Neformalna vs. formalna matematika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dominik Čulo

NEFORMALNA VS. FORMALNA MATEMATIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Bruckler

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Prirodni jezik vs. matematički jezik **2**
1.1 Sintaksa i semantika 2
1.2 Implikature i implikacije 5
1.3 Definicije 7

2 Dedukcija u matematici **10**
2.1 Analiza i sinteza 10
2.2 Matematička indukcija 13

3 Matematički koncepti **15**
3.1 Broj 15
3.2 Beskonačnost 25
3.3 Geometrija 27
3.4 Vjerojatnost i statistika 33
3.5 Infinitezimalni račun 37

4 Česte miskoncepcije **44**
4.1 Iluzija linearnosti 44
4.2 0,9999... $\neq$ 1 45
4.3 Limesi 47
4.4 Uvjetna vjerojatnost 48
4.5 Očekivanje – St. Petersburški paradoks 50
4.6 Varljiva statistika 52

5 Zaključak **57**

Bibliografija **58**

Uvod

Matematičke koncepte poput broja, beskonačnosti, vjerojatnosti, itd. ljudi naivno shvaćaju i koriste u svakodnevnom životu. Na toj razini, ti koncepti su često vrlo ograničeni (npr. aritmetika s beskonačnosti se svodi na „beskonačno + beskonačno = beskonačno") ili nekonzistentni („ako bacamo pravedan novčić i padne 9 glava, očekujemo veću šansu da padne pismo"). Temelje se na intuiciji koja je korisna za brzo rješavanje jednostavnih problema s kojima se često susrećemo u svakodnevnom životu, ali intuicija često vodi do paradoksalnih ili krivih zaključaka kada ju pokušamo primijeniti na kompliciranije ili rjeđe probleme. To je posebno vidljivo pokušamo li logički razmotriti temelje tih koncepata. Problemi nastaju jer su ti koncepti u matematici idealizirani, a u stvarnom životu se bavimo samo aproksimacijama. S druge strane, matematika je inspirirana tim ograničenim i naivnim konceptima te ih pokušava usustaviti i formalizirati, učiniti ih konzistentnima. Razumijevanje matematičkih koncepata u kontekstu matematike stoga zahtjeva višu razinu apstraktnog mišljenja nego u svakodnevnom kontekstu. Formalni matematički koncepti su mnogo opširniji i dobro definirani pa o matematičkim izjavama možemo donositi sigurne zaključke koji se ne oslanjaju na aproksimacije. U ovome radu ćemo razmatrati razlike između toga kako matematičke koncepte shvaća prosječna osoba, u kontekstu svakodnevnog života, i matematičar, u kontekstu matematike kao formalne discipline.

Poglavlje 1

Prirodni jezik vs. matematički jezik

Strogo matematičko razmišljanje i shvaćanje koncepata razlikuje se od naivnog već i u samom jeziku kojim se ideje izražavaju. Jezik matematike je znatno precizniji od prirodnog jezika i ne ovisi u velikoj mjeri o vanjskom kontekstu, no ima i mnogo toga zajedničkog s prirodnim jezikom. Stoga ima smisla usporediti neke sastavnice prirodnog jezika sa sastavnicama matematičkog jezika. U ovom ćemo se poglavlju usredotočiti na sintaksu i semantiku u logici te implikature[1] u prirodnom jeziku usporediti s implikacijama u logici i matematici, a reći ćemo nešto i o definicijama matematičkih pojmova.

1.1 Sintaksa i semantika

Laički rečeno, sintaksa podrazumijeva simbole koji se koriste u jeziku te načine na koje se oni kombiniraju u veće strukture – slova u riječi, riječi u rečenice, i rečenice u tekstove. S druge strane, semantika predstavlja značenje koje se pridružuje sintaksi, odnosno ono što riječima želimo izraziti [14]. Svakodnevni je jezik dosta fleksibilan jer često dopušta da jedna sintaktička jedinica (npr. riječ) ima više pridruženih semantičkih jedinica (tj. značenja). Tako na primjer riječ „srce" može označavati organ („srce se nalazi u prsnoj šupljini"), središte („u srcu grada"), suosjećajnost („ona nema srca"), itd. S druge strane, jedno značenje može biti kodirano pomoću više riječi (za hrast možemo reći i da je drvo i da je stablo). Iako su takve situacije moguće i u matematici, ona aktivno nastoji eliminirati moguće nejasnoće. Učenici nerijetko imaju problema sa shvaćanjem matematičkih koncepata jer se iste riječi koriste i u svakodnevnom životu, ali s drugačijim značenjem. Njihovo razumijevanje običnog razgovora im dakle na neki način sputava mogućnost da razumiju matematiku. S obzirom da se matematičko razmišljanje temelji na preciznim de-

[1] Implikature su nedoslovna značenja rečenica, odnosno značenja koja nisu eksplicitno ni strogo implicitno (u matematičkom smislu) sadržana u izjavi.

finicijama, aksiomima i pravilima dedukcije, za razumijevanje biti matematike valja početi od matematičke logike koja leži u njenom temelju [20].

Formalnije, sintaksu čine jezik (alfabet i formule) te račun (aksiomi i dokazi), a semantiku interpretacija, istinitost, valjanost i slični koncepti [31]. Radi jednostavnosti, usredotočit ćemo se na logiku sudova. Propozicionalne varijable su velika tiskana slova latinske abecede kojima možemo simbolički označavati tvrdnje. Te oznake nemaju značenje same po sebi jer se još nismo dotakli semantike. Propozicionalne varijable možemo slagati u kompleksnije formule pomoću logičkih veznika. To su simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ koji su također samo oznake bez značenja. Uz to, služimo se i zagradama kao pomoćnim simbolima. Propozicionalne varijable, logički veznici i pomoćni simboli zajedno čine alfabet logike sudova. Slaganjem tih simbola ćemo dobiti formule u logici sudova:

Definicija 1.1.1. *Svaka propozicionalna varijabla je formula. Također, ako su A i B formule, tada su i $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ formule.*

Vanjske zagrade obično ispuštamo pri pisanju. Formule iz definicije čitamo redom kao „ne A", „A i B", „A ili B", „ako A, onda B" i „A ako i samo ako B". Primijetimo da iz ove definicije slijedi da ako su A, B i C propozicionalne varijable, onda je $A \rightarrow (\neg C \wedge (B \vee A))$ formula. S druge strane, $((\neg \vee A(B$ nije formula. Dakle jasno je definirano što se smatra formulom, a što ne, slično kao što je u prirodnom jeziku „vatra" riječ, a „glnm" nije.

Dodajmo sada semantiku tako što ćemo formulama pridodati interpretaciju. U prirodnom jeziku bi to bilo neko konkretno značenje, no u logici pod time podrazumijevamo neku numeričku vrijednost.

Definicija 1.1.2. *Svaku funkciju I koja propozicionalnim varijablama pridružuje vrijednost 0 ili 1 nazivamo interpretacijom.*

Ako je $I(A) = 1$, reći ćemo da je A istinito za interpretaciju I, a ako je $I(A) = 0$, kažemo da je A neistinito za interpretaciju I. Laički rečeno, za svaku jednostavnu izjavu postoje dvije interpretacije – jedna za koju je ta izjava istinita i druga za koju je neistinita. Interpretaciju možemo proširiti na sve formule. S obzirom da želimo logiku primjenjivati, korisno je to učiniti na način da se logički veznici interpretiraju slično kao veznici u prirodnom jeziku. Tako bi na primjer rečenicu „Ana i Borna su vani" interpretirali kao istinitu ako su istinite obje izjave „Ana je vani" i „Borna je vani". Ako je barem jedna od tih izjava neistinita, rečenica „Ana i Borna su vani" ne bi bila istinita. Logički veznik $\wedge$ otprilike odgovara vezniku 'i' u prirodnom jeziku. Jer želimo tu povezanost, definirat ćemo interpretaciju na formulama oblika $A \wedge B$ tako da je $I(A \wedge B) = 1$ ako je $I(A) = 1$ i $I(B) = 1$, a $I(A \wedge B) = 0$ inače. Tablično, to možemo prikazati ovako:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Svaki redak tablice odgovara interpretaciji, pa vidimo da imamo 4 moguće interpretacije[2]. $A \wedge B$ je istinito samo za onu interpretaciju za koju su i A i B istiniti.

Sada ćemo formalno definirati interpretacije za sve formule u logici sudova pomoću sljedeće tablice istinitosti[3]:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Obratimo pozornost na nekoliko stvari. Prvo, na značenje pojma „istina”. U razgovoru, uglavnom za tvrdnju kažemo da je istinita ako se podudara sa stvarnošću, odnosno ako je možemo empirijski potvrditi (promatranjem ili pokusom). Tako je izjava „Zemlja je ravna.” istinita ako je Zemlja zaista ravna, a lažna inače. Naravno, time zanemarujemo razne poglede na epistemologiju i ontologiju, ali filozofija je izvan okvira ovoga rada. Nasuprot toga, u logici istinitost ovisi o interpretaciji. Kada bi sa Z označili izjavu „Zemlja je ravna.”, postojala bi jedna interpretacija za koju je ta izjava lažna, te jedna za koju je istinita [31]. Kada primjenjujemo logiku u razmišljanju o stvarnome svijetu, naravno biramo interpretaciju koja nam je korisnija, u ovom slučaju $I(Z) = 0$. No sama logika ne govori ništa o stvarnome stanju svijeta. Logika, pa tako i matematika, nije empirijska znanost.

Kao drugo, primijetimo namjernu analogiju u značenju veznika sa veznicima u prirodnom jeziku. Osim konjunkcije, vidimo i $\neg A$, odnosno negaciju od A. Ona ima obrnutu vrijednost od A za svaku interpretaciju – ako je tvrdnja istinita, njena negacija je neistinita i obratno. Pravila u tablici kojima smo interpretaciju proširili na sve formule logike sudova temelje se na intuiciji i prirodnom jeziku [7]. Usprkos tome, ti veznici ne odgovaraju potpuno veznicima u prirodnom jeziku, kao što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju.

Konačno, istaknimo i da praktična inspiracija za interpretiranje veznika ne uvjetuje da je to jedini način da se veznike interpretira. Mogli smo u tablici složenim formulama pridružiti drugačije vrijednosti, ali bismo time izgubili lakoću primjene logike u stvarnom

[2]Na $\{A, B\}$ su definirane 4 interpretacije, a svaku od njih smo proširili na $\{A, B, A \wedge B\}$.

[3]Skup svih formula logike sudova je prebrojiv. $I_k(F_1 \wedge F_2)$ definiramo ovisno o $I_k(F_1)$ i $I_k(F_2)$ analogno kao što $I_k(A \wedge B)$ ovisi o $I_k(A)$ i $I_k(B)$ za pojedinu interpretaciju I_k. Analogno za ostale logičke veznike.

životu. Nadalje, logika sudova nije jedina logika koja postoji. U matematici se tako primjenjuje i logika prvog reda u kojoj istinitost ima kompliciraniju definiciju jer se koriste i kvantifikatori. Osim toga, postoje i *fuzzy* logike u kojima istinitosna vrijednost ne mora biti 0 ili 1 već može biti i bilo koji realni broj među njima, viševrijednosne logike u kojima na primjer tvrdnja osim istinite i neistinite može biti i oboje ili nijedno, te mnoge druge vrste [31].

1.2 Implikature i implikacije

U prirodnom jeziku kontekst razgovora ima velik utjecaj na razumijevanje poruke. Načinima na koje kontekst utječe na značenje bavi se pragmatika jezika. Na primjer, kada osoba kaže: „Pada kiša.", time može poručiti da ne namjerava ići van, iako to značenje nije sadržano u definicijama riječi koje čine tu rečenicu. Te *implikature* se razlikuju od implikacija po tome što kod implikacija antecedent nužno povlači konsekvent, dok kod implikatura ta nužnost ne postoji, a „konsekvent" ovisi o kontekstu. U razgovoru razumijemo implikature iako su često neizrečene jer funkcioniramo pod pretpostavkom da se sugovornik njima služi, te ih i sami koristimo jer pretpostavljamo da će ih sugovornik razumjeti iako su neizrečene. Na taj način sugovornici „surađuju" kako bi mogli uspješnije komunicirati, što se naziva kooperativnim principom [14]. Pogledajmo rečenice u sljedećem primjeru.

Primjer 1.2.1.
Mačke imaju dvije noge.
Neki ljudi su smrtni.
List papira je oblika paralelograma.

Za svaku od ovih rečenica bismo rekli da nije istinita. To je zato jer ih u skladu s kooperativnim principom tumačimo na sljedeći način:

Mačke imaju ***samo*** *dvije noge.*
Neki, ***ali ne svi*** *ljudi su smrtni.*
List papira je oblika ***općeg*** *paralelograma.*

Naime, u razgovoru bismo rekli da mačke imaju četiri noge, da su svi ljudi smrtni i da je list papira pravokutnog oblika jer su te izjave najinformativnije u kontekstu razgovora. S druge strane, njihovo tumačenje u kontekstu logike bilo bi sljedeće:

Mačke imaju ***barem*** *dvije noge.*
Neki ljudi, ***a možda i svi****, su smrtni.*
List papira ima dva para paralelnih rubova iste duljine.

Kada su rečenice tako protumačene, za njih bismo rekli da su istinite. Osim kvantifikatora i matematičkih pojmova, različito razumijemo i logičke veznike. Tako bi rečenice „Počeo je piti i dobio otkaz" te „Dobio je otkaz i počeo piti" u razgovoru shvatiti kao „Počeo je piti pa je zbog toga dobio otkaz" i „Dobio je otkaz te je zbog toga počeo piti", dok je u logici veznik $\wedge$ komutativan pa bi te dvije rečenice imale isto značenje. Vidimo da iako je $\wedge$ vrlo sličan vezniku 'i' u prirodnom jeziku, nisu potpuno isti [7].

Slično, rečenice oblika „A ili B" obično tumačimo kao „točno jedno od A i B", dok u matematici to znači „barem jedno od A i B". Prva interpretacija odgovara isključnoj disjunkciji te se u kontekstu logike obično izražava kao „ili A ili B" i označava sa $A \veebar B$. Dakle jasno je da se načini tumačenja izraza u prirodnom jeziku biti razlikuju od tumačenja u kontekstu logike i matematike već na osnovnoj razini [7]. Posebnu pažnju ćemo posvetiti implikaciji jer je kod nje ta razlika najizraženija.

Primjer 1.2.2.
Ako je Zemlja ravna, psi su mačke.
Svi Marsovci su crveni.

Za ovakve rečenice bismo rekli da su besmislene ili možda da nisu istinite. Kada bismo ih direktno preveli u jezik iskazne logike i logike prvog reda, dobili bismo sljedeće izraze:
$Z \to P$
$\forall x(M_x \to C_x)$
Druga rečenica je prevedena kao „Za sve x-eve vrijedi da ako su Marsovci, onda su crveni." Matematički govoreći, obje rečenice su istinite jer je antecedent implikacije neistinit. Ovdje se radi o takozvanim *ispraznim istinama* (*eng. vacuous truths*). U tablici istinitosti možemo vidjeti da su sudovi oblika $A \to B$ istiniti za svaku interpretaciju za koju je A neistinito. Dakle iz neistinite tvrdnje možemo zaključiti bilo što i nastala implikacija će biti istinita. Jer je tvrdnja „Zemlja je ravna" neistinita, sve implikacije kojima je ta tvrdnja antecedent su istinite. Analogno, tvrdnje „Svi Marsovci su crveni" i „Nijedan Marsovac nije crven" su istovremeno istinite jer Marsovci ne postoje. Univerzalna kvantifikacija nad praznim skupom, kao i implikacija s neistinitim antecedentom dovode do istinitosti vrlo neintuitivnih tvrdnji. Mogućnost da iz neistinite tvrdnje zaključimo bilo što, te da o elementima praznog skupa možemo zaključiti bilo što zovemo principom eksplozije. On se može zaobići u parakonzistentnim logikama, ali se u tom slučaju moraju napustiti neki drugi zakoni koji vrijede u klasičnoj logici [9].

Ukratko, značenja koja iščitavamo iz rečenica u svakodnevnom govoru primjer su konverzacijskih implikatura koje ovise o kontekstu, a koje se u većini slučajeva razlikuju od logičkih implikacija koje ovise o jasno postavljenim aksiomima. Baš zbog takvih razlika je potreban oprez pri matematičkom modeliranju stvarnosti. Naime, rečenice iz govornog jezika ne možemo preslikati '1 na 1' u rečenice u logici. Posebno, razumijevanje implikacije u matematici je od iznimne važnosti jer se upravo na implikacijama temelji deduktivno zaključivanje pa i forma matematičkog dokaza [18].

Osim istinitosti, još jedan važan pojam jest valjanost argumenta. U argumentu imamo neke početne tvrdnje ili premise te iz njih dedukcijom dolazimo do zaključka. Ako istinitost premisa nužno povlači istinitost zaključka, kažemo da je argument valjan. Ekvivalentno tome, argument nije valjan ako je moguće da su sve premise istinite, a zaključak neistinit. U sljedećem primjeru možemo vidjeti jedan logički valjan argument.

Primjer 1.2.3.
Sve mačke su psi.
Svi psi su miševi.

Dakle, sve mačke su miševi.

Naime, kada bismo obje premise prihvatili kao istinite, morali bismo prihvatiti i zaključak. Općenito, argumenti sljedećeg oblika su valjani, neovisno o tome što oznake A, B i C predstavljaju:

Svi A su B
Svi B su C

Dakle, svi A su C.

U gornjem smo primjeru imali neistinite premise, ali valjan argument. U sljedećem primjeru ćemo vidjeti argument u kojem su sve premise istinite, kao i zaključak, ali argument nije valjan.

Primjer 1.2.4.
Sve mačke su životinje.
Svi psi su životinje.

Dakle, nijedna mačka nije pas.

Iako je svaka izjava u argumentu istinita u stvarnosti, unutar logike možemo teoretski zamisliti situaciju u kojoj obje premise vrijede, ali zaključak ne vrijedi. Naime, kada bi mačke bili psi, obje premise bi bile istinite, ali zaključak ne bi. Forma argumenta ne osigurava da se istinitost premisa očuva u zaključku te stoga argument nije valjan. Logika ne istražuje istinitost činjenica u smislu podudaranja izjava sa stanjem u stvarnosti, već se bavi formom argumenata i oblicima valjanog zaključivanja.

1.3 Definicije

Kada definiramo bilo koji pojam, prisiljeni smo to učiniti u terminima nekih drugih već definiranih pojmova. Analogno, kada želimo poduprijeti neku tvrdnju i uvjeriti druge u njenu istinitost, to činimo pozivajući se na tvrdnje koje su već prihvaćene kao istinite. No ne možemo tako nastaviti bez kraja te stoga odabiremo nešto od čega ćemo početi. To su neki primitivni pojmovi koji nisu precizno definirani već samo opisani na shvatljiv način, te tvrdnje koje prihvaćamo kao istinite i na kojima zasnivamo razmišljanje. Te početne tvrdnje nazivamo aksiomima, a uz njih postavljamo i određena pravila dedukcije koja služe tome da iz aksioma izvodimo druge tvrdnje. U matematici postoje i aksiomi koji nisu čisto logičkog sadržaja, kao što su aksiomi polja, Peanovi aksiomi, aksiomi planimetrije, itd. Istinitost matematičke tvrdnje ovisi i o njima. Možemo povući analogiju s igrom šaha. Izjava „moguć je mat u tri poteza" ovisi o trenutnom stanju na ploči i o odabiru pravila, a istinitost matematičkih tvrdnji ovisi o odabiru početnih aksioma. Tako je tvrdnja „Svaka dva pravca se sijeku." neistinita u euklidskoj ravnini, ali istinita u sfernoj geometriji. Aksiome dakle možemo u određenom smislu smatrati pravilima igre, a ovisno o njihovom odabiru dobivamo različite igre. Jednom kada odaberemo početna pravila, iz njih slijede nova pravila koja nazivamo teoremima. Formalnije, teorem je formula koja se može izvesti iz aksioma koristeći pravila dedukcije (koja ovise o logici koju odaberemo). Povijesno gledajući, matematičari su do suvremenog doba birali aksiome koji su im se činili intuitivnima, sa svrhom opisivanja stvarnog svijeta. Stoga je i matematika koja se razvila postala vrlo koristan alat prilagođen toj svrsi. No nije nužno da se aksiomi biraju sa svrhom modeliranja stvarnosti. Teorijska matematika se često bavi vrlo apstraktnim teorijama koje nisu namijenjene praktičnoj svrsi, iako se ponekad i za njih nađe korist. Ono što se uvijek nastoji izbjeći jest nekonzistentnost. Ako sustav nije konzistentan, odnosno ako je iz aksioma moguće dokazati i tvrdnju i njenu negaciju, onda je prema principu eksplozije moguće dokazati svaku tvrdnju [31].

Od definicija u matematici uglavnom tražimo da budu pregledne i sažete, da postoji barem jedan objekt koji zadovoljava definiciju, da nisu cirkularne te da nisu negativne ako mogu biti pozitivne. Kada govorimo o pojmovima koji su se koristili još od davnina, poput pojma kvadrata ili kruga, pokušavamo ih formalno definirati na taj način da svi objekti koji su povijesno imali taj naziv budu uključeni u tu definiciju, a objekti koji nisu imali taj naziv ne. Drugim riječima, namještamo opseg pojma kako bi odgovarao načinu na koji se taj pojam koristio u prošlosti. Neke definicije su generalizirane kako bi uključivale i razne slične objekte. Tako pojam pravca može uključivati pravce u raznim drugim geometrijama koji nisu nužno ravne crte. Definicije također ne bi smjele biti dvosmislene pa se stoga izbjegava slikovit jezik. Također je poželjna minimalnost, odnosno da se u definiciji ne javljaju uvjeti koji su posljedice drugih uvjeta iz definicije. Na primjer, „Pravokutnik kojemu su sve stranice iste duljine" može poslužiti kao definicija kvadrata, ali ta definicija ne bi bila minimalna. Dovoljno je da pravokutnik ima dvije susjedne stranice iste duljine kako bi bio kvadrat jer su tada nužno sve četiri stranice iste duljine [19].

Vrste definicija

Svaki pojam ima svoj opseg i sadržaj. Pod opsegom pojma podrazumjevamo skup svih objekata na koje primjenjujemo pojam. Sadržaj pojma je skup svih bitnih obilježja koja imaju svi objekti iz opsega pojma. Opseg pojma „pravokutnik" čine svi objekti koje nazivamo pravokutnicima (opći pravokutnici i kvadrati), a sadržaj čine sva svojstva koja vrijede za sve pravokutnike (ima 4 vrha, kuta i stranice, nasuprotne stranice su paralelne i iste duljine, postoji opisana mu kružnica, površina mu je jednaka umnošku duljina stranica, itd.). Što je sadržaj bogatiji, to je opseg širi, i obrnuto. Kada bismo sadržaju pojma pravokutnik dodali da su sve stranice iste duljine, time bismo ograničili opseg pojma jer opći pravokutnici više ne bi spadali u tu definiciju. Kada bismo mu oduzeli svojstvo da su nasuprotne stranice paralelne i iste duljine, opseg bi se proširio i uključivao i opće četverokute [19].

Čest način definiranja pojmova jest iskazivanjem najbližeg roda i razlike vrste. Pravokutnik je podvrsta mnogih rodova – paralelograma, četverokuta, mnogokuta, geometrijskih likova. Najbliži rod mu je paralelogram. Ono što razlikuje pravokutnik od ostalih vrsta paralelograma jest to što su mu unutarnji kutovi mjere $90°$. Stoga pravokutnik možemo definirati kao „paralelogram kojemu su unutarnji kutovi pravi." Ako zahtjevamo i minimalnost, mogli bi reći „paralelogram kojemu je jedan unutarnji kut pravi" jer je to dovoljno, ali time bismo mogli stvoriti implikaturu da je *samo* jedan unutarnji kut pravi.

Pojmovi se mogu definirati i nabrajanjem bitnih obilježja. Na primjer, kružnica je skup svih točaka euklidske ravnine koje su jednako udaljene od neke fiksne točke, a težište trokuta je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Relacija ekvivalencije je relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Neke matematičke objekte možemo konstruirati ili generirati pomoću drugih, već definiranih objekata. Tako osnosimetričnu točku možemo definirati opisom konstrukcije kojom ju možemo dobiti, a uspravni kružni valjak možemo definirati kao tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.

Postoje i induktivne (rekurzivne) definicije koje se često koriste kod nizova, ili objekata koji se generiraju rekurzivno. Na primjer, aritmetički niz je niz u kojem je svaki član osim prvog dobiven dodavanjem neke konstante d prethodnom članu. Definicija faktorijela je također rekurzivna, jer je $0! := 1$, a $n! = n(n-1)!$.

Neke definicije su dogovorne (konvencionalne). Tako je pozitivan smjer suprotan od smjera kazaljke na satu, a $0! := 1$ jer to čini definiciju binomnog koeficijenta elegantnijom i bližom intuiciji [19].

Poglavlje 2

Dedukcija u matematici

Iako matematika u školi nažalost često ostavlja dojam da se svodi na pamćenje i korištenje formula, bit matematike leži u primjeni dedukcije u svrhu otkrivanja posljedica aksioma. Tako se visokoškolska matematika bavi proučavanjem dokaza, odnosno nizova tvrdnji koji vode od aksioma i već dokazanih teorema do novih teorema, a svaka tvrdnja slijedi iz prethodnih prema nekom pravilu dedukcije[1]. U ovom poglavlju ćemo promotriti analizu, odnosno proces promišljanja koji vodi do dokaza, te opisati nekoliko vrsta dokaza koji se često primjenjuju u matematici.

2.1 Analiza i sinteza

Teoremi u matematici često započinju tek kao slutnje. Matematičar proučavajući neke objekte ili tvrdnje uočava određene pravilnosti te formira pretpostavke o njima. Pokušava pronaći protuprimjere te na taj način odbacuje neke pretpostavke, a one koje preostaju proučava detaljnije. Ako slutnja naizgled vrijedi i matematičar ju ne uspijeva opovrgnuti, tada je moguće da je ona teorem. No, s obzirom na to da matematika nije empirijska znanost već se temelji na logici, nije dovoljno na temelju promatranja i iskustva doći do zaključka, nego je teorem potrebno deduktivno izvesti iz aksioma. Često je teško isprva vidjeti kako to učiniti, zbog čega je korisno poigrati se s raznim idejama, ali na sistematičan i ciljan način. Taj postupak se u metodici naziva analizom te se može provesti na razne načine. Jedan od njih je da se krene od tvrdnje koju želimo dokazati i razmišljamo „unazad", spuštajući se od mogućeg teorema korak po korak do aksioma. Ako sa T označimo

[1] Temelje matematike kao deduktivne znanosti postavio je Euklid svojim *Elementima* napisanim oko 300. g. pr. Kr.

mogući teorem, a sa A skup aksioma koji su nam dostupni, tada analizom pokazujemo

$$T \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow ... \Rightarrow T_n \Rightarrow A,$$ [2]

gdje su sa T_i označene neke tvrdnje u međukoracima. Budući da dokaz zahtjeva obrnut smjer, zatim provjeravamo vrijede li umjesto nekih implikacija čak i ekvivalencije. Ovaj postupak se najčešće provodi pri rješavanju jednadžbi. Naime, kada rješavamo jednadžbu počinjemo od jednadžbe i dolazimo do nepoznanice. Time smo pokazali da „ako jednadžba vrijedi, nepoznanica je jednaka ...". Ali time nije dokazano da „ako je nepoznanica jednaka ..., onda jednadžba vrijedi". Dokaz bi u tom slučaju trebao biti provjera uvrštavanjem mogućeg rješenja u početnu jednadžbu, ili provjera da se iz svakog koraka možemo vratiti unatrag, odnosno da implikacije ne vrijede samo u smjeru od jednadžbe do mogućeg rješenja nego i obrnuto. U nastavi matematike se pri rješavanju jednadžbi oznake implikacija i ekvivalencija uglavnom ne zapisuju jer ekvivalencije uglavnom vrijede za zadatke koji se pojavljuju na osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj razini. Ekvivalencije ne vrijede nužno u jednadžbama u kojima se pojavljuju funkcije kojima domena nije cijeli $\mathbb{R}$, ali tada provjera uvjeta osigurava da dođemo to točnih rješenja. Stoga je postupak rješavanja jednadžbi uglavnom analitičko-sintetički [16].

Kod problema vezanih uz geometriju, analiza često uključuje skicu na kojoj su označene i poznate i tražene veličine kako bismo mogli doći do zaključaka o njihovom odnosu. U nastavi matematike se kod takvih zadataka ponekad javlja problem da učenici skicu koriste kao dokaz, ili da ne razlikuju dovoljno dobro zadane veličine od traženih na skici pa u dokazu koriste tvrdnje koje tek trebaju dokazati, čime im argument postaje cirkularan. Također je moguće da skica predstavlja neki specijalni slučaj te navodi na krive pretpostavke (npr. ako se kod tvrdnje koju treba dokazati za sve četverokute koristi skica kvadrata). Kod konstruktivnih zadataka je stoga poželjno provesti cijeli postupak od analize uz skicu, preko plana konstrukcije i same izvedbe konstrukcije, do dokaza i rasprave o uvjetima rješivosti, mogućim posebnim slučajevima i generalizacijama [16].

Nakon analize dolazi sinteza, odnosno sam dokaz. Kroz par jednostavnih primjera ćemo prikazati nekoliko jednostavnih vrsta dokaza.

Teorem 2.1.1. *Kvadrat parnog broja je paran broj.*

Dokaz. Neka je n paran broj. Tada ga možemo prikazati kao $n = 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Slijedi da je $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Jer je k prirodan broj, i $2k^2$ je prirodan broj (zatvorenost skupa prirodnih brojeva na množenje). Dakle n^2 smo prikazali kao višekratnik broja 2, što znači da je n^2 paran broj. □

[2] Dok je '$\rightarrow$' čisto sintaktička oznaka za logički veznik, '$\Rightarrow$' označava implikaciju na razini semantike. $P \Rightarrow Q$ znači da $I(P) = 1$ povlači $I(Q) = 1$ za svaku interpretaciju I.

Analogno se pokazuje da je kvadrat neparnog broja neparan broj. Ovo je bio primjer direktnog dokaza. Dokazivali smo tvrdnju „Ako je broj paran, i kvadrat mu je paran”. To smo učinili tako da smo pretpostavili antecedent („Broj je paran”) i dedukcijom došli do konsekventa („Kvadrat tog broja je također paran”). Pritom smo koristili već dokazane tvrdnje i definicije – definiciju parnog broja, jednakosti vezane uz kvadriranje i množenje te zatvorenost prirodnih brojeva na množenje [18].

Još jedna vrsta dokaza je dokaz kontrapozicijom. Naime, općenito u dokazu pokazujemo da određene premise (aksiomi, već dokazani teoremi) povlače određene zaključke, što možemo zapisati kao $P \Rightarrow Q$, gdje su P premise, a Q zaključci. No nekada to nije lako učiniti direktno, nego je lakše pokazati neku ekvivalentnu tvrdnju. Često je to kontrapozicija tražene tvrdnje, odnosno tvrdnja oblika $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Pogledajmo primjer.

Korolar 2.1.2. *Ako je kvadrat nekog broja neparan, onda je i sam broj neparan.*

Dokaz. Tražena tvrdnja je „Ako je n^2 neparan, onda je i n neparan.” Prema obratu po kontrapoziciji, to je ekvivalentno sa „Ako n nije neparan, onda n^2 nije neparan”, odnosno „Ako je n paran, onda je n^2 paran”. No to je upravo prethodno dokazani teorem. □

Analogno, „Ako je kvadrat nekog broja paran, onda je i sam taj broj paran” je ekvivalentno s „Kvadrat neparnog broja je neparan broj”. Vidimo da u ovom slučaju uz teorem 2.1.1 vrijedi i njegov obrat, no to općenito ne mora vrijediti jer $P \Rightarrow Q$ nije nužno ekvivalentno s $Q \Rightarrow P$. Jedan protuprimjer je da je kvadrat negativnog broja pozitivan, ali to ne znači da je broj negativan ako mu je kvadrat pozitivan (npr. broju 1 je kvadrat pozitivan, ali on sam nije negativan) [18].

Jedna vrsta dokaza koja je kroz povijest bila donekle kontroverzna su dokazi kontradikcijom (*reductio ad absurdum*). Naime, $P \Rightarrow Q$ je ekvivalentno i s $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \perp$, gdje $\perp$ označava kontradikciju, odnosno tvrdnju koja je neistinita za svaku interpretaciju. Primjer takve tvrdnje bi bio $P \wedge \neg P$. Da pomoću kontradikcije dokažemo tvrdnju T, prvo pretpostavimo suprotno od te tvrdnje, odnosno prepostavimo $\neg T$, i pokažemo da ta pretpostavka vodi do kontradikcije. Tada ta pretpostavka $\neg T$ ne može biti istinita, pa suprotna tvrdnja T mora biti istinita, što smo i željeli dokazati [18].

Teorem 2.1.3. $\sqrt{2}$ *je iracionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada ga možemo prikazati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi koji nisu oba parni. To možemo pretpostaviti jer ako imaju zajednički djelitelj veći od 1, razlomak možemo skratiti sve dok brojnik i nazivnik ne budu relativno prosti. Sada slijedi

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} /^2,$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} / \cdot n^2,$$
$$2n^2 = m^2.$$

Dakle, m^2 je paran. Prema analogonu korolara 2.1.2, tada je i m paran pa ga možemo prikazati kao $m = 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2 / : 2,$$
$$n^2 = 2k^2.$$

Dakle, n^2 je paran. Analogno kao za m slijedi i da je n paran. Sada znamo da su i m i n parni, što znači da su oba djeljiva s 2, a to je u kontradikciji s tvrdnjom da m i n nisu oba parni. Budući da pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj vodi do kontradikcije, neistinita je pa mora vrijediti da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. □

Još neki jednostavni i zanimljivi primjeri dokaza kontradikcijom su dokaz da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva i dokaz da realnih brojeva ima neprebrojivo mnogo. Intuicionisti i konstruktivisti uglavnom odbacuju ovu vrstu dokaza jer se pomoću nje može dokazati postojanje matematičkih objekata bez da ih se eksplicitno konstruira.

2.2 Matematička indukcija

Indukcija se razlikuje od dedukcije po tome što je zaključak generalizacija na temelju nekoliko primjera i ne slijedi nužno iz premisa. Induktivno zaključivanje je u svakodnevnom životu mnogo češće od deduktivnog, iako je nepreciznije. Tako se naša ponašanja temelje na iskustvu koje smo stekli, ali to iskustvo nije nužno primjenjivo u budućnosti. Iako je matematika deduktivna, induktivno razmišljanje ima važnu ulogu, posebno u postupku analize gdje pokušavamo opisati primjećene pravilnosti i generalizirati tvrdnje. No u matematici postoji postupak kojeg nazivamo matematičkom indukcijom, a koji je zapravo deduktivan, iako je u ideji induktivan. Na primjer, kada želimo dokazati da neka tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj, dovoljno je dokazati da ona vrijedi za broj 1, te da ako vrijedi za neki prirodni broj, mora vrijediti i za sljedeći[3]. Ako sa T_n označimo da tvrdnja T vrijedi za broj n, dokazujemo sljedeće dvije tvrdnje:

1) T_1 (baza indukcije),

2) $T_n \Rightarrow T_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (korak indukcije).

Iz toga će slijediti da vrijedi $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Kako bismo dokazali tvrdnju 2), pretpostavljamo da T_n vrijedi za neki proizvoljan (neodređen)[4] $n \in \mathbb{N}$ i pod tom pretpostavkom dokazujemo

[3]Za formalni iskaz aksioma matematičke indukcije pogledati (P5) na str. 20.

[4]I ova standardna matematička formulacija „za proizvoljan element nekog skupa vrijedi tvrdnja T" se često krivo razumije, te ju učenici i drugi nematematičari često tumače kao da ona znači da oni mogu izabrati jedan konkretan takav element i za njega provjeriti tvrdnju T.

da vrijedi i T_{n+1}. Pomoću principa matematičke indukcije analogno možemo dokazivati da tvrdnje vrijede počevši od nekog drugog cijelog broja umjesto od 1 [17]. U kontekstu teorije skupova, princip matematičke indukcije je poseban slučaj općenitije transfinitne indukcije.

Primjer 2.2.1. *Pokažimo da za sve prirodne brojeve i nulu vrijedi* $1+2+4+8+16+...+2^n = 2^{n+1} - 1$.

S lijeve strane imamo zbroj potencija broja 2*, počevši od potencije s eksponentom* 0*.*
1) Prvo pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 0$*. Zbroj s lijeve strane tada ima samo prvi član pa je jednaka* 1*. Ako u formulu s desne strane uvrstimo* $n = 0$*, dobivamo* $2^{0+1}-1 = 2-1 = 1$*. Jer su lijeva i desna strana jednake, tražena jednakost vrijedi za* $n = 0$*.*
2) Prepostavimo $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ *za neki* $n \in \mathbb{N}_0$*. Želimo pokazati da tada vrijedi odgovarajuća tvrdnja za* $n + 1$*, odnosno*

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1.$$

U zbroju s lijeve strane uočimo $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n$*, što je po pretpostavci jednako* $2^{n+1} - 1$*. Sada slijedi*

$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Desna strana je jednaka traženoj desnoj strani. Sada smo pod pretpostavkom da tražena tvrdnja vrijedi za neki broj iz N_0 *pokazali da vrijedi i za sljedeći. Uz bazu indukcije, sada možemo po principu matematičke indukcije zaključiti da tražena tvrdnja vrijedi za sve* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Poglavlje 3

Matematički koncepti

3.1 Broj

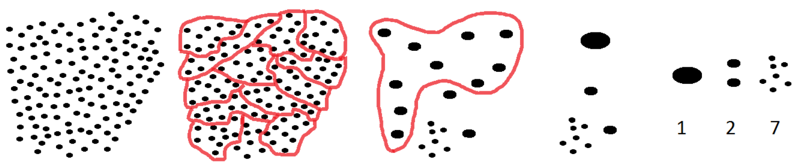
Kratka povijest

U matematici se često susrećemo s brojevima, do te mjere da ljudi često svode matematiku na aritmetiku te od matematičara očekuju sposobnost brzog računanja s velikim brojevima. Iako su brojevi tek dio matematike, ipak su jedna od glavnih asocijacija koje ljudi imaju uz matematiku. No, što je zapravo broj? Istina je da pojam broja zapravo i nije precizno definiran. Naime, opseg pojma „broj" se kroz povijest dosta mijenjao. Bilježenje brojeva seže daleko u prošlost, prije više od 40 000 godina, u obliku zareza u kostima ili kamenju. Indijski matematičar Brahmagupta je u 7. st. koristio nulu kao broj, a iako se vjerojatno koristila i prije, nema toliko dugu povijest kao prirodni brojevi. Negativni brojevi se pojavljuju u Kini najkasnije u 5. st., a europski matematičari ih dugo nisu smatrali pravim brojevima. Razlomci su se pojavili mnogo ranije te su bili prisutni u egipatskoj matematici još oko 1650. pr. Kr. Antički Grci su koristili omjere prirodnih brojeva, odnosno racionalne brojeve, i bili su svjesni postojanja iracionalnih veličina, ali ni jedne ni druge nisu smatrali brojevima. Kompleksni brojevi se pojavljuju u 16. st. s Cardanom u postupku rješavanja jednadžbe trećeg stupnja, a Bombelli je prvi prihvatio te brojeve kao smislene i opisao račun s njima. Naziv „imaginarni brojevi" se pripisuje Descartesu, koji ga je koristio podrugljivo, a postali su prihvaćeni tek u 19. st. zahvaljujući radovima Wessela i Gaußa. Danas pojam broja na srednjoškolskoj razini uključuje prirodne, cijele, racionalne, realne i kompleksne brojeve. U višoj matematici brojevima smatramo i transfinitne brojeve poput ordinalnih i kardinalnih brojeva, hiperrealne, superrealne i surealne brojeve, hiperkompleksne brojeve (kvaternione, oktonione, ...), p-adične brojeve te mnoge druge. Neke skupove brojeva je moguće dobiti iz drugih pomoću klasa ekvivalencije. Tako je svaki racionalan broj klasa uređenih parova cijelih brojeva. S druge strane, neke klase uređenih parova ne smatramo brojevima, kao na primjer vektore. Matrice je također moguće zbrajati, oduzimati i množiti. Ipak, vektori, matrice, funkcije, polinomi, i ostali matematički objekti se uglavnom ne smatraju brojevima, iako imaju mnogo toga zajedničkog s brojevima. Zapravo ne postoji konsenzus o tome koja svojstva su nužna kako bi matematički objekt bio broj pa je pojam broja dakle uglavnom konvencija bez posebnog značenja [4][5].

Razlikujemo „broj" kao matematički objekt sa svojstvima koja proizlaze iz aksioma, i „brojku", simbol kojim zapisujemo broj. Dakle, „broj" je pojam na razini semantike, a „brojka" na razini sintakse. Tako arapska brojka '5' i rimski '*V*' označavaju isti broj. Također razlikujemo i pozicijske i nepozicijske brojevne sustave. U pozicijskim pozicija znamenke utječe na njenu vrijednost – znamenka '2' može predstavljati vrijednost dva (u brojci 2), dvadeset (u 25), dvjesto (u 247), itd. ovisno o svojoj poziciji. U rimskom brojevnom sustavu, *V* uvijek označava pet, neovisno o svojoj poziciji. U narednim cjelinama ćemo promotriti intuiciju koja leži u podlozi formalnih definicija pozicijskog brojevnog sustava, te prirodnih, cijelih i racionalnih brojeva.

Pozicijski brojevni sustavi

Brojevi koji su nam svima najpoznatiji i najintuitivniji su prirodni brojevi. Već i u vrtićima djeca uče brojati i to tako da prebrojavaju kockice ili sličice. Povijesno gledajući, prirodni brojevi su se vjerojatno koristili za prebrojavanje objekata ili životinja, bilježenje količina i proteklog vremena i slično. Možemo ideju ilustrirati na sljedeći način. Pretpostavimo da pastir ima mnogo ovaca. Želi ih pustiti na ispašu, ali ne može istovremeno paziti na svaku od njih. Stoga ih pušta na ispašu jednu po jednu, a za svaku koju pusti odloži kamenčić sa strane. Kasnije, kada se vraćaju, za svaku koja se vrati makne kamenčić. Broj kamenčića odgovara broju puštenih ovaca, pa ako kamenčići preostanu, to znači da se neke od njih nisu vratile. Ovdje možemo vidjeti motivaciju za razvoj brojevnog sustava. Ako pastir ima mnogo ovaca, potrebno mu je mnogo kamenčića. Bilo bi mu lakše kada bi manje kamenčiće zamijenio jednim većim kada ih se dovoljno nakupi. Tako bi mogao deset malih kamenčića zamijeniti jednim kamenom srednje veličine, a ako je potrebno i 10 kamena srednje veličine zamijeniti jednim velikim. Pogledajmo na slici 3.1 kako bi razvoj zapisa mogao izgledati.



Slika 3.1: Od 127 oznaka jedinica do pozicijskog brojevnog zapisa

S obzirom na to da će se svaka grupa od deset kamenčića iste veličine zamijeniti jednim većim, na kraju će za svaku veličinu biti manje od deset kamenčića te veličine. Stoga je dovoljno imati deset simbola za broj kamenčića jedne veličine $(0 - 9)$, pa je deset znamenaka dovoljno da zapišemo bilo koji prirodan broj, bez obzira na njegovu veličinu. Brojeve kamenčića smo poredali od broja najvećih kamenova do broja najmanjih kamenčića pa je ovaj brojevni sustav pozicijski. Na takvom modelu je lako vidjeti zašto prirodne brojeve zbrajamo i oduzimamo potpisivanjem kao što učimo u školi.

Zadnja znamenka broja predstavlja jedinice, predzadnja deset jedinica, odnosno desetícu, sljedeća slijeva deset desetica, tj. stoticu, i tako dalje. To su upravo potencije broja deset pa npr. broj 127 gledamo kao $127 = 1\cdot100+2\cdot10+7\cdot1 = 1\cdot10^2+2\cdot10^1+7\cdot10^0$. Općenito, broj $x = \overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ ima znamenke $a_i \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, pa ga možemo zapisati kao $x = a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+...+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10^1+a_0\cdot10^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\cdot10^k$. Ovo možemo generalizirati tako da zapis dozvoljava i decimalne brojeve, a tada decimalama odgovaraju negativne potencije broja 10 pa je npr. $2{,}17 = 2\cdot10^0+1\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}$. Decimalni broj $x = a_0{,}a_1a_2a_3...$, gdje su $a_1, a_2, a_3, ...$ decimale, a a_0 cijeli broj čiji je zapis definiran kao gore, možemo zapisati kao $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + ... = \frac{a_0}{10^0} + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. To dalje možemo poopćiti na proizvoljnu bazu $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Definicija 3.1.1. *Zapis nenegativnog realnog broja x u bazi b je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k}$, gdje je a_0 nenegativan cijeli broj, a a_k su znamenke iz skupa* $\{0, 1, ..., b - 1\}$.

Iz motivacijskog primjera i slike 3.1 bi trebalo biti jasno kako pretvaramo brojeve iz baze u bazu. Kako bi broj zapisan u bazi b zapisali u bazi 10, trebamo izračunati sumu koja definira taj zapis.

Primjer 3.1.2. $1325_{(6)} =?_{(10)}$
$1325_{(6)} = 1\cdot6^3+3\cdot6^2+2\cdot6^1+5\cdot6^0 = 1\cdot216+3\cdot36+2\cdot6+5\cdot1 = 216+108+12+5 = 341_{(10)}$

Kako bismo broj zapisan u bazi 10 zapisali u bazi b? Promotrimo kako smo na slici 3.1 došli do zapisa broja u bazi 10. Podjelili smo kamenčiće u grupe od 10 i svaku takvu grupu zamjenili većim kamenom. Broj kamenčića koji nisu bili podijeljeni u grupu od 10 je bio znamenka jedinica. Broj srednjih kamenčića smo zatim opet dijelili s 10. Ostatak pri dijeljenju je sada bio znamenka desetica, a rezultat djeljenja smo zatim opet djelili s 10, i tako dalje. Dakle, potrebno je broj dijeliti s bazom b, a ostaci pri dijeljenju će biti znamenke broja čitane zdesna ulijevo.

Primjer 3.1.3. $341_{(10)} = ?_{(6)}$

341	5
56	2
9	3
1	1

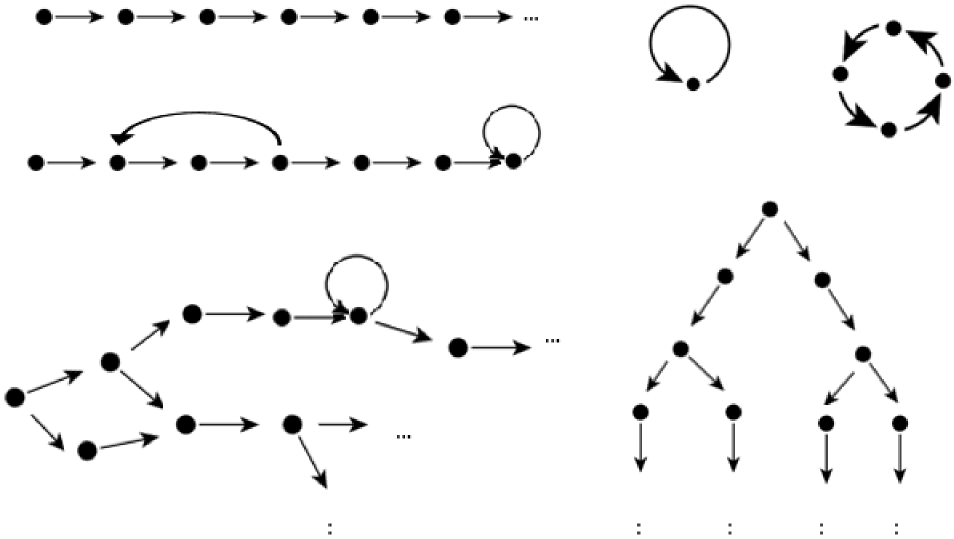
$$341_{(10)} = 1325_{(6)}$$

U primjeru smo dijelili 341 sa 6 te dobili rezultat 56 i ostatak 5. Zatim smo 56 dijelili sa 6 i dobili 9 i ostatak 2. Zatim 9 podjeljeno sa 6 daje 1 i ostatak 3, a 1 podijeljeno sa 6 daje 0 i ostatak 1 pa ovdje stajemo. Ostaci s desne strane vertikalne crte su znamenke broja u bazi 6 čitane zdesna nalijevo pa da dobijemo poredak slijeva nadesno treba te ostatke pročitati odozdo prema gore.

Na ovim primjerima smo vidjeli kako pragmatičnim razmišljanjem s ciljem pojednostavljivanja problema u svakodnevnom životu možemo razviti korisne sustave. No uvijek nam ostaje problem aproksimacije, koji proizlazi iz činjenice da ljudska percepcija stvarnosti nije savršena. Matematika uzima taj model i apstrahira ga, postavljajući jasna pravila za zapis realnog broja.

Prirodni brojevi – intuicija i formalizacija

Djeca u vrtićima i školama uče aritmetiku na raznim modelima. Tako nauče da je $2+2=4$ jer dvije jabuke i dvije jabuke daju četiri jabuke. Iako su takvi primjeri korisni za ilustraciju, a čak i za praktičnu upotrebu jer za to dublje razumijevanje nije potrebno, važno je naglasiti da takva opravdanja ne vrijede u matematici osim kao motivacija za razvijanje formalnih sustava. Kod primjera s jabukama, upitno je kako ih možemo zbrojiti ako nisu sve jednake. Što ako je neka veća, što ako je neka nagrizena? Kada bismo zasnivali matematiku na promatranju stvarnog svijeta, učinili bismo ju nejasnom, jednakosti bismo morali zamijeniti aproksimacijama, a često bismo morali biti i nekonzistentni. Kako bismo formalizirali koncept prirodnog broja, moramo postaviti neke aksiome ili ih definirati u terminima već postojećih objekata. U teoriji skupova se tako prirodni brojevi definiraju pomoću skupova, ali ovdje ćemo se usredotočiti na Peanove aksiome. S obzirom na to da smo prirodne brojeve koristili i prije nego što smo ih formalizirali, željeli bismo da se formalno definirani prirodni brojevi ponašaju na već poznat način. Najosnovnija stvar je ovdje ideja prebrojavanja. Želimo da prirodni brojevi imaju sljedbenike. No da bismo govorili o sljedbenicima, trebamo prvo imati neki broj od kojega ćemo početi. Postavimo za početak dva jednostavna pravila:
(P1) Broj 1 je prirodan broj: $1 \in \mathbb{N}$,
(P2*) Svaki prirodan broj ima svog sljedbenika koji je također prirodan broj: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists s(n) \in \mathbb{N}$.
Na slici 3.2 strelice iz točaka pokazuju na sljedbenike točaka.



Slika 3.2: Moguće strukture dobivene iz (P1) i (P2*) bez dodatnih uvjeta

Najgornji graf na slici 3.2 bi odgovarao strukturi skupa prirodnih brojeva koji koristimo. No, (P1) i (P2*) ne povlače nužno takvu strukturu pa nisu dovoljni da definiramo prirodne brojeve na željeni način. Čak i skup $\{1\}$ u kojem je 1 sam svoj sljedbenik zadovoljava oba pravila. Htjeli bismo izbjeći grananje grafa i cikluse. Grananje možemo izbjeći tako u (P2*) kažemo da svaki prirodan broj ima *jedinstvenog* sljedbenika koji je prirodan broj. Dakle, zamjenimo (P2*) sa (P2):
(P2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! s(n) \in \mathbb{N}$.
Ovime smo spriječili da jedan broj ima više sljedbenika, ali ne i da više brojeva ima istog sljedbenika kao što je slučaj u dva lijeva grafa na slici 3.2. Kako bismo zaobišli ovo, reći ćemo da različiti brojevi moraju imati različite sljedbenike:
(P3) $m \neq n \Rightarrow s(m) \neq s(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.
Ekvivalentno tome, nekad se uzima kontrapozicija te tvrdnje. U svakom slučaju, ovime su spriječene i situacije u kojima je sljedbenik broja neki od prethodnih brojeva koji već imaju sljedbenike. No to ne pokriva slučaj u kojem je broj 1 sljedbenik nekog broja, kao u dva kružna grafa na slici 3.2. Dakle, još moramo reći da broj 1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja:
(P4) $s(n) \neq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Time napokon dobivamo željenu strukturu. Ipak, samo na osnovi ova četiri aksioma nije moguće dokazivati tvrdnje koje vrijede za sve prirodne brojeve, kao što je komutativnost zbrajanja. Za to nam je potreban još jedan aksiom izražen u logici drugog reda, aksiom

matematičke indukcije:
(P5) $\forall S \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi da ako je
a) $1 \in S$,
b) $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow s(n) \in S$,
tada je $S = \mathbb{N}$.
Sada možemo definirati oznake $2 := s(1)$, $3 := s(2)$, $4 := s(3)$,...
Uz to, definirat ćemo i zbrajanje na sljedeći način:
(Z1) $n + 1 := s(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
(Z2) $n + s(m) := s(n + m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.
Sada možemo i formalno dokazati jednostavne i intuitivne tvrdnje koje smo uzimali zdravo za gotovo.

Teorem 3.1.4. $2 + 2 = 4$.

Dokaz. $2 + 2 = 2 + s(1) \overset{(Z2)}{=} s(2 + 1) \overset{(Z1)}{=} s(s(2)) = s(3) = 4$. □

Općenita svojstva poput komutativnosti i asocijativnosti dokazuju se pomoću aksioma matematičke indukcije. U aksiomima smo mogli 1 zamijeniti s 0 tako da prirodni brojevi počinju od 0. U školama sa $\mathbb{N}$ označavamo skup prirodnih brojeva koji počinje sa 1 (a tako ćemo znaku koristiti i u ovom radu), a sa $\mathbb{N}_0$ skup prirodnih brojeva s nulom. U teoriji skupova se za skup prirodnih brojeva koristi oznaka $\mathbb{N}$, ali se podrazumijeva da ovdje taj skup počinje od 0. Tamo je $0 := \emptyset$, a „sljedbenik” broja n je skup $n \cup \{n\}$.

Cijeli, racionalni i realni brojevi

Kako bismo prirodne brojeve proširili do cijelih, potrebno je dodati negativne brojeve i nulu. I njih bismo mogli zadati aksiomatski, ali gdje god je moguće želimo izbjeći nove aksiome tako da se sustav temelji na što manjem broju početnih pretpostavki. Stoga nam je cilj definirati negativne brojeve pomoću već postojećih prirodnih brojeva. Uzmimo broj -1 i pokušajmo ga opisati koristeći prirodne brojeve. Negativni brojevi nam u praksi predstavljaju dug, nešto manje od nule. Simbol -1 koristimo kao broj koji je za 1 manji od 0, odnosno broj x takav da $x = 0 - 1$. No ne možemo ga tako definirati jer $0 - 1$ nije definirano za prirodne brojeve. Čak ni 0 nije prirodan broj. Mogli bismo pisati $-1 = 1 - 2$. To opet nije definirano, ali 1 i 2 jesu prirodni brojevi koje već imamo definirane. Za početak ćemo onda poistovjetiti -1 s uređenim parom $(1, 2)$. To možemo jer pojam uređenog para već imamo – definira se pomoću skupova[1]. Istom logikom, poistovjećujemo -5 sa $(1, 6)$ jer želimo da vrijedi $-5 = 1 - 6$, a 0 sa $(1, 1)$ i tako dalje.

Jer želimo mogućnost zbrajanja negativnih brojeva s prirodnim brojevima, i prirodne brojeve bismo trebali definirati kao uređene parove, pa će tako npr. biti $4 = (5, 1)$ jer

[1]Neka su a i b brojevi. Tada skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ nazivamo uređenim parom brojeva a i b i pišemo (a, b).

$4 = 5 - 1$. Ti novi prirodni brojevi su drugačiji objekti od onih prirodnih brojeva koje već imamo, ali ih interpretiramo na isti način kada ih primjenjujemo. Sada vidimo i zašto smo birali baš uređene parove – kako bismo razlikovali pozitivne i negativne brojeve ovisno o poretku članova. $(2, 1)$ bi bio broj 1, a $(1, 2)$ bi bio -1.

Nadalje, htjeli bismo definirati zbrajanje, i to tako da $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$. To bismo interpretirali na sljedeći način: zbroj brojeva $5 = 6-1$ i $2 = 3-1$ je $(6+3)-(1+1) = 9-2 = 7$. Ovdje se javlja problem: kada bismo to zapisali pomoću uređenih parova, dobili bismo $5 + 2 = (6, 1) + (3, 1) = (9, 2)$. Ali, $(9, 2)$ nije definirano; naime, to bi predstavljalo broj $9-2 = 7$, a 7 smo poistovjetili s $(8, 1)$ jer $8 - 1 = 7$. Problem leži u tome što smo broju 7 dodijelili samo par $(8, 1)$, a to nije jedini par prirodnih brojeva čija je razlika 7. Tu su i $(9, 2), (10, 3), (11, 4), ...$ Što ako bismo umjesto s jednim uređenim parom poistovjetili broj s cijelom klasom uređenih parova koje bismo sve smatrali „ekvivalentnima" u kontekstu aritmetike koju razvijamo?

Uređene parove ovdje tumačimo kao razlike, pa je (a, b) kao razlika $a - b$. Za broj 7, gore navedeni parovi brojeva imaju iste razlike. Tumačenje jednakosti parova bi onda bilo da je $(a, b) = (c, d)$ isto što i $a - b = c - d$. S obzirom da te razlike nisu nužno prirodni brojevi, a moramo sve definirati u terminima prirodnih brojeva, uzet ćemo ekvivalentnu tvrdnju $a + d = b + c$.

Definicija 3.1.5. *Neka su (a, b) i (c, d) uređeni parovi prirodnih brojeva. Na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relaciju $\sim$ tako da je $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.*

Lako je provjeriti da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije pa s obzirom na nju možemo podijeliti skup svih uređenih parova prirodnih brojeva na klase ekvivalencije. Sada vidimo da je $(8, 1) \sim (9, 2)$ jer je $8 + 2 = 9 + 1$, $(8, 1) \sim (12, 5)$ jer $8 + 5 = 1 + 12$, i tako dalje. Slijedi da je $(8, 1) \sim (9, 2) \sim (10, 3) \sim ...$ i općenito $(8, 1) \sim (n + 7, n)$.

Negativni brojevi su sad definirani u terminima klasa ekvivalencija uređenih parova prirodnih brojeva, a sve od navedenog je već definirano. Tako je na primjer $-5 = [(1, 6)] = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), ...\} = \{(n, n+5) | n \in \mathbb{N}\}$. Redom, možemo reći da je -5 klasa ekvivalencije s reprezentantom $(1, 6)$, da je to skup uređenih parova $(1, 6), (2, 7), (3, 8)...$, te da je to skup uređenih parova oblika $(n, n+5)$, gdje je n prirodan broj. Zapišimo konačno formalno definiciju cijelih brojeva:

Definicija 3.1.6. $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$.

Ovo je formalni zapis tvrdnje da je skup cijelih brojeva kvocijentni skup skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s obzirom na gore definiranu relaciju ekvivalencije $\sim$, odnosno da je to skup čiji su elementi klase ekvivalencije uređenih parova čija su oba člana iz $\mathbb{N}$. Zbrajanje i množenje možemo definirati na sljedeći način:

Definicija 3.1.7. $[(a, b)] + [(c, d)] := [(a+c, b+d)]$ *i* $[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac+bd, ad+bc)]$.

Množenje je definirano tako jer želimo da je $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd = (ac + bd) - (ad + bc)$. Pogledajmo kako izgleda zbrajanje na primjeru:

Primjer 3.1.8. *Dokažimo* $-5 + 12 = 7$. *Računamo:*
$-5 + 12 = [(1, 6)] + [(13, 1)] \overset{def 3.1.7}{=} [(1 + 13, 6 + 1)] = [(14, 7)] \overset{(*)}{=} [(8, 1)] = 7.$
Pritom, (*) vrijedi jer $[(14, 7)] = [(8, 1)]$, *što je ekvivalentno s* $(14, 7) \sim (8, 1)$, *što je pak po definiciji 3.1.5 ekvivalentno s* $14 + 1 = 8 + 7$, *a to vrijedi.*

Ovdje smo vidjeli postupak formalizacije pojma cijelog broja, od intuicije, preko analize željenih svojstava, neuspjelih definicija pa sve do stroge formalne definicije koja dozvoljava da cijele brojeve koristimo točno na željeni način i koja koristi samo već definirane objekte.

Pogledajmo sada racionalne brojeve. Modeli koji se koriste za učenje racionalnih brojeva su povezani s djeljenjem cjeline na jednake dijelove koji su manji od cjeline. To može dovesti do problema kada dođemo do dijeljenja razlomaka pa možemo dijeljenjem dobiti veći broj od početnog, kao u $5 : \frac{1}{2} = 10$. U udžbenicima se često pojavljuje sljedeća definicija skupa racionalnih brojeva:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ta definicija je više opisna i primjerena je uzrastu i predznanju učenika, ali nije strogo formalna. Naime, prema njoj su racionalni brojevi definirani samo sintaktički: $\frac{1}{2}$ su samo dva broja napisana jedan iznad drugog s crtom između. Ako bismo pak tu definiciju smatrali i semantičkom, gdje $\frac{1}{2}$ stoji za $1 : 2$, tada taj izraz nije definiran u cijelim brojevima. Kako bismo formalizirali skup $\mathbb{Q}$, postupit ćemo analogno kao za cijele brojeve, s time da će to ovdje biti lakše jer ionako racionalne brojeve zapisujemo pomoću dva broja odijeljena razlomačkom crtom. Želimo da razlomci $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ budu ekvivalentni. Općenito, htjeli bismo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ izraziti samo u terminima cijelih brojeva, a dijeljenje ne možemo koristiti jer skup cijelih brojeva nije zatvoren s obzirom na tu operaciju. No jest zatvoren na množenje, a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Stoga definiramo relaciju ekvivalencije:

Definicija 3.1.9. *Neka su* (a, b) *i* (c, d) *uređeni parovi tako da su* $a, c \in \mathbb{Z}$, *a* $b, d \in \mathbb{N}$. *Na* $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *definiramo relaciju* $\approx$ *tako da je* $(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Lako je provjeriti da je to relacija ekvivalencije pa pomoću nje možemo $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ podijeliti na klase:

Definicija 3.1.10. $\mathbb{Q} := \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/_{\approx}$.

Jer želimo i da je $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ i $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, definiramo zbrajanje i množenje kao:

Definicija 3.1.11. $[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$ *i* $[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$.

Primjer 3.1.12. *Dokažimo* $\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$*. Računamo:*

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = [(3,5)] + [(7,10)] \overset{def 3.1.11}{=} [(3 \cdot 10 + 5 \cdot 7, 5 \cdot 10)] = [(30+35, 50)] = [(65,50)]$$
$$\overset{(*)}{=} [(13,10)] = \frac{13}{10}.$$

Pritom, (*) vrijedi jer $[(65,50)] = [(13,10)]$*, što je ekvivalentno s* $(65,50) \approx (13,10)$*, što je po definiciji 3.1.9 ekvivalentno s* $65 \cdot 10 = 50 \cdot 13$*, a to vrijedi.*

Naposlijetku, proširimo racionalne brojeve do realnih. U skupu racionalnih brojeva ne postoje nužno rješenja jednadžbi oblika $x^2 = c$. Tako $x^2 = 2$ nema rješenja jer $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Racionalne brojeve možemo proširiti do realnih pomoću Dedekindovih rezova:

Definicija 3.1.13. *Uređeni par* (A, B) *podskupova od* $\mathbb{Q}$ *je Dedekindov rez u* $\mathbb{Q}$ *ako* A *i* B *čine particiju skupa* $\mathbb{Q}$ *(neprazni su, disjunktni i u uniji daju cijeli* $\mathbb{Q}$*), svi elementi iz* A *su manji od svih elemenata iz* B *i* A *nema najveći element. Skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *je skup svih Dedekindovih rezova u* $\mathbb{Q}$*.*

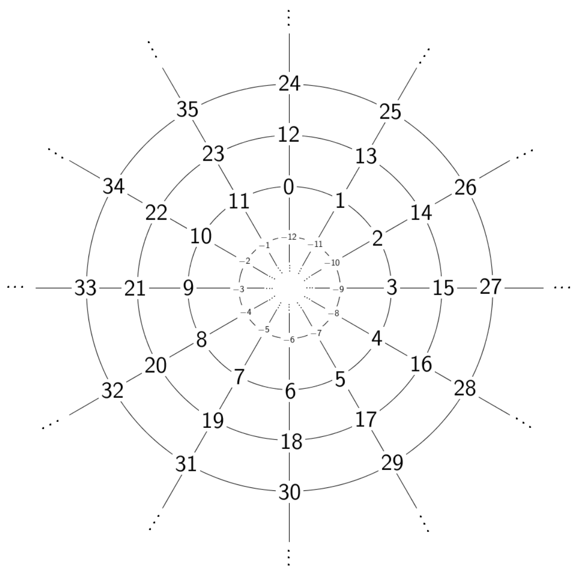
Želimo da $\sqrt{2}$ ima svojstvo da mu je kvadrat jednak 2, pa definiramo dva skupa racionalnih brojeva – u jednom su svi brojevi lijevo od hipotetskog $\sqrt{2}$ na brojevnom pravcu, odnosno svi negativni racionalni brojevi, 0, i svi pozitivni racionalni brojevi kojima je kvadrat manji od 2, a u drugom su svi brojevi koji su desno, tj. pozitivni racionalni brojevi čiji je kvadrat veći ili jednak 2. $\sqrt{2}$ je onda uređen par (A, B), gdje je $A = \mathbb{Q}_0^- \cup \{q \in \mathbb{Q}^+ | q^2 < 2\}$, a $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ | q^2 \geq 2\}$.

Osim pomoću Dedekindovih rezova, realne brojeve možemo dobiti iz racionalnih i pomoću klasa ekvivalencije Cauchyjevih nizova racionalnih brojeva, ili pak možemo $\mathbb{R}$ definirati aksiomatski. Za više detalja o ovoj temi upućujemo na [26] i [25].

Modularna aritmetika

Osim standardne aritmetike koja se uči u školama, još jedan relativno poznat primjer aritmetike je modularna aritmetika. Prirodne brojeve smo izgradili tako da smo krenuli od jednog početnog broja i zatim nakon njega redom nanizali beskonačno mnogo novih brojeva. Brojeve u modularnoj aritmetici ćemo izgraditi tako da se nakon nekog vremena vratimo na početni broj i tako dobijemo kružnu strukturu. Dakle, umjesto $1, 2, 3, 4, 5, ...$

bismo mogli imati $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, ...$. Skup brojeva je tada ograničen, a u ovom konkretnom primjeru to je $\{1, 2, 3, 4\}$. Primjer iz stvarnog života bi bio analogni sat. Na njemu imamo 12 brojeva, od 1 do 12. Nakon 12 se vraćamo na 1, ili bismo mogli reći da dolazimo do 13 kao u prirodnim brojevima, ali 13 i 1 su na neki način poistovjećeni u ovom sustavu. Analogno, 14 možemo smatrati istovjetnim s 2, 15 sa 3, i tako dalje. Kada bismo proširili taj sustav na brojeve ispod 0 i iznad 24, lako bismo vidjeli da npr. broju 0 odgovaraju brojevi 12, 24, 36, 48, ..., kao i brojevi -12, -24, -36, ... Broju 5 bi odgovarali 5, 17, 29, 41, ..., kao i brojevi -7, -19, -31, ...



Slika 3.3: Primjer aritmetike mod 12.

Općenito, broju n bi odgovarali brojevi koji su od njega udaljeni za puni krug (12), ili više punih krugova ($12 \cdot k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, vidi sliku 3.3). Brojevi a i b su istovjetni unutar ovog sustava ako je $a = b + 12k$, tj. $a - b = 12k$. Drugim riječima, broj 12 dijeli njihovu razliku. Jer su ti brojevi na neki način ekvivalentni, povezat ćemo ih relacijom ekvivalencije, a istovjetni brojevi će onda činiti klase ekvivalencije. Vodeći se ovom intuicijom, sada možemo formalizirati modularnu aritmetiku iz standardne:

Definicija 3.1.14. *Neka su a i b cijeli brojevi te neka je $n \in \mathbb{N}$. Na $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definiramo relaciju $\equiv \pmod n$ tako da $a \equiv b \pmod n$ ako $n | a - b$. Kažemo da su a i b kongruentni modulo n.*

Lako je provjeriti da je ovako definirana relacija relacija ekvivalencije pa možemo pomoću nje $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ podijeliti na klase ekvivalencije, što će biti brojevi u ovom sustavu. Tako u mod 12 aritmetici dobivamo klase $0, 1, 2, 3, ..., 11$. Primjetimo da su to upravo mogući ostaci pri dijeljenju s 12. Općenito, u mod n aritmetici imamo n brojeva, od 0 do $n - 1$, što su upravo mogući ostaci pri dijeljenju s n. Taj skup brojeva označavamo sa $\mathbb{Z}_n$. Na njemu možemo definirati zbrajanje na sljedeći način:

Definicija 3.1.15. *Neka su* $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$. $[a] + [b] := [a + b]$.

Iako je sat očit primjer iz svakodnevnog života, modularna aritmetika zapravo ima vrlo široko područje primjene. Tako se koristi u kriptografiji, računarstvu, glazbi, ekonomiji, itd. Za više detalja o modularnoj aritmetici upućujemo na [13].

3.2 Beskonačnost

Većina se djece u nekom trenutku pokušalo nadmetati s drugima u pokušaju da nađu najveći broj. Tada će netko reći broj sto, pa netko tisuću, pa milijun, i tako dalje. Već u ranoj školskoj dobi zamjećuju da od svakog broja mogu naći za jedan veći. Tada će netko spomenuti beskonačnost, na što će odgovor biti ili „beskonačnost plus jedan" ili „beskonačnost nije broj". Zanimljivo je da se na toj ideji sljedbenika temelji i pojam ordinalnog broja, te da je zaista moguće (na neki način) reći da nakon beskonačnosti dolazi „beskonačnost plus 1". Na visokoškolskoj razini vidimo da $\aleph_0$, prvi beskonačni kardinalni broj, na neki način odgovara naivnom poimanju pojma beskonačnosti. Važno je napomenuti da nijedna matematička beskonačnost ne odgovara savršeno neformalnom konceptu beskonačnosti. Ovdje se vraćamo na činjenicu da u matematici pojam broja nije potpuno definiran. Laički odgovor na ideju beskonačnog broja bi tako mogao biti da $\aleph_0$ zapravo i nije broj – naime, brojevi su konačni, a beskonačnost je samo koncept. Osim što kardinalne brojeve možemo smatrati brojevima koji predstavljaju beskonačnost, slično možemo promatrati i ordinalne brojeve koji se temelje na ideji sljedbenika. Osim toga, simbol za beskonačnost se koristi u limesima da označi rast ili pad bez granice, a u nestandardnoj analizi se pojavljuju beskonačno veliki brojevi, kao i beskonačno mali (infinitezimali). Reći ćemo nešto više o pojmu kardinaliteta, ali bez ulaženja u formalnu definiciju preko ordinala.

Kardinalitet

S obzirom na to da se velik dio današnje matematike temelji na teoriji skupova, korisno je imati način da usporedimo skupove po veličini. Za to može poslužiti pojam kardinaliteta. Kardinalitet skupa A označavamo s $\text{card}(A)$ ili $|A|$. Za konačne skupove, vrlo je jasan i jednostavan – to je broj elemenata u skupu. No matematika se pita, kao i uvijek, je li moguće tu ideju generalizirati. Krenimo od jednostavnog modela, prstiju. Kako bismo mogli usporediti broj prstiju na lijevoj i desnoj ruci? Izbrojimo prvo prste na lijevoj te ustanovimo da ih imamo pet, a zatim izbrojimo prste na desnoj te dolazimo do istog zaključka. Jer je $5 = 5$, imamo isti broj prstiju na lijevoj i desnoj ruci. No, što ako imamo beskonačno prstiju? Lako je vidjeti da nas analogan način razmišljanja neće dovesti do odgovora jer nemamo *a priori* pojam beskonačnog broja. Prije smo izbrojali 5 prstiju na jednoj ruci, no s beskonačno mnogo prstiju nikada nećemo prestati brojati, pa ni nećemo moći reći koliko prstiju imamo. Ali postoji način da ideju generaliziramo. Problem s dosadašnjim razmatranjem je što zahtijeva pojam broja. Što kada bismo mogli usporediti veličine skupova bez potrebe da izbrojimo koliko elemenata imaju? To možemo učiniti – sklopimo ruke dlan o dlan. Sada svakom prstu lijeve ruke odgovara točno jedan prst desne, a svakom prstu desne točno jedan prst lijeve. Zaključujemo da na lijevoj i desnoj ruci imamo jednako mnogo prstiju. Važno je da spojimo prste '1 na 1', odnosno matematički rečeno da uspostavimo bijekciju između ta dva skupa prstiju. Primijetimo da ovdje nismo ni eksplicitno ni implicitno koristili stvaran broj prstiju pa bismo zato ovaj postupak mogli primijeniti i na beskonačne skupove. Takva generalizacija je dobra jer je, kada je restringiramo na konačne slučajeve, ekvivalentna dosadašnjoj definiciji. Drugim riječima, bez obzira koji način usporedbe koristimo na konačnim skupovima, dobit ćemo iste rezultate. Sada možemo definirati jednakobrojnost (ekvipotentnost) skupova na sljedeći način:

Definicija 3.2.1. *Skupovi A i B su ekvipotentni ($|A| = |B|$) ako između njih postoji bijekcija.*

Ta definicija nam dopušta da do neke mjere uspoređujemo i beskonačne skupove, a uz nekoliko dodatnih pojmova možemo i razviti uređaj na kardinalnim brojevima te kardinalnu aritmetiku. Iako je ova generalizacija poprilično razumna čak i za nematematičare, ona dovodi do vrlo neintuitivnih rezultata. Tako je moguće pokazati da parnih brojeva ima jednako mnogo kao i parnih i neparnih zajedno:

Teorem 3.2.2. $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N} + 1| = |\mathbb{N}|$.

Ideja dokaza jasna je iz slike 3.4. Prirodnim brojevima $1, 2, 3, 4, ...$ odgovaraju redom parni brojevi $2, 4, 6, 8, ...$ Funkcija koja ih povezuje je $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, f(n) = 2n$ koja je bijektivna. Parni i neparni brojevi su povezani bijekcijom $g : 2\mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1, g(n) = n - 1$. Budući da je kompozicija bijekcija također bijekcija (što je lako dokazati), skupovi $\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N} + 1$ su ekvipotentni.[2]

[2]Ne bi bilo posve točno reći da je ekvipotentnost relacija ekvivalencije. Naime, relacije ekvivalencije se definiraju na skupovima, no ovdje bi to bila relacija ekvivalencije na paradoksalnom skupu svih skupova. Ovdje samo želimo reći da ekvipotentnost ima svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti. Kardinalni brojevi su ovdje u određenoj mjeri klase ekvivalencije, ali smo zapravo samo definirali kad su dva kardinalna broja jednaka, a ne što su oni.

1	2	3	4	5	6	7	...
2	4	6	8	10	12	14	...
1	3	5	7	9	11	13	...

Slika 3.4: Ekvipotentnost skupova $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N}+1$

Kardinalitet skupa prirodnih brojeva označavamo sa $\aleph_0$ („alef nula"), a možemo ga smatrati brojem. Za beskonačnost prirodnih brojeva se uvriježio nezgodan naziv *prebrojiva beskonačnost* (*eng. countable infinity*), što zvuči kao da je tu beskonačnost u određenom smislu moguće prebrojati. Preciznije bi bilo reći da je takvu beskonačnost moguće *prebrojavati*, odnosno na sistematičan način ispisivati elemente takvog beskonačnog skupa kao beskonačan niz, bez da se ijedan ponavlja na popisu i bez da je ijedan izostavljen. Na slici 3.4 možemo vidjeti da smo i parne i neparne brojeve mogli ispisati na takav način što znači da su ti skupovi prebrojivi. Može se pokazati da je i skup racionalnih brojeva prebrojiv, ali neki beskonačni skupovi nisu prebrojivi. Cantorovim dijagonalnim postupkom se može pokazati da skup realnih brojeva nije ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva pa slijedi da postoje različite vrste beskonačnosti. Realni brojevi su neprebrojivo beskonačni, a kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ se označava sa $\mathfrak{c}$. Formalnije kardinalne brojeve možemo definirati u teoriji skupova kao vrstu ordinalnih brojeva. Za više detalja o ovoj temi upućujemo na [12].

Možda intuitivniju usporedbu veličina podskupova od $\mathbb{N}$ daje prirodna gustoća:

Definicija 3.2.3. *Prirodnu gustoću definiramo kao* $d : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1], d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{n}$ *gdje je* $A_n = \{k \in A : k \leq n\}$.

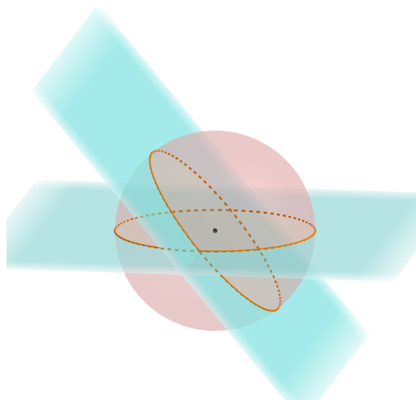
Primjerice, za skup svih parnih brojeva A je $|A_n|$ broj parnih brojeva manjih ili jednakih n. Lako je vidjeti da je $|A_n| = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, pa je $d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} = \dfrac{1}{2}$. To možemo interpretirati kao da parni brojevi čine polovicu prirodnih brojeva. Za više detalja o prirodnoj gustoći upućujemo na [22].

3.3 Geometrija

Geometrija je jedna od najstarijih grana matematike, a njome su se bavili još i stari Egipćani. Razvoju euklidske geometrije bitno su pridonijeli Tales iz Mileta (7./6. st. pr. Kr.), pitagorejci te Euklid Aleksandrijski (4./3. st. pr. Kr.). Euklid je u *Elementima* pokušao aksiomatizirati dotadašnju matematiku, odnosno geometriju. Njegov peti postulat je povijesno bio interesantan matematičarima koji su ga pokušavali dokazati iz prethodna četiri, a tek u 19. st. je dokazano da je neovisan o njima. Vjerovali su da ga je moguće izvesti iz drugih jer nije bio očit i imao je dosta dugu formulaciju, a tek u 19. st. su matematičari istražujući alternative otkrili nove vrste geometrija. Češće se spominje Playfairov aksiom koji je ekvivalentan Euklidovom petom postulatu, ali ima jednostavniji iskaz: „Točkom izvan pravca je moguće povući najviše jedan pravac paralelan sa zadanim".

Iako se u školama uglavnom uči samo euklidska geometrija, postoje i druge vrste. Začudo, sferna geometrija ima gotovo podjednako dugu povijest koja seže do antičke Grčke. Posebno je važan bio Menelaj iz Aleksandrije (1./2. st.), u čijem se djelu *Sphaerica* nalazi najstarija poznata definicija sfernog trokuta. Do otkrića hiperbolične geometrije neovisno su došli Bolyai, Lobačevski i Gauß u 19. st. u nastojanju da stvore geometriju u kojoj ne vrijedi peti Euklidov postulat [4, 5].

Pravac u euklidskoj geometriji je onaj pravac s kojim smo svi dobro upoznati – beskonačno duga ravna crta. U sfernoj geometriji, pravcem smatramo kružnicu koja je „ekvator" kugle (velika kružnica na sferi, tj. kružnica koja ima jednak polumjer kao sfera, slika 3.5), a ovdje se svaka dva pravca sijeku (i to u dvije antipodne točke) pa paralelni pravci ne postoje. Ako kao euklidsku geometriju gledamo, kako je uobičajeno, samo onu u kojoj su paralele jedinstvene (dakle, uz zamjenu „najviše" s „točno jedan" u Playfairovoj formulaciji), sferna geometrija ne zadovoljava postulat o paralelama.



Slika 3.5: Pravci u sfernoj geometriji su kružnice koje nastaju presjekom kugle i ravnine koja prolazi njenim središtem

S $\mathbb{E}^2$ označimo Euklidsku ravninu, tj. metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$, gdje je d metrika takva da je $d(P, Q) = \|Q - P\|$, za sve $P, Q \in \mathbb{R}^2$, a s $\|.\|$ je označena duljina vektora $Q - P$.

To odgovara onome što inuitivno smatramo dvodimenzionalnim prostorom (ravninom) s uobičajenim pojmom duljine.

Znamo da je pravac jedinstveno određen s dvije točke, ali radi generaliziranja pojma pravca korisno je pravce definirati pomoću jedne točke i vektora smjera. Neka je P proizvoljna točka u $\mathbb{E}^2$, a $v \in \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalni vektor. Sa $[v]$ označimo linearnu ljusku vektora v, odnosno skup svih vektora dobivenih skaliranjem tog vektora s nekim faktorom $\alpha \in \mathbb{R}$. Sada definiramo pravac u kao skup svih točaka T takvih da je vektor $T - P$ iz $[v]$:

$$p := \{T \in \mathbb{E}^2 | T - P \in [v]\}.$$

Ekvivalentno tome, $p = P + [v]$. Lako se može pokazati i da svake dvije točke P i Q, određuju jedinstven pravac $p = (1 - t)P + tQ$, $t \in \mathbb{R}$.

Još jedna ekvivalentna karakterizacija pravca je pomoću točke i normale. Neka je $p = P + [v]$ neki pravac u $\mathbb{E}^2$, a n vektor takav da su v i n ortonormirani (duljine 1[3] i međusobno okomiti). Matematički, to bi značilo da je $\|v\| = \|n\| = 1$ i $\langle v, n\rangle = 0$. Skalarni produkt $\langle v, n\rangle$ se koristi kao „mjera" okomitosti jer je jednak 0 ako i samo ako su vektori okomiti. Tada je

$$p = \{T \in \mathbb{E}^2 | \langle T - P, n\rangle = 0\}.$$

Analogno možemo definirati i pravce u $\mathbb{E}^3$.

Radi definiranja pravaca u sfernoj geometriji, prvo definirajmo sfernu ravninu. To je jedinična sfera u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, $S^2 := \{x \in \mathbb{E}^3 : \|x\| = 1\}$. Neka je ξ jedinični vektor u $\mathbb{R}^3$. Tada pravac definiramo kao

$$p := \{x \in S^2 | \langle \xi, x\rangle = 0\}.$$

Ovdje lako vidimo analogiju s karakterizacijom pravca pomoću točke i vektora normale u euklidskoj ravnini.

Za razliku od euklidske ravnine u kojoj trokuti mogu imati najviše jedan pravi kut i kutovi ne određuju jednoznačno trokut (već beskonačno mnogo međusobno sličnih trokuta), u sfernoj ravnini postoje trokuti s 2 ili 3 prava kuta, a kutovi jednoznačno određuju trokut, do na sukladnost. Također vrijede analogoni sinusovog i kosinusovog poučka, pa i Pitagorinog poučka:

Teorem 3.3.1 (Pitagorin poučak u sfernoj geometriji)**.** *Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta, s time da je c nasuprot pravog kuta. Tada je* $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

Na vrlo malom području (lokalno), sferu možemo aproksimirati ravninom, kao što lokalno svaku krivulju u ravnini možemo aproksimirati pravcem. Kosinus možemo razviti u

[3]Pod duljinom 1 misli se na bilo koju odabranu i unutar dane situacije fiksiranu jediničnu, referentnu, duljinu, bila ona 1 cm, 1 inč ili 345,5478 m.

Taylorov red kao $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$, a za vrlo male x odbacujemo članove reda veličine x^4 pa vrijedi $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Ako je pravokutni trokut u sfernoj ravnini vrlo malen, odnosno a, b, c su vrlo mali, primjenom gornjeg teorema dobivamo:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) = 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}.$$

Jer su a i b mali, član sa a^2b^2 će biti zanemariv pa vrijedi

$$-\frac{c^2}{2} \approx -\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

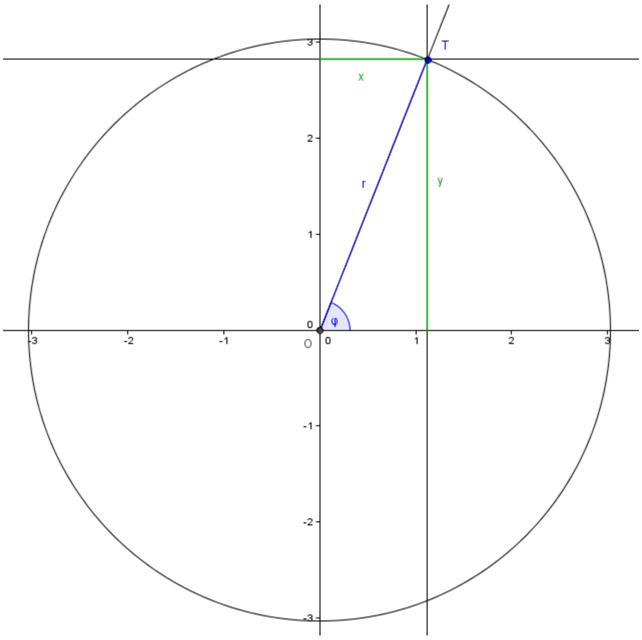
$$c^2 \approx a^2 + b^2.$$

Na ovim primjerima smo vidjeli da je pojam pravca u matematici općenitiji od intuitivnog poimanja, a ukratko smo opisali i neke načine na koji taj pojam možemo formalizirati. Osim euklidske i sferne ravnine, zanimljiva je i projektivna ravnina te neeuklidske geometrije poput eliptične i hiperbolične, ali time bismo izašli iz okvira ovoga rada. Za više detalja o ovoj temi upućujemo na [27]

Koordinatni sustavi

Koordinatni sustavi povezuju brojeve (ili uređene n-torke) s točkama u prostoru. Tipičan primjer je Kartezijev koordinatni sustav u dvije dimenzije. Sastoji se od dva međusobno okomita pravca (x-os i y-os) na kojima su odabrane neke referentne jedinične dužine. Ovdje svaki uređen par (x, y) jedinstveno određuje točku euklidske ravnine, s time da x-koordinata označava udaljenost točke od y-osi, a y-koordinata označava udaljenost točke od x-osi (predznaci koordinata označavaju smjer – lijevo ili desno od y-osi, gore ili dolje od x-osi).

Drugačiji koordinatni sustav u ravnini jest polarni koordinatni sustav. Ovdje je zadan polupravac (polarna os), a njegova početna točka je pol. Svaka točka je jedinstveno određena kutem φ koji polupravac iz pola kroz tu točku zatvara s polarnom osi (u pozitivnom smjeru), te udaljenošću r između te točke i pola.



Slika 3.6: Točka T je određena s (x, y) u Kartezijevom koordinatnom sustavu, te s (r, φ) u polarnom.

Kao što je vidljivo na slici 3.6, svaka točka $T(x, y)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu nalazi se na nekoj kružnici radijusa $r \geq 0$, a polupravac OT zatvara s x-osi kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Stoga možemo iz prikaza točke u polarnim koordinatama prijeći na prikaz u Kartezijevim pomoću jednakosti

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

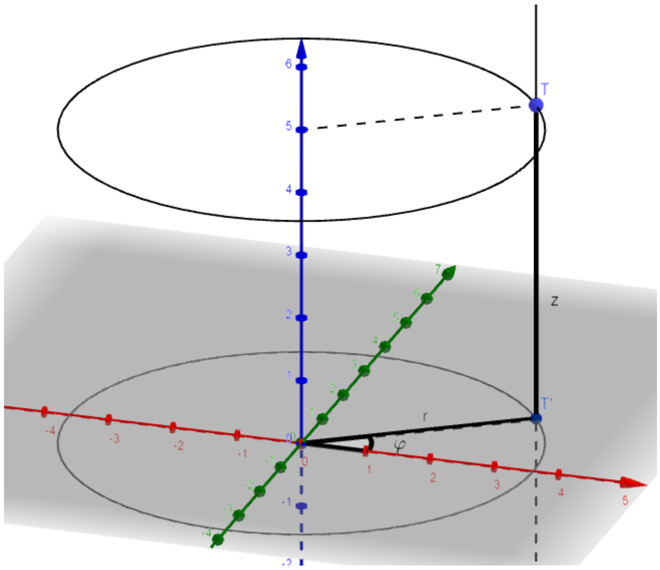
Također iz slike vidimo da je po Pitagorinom poučku $r^2 = x^2 + y^2$, tj. r je udaljenost točke od ishodišta, a znamo i da je $\frac{y}{x}$ jednako nagibu pravca OT, odnosno tangensu kuta koji zatvara s x-osi. Dakle, iz Kartezijevih koordinata možemo prijeći u polarne pomoću sljedećih formula:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Polarne koordinate se koriste u navigaciji, a mnoge krivulje imaju jednostavnije prikaze u polarnom nego u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Tako se na primjer u Kartezijevom sustavu kružnica sa središtem u ishodištu, radijusa R, ne može opisati pomoću funkcije (tj.

kružnica nije graf funkcije već općenite relacije). Gornji luk kružnice je određen funkcijom $y_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, a donji funkcijom $y_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. U polarnom sustavu bismo cijelu tu kružnicu mogli opisati funkcijom $r(\varphi) = R$.

U trodimenzionalnom prostoru se osim Kartezijevog sustava koriste cilindrični i sferni koordinatni sustav. U cilindričnom sustavu (slika 3.7) treća koordinata (z) određuje visinu točke T u odnosu na ravninu $z = 0$. Prve dvije koordinate (r i φ) su polarne koordinate projekcije T' točke T na $z = 0$.

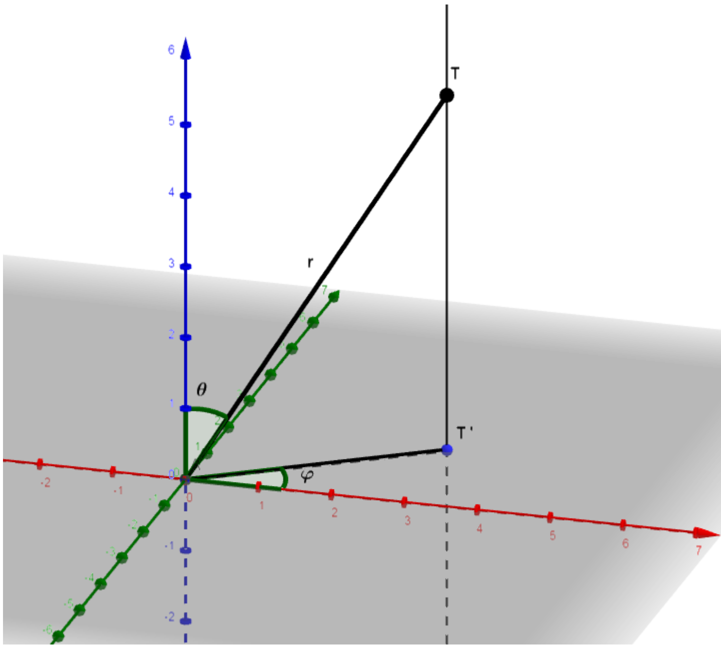


Slika 3.7: Točka T je određena s (r, φ, z) u cilindričnom sustavu.

Veza između cilindričnih (r, φ, z) i Kartezijevih koordinata (x, y, z) je

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

U sfernom sustavu φ označava isti kut kao u cilindričnom sustavu, no r sada označava udaljenost točke od ishodišta (slika 3.8). Umjesto visine z, treća koordinata je kut θ koji označava otklon radij-vektora točke od pozitivnog dijela z-osi.



Slika 3.8: Točka T je određena s (r, φ, θ) u sfernom sustavu.

Veza između sfernih (r, φ, θ) i Kartezijevih koordinata (x, y, z) je

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

3.4 Vjerojatnost i statistika

Koncept vjerojatnosti je dugo postojao na intuitvnoj razini, a bio je vezan uz razna praznovjerja. Zanimajući se za kockanje, u 16. st. Cardano je u djelu *Liber de ludo aleae* dao prvi pokušaj matematičkog razmišljanja o vjerojatnosti, a u 17. st. Fermat i Pascal su razvili temelje kombinatorne teorije vjerojatnosti. Njihov rad nastavio je Huygens, koji je napisao prvu knjigu o teoriji vjerojatnosti, *De ratiociniis in ludo aleae*. Matematičko poimanje vjerojatnosti razvija se zahvaljujući Jacobu Bernoulliju čije se djelo *Ars Conjectandi* objavljeno 1713. smatra prvim vrlo važnim matematičkim djelom o vjerojatnosti, a slijede i važni doprinosi de Moivrea, Daniela Bernoullija, Laplacea, Poissona i Čebišova. Kolmogorov je konačno 1933. aksiomatizirao vjerojatnost. Razvoj statistike je slijedio razvoj vjerojatnosti, proizlazeći iz pokušaja primjene vjerojatnosti na proučavanje populacija i zaključivanje o stvarnim vrijednostima iz mjerenih u astronomiji i geodeziji. Na prijelazu s 18. u 19. st. Legendre i Gauß neovisno jedan o drugome razvili su metodu najmanjih kvadrata, Quetelet je u 19. st. uveo pojam „prosječnog čovjeka”, a važne doprinose dali su i Galton i Pearson. Danas se vjerojatnost i statistika smatraju granama matematike te kao takve imaju aksiomatsku podlogu, no prosječna osoba još uvijek često pada u zamku naivnog i praznovjernog razmišljanja o sreći, posebici kada se radi o igrama na sreću [5].

Jedna od najčešćih pogrešaka u razumijevanju matematičkih koncepata temelji se na naivnom razumijevanju vjerojatnosti te se naziva kockarova pogreška. Radi se o intuitivnoj ideji da bi pravedan novčić trebao pasti otprilike pola puta na glavu, pola na pismo, neovisno o broju bacanja. Ako pravedan novčić devet puta zaredom padne na glavu, većina ljudi će ili pomisliti da novčić nije pravedan ili, ako ih uvjerimo da jest, pomislit će da je velika šansa da u sljedećem bacanju padne na pismo, da se rezultati „izjednače”. No rezultati bacanja novčića su neovisni o prijašnjim bacanjima. Zbog ove logičke greške ljudi koji gube u igrama na sreću nastavljaju igrati, misleći da će nakon mnogo neuspjeha imati veće šanse za uspjeh. Slično tome, postoji i uvjerenje da će se niz pobjeda nastaviti (*hot hand*), ali je i ono iz istih razloga jednako pogrešno [6].

Općenito, vjerojatnost je područje koje ljudi slabo razumiju, možda zbog toga što su navikli ono što percipiramo u stvarnosti i što je tek aproksimacija stvarnosti idealizirati i smatrati objektivnim. Tako bi, na primjer, bilo teško uvjeriti prosječnu osobu da je novčić koji je bacanjem dao rezultate GGPGGGGPGG pravedan, usprkos činjenici da je kod pravednog novčića vjerojatnost pojedinog niza jednaka vjerojatnosti bilo kojeg drugog niza jednake duljine. Drugim riječima, pravedan novčić bi imao jednaku vjerojatnost da da rezultate PGPGPGPGPG i GGGGGGGGGG.

U matematici, vjerojatnost ima širu definiciju te se pojam odnosi na svaku funkciju koja zadovoljava određene aksiome. Laički rečeno, ti aksiomi glase:

- vjerojatnost svakog događaja je nenegativna,
- sigurno će se dogoditi barem jedan od mogućih događaja,
- vjerojatnost da se dogodi barem jedan od prebrojivo mnogo događaja od kojih se nijedna dva ne mogu dogoditi istovremeno je jednaka zbroju pojedinačnih vjerojatnosti svakog događaja.

Formalnije, možemo vjerojatnost definirati pomoću Kolmogorovljevih aksioma:

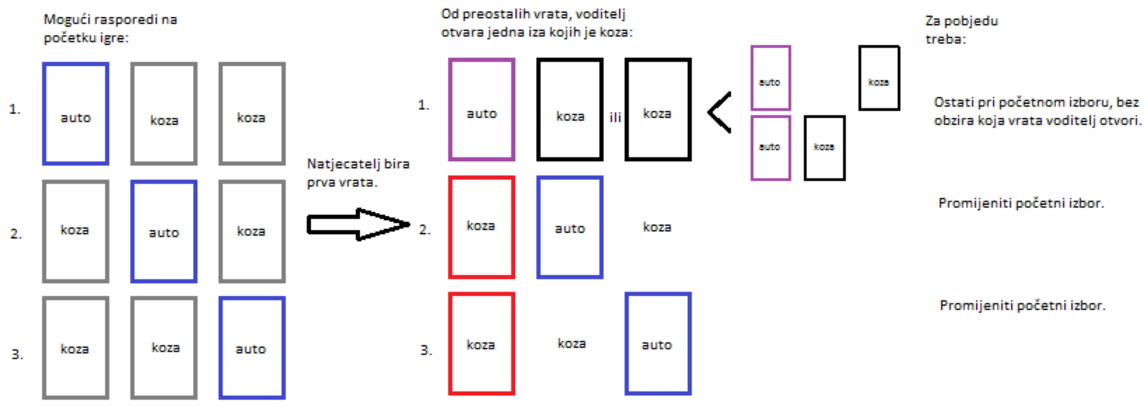
Definicija 3.4.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor. Funkcija* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *je vjerojatnost ako vrijede aksiomi:*
(A1) $P(E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{F}$,
(A2) $P(\Omega) = 1$,
(A3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$.

No bitno je naglasiti i da to što je vjerojatnost nekog događaja jednaka 100% ne mora značiti da će se taj događaj zaista dogoditi, a vjerojatnost od 0% ne mora značiti da se događaj neće dogoditi. Pretpostavimo da bacamo novčić bacati sve dok ne dobijemo pismo. Vjerojatnost da ga nastavimo bacati beskonačno dugo, tj. da nikad ne dobijemo pismo je 0%, no teoretski je moguće. Vjerojatnost da prije ili kasnije dobijemo pismo je 100%, no teoretski je moguće da se to ne dogodi. U kontekstu teorije vjerojatnosti, kažemo: pismo ćemo dobiti „gotovo sigurno". Vjerojatnost da ne dobijemo pismo je 0% jer bi bilo koja druga vrijednost dovela do kontradikcije s aksiomima vjerojatnosti. Naravno, takva pitanja su manje bitna u stvarnom životu jer je upitno koliko dobro teorijska vjerojatnost modelira vjerojatnost konkretnog novčića, a i nije moguće u stvarnosti bacati novčić beskonačno mnogo puta. Za više detalja o temeljima vjerojatnosti i statistike upućujemo na [8] i [10].

Problem Monty Hall

Jedan od popularnih problema vezanih uz vjerojatnost je nazvan po Monty Hallu, voditelju američke emisije *Let's make a deal*. Problem je sljedeći: Natjecatelju su ponuđena troja vrata. Iza jednih se nalazi automobil, a iza druga dva koze. Natjecatelj bira jedna vrata i dobiva ono što je iza njih, ali ne odmah. Nakon što odabere vrata, a prije nego što ih otvore, voditelj (koji zna što je iza kojih vrata) otvara jedno od onih preostalih vrata, i to ono iza kojeg je koza. Sada kada je jedno od vrata otvoreno, natjecatelj mora odlučiti hoće li ostati pri svom izboru ili promijeniti vrata. Pitanje je: Je li bolje ostati pri početnom izboru ili ga promijeniti. Intuicija navodi veliku većinu ljudi na odgovor da je svejedno [15]. Jer su ostala samo dvoja neotvorena vrata, a samo iza jednog je automobil, vjerojatnost da natjecatelj pobijedi ako ostane pri svom izboru je 50%, pa je i vjerojatnost da pobijedi ako promjeni vrata također 50%.

Ipak, intuicija ovdje nije u pravu. Natjecatelj će uvijek imati veću šansu da dobije automobil ako promijeni svoj izbor. To je zato što u početnom izboru ima vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da je pogodio točno, pa ako ostane pri svom izboru imat će i dalje vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da pobijedi. Ako promijeni svoj početni izbor, vjerojatnost da pobijedi je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Formalnije: Označimo sa V_n da je natjecatelj na početku izabrao n-ta vrata, sa O_k označimo da je voditelj zatim otvorio k-ta vrata, a sa A_i označimo da se automobil nalazi iza i-tih vrata ($n, k, i \in \{1, 2, 3\}$). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je natjecatelj prvo odabrao prva vrata (slika 3.9), a voditelj zatim otvorio druga vrata, odnosno znamo da vrijedi V_1 i O_2. Pitamo se koja je vjerojatnost da je automobil zaista iza prvih vrata kao što je natjecatelj prvo rekao. To će onda biti vjerojatnost da pobijedi ako ostane pri svom izboru. Dakle, zanima nas vjerojatnost da se dogodi A_1, uz uvjet da se dogodilo V_1 i O_2.



Slika 3.9: Monty Hallov problem: Od tri jednako vjerojatna rasporeda na početku igre, u jednom se pobjeđuje ostajanjem pri početnom izboru, a u dva promjenom početnog izbora.

Znamo sljedeće vjerojatnosti:
Vjerojatnost da je automobil iza i-tih vrata je $\frac{1}{3}$ jer je nasumično stavljen iza jednih od triju vrata. Dakle, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Ako natjecatelj prvo odabere prva vrata (V_1), a automobil je zaista iza njih (A_1), tada voditelj mora otvoriti jedno od preostalih vrata. Vjerojatnost da otvori druga vrata (O_2) pod tim uvjetom je onda $\frac{1}{2}$, odnosno $P(O_2|V_1 \cap A_1) = \frac{1}{2}$.[4] Ako je automobil bio iza drugih vrata, tada će voditelj morati otvoriti treća vrata jer je iza njih koza. Vjerojatnost da pod tim uvjetom otvori druga vrata je dakle 0, tj. $P(O_2|V_1 \cap A_2) = 0$. Da je automobil bio iza trećih vrata, voditelj bi sigurno otvorio druga vrata pa je $P(O_2|V_1 \cap A_3) = 1$. Ako zanemarimo položaj automobila, vjerojatnost da voditelj otvori druga vrata ako je natjecatelj odabrao prva je $\frac{1}{2}$ jer su preostala dva vrata pa je $P(O_2|V_1) = \frac{1}{2}$. Konačno, $P(V_n \cap A_i) = P(V_n) \cdot P(A_i)$ jer su početno biranje vrata i stvarni položaj automobila nezavisni događaji. Koristeći formulu za uvjetnu vjerojatnost

[4] S $P(A|B)$ označavamo vjerojatnost događaja A uz uvjet da je poznato da se događaj B dogodio.

$P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} P(A_1|V_1 \cap O_2) &= \frac{P(A_1 \cap V_1 \cap O_2)}{P(V_1 \cap O_2)} = \frac{P(O_2|V_1 \cap A_1) \cdot P(V_1 \cap A_1)}{P(O_2|V_1) \cdot P(V_1)} \\ &= \frac{\cancel{\frac{1}{2} \cdot P(V_1)} \cdot P(A_1)}{\cancel{\frac{1}{2} \cdot P(V_1)}} = P(A_1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnost pobjede ako natjecatelj ostane pri svom izboru je $\frac{1}{3}$. Jer pod uvjetom $V_1 \cap O_2$ događaji A_1 i A_1^C čine particiju, vrijedi $P(A_1^C|V_1 \cap O_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ pa je vjerojatnost pobjede ako promjeni svoj izbor jednaka $\frac{2}{3}$.

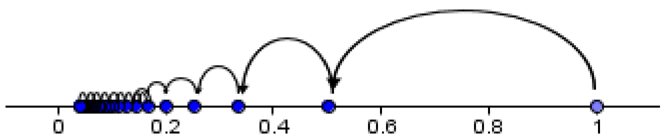
Ponekad je ljude lakše uvjeriti da ih intuicija vara tako da se postavi analogan problem s većim brojem vrata. Recimo da imamo 100 vrata, s time da je iza jednih automobil, a iza ostalih 99 koze. Natjecatelj na početku bira jedna vrata, npr. prva. Voditelj sada od ostalih 99 vrata otvara sva iza kojih su koze, osim jednih iza kojih može biti ili koza ili automobil. Dakle ostala su dvoja vrata – ona koja je natjecatelj na početku odabrao i još jedna. No sada ljudi nisu toliko skloni reći da je svejedno ostanu li pri svom izboru ili ne. Vjerojatnost da je natjecatelj otprve odabrao vrata iza kojih je automobil je tek $\frac{1}{100}$, pa se i vjerojatnost pobjede ostajanjem pri početnom izboru čini niska [15].

3.5 Infinitezimalni račun

Preteče infinitezimalnog računa nalaze se još u antičkoj Grčkoj sa Zenonovim paradoksima i Eudoksovom metodom ekshaustije za određivanje površina nepravilnih likova. Arhimed je koristio tu metodu da aproksimira površinu kruga upisujući i opisujući mu poligone. Cavalieri je u 17. st. razvio metodu nedjeljivih veličina pod koju spada i Cavalierijev princip, a Torricelli ju je kombinirao s antičkom ekshaustijom. S druge strane, Fermat i Barrow su razmatrali problem određivanja tangente na krivulju. Na temelju radova ovih matematičara, a i mnogih drugih, Newton i Leibniz su neovisno jedan o drugome razvili metode deriviranja i integriranja te uočili njihovu vezu, pa im se stoga pripisuje otkriće infinitezimalnog računa. Za definicije derivacije i integrala koje danas koristimo važan je i pojam limesa, kojeg je precizno definirao tek Cauchy u 19. st. [5].

Limesi

U ideji, limes niza jest broj kojemu niz teži. Pogledajmo niz $\left(\frac{1}{n}\right)$. Njegovi članovi su redom $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, i tako dalje. Prikazat ćemo ga na brojevnom pravcu (slika 3.10). Znamo da taj niz pada – intuitivno, jednu cjelinu dijelimo na sve veći broj dijelova pa su oni sve manji; a formalno $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ je ekvivalentno s $n < n+1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, odnosno svaki sljedeći član je manji od prethodnog. Također, znamo da niz nikada neće prijeći u negativne brojeve jer u svakom članu dijelimo dva pozitivna broja. Dakle svi članovi niza su pozitivni i smanjuju se. Uz to, niz će „preskočiti" svaki pozitivan broj, odnosno nastavit će padati ispod svakog pozitivnog realnog broja. Lako vidimo da ako je $r > 0$, tada je $r > \frac{1}{n}$, što je ekvivalentno s $n > \frac{1}{r}$ za $n \in \mathbb{N}$. Kako indeks n raste, nakon nekog vremena će prerasti $\frac{1}{r}$, a tada je odgovarajući član niza $\frac{1}{n}$ manji od r i to vrijedi za svaki pozitivan r. Intuitivno, mogli bismo reći da niz $\left(\frac{1}{n}\right)$ teži u 0, odnosno da je 0 limes tog niza.



Slika 3.10: Niz $\left(\frac{1}{n}\right)$

Pitanje je kako koncept limesa formalizirati. Neka je (a_n) neki niz realnih brojeva, a L neki realan broj. Što bi značilo da je L limes niza a_n? Želimo reći da članovi tog niza prilaze proizvoljno blizu broju L. Udaljenost n-tog člana niza od broja L je $|a_n - L|$. Približavanje broju L bismo mogli opisati tako da prvo razmotrimo približavanje na određenu udaljenost. Da se niz približava broju L na udaljenost ε bismo mogli opisati tako da udaljenost članova niza od L postaje manja od ε, odnosno $|a_n - L| < \varepsilon$. Udaljenost postaje manja od ε ako nakon nekog indeksa svi članovi niza padaju unutar te udaljenosti od L. Drugim riječima, postoji indeks n_ε tako da za sve indekse iza njega vrijedi da odgovarajući članovi niza padaju unutar udaljenosti ε od L. Uz liberalniju uporabu notacije, mogli bismo pisati

$$\exists n_\varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Jer su n_ε i n indeksi koji su prirodni brojevi, formalnije pišemo

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ovime smo opisali što znači da se niz približava broju L na udaljenost ε. Da bi se članovi niza približavali na proizvoljno malu udaljenost broju L, dovoljno je da gornja tvrdnja vrijedi za sve pozitivne ε. Sada napokon možemo formalno definirati limes niza:

Definicija 3.5.1. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Realan broj L je limes tog niza ako vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Ovakva formalna definicija limesa nije pogodna za određivanje limesa jer može tek poslužiti kao kriterij za provjeru je li neki broj limes niza ili ne. S druge strane, pomoću nje se dosta lako može dokazati da je limes niza, ako postoji, jedinstven i da vrijede neka osnovna svojstva kao na primjer da je limes zbroja jednak zbroju limesa. Ta svojstva se zatim mogu koristiti za lako određivanje limesa nizova. Limesi nizova se dalje poopćavaju na limese funkcija.

Derivacije

Koncept derivacije je od goleme važnosti u praktičnoj primjeni matematike te se koristi u rješavanju problema vezanih uz brzinu promjene veličina. Newton je tako svoju inačicu diferencijalnog računa, metodu fluksija, razvio proučavajući fizikalni problem brzine. Naime, brzina tijela se određuje tako da se promatra određen vremenski interval Δs, a zatim se izmjeri prijeđeni put Δt u tom vremenu. Prosječna brzina tijela u tom vremenu je tada $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Tu prosječnu brzinu je moguće izračunati za proizvoljno male vremenske intervale, no postavlja se pitanje je li moguće odrediti trenutnu brzinu tijela. S obzirom da tijela mogu usporavati ili ubrzavati (odnosno mogu mijenjati svoju brzinu), čini se da je pojam trenutne brzine smislen. No vremenski interval Δt bi u tom slučaju bio jednak 0, pa brzinu nije moguće odrediti pomoću prijašnje formule.

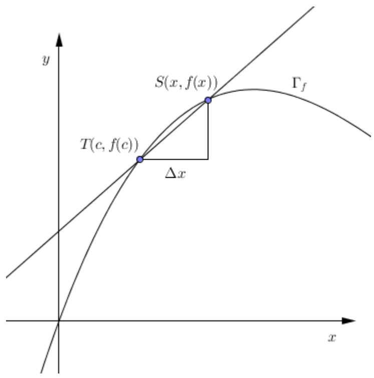
S druge strane, Leibniz je proučavao problem određivanja tangente na krivulju. Ako imamo zadane dvije točke na grafu funkcije, lako je odrediti jednadžbu sekante kroz te dvije točke, jer one jednoznačno određuju pravac. No ako je zadana samo jedna točka na grafu funkcije, kako odrediti tangentu?

Primijetimo da su ova dva problema povezana. Naime, ako ovisnost puta o vremenu prikažemo na s-t grafu, prosječna brzina u intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ bit će nagib pravca kroz točke

$(t_1, s(t_1))$ i $(t_2, s(t_2))$. Analogno tome, trenutna brzina u trenutku t_0 bit će nagib tangente na graf u točki $(t_0, s(t_0))$. Newton i Leibniz su probleme riješili uzimajući sve manje i manje vremenske intervale, odnosno približavajući dvije točke sve više (uzimajući sve manji razmak među točkama na grafu). Za to su koristili „beskonačno male" (infinitezimalne) veličine, a danas bismo to „približavanje" formalnije izrazili pomoću limesa.

Pretpostavimo da je zadana neka funkcija f i točka $T(c, f(c))$ na njenom grafu. Kako bismo odredili tangentu na graf Γ_f u točki T, uzmimo prvo neku novu točku $S(x, f(x))$ na grafu, kao na slici 3.11. Nagib pravca kroz te dvije točke je $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. No, jer želimo nagib tangente u točki T, uzimat ćemo točke S koje su sve bliže i bliže točki T, čime će nagib sekante postajati sve bliži nagibu tangente. To ćemo učiniti tako da x (koji određuje točku S na grafu) približavamo prema c, odnosno uzet ćemo limes kada $x \to c$. Dobivamo

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$



Slika 3.11: $f'(c)$ je nagib tangente na graf Γ_f u točki $T(c, f(c))$.

Tako dobivenu vrijednost nazivamo derivacijom funkcije f u točki x i pišemo $f'(x)$ u Lagrangeovoj notaciji, odnosno $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ u Leibnizovoj notaciji. Alternativno smo do nagiba mogli doći tako da sa Δx označimo udaljenost točaka T i S po x-osi, tj. $\Delta x = x - c$. Tada bi smanjivali tu udaljenost prema nuli pa bi derivacija bila

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Ova definicija se češće koristi u srednjoj školi jer su učenici bolje upoznati s limesom kada argument teži prema nuli.

Integrali

Ideja aproksimiranja površina zakrivljenih likova pomoću jednostavnijih bila je poznata još u antici, no integral kakav danas poznajemo formalizirao je tek Riemann u 19. st. Promotrimo problem određivanja površine ispod grafa funkcije f koja je ograničena na segmentu $[a, b]$. Podijelimo taj segment na n manjih segmenata oblika $[x_{k-1}, x_k]$ pomoću $n-1$ točaka, tako da vrijedi:

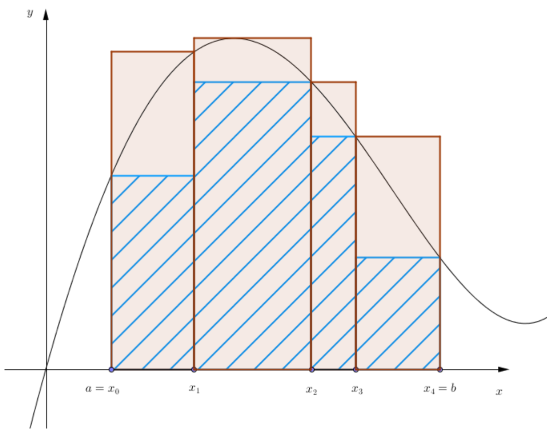
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Tu particiju označimo s P. Nad svakim od tih segmenata ćemo području ispod grafa funkcije upisati pravokutnik, kao na slici 3.12. Visina m_k pravokutnika nad k-tim segmentom će biti infimum funkcije nad tim segmentom:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Površinu k-tog pravokutnika dobivamo tako da visinu pomnožimo sa širinom, odnosno s duljinom segmenta $[x_{k-1}, x_k]$, što je $x_k - x_{k-1}$. Zbroj površina svih n upisanih pravokutnika će biti „donja procjena" površine ispod grafa, tzv. donja Darbouxova suma za subdiviziju P:

$$s_P := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$



Slika 3.12: Smeđa površina je S_P, gornja procjena za površinu ispod grafa, a plavo iscrtkana površina je s_p, donja procjena.

Analogno možemo površinu iznad svakog segmenta ograničiti odozgo tako da uzmemo supremum funkcije na danom segmentu:

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Zbroj površina tih opisanih pravokutnika će tada biti „gornja procjena" površine ispod grafa funkcije, gornja Darbouxova suma za subdiviziju P:

$$S_P := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Moguće je izabrati različite subdivizije P početnog segmenta, s time da će finije subdivizije (više tanjih pravokutnika) davati bolje procjene tražene površine. Od svih gornjih procjena, najbolja bi bila ona koja je najniža (jer je najbliža traženoj). Stoga ćemo definirati gornji Riemannov integral I^* kao infimum skupa svih gornjih Darbouxovih suma:

$$I^* := \inf_P S_P.$$

Analogno definiramo donji Riemannov integral kao

$$I_* := \sup_P s_P.$$

Za funkciju f koja je ograničena na segmentu $[a, b]$ kažemo da je Riemann-integrabilna ako se donji i gornji Riemannov integral podudaraju, tj. $I_* = I^*$. Tu vrijednost nazivamo Riemannovim integralom funkcije f na $[a, b]$ i pišemo $\int_a^b f(x)dx$. U praksi za računanje integrala neprekidnih funkcija koristimo Newton-Leibnizovu formulu:

Teorem 3.5.2 (Newton-Leibnizova formula)**.** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako je F primitivna funkcija za f, onda za svaki segment $[a, b] \subseteq I$ vrijedi:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Važno je imati na umu da integral može biti i negativan za razliku od površine, pa integral ne odgovara u potpunosti ideji površine ispod grafa funkcije. Uzrok tome je što su visine gornjih i donjih pravokutnika definirane kao infimumi i supremumi funkcije, a oni mogu biti negativni ako je funkcija dijelom negativna na intervalu integracije. Pogledajmo primjer 3.5.3:

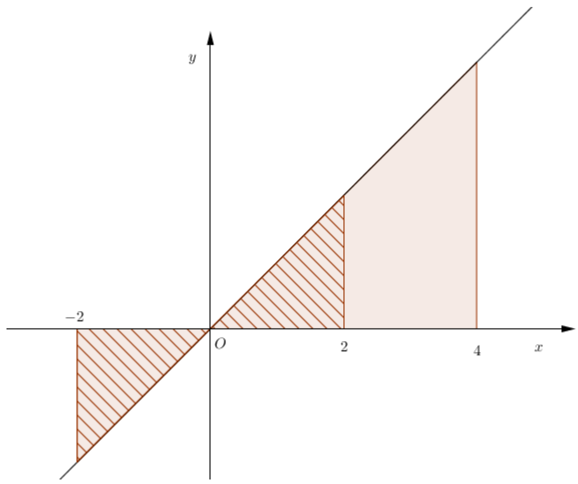
Primjer 3.5.3. *Odredite površinu ispod grafa funkcije $f(x) = x$ na segmentu $[-2, 4]$.*

Kao što vidimo na slici 3.13, traženu površinu lako možemo izračunati geometrijski kao zbroj površina dvaju trokuta. Rješenje je

$$P = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 2 + 8 = 10.$$

S druge strane, integral $\int_{-2}^{4} x dx$ će dati drugačiji rezultat:

$$\int_{-2}^{4} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^{4} = \frac{4^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6.$$



Slika 3.13: Površina ispod grafa funkcije $f(x) = x$ na $[-2, 4]$. Integral $\int_{-2}^{4} x dx$ je jednak neiscrtkanoj površini jer će se iscrtkane površine poništiti u integralu.

Kako bismo do točne vrijednosti došli pomoću integrala, trebamo razdvojiti segment na dio za koji je graf funkcije ispod x-osi i dio za koji je graf iznad x-osi. Onaj dio za koji je graf ispod x-osi će imati „negativnu površinu" pa joj moramo promijeniti predznak:

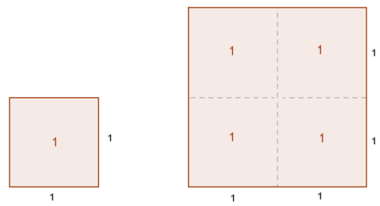
$$P = -\int_{-2}^{0} x dx + \int_{0}^{4} x dx = -\left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^{0} \right) + \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{4} = -(0 - 2) + 8 - 0 = 2 + 8 = 10.$$

Poglavlje 4

Česte miskoncepcije

4.1 Iluzija linearnosti

U školama se s pravom dosta pažnje posvećuje proporcionalnosti i linearnoj funkciji, a lako ih je i zorno prikazati. Osim što su ti koncepti relativno lako razumljivi, imaju i široko područje primjene u stvarnom životu te učenici uglavnom nemaju većih poteškoća s njihovim razumijevanjem. Ipak, preveliko oslanjanje na linearne modele može dovesti do neprimjerene generalizacije. Tu sklonost mišljenju da su veličine u proporcionalnoj vezi čak i u situacijama kada to nije opravdano nazivamo iluzijom linearnosti. Primjer toga bilo bi mišljenje da se udvostručavanjem duljina stranica kvadrata udvostručuje i njegova površina, ili da će tijelo koje je dvaput teže također dvaput brže padati.



Slika 4.1: Ako udvostručimo duljine stranica kvadrata, površina će se učetverostručiti.

Prema [24], „školski" format zadataka navodi učenike da se oslanjaju na njima najpoznatije, linearne načine rješavanja. Iluzija linearnosti je najviše prisutna u zadacima koji su zadani samo riječima, manja ako je zadan crtež, a najveći učinak ima korištenje pribora (npr. izrada i popločavanje male kućice). Također, korisno je smanjiti iluziju poticanjem na provjeru rješenja. Ipak, intervencije uglavnom nemaju dugoročan učinak, a ukazivanje na grešku može dovesti do sumnje u linearne modele u situacijama kada su zaista primjenjivi. Stoga je potrebno već od mlađe dobi primjerima ukazivati na to da nisu svi odnosi linearni te koristiti nerutinske zadatke koji zahtjevaju dublje promišljanje.

Donekle sličan problem javlja se i kada učenici neprimjereno generaliziraju formule za jednostavnije operacije (npr. zbrajanje) na kompliciranije (npr. korijenovanje). Tako bi na primjer u zadatku pojednostavljivanja izraza gdje je rješenje $\sqrt{x^2+25}$ učenici bili skloni to dalje pojednostaviti kao $x+5$, iako općenito ne vrijedi da je $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Ako se rješenje čini prekomplicirano, učenici često u njega sumnjaju te pokušavaju dobiti „ljepše" rješenje primjenom formula. Stoga je poželjno izvesti ili bar na konkretnim primjerima provjeravati formule koje se koriste, pogotovo na srednjoškolskoj razini.

4.2 0,9999... ≠ 1

Jedna od čestih miskoncepcija jest da je $0{,}99999\ldots \neq 1$. Zabuna dolazi zbog toga što primjena kriterija usporedbe decimalnih brojeva dovodi do zaključka da je $0{,}999\ldots < 1$. Brojevi se uspoređuju znamenku po znamenku, decimalu po decimalu, a s obzirom da je svaki dio broja 0,999... manji od 1, i sam broj je manji od 1. No važno je napomenuti da je taj kriterij primjenjiv za brojeve kada nisu zapisani tako da završavaju sa beskonačno mnogo devetki. To se inače uglavnom ne spominje jer gotovo nikad ne zapisujemo brojeve u takvom obliku pa tu iznimku nije vrijedno spominjati. Čak i ljudi koji su upoznati s pojmom limesa ponekad tvrde da $0{,}999\ldots$ samo teži prema jedinici, ali nikada neće biti jednako 1 [29]. Standardni dokaz kojim se pokazuje da jednakost zapravo vrijedi je sljedeći:

Primjer 4.2.1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0{,}33333\ldots / \cdot 3, \\ 1 &= 0{,}999\ldots \end{aligned}$$

Ovo ponekad učenicima nije uvjerljivo, a neke može i navesti da sumnjaju u jednakost $0{,}33333\ldots = \frac{1}{3}$. Još jedan čest dokaz je pomoću množenja s 10:

Primjer 4.2.2.

$$\begin{aligned} x &= 0{,}999\ldots / \cdot 10, \\ 10x &= 9{,}99999..., \\ 10x &= 9 + 0{,}999..., \\ 10x &= 9 + x, \\ 9x &= 9, \end{aligned}$$

$$x = 1,$$

$$0{,}999... = 1.$$

Ovdje su učenici skloni reći da broj 9,9999. . . nema jednako mnogo devetki kao 0,999... s kojim smo počeli nego ima jednu manje. Mnogi također 0,99999. . . smatraju zadnjim brojem prije 1 [23].

Još jedan dokaz slijedi iz tvrdnje da različiti realni brojevi moraju imati neki realan broj između. Između 0,9999. . . i 1 ne postoji realan broj pa moraju biti jednaki. No ni ovaj dokaz nije potpuno uvjerljiv. Moguće je i ilustrirati jednakost induktivno, ali to nije dokaz:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111...,$$

$$\frac{2}{9} = 0{,}222...,$$

$$\frac{3}{9} = 0{,}333...,$$

$$\vdots$$

$$\frac{9}{9} = 0{,}999...$$

Pokažimo da tvrdnja slijedi iz formalnih definicija sume reda i decimalnog broja.

Definicija 4.2.3. *Neka je* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red. Tada je* $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ *zbroj prvih n članova reda, odnosno n-ta parcijalna suma reda. Ako niz parcijalnih suma konvergira, tada sumu niza definiramo kao limes parcijalnih suma, odnosno* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$*. Drugim riječima,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dakle moguće je proširiti definiciju zbrajanja tako da možemo zbrojiti beskonačno mnogo brojeva. Broj 0,999... možemo zapisati kao $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$. Možemo lako vidjeti prvih par parcijalnih suma:

$$S_1 = \frac{9}{10},$$

$$S_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100},$$

$$S_3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

Uočavamo da je u n-toj parcijalnoj sumi nazivnik jednak 10^n, a brojnik je za 1 manji. Sada se matematičkom indukcijom može provjeriti da vrijedi

$$(*) \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = S_n = \frac{10^n - 1}{10^n},$$

$$0{,}999... \overset{def 3.1.1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \overset{def 4.2.3}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = 1.$$

Zadnja jednakost je jednostavan račun s limesima. Dakle vidimo da 0,999... = 1 slijedi gotovo po definiciji. Moguć je prigovor da limes samo teži broju 1. Važno je napomenuti da je limes fiksna vrijednost. Limes nikamo ne teži – limes je vrijednost kojoj niz teži.

4.3 Limesi

Prethodno spomenuta miskoncepcija temelji se na dubljoj miskoncepciji vezanoj uz limese. Naime, zbog primjera koji se u školama daju za limese te zbog jezika koji se koristi, učenici često razviju ideju da je limes broj kojem niz ili funkcija teži, *ali ga ne može postići*. Jedna od neformalnih interpretacija tvrdnje da je L limes niza a_n jest da možemo učiniti da je a_n proizvoljno blizu broju L za dovoljno velik n. No kao što Tall napominje u [30], ta fraza ima druga kolokvijalna značenja – kada kažemo da su dva broja blizu, želimo reći da su blizu, ali da nisu jednaki – inače bismo rekli da su jednaki. Ovakav jezik može stvoriti implikaturu da limes niza ne može i sam biti član niza ili da funkcija ne može poprimiti vrijednost nekog svog limesa.

Kod funkcija, za primjere limesa se često koriste funkcije s asimptotama, odnosno funkcije koje ne poprimaju konkretnu vrijednost u određenim točkama. Tako funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nije definirana u $x = 0$, ali tu ima vertikalnu asimptotu i možemo govoriti o limesu $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Također, ima i horizontalnu asimptotu $y = 0$, odnosno možemo odrediti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ iako ta funkcija neće poprimiti vrijednost 0 ni za jedan x. Posljedica naglašavanja takvih primjera može biti da učenici limese vežu uz asimptote, posebice ako već imaju miskoncepciju da funkcija ne može poprimiti vrijednost svog limesa [1]. Kao rezultat, učenici bi mogli reći da funkcija $g(x) = 2x+5$ nema limes u $x = 4$ jer tamo nema asipmtotu ili zato što se $g(x)$ ne približava nekoj vrijednosti kad $x \to 4$ već ima konkretnu vrijednost u $x = 4$. Slično kao kod pojma „blizu", ako već govorimo o limesu funkcije u nekoj točki, stvaramo implikaturu da funkcija ne poprima konkretnu vrijednost u toj točki.

4.4 Uvjetna vjerojatnost

Postoji nekoliko čestih miskoncepcija vezanih uz uvjetnu vjerojatnost. Intuitivno razumijevanje uvjetne vjerojatnosti nije u skladu s Bayesovim teoremom koji tvrdi da je

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

uz uvjet da $P(B) \neq 0$. U primjeru 4.4.1 ćemo vidjeti grešku osnovne stope.

Primjer 4.4.1. *Policajci nasumično zaustavljaju vozila i vozače podvrgavaju alkotestu. Ako je vozač pijan, alkotest će to sigurno pokazati. No čak i ako je vozač trijezan, alkotest će u* 5% *slučajeva greškom reći da je pijan. Znamo da je u prosjeku* 1 *od* 1000 *vozača pijan. Ako je alkotest pokazao da je vozač pijan, kolika je vjerojatnost da je zaista pijan? [33]*

Intuitivno bismo mogli reći da je tražena vjerojatnost 95% jer će alkotest pogriješiti samo u 5% slučajeva. Ali ovime zanemarujemo osnovnu stopu – jer je velika većina vozača trijezna (a alkotest može pogriješiti samo u takvim slučajevima), broj pogrešaka će ipak biti velik, pa čak i veći od stvarnog broja pijanih vozača. Označimo s V_p da je vozač pijan, sa V_t da je trijezan, te sa A_+ da je alkotest pozitivan. Znamo da je vjerojatnost da je alkotest pozitivan 100% ako je vozač stvarno pijan, a 5% ako je trijezan, odnosno $P(A_+|V_p) = 1$ i $P(A_+|V_t) = 0{,}05$. Znamo i da je vjerojatnost da je zaustavljeni vozač pijan (ako ih policija zaustavlja nasumično) jednaka $\frac{1}{1000}$, tj. $P(V_p) = 0{,}001$. Vjerojatnost da je trijezan je onda $P(V_t) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$ jer su to jedina dva slučaja i disjunktni su.

Zanima nas vjerojatnost da je vozač pijan ako je alkotest pozitivan pa želimo izračunati $P(V_p|A_+)$. Za to će nam trebati vjerojatnost da je alkotest pozitivan, a to je moguće u dva disjunktna slučaja: kada je pozitivan i vozač je pijan, te kada je pozitivan i vozač je trijezan. Stoga je $P(A_+) = P(A_+ \cap V_p) + P(A_+ \cap V_t)$. Iz formule za uvjetnu vjerojatnost znamo da je $P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y)$. Služeći se Bayesovom formulom dobivamo:

$$\begin{aligned} P(V_p|A_+) &= \frac{P(A_+|V_p)P(V_p)}{P(A_+)} = \frac{1 \cdot 0{,}001}{P(A_+|V_p)P(V_p) + P(A_+|V_t)P(V_t)} \\ &= \frac{0{,}001}{1 \cdot 0{,}001 + 0{,}05 \cdot (1 - 0{,}001)} = \frac{0{,}00005}{0{,}05095} \approx 0{,}0196. \end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnost da je nasumično zaustavljen vozač kojem je alkotest pozitivan zaista pijan je otprilike 1,96%, što je bitno različito od intuitivnih 95%.

Bar-Hillel (1980.) u [3] daje još jedan primjer:

Primjer 4.4.2. *Istraživanje je provedeno na stopama samoubojstva među ljudima između* 25 *i* 35 *godina. Otkriveno je da je stopa samoubojstva triput veća kod samaca nego kod* *oženjenih ljudi. U ovoj dobnoj skupini,* 80% *ljudi je oženjeno, a* 20% *su samci. Od* 100 *samoubojstava u toj dobnoj skupini, koliko biste procijenili da ih je počinjeno od strane samaca?*

Velika većina odgovora na postavljeni problem je bila da je 75% samoubojstava počinjeno od strane samaca, a ljudi su do zaključka dolazili većinom služeći se samo činjenicom da je stopa samoubojstva triput veća kod samaca nego kod oženjenih ljudi. Drugim riječima, u odgovoru na pitanje koje traži postotak samaca u određenoj populaciji su ignorirali osnovnu stopu, tj. postotak samaca u općenitoj populaciji. To se događalo i u ostalih 13 varijacija istog problema u [3], a i u nekoliko drugih problema vezanih uz slične greške u razmišljanju danih u istom radu.

Pokušajmo odgovoriti na problem formalno. Označimo sa S samce, s O oženjene, a sa S_u samoubojstva. Znamo da je u općoj populaciji 80% ljudi oženjeno, a 20% su samci pa je $P(O) = \frac{4}{5}$ i $P(S) = \frac{1}{5}$. Znamo i da se u populaciji samaca samoubojstva događaju triput češće nego u populaciji oženjenih, tj. $P(S_u|S) = 3P(S_u|O)$. Zanima nas vjerojatnost da je osoba koja je počinila samoubojstvo bila samac, odnosno $P(S|S_u)$. Prvo ćemo izračunati omjer vjerojatnosti da je samoubojstvo počinio samac te vjerojatnosti da je samoubojstvo počinila oženjena osoba:

$$\frac{P(S|S_u)}{P(O|S_u)} = \frac{\frac{P(S_u|S)P(S)}{\cancel{P(S_u)}}}{\frac{P(S_u|O)P(O)}{\cancel{P(S_u)}}} = \frac{3\cancel{P(S_u|O)}P(S)}{\cancel{P(S_u|O)}P(O)} = \frac{3\cdot\frac{1}{\cancel{5}}}{\frac{4}{\cancel{5}}} = \frac{3}{4}.$$

Iz dobivenog omjera $P(S|S_u) : P(O|S_u) = 3 : 4$ slijedi da je $P(S|S_u) = 3k$, a $P(O|S_u) = 4k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Jer u zbroju te vjerojatnosti moraju dati 100%, vrijedi da je $3k + 4k = 100\%$, odnosno $7k = 1$. Tada je $k = \frac{1}{7}$ pa je tražena vjerojatnost $P(S|S_u) = 3k = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286 \approx 43\%$. Dakle, od 100 ljudi koji su počinili samoubojstvo, procijenili bismo da ih je otprilike 43 samaca.

Usko vezana uz prethodne primjere je i tzv. optužiteljeva greška, miskoncepcija da je $P(A|B) = P(B|A)$. Optužitelji ponekad koriste sljedeći argument kako bi uvjerili suce da je optuženik kriv: „Kada bi optuženi bio nevin, vjerojatnost da nađemo dokaze koji ga povezuju sa zločinom je niska. S obzirom da smo našli takve dokaze, vjerojatnost da je optuženi nevin je niska." Formalnije, s obzirom da je $P(dokazi|nevin)$ niska, vrijedi i da je $P(nevin|dokazi)$ niska. No lako je vidjeti da to općenito ne vrijedi:

$$P(A|B) = P(B|A) \Leftrightarrow \frac{\cancel{P(A\cap B)}}{P(B)} = \frac{\cancel{P(B\cap A)}}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = P(B).$$

Drugim riječima, ta jednakost bi vrijedila ako i samo ako je vjerojatnost da je optužena osoba nevina jednaka vjerojatnosti da dokazi ukazuju da je kriva, što u praksi uglavnom ne vrijedi.

Ova greška se također dosta javlja u znanosti i medicini. Moguće je teorijski izračunati vjerojatnost pojave nekog fenomena F pod pretpostavkom da teorija T vrijedi. No ta vjerojatnost nije općenito jednaka vjerojatnosti da je teorija T ispravna ako uočimo fenomen F. U primjeru 4.4.3 dajemo primjer iz medicine [28]:

Primjer 4.4.3. *Mamogrami uspijevaju otkriti rak dojke u* 90% *slučajeva, a u* 10% *slučajeva daju lažne pozitivne rezultate. Od* 38 *milijuna žena koje su se testirale mamogramom,* 140000 *je zaista imalo rak dojke. Kolika je vjerojatnost da žena ima rak dojke ako joj je mamogram pozitivan?*

Intuicija bi nam ovdje rekla da je tražena vjerojatnost 90% jer je to postotak slučajeva u kojima mamogrami otkrivaju rak dojke. No, uz oznake R za rak dojke i M za pozitivan mamogram, dani podatak nam govori da je $P(M|R) = \frac{9}{10}$, a nas zanima $P(R|M)$.

Znamo da je broj žena kojima je mamogram bio pozitivan i koje imaju rak dojke jednak $|M \cap R| = 140000$. Također, 10% cijele populacije od 38000000 žena dobiva lažne pozitivne rezultate (imaju pozitivan mamogram, ali zapravo nemaju rak). Stoga je $|M \cap R^C| = \frac{1}{10} \cdot 38000000 = 3800000$. Mamogram može biti pozitivan u slučaju kada žena zaista ima rak dojke ili u slučaju kada nema rak pa slijedi

$$|M| = |M \cap R| + |M \cap R^C| = 140000 + 3800000 = 3940000.$$

Sada dobivamo da je

$$P(R|M) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{|R \cap M|}{|M|} = \frac{14\cancel{0000}}{394\cancel{0000}} = \frac{7}{197} \approx 3{,}6\%.$$

Dakle, vjerojatnost da žena zaista ima rak dojke ako joj je mamogram pozitivan je otprilike 3,6%, što je opet bitno različito od intuitivnih 90%.

4.5 Očekivanje – St. Petersburški paradoks

Kada bacamo pravednu kocku, ishod je slučajan te imamo konačno mnogo ishoda. Ako sa X označimo ishod bacanja pravedne kocke, mogući ishodi su $1, 2, 3, 4, 5, 6$, a vjerojatnost svakog od tih ishoda je $\frac{1}{6}$. Očekivanje te slučajne varijable intuitivno predstavlja prosječnu vrijednost koju očekujemo nakon vrlo velikog broja bacanja. Formalno, ako je X diskretna slučajna varijabla koja može poprimiti vrijednosti $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ s redom pridruženim vjerojatnostima $p_1, p_2, ..., p_k, ...$, $k \in \mathbb{N}$, onda je njeno očekivanje definirano kao $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$. U slučaju pravedne kocke, dobivamo

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3{,}5.$$

Analogno tome, ako bacamo pravedan novčić te dobijemo jednu kunu ako padne glava, a ništa inače, očekivanje će biti $E[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Drugim riječima, kada bi velik broj ljudi bacio novčić, te svi oni kojima je novčić pao na glavu dobili kunu, prosjek dobiti za sve ljude bio bi otprilike $\frac{1}{2}$. Očekivanje se uglavnom podudara s intuicijom jer jaki zakon velikih brojeva tvrdi da prosjek ishoda pokusa konvergira gotovo sigurno prema očekivanju kada broj ponavljanja teži u beskonačnost. Upravo u nerazumijevanju te tvrdnje temelji se već spomenuta kockarova greška. Naime, ova konvergencija vrijedi kada broj ponavljanja teži u beskonačnost, što znači da za malen broj ponavljanja (npr. 10 bacanja novčića) ne možemo očekivati da se broj pisama i glava niti približno izjednačuje, odnosno ne možemo očekivati da će nakon 9 glava pasti pismo.

Jedan od poznatijih primjera u kojem se formalno očekivanje ne podudara s intuitivnom idejom očekivanja je St. Petersburški paradoks [10]. Pretpostavimo igru u kojoj se pravedan novčić baca sve dok ne padne pismo. Igraču će biti isplaćena svota od 2 kune ako se to dogodi u prvom bacanju, 4 kune ako se to dogodi u drugom, 8 kuna ako u trećem, 16 ako u četvrtom, i tako dalje. Dakle počevši od svote od 2 kune, svaki put kada padne glava se svota udvostručuje, a kada padne pismo igra staje i svota se isplaćuje igraču. Pitanje je koliko bi igrač bio voljan uložiti da zaigra takvu igru. Naravno, igrač želi uložiti manju svotu od očekivane dobiti kako bi na kraju bio na dobitku. Ako uloži više od očekivanog dobitka, biti će na gubitku.

Pogledajmo očekivanu vrijednost. Neka je X slučajna varijabla koja označava dobitak. Ona može poprimiti vrijednosti $2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$ Ako igra stane na n-tom bacanju, dobitak će biti 2^n. Zanimaju nas i vjerojatnosti da igra stane na određenom bacanju. Igrač će dobiti 8 kn ako igra stane na trećem bacanju, a da se to dogodi novčić mora pasti redom na glavu, glavu i pismo. Vjerojatnost da se to dogodi jest $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Općenito, vjerojatnost da igra stane na n-tom bacanju je $\frac{1}{2^n}$. Dakle ishodima $2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$ su redom pridružene vjerojatnosti $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ..., \frac{1}{2^n}$. Očekivanje je onda

$$E[X] = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} + \cancel{8} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} + ... + \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} + ... = 1 + 1 + 1 + ... + 1 + ... = \infty.$$

No iako je očekivani dobitak beskonačan, ljudi uglavnom nisu spremni platiti velike svote da zaigraju ovu igru. Mnogi se slažu s procjenom da bi rijetki platili i 25 kuna da ju zaigraju [21]. Raskorak između intuitivnog očekivanja i formalnog koncepta je u korisnosti. Zamislimo dvije igre, jednu u kojoj je garantiran dobitak od 5 kn, i drugu u kojoj igrač ima 50% šansu da dobije 10 kn i 50% da ne dobije ništa. Formalno, očekivanje u prvom slučaju bi bilo $1 \cdot 5 = 5$, a u drugome $0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 0 = 5$. Usprkos tome što su očekivani dobitci jednaki, ljudi ne bi vidjeli te igre kao jednako isplative. U St. Petersburškom paradoksu je očekivanje beskonačno jer su mogući dobitci proizvoljno veliki.

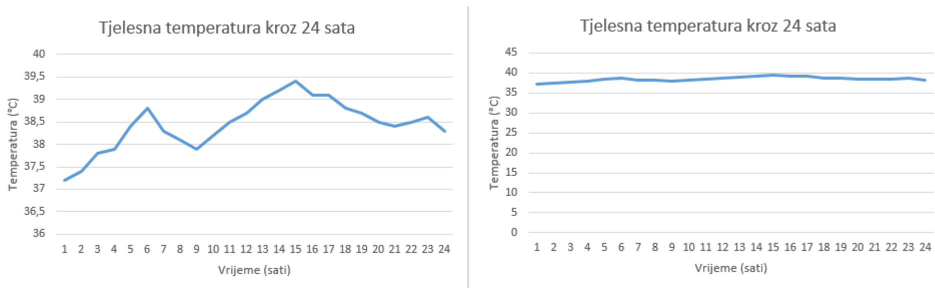
Ako pismo padne tek u dvadesetom bacanju, nakon 19 glava, igrač će dobiti 1048576 kn. No veći dobitci imaju manju vjerojatnost pa je vjerojatnost tog dobitka jednaka 1 naprama 1048576, a čak je i vjerojatnost da igrač zaradi 32 kune poprilično niska, tek 3,125%.

4.6 Varljiva statistika

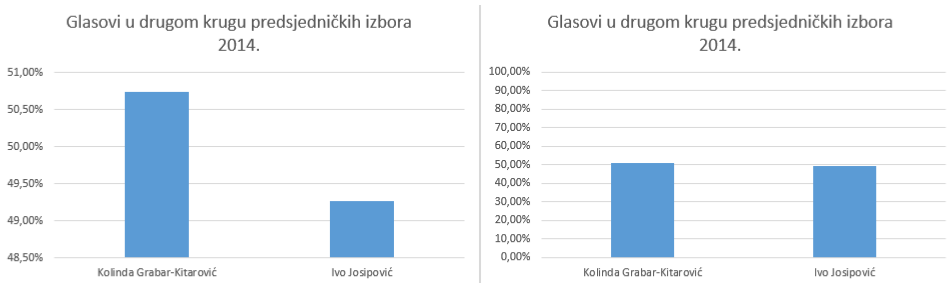
Statistika ima golemo područje primjene u životu, te često utječe na postupke na društvenoj razini. Tako se lijekovi puštaju u opticaj nakon kliničkih testiranja i utvrđivanja njihove uspješnosti i vjerojatnosti nuspojava, novčani resursi se ulažu u proizvode i službe za koje se utvrdi da su poželjniji od drugih, politika se mijenja kao odgovor na mišljenje populacije, način rada javnih službi se prilagođavaju situacijama u društvu, i tako dalje. No te promjene ne provode statističari već ljudi koji često sami ne razumiju statistiku ni znanstvenu metodologiju pa se ponekad praksa temelji na lošim istraživanjima. Osim toga, u današnje vrijeme masovnih medija ljudi često dobivaju razne informacije koje vrlo rijetko odluče sami provjeriti, što omogućava laku manipulaciju javnog mišljenja na temelju varljive statistike. Upravo je zato od iznimne važnosti da prosječna osoba ima barem osnovno razumijevanje mogućih grešaka u istraživanjima i trikova kojima se razne interesne skupine služe da prikažu situacije boljim ili lošijim od stvarnosti [11].

Jedan od čestih načina manipulacije je varljivo prikazivanje podataka na grafu [11]. To se može postići grupiranjem podataka ili skaliranjem osi. Na slici 4.2 vidimo da grupiranjem gubimo dio informacija, pa se na drugom grafu uopće ne vidi nagli pad zarade u travnju, a na zadnjem se čini da je zarada bila u stalnom padu do zadnjeg tromjesečja. Utjecaj skaliranja osi možemo vidjeti na slikama 4.3 i 4.4. Slika 4.3 prikazuje dva grafa tjelesne temperature pacijenta kroz 24 sata. Što je raspon vrijednosti na y-osi veći, to „glađe” graf izgleda, pa se ovaj trik može iskoristiti da sakrije rast ili pad. Ovdje je prvi graf informativniji jer je za potrebe liječenja važno imati pregled varijacija u temperaturi. Na slici 4.4 vidimo dva grafa koja prikazuju postotke glasova na predjedničkim izborima 2014. godine u RH. Ovdje je prvi graf varljiv jer na prvi pogled izgleda da je za Kolindu Grabar-Kitarović glasalo otprilike triput više ljudi nego za Ivu Josipovića. Tek bliži pogled na vrijednosti na y-osi otkriva da se radi o razlici manjoj od 2%.

Slika 4.2: Grafovi zarade u ovisnosti o vremenu grupirane po mjesecima, dvomjesečjima i tromjesečjima



Slika 4.3: Grafovi tjelesne temperature u ovisnosti o vremenu sa različito skaliranom y-osi



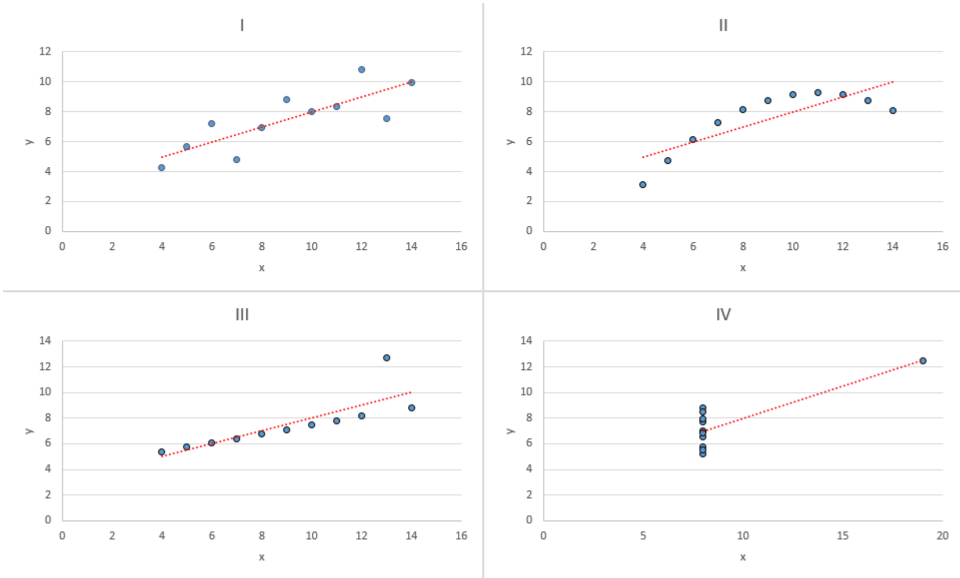
Slika 4.4: Grafovi rezultata predsjedničkih izbora sa različito skaliranom y-osi

Iako grafovi mogu biti varljivi, numerički podaci nisu nužno manje varljivi, kao što je engleski statističar Francis Anscombe pokazao 1973. godine. Takozvani Anscombeov kvartet sastoji se od 4 skupa podataka, svaki sa 11 točaka (x, y), a imaju gotovo iste vrijednosti za nekoliko često korištenih deskriptivnih statistika [2]. Podaci su dani u tablici 4.5.

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
10	8,04	10	9,14	10	7,46	8	6,58
8	6,95	8	8,14	8	6,77	8	5,76
13	7,58	13	8,74	13	12,74	8	7,71
9	8,81	9	8,77	9	7,11	8	8,84
11	8,33	11	9,26	11	7,81	8	8,47
14	9,96	14	8,1	14	8,84	8	7,04
6	7,24	6	6,13	6	6,08	8	5,25
4	4,26	4	3,1	4	5,39	19	12,5
12	10,84	12	9,13	12	8,15	8	5,56
7	4,82	7	7,26	7	6,42	8	7,91
5	5,68	5	4,74	5	5,73	8	6,89

Slika 4.5: Anscombeova četiri skupa podataka

Za svaki od tih skupova podataka je prosjek x-eva jednak 9, uzoračka varijanca x-eva 11, prosjek y-a 7,5 (zaokruženo na 2 decimalna mjesta), uzoračka varijanca y-a je 4,125 ($\pm$0,003), koeficijent korelacije između x i y varijabli 0,816 (zaokruženo na 3 decimalna mjesta) te jednadžba pravca regresije $y = 3 + 0{,}5x$ (koeficijenti zaokruženi na 2, odnosno 3 decimalna mjesta). Grafove za te podatke vidimo na slici 4.6. Na temelju takvih podataka, čitatelj bi u glavi zamislio sliku kao na prvom grafu, s točkama raspršenim oko pravca regresije, iako se te iste statistike dobivaju i za podatke kojima pripadaju preostali grafovi. Na drugom grafu vidimo da pravac nije pogodan za aproksimaciju podataka, na trećem sve točke osim jedne leže na pravcu različitom od pravca regresije, a na zadnjem vidimo utjecaj *outliera* koji u ovom slučaju određuje nagib pravca regresije (bez te točke nagib ne bi bilo moguće odrediti).



Slika 4.6: Grafovi podataka sa tablice na slici 4.5

Pri izradi istraživanja, potrebno je (između ostaloga) pripaziti na veličinu i reprezentativnost uzorka. Istraživanje provedeno na pedesetak ljudi neće modelirati populaciju od deset milijuna ljudi jednako dobro kao ono provedeno na dvjesto ljudi. Veličina uzorka ovisi o veličini populacije koju želimo proučiti i broju parametara koje promatramo, a sudionici istraživanja moraju dobro predstavljati pojedince u populaciji. Reprezentativnost je često upitna kada se provode upitnici. Tako je na primjer u istraživanju o zadovoljstvu studenata fakultetom moguće da su uzorku prezastupljeni studenti koji su posebno (ne)zadovoljni jer žele izraziti svoje pohvale ili kritike, dok studenti koji imaju umjerenija mišljenja možda ne bi htjeli trošiti vrijeme na ispunjavanje upitnika kada nemaju ništa posebno za reći. Problemi s reprezentativnošću su veći problem u društvenim znanostima, gdje se često ne provode eksperimenti zbog teškoće izoliranja varijabli ili neetičnosti [11].

Također, valja imati na umu da korelacija nije isto što i uzročnost. Čak i ako metodološki ispravno istraživanje provedeno na velikom uzorku pokaže visok stupanj korelacije između događaja A i B, ne možemo zaključiti uzročnost jer je moguće da A i B imaju kao zajednički uzrok neki događaj C, ili da je korelacija slučajna.

Važno je i pripaziti na definicije fenomena koji se proučava, posebno kada se radi o istraživanjima vezanim uz ljudsko ponašanje. Razne definicije fenomena u sociologiji, a i u zakonu, razlikuju se od laičkih definicija. Tako na primjer pojam „manjina” u sociologiji ne označava nužno brojčanu manjinu, a u politici i zakonu se ovisno o kontekstu koristi ponekad kao u sociologiji, a ponekad kao numerička manjina. Unutar samog istraživanja, pojmove treba definirati samo ako nemaju standardnu definiciju u danom području ili ako se koriste na nestandardan način. No kada se rezultati istraživanja iznose u javnost, uvijek je potrebno napomenuti razlike u značenju pojmova između laičke definicije i definicije koja se koristi u istraživanju, ako postoje. Primjer problema vidimo u [32].

Poglavlje 5

Zaključak

U ovom radu smo pokazali kako se matematički jezik i razmišljanje bitno razlikuju od prirodnog jezika i naivnog razmišljanja. Te razlike su vidljive već i kod vrlo jednostavnih pojmova poput istine ili broja, a proizlaze iz površnog razumijevanja matematičkih pojmova, oslanjanja na intuiciju ili neprimjerenog generaliziranja već naučene matematike. Smatramo da bi bilo korisno u nastavi matematike staviti veći naglasak na razumijevanje koncepata, motivacijskih problema i analitičkih postupaka koji su doveli do formalnih definicija koje se danas koriste. Ipak, treba biti oprezan jer primjeri i ilustracije otvaraju mogućnost da učenici zabune primjere za dokaze i modele za stvarnost. Stoga je važno da ne vide matematiku kao skup pravila koji nema veze sa stvarnošću, ali ni kao precizan opis stvarnosti u kojemu se do zaključaka dolazi intuicijom. Primjere i modele bi bilo korisno popratiti diskusijom o mogućim generalizacijama i ograničenjima, a gdje je primjereno, jednostavniji teoremi bi se trebali dokazivati. Zato smatramo da bi bilo korisno dublje proučiti miskoncepcije povezane uz pojedinačne matematičke koncepte, slično kao u [1], [3] i [15]. Razumijevanje miskoncepcija ne samo da povezuje matematiku sa intuicijom, već i istovremeno naglašava razlike između intucije i matematičkog razmišljanja. Naposljetku, matematika ne bi trebala učenike učiti *što* misliti, već *kako* misliti.

Bibliografija

[1] M.L. Amatangelo, *Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions*, 2013.

[2] F.J. Anscombe, *Graphs in Statistical Analysis*, The American Statistician **27** (1973), br. 1, 17–21.

[3] M. Bar-Hillel, *The base-rate fallacy in probability judgements*, Acta Psychologica **44** (1980), 211–233.

[4] F.M. Bruckler, *Povijest matematike I*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2007.

[5] ———, *Povijest matematike II*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2010.

[6] R. Croson i J. Sundali, *The Gambler's Fallacy and the Hot Hand: Empirical Data from Casinos*, The Journal of Risk and Uncertainty **30** (2005), br. 3, 195–209.

[7] D. van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, 2008.

[8] M.H. DeGroot i M.J. Schervish, *Probability and Statistics (4th Edition)*, Pearson, 2011.

[9] T.M. Ferguson i G. Priest, *A Dictionary of Logic*, 2016.

[10] C.M. Grinstead i J.L. Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 1997.

[11] D. Huff, *How to Lie with Statistics*, W. W. Norton & Company, 1954.

[12] T. Jech, *Set Theory*, Springer, 2002.

[13] G.A. Jones i J.M. Jones, *Elementary Number Theory*, Springer, 1998.

[14] S. Kordić, *Konverzacijske implikature*, Suvremena lingvistika **17** (1991), br. 31-32, 87–96.

[15] S. Krauss i X.T. Wang, *The Psychology of the Monty Hall Problem: Discovering Psychological Mechanisms for Solving a Tenacious Brain Teaser*, Journal of Experimental Psychology: General **132** (2003), br. 1, 3–22.

[16] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola (1999), br. 2, 54–64.

[17] ______, *Indukcija*, Matematika i škola (2000), br. 5, 197–203.

[18] ______, *Dokaz*, Matematika i škola (2001), br. 9, 149–155.

[19] ______, *Matematički pojam*, Matematika i škola (2001), br. 11, 8–16.

[20] ______, *Jezik u nastavi matematike*, Matematika i škola (2006), br. 33, 99–105.

[21] R. Martin, *The St. Petersburg Paradox*, `https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/paradox-stpetersburg/`, 2017.

[22] I. Niven, *The asymptotic density of sequences*, Bulletin of the American Mathematical Society **57** (1951), br. 6, 420–434.

[23] A. Norton i M. Baldwin, *Does 0.999... Really Equal 1?*, The Mathematics Educator **21** (2011/2012), br. 2, 58–67.

[24] N. Pavlin-Bernardić i V. Vlahović-Štetić, *Iluzija linearnosti*, Poučak **12** (2011), br. 47, 12–17.

[25] C.C. Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer, 2002.

[26] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1976.

[27] P.J. Ryan, *Euclidean and non-Euclidean Geometry – an Analytic Approach*, Cambridge University Press, 1991.

[28] W.P. Skorupski i H. Wainer, *The Bayesian flip: Correcting the prosecutor's fallacy*, Significance **12** (2015), br. 4, 16–20.

[29] D. Tall, *Conflicts and Catastrophes in the Learning of Mathematics*, Mathematical Education for Teaching **2** (1977), br. 4.

[30] D. Tall i R.L.E. Schwarzenberger, *Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits*, Mathematics Teaching **82** (1978), 44–49.

[31] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, 2009.

[32] D. Weatherburn, *Uses and abuses of crime statistics*, Crime and Justice Bulletin: Contemporary Issues in Crime and Justice (2011), br. 153.

[33] Wikipedia, *Base rate fallacy*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Base_rate_fallacy`, Pristupljeno: 13.10.2018.

Sažetak

U prvom poglavlju ovoga rada pokazali smo da prirodni i matematički jezik različito interpretiraju istinu, logičke veznike, definicije, pa čak i čitave rečenice (usporedite implikature u govoru i implikacije u matematici). Time smo pokazali da površno razumijevanje određenih matematičkih pojmova može dovesti do oslanjanja na njihovo značenje u svakodnevnom govoru, a time i na razvoj miskoncepcija (npr. pojam približavanja u objašnjenju limesa).

U drugom poglavlju smo se usredotočili na matematičko razmišljanje i dokaze te smo dali nekoliko primjera različitih vrsta dokaza. Iako su primjeri jednostavni, jasno ilustriraju rigoroznost matematičkog dokaza u usporedbi s naivnom argumentacijom.

U trećem poglavlju smo pobliže promotrili specifične koncepte koji su poznati i nematematičarima (broj, beskonačnost, pravac i vjerojatnost), te načine na koje je matematika generalizirala i formalizirala intuitivne koncepte. Taj odmak od intuicije ka apstraktnom možda otežava razumijevanje tih koncepata u kontekstu matematike.

Naposlijetku, u četvrtom smo poglavlju analizirali nekoliko čestih miskoncepcija – iluziju linearnosti, probleme koji proizlaze iz pogrešnog shvaćanja limesa i vjerojatnosti, te varljivo korištenje statistike. Zajedničko svima jest da proizlaze iz oslanjanja na intuiciju ili na neprimjereno generaliziranje već naučene matematike.

Summary

In the first chapter of this thesis we have shown that the natural and mathematical language interpret truth, logical connectors, definitions, and even whole sentences differently (compare implicatures in speech with implications in mathematics). With this, we have shown that superficial understanding of certain mathematical terms may lead to reliance on their meanings in everyday speech, and with this, to the development of misconceptions (e.g. the phrase ”getting closer” in the explanation of limits).

In the second chapter, we focused on mathematical thinking and proofs, and we gave a few examples of different types of proofs. Even though the examples are simple, they clearly illustrate the rigor of mathematical proof in comparison to naive argumentation.

In the third chapter we took a closer look at specific concepts that are familiar to non-mathematicians (number, infinity, line, and probability), and ways in which mathematics generalised and formalised intuitive concepts. This departure from intuition towards the abstract may make understanding those concepts in the context of mathematics more difficult.

Finally, in the fourth chapter we analysed several common misconceptions – the illusion of linearity, problems that arise from misunderstanding limits and probability, and misuse of statistics. Common to all of them is that they arise from relying on intuition or improper generalisation of previously learned mathematics.

Životopis

Dominik Čulo rođen je 17. srpnja 1994. godine u Zagrebu, RH, gdje je pohađao Osnovnu školu Antuna Branka Šimića i III. gimnaziju, opći smjer. Nakon završetka srednje škole, 2013. upisuje preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon stjecanja prvostupničke diplome, 2016. na istom fakultetu upisuje Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički.