

(2) $[L_{-4}\mathbb{1} + 2L_{-3}\mathbb{1} + L_{-2}\mathbb{1}] = 0,$

$\Longrightarrow [L_{-4}\mathbb{1}] = -2[L_{-3}\mathbb{1}] - [L_{-2}\mathbb{1}] = 3y.$

Budući da je

$$[J_{-i_1-1}...J_{-i_n-1}\mathbb{1}] = (-1)^{i_1+...+i_n}[(J_{-1}^n\mathbb{1}] = (-1)^{i_1+...+i_n}x^n,$$

imamo sljedeće relacije:

(3) $[(J_{-1}^4] = x^4,$

(4) $[J_{-2}J_{-1}^2] = -[(J_{-1}^3] = -x^3,$

(5) $[J_{-3}J_{-1}] = x^2,$

(6) $[J_{-2}^2] = x^2,$

(7) $[J_{-4}] = -x.$

(8) $[L_{-2}J_{-2}] = -xy - 2x$

$$\begin{aligned}
[L_{-2}] * [J_{-2}] = -xy = Res_z \frac{(1+z)^2}{z} L(z)J_{-2}\mathbb{1} \\
&= (\frac{1}{z} + 2 + z)(\sum L_n z^{-n-2})J_{-2}\mathbb{1} \\
&= [L_{-2}J_{-2}] + 2[L_{-1}J_{-2}] + [L_0 J_{-2}] \\
&= [L(_{-2}J_{-2}] - 2\Delta_{J_{-2}}[J_{-2}] + \Delta_{J_{-2}}[J_{-2}] \\
&= [L_{-2}J_{-2}] - \Delta_{J_{-2}}(-y)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [L_{-2}J_{-2}] = -xy - 2x.$

(9) $[L_{-3}J_{-1}] = -2xy - x$

$$\begin{aligned}
Res_z \frac{(1+z)^2}{z^2} L(z)J_{-1}\mathbb{1} = 0 = Res_z(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 1)(\sum L_n z^{-n-2})J_{-1}\mathbb{1} \\
&= [L_{-3}J_{-1}] + 2[L_{-2}J_{-1}] + [L_{-1}J_{-1}] \\
&= [L_{-3}J_{-1}] + 2(xy + x) - x,
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [L_{-3}J_{-1}] = -2xy - x.$

(10) $[L_{-2}J_{-1}^2] = x^2y + 2x^2$

$$\begin{aligned}[L_{-2}] * [J_{-1}^2] = yx^2 &= Res_z \frac{(1+z)^2}{z} L(z) J_{-1}^2 \mathbb{1} \\ &= (\frac{1}{z} + 2 + z)(\sum L_n z^{-n-2}) J_{-1}^2 \mathbb{1} \\ &= [L_{-2}J_{-1}^2] + 2[L_{-1}J_{-1}^2] + [L_0 J_{-1}^2] \\ &= [L_{-2}J_{-1}^2] - 2\Delta_{J_{-1}^2}[J_{-1}^2] + \Delta_{J_{-1}^2}[J_{-1}^2] \\ &= [L_{-2}J_{-1}^2] - \Delta_{J_{-1}^2} x^2 \\ &= [L_{-2}J_{-1}^2] - 2x^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [L_{-2}J_{-1}^2] = x^2y + 2x^2.$

(11) $[G_{-2}^+G^-] = 3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y$

$$\begin{aligned}Res_z \frac{(1+z)^1}{z^2} G^+(z) G^- = 0 &= Res_z (\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z})(\sum G_n^+ z^{-n-1}) G^- \\ &= G_{-2}^+G^- + G_{-1}^+G^-,\end{aligned}$$

$[G_{-2}^+G^-] = -[G_{-1}^+G^-]$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}[G_{-1}^+\mathbb{1}] \circ [G_{-1}^-\mathbb{1}] = 0 &= Res_z G^+(z) \frac{(1+z)^{\Delta_{G_{-1}^+\mathbb{1}} - \frac{1}{2}}}{z} G_{-1}^- \mathbb{1} \\ &= Res_z (\frac{1}{z} + 1)(\sum G_n^+ z^{-n-1}) G^- \\ &= G_{-1}^+G^- + G_{-0}^+G^-,\end{aligned}$$

$[G_{-1}^+G^-] = -[G_0^+G^-]$, te $[G_{-2}^+G^-] = [G_0^+G^-]$. Budući da je

$$G_0^+G^- = 3J_{-1}^2 + \frac{3(k+1)}{2} J_{-2} - (k+3)L_{-2},$$

imamo

$$\begin{aligned}[G_0^+G^-] &= 3[J_{-1}^2] + \frac{3(k+1)}{2}[J_{-2}] - (k+3)[L_{-2}] \\ &= 3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y,\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [G_{-2}^+G^-] = 3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y.$

(12) $[G_{-1}^+G_{-2}^-] = 6x^2 - 3(k+1)x - 2(k+3)y$

$D(G^+_{-1}G^-) = G^+_{-2}G^- + G^+_{-1}G^-_{-2}$, pa je zato

$$[L_{-1}G^+_{-1}G^-] = [G^+_{-2}G^-] + [G^+_{-1}G^-_{-2}],$$

$$\begin{aligned}[G^+_{-2}G^-] + [G^+_{-1}G^-_{-2}] &= [-L_0G^+_{-1}G^-]\\ &= -3[G^+_{-1}G^-],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[G^+_{-1}G^-_{-2}] &= -3[G^+_{-1}G^-] - [G^+_{-2}G^-]\\ &= 2[G^+_{-2}G^-],\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [G^+_{-1}G^-_{-2}] = 6x^2 - 3(k+1)x - 2(k+3)y.$$

(13) $[J_{-1}G^+_{-1}G^-] = -3x^3 + \frac{3}{2}(k+1)x^2 + (k+3)xy$

$$\begin{aligned}[J_{-1}\mathbb{1}] * [G^+_{-1}G^-] &= -x(3x^2 - \frac{3}{2}(k+1)x - (k+3)y)\\ &= Res_z\frac{(1+z)}{z}(\sum J_n z^{-n-1})G^+_{-1}G^-\\ &= [J_0G^+_{-1}G^-] + [J_{-1}G^+_{-1}G^-] = [J_{-1}G^+_{-1}G^-].\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [J(-1)G^+_{-1}G^-] = -3x^3 + \tfrac{3}{2}(k+1)x^2 + (k+3)xy.$$

□

B.3 Računi za singularni vektor $\overline{W}_3$ i projekcija u Smithovoj algebri

U ovom i idućem potpoglavlju koristimo novo Virasorovo polje $\overline{L}(z)$ dano sa (cf. Poglavlje 5.2)

$$\overline{L}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{L}(n)z^{-n-2} = L(z) + \frac{1}{2}DJ(z).$$

Neka je konformni vektor $\overline{\omega} = \omega + \frac{1}{2}DJ$ takav da je $\overline{\omega}_{n+1} = \overline{L}(n)$.

Lema B.3.1. *S novim Virasoro vektorom $\overline{\omega}$, singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 3 za $k = -9/4$ je dan sa*

$$\begin{aligned}\overline{W}_3 &= A_1\overline{L}(-3)\mathbb{1} + A_2J(-1)^3\mathbb{1} + (A_3 - \frac{1}{2}A_5)J(-2)J(-1)\mathbb{1} + (A_4 - A_1)J(-3)\mathbb{1}+\\ &+ A_5\overline{L}(-2)J(-1)\mathbb{1} + A_6G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}\\ &= \frac{3}{8}\overline{L}(-3)\mathbb{1} + J(-1)^3\mathbb{1} - \frac{9}{4}J(-2)J(-1)\mathbb{1} + \frac{19}{8}J_{-3}\mathbb{1} - \frac{3}{2}\overline{L}(-2)J(-1)\mathbb{1}+\\ &+ G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}.\end{aligned}$$

Dokaz. Budući da je

$$L_n = \overline{L}(n) + \frac{n+1}{2} J(n),$$

vrijedi:

(1) $L_{-3}\mathbb{1} = \overline{L}(-3)\mathbb{1} - J(-3)\mathbb{1}$

(2) $J_{-1}^3\mathbb{1} = J(-1)^3\mathbb{1}$

(3) $J_{-2}J_{-1}\mathbb{1} = J(-2)J(-1)\mathbb{1}$

(4) $J_{-3} = J(-3)\mathbb{1}$

(5) $L_{-2}J_{-1}\mathbb{1} = \overline{L}(-2)J(-1)\mathbb{1} - \frac{1}{2}J(-2)J(-1)\mathbb{1}$

(6) $G_{-1}^{+}G_{-1}^{-}\mathbb{1} = G^{+}(-1)G^{-}(-2)\mathbb{1}$,

pa je

$$\begin{aligned}\overline{W}_3 &= A_1\overline{L}(-3)\mathbb{1} + A_2J(-1)^3\mathbb{1} + (A_3 - \frac{1}{2}A_5)J(-2)J(-1)\mathbb{1} + (A_4 - A_1)J(-3)\mathbb{1} + \\ &+ A_5\overline{L}(-2)J(-1)\mathbb{1} + A_6G^{+}(-1)G^{-}(-2)\mathbb{1}.\end{aligned}$$

□

Projekcija vektora $G^{+}(0)\overline{W}_3$ u Smithovoj algebri

Pomoću idućih nekoliko tehničkih lema dokazujemo formulu

$$[G^{+}(0)\overline{W}_3] = E(\frac{3}{4}\overline{Y} + \frac{3}{8}),$$

koju koristimo za klasifikaciju ireducibilnih jakih modula za $\mathcal{W}_k$, $k = -9/4$ (cf. Propozicija 6.1.4 u Poglavlju 6).

Lema B.3.2. *Vrijede sljedeće relacije:*

(1) $G^{+}(0)\overline{L}(-3)\mathbb{1} = 0$,

(2) $G^{+}(0)J(-1)^3\mathbb{1} = -G^{+}(-3)\mathbb{1} + 3J(-1)G^{+}(-2)\mathbb{1} - 3J(-1)^2G^{+}(-1)\mathbb{1}$

(3) $G^{+}(0)J(-2)J(-1)\mathbb{1} = G^{+}(-3)\mathbb{1} - J(-1)G^{+}(-2)\mathbb{1} - J(-2)G^{+}(-1)\mathbb{1}$

(4) $G^{+}(0)J_{-3}\mathbb{1} = -G^{+}(-3)\mathbb{1}$

(5) $G^{+}(0)L(-2)J(-1)\mathbb{1} = -\overline{L}(-2)G^{+}(-1)\mathbb{1}$,

(6) $G^{+}(0)G^{+}(-1)G^{-}(-1)\mathbb{1} = \frac{21}{4}G^{+}(-3)\mathbb{1} - 6J(-1)G^{+}(-2)\mathbb{1} + 3J(-1)G^{+}(-2)\mathbb{1} -$
$- \frac{3}{2}J(-2)G^{+}(-1)\mathbb{1} - \frac{3}{4}\overline{L}(-2)G^{+}(-1)\mathbb{1}$.

Lema B.3.3. *Vektor $G^+(0)\overline{W}_3$ je dan formulom*

$$G^+(0)\overline{W}_3 = -\frac{3}{8}G^+(-3)\mathbb{1} - \frac{3}{4}J(-1)G^+(-2)\mathbb{1} + \frac{3}{4}J(-2)G^+(-1)\mathbb{1} + \frac{3}{4}\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}.$$

Lema B.3.4. *Za projekciju u Smithovu algebru vrijedi*

(1) $[G^+(-3)\mathbb{1}] = E$

(2) $[J(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = E - XE$

(3) $[J(-1)^2G^+(-1)\mathbb{1}] = X^2E + E - 2XE$

(4) $[J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = -XE + E$

(5) $[\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = E\overline{Y} + E.$

Dokaz. (1) $[G^+(-3)\mathbb{1}] = E$

Budući da vrijedi $(G^+(-2) + G^+(-1))v \in O(V)$ i $(G^+(-3) + G^+(-2))v \in O(V)$, imamo

$$[G^+(-3)\mathbb{1}] = -[G^+(-2)\mathbb{1}] = [G^+(-1)\mathbb{1}] = E.$$

(2) $[J(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = E - XE$

$$\begin{aligned}[G^+(-2)] * [J(-1)] = -EX &= Res_z\frac{(1+z)^0}{z}J(z)G^+(-2)\mathbb{1} + O(V)\\ &= Res_z(\frac{1}{z}\sum J(n)z^{-n-1}G^+(-2)\mathbb{1}) + O(V)\\ &= [J(-1)G^+(-2)\mathbb{1}]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [J(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = -EX = E - XE.$$

(3) $[J(-1)^2G^+(-1)\mathbb{1}] = X^2E + E - 2XE$

$$\begin{aligned}[J(-1)^2] * [G^+(-1)] = X^2E &= Res_z\frac{(1+z)^0}{z}G^+(z)J(-1)^2\mathbb{1} + O(V)\\ &= Res_z(\frac{1}{z}\sum G^+(n)z^{-n-1}J(-1)^2\mathbb{1}) + O(V)\\ &= [G^+(-1)J(-1)^2\mathbb{1}]\\ &= [G^+(-3)\mathbb{1}] - 2[J(-1)G^+_{-2}\mathbb{1}] + [J(-1)^2G^+(-1)\mathbb{1}]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [J(-1)^2G^+(-1)\mathbb{1}] = X^2E - E - 2EX = X^2E + E - 2XE.$$

(4) $[J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = -XE + E$

$$
\begin{aligned}
[J(-2)] * [G^+(-1)] = -XE &= Res_z \frac{(1+z)^0}{z} G^+(z)J(-2)\mathbb{1} + O(V) \\
&= Res_z(\frac{1}{z}\sum G^+(n)z^{-n-1}J(-2)\mathbb{1}) + O(V) \\
&= [G^+(-1)J(-2)\mathbb{1}] \\
&= -[G^+(-3)\mathbb{1}] + [J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}]
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow [J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = -XE + E.$

(5) $[\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = E\overline{Y} + E.$

$$
\begin{aligned}
[G^+(-1)] * [L(-2)] = E\overline{Y} &= Res_z \frac{(1+z)^1}{z} L(z)G^+(-1)\mathbb{1} + O(V) \\
&= Res_z((\frac{1}{z}+1)\sum L(n)z^{-n-2}G^+(-1)\mathbb{1}) + O(V) \\
&= [\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] + [\overline{L}(-1)G^+(-1)\mathbb{1}] \\
&= [\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] + [G^+(-2)\mathbb{1}]
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow [\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] = E\overline{Y} + E.$

□

Lema B.3.5. *Projekcija vektora $G^+(0)\overline{W}_3$ u Smithovoj algebri je dana sa*

$$[G^+(0)\overline{W}_3] = E(\frac{3}{4}\overline{Y} + \frac{3}{8}).$$

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
[G^+(0)\overline{W}_3] &= -\frac{3}{8}E - \frac{3}{4}(E - XE) + \frac{3}{4}(-XE + E) + \frac{3}{4}(E\overline{Y} + E) \\
&= E(\frac{3}{4}\overline{Y} + \frac{3}{8}).
\end{aligned}
$$

□

B.4 Računi za singularni vektor $\overline{W}_4$ i projekcija u Smithovoj algebri

Lema B.4.1. *S novim Virasoro vektorom $\overline{\omega}$, singularni vektor u $\mathcal{W}^k$ na nivou 4 za $k = -5/3$ je dan sa*

$$
\begin{aligned}
\overline{W}_4 = &-\frac{62}{9}\overline{L}(-2)^2\mathbb{1} + \frac{14}{3}\overline{L}(-4)\mathbb{1} - 18J(-1)^4\mathbb{1} + 31J(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - \\
&- 118J(-3)J(-1)\mathbb{1} + \frac{133}{9}J(-2)^2\mathbb{1} - \frac{8}{9}J(-4)\mathbb{1} + \frac{62}{9}\overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} -
\end{aligned}
$$

$$- 12\overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1} + 46\overline{L}(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1}+$$
$$+ G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1} - 18J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}.$$

Dokaz. Budući da je

$$L_n = \overline{L}(n) + \frac{n+1}{2}J(n),$$

vrijedi:

(1) $L_{-2}^2\mathbb{1} = (\overline{L}(-2) - \frac{1}{2}J(-2))(\overline{L}(-2) - \frac{1}{2}J(-2)\mathbb{1} = (\overline{L}(-2)^2 - \overline{L}(-2)J(-2) + J(-4) + \frac{1}{4}J(-2)^2)\mathbb{1}$

(2) $L_{-2}\mathbb{1} = \overline{L}(-4)\mathbb{1} - \frac{1}{2}J(-2)\mathbb{1}$

(3) $J_{-1}^4\mathbb{1}$

(4) $J_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1}$

(5) $J_{-3}J_{-1}\mathbb{1}$

(6) $J_{-2}^2\mathbb{1}$

(7) $J_{-4}\mathbb{1}$

(8) $L_{-2}J_{-2}\mathbb{1} = \overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} - \frac{1}{2}J(-2)^2\mathbb{1}$

(9) $L_{-3}J_{-1}\mathbb{1} = \overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1} - J(-3)J(-1)\mathbb{1}$

(10) $L_{-2}J_{-1}^2\mathbb{1} = \overline{L}(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - \frac{1}{2}J(-2)J(-1)^2\mathbb{1}$

(11) $G_{-2}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1}$

(12) $G_{-1}^+G_{-2}^-\mathbb{1} = G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1}$

(13) $J_{-1}G_{-1}^+G_{-1}^-\mathbb{1} = J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}.$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\overline{W}_4 &= A_1\overline{L}(-2)^2\mathbb{1} + A_2\overline{L}(-4)\mathbb{1} + A_3J(-1)^4\mathbb{1} + (A_4 - \frac{1}{2}A_{10})J(-2)J(-1)^2\mathbb{1}+\\
&+ (A_5 - A_9)J(-3)J(-1)\mathbb{1} + (A_6 + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{2}A_8)J(-2)^2\mathbb{1} + (A_7 + A_1 - \frac{3}{2}A_2)J(-4)\mathbb{1}+\\
&+ (A_8 - A_1)\overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} + A_9\overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1} + A_{10}\overline{L}(-2)J(-1)^2\mathbb{1}+\\
&+ A_{11}G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1} + A_{12}G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1} + A_{13}J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}\\
&= -\frac{62}{9}\overline{L}(-2)^2\mathbb{1} + \frac{14}{3}\overline{L}(-4)\mathbb{1} - 18J(-1)^4\mathbb{1} + 31J(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - 118J(-3)J(-1)\mathbb{1}+\\
&+ \frac{133}{9}J(-2)^2\mathbb{1} - \frac{8}{9}J(-4)\mathbb{1} + \frac{62}{9}\overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} - 12\overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1}+\\
&+ 46\overline{L}(-2)J(-1)^2\mathbb{1} - G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1} + G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1} - 18J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

□

Projekcija vektora $(G^+(0))^2\overline{W}_4$ u Smithovoj algebri

Pomoću idućih nekoliko tehničkih lema dokazujemo formulu

$$[(G^+(0))^2\overline{W}_4] = 44E^2(\overline{Y} + \frac{1}{9}),$$

koju koristimo za klasifikaciju ireducibilnih jakih modula za $\mathcal{W}_k$, $k = -5/3$ (cf. Propozicija 6.2.5 u Poglavlju 6).

Lema B.4.2. *Vrijede sljedeće relacije:*

(1) $(G^+(0))^2\overline{L}(-2)^2\mathbb{1} = 0,$

(2) $(G^+(0))^2\overline{L}(-4)\mathbb{1} = 0,$

(3) $(G^+(0))^2J(-1)^4\mathbb{1} = 8G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} + 6(G^+(-2))^2\mathbb{1} - 24J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} - 12J(-1)^2(G^+(-1))^2\mathbb{1}$

(4) $(G^+(0))^2J(-2)(J(-1))^2\mathbb{1} = -2(G^+(-2))^2\mathbb{1} - 4G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} + 4J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} + 2J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}$

(5) $(G^+(0))^2J(-3)J(-1)\mathbb{1} = 2G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1}$

(6) $(G^+(0))^2(J(-2))^2\mathbb{1} = 2(G^+(-2))^2\mathbb{1}$

(7) $(G^+(0))^2J(-4)\mathbb{1} = 0$

(8) $(G^+(0))^2\overline{L}(-2)J(-2)\mathbb{1} = 0$

(9) $(G^+(0))^2\overline{L}(-3)J(-1)\mathbb{1} = 0$

(10) $(G^+(0))^2\overline{L}(-2)(J(-1))^2\mathbb{1} = 2\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}$

(11) $(G^+(0))^2G^+(-2)G^-(-2)\mathbb{1} = \frac{10}{3}(G^+(-2))^2\mathbb{1} + 6G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} - 6J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}$

(12) $(G^+(0))^2G^+(-1)G^-(-3)\mathbb{1} = 6(G^+(-2))^2\mathbb{1} + \frac{38}{3}G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} - 6J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} - 6J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}$

(13) $(G^+(0))^2J(-1)G^+(-1)G^-(-2)\mathbb{1} = -12(G^+(-2))^2\mathbb{1} - \frac{56}{3}G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} + \frac{100}{3}J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} + \frac{2}{3}J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1} - 12J(-1)^2(G^+(-1))^2\mathbb{1} + \frac{8}{3}\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}.$

Lema B.4.3. *Vektor* $(G^+(0))^2\overline{W}_4$ *je dan formulom*

$$(G^+(0))^2\overline{W}_4 = -\frac{484}{3}G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1} + \frac{704}{9}(G^+(-2))^2\mathbb{1} - 44J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} + 44J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1} + 44\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}.$$

Lema B.4.4. *Za projekciju u Smithovu algebru vrijedi*

(1) $[G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1}] = E^2$

(2) $[(G^+(-2))^2\mathbb{1}] = E^2$

(3) $[J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = -E^2X$

(4) $[J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = -E^2X$

(5) $[\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = E^2\overline{Y} + 2E^2.$

Dokaz. (1) $[G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1}] = E^2$

Budući da vrijedi $(G^+(-2) + G^+(-1))v \in O(V)$ i $(G^+(-3) + G^+(-2))v \in O(V)$, imamo

$$[G^+(-3)\mathbb{1}] = -[G^+(-2)\mathbb{1}] = [G^+(-1)\mathbb{1}] = E.$$

$$\begin{aligned}[G^+(-3)] * [G^+(-1)] = E^2 &= Res_z \frac{(1+z)^0}{z} G^+(z)G^+(-2)\mathbb{1} + O(V) \\ &= Res_z(\frac{1}{z}\sum G^+(n)z^{-n-1}G^+(-3)\mathbb{1}) + O(V) \\ &= [G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1}]\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [G^+(-1)G^+(-3)\mathbb{1}] = E^2.$

(2) $[(G^+(-2))^2\mathbb{1}] = E^2$

Budući da vrijedi $(G^+(-1) + G^+(-2))G^+(-2) \in O(V)$, imamo

$$[(G^+(-2))^2\mathbb{1}] = -[G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = E^2.$$

(3) $[J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = -E^2X$

$$\begin{aligned}[G^+(-1)G^+(-2)] * [J(-1)] = -EX &= Res_z \frac{(1+z)^0}{z} J(z)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1} + O(V) \\ &= Res_z(\frac{1}{z}\sum J(n)z^{-n-1}G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}) + O(V) \\ &= [J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}]\end{aligned}$$

$\Longrightarrow [J(-1)G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}] = -E^2X.$

(4) $[J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = -E^2X$

$$\begin{aligned}[J(-2)G^+(-1)] * [G^+(-1)] = (-XE + E)E &= Res_z \frac{(1+z)^0}{z} G^+(z)J(-2)G^+(-1)\mathbb{1} + O(V) \\ &= Res_z(\frac{1}{z}\sum G^+(n)z^{-n-1}J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}) + O(V)\end{aligned}$$

$$= [G^+(-1)J(-2)G^+(-1)\mathbb{1}]$$
$$= -[G^+(-3)G^+(-1)\mathbb{1}] + [J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}]$$

$$\Longrightarrow [J(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = XE^2 + 2E^2 = -E^2X.$$

(5) $[\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = E^2\overline{Y} + 2E^2.$

$$\begin{aligned}[(G^+(-1))^2] * [\overline{L}(-2)] = E\overline{Y} &= Res_z \frac{(1+z)^1}{z}\overline{L}(z)(G^+(-1))^2\mathbb{1} + O(V)\\ &= Res_z((\frac{1}{z}+1)\sum \overline{L}(n)z^{-n-2}(G^+(-1))^2\mathbb{1}) + O(V)\\ &= [\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] + [\overline{L}(-1)(G^+(-1))^2\mathbb{1}]\\ &= [\overline{L}(-2)G^+(-1)\mathbb{1}] + 2[G^+(-1)G^+(-2)\mathbb{1}]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [\overline{L}(-2)(G^+(-1))^2\mathbb{1}] = E^2\overline{Y} + 2E^2.$$

□

Lema B.4.5. *Projekcija vektora $(G^+(0))^2\overline{W}_4$ u Smithovoj algebri je dana sa*

$$[(G^+(0))^2\overline{W}_4] = 44E^2(\overline{Y} + \frac{1}{9}).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}[(G^+(0))^2\overline{W}_4] &= -\frac{484}{3}E^2 + \frac{704}{9}E^2 - 44(-E^2X) + 44(-E^2X) + 44(E^2\overline{Y} + 2E^2)\\ &= E^2(-\frac{484}{3} + \frac{704}{9} + 88 + 44\overline{Y})\\ &= 44E^2(\overline{Y} + \frac{1}{9}).\end{aligned}$$

□

Bibliografija

[1] T. Abe, *A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 255, No. 4 (2007), pp. 755–792

[2] D. Adamović, *Classification of irreducible modules of certain subalgebras of free boson vertex algebra*, Journal of Algebra, Vol. 270 (2003), pp. 115–132,

[3] D. Adamović, *A construction of admissible $A_1^{(1)}$–modules of level $-\frac{4}{3}$* , Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 196 (2005), pp. 119–134

[4] D. Adamović, A. Milas, *Logarithmic intertwining operators and $\mathcal{W}(2, 2p-1)$ algebras*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 48, No. 7 (2007), pp. 073503

[5] D. Adamović, A. Milas, *The doublet vertex operator superalgebras $A(p)$ and $A_{2,p}$*, Contemporary Mathematics, Vol. 602 (2013), pp. 23–38

[6] D. Adamović, V. G. Kac, P. Möseneder Frajria, P. Papi, O. Perše, *Conformal embeddings of affine vertex algebras in minimal W-algebras I: Structural results*, Journal of Algebra, Vol. 500 (2018), pp. 117–152

[7] D. Adamović, A. Dujella, A. Kontrec, u pripremi

[8] D. Adamović, A. Kontrec, u pripremi

[9] T. Arakawa, *Rationality of Bershadsky-Polyakov vertex algebras*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 323, No. 2 (2013), pp. 627–633

[10] T. Arakawa, *Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$*, Duke Mathematical Journal, Vol. 165, No.1 (2016), pp. 67–93

[11] T. Arakawa, T. Creutzig, K. Kawasetsu, A. Linshaw, *Orbifolds and cosets of minimal W-algebras*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 355, No. 1 (2017), pp. 339–372

[12] T. Arakawa, T. Creutzig, A. Linshaw, *Cosets of Bershadsky-Polyakov algebras and rational $\mathcal{W}$-algebras of type A*, Selecta Mathematica, Vol. 23, No. 4 (2017), pp. 2369–2395

[13] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 51, Providence, RI, 2004.

[14] S. Berman, C. Dong, S. Tan, *Representations of a class of lattice type vertex algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 176 (2002), pp. 27–47

[15] M. Bershadsky, *Conformal field theories via Hamiltonian reduction*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 139, No. 1 (1991), pp. 71–82

[16] R. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*, Proceedings of the National Academy of Sciences , Vol. 83 (1986), pp. 3068–3071

[17] T. Creutzig, D. Ridout and S. Wood, *Coset Constructions of Logarithmic (1,p)-Models*, Letters in Mathematical Physics, Vol. 104, No. 5 (2014), pp. 553–583

[18] C. Dong, *Vertex algebras associated with even lattices*, Journal of Algebra, Vol. 161, No. 1 (1993), pp. 245–265

[19] C. Dong, H.-S. Li, G. Mason, *Certain associative algebra similar to $U(sl_2)$ and Zhu's algebra $A(V_L)$*, Journal of Algebra, Vol. 196 (1997), pp. 532–551

[20] C. Dong, G. Mason, *On quantum Galois theory*, Duke Mathematical Journal, Vol. 86, No.2 (1997), pp. 305–321

[21] C. Dong, L. Ren, F. Xu, *On Orbifold Theory*, Advances in Mathematics, Vol. 321 (2015), pp. 1–30

[22] V. Drinfeld, V.V. Sokolov, *Lie algebra and the KdV type equations*, Soviet Journal of Mathematics, Vol. 30 (1985), pp. 1975–2036

[23] B. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction*, Physics Letters B, Vol. 246, No. 1-2 (1990), pp. 75–81

[24] B. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody algebras, bosonization and resolutions*, Letters in Mathematical Physics, Vol. 19, No. (1990), pp. 307–317

[25] A. Feingold, I. Frenkel, *Classical affine algebras*, Advances in Mathematics, Vol. 56, No. 2 (1985), pp. 117–172

[26] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[27] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[28] E. Frenkel, V. Kac, A. Radul and W. Wang, *$W_{1+\infty}$-algebra and $\mathfrak{gl}_N$ with central charge N*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 170 (1995), pp. 337–357

[29] I. B. Frenkel, Y. Zhu, *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*, Duke Mathematical Journal, Vol. 66, No. 1 (1992), pp. 123–168

[30] M. Gorelik, V. Kac, *On complete reducibility for infinite-dimensional Lie algebras*, Advances in Mathematics, Vol. 226, No. 2 (2011), pp. 1911–1972

[31] V. G. Kac, *Vertex Algebras for Beginners*, University Lecture Series, Second Edition, American Mathematical Society, Vol. 10, 1998.

[32] V. G. Kac, S.S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum Reduction for Affine Superalgebras*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 241, No. 23 (2003), pp. 307–342

[33] V. G. Kac, M. Wakimoto, *Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras*, Advances in Mathematics, Vol. 185, No. 2 (2004), pp. 400–458

[34] V. G. Kac, P. M. Frajria, P. Papi, *Multiplets of representations, twisted Dirac operators and Vogan's conjecture in affine setting*, Advances in Mathematics, Vol. 217, No. 6 (2008), pp. 2485–2562

[35] V. G. Kac, A. De Sole, *Finite vs affine W-algebras*, Japanese Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 1 (2006), pp. 137–261

[36] V. G. Kac, A. De Sole, *Freely Generated Vertex Algebras and NonLinear Lie Conformal Algebras*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 254, No. 3 (2005), pp. 659–694

[37] V. G. Kac, A. Radul, *Representation theory of the vertex algebra $W_{1+\infty}$*, Transformation Groups, Vol. 1, No. 12 (1996), pp. 41–70

[38] V. G. Kac, W. Wang, *Vertex operator superalgebras and their representations*, Contemporary Math, Vol. 175 (1994), pp. 161–191

[39] H. Li, *The Physics Superselection Principle in Vertex Operator Algebra Theory*, Journal of Algebra, Vol. 196, No. 2 (1997), pp. 436–457

[40] H. Li, *Certain Extensions of Vertex Operator Algebras of Affine Type*, Communications in Mathematical Physics, Vol. 217, No. 3 (2001), pp. 653-696

[41] H. Li, Q. Wang, *On vertex algebras and their modules associated with even lattices*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 213 (2009), pp. 1097–1111.

[42] J. Lepowsky, H. Li, *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, Progress in Mathematics, Vol. 227, Birkhäuser, Boston, 2004.

[43] A.M. Polyakov, *Gauge transformations and diffeomorphisms*, International Journal of Modern Physics A, Vol. 5, No. 5 (1990), pp. 833–842

[44] S.P. Smith, *A class of algebras similar to the enveloping algebra of sl(2),* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 322, No. 1 (1990), pp. 285–314

[45] A. Zamolodchikov, *Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory*, Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 65, No.3 (1985), pp. 347–359

[46] Y. Zhu, *Modular Invariance of Characters of Vertex Operator Algebras*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. 9, No. 1 (1996), pp. 237–302

Životopis

Ana Kontrec rođena je 23. rujna 1990. u Puli. Osnovnu školu i matematičku gimnaziju završila je Zagrebu. Preddiplomski studij matematike završila je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2012. godine upisala je diplomski studij Teorijske matematike na Jacobs University u Bremenu i Jagiellonskom sveučilištu u Krakovu, te je diplomirala 2014. Doktorski studij matematike upisala je iste godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Sudjelovala je na konferencijama "Representation Theory XIV", Dubrovnik, 2015.; "Winter School Geometry and Physics", Srni, 2016; "Modular forms are everywhere", MPIM, Bonn, 2017.; "Representation Theory XV", Dubrovnik, 2017.; "Affine, vertex and W-algebras", Rim, 2017.; "Vertex algebras and related topics", Zagreb, 2018. Prezentirala je poster na konferenciji "Young Researchers in String Mathematics", MPIM, Bonn, 2017, te održala predavanja na konferencijama "Women at the intersection of mathematics and theoretical physics", DESY, Hamburg, 2018 i "Workshop on vertex algebras and infinite-dimensional Lie algebras", Split, 2018. (naslov predavanja: Classification of irreducible modules of some irrational $\mathcal{W}$-algebras).

Od 2015. zaposlena je kao doktorand na projektu Hrvatske zaklade za znanost br.2634 (Algebarske i kombinatorne metode u teoriji verteks algebri). Od 2014. sudjeluje u radu Seminara za algebru.