

Ispitivanje narušenja Paulijeva principa

Zelić, Mihael

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:491458>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mihael Zelić

ISPITIVANJE NARUŠENJA PAULIJEVOG
PRINCIPA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Mihael Zelić

Diplomski rad

**Ispitivanje narušenja Paulijevo
principa**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Damir Bosnar

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2019.

Zahvaljujem se prof.dr.sc. Damiru Bosnaru na mentorstvu i svim vrijednim sugestijama tijekom izrade rada. Zahvaljujem se roditeljima, braći i svim kolegama fizičkog odsjeka a posebno Jurju Ovčaru na nesebičnom pomaganju i prijateljstvu. Za kraj zahvaljujem supruzi Steli na bezrezervnoj podršci i ljubavi.

Sažetak

Paulijev princip zabranjuje postojanje dva fermiona u istom stanju. Iako Paulijev princip ima dalekosežne posljedice, njegov uzrok još uvijek nije objašnjen. Što isto tako znači da taj princip može biti određen, vrlo malo mjeri i narušen u nekim reakcijama. Narušenja Paulijeveg principa eksperimentalno su istraživana u traženju X -zraka emitiranih u prijelazima elektrona u popunjene ljuske određenih atoma, kao i traženjima gama zraka emitiranih u prijelazima u jezgrama, a koji su inače zabranjeni Paulijevim principom. U diplomskom radu smo HPGe detektorom mjerili spektar x zračenja iz olova kroz koji prolazi određena struja, odnosno postoje dodatni slobodni elektroni koji mogu, u slučaju narušenja Paulijeveg principa, emitirati X -zrake određenih energija u slučaju elektronskih prijelaza u popunjeno osnovno stanje olova. Rezultati probnoga mjerenja pokazuju da bi vrijeme potrebno za mjerenje s postojećim eksperimentalnim postavom trebalo biti duže od vremena probnog mjerenja. Koristeći dva HPGe detektora potrebno je ≈ 75 h mjerenja dok je za jedan detektor potrebno ≈ 150 h.

Ključne riječi: Paulijev princip isključenja. Bose Einsteinova statistika. Fermi-Diracova statistika. Narušenje Paulijeva principa isključenja.

Investigation of violation of the Pauli exclusion principle

Abstract

The Pauli exclusion principle is the quantum mechanical principle which states that two or more identical fermions cannot occupy the same quantum state within a quantum system simultaneously. Although the Pauli principle has far-reaching consequences, its cause has not been explained yet, which indicates that the principle, in some specific reactions, could be violated to a point. Those instances of Pauli principle violation have been explored experimentally by searching for X -rays released during the electron transitions into filled atomic shells, as well as searching for gamma radiation that would occur in Pauli-prohibited nuclear transitions. These transitions are not allowed by the Pauli exclusion principle. In this graduate thesis we measured the spectrum of X -ray radiation from lead exposed to specific electric current utilizing HPG detectors. Exposure to electric current would allow for the existence of additional, free electrons, which, in case of a violation of the Pauli exclusion principle, could radiate X -rays of a specific energy, caused by electrons transitioning into the filled ground state of lead. The results of the test measurements indicate that the time needed for final testing, with the existing experimental setting, would be longer than the initial testing time. Specifically, utilizing one HPG detector it takes ≈ 150 h for the test. With two HPG detectors the time could be reduced to ≈ 75 h.

Keywords: Pauli exclusion principle. Bose-Einstein statistics. Fermi-Dirac statistics. Violation of the Pauli exclusion principle.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Fermi-Diracova i Bose-Einsteinova raspodjela	3
2.1	Uvod	3
2.2	Statistika i kvantna fizika	3
2.3	Valna funkcija i simetrija	5
2.4	Spin čestica i statistika	6
2.5	Atom helija	10
2.6	Distribucija elektrona u atomske ljuske	14
3	Emisija i apsorpcija elektromagnetskog zračenja atoma	15
3.1	Inducirani i spontani prijelazi, Einsteinovi koeficijenti	15
3.2	Vjerojatnost prijelaza i matični elementi	18
4	X-zrake. Međudjelovanje fotona s materijom	20
4.1	Uvod	20
4.2	Karakteristično X-zračenje	22
4.3	Nedijagramske linije i ionski procesi	23
4.3.1	Radijativna rekombinacija	24
4.4	Međudjelovanje fotona s materijom	26
4.4.1	Fotoelektrični efekt	27
4.4.2	Comptonov efekt	30
4.4.3	Tvorba parova	32
5	Teorije narušenja Paulijevo principa isključenja	33
5.1	Povijesni pregled	33
5.2	Model Ignatieva i Kuzmina	34
6	Modeli narušenja Paulijevo principa isključenja i rezultati mjerenja	39
7	Ispitivanje narušenja Paulijeva principa isključenja eksperimentom na Fizičkom odsjeku	42
7.1	Opis eksperimenta	42
7.2	Teorijsko objašnjenje eksperimenta	43

7.3	Ekperimentalni postav	47
7.3.1	Poluvodički germanijski detektor posebno visoke čistoće (HPGe)	50
7.4	Rezultati mjerenja	58
7.4.1	Analiza vremena trajanja budućeg eksperimenta s postojećim parametrima eksperimentalnog postava	62
8	Zaključak	67
9	Metodički dio	69
9.1	Uvod	69
9.2	Nastavna priprema iz fizike. Bohrov model atoma.	71
9.3	Tijek nastavnog sata	72
9.4	Literatura korištena u metodičkom dijelu	77
	Literatura	78

1 Uvod

Paulijev princip isključenja (u daljnjem tekstu:PPI) predstavlja jedan od najvažnijih znanstvenih dostignuća u pokušaju potpunog objašnjenja moderne slike prirode prirodnim zakonima. PPI je dakle, zakon koji uvodi restrikciju na čestice koje su fermioni, drugim riječima zabranjuje zaposjednutost istog kvantnog stanja s više od jednog fermiona. Samim time što je PPI važan zakon to nas vodi na ispitivanje granica njegove valjanosti. Osim što je PPI važan zakon u fizici on još nije objašnjen na elementarnoj razini , odnosno kako je i sam Wolfgang Pauli na predavanjima vezanim uz dobivanje Nobelove nagrade rekao: *"Već sam u svom izvornom radu naglasio okolnost da nisam mogao dati logičan razlog za načelo isključenja , odnosno da ga nisam izvukao iz općenitijih pretpostavki. Uvijek sam imao osjećaj i još uvijek ga imam danas, da je to nedostatak. Dojam da je sjena neke nepotpunosti nezaobilazna ovdje na jarkoj svjetlosti uspjeha nove kvantne mehanike"* [1]. Američki fizičar Richard Feynmann je u svojim predavanjima iz fizike Paulijev princip isključenja objasnio kao rijetko mjesto u fizici gdje se takvo pravilo postulira vrlo jednostavno, ali za koje nitko nije pronašao jednostavno i lako objašnjenje [2]. Prethodni zaključci su jedni od motiva za ispitivanje granice valjanosti, ali i dubljeg razumijevanja Paulijeva principa isključenja. U našem eksperimentu smo granice valjanosti PPI-a tražili upravo u začetku njegova postojanja a to je atomska fizika. Tražili smo narušenje PPI-a na način da smo u sustav dovodili nove elektrone koji bi u slučaju narušenja emitirali zabranjene X -zrake. U prvom dijelu mjerenja smo snimili spektar zračenja olovne pločice koju smo predhodno zaštitili kako bi smanjili pozadinski šum te smo isto takvo mjerenje napravili kada smo kroz pločicu pustili struju $I = 49.5$ A. Vrijeme trajanja snimanja svakog spektra trajalo je 24 h. Dakle,, narušenje Paulijeva principa smo tražili kroz atomske procese u kojima bi novi elektroni mogli zaposjednuti Paulijevim principom zabranjena stanja i pri tome emitirati X -zrake čije energije su relativno blizu karakterističnim X -zrakama. Spektar smo snimili germanijskim detektorom posebno visoke čistoće (HPGe). U analizi nakon mjerenja sam spektar koji je predstavljao mjerenje s novim elektronima u sustavu oduzeo od spektra bez novih elektrona u sustavu , odnosno bez električne struje. Narušenje sam tražio u blizini tipičnih atomskih prijelaza X -zraka , odnosno $K\alpha_1$ i $K\alpha_2$. Bitno je napomenuti da je mjerenje bilo probno i da se na temelju mjerenja nije mogla provesti statistika zato što je pozadin-

ski šum koji nismo detektirali bio prevelik. Dakle, za nedozvoljenu X -zraku energije 71.652 keV dobio sam 4 događaja razlike između spektra sa strujom i bez struje, ali zbog pozadinskih šumova nisam mogao sa sigurnošću zaključiti radi li se o narušenju PPI. Za kraj sam dao izračun koji bi za naše eksperimentalne uvjete trebao postaviti gornju granicu vremena mjerenja za vjerojatnost narušenja PPI-a dobiven u eksperimentu [8]: $\beta^2/2 < 1.5 \cdot 10^{-27}$. Diplomski rad je podjeljen u 8 poglavlja. U drugom poglavlju se daje kratki pregled kvantne teorije i statistike s osvrtom na helijev atom. U trećem poglavlju objašnjeni su mehanizmi apsorpcije i emisije elektromagnetskog zračenja. U četvrtom poglavlju objašnjena je teorija nastanka X -zračenja te njezino međudjelovanje s materijom. U petom poglavlju je objašnjena teorija narušenja PPI-a dok su u šestom poglavlju opisani eksperimenti koji su tražili narušenje PPI-a. U sedmom poglavlju objašnjena je atomska teorija i eksperiment koji se provodio na Fizičkom odsjeku. Rad završava s osmim poglavljem , odnosno metodičkim dijelom gdje je opisana nastavna priprema za Bohrov model atoma.

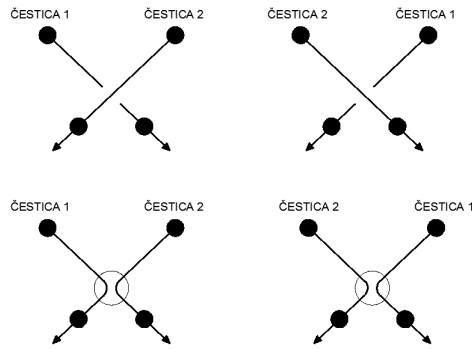
2 Fermi-Diracova i Bose-Einsteinova raspodjela

2.1 Uvod

Klasični pristup problemu mnoštva čestica pretpostavlja njihovu raspoznatljivost, Dakle, sve čestice razlučujemo međusobno. Bez obzira na to što su čestice identične ili nisu mi ih u svakom trenutku možemo označiti , odnosno znamo njihove putanje u prostoru jer su trajektorije određene determinističkom , , odnosno Newtonovom jednadžbom gibanja. U kvantnoj fizici identične čestice su neraspoznatljive jer ne možemo označiti njihove putanje jer kao takve ne postoje u kvantnoj teoriji. Označiti česticu u kvantnom razmatranju identično je kao i promijeniti čestici vrstu. Heisenbergove relacije neodređenosti su glavni razlog zašto je prepoznatljivost otklonjena u kvantnom pristupu. Dakle, u kvantnoj fizici ne postoji način da egzaktno odredimo reprezentativno stanje čestice u faznom prostoru [26]. Takvo svojstvo neraspoznatljivosti ostavlja dalekosežne i bitne posljedice za opis kvantnog sustava. Jedna od bitnih posljedica je simetričnost valne funkcije čestica u razmatranju. Općenito govoreći simetrija je efekt ili posljedica invarijantnosti sustava na zamjenu dviju istovrsnih čestica. Štoviše takva simetrija vodi na jako zanimljivu poveznicu između spina čestica i statistike. [3]

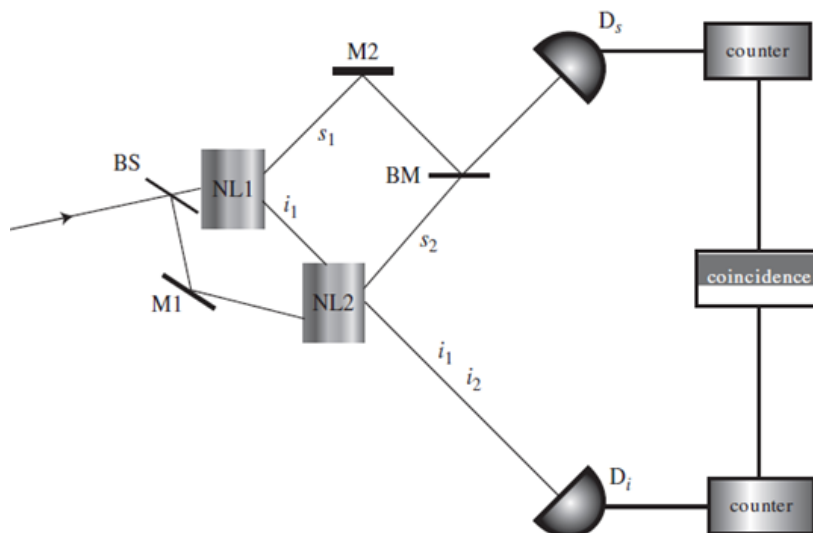
2.2 Statistika i kvantna fizika

Identične čestice su čestice čiji hamiltonijan je simetričan na zamjenu bilo koje dvije čestice. Uvjet takve simetričnosti hamiltonijana je jednakost njihovih intrinzičnih svojstava kao što su spin, masa, naboj itd. U klasičnoj mehanici za danu silu koja djeluje na sustav čestica uz poznavanje položaja i količine gibanja u nekom trenutku t za sve čestice sustava, mi smo u mogućnosti odrediti evoluciju danog sistema. Za razliku od klasične fizike u kvantnoj nismo u mogućnosti odrediti trajektorije svih čestica pa zato kažemo da su one neraspoznatljive [3]. Intuitivni primjer neraspoznatljivosti čestica možemo vidjeti na slici 2.1. Na slici možemo vidjeti da iz početnih i krajnjih poznatih stanja sustava ne možemo deklarirati čestice zbog njihove identičnosti uz naravno prisutstvo Heisenbergova principa neodređenosti u mjerenju opservabli. Odgovor koji možemo dati koristeći kvantnu mehaniku je vjerojatnost da određena čestica bude na nekom mjestu u određenom trenutku.



Slika 2.1: Kvantna nerazpoznatljivost čestica.

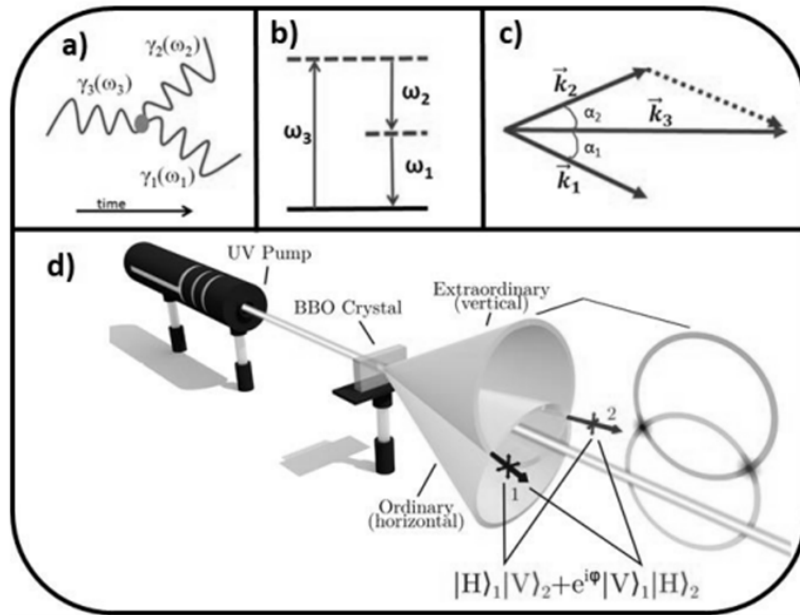
Ova činjenica također ima za posljedicu da nekoliko "klasičnih" konfiguracija može odgovarati istom kvantnom stanju. Do takvog paradoksa dolazimo računajući izraz za entropiju klasičnog idealnog plina koji je poznatiji pod nazivom Gibsov paradoks. Dakle, u kvantnoj fizici ne raspoznajemo konfiguracije na zamjenu istih čestica pa ih prema tome ne smijemo brojati dvostruko jer se radi o istoj konfiguraciji zbog nerazpoznatljivosti čestica. [26] Stoga, u tom je pogledu broj mogućih nezavisnih stanja manji u kvantnoj mehanici nego u klasičnoj mehanici. Pogledajmo jedan primjer takve nerazpoznatljivosti s dva fotona. Na slici 2.2 prikazan je primjer takve nerazpoznatljivosti dva fotona.



Slika 2.2: Interferometrijski primjer nerazlučivosti fotona (čestica). Preuzeto iz [3].

Ulazni snop fotona dolazi do razdvajajućeg snopa (eng. *beam splitter*, BS) koji ih dijeli na dva djela. Oba snopa nakon toga upadaju na nelinearne kristale koji ih apsorbiraju. Kristali (NL1 i NL2) nakon toga emitiraju po dva (i, s) fotona koji zadovoljavaju zakon očuvanja energije. Shema koja nam opisuje sve te procese na pojedini-

nom kristalu prikazana je na slici 2.3. Dakle, jedan apsorbirani foton u nelineranom



Slika 2.3: a) dio prikazuje Feynmanov dijagram za taj proces razdvajanja fotona na dva fotona. b) i c) prikazuju sačuvanje momenta i energije dok na d) dijelu vidimo samu shemu toga razdvajanja ulaznog snopa. Preuzeto iz [4]

kristalu emitira dva fotona dok je na razdvajaču snopa upadni broj fotona jednak izlaznom broju fotona. Dva fotona (i_1, i_2) padaju na isti detektor u isto stanje. Nakon detektiranja fotona brojač događaja ne može razlikovati stanja u kojem su i_1 foton i s -foton $(s_1 + s_2)$ detektirani i slučaj u kojem su s -foton i i_2 foton detektirani. To rezultira interferencijskim rubovima. Objašnjenje interferencije shvatljivo je samo ako se pretpostavi da su dva fotona i_1 i i_2 fizički nerazlučivi, odnosno neraspoznatljivi.

2.3 Valna funkcija i simetrija

Definirajmo valnu funkciju dviju identičnih čestica kao:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_{1z}, s_{2z}), \quad j = 1, 2. \quad (2.1)$$

s_{jz} opisuje z -komponentu spinskog stupnja slobode j -te čestice. Uvedimo operator permutacije \hat{U}_P koji u dvočestičnom slučaju dijeluje na sljedeći način:

$$\hat{U}_P \psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1). \quad (2.2)$$

Vidimo da operator permutacije permutira , odnosno zamjenjuje koordinate čestica. Bez obzira što su se koordinate čestica zamijenile, njihova valna funkcija mora ostati ista što slijedi iz same definicije vjerojatnosti nalaženja čestica i njihove neraspoznatljivosti. Prema tome, valne funkcije prve i druge konfiguracije identičnih čestica mogu se razlikovati najviše do na fazu jer je faza neovisna pod integralom apsolutnog kvadrata valne funkcije. Prema tome dolazimo do:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\phi} \psi(\xi_2, \xi_1). \quad (2.3)$$

Ako zamijenimo čestice još jednom, moramo dobiti početno stanje. Stoga zahtjevamo:

$$\hat{U}_P^2 \psi(\xi_1, \xi_2) = e^{2i\phi} \psi(\xi_1, \xi_2) \stackrel{!}{=} \psi(\xi_1, \xi_2). \quad (2.4)$$

Prethodna jednadžba zadovoljena je ako je $e^{i\phi} = \pm 1$. Dakle, **valne funkcije sistema dviju identičnih čestica moraju biti simetrične ili antisimetrične na zamjenu čestica**. Ako pretpostavimo superpoziciju dviju valnih funkcija jedne simetrične, a druge antisimetrične:

$$\psi = \alpha\psi_S + \beta\psi_A, \quad (2.5)$$

možemo vidjeti da takva valna funkcija nije ni simetrična ni antisimetrična:

$$\hat{U}_P(\alpha\psi_S + \beta\psi_A) = \alpha\psi_A - \beta\psi_S. \quad (2.6)$$

Kaže se da takva valna funkcija nema dobro definiranu parnost s obzirom na operator permutacije. Sve prijašnje rezultate i zaključke možemo poopćiti na sustav od N identičnih čestica na sljedeći način: *dinamička su stanja sustava N jednakih čestica su nužno sva simetrična ili sva antisimetrične u odnosu na zamjenu bilo koje dvije čestice.*

2.4 Spin čestica i statistika

S obzirom na simetričnu ili antisimetričnu valnu funkciju sustava čestica i njihov spin, sve čestice dijele u dvije skupine: **fermione**, čije su valne funkcije antisimetrične na zamjenu bilo koje dvije identične čestice i posjeduju polucjelobrojni spin te **bozone**, čija je valna funkcija simetrična obzirom na zamjenu dviju identičnih čestica i posjeduju cjelobrojni spin. Poveznica između spina i statistike je stvar relativističke

ELEMENTARNE ČESTICE		
FERMIONI		BOZONI
LEPTONI	KVARKOVI	
e, ν_e	u, d	γ Z^0, W^-, W^+ gluoni
μ, ν_μ	c, s	
τ, ν_τ	t, b	

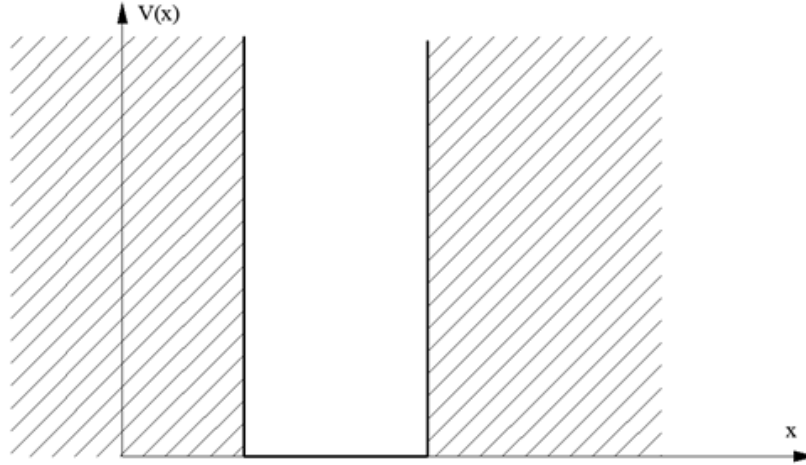
Tablica 2.1: Tablica elementarnih čestica. Fermioni su elementarne građevne jedinice materije. Postoje tri generacije fermiona: elektron i elektronski neutrino, kvarkovi d (eng. down) i u (eng. up), mion i mionski neutrino, kvarkovi s (eng. strange) i c (charmed), čestica tau i tau neutrino te kvarkovi b (eng. bottom) i t (eng. top). Bozoni predstavljaju nosioce međudjelovanja, odnosno sile pa tako fotoni predstavljaju medijatore za elektromagnetsko djelovanje, W i Z bozoni su zaslužni za slabu nuklearnu silu, a gluoni su prijenosnici jake nuklearne sile. Elektron, mion i tau imaju naboj -1 . Svi neutrinii su neutralni po pitanju naboja. Kvarkovi u, c, t imaju naboj $2/3$ dok kvarkovi d, s, b imaju naboj $-1/3$. Konačno svi bozoni imaju naboj 0 . Antičestice za razliku od njihovih čestica imaju suprotan naboj. Preuzeto iz [3].

fizike i bit će ugrubo dana u sljedećem poglavlju. S obzirom na to da li čestice posjeduju cjelobrojni ili polucjelobrojni spin određena im je statistika koja ih opisuje. Čestice cjelobrojnog spina slijede Bose – Einsteinovu statistiku, dok čestice polucjelobrojnoga spina slijede Fermi-Diracovu statistiku. Primjeri bozona predstavljaju fotoni, π -mezoni, gluoni te W i Z bozoni, dok su primjeri fermiona elektroni, protoni, neutroni i kvarkovi. Govoreći ugrubo možemo reći da je materija sastavljena od fermiona dok, su čestice koje posreduju silu bozoni. Podjela elementarnih čestica u fermione i bozone prikazana je u tablici 2.1.

Fermioni poštuju Fermi-Diracovu statistiku, to jest njihova je ukupna valna funkcija uvijek antisimetrična kao i spinska valna funkcija za razliku od prostornog dijela valne funkcije koji je simetričan na zamjenu dva fermiona. Stoga, valna funkcija N fermiona uvijek mijenja svoj predznak kad zamijenimo dva fermiona. Ako permutiramo puno fermiona onda se takva permutacija uvijek može pojednostaviti na onu s dva fermiona koja za posljedicu daje minus predznak valne funkcije. Ako poopćimo takvu permutaciju na N fermiona dobivamo:

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = (-1)^l \psi(\xi_{l1}, \xi_{l2}, \dots, \xi_{ln}), \quad (2.7)$$

gdje je $(\xi_{l1}, \xi_{l2}, \dots, \xi_{ln})$ permutacija l -tog ranga koordinata fermiona. Razmotrimo za trenutak valnu funkciju dva fermiona koji se nalaze u beskonačnoj jami prikazanoj na slici 2.4. Ako su energetska stanja u beskonačnoj jami E_{n1} i E_{n2} , antisimetrična



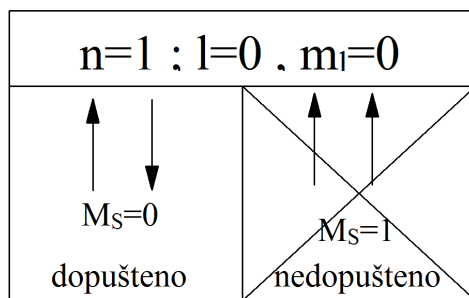
Slika 2.4: Beskonačna potencijalna jama.

valna funkcija sustava dva elektrona je:

$$\psi_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n1}(\xi_1)\psi_{n2}(\xi_2) - \psi_{n1}(\xi_2)\psi_{n2}(\xi_1)). \quad (2.8)$$

Faktor $1/\sqrt{2}$ posljedica je normiranja valne funkcije. Ako u izraz za ukupnu valnu funkciju dva fermiona uvrstimo $n_1 = n_2$ valna funkcija je nula, a to znači da takvo stanje ne postoji. Najvažnija posljedica koju ćemo razmatrati u ovom radu slijedi upravo iz ovakvog razmatranja fermiona, , , odnosno slijedi Paulijev princip isključenja. Paulijev originalni zapis ovog principa je sljedeći: **In an atom there cannot be two or more equivalent electrons for which the values of all four quantum numbers coincide. If an electron exists in atom for which all of this numbers have definite values, then this state is „occupied“.** [1] Dakle, dva fermiona ne mogu zauzeti isto stanje, to jest atomsko stanje određeno kvantnim brojevima (n, l, m_l, m_s) može zauzeti samo jedan elektron. Na slici 2.5 prikazana je dopuštena i zabranjena zaposjednutost osnovnog stanja atoma helija. Uzmimo da imamo k mogućih stanja u koje želimo distribuirati N fermiona ($k \geq N$). Broj načina na koji možemo te fermione (npr. elektrone) raspodjeliti po stanjima uzimajući u obzir Paulijev princip isključenja dan je sljedećim izrazom:

$$\Omega = \frac{k!}{N!(k-N)!} = \binom{k}{N}. \quad (2.9)$$



Slika 2.5: Dopuštena i zabranjena zaposjednutost osnovnog stanja helijeva atoma (1^1S_0) prema Paulijevom principu isključenja. Preuzeto iz [6].

Valnu funkciju N neinteragirajućih fermiona možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{perm.} (-1)^l \psi_{l,n_1}(\xi_1) \dots \psi_{l,n_N}(\xi_N) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(\xi_1) & \dots & \psi_{n_N}(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n_N}(\xi_1) & \dots & \psi_{n_N}(\xi_N) \end{vmatrix}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

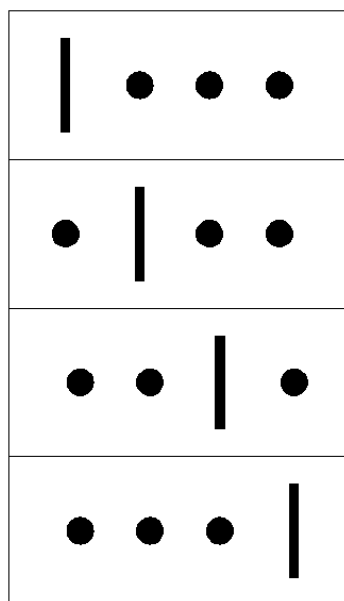
Determinantu 2.10 zovemo *Slaterovom determinantom*, a njeno značenje je sljedeće: zamjena dva fermiona znači zamjena dva stupca u determinanti koje onda rezultira s minus predznakom ispred valne funkcije. Također možemo vidjeti da, ako se dva fermiona nalaze u istom stanju onda su dva reda u matrici jednaka pa je determinanta nula, odnosno valna funkcija je nula, a to znači da je takvo stanje nemoguće, odnosno vjerojatnost pojavljivanja takvoga stanja je nula. Slaterova determinanta nije ništa drugo nego matematički zapis Paulijevog principa isključenja.

Za razliku od fermiona, bozoni mogu u bilo kojem broju zaposjednuti isto stanje pa je njihova ukupna valna funkcija simetrična na zamjenu dva bozona. Broj načina na koji možemo raspodjeliti (distribuirati) N bozona u k stanja je dan sljedećim izrazom:

$$\Omega = \frac{(k + N - 1)!}{(k - 1)!(N - k)!} = \binom{k + N - 1}{k - 1}. \tag{2.11}$$

Na slici 2.6 je grafički prikazana ta distribucija.

Točke na slici predstavljaju bozone, dok okomita crta predstavlja „pregradu“ između dva stanja. Dakle, vidimo da u npr. prvoj konfiguraciji imamo nula bozona u prvom stanju i istovremeno 3 bozona (svi bozoni) u drugom stanju. Kada se pitamo na koliko načina možemo raspodjeliti N bozona u k stanja onda je distribucija dana iz-



Slika 2.6: Distribucija tri bozona u dva stanja. Preuzeto iz [3]

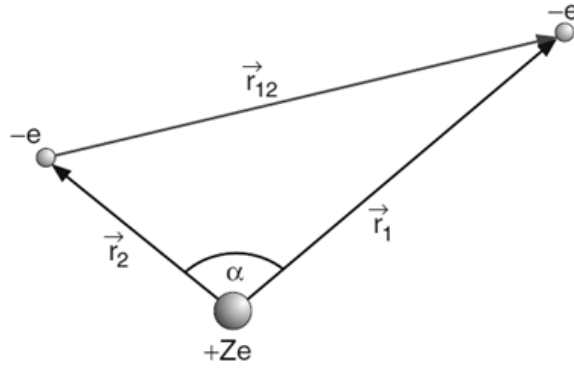
razom (2.11) jer u tom slučaju imamo $N-1$ pregrada koje nam označavaju stanja i k stanja pa se pitamo na koliko načina možemo permutirati točke i okomite linije.

2.5 Atom helija

U nastavku ću PPI-a objasniti kroz atom helija jer je on jedan od razloga zašto je Pauli definirao princip isključenja. Naime u promatranju i analiziranju helijeva spektra i spektara drugih atoma koji su imali više elektrona došli su do zapanjujućeg rezultata. Jedino zabilježeno, odnosno postojeće atomsko stanje u prirodi je antisimetrično s obzirom na zamjenu bilo koja dva elektrona. Dakle, bazirano na eksperimentalnim podacima Pauli je postavio svoj princip isključenja. Radi lakše preglednosti i razumijevanja PPI-a u nastavku ću na primjeru atoma helija (He) prikazati osnovno razmatranje PPI-a na spektru helija i njegove posljedice na strukturu, odnosno distribuciju elektrona u atomu. Atom He prikazan je shematski na slici 2.7. Hamiltonijan je dan sljedećim izrazom:

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i=1,2} \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (2.12)$$

Zadnji član u gornjem izrazu predstavlja Coulombovo međudjelovanje dvaju elektrona. Hamiltonijan je, kao što vidimo iz gornjeg izraza, simetričan na zamjenu elek-



Slika 2.7: Helijev atom. Preuzeto iz [6]

trona zbog njihove nerazpoznatljivosti. Neovisno o tome je li hamiltonijan egzaktan ili ne on mora ostati simetričan na zamjenu identičnih čestica. Općenito govoreći o sustavu N fermiona (elektrona) možemo zaključiti sljedeće: Hamiltonijan ostaje simetričan na bilo koji broj zamjena elektrona.

Najniže energetske stanje helijeva atoma popunjeno je s dva elektrona čiji se kvantni brojevi razlikuju u m_s -u, odnosno spinskom magnetskom kvantnom broju. Oba elektrona u osnovnom kvantnom stanju imaju glavni kvantni broj $n = 1$, odnosno $m_l = 0$ i $l = 0$. Dakle, elektroni posjeduju 3 identična kvantna broja dok se zbog Paulijevog principa isključenja četvrti kvantni broj mora razlikovati. Kao što je vidljivo iz slike 2.8 ukupni spin elektrona u osnovnom stanju helija je nula:

$$\begin{aligned}
 S &= s_1 + s_2 = 0, \\
 M_S &= M_{S_1} + M_{S_2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

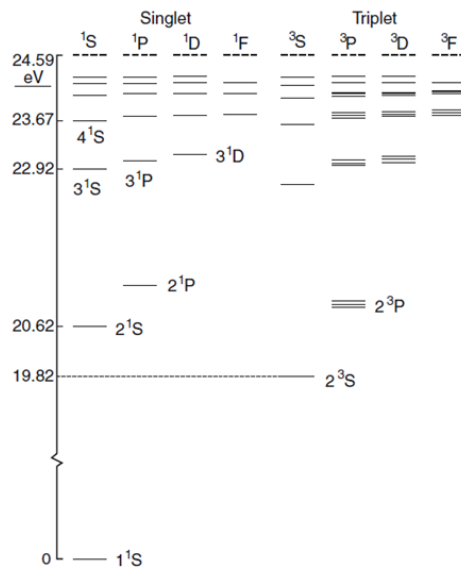
Dakle, osnovno stanje helija je singletno stanje. Broj mogućih orijentacija M_S -a iznosi $2S + 1$ gdje je S ukupni spin. Svako kvantno stanje u atomu označavamo na sljedeći način: $n^{S+1}L_J$ gdje je n glavni kvantni broj, L je ukupni orbitalni broj $L = L_1 + L_2$ dok je J ukupni angularni moment, odnosno $J = L + S$. Pojedina stanja atoma helija dozvoljena PPI-a te njihovi pripadajući kvantni brojevi prikazani su na slici 2.8. Dva elektrona atoma helija mogu se vezati u singletna ($S = 0$) ili tripletna ($S = 1$) stanja. Zbog postojanja spin-orbit interakcije¹ sva tripletna stanja s $L \geq 1$

¹Spin-orbit interakcija je dodatna interakcija u hamiltonijanu sustava oblika $\vec{l} \cdot \vec{s}$. Opisuje

m_{l_2}	0	0	0	1	1	1
$\vec{S}(n=2)$		↓	↑	↑	↓	↑ ↓ or ↓ ↓
$\vec{S}(n=1)$	↑ ↓	↑	↑	↑	↓	↑ ↓ or ↓ ↓
Coupling of angular momentum	• • S = 0, L = 0	• • S = 0, L = 0	↑ • S = 1, L = 0	↑ ↑ S = 1, L = 1	↓ ↑ S = 1, L = 1	 S = 1, L = 1
Total angular momentum	J = 0	J = 0	J = 1	J = 2	J = 0	J = 1
State	1^1S_0	2^1S_0	2^3S_1	2^3P_2	2^3P_0	2^3P_1

Slika 2.8: Shematski prikaz kvantnih stanja helijeva atoma. Preuzeto iz [6]

se razdvajaju u tri fine linije koje se razlikuju u ukupnom angularnom momentu $J=L+S$. Spektar helijeva atoma prikazan je na slici 2.9. Zanimljivo je pogledati stanja



Slika 2.9: Tripletna i singletna stanja atoma He . Preuzeto iz [6].

2^3S_0 i 2^1S_0 . Stanje 2^3S_0 opisano je prostorno simetričnom valnom funkcijom gdje je međusobna vremenski usrednjena udaljenost između elektrona $\langle r_{12} \rangle$ veća nego u stanju 2^1S_0 . U stanju 2^1S_0 su elektroni u mogućnosti biti bliže pa je i odbojnost veća. Drugim riječima prostorna valna funkcija ne iščezava čak niti za $r_{12} = 0$. Vremenski međudjelovanje elektronskog spina i magnetskog polja jezgre koja se u sustavu mirovanja elektrona vrti oko njega.

usrednjeno elektrostatičko odbijanje dano je sljedećim izrazom:

$$E_{pot}(r_{12}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi \frac{1}{r_{12}} \psi d\tau = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{r_{12}} \right\rangle. \quad (2.14)$$

Iz njega vidimo da je odbijanje veće za stanje 2^1S_0 nego li za stanje 2^3S_0 . To zapravo gura prvo energetska stanje iznad drugoga.

Prilikom prijelaza među energetska stanja dolazi do emisije i apsorpcije fotona. Valna duljina apsorbiranoga ili emitiranoga fotona prilikom elektronskog prijelaza iz stanja energije E_i u stanje energije E_k je:

$$\lambda_{ik} = \left| \frac{hc}{E_i - E_k} \right|. \quad (2.15)$$

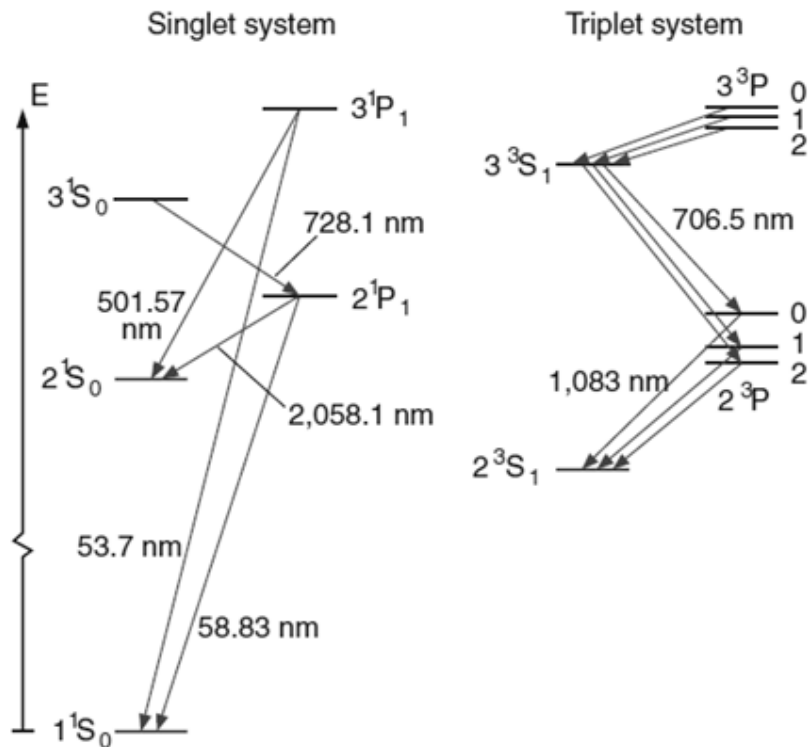
Zbog postojanja *izbornih pravila* u spektru atoma ne nalazimo sve prijelaze. Da bi elektronu bili dozvoljeni prijelazi između kvantnih stanja atoma $E_i(n_i, l_i, m_{l_i}, m_{s_i}) \rightarrow E_k(n_k, l_k, m_{l_k}, m_{s_k})$ promjena kvantnih brojeva mora zadovoljavati sljedeće uvjete ili izborna pravila:

$$\begin{aligned} a) \Delta l &= \pm 1 \\ b) \Delta m_l &= 0, \pm 1 \\ c) \Delta j &= 0, \pm 1 \text{ osim ako } j_i = 0 \leftrightarrow j_k = 0 \text{ nije dozvoljeno} \quad d) \Delta s = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Neki primjeri dopuštenih prijelaza između singletnih i tripletnih stanja prikazani su na slici 2.10.

S obzirom da pobuđenje jednog od elektrona ne mijenja kvantne brojeve drugoga elektrona ta izborna pravila također vrijede za kvantne brojeve ukupnog angularnog momenta (kutna količina gibanja). Ako gornju tvrdnju zapišemo matematički onda dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} e) \Delta L &= \pm 1 \\ f) \Delta M_l &= 0, \pm 1 \\ g) \Delta S &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$



Slika 2.10: Tripletna i singletna stanja Helijeva atoma. Preuzeto iz [6]

2.6 Distribucija elektrona u atomske ljuske

Jedna od najbitnijih posljedica Paulijevog principa isključenja je distribucija, odnosno raspodjela elektrona u atomu. Dakle, iz Paulijevog principa isključenja znamo da se dva fermiona, odnosno elektrona u atomu ne mogu naći u istom kvantnom stanju jer njihova valna funkcija iščezava za iste kvantne brojeve. Prema tome, svi prirodni elementi s više elektrona slijede dva osnovna principa po kojem se elektroni „nastanjuju“ u atomu: Paulijev princip isključenja te pretpostavku da je energija svih elektrona minimalna obzirom na atomsko osnovno stanje. Ta dva principa su značajna zato što svi prirodni elementi distribuiraju elektrone u atomima sljedeći upravo te principe. Dakle, elektroni zauzimaju najmanja energetska stanja „pazeći“ pritom na Paulijev princip koji im ne dozvoljava zauzimanje istog kvantnog stanja. Možemo zaključiti da bez Paulijevog principa isključenja atomske ljuske svih atoma koji sadrže više elektrona ne bi postojale jer bi svi elektroni težili u osnovno stanje ($1s$) u kojem bi se na kraju i našli. Dakle, možemo reći da Paulijev princip isključenja osigurava stabilnost atoma.

3 Emisija i apsorpcija elektromagnetskog zračenja atoma

Kao što sam ranije napomenuo, eksperimenti pokazuju da apsorpcijski i emisijski spektar atoma ne sadrži sve moguće kvantne prijelaze, odnosno ne nalazimo sve frekvencije emitiranih ili apsorbiranih fotona u spektru nekog elementa. Dakle,, postoje izborna pravila koja kolokvijalno govoreći selektiraju atomske prijelaze. Također, primjećeno je da intenzitet spektralnih linija može varirati između linija, a to znači da se neki prijelazi javljaju češće. Drugim riječima neki prijelazi imaju veću vjerojatnost pojavljivanja. Prijelazi između dva atomska stanja jako ovise o tim stanjima, pa je kod prijelaza nužna očuvanost energije, kod angularnog momenta sistema (foton + atom) vjerojatnost prijelaza također ovisi i o polarizaciji emitiranog ili apsorbiranog elektromagnetskog zračenja. U ovom poglavlju želim dati kvantni opis mehanizma apsorpcije i emitacije elektromagnetskog zračenja atoma. Pod kvantni opis mehanizma apsorpcije i emitacije u prvom redu podrazumijevam vjerojatnosti prijelaza između dva kvantna stanja atoma koja su opisana stacionarnim valnim funkcijama. U prvom dijelu atomske prijelaze ću objasniti Einsteinovim koeficijentima, dok ću u drugom dijelu objasniti matricom prijelaza koja sadrži sve informacije o atomskim prijelazima. Hertzov dipol će biti primjer klasične slike zračenja atoma.

3.1 Inducirani i spontani prijelazi, Einsteinovi koeficijenti

Vjerojatnost u jedinici vremena da atom koji se nalazi u stanju s energijom E_k apsorbira foton energije $h\nu$ i pobudi atom u više energetska stanje energije $E_i = E_k + h\nu$ prikazano je sljedećim izrazom:

$$\frac{dP_{ki}^{aps.}}{dt} = B_{ki} \cdot \omega(\nu). \quad (3.1)$$

U gornjem izrazu na desnoj strani drugi član predstavlja spektralnu energetska gustoću izvora koji emitira fotone. Drugim riječima $\omega(\nu) = n(\nu)$ je broj fotona energije $h\nu$ po jedinici volumena unutar jedinične frekvencije. Faktor B_{ki} predstavlja Einsteinov koeficijent apsorpcije. Svaka apsorpcija fotona od strane atoma uzima jedna foton iz nekog moda zračenja polja, odnosno poništi jedan foton u tom modu zračenja polja. Elektromagnetsko polje u kojem se nalazi atom također može inducirati atom u pobuđenom stanju da emitira foton energije $E_i - E_k = h\nu$ i pritom prijeđe u niže ener-

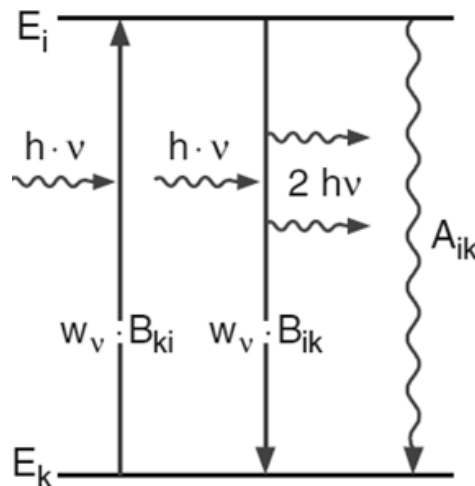
getske stanje. Taj proces zove se inducirana, odnosno stimulirana emisija zračenja. Vjerojatnost u jedinici vremena za takav proces je dana sljedećim izrazom prema analogiji prethodnog izraza za apsorpciju:

$$\frac{dP_{ik}^{ind.}}{dt} = B_{ik} \cdot \omega(\nu). \quad (3.2)$$

Faktor B_{ik} predstavlja Einsteinov koeficijent inducirane/stimulirane emisije. Pobuđeni atom također može emitirati foton bez prisutstva vanjskog elektromagnetskog polja koje bi induciralo taj proces. Proces u kojem atom spontano emitira foton te prelazi u niže energetske stanje zovemo spontana emisija. Za razliku od inducirane emisije, u spontanoj emisiji foton se može emitirati u bilo kojem smjeru i u bilo kojem modu zračenja. Vjerojatnost u jedinici vremena za takav proces dan je sljedećim izrazom

$$\frac{dP_{ik}^{spont.}}{dt} = A_{ik}, \quad (3.3)$$

gdje je A_{ik} Einsteinov koeficijent spontane emisije. Na slici 3.1 možemo vidjeti shematski prikaz svih triju procesa koje smo do sada opisali. Uzmimo N_i atoma u stanju



Slika 3.1: Apsorpcija, inducirana emisija i spontana emisija na primjeru sustava s dva stanja. Preuzeto iz [6].

energije E_i i N_k atoma u stanju energije E_k u jediničnom volumenu koji se nalazi u polju zračenja sa spektralnom gustoćom $\omega(\nu)$. U stacionarnom slučaju gustoća stanja se ne mijenja jer je jednak broj apsorbiranih i emitiranih fotona. To možemo zapisati ovako:

$$B_{ki} \cdot \omega(\nu) \cdot N_k = (B_{ik} \cdot \omega(\nu) + A_{ik}) N_i. \quad (3.4)$$

U toplinskoj ravnoteži omjer N_i/N_k prati Boltzmannovu raspodjelu:

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{i(E_i - E_k)/kT} = \frac{g_i}{g_k} e^{h\nu/kt}. \quad (3.5)$$

Faktor g_{ik} označava težinski faktor (broj mogućih realizacija) stanja energije E_i ukupnog angularnog momenta J . Takvo stanje ima $g = 2J + 1$ mogućih realizacija, odnosno mogućih smjerova angularnog momenta s istom energijom, odnosno degeneriranih stanja. Kada uvrstimo u jednadžbu 3.5 u 3.4 dobijemo sljedeći izraz:

$$\omega(\nu) = \frac{\frac{A_{ik}}{B_{ik}}}{\frac{g_i}{g_k} \frac{B_{ik}}{B_{ki}} (e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1)}. \quad (3.6)$$

Spektralna gustoća također je dana Planckovom formulom zračenja:

$$\omega(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1)}. \quad (3.7)$$

Ako usporedimo te dvije formule, onda možemo pronaći odnos između Einsteinovih koeficijenata, odnosno možemo normirati koeficijente:

$$\frac{A_{ik}}{B_{ik}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (3.8)$$

, odnosno:

$$\left(\frac{g_i}{g_k}\right) \left(\frac{B_{ik}}{B_{ki}}\right) = 1. \quad (3.9)$$

Konačno možemo zapisati odnos između Einsteinovih koeficijenata:

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \frac{g_k}{g_i} B_{ki} \\ A_{ik} &= \frac{8\pi h\nu}{c^3} B_{ik} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ako pogledamo izraz 3.10 možemo zaključiti sljedeće: Ako oba stanja imaju jednaki težinski faktor, onda vidimo da su koeficijenti B_{ki} i B_{ik} jednaki, a to znači da su Einsteinovi faktori inducirane emisije i apsorpcije jednaki. Faktor $\frac{8\pi h\nu}{c^3}$ predstavlja broj modova u jediničnom intervalu frekvencije. Ako taj faktor prebacimo s druge strane jednadžbe, onda imamo $A_{ik}/\frac{8\pi h\nu}{c^3}$, a to daje vjerojatnost u jedinici vremena da je spontano emitirani foton u jednom modu polja zračenja. Drugim riječima,

spontana i inducirana emisija jednake su u polju zračenja koje sadrži jedna foton po modu zračenja. Ako polje zračenja sadrži u prosjeku n fotona po modu zračenja onda je omjer vjerojatnosti inducirane emisije i spontane emisije:

$$\frac{P_{ik}^{ind.}}{P_{ik}^{spont.}} = n. \quad (3.11)$$

3.2 Vjerojatnost prijelaza i matični elementi

Odnos između vjerojatnosti prijelaza koji su opisani Einsteinovim koeficijentima i kvantnog objašnjenja koji je opisan matičnim elementima može se usporediti s klasičnim Hertzovim dipolom, odnosno njegovim zračenjem. Klasični oscilirajući dipol ima električni dipolni moment:

$$\vec{p} = q\vec{r} = p_0 \sin(\omega t). \quad (3.12)$$

Nakon što prointegriramo u svim smjerovima i usrednjimo u vremenu, izraz za srednju snagu zračenja izgleda ovako:

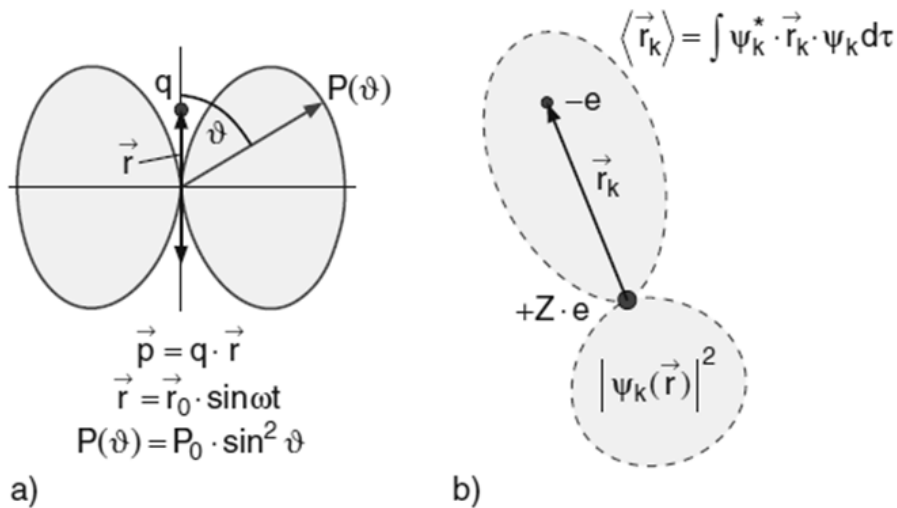
$$\bar{P} = \frac{2}{3} \frac{\bar{p}^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (3.13)$$

U kvantno mehaničkom opisu srednji električni dipolni moment elektrona u atomu dan je sljedećom relacijom:

$$\langle p \rangle = e \langle r \rangle = e \int \psi_i^* r \psi_i d\tau. \quad (3.14)$$

Dakle, očekivanu vrijednost operatora položaja tražimo standardnim načinom. Valna funkcija u gornjem izrazu predstavlja valnu funkciju elektrona u stanju i s kvantnim brojevima (n, l, m_l, m_s) . Na slici 3.2 možemo vidjeti klasičan Hertzov dipol i kvantno mehanički dipol. [6]

Za prijelaze s energetskog stanja $E_k \rightarrow E_i$ valna funkcija oba stanja mora se uzeti u obzir zato što vjerojatnost prijelaza ovisi o valnim funkcijama oba stanja. Kao što stoji u uvodu, u našem eksperimentu tražili smo nedozvoljene atomske prijelaze u pločici olova koje bi u slučaju računanja našli na opisani način. Dakle, u našem eksperimentu uvodimo nove fermione u sustav, odnosno uvodimo nove elektrone koji se gibaju kroz pločicu i pritom promatramo one elektrone koji narušavaju Paulijev princip isključenja. Elektroni koji narušavaju PPI-a su elektroni koje je atom olova uhvatio



Slika 3.2: U lijevom dijelu slike vidimo prostornu karakteristiku zračenja električnog dipola dok u desnom dijelu slike vidimo očekivanu vrijednost kvantnog dipola računajući očekivanu vrijednost operatora položaja s pripadajućom valnom funkcijom ψ_k . Preuzeto iz [6]

te su se oni spustili u nedozvoljena stanja emitirajući pritom x -zrake određenih energija. Autori [8] su iznjeli izračunate vrijednosti nedozvoljenih prijelaza te smo takve prijelaze i promatrali u našem eksperimentu. Takvo zračenje je u zapravo radijativni proces čiji udarni presjek se izražava matričnim elementom. U dipolnoj aproksimaciji imamo izraz za udarni presjek:

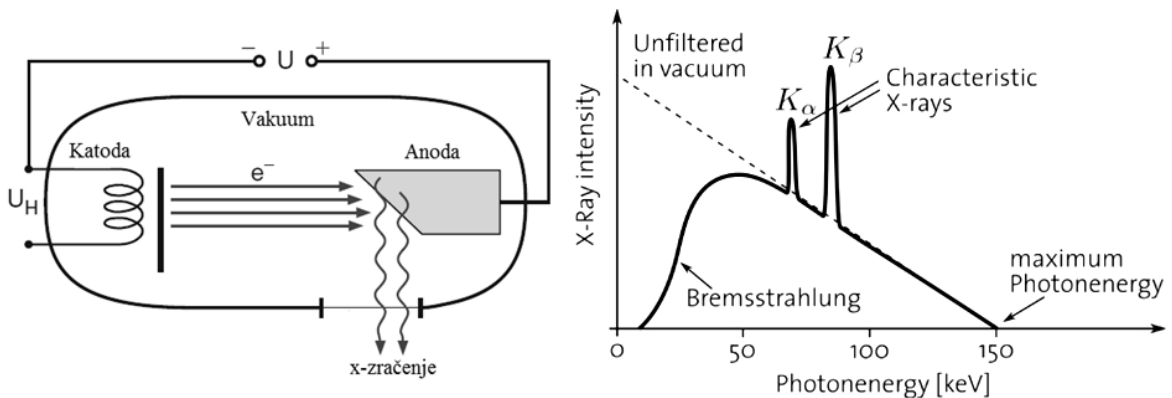
$$\sigma_C = \frac{4\pi^2\alpha}{\hbar} E_{ki} |\langle \psi_i | \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} | \psi_k \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - E_{ki}). \quad (3.15)$$

U gornjem izrazu α predstavlja konstantu fine strukture, E_{ki} je energetska razlika između dva stanja, a $\hbar\omega$ predstavlja energiju fotona. Valne funkcije predstavljaju ta dva stanja između kojih se događa atomski prijelaz. Kvadropolni i viši članovi matrice su potisnuti za faktor 100 u X -dijelu spektra pa ih zanemarujemo. Valna funkcija ψ_i predstavlja konačno stanje ne-Paulijevo elektrona, odnosno $1s$ stanje u atomu olova dok ψ_k može predstavljati $2p$ stanje ($K\alpha$ -emisija), $3p$ stanje ($K\beta$ -emisija) ili konačno Blochovo stanje vodljivih elektrona. U našem eksperimentu smo promatrali modificirani $K\alpha$ prijelaz, a koji će biti detaljnije opisan u poglavlju 4.

4 X-zrake. Međudjelovanje fotona s materijom

4.1 Uvod

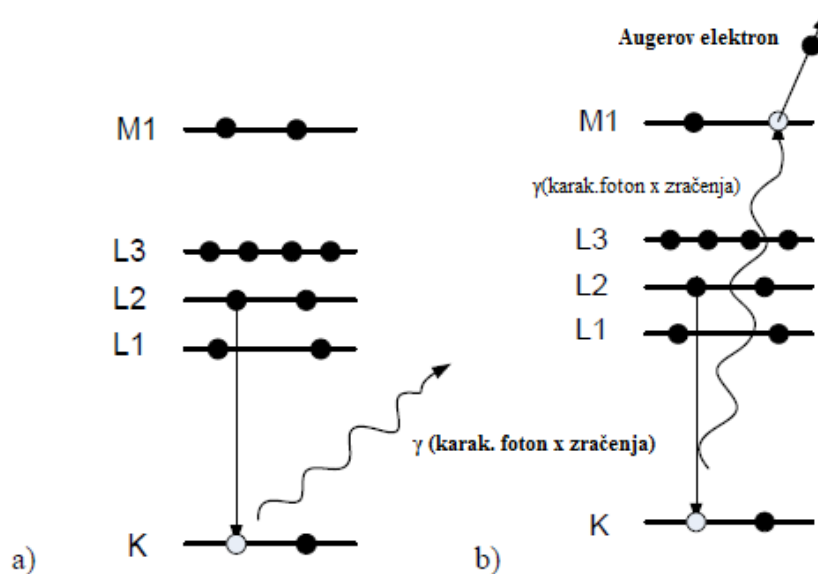
X-zrake su elektromagnetsko zračenje, odnosno fotoni u rangu energije 100 eV - 100 keV. Prvi fizičar koji ih je uočio bio je Wilhelm Conrad Röntgen koji je iz užarene katode ubrzavao elektrone u vakuumskoj cijevi do anode gdje su elektroni interagirali s anodom, odnosno metom (slika 4.1-lijevo). Pojedini elektroni su bili zakočeni (dece-



Slika 4.1: Na lijevoj strani je prikazana rendgenska cijev s pripadajućom shemom nastajanja X-zraka kroz međudjelovanje elektrona s atomima anode. Na desnoj strani je pripadajući spektar koji se sastoji od zakočnog djela (kontinuirani dio) i karakterističnih zraka nastalih usljed izbijanja unutarnjih atomskih elektrona u atomu mete, odnosno anode. Preuzeto iz [6]

lerirani) atomima anode i taj doprinos u spektru je kontinuirano zračenje (zvano još zakočno zračenje), za razliku od kontinuiranoga zračenja u spektru postoji i karakterističan doprinos zračenju koje je nastalo u specifičnim atomskim prijelazima, odnosno elektronskih prijelaza između atomskih ljusaka mete (anode). Ukupni spektar takvoga zračenja možemo vidjeti na slici 4.1-desno. U našem eksperimentu također smo analizirali X-spektre olova, odnosno analizirali smo tzv. nedijagramske zrake koje su energijski relativno blizu karakterističnih X-zraka. Pobuđivanje atoma olova posljedica je međudjelovanja njegovih elektrona s kozmičkim zračenjem koje izbacuje elektrone kroz razne procese. Atom u visoko pobuđenom stanju ima prazninu u atomskoj ljusci, odnosno elektron koji se nalazio u tom stanju je interakcijom (npr. fotonom ili nabijenom česticom) izbačen. Načini na koje elektron može biti izbačen iz atomske ljuske su sljedeći: fotoelektrični efekt, Comptonovo raspršenje, tvorba para, unutarnja konverzija, elektronski uхват, anihilacija pozitrona i Augerov efekt.

Nakon izbacivanja elektrona iz unutarnje ljuske, odnosno nastanka šupljine atom će se naći u neravnotežnom stanju. U vremenu od 10^{-15} s dolazi do preraspodjele naboja, odnosno sistem (atom) teži u stanje najmanje energije na način da elektroni iz vanjskih ljusaka popunjavaju nastale šupljine u unutarnjoj ljusci. U tom procesu popunjavanja unutrašnjih ljusaka elektronima dolazi do emitiranja „viška“ energije preko procesa karakterističnog zračenja ili preko emisije Augerovih elektrona, Coster-Kronig prijelaza ili Super Coster-Kronig prijelaza (slika 4.2). Karakteristično zračenje



Slika 4.2: (a) sheme nastajanja karakterističnog X-zračenja i (b) izbacivanje Augerova elektrona. Preuzeto iz [9]

javlja se kada elektroni viših ljusaka popunjavaju šupljine u unutarnjim ljuskama i pri tome emitiraju karakteristične fotone čija je energija jednaka razlici energetske stanja. U procesu radijativne emisije, odnosno emisije karakterističnih fotona može se javiti i drugi proces zračenja, odnosno izbacivanja vanjskih elektrona karakterističnim fotonom. Dakle, izbačeni karakteristični foton predaje svoju energiju vanjskom elektronu kojega onda izbacuje. Takav elektron još nazivamo Augerov elektron i njegova je energija nakon izbacivanja jednaka razlici energije karakterističnog fotona i energije ionizacije Augerova elektrona. Vjerojatnost Augerova efekta, odnosno elektrona povećava se kada su razlike energetskih nivoa u atomu male i svoj maksimum postiže za elemente manjeg atomskog broja. U Augerovom efektu izbacivanja elektrona početni atom ostaje dvostruko ioniziran. Poseban slučaj Augerovog efekta je Coster-Kronigov prijelaz u kojem se šupljina popunja elektronom iz više

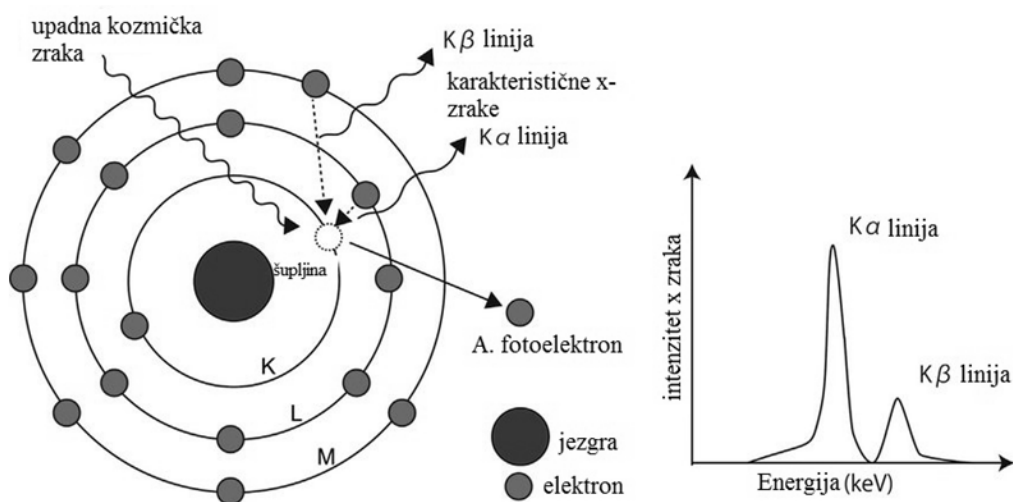
orbitale unutar iste ljuske (npr. unutar L ljuske). [9] U nastavku slijedi objašnjenje karakterističnog X-zračenja, a nakon toga objašnjenje procesa interakcije fotona s materijom s posebnim osvrtom na fotone X-zračenja u materijalu poluvodičkog detektora (HPGe) kojim smo mjerili spektar zračenja olovne pločice. Procesi interakcije fotona s materijom koji najviše doprinose u našem eksperimentu su fotoelektrični efekt i Comptonov efekt, pa će se naglasak u objašnjenju interakcija stavljati na njih.

4.2 Karakteristično X-zračenje

Kao što je već rečeno u prethodnom poglavlju, zbog postojanja izbornih pravila postoje dozvoljeni atomski prijelazi koje vidimo u spektru zračenja te zabranjeni koje ne vidimo u spektru zračenja nekog elementa. Ista pravila naravno vrijede i za karakteristično X-zračenje. Linije u karakterističnom spektru su najintenzivnije za dozvoljene (izbornim pravilima) električne dipolne prijelaze:

$$\Delta n \neq 0, \Delta l = \pm 1, \Delta j = (0 \text{ ili } 1). \quad (4.1)$$

I drugi atomski prijelazi su također mogući, međutim njihov intenzitet i vjerojatnost pojavljivanja su vrlo mali u odnosu na dipolne prijelaze. U grupu tih „nedozvoljenih“ prijelaza pripadaju kvadropolni članovi i magnetski dipolni članovi. Prema tome, električni dipolni prijelazi odgovaraju „normalnim“ X-zrakama dok ostali članovi (kvadropolni itd.) odgovaraju zabranjenim X-zrakama. Energije koje se oslobađaju karakterističnim fotonima izravno su ovisne o atomskom broju Z atoma u kojem se događaju prijelazi te o kvantnim brojevima atomskih ljusaka uključenih u elektronski prijelaz. Za razliku od optičkih prijelaza koji se događaju u vanjskim ljuskama atoma s pripadajućim energijama fotona od par eV X-prijelazi odgovaraju elektronskim prijelazima u unutarnjim ljuskama atoma kao što možemo vidjeti na slici 4.3. Takvi X-prijelazi odgovaraju mnogo većim energijama fotona u rasponu od 10 keV do 100 keV. Nomenklatura koja se najčešće koristi u spektroskopiji rendgenskoga zračenja temeljena je na Siegbahnoj notaciji i bazirana na relativnim intenzitetima linija. Kao što i vidimo na slici 4.3 je prikazan intenzitet karakterističnih linija pa za linije najvećeg intenziteta stoji oznaka α dok za linije manjeg intenziteta stoje oznake β , γ itd. Početno slovo označava ljusku u kojoj se popunjava šupljina. Problem ove notacije je da dolazi do miješanja dijagramskih i nedijagramskih linija komplicirajući

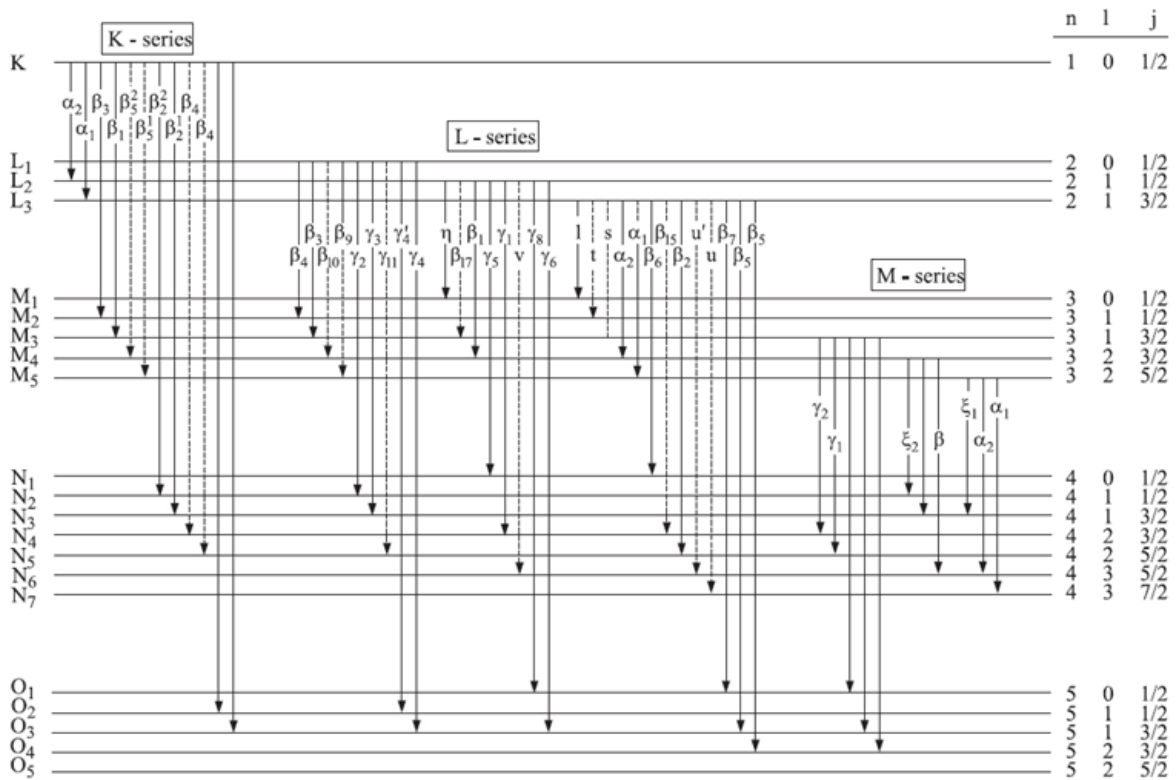


Slika 4.3: Shematski prikaz mehanizma stvaranja karakterističnog djela X-zračenja. Preuzeto iz [9]

cijeli postupak označavanja. Nova IUPAC (eng. International Union of Pure and Applied Chemistry) nomenklatura bazirana na atomskoj strukturi, u opisu prijelaza linija rendgenskoga zračenja koristi početni i konačni nivo prijelaza, tako da u oznaci KL_3 prvo slovo označava početno stanje s jednom šupljinom u K -ljusci, a druga oznaka konačno stanje sa šupljinom u L_3 ljusci te je analogna $K\alpha_1$ liniji u Siegbahnovoj notaciji. [9] Na slici 4.4 prikazan je tipičan dijagram karakterističnih X-prijelaza s odgovarajućom nomenklaturom.

4.3 Nedijagramske linije i ionski procesi

Pored dijagramskih linija koje možemo vidjeti na slici 4.4 postoje i nedijagramske linije. Energija prijelaza tih linija može biti veća ili manja od dijagramskih linija i ne može biti objašnjena kroz energetske razlike stanja kao dijagramske linije. Satelitske linije mogu se pojaviti kao posljedica elektronskih prijelaza u višestruko ioniziranim atomima, višestrukim elektronskim procesima, višestrukog cjepanja nivoa, kemijskog okruženja atoma koji emitira X-zračenje i ostalih efekata. Nama su u razmatranju narušenja Paulijeva principa isključenja takve linije od krucijalne važnosti zato što njihovo pojavljivanje direktno vezujemo uz vjerojatnost narušenja principa. Mi smo, kao što je već rečeno ranije, u naš sustav, odnosno olovnu pločicu doveli nove fermione (elektrone) i onda u spektru pločice promatrali Paulijevim principom zabranjene prijelaze. U modelu koji će biti opisan u sedmom poglavlju smo vjerojat-

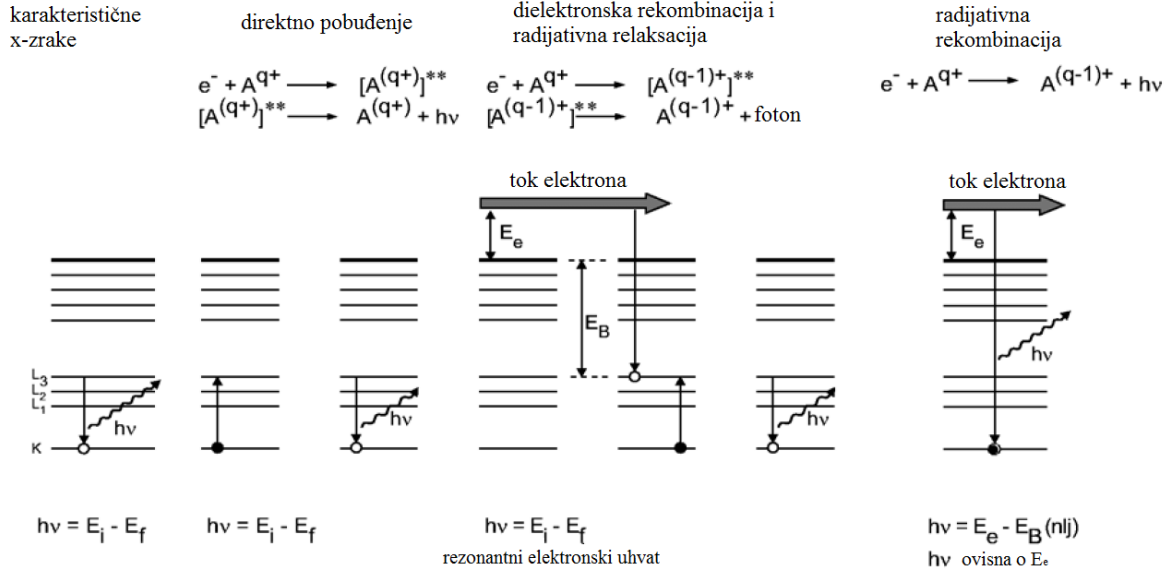


Slika 4.4: Dijagram dopuštenih X-prijelaza s odgovarajućom nomenklaturom. Pune linije označavaju dipolne prijelaze dok isprekidane označavaju članove višega reda. Preuzeto iz [10]

nost pojavljivanja nedozvoljenih procesa povezali smo s vjerojatnošću elektronskog uhvata novog elektrona od strane atoma olova. U našem smo modelu zapravo koristili teoriju elektronskog uhvata u atomsku ljusku od strane ioniziranog atoma, točnije izravne radijacijske rekombinacije, samo što smo modificirali formulu tako što smo ionizirani atom zamijenili neutralnim atomom. Iz tog razloga u nastavku slijedi kratki pregled s objašnjenjima fizikalnih procesa koji objašnjavaju neke od satelitskih prijelaza u ioniziranim atomima. Na slici 4.5 prikazani su procesi: 1) karakterističnog X-zračenja, 2) direktnog pobuđivanja, 3) dielektronske rekombinacije te 4) radijativne rekombinacije. U našem eksperimentu smo prema članku [8] nedozvoljene zrake opisali mehanizmom radijativne rekombinacije a opis tog procesa slijedi u nastavku teksta.

4.3.1 Radijativna rekombinacija

[10] Radijativna rekombinacija je proces u kojem je slobodan elektron uhvaćen u jedno od stanja ioniziranog atoma i pri tome emitira X-zraku. „Jednadžba“ procesa



Slika 4.5: Usporedba nastanka karakterističnih X -zraka i satelitskih X -zraka u raznim atomskim procesima ioniziranih atoma. Preuzeto iz [10]

je dana sa

$$A^{q+} + e^- \rightarrow A^{(q-1)+} + h\nu. \quad (4.2)$$

Energija emitiranoga fotona je dana razlikom energije slobodnoga elektrona i energije stanja u koje je uhvaćen, odnosno:

$$E_{RR} = E_e - E_B(n, l, j). \quad (4.3)$$

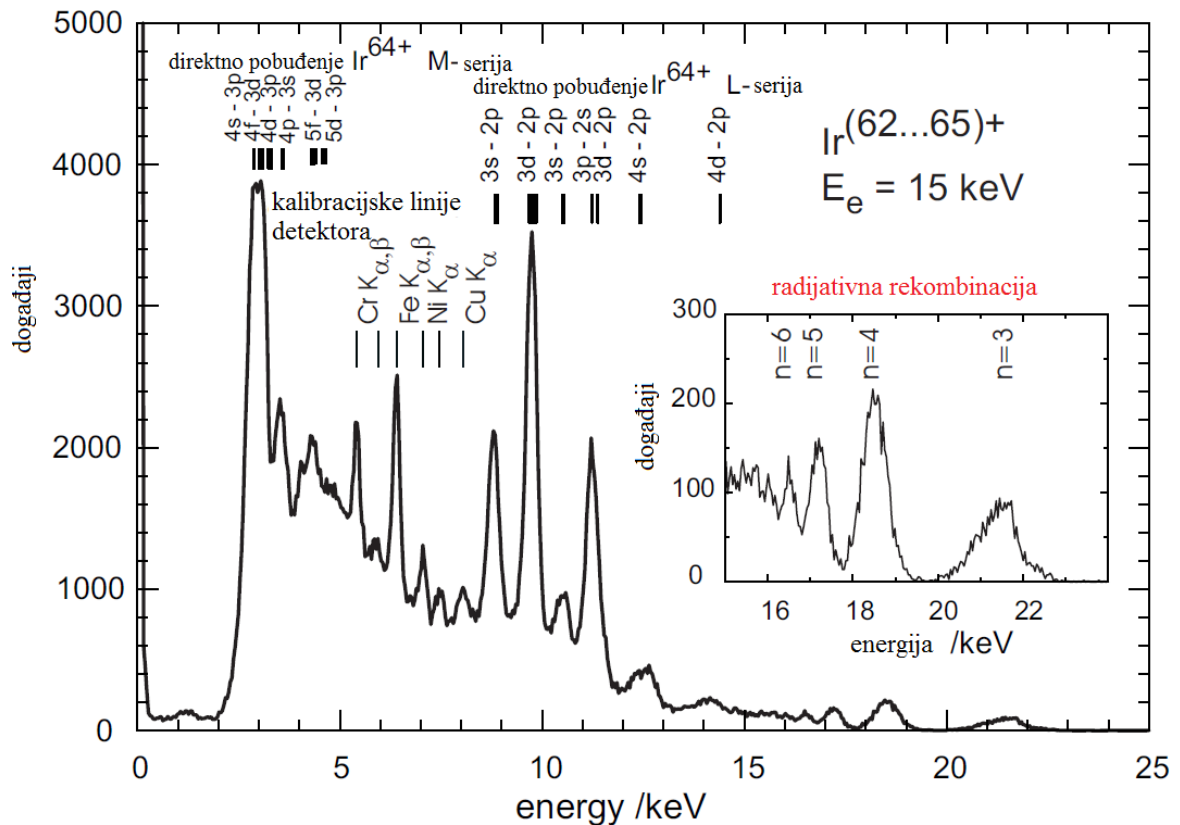
$E_B(n, l, j)$ predstavlja negativnu energiju vezanja za pripadnu podljusku (n, l, j) a E_e predstavlja kinetičku energiju elektrona. Posljedica ovakvog procesa je da energija pripadne x -zrake može biti veća od kinetičke energije elektrona i takve x -zrake možemo vidjeti na primjeru iona Iridija (Ir^{64+}) na slici 4.6.

Udarni presjek za za RR proces dan je sljedećom relacijom:

$$\sigma_{RR}^q(E_e) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \alpha \cdot \lambda_e^2 \cdot \chi_q \cdot E_e \cdot \ln\left(1 + \frac{\chi_q(E_e)}{2\hat{n}^2}\right). \quad (4.4)$$

Faktor χ_q u gornjem izrazu predstavlja:

$$\chi_q(E_e) = (Z + q)^2 \frac{I_H}{4E_e}, \quad (4.5)$$



Slika 4.6: Mjereni X-spektar sa Si (Li) detektorom na Dresdenskom EBIT-u dobiven iz visoko nabijenih iridijevih iona pobuđenih energijom elektrona $E_e = 15$ keV. Prikazane su linije direktnog pobuđenja serije L i M te linije od procesa radijacijske rekombinacije. Preuzeto iz [10]

a \hat{n} je kvantni broj:

$$\hat{n} = n + (1 - W_n) - 0.3, \quad (4.6)$$

koji je zbroj glavnog kvantnog broja i faktora W_n koji predstavlja omjer nepopunjenih stanja te ljuske i ukupnog broja mogućih stanja u toj ljusci. Faktor α je konstanta fine strukture, a λ_e valna duljina elektrona, dok je I_H energija ionizacije vodikova atoma $\approx 13.6eV$. U poglavlju 7 ću taj poprečni presjek prikazati u modificiranoj varijanti kako bi udarni presjek bio valjan za neutralne atome olova.

4.4 Međudjelovanje fotona s materijom

U ovom ću dijelu objasniti neke aspekte fotonskog međudjelovanja s materijom. Naglasak će, naravno, biti na x -dijelu spektra zračenja i njegovom interakcijom s kristalom(germanijem) detektora jer u eksperimentu promatramo takvu vrstu zračenja iz olovne pločice. Takvo zračenje, kao što se može vidjeti u poglavlju (7), detektirano

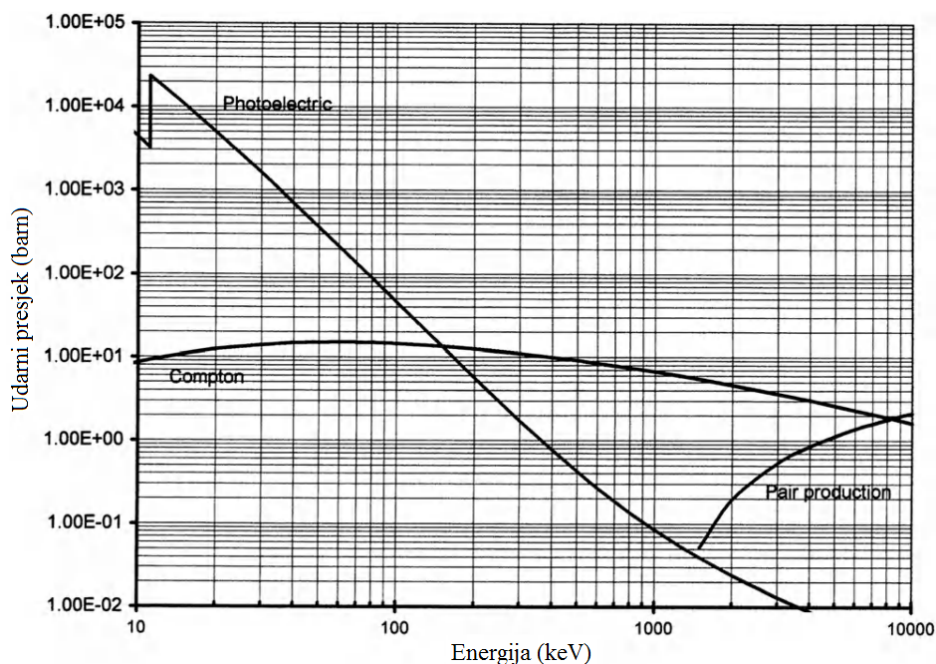
je germanijskim poluvodičkim detektorom (HPGe), a raspravljene i objašnjene će biti samo one interakcije fotona s materijom koje imaju doprinos u dijelu spektra koji promatramo. Fotoni, odnosno x -zrake koje izlaze iz Pb pločice u detektoru, mogu međudjelovati s jezgrama atoma germanija, odnosno orbitalnim elektronima.

1. Interakcija fotona s jezgrom atoma: direktna foton–jezgra interakcija (fotonuklearna reakcija) i interakcija između fotona i elektrostatskog polja jezgre (tvorba para).
2. Interakcija fotona s orbitalnim elektronima:
 - (a) Slabo vezanim elektronima: Thomsonovo raspršenje, Comptonov efekt, tvorba tripleta.
 - (b) Čvrsto vezanim elektronima: Rayleighovo raspršenje i fotoelektrični efekt.

Slabo vezani elektroni su oni elektroni kojima je energija vezanja puno manja od energije fotona ($E_B \ll h\nu$), dok čvrsto vezani elektron ima energiju vezanja nešto veću ili nešto manju od energije fotona, odnosno usporednu energiji fotona. Nakon međudjelovanja fotona s materijom, moguća su dva ishoda, odnosno foton može biti potpuno apsorbiran, a dio njegove energije prelazi na nabijene čestice ili može biti raspršen i kao takav ima manju energiju nego ulazni foton, a dio energije ulaznog fotona predaje se nabijenoj čestici. Svi ti nabrojani procesi su stohastički, što znači da postoji vjerojatnost koja se pridjeljuje svakoj vrsti interakcije. Najvažniji procesi međudjelovanja fotona s materijom obzirom na HPGe detektor su: fotoelektrični efekt, Comptonov efekt i tvorba parova. Osim toga što su ti procesi najvažniji za HPGe detektor, neki od njih javljaju se češće, odnosno imaju veću vjerojatnost pojavljivanja. Vjerojatnost pojave tih procesa ovisi, prije svega, o atomskom broju materijala i upadnoj energiji zračenja pa obzirom na to da su u našem razmatranju ulazne energije zračenja do 100 keV-a i atomskim brojem germanija $Z = 32$, očito je iz slike 4.7 da je fotoelektrični efekt dominantan proces. U nastavku slijedi fizikalno objašnjenje tih triju procesa.

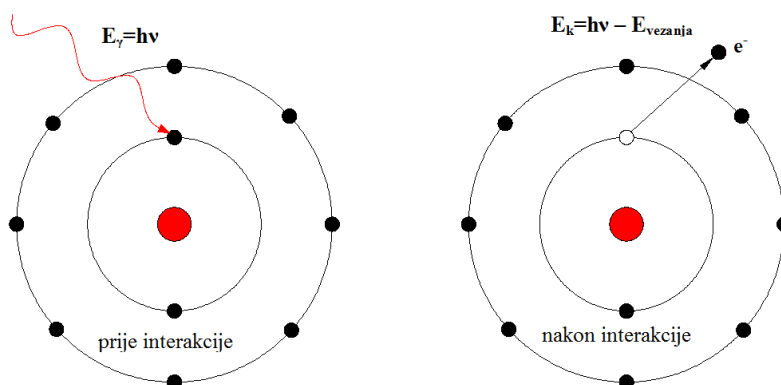
4.4.1 Fotoelektrični efekt

U fotoelektričnom efektu međudjeluju upadni foton i čvrsto vezani atomski elektron. Zbog očuvanja energije i količine gibanja fotoelektrični efekt može se dogoditi samo na čvrsto vezanom elektronu, a ne na slobodnome. Foton je apsorbiran od strane



Slika 4.7: Ovisnost udarnog presjeka za tri važna procesa (fotoefekt, Comptonov efekt i tvorba parova) u kristalu germanija (Ge) u ovisnosti o energiji upadnoga zračenja. Preuzeto iz [11]

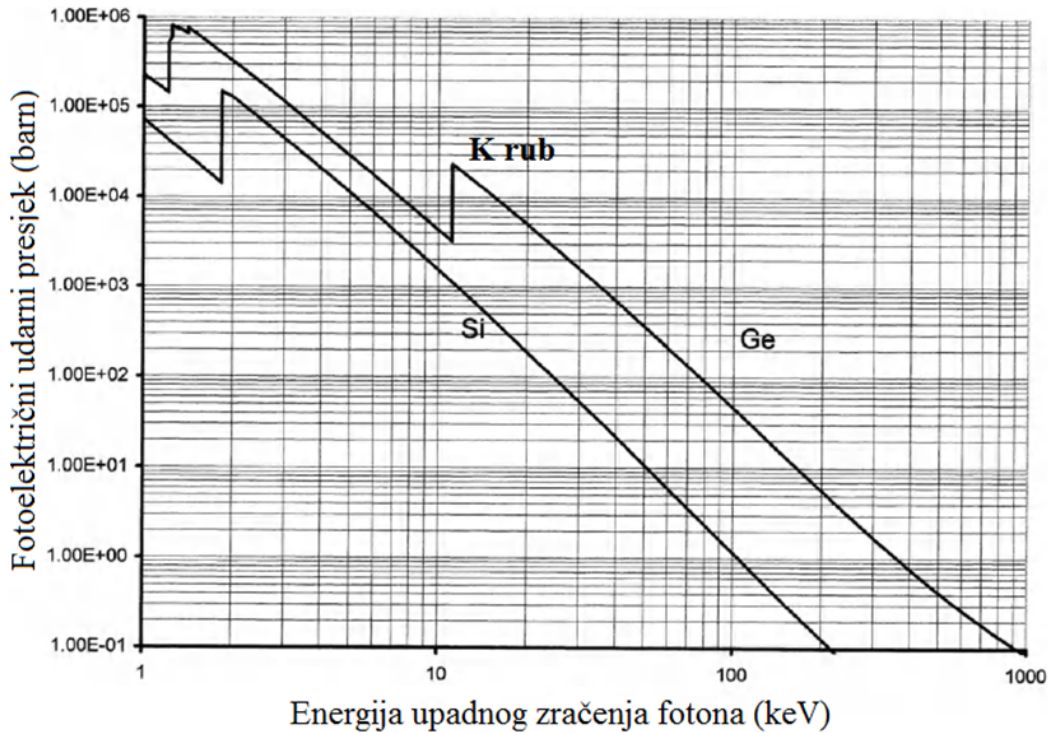
atoma te je orbitalni elektron izbačen iz svoje ljuske. Kad energija fotona premašuje energiju vezanja elektrona u *K*-ljusci onda je najvjerojatniji proces emisije elektrona iz *K*-ljuske. Shemu fotoelektričnoga efekta možemo vidjeti na slici 4.8.



Slika 4.8: Shema fotoelektričnoga efekta u kojem vidimo da upadni foton izbacuje elektron iz *K* ljuske

Energija s kojom elektron napušta vezano stanje u atomu jednaka je razlici energije upadnoga zračenja i energije vezanja u *K* ljusci. Iz razloga što atom kao cjelina apsorbira upadni foton zračenja, onda je uobičajno gledati koeficijent apsorpcije fotona po atomu, odnosno udarni presjek po atomu. Udarni presjek po atomu predstav-

lja vjerojatnost fotoelektrične interakcije, a ovisi o atomskom broju Z atoma i upadnoj energiji fotona. Na slici 4.9 vidimo specifični izgled atomskog presjeka u ovisnosti o upadnoj energiji fotona. Vidimo da funkcija ima oštre rubove koji se još nazivaju i apsorpcijski rubovi. Oni se javljaju kada je upadna energija fotona približno jednaka energiji vezanja atomskih elektrona apsorbera(detektora).



Slika 4.9: Atomski udarni presjek fotoelektričnoga efekta za Si i Ge. Preuzeto iz [11]

Na gornjoj slici fotoelektričnog udarnog presjeka razlikujemo 3 područja energije:

1. Područje u blizini apsorpcijskih rubova.
2. Područje na nekoj udaljenosti od ruba apsorpcije.
3. Područje u relativističkom dijelu daleko od apsorpcijskog ruba.

Teoretska predviđanja za područja u blizini apsorpcijskih rubova su kompleksna i neodređena. Za područja na nekoj udaljenosti od ruba apsorpcije imamo izraz za udarni presjek po atomu za (K - elektrone):

$$\tau_K = \alpha^4 \sigma_{Th} Z^n \sqrt{\frac{32}{\epsilon^7}} \quad (4.7)$$

U gornjem izrazu ϵ predstavlja normiranu energiju fotona $h\nu/m_e c^2$, α je koeficijent

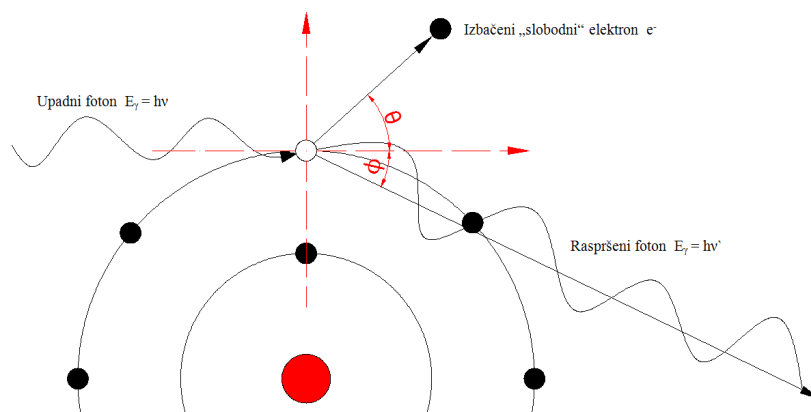
fine strukture, Z je atomski broj apsorbera, σ_{Th} je Thompsonov udarni presjek elektrona, faktor n predstavlja eksponent atomskog broja i on za relativno male energije fotona iznosi 4 dok je za velike energije (3 MeV-a) fotona, $n \approx 4.6$. u relativističkome području za koje vrijedi ($\epsilon \gg 1$) udarni presjek je dan:

$$\tau_K = \frac{1.5}{\epsilon} \alpha^4 Z^5 \sigma_{Th}. \quad (4.8)$$

U našem eksperimentu možemo smatrati da udarni presjek za fotoefekt ide s četvrtom potencijom atomskog broja s obzirom na to da su energije fotona relativno niske (do 100 keV-a). U nastavku slijedi objašnjenje Comptonova efekta i tvorbe parova.

4.4.2 Comptonov efekt

U Comptonovom efektu ili neelastičnom raspršenju sudjeluje upadni foton koji se raspršuje na relativno slobodnome elektronu. Pod izrazom "relativno slobodnome elektronu" misli se na to da je upadna energija fotona puno veća od energije vezanja atomskog elektrona. Određeni dio energije predaje se slobodnome elektronu koji se nakon toga izbacuje iz ljuske, dok raspršeni foton ima manju energiju od upadnoga fotona. Shemu procesa možemo vidjeti na slici 4.10.



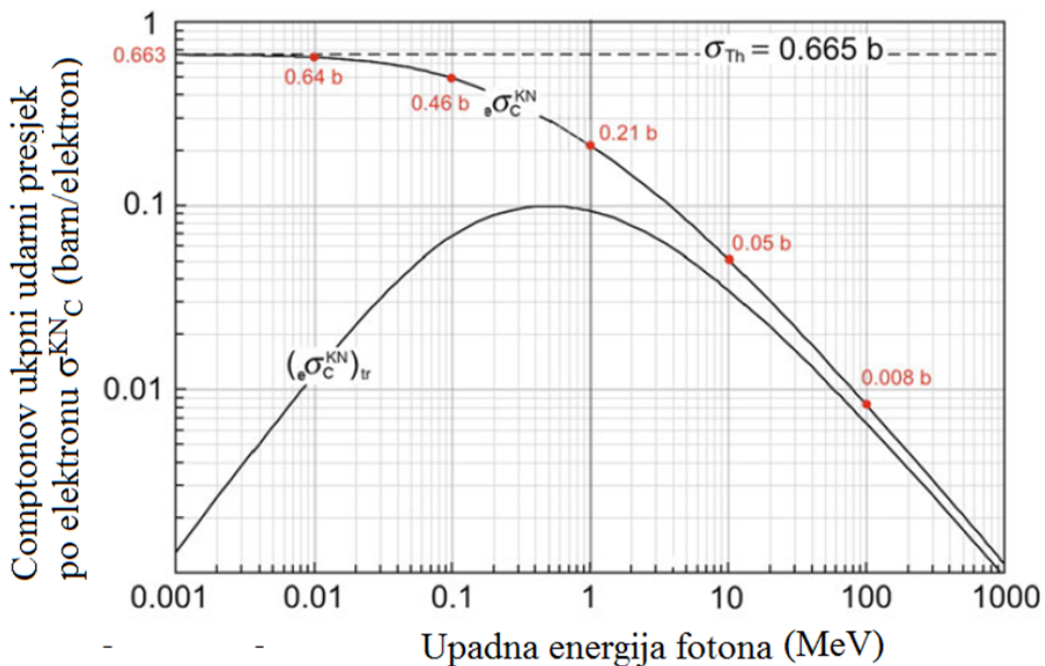
Slika 4.10: Klasična shema Comptonova efekta.

Vjerojatnost Comptonova raspršenja za neki foton energije E_γ koji upada u atom (npr. atom apsorbera, odnosno detektora zračenja) je dana Klein-Nishininovom formulom za ukupni udarni presjek Comptonova raspršenja (4.9) niže. Ukupni udarni presjek za Comptonovo raspršenje po slobodnom elektronu dobiveno je tako što se elektronski diferencijalni udarni presjek po jedinici prostornoga kuta integrira po ci-

jelom prostornom kutu, , odnosno:

$$\begin{aligned} {}^u_e\sigma_C^{KN} &= \int \frac{d_e\sigma_C^{KN}}{d\Omega} d\Omega \\ &= 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \left[\frac{2(1+\epsilon)}{1+2\epsilon} - \frac{\ln(1+2\epsilon)}{\epsilon} \right] + \frac{\ln(1+2\epsilon)}{2\epsilon} - \frac{1+3\epsilon}{(1+2\epsilon)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Faktor ϵ u gornjem izrazu za ukupni udarni presjek je: $\epsilon = h\nu/m_e c^2$. Na slici 4.11 možemo vidjeti ovisnost udarnog presjeka za Comptonovo raspršenje po elektronu u ovisnosti o upadnoj energiji fotona.



Slika 4.11: Ovisnost ukupnog udarnog presjeka (Comptonovog) po elektronu u ovisnosti o upadnoj energiji fotona. Prikazan je također i udarni presjek za prijenos energije. Preuzeto iz [12]

Na slici 4.11 vidimo da udarni presjek za male energije fotona nije ovisan o njihovoj energiji, odnosno može se pokazati da se svodi na Thomsonov udarni presjek uz korekcijski faktor. Također, vidimo da s povećanjem energije fotona vjerojatnost raspršenja pada. Ono što je jako bitno primjetiti je to da udarni presjek(po elektronu) ne ovisi o atomskom broju Z materijala apsorbera(npr. germanija) jer je glavna pretpostavka da je elektron slobodan, odnosno stacionaran. Naravno da elektron nije u potpunosti stacionaran i naravno da njegova energija vezanja za atom apsorbera postoji, samo je zanemarivo mala u odnosu na energiju fotona. Kao što znamo, Comptonovo raspršenje je dominantno za energije upadnoga zračenja $E_\gamma > 150$ KeV i prema

tome u našem eksperimentu ne doprinosi značajno u ukupnom spektru zračenja a, posebice ne u dijelu spektra kojega analiziramo ($\approx 70 - 80$ keV-a).

4.4.3 Tvorba parova

Tvorba parova je proces u kojem upadni foton međudijeluje elektromagnetskim poljem jezgre u kojem jezgra preuzima dio količine gibanja i pritom se stvaraju elektron (e^-) i pozitron (e^+) par. Za ovakav proces postoji prag upadne energije fotona od 1.022 MeV koji u našem eksperimentu nije od važnosti jer se energije nalaze daleko iznad analize spektra razmatranja. Za primjer uzmimo da foton energije 100 keV upada u materijal apsorbera germanija, vjerojatnost fotoelektričnog efekta je ≈ 55 barna po atomu, dok je vjerojatnost Comptonova raspršenja ≈ 18 barna po atomu i tvorbe parova nema. [13]

5 Teorije narušenja Paulijevog principa isključenja

U prvom dijelu ovog poglavlja dati ću kratki povijesni pregled teorija koje su pretpostavljale mogućnost narušenja Paulijevog principa isključenja. U drugom dijelu poglavlja je dan izvod „na prste“ jedne od takvih teorija Ignatiev-a i Kuzmin-a [14] čije se hipoteze koriste i danas kada se u eksperimentima ispituju narušenja simetrije, odnosno narušenja PPI-a. Njihovu teoriju, odnosno parametar koji označava vjerojatnost narušenja PPI-a, smo također koristili u našem eksperimentu pa ću u drugom dijelu poglavlja „na prste“ pojasniti glavne pretpostavke i zaključke te teorije.

5.1 Povijesni pregled

Glavni razlog zašto se uopće javljala potreba za teorijom koja predviđa narušenje PPI-a nepotpunost je teorema koji „dokazuju“ PPI-a, odnosno spin-statistike teorema [23]. Reines i Sobel su 1974. godine naknadno reanalizirali eksperimente Goldhabera i Schraffa te su prvi teoretski pretpostavili malu mogućnost narušenja Paulijevog principa isključenja. Prve pretpostavke teorije koja omogućuje malo narušenje PPI-a su teoretski odbacili Amado i Primakoff 1980. godine da bi 7 godina kasnije teorija ponovno oživjela. Teorija je oživjela ruskim fizičarem Levom Okunom koji je predstavio modificirana fermionska stanja. Osim vakuumske i jednočestične stanja, Okun je pretpostavio dvočestično stanje. Okunova teorija rano je ušla u probleme zbog neuspjelog konstruiranja hamiltonjana i zbog nerelativističkog pristupa. Usprkos neuspjelom pokušaju konstruiranja teorije, Ignatiev i Kuzmin su iste godine predstavili proširenu verziju Okunove teorije koja je bila striktno nerelativistička i karakterizirana β parametrom koji je opisan kao vjerojatnost narušenja, dok je očekivana vrijednost broja $|\beta| \ll 1$. Kao što ćemo u drugom dijelu vidjeti faktor β je parametar koji opisuje vjerojatnost dvočestične stanja. Koristeći svoju teoriju u opisivanju narušenja PPI-a Ignatiev i Kuzmin zaključili su da je vjerojatnost prijelaza za anomalno dvo-elektronsko simetrično stanje proporcionalno $\beta^2/2$ koje se široko koristi u eksperimentalnim rezultatima mjerenja. Taj nerelativistički model bio je kritiziran od strane Govorkova koji je rekao da je taj model naivan i kao takav se ne može proširiti da bi vrijedio u kvantnoj teoriji polja. 1987. godine Oscar Greenberg i Rabindra Mohapatra predstavili su kvantnu teoriju polja s kontinuirano deformiranim komutacijskim relacijama koje su vodile na narušenje kauzalnosti. Parametar narušenja označen je

slovom q i teorija je trebala opisivati nove hipotetske čestice nazvane *quoni*. Međutim Govorkov je opovrgnuo i takvu teoriju. Međutim, vidjeli smo koliko je PPI robustan i koliko je teško definirati narušenje unutar trenutne kvantne teorije polja. Ono što daje dodatni uvjet da bi došlo narušenja je Messiah-Greenberg superizborno pravilo. Pravilo kaže da hamiltonijan sustava čestica mora ostati invarijantan na zamjenu čestica i kao posljedica toga događa se da on ne može promijeniti simetriju bilo kojeg stanja sustava više identičnih čestica. Dakle, jedini način da se superizborno pravilo naruši je otvoreni sistem (nema konstantan broj čestica). Kao što sam naveo prvi eksperiment koji nebi kršio superizborno pravilo je bio izveden 1990. godine a izveli su ga Ramberg i Snow [18] koji su tražili Paulijeve zabranjene X -zrake u prijelazima u bakrenoj pločici kojom je prolazila struja. Slijedeći njihov primjer eksperimenta mi smo također tražili narušenje na taj način. Naš eksperimentalni postav zajedno s probnim rezultatima biti će objašnjen u sljedećim poglavljima nakon objašnjenja raznih eksperimenata koji su tražili narušenje PPI. [31]

5.2 Model Ignatieva i Kuzmina

Kao što sam već naveo, ruski fizičari Ignatiev i Kuzmin su 1987. godine sa svojim kvantno-mehaničkim modelom uveli mogućnost „malog“ narušenja Paulijevog principa isključenja [7, 14]. Dakle, u svoj model su uveli mogućnost da se dvije čestice (dva fermiona) nalaze u istom stanju. Faktor ili parametar koji opisuje tu vjerojatnost je β i uveden je u algebru operatora stvaranja i anihilacije (poništenja). Dakle, parametar $\beta^2/2$ je mjera narušenja Paulijeva principa isključenja, odnosno predstavlja vjerojatnost nalaženja dva elektrona u istom kvantnom stanju. Stoga, hamiltonijan takvog modela opisuje nedozvoljene prijelaze fermiona u isto kvantno stanje. Ignatiev i Kuzmin pojednostavljaju algebru operatora stvaranja i poništenja ne uzimajući u obzir varijable spina i momenta i pretpostavljajući samo elektron, a ne i pozitron. U njihovom modelu, oni operatorima stvaranja i poništenja povezuju 3 kvantna stanja: vakuumsko stanje (stanje bez čestica) $|0\rangle$, jednočestično stanje $|1\rangle$ i nestandardno (obzirom na fermione) dvočestično stanje $|2\rangle$. Dakle, operatori stvara-

nja a^\dagger i poništenja a dijeluju ovako:

$$\begin{aligned} a^\dagger |0\rangle &= |1\rangle, & a |0\rangle &= 0 \\ a^\dagger |1\rangle &= \beta |2\rangle, & a |1\rangle &= |0\rangle \\ a^\dagger |2\rangle &= |0\rangle, & a |2\rangle &= \beta |1\rangle. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Gdje se pretpostavlja realni parametar β . Matrice operatora poništenja i stvaranja (redom) onda izgledaju ovako (u odabranoj bazi):

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Hilbertov prostor stanja \mathcal{H} može se rastaviti na direktnu sumu potprostora stanja \mathcal{H}_1 i \mathcal{H}_2 . Potprostor \mathcal{H}_1 razapinju vektori $|0\rangle$ i $|1\rangle$, dok potprostor \mathcal{H}_2 razapinje vektor $|2\rangle$. U slučaju da je faktor $\beta = 0$, onda prijelazi između stanja prvog i drugog potprostora postaju zabranjeni. Drugim riječima, postaju potpuno razdvojena. Da bi se konstruirale komutacijske relacije između operatora stvaranja i poništenja, konvencionalno je koristiti 9 matrica (3×3) kao što je prikazano u sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pri tome matrice M_{ij} navedene u gornjem izrazu nisu hermitske. Dekompozicija operatora stvaranja i poništenja matricama M_{ij} daje sljedeće relacije (bez hermitski

konjugiranih):

$$\begin{aligned}
a^2 a^\dagger + \beta^2 a^\dagger a^2 &= \beta^2 a \\
a^2 a^\dagger + \beta^4 a^\dagger a^2 &= \beta a a^\dagger a \\
a^3 &= 0 \\
(a^\dagger)^3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Relacije 5.4 (uz hermitski konjugirane relacije koje nisu eksplicitno navedene) određuju algebru operatora a i a^\dagger . Operator broja čestica konstruiran je tako da zadovoljava komutacijske relacije $[N, a] = -a$ i $[N, a^\dagger] = a^\dagger$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Kada se operator broja čestica predstavi u bazi operatora stvaranja i poništenja onda poprima sljedeći oblik:

$$N = \frac{1}{1 - \beta^2 + \beta^4} [(2\beta^2 - 1)a^\dagger a + (\beta^2 - 2)aa^\dagger + (2 - \beta^2)\hat{I}]. \tag{5.6}$$

U radu Ignatieva i Kuzmina se nakon konstruiranja algebre analizira hamiltonijan. Hamiltonijan, kao što je već rečeno, sadrži član koji predstavlja narušenje PPI-a. Iz Hamiltonijana se dalje izračunava vjerojatnost nedozvoljenoga prijelaza u jedinici vremena $W(|1\rangle \rightarrow |2\rangle)$ koji naravno ovisi o parametru narušenja β . Hamiltonijan Ignatieva i Kuzmina dan je sljedećim izrazom:

$$H = H_{n,i} + H_i. \tag{5.7}$$

Prvi član $H_{n,i}$ predstavlja neinteragirajući član, dok drugi član predstavlja interagirajući. Ako uključimo u ukupni hamiltonijan operator broja čestica, onda hamiltonijan poprima sljedeći oblik:

$$H = EN + \epsilon V \tag{5.8}$$

V u gornjem izrazu predstavlja energiju interakcije:

$$V = a^2 a^\dagger + a^\dagger a^2 + a a^\dagger a + \text{h.c} \quad (5.9)$$

E je energija jednočestičnog stanja, a ϵ predstavlja konstantu vezanja. Oni su pretpostavili da je energija jednočestičnog stanja puno veća od energije vezanja, Dakle, ϵ predstavlja malu smetnju u neintereagirajućem sustavu. U dijagonalnoj reprezentaciji operatora broja čestica hamiltonijan izgleda ovako:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & E & \beta\epsilon \\ 0 & \beta\epsilon & 2E \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Matrica prijelaza (određena svojstvenim funkcijama gornjeg hamiltonijana) između stanja $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ izgleda ovako:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon/E & 0 \\ \epsilon/E & 1 & \beta\epsilon/E \\ 0 & \beta\epsilon/E & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

I konačno vjerojatnosti prijelaza između vakumskog, jednočestičnog i dvočestičnog stanja izgledaju ovako:

$$\begin{aligned} W_{01} &= 2(\epsilon/E)^2(1 - \cos(Et)) \\ W_{02} &= 0 \\ W_{12} &= 2\beta^2(\epsilon/E)^2(1 - \cos(Et)) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Iz gornjih relacija možemo vidjeti da za $\beta = 0$ prijelazi između jednočestičnog i dvočestičnog stanja iščezavaju dok je za $\beta \neq 0$ vjerojatnost prijelaza proporcionalna faktoru β . Ako cijeli taj model primjenimo na elektrone onda možemo interpretirati ovako: anomalne X -zrake u atomu su posljedica „zabranjenih“ prijelaza između jednočestičnih i dvočestičnih elektronskih stanja. Vidimo da se u Ignatiev Kuzmin modelu uz jednostavnu algebru došlo do relativno dobre interpretacije PPI. Bez obzira na model kao takav je bio na meti kritika od strane znanstvenika Govorkova [15]. Biedenharn, Truini i van Dam (BTvD) [16] su preporučili uvođenje dva stanja, stanje

$|e\rangle$ i stanje $|\mu\rangle$ i operatore poništenja i stvaranja koji djeluju na tenzorski produkt stanja prema relacijama:

$$\begin{aligned} b^\dagger |0\rangle &= \cos(\theta_B) |e\rangle + \sin(\theta_B) |\mu\rangle = 1 \\ b^\dagger |1\rangle &= 2 \sin(\theta_B) \cos(\theta_B) |e\rangle |\mu\rangle = \sin(2\theta_B) \end{aligned} \quad (5.13)$$

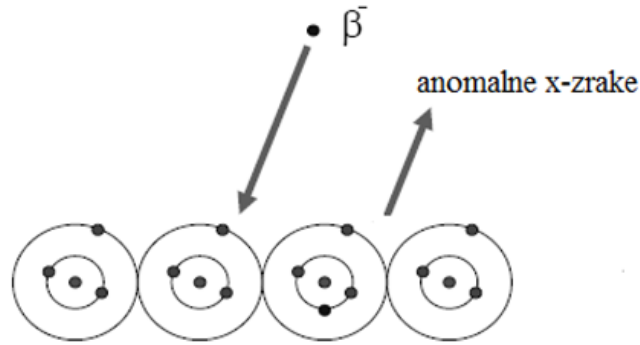
I ako sada zamjenimo u gornjem izrazu $\sin(2\theta_B) = \beta$, dobivamo istu algebru koju su konstruirali i Kuzmin i Ignatiev. Drugim riječima, Ignatiev Kuzmin model ekvivalentan je modelu koji sadrži, odnosno opisuje dva slična fermiona koji se mješaju u smislu valnih funkcija. Stoga, BTvD prijedlog pokazuje da je Ignatiev Kuzmin teorija zapravo posljedica raspoznatljivosti čestica. Kao što su potvrdili brojni eksperimenti, fermioni u tom smislu nisu raspoznatljivi i prema tome model Ignatiev-a i Kuzmin-a [14] nije do kraja dostatan za opis PPI. Iako ne predstavlja kompletnu teoriju služi za dobar opis vjerojatnosti narušenja u brojnim pa i u našem eksperimentu.

6 Modeli narušenja Paulijevog principa isključenja i rezultati mjerenja

Paulijev princip isključenja jedan je od bitnijih principa u objašnjavanju mikrosvijeta, a samim time i makro svijeta. Tim svojstvom on tjera znanstvenu zajednicu na njegovo dublje razumijevanje, ali i traženje situacija kada se javlja njegovo narušenje. Traženje njegovog narušenja zapravo znači traženje nedopuštenih stanja ili procesa koje on zabranjuje. Atomska spektroskopija je jedna od prvih mjesta gdje se traži narušenje PPI-a odkad ga je Pauli [1] prošlog stoljeća definirao. Kratko rečeno, u atomskoj spektroskopiji traže se one linije prijelaza koje nisu dopuštene ili drugim riječima, traže se oni događaji (fotoni) koji se ne bi smijeli javiti u spektru nekog elementa. U traženju narušenja PPI-a postoji nekoliko eksperimenata koji narušenje traže u nedozvoljenim nuklearnim stanjima, nedozvoljenim nuklearnim prijelazima [17], nedozvoljenim elektronskim stanjima [11–14] i nedozvoljenim elektronskim prijelazima [8, 18, 24].

Jedan od prvih eksperimenata koji je provjeravao PPI-a svodio se na provjeravanje identičnosti elektrona koji nastaju β raspadom i elektrona koji se nalaze u atomskim ljuskama. Danas znamo da β -elektroni imaju isti spin, masu, naboj kao i elektroni u atomskoj ljusci. Međutim, oni su pretpostavili sljedeće: ako β -elektroni nisu identični elektronima iz atomske ljuske onda takvi elektroni neće vidjeti da je K -ljuska u atomu nekog elementa zauzeta već s dva elektrona i takvi elektroni bi se teoretski mogli smjestiti u takvo stanje i pritom emitirati X - (nedopuštene) zrake. Goldhabers [7] je tražio takve X -zrake iz olovne pločice pokraj koje je stavio prirodan β -izvor zračenja. Dakle, ti β elektroni su bili usmjereni prema pločici u kojoj su onda zbog svoje eventualne neidentičnosti trebali zauzimati nedopuštenu kvantna stanja. U eksperimentu nisu uspjeli pronaći takve X -zrake pa su zaključili da su elektroni u β -raspadu i atomski elektroni identične čestice. Također su došli do zaključka o narušenju Paulijevog principa isključenja s visokom gornjom granicom vjerojatnosti od 5%. Dakle, vjerojatnost narušenja prema njihovom zaključku mora biti manja od 5%. Shemu njihova eksperimenta možemo vidjeti na slici 6.1.

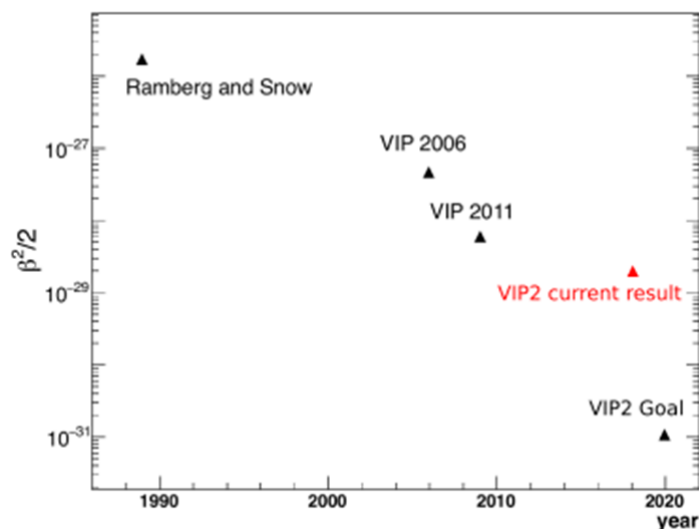
Novikov [32] i ostali su narušenje PPI-a tražili masenim spektrometrom kojim su mjerili mase atoma i tražili one atome čija je masa veća za masu jednog elektrona



Slika 6.1: Fizikalna shema koja prikazuje eventualno narušenje PPI-a u reakcijama elektrona nastalih beta zračenjem i atoma.

jer bi takav atom u osnovnom zauzetom stanju imao 3 umjesto 2 elektrona. Rezultat njihova istraživanje je vjerojatnost narušenja koja iznosi $\beta^2/2 < 2 \cdot 10^{-21}$. Ramberg i Snow [18] su 1990. godine napravili jednostavan, ali jako efektivan eksperiment u istraživanju PPI, odnosno traženju anomalnih X-zraka. Oni su naime prirodan izvor elektrona zamijenili s izvorom električne struje jer su na taj način u sustav mogli dovesti puno više elektrona. Moguće narušenje Paulijevog principa isključenja je ostvareno tako što novi skup elektrona može biti s različitim vjerojatnostima u simetričnim stanjima. Ideja eksperimenta je da svaki novi elektrona ima mogućnost biti u "zabranjenom" stanju. Ako matrica gustoće vodljivih elektrona zajedno s atomskim atomima ima projekciju na „nedozvoljeno“ stanje tada vodljivi elektroni neće vidjeti K-ljusku popunjenu pa će prijelaz biti omogućen i pri tome će se emitirati foton, odnosno X-zraka. Svaki vodljivi elektron koji dođe dovoljno blizu atoma može biti uhvaćen u atom i može prijeći u nedozvoljeno stanje. Vjerojatnost da vidimo zabranjene X-zrake je proporcionalna broju vodljivih elektrona koji putuju kroz određeni materijal (pločicu) i broju atoma koji mogu uhvatiti elektron. Cijeli taj eksperiment će detaljnije biti objašnjen kasnije jer smo ga zbog jednostavnosti i efikasnosti također odabrali kako bi ispitivali narušenje Paulijevog principa isključenja. Ramberg i Snow su u eksperimentu uzeli jakost električnog izvora od 30 A i puštali električnu struju kroz bakrenu pločicu mjesec dana i detektorom bilježili X-zrake. Procijenili su energije X-zraka koje bi se u slučaju narušenja emitirale pa su u tom dijelu spektra tražili moguće događaje, odnosno te nedozvoljene X-zrake. Rezultat njihovog eksperimenta dan je vjerojatnošću narušenja, odnosno: $\beta^2/2 < 1.7 \cdot 10^{-26}$. Logan i Ljubičić [17] su tražili nedozvoljene nuklearne prijelaze u jezgri atoma radi ispitivanja PPI-a. Oni također razmatraju mogućnost ne-Paulijevih raspada u stabilnim

jezgrama kroz β^- β^+ , raspade neutrona (protona) izravno u protonsku (neutronsku) ljusku: vjerojatnost narušenja je dana: $\beta^2/2 < 2 \cdot 10^{-26}$. Prateći glavni koncept eksperimenta Ramberg-a i Snow-a te nadogradnje istoga, 2006. godine u LNGS podzemnom laboratoriju u Gran Sasso u Italiji uspostavljena je znatno poboljšana verzija eksperimenta, nazvana VIP (eng.violation of Pauli principle,narušenje Paulijevega principa). VIP je značajno poboljšana od eksperimenta Ramberg-a i Snow-a korištenjem (CCD-ovih) detektora rendgenske rezolucije visoke razlučivosti s velikim područjem i visokom intrinzičnom učinkovitošću. U izvornom VIP postavljanju, CCD su postavljeni oko čistog bakrenog cilindra; X-zrake emitirane iz cilindra izmjerene su bez i sa strujom do 40 A. Kozmička pozadina u LNGS laboratoriju snažno je potisnuta i detektor je također bio okružen masivnom olovnom zaštitom. Nakon 4 godine sakupljanja podataka VIP je postavio novi limit vjerojatnosti narušenja PPI-a: $\beta^2/2 < 4.7 \cdot 10^{-29}$. Da bi dodatno povećali osjetljivost samog eksperimentalnog postava umjesto CCD-ovih detektora uveli su SDD detektore. Izgradnja VIP2 eksperimentalnog okruženja započela je oko 2011. godine te je 2016. godine završena. Laboratorij VIP2 eksperimenta se nalazi u podzemnom LNGS(Laboratori Nazionali del Gran Sasso) laboratoriju. Test eksperimentalnog programa je u prva dva mjeseca mjerenja postigao veliki napredak u 2017. godini za moguće narušenje PPI-a poboljšanjem gornje granice vjerojatnosti narušenja koju je postavio VIP. S planiranim trogodišnjim trajanjem snimanja spektara očekuje se poboljšanje od dva reda veličine u odnosu na prethodni VIP limit. VIP2 je 2018. godine postavio novu gornju granicu narušenja PPI-a koju možemo vidjeti na slici 6.2 zajedno s faktorima narušenja od RS-a do ciljanog postignuća VIP2 kolaboracije 2020. godine.



Slika 6.2: Nakon 180 dana snimanja 2018. godine dobivena je nova gornja vjerojatnost narušenja paulijevog principa isključenja koja iznosi: $\beta^2/2 < 1.87 \cdot 10^{-29}$. Cilj prikupljanja podataka sljedeće tri godine je postići faktor vjerojatnosti za dva reda veličine manji. Preuzeto iz [25]

7 Ispitivanje narušenja Paulijeva principa isključenja eksperimentom na Fizičkom odsjeku

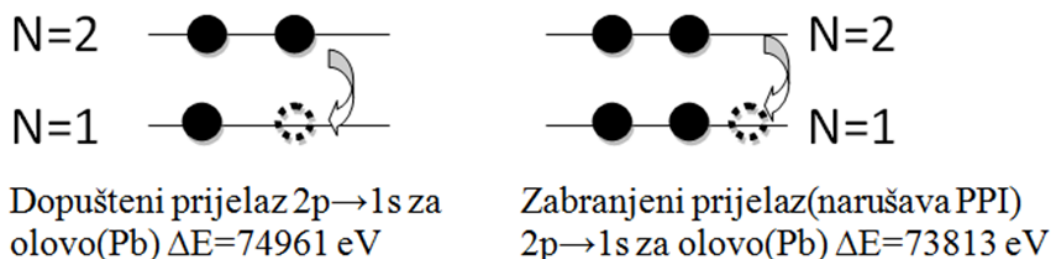
7.1 Opis eksperimenta

U provedenom eksperimentu napravili smo probno mjerenje spektra olovne pločice sa i bez električne struje koja teče kroz nju. Također, odredili smo gornju granicu vremena snimanja spektra kojim bismo dobili veći broj događaja koji predstavljaju narušenje PPI-a. Drugim riječima, ispitivali smo gornju granicu vremena za određivanje vjerojatnosti narušenja koja je određena faktorom $\beta^2/2$ koji pak slijedi iz Ignatiev Kuzmin modela narušenja gdje povezuje operatore stvaranja i poništenja u Fockovom prostoru. Zabranjene atomske prijelaze tražili smo u X -dijelu spektra olova, odnosno olovne pločice. Prvo smo HPGe detektorom snimili spektar olovne pločice (24 sata). Nakon snimljenog spektra na pločicu smo priključili izvor električne struje ($I = 49.5$ A) uvodeći na taj način nove fermione u sustav te smo ponovo snimili taj spektar (24 sati). Spektre sa i bez struje na kraju smo oduzeli i analizirali dio spektra oko $K\alpha_1$ i $K\alpha_2$ prijelaza. Bitno je napomenuti da je ovo bilo probno mjerenje i da kao takvo nije dalo osnovu za statističku obradu podataka, ali je dana kratka analiza i teorijsko predviđanje za buduće eksperimente koji bi koristili dani eksperimentalni

postav.

7.2 Teorijsko objašnjenje eksperimenta

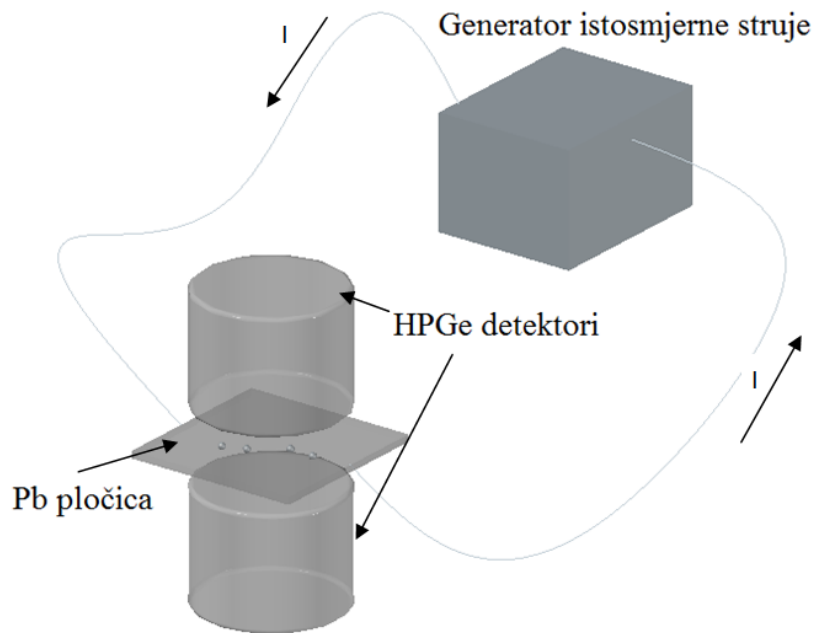
Najintuitivniji prikaz narušenja Paulijeva principa isključenja koji je istražen u eksperimentu dan je dan slici 7.1.



Slika 7.1: Shema dopuštenog i zabranjenog atomskog prijelaza zbog Paulijeva principa isključenja. Istraživanje narušenja u eksperimentu se svodi na detektiranje zabranjenih prijelaza u svrhu određivanja vjerojatnosti narušenja principa. Na gornjoj slici je prikazana energija zabranjene $K\alpha_1$ linije. Preuzeto iz [7]

Eksperimentalno je nemoguće zahtjevati da snimljeni spektar nekog kemijskog elementa s relativno konstantnim brojem čestica pokazuje narušenje PPI zato što bi samim time bila narušena stabilnost svakog atoma, a realnost prirode ipak nije takva. Dakle, elektroni u atomu su raspoređeni na način da prate Paulijev princip isključenja te se nalaze u minimumu energije (obzirom na osnovno stanje) jer je samim time entropija maksimalna. Dakle, očekivano je da za konstantan broj elektrona u atomu nema narušenja Paulijeva principa jer bi u tom slučaju svi elektroni „pali“, odnosno zauzeli osnovno $1s$ stanje. Dakle, jednom kada se simetrija sustava ostvari onda je prema Messiah-Greenberg [34] superizbornom pravilu vjerojatnost prijelaza između dva simetrična stanja nula. Dakle, ako želimo pronaći narušenje PPI i istovremeno izbjeći superizbornu pravilo u sustav moramo uvoditi nove (u smislu interakcije) elektrone. Jedni od prvih koji su se dosjetili uvođenje većeg broja elektrona u sustav bili su Ramberg i Snow [18] (RS). Shema eksperimentalnog postava je dana na slici 7.2 mi smo koristili jedan detektor dok shema s dva detektora predstavlja shemu simulacije (Geant4 [33]) u svrhu dobivanja geometrijskog faktora ali i za kasniji račun vremena trajanja budućih eksperimenata.

Odabrali smo olovnu pločicu zato što pruža veći otpor elektronima koji se kreću



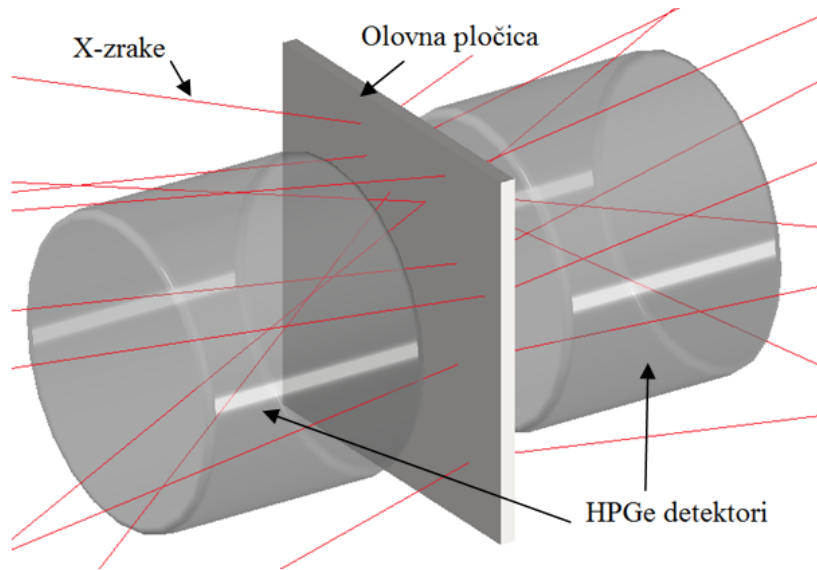
Slika 7.2: Konceptualna shema našeg eksperimenta. "Anomalni" elektroni u olovnoj pločici mogu biti uhvaćeni atomima olova, nakon čega slijedi emisija X -zraka. Opseg narušenja PPI može se procijeniti iz broja detektiranih rendgenskih zraka.

kroz nju i samim time dolazi do većeg broja raspršenja, odnosno većeg broja uhvata elektrona od strane atoma olova. To nam je povoljno zato što u tom slučaju bilježimo veći broj događaja, odnosno X -zraka. Ramberg i Snow su u svom eksperimentu [18] dali izraz za broj X - anomalnih zraka:

$$N_X \geq \frac{1}{2} \beta^2 N_{\text{new}} N_{\text{min(int)}} \cdot \frac{1}{10} \cdot (\text{geometrijski faktor}) \quad (7.1)$$

Faktor $\beta^2/2$ iz Ignatiev Kuzmin modela predstavlja vjerojatnost narušenja PPI. N_{new} je broj novih elektrona, odnosno elektrona koji nisu interagirali sa sistemom prije eksperimenta. Faktor $1/10$ predstavlja procijenjenu vjerojatnost uhvata elektrona (po raspršenju) od strane autora [18]. Geometrijski faktor je faktor koji u obzir uzima prostorni kut između olovne pločice i detektora (HPGe), također u obzir uzima apsorpciju X -zraka u samoj pločici. Geometrijski faktor u našem je eksperimentu dobiven Geant4 [33] alatom za fizikalne simulacije (slika 7.3) i on iznosi: 6.9% za 2 HPGe detektora i 3.45% za 1 HPGe detektor. U Geant4 simulaciji je generiran slučajni broj X zraka u pločici olova na energiji koju razmatramo. Te X -zrake su napustile pločicu također u slučajnom smjeru dok su neke zrake bile apsorbirane olovnom pločicom što je u simulaciji također uzeto u obzir. Detektor/i dakle, registriraju određen broj X -zraka koje razmatramo pa geometrijski faktor onda ulazi u broj detektiranih događaja

koji predstavljaju narušenje Paulijeva principa isključenja.



Slika 7.3: Slika prikazuje dva HPGe detektora i pripadajuće slučajne X -zrake u pločici olova za Geant4 [32] simulaciju.

Broj novih elektrona u RS eksperimentu ovisi o električnoj struji i vremenu za koje ta struja prolazi pločicom. Prema tome broj novih elektrona je dan:

$$N_{\text{new}} = \sum \frac{I \Delta t_{\text{mjerenje}}}{e} \quad (7.2)$$

Minimalan broj sudara pretpostavljen u RS eksperimentu je dan relacijom:

$$N_{\text{min(int)}} = \frac{L}{\mu}. \quad (7.3)$$

Dakle, ovo je minimalna granica broja raspršenja u elektrona s atomima olova u pločici kroz koju prolaze elektroni, odnosno električna struja. Kao što vidimo iz RS-a [18], minimalni broj sudara ovisi o duljini pločice i srednjem slobodnom putu elektrona. Kada se svi gornji izrazi uvrste u izraz 7.1 RS dolaze do sljedećeg izraza za broj X -zraka:

$$N_X \geq \frac{1}{20} \beta^2 \frac{L \sum I \Delta t_{\text{mjerenje}}}{e \mu} \cdot (\text{geometrijski faktor}). \quad (7.4)$$

U našem eksperimentu pratili smo upute autora [8] te smo, kao što je već rečeno, vjerojatnost elektronskog uhvata računali za razliku od RS-a [18] koji su procjenjeni faktor uzeli 1/10. Vjerojatnost uhvata elektrona po raspršenju smo dakle, dobili iz

kvocijenta udarnih presjeka σ_D/σ_e . Da bi procijenili vjerojatnost elektronskog uhvata koristimo, kao što smo već rekli modificiranu Kramerovu formulu, odnosno razmatramo radijativnu rekombinaciju (poglavlje 4) i koristimo dvije pretpostavke: pretpostavljamo da je njezin izraz za efektivan Z razumna aproksimacija za neutralni atom, odnosno:

$$Z_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(Z + Z_{\text{ion}}), \quad (7.5)$$

gdje Z_{ion} predstavlja ionizacijsko stanje atoma i jednako je nuli u našem eksperimentu jer je sustav građen od neutralnih atoma. Druga pretpostavka je: udarni presjek dobiven je sumiranjem kroz sva glavna (n) atomska stanja atoma, a ne kao za ionizirani atom sumiranjem po svim nepopunjenim atomskim stanjima. U našoj analizi mi smo, kao i autori [8], tražili samo ona nedopuštena stanja $2 \rightarrow 1$ tako da je udarni presjek dobiven sumiranjem po svim stanjima za koje vrijedi $n \geq 2$. Izraz za udarni presjek onda izgleda ovako:

$$\sigma_D = \sum_{n>2} \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^5}{n^3} \frac{Z_{\text{eff}}^4}{K(K + E_n)} \quad (7.6)$$

U izrazu [7.6] E_n je energija vezanja za n -ti nivo i je dana Bohrovom formulom:

$$E_n = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} \quad (7.7)$$

K predstavlja upadnu energija elektrona . U olovu (Pb) je $K = 9.47 \text{ eV}$ [31]. Kad uvrstimo u izraz (7.6) onda dobivamo sljedeći rezultat za olovo: $\sigma_D = 1.2 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$. Vjerojatnost raspršenja vodljivih elektrona predstavlja σ_e i njegova vrijednost se može pronaći u [8] te iznosi $\sigma_D = 1.3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$. Vjerojatnost elektronskog uhvata po raspršenju s atomom olova je dana kvocijentom udarnih presjeka i iznosi $P_{\text{cpt}} = 0.009$ što su pokazali autori [8] dok su za razliku od njih RS [18] pretpostavili faktor 1/10. Dakle, kada elektron biva uhvaćen od strane atoma, on prelazi u niža energetska stanja i eventualno emitira X -zraku čija je energetska vrijednost blizu specifičnog K_α prijelaza. Iako su i ostale X -zrake vjerojatne njihova je vrijednost veoma mala, pa se u našem eksperimentu neće analizirati. Prije spomenuta nekarakteristična X -zraka čija se energijska vrijednost nalazi relativno blizu specifične X -zrake ima u zabranjenom procesu manju energiju zato što je osnovno stanje već popunjeno dvama elektronima

pa oni ukupno daju veće zasjenjenje Coulombovskoj privlačnoj sili pa je i energija vezanja manja po tom stanju za treći elektron. Energije takvih prijelaza koje smo analizirali dane su u tablici 7.1. Uvrštavajući udarne presjeke u RS formulu dolazimo

ATOMSKI PRIJELAZI	Zabranjeni prijelazi [eV]	Dopušteni prijelazi [eV]
$2p_{3/2} \rightarrow 1s [K\alpha_1]$	73713	74961
$2p_{1/2} \rightarrow 1s [K\alpha_2]$	71652	72798
$3s \rightarrow 2p_{3/2}$	8920	
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	12241	12611
$3d_{5/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	10180	10448

Tablica 7.1: Prikazuje dopuštene atomske prijelaze i Paulijevom principu nedopuštene prijelaze u atomu olova (Pb). Preuzeto iz [8]

do sljedećega rezultata za broj zabranjenih X -zraka:

$$N_X \geq \frac{1}{2} \beta^2 \frac{L \sum I \Delta t_{\text{mjerenje}}}{e \mu} \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_e} \cdot (\text{geometrijski faktor}). \quad (7.8)$$

Vrijednosti energija emitiranih zabranjenih X -zraka izračunate su korištenjem Dirac-Hartree-Slater modela s Breitovom² interakcijom i QED³ korekcijama.

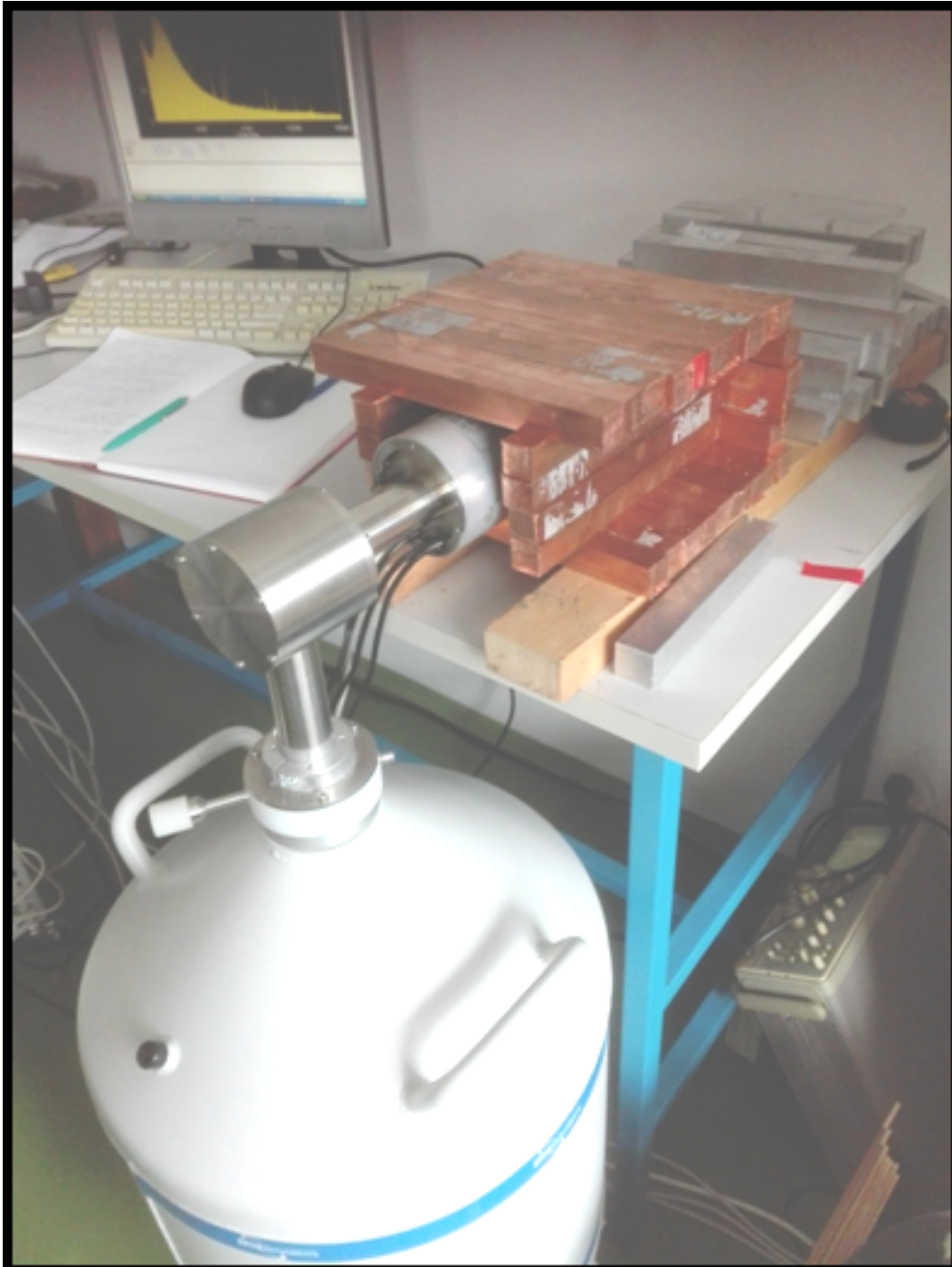
7.3 Eksperimentalni postav

Postav našeg eksperimentalnog dijela svodi se na isti kao i kod autora [18]. U prvom dijelu smo germanijskim detektorom (HPGe) (vidi potpoglavlje 6.3.1) snimali spektar olovne pločice bez električne struje kao što možemo vidjeti na slici 7.4.

Također na slici 7.4 vidi se da smo cijeli sistem držali u zatvorenom prostoru bakrenih blokova kako bi smanjili pozadinski šum. Nakon toga smo istim detektorom snimili spektar olovne pločice kad je kroz nju prolazila električna struja $I = 49,5$ A jer smo na taj način uveli nove elektrone u sustav očekujući narušenje Paulijeva principa isključenja. Korišteni detektor (HPGe) je poluvodički detektor i njegov rad se zasniva na pn spoju poluvodiča o kojima će biti riječ u sljedećem potpoglavlju. Tipični analogni HPGe detektorski spektroskopski sustav sastoji se od : HPGe-a detektora, izvora visokog napona, predpojačala, pojačala, analogno digitalnog pre-

²Breitova jednadžba je relativistička valna jednadžba izvedena od strane Gregory Breita 1929. na temelju Diracove jednadžbe, koja formalno opisuje dvije ili više masivnih spin- 1/2 čestica (elektroni, na primjer) koji su u elektromagnetskoj interakciji u prvom redu perturbativne teorije.

³Kvantna elektrodinamika.

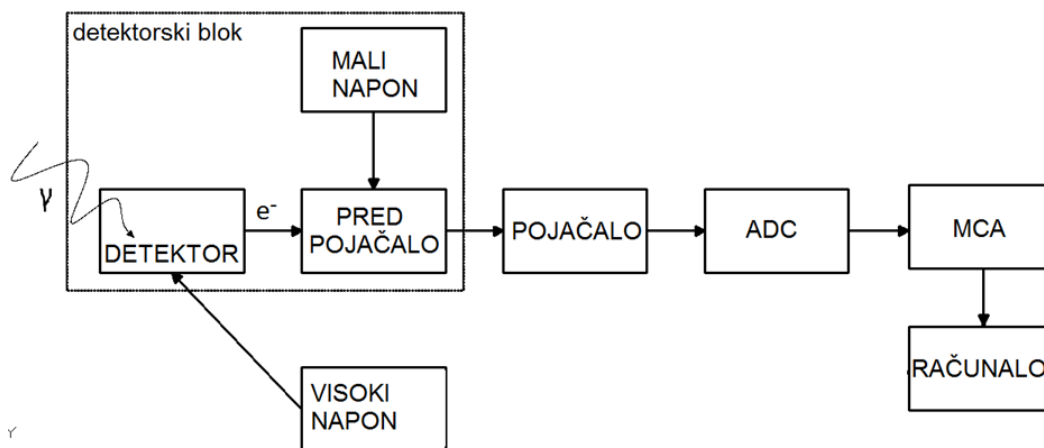


Slika 7.4: Eksperimentalni postav za mjerenje spektra olova.

tvarača ADC (eng. Analogue to Digital Converter) i višekanalnog analizatora MCA (eng. Multi-Channel Analyzer). Proces prikupljanja podataka, odnosno snimanja spektra možemo vidjeti na slici 7.5.

Proces formiranja spektra slijedi ovako:

1. Fotoni upadnoga zračenja interagiraju s kristalom detektora i pritom stvaraju elektron-šupljinske parove, odnosno električnu struju.



Slika 7.5: Blok shema detektorskog sustava u γ spektroskopiji.

2. Narinuti visoki napon u detektoru razdvaja elektrone i šupljine iz kristala.
3. Stvorena električna struja formira električni signal.
4. Veličina signala povećava se pomoću predpojačala.
5. Puls se dodatno pojačava i oblikuje pojačalom.
6. Intenzitet signala se pretvara u numeričku vrijednost pomoću analogno digitalnog pretvarača (ADC-a).
7. Numerička vrijednost se šalje u višekanalni analizator (MCA) pa potom u računalo.

Naboj stvoren unutar detektora nakon interakcije fotona s kristalom detektora, prikupljen je predpojačalom. Predpojačalo služi i za usklađivanje visoke impedancije detektora i niske impedancije koaksijalnih kabela s pojačalom, koje se može nalaziti na velikim udaljenostima od predpojačala. Visokonaponska jedinica napajanja napaja potreban visoki napon detektora i napaja ostale komponente sustava. Ove jedinice obično mogu napajati do 5000 V. Tipični HPGe detektori zahtijevaju oko 3000 V. Pojačalo služi za oblikovanje signala kao i za daljnje pojačanje signala. Pojačalo, osim što povećava veličinu signala ono i uklanja šumove i eventualne pomake s početnih vrijednosti signala. Višekanalni analizator je jedan od najvažnijih dijelova eksperimenta jer obavlja osnovne funkcije prikupljanja podataka, vizualizacije podataka i izrade konačnih rezultata u bilo kojem obliku. Višekanalni analizator (MCA) u osnovi se sastoji od analogno-digitalnog pretvarača (ADC), upravljačke logike, memorije i prikaza (eng. display). Na slici 7.6 možemo vidjeti redom(s lijeva na desno) dijelove

eksperimentalnog postava u našem eksperimentu: Multikanalni analizator (MAC), pojačalo i izvor visokog napona.



Slika 7.6: Glavni elektronički djelovi eksperimentanog postava; MCA, pojačalo i visoko detektorsko napajanje.

7.3.1 Poluvodički germanijski detektor posebno visoke čistoće (HPGe)

Kao što znamo u našem eksperimentu ključno je područje elektromagnetskog zračenja u X -dijelu spektra pa smo samim time uzeli najadekvatniji detektor a to je germanijski detektor posebno visoke čistoće ili skraćeno HPGe⁴ detektor. HPGe detektor pripada skupini poluvodičkih detektora jer glavnu komponentu detektora čini poluvodič , odnosno kristal germanija. Takvi detektori su se komercijalno prvi puta na tržištu pojavili šezdesetih godina prošlog stoljeća. Poluvodički detektori pružaju visoku razlučivost u energetske spektrima te su se kao takvi vrlo brzo adaptirali u eksperimentalnim metodama nuklearne fizike , odnosno gama spektrosko-

⁴eng. High Purity Germanium Detector

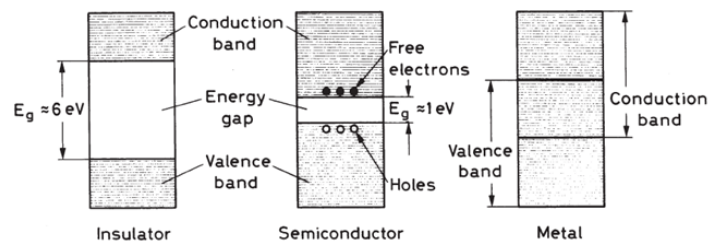
pije. Najčešće korišteni poluvodiči u detektorima su silicij i germanij. Osnovni način funkcioniranja poluvodičkih detektora sastoji se u tome što ionizirajuće zračenje koje želimo snimiti, odnosno zabilježiti usmjeravamo kroz poluvodički materijal u kojem takvo zračenje reagira sa pripadnim elektronima u poluvodiču i na taj način stvara parove elektrona i šupljina koji se tada pomoću električnog polja usmjeravaju i bilježe. Zbog velike gustoće poluvodičkog materijala takvi detektori imaju veliku zaustavnu snagu. Kompaktne su veličine i u principu imaju brzo vrijeme odziva. Izuzev silicijskog poluvodičkog detektora ostali poluvodički detektori u mjerenjima moraju biti priključeni na sustav hlađenja. U nastavku na slici (7.7) možemo vidjeti razne realizacije HPGe detektora.



Slika 7.7: Razne realizacije germanijskog detektora posebno visoke čistoće s pripadajućim sustavima za hlađenje. Preuzeto iz [20].

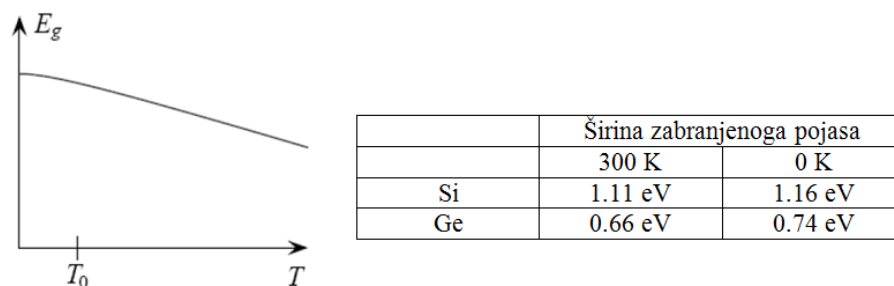
Glavno svojstvo detektora je poluvodički materijal (u našem slučaju germanij) pa ću u nastavku dati pregled fizikalne pozadine poluvodičkih materijala i njihovih spojeva jer oni čine okosnicu samog uređaja, odnosno detektora. Glavnu razliku između poluvodiča, izolatora i vodiča možemo vidjeti na slici 7.8 koja nam prikazuje energetske razine tih materijala. Zadnji pojas popunjen elektronima naziva se valentnim pojasom i od sljedećeg, koji može biti djelomično ili potpuno zaposjednut

elektronima i naziva se vodljivim pojasom, dijeli ga zabranjeni energetski pojas. O elektronskoj strukturi ovisi da li će materijal biti izolator, poluvodič ili vodič.



Slika 7.8: Razne realizacije germanijskog detektora posebno visoke čistoće s pripadajućim sustavima za hlađenje. Preuzeto iz [20].

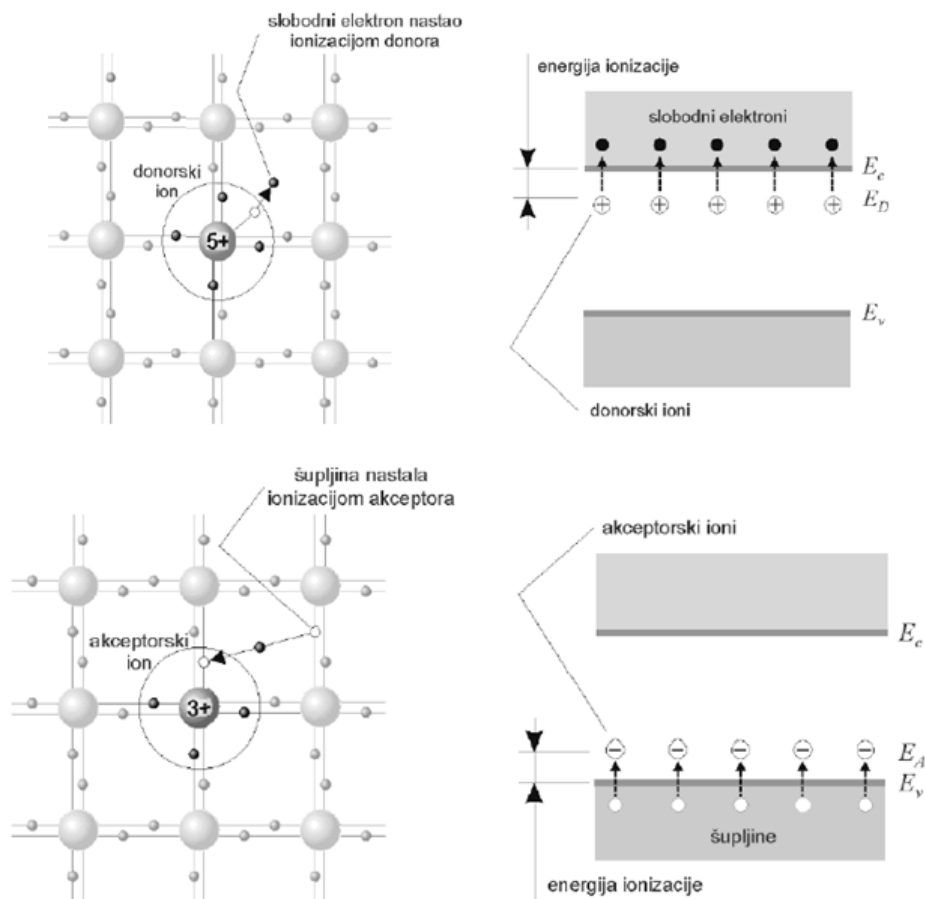
Iz gornjih dijagrama jasno može se zaključiti da je elektronska vodljivost najveća kod metala jer se valentna i vodljiva vrpca (razina) preklapaju pa samim time ima puno slobodnih elektrona koji su slabo vezani za atom pa se primjenom i najmanjeg električnog polja javlja transportna pojava naboja, odnosno električna struja. Kod izolatora je širina zabranjene vrpce puno veća jer atomi izolatora imaju tendenciju vezivanja u kovalentnu vezu koja je čvrsta veza. U poluvodičima atomi također formiraju kovalentnu vezu samo što ja puno slabija nego li veza u izolatorima. Ako je temperatura poluvodiča $T = 0 \text{ K}$ onda nema popunjenih stanja u vodljivoj vrpci za razliku od sobne temperature kada su ta stanja djelomično popunjena. Dakle, kod viših temperatura pojedini elektroni mogu posjedovati dovoljno energije da napuste valentnu vrpcu i „skoče“ u vodljivu u kojoj mogu činiti električnu struju ako se primjeni električno polje. Transportna svojstva uvelike ovise o širini zabranjenoga pojasa kako vidimo na slici 7.8 dok je sama širina zabranjenoga pojasa (za poluvodiče) ovisna o temperaturi prikazana na slici 7.9.



Slika 7.9: Ovisnost širine energetskog procjepa o temperaturi za tipične poluvodiče (Ge, Si). Ovisnost za neke druge tipove poluvodiča nije nužno kao na gornjoj slici. Preuzeto iz [35].

Pošto poluvodički detektori koriste svojstvo stvaranja elektron-šupljina para za

mjerenje zračenja onda vidimo da termalno pobuđenje elektron-šupljina para nije korisna u mjerenju, posebice za germanij jer je širina zabranjene vrpce kod njega vrlo mala (0.66 eV) pa je termalno pobuđenje više utjecajno. Da bi izbjegli utjecaj termalnih pobuda, poluvodiči se hlade tijekom mjerenja na oko 77 K. U praksi bi bilo idealno da na raspolaganju imamo potpuno čisti poluvodič, odnosno intrinzični poluvodič međutim to nije slučaj pa se iz tog razloga poluvodiči maju „viška“ elektrona ili šupljina. Obzirom na broj primjesa razlikujemo P i N tip poluvodiča ovisno da li u svom sastavu nakon dopiranja posjeduju više elektrona (N) ili šupljina (P) za razliku od intrinzičnog poluvodiča koji sadrži jednak broj elektrona i šupljina koje se jedino termalnim utjecajem mogu stvoriti. Sheme P i N tipa poluvodiča vidimo na slici 7.10. N tip poluvodiča je dopiran primjesama peterovalentnih atoma (N,



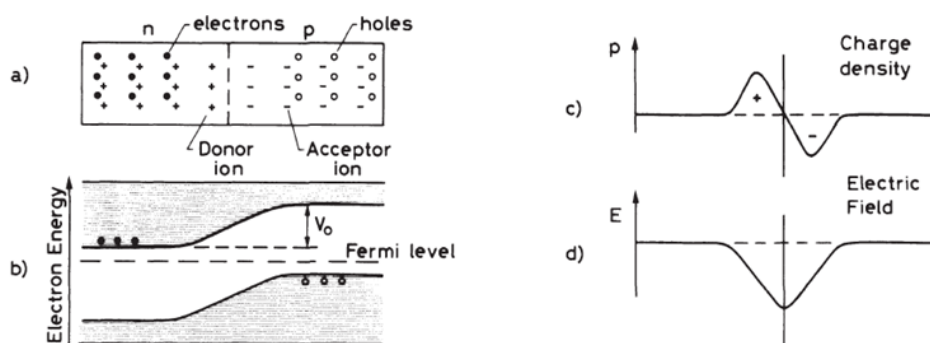
Slika 7.10: Na gornjoj slici vidimo N tip poluvodiča Dakle, njegovu dvodimenzionalnu projekciju s lijeve strane i energetska strukturu z desne strane. P tip poluvodiča je prikazan da donjoj slici. Preuzeto[Kokanović Ivan; skripta iz kolegija Poluvodiči.]

P , A_s , itd.) U dijagramu energetskih pojasa prisustvo donorskih nečistoća ima za posljedicu nastajanje dodatnog energetskog nivoa unutar zabranjenog pojasa kao što

vidimo na gornjoj slici. Taj nivo se naziva donorski nivo. Na $T = 0$ K taj nivo je popunjen elektronima. Zagrijavanjem poluvodiča ili dodatkom neke druge energije omogućava se elektronima koji potiču od atoma nečistoća da prijeđu u vodljivi pojas i slobodno se gibaju kroz kristal. Peterovalentne nečistoće ili primjese daju elektrone u vodljivi pojas, pa se zbog toga nazivaju donorske nečistoće. P tip poluvodiča nastaje kada se poluvodič onečisti ili dopira trovalentnim elementima (*B, Al, In, Ga...*itd.). Trovalentnoj nečistoći nedostaje jedan elektron da kompletira valentnu vezu. Ona se kompletira na taj način da je popuni valentni elektron iz neke susjedne veze, čime se proces nastavlja. Umjesto valentnih elektrona pogodnije je promatrati šupljine, koje predstavljaju pozitivni naboj i gibaju se u smjeru suprotnom od gibanja valentnih elektrona. Budući da trovalentne nečistoće kompletiraju valentne veze primajući elektrone iz valentnog pojasa, nazivaju se akceptorske nečistoće. Dakle, kada sumiramo vidimo da donorske nečistoće ili primjese dodaju jedan elektron po atomu primjese pa su nosioci naboja električne struje elektroni dok akceptorske primjese daju jednu šupljinu po atomu pa nosioci naboja električne struje čine šupljine.

Poluvodički detektori se, kao što smo rekli, zasnivaju na spoju P i N tipa poluvodiča, odnosno P-I-N spoju (između P i N tipa poluvodiča se nalazi intrinzični ili čisti poluvodič). Prema tome, možemo ugrubo reći da je HPGe detektor dioda. Pri samom stvaranju PN spoja, formira se jedno važno područje koje se zove osiromašeno područje ili neutralno područje (eng. depletion region) koje predstavlja aktivan volumen detektora, dakle, njegov najvažniji dio. Proces spajanja poluvodiča nije jednostavan i ne svodi se samo na fizički spoj dvaju poluvodiča, već su to vrlo komplicirane metode. Jedna od metoda ostvarenja PN spoja ostvarena je tako što se u kristalu poluvodiča, npr. germaniju dovedu nečistoće (primjese). One se mogu dovesti tako što se, npr. površina p-tipa kristala napari s n-tipom nečistoća koje difundiraju do određene dubine u p-tip kristala. Shemu takvog PN spoja možemo vidjeti an slici 7.11.

U procesu formiranja PN spoja dolazi do difundiranja elektrona s N strane poluvodiča na P stranu poluvodiča i obrnuto tako dugo dok se ne uspostavi ravnoteža zbog razlike u koncentraciji elektrona i šupljina u P i N poluvodiču. Dakle, šupljine s P strane poluvodiča „hvataju“ elektrona na N strani poluvodiča i obrnuto. Takve rekombinacije elektrona i šupljina uzrokuju nakupljanje pozitivnih iona na N strani

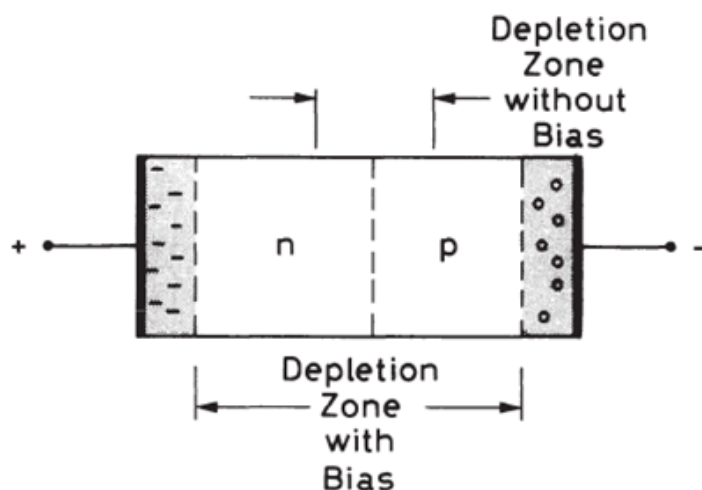


Slika 7.11: shema PN spoja, (b) energetska dijagram, (c) gustoća naboja, (d) električno polje. Preuzeto iz [19]

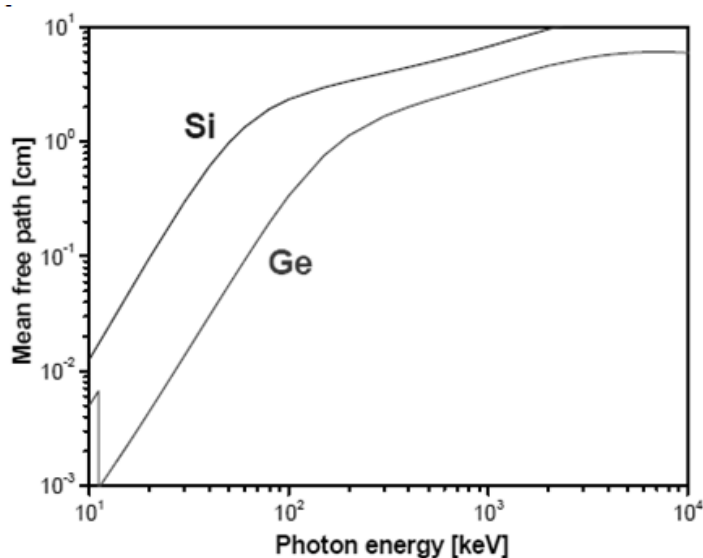
spoja (donorski ioni) i negativnih iona (akceptorski ioni) na P strani spoja zbog toga što su na početku N i P strana neutralni. U ravnotežnom stanju više nema difuzije elektrona i šupljina zato što se javlja električno polje u tom „osiromašenom području“ koje ju spriječava. Zbog postojanja električnog polja imamo i potencijal koji se još naziva i kontaktni potencijal. Osiromašeno područje koje se javlja između P i N strane uobičajno nije velike debljine (par desetaka mikrona), i kao što je spomenuto to područje predstavlja aktivan volumen u detektoru. To znači da ako, vanjska npr. X-zraka stvori u tom području elektron-šupljinu par onda zbog postojanja električnog polja u tom području elektroni privuku na pozitivnu stranu područja dok šupljine bivaju povučene na negativnu stranu područja. Na taj način se zapravo može zabilježiti signal, odnosno događaj. Logičan zahtjev koji se postavlja za detektor je što veći aktivan volumen, odnosno što šire osiromašeno područje jer se na taj način mogu detektirati čestice veće energije jer im treba „duži put zaustavljanja“. Da bi se ostvario taj zahtjev PN spoj se priključuje na vanjski reverzni napon koji za posljedicu daje šire osiromašeno područje (slika 7.12).

Osim reverznog napona koji proširuje osiromašeno područje, posebno se bira i materijal poluvodiča u detektoru koji ima veći linearni atenuacijski koeficijent zbog većeg atomskog broja (npr. $Z(Ge) > Z(Si)$). U takvom poluvodiču kao što vidimo na slici 7.13 je taj srednji slobodni put manji.

Primarna prednost poluvodičkih detektora je mala energija potrebna za stvaranje elektron-šupljina para. U tablici 7.2 možemo vidjeti energije stvaranja elektron-šupljinskih parova za najčešće korištene tipove poluvodiča *Ge* i *Si*. Velika prednost u prikupljanju podataka za poluvodčke detektore je linearnost između prikupljenog naboja (elektroni i šupljine) i energije upadne čestice/zrake. U našem eksperimentu



Slika 7.12: Usporedba širine osiromašenoga područja sa i bez napona. Preuzeto iz [19]



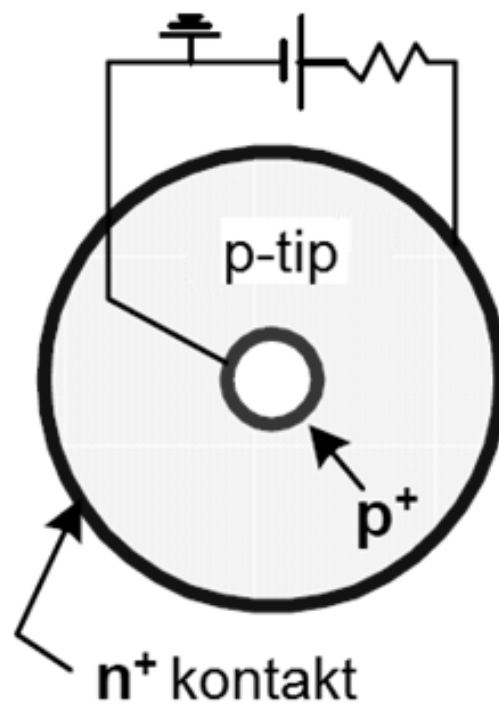
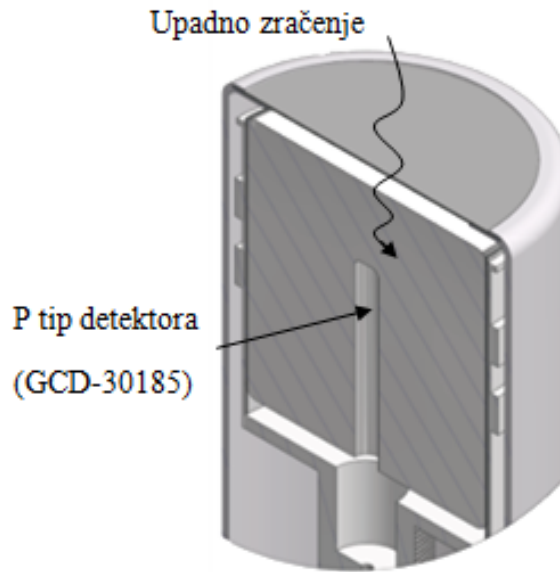
Slika 7.13: Ovisnost energije upadnog fotona u aktivno područje detektora o srednjem slobodnom putu. Preuzeto iz [11]

T[K]	Si	Ge
300 K	3.62 eV	-
77 K	3.81 eV	2.96 eV

Tablica 7.2: Opis tablice

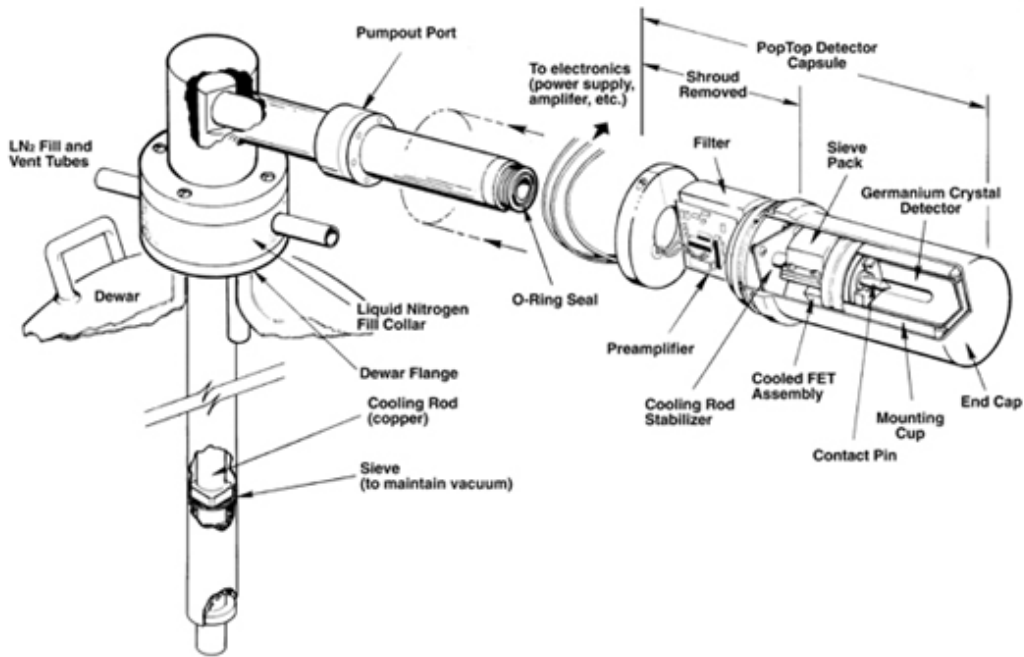
mi smo koristili HPGe detektor tip (GCD-30185) u koaksijalnoj realizaciji aktivnog volumena detektora kao što možemo vidjeti na slici 7.14. Koaksijalna realizacija pn spoja u detektoru se najčešće postiže tako što se na unutarnji plašt manjega cilindra detektora stavlja mikrosloj p^+ dok se na vanjski plašt cilindra detektora stavlja n^+ sloj i kao što možemo vidjeti na slici 7.14 (donja shema.)

Kao što sam već naveo germanijski tip detektora pri svom radu zahtjeva hlađenje.



Slika 7.14: 3D shema koaksijalnog detektora korištena u eksperimentu (gornja slika). Realizacija pn spoja u takvom detektoru. Preuzeto iz: [22] (gornja slika), [21] (donja slika).

U našem eksperimentu detektor smo hladili tekućim dušikom kroz sistem kriostata zato što je širina zabranjenog pojasa u germaniju relativno mala pa bi zbog termalnih pobuđenja (elektron-šupljina parova) bilo puno neželjenih događaja u , odnosno buke u prikupljenom signalu. Shemu susatava hlađenja s detektorom možemo vidjeti na slici 7.15.



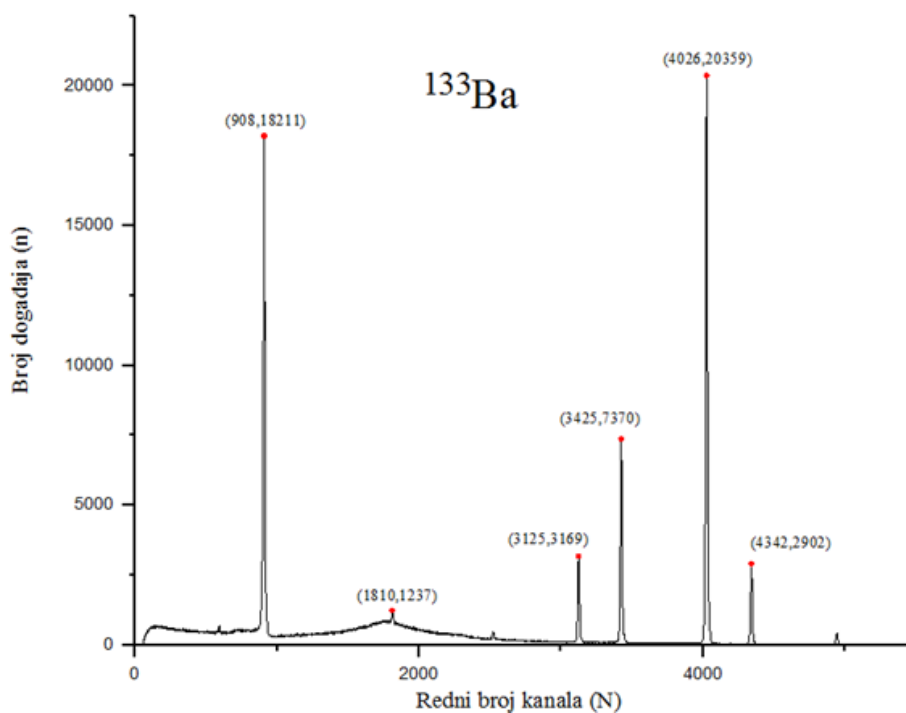
Slika 7.15: HPGe detektor u sklopu sustava hlađenja , odnosno kirostata. Preuzeto iz [28]

Germanijski kristal je zatvoren u vakuumski zatvorenu posudu (kriostat) kako bi se smanjila toplinska provodljivost između kristala i zraka. Osnovna funkcija kriostata je hlađenje detektora germanija do temperature LN_2 . Predpojačalo detektora germanija je obično uključeno kao dio kriostata. Budući da predpojačalo treba biti postavljeno što je moguće bliže, tako da se ukupni kapacitet može svesti na najmanju moguću mjeru, predpojačalo se instalira zajedno. Ulazni stupnjevi predpojačala se također hlade. Cijeli ohlađeni sklop održava se kriostatom pod visokim vakuumom za toplinsku izolaciju i zaštitu unutarnjih komponenti od onečišćenja.

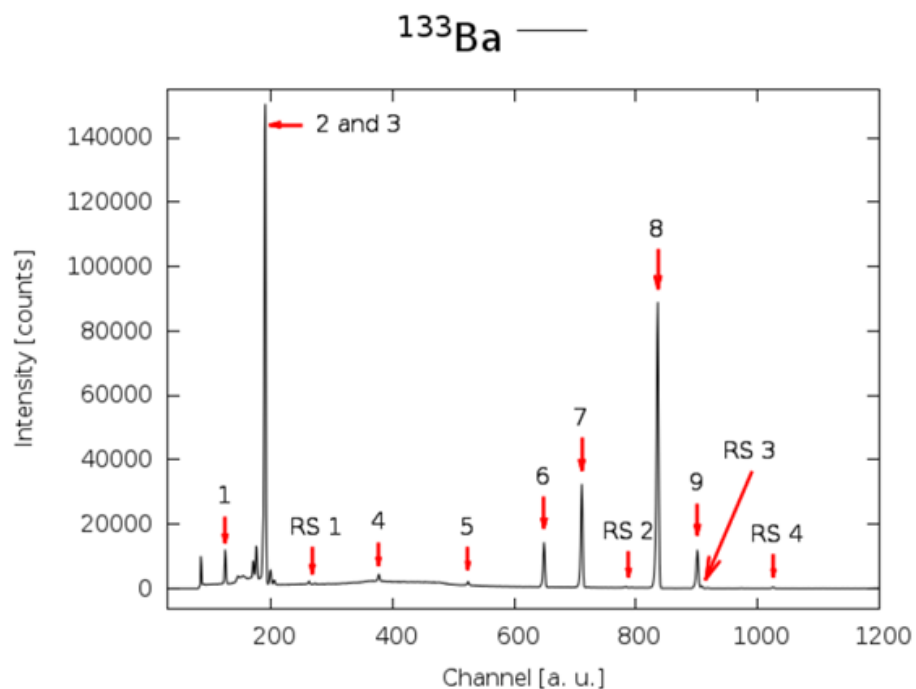
7.4 Rezultati mjerenja

U određivanju narušenja Paulijeva principa isključenja najprije smo HPGe detektorom mjerili spektar olovne pločice bez uvođenja novih fermiona u sustav, odnosno bez električne struje. Prvo smo snimili spektar kemijskog elementa barija (^{133}Ba) te smo na temelju snimljenoga spektra i tabličnih podataka za vrijednosti energija njegovih maksimuma kalibrirali mjerenja. Na prvom grafu (7.16) možemo vidjeti spektar našega mjerenja dok na drugom grafu 7.17 vidimo identičan spektar sa pripadajućim vrijednostima maksimuma. Dakle, drugi graf preuzet je iz arhive spektara nuklida s pripadajućim energetskim vrijednostima maksimuma, kako bismo mogli kalibrirati

snimljeni spektar.



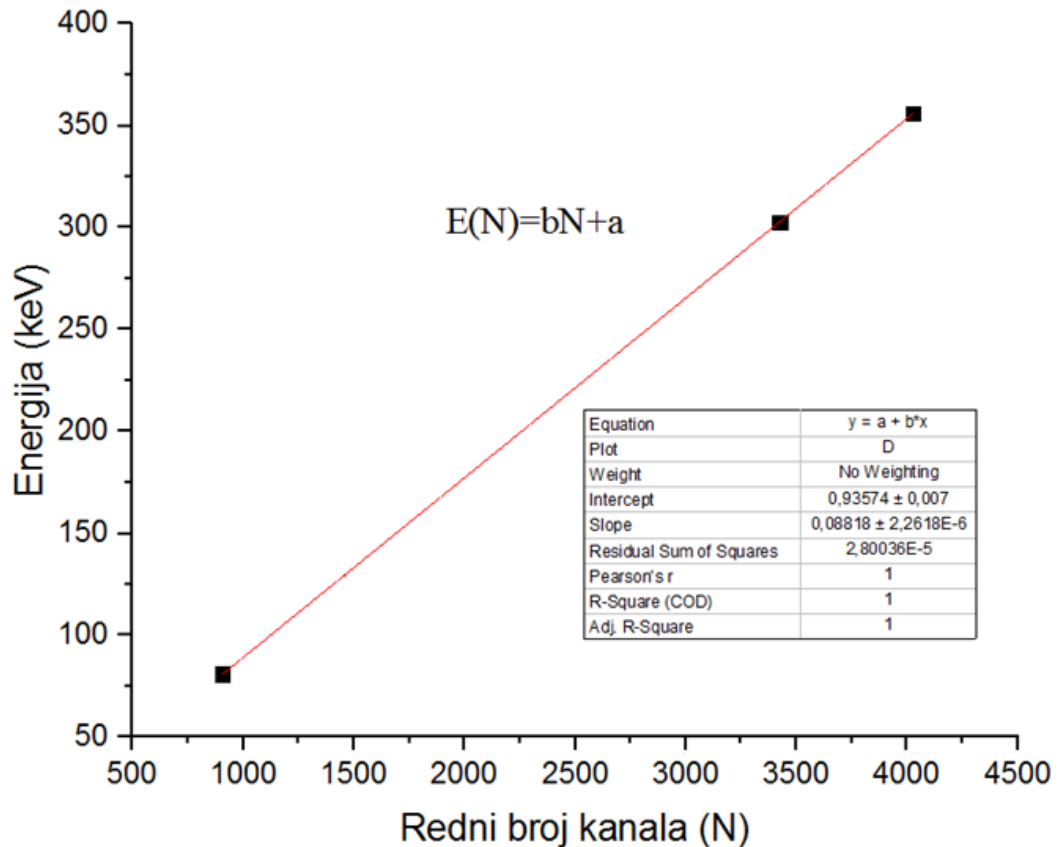
Slika 7.16: Spektar kemijskog elementa Barija (^{133}Ba) s pripadajućim maksimumima za koje je određen broj događaja i redni broj kanala.



Slika 7.17: Spektar kemijskog elementa Barija s pripadajućim vrijednostima energije za određene maksimume. Preuzeto iz [25]

Kalibriranje barijem napravili smo za oba spektra mjerenja, dakle, sa i bez struje a rezultati su pokazali da je funkcija kalibracije jednaka za oba spektra. Kalibraciju smo

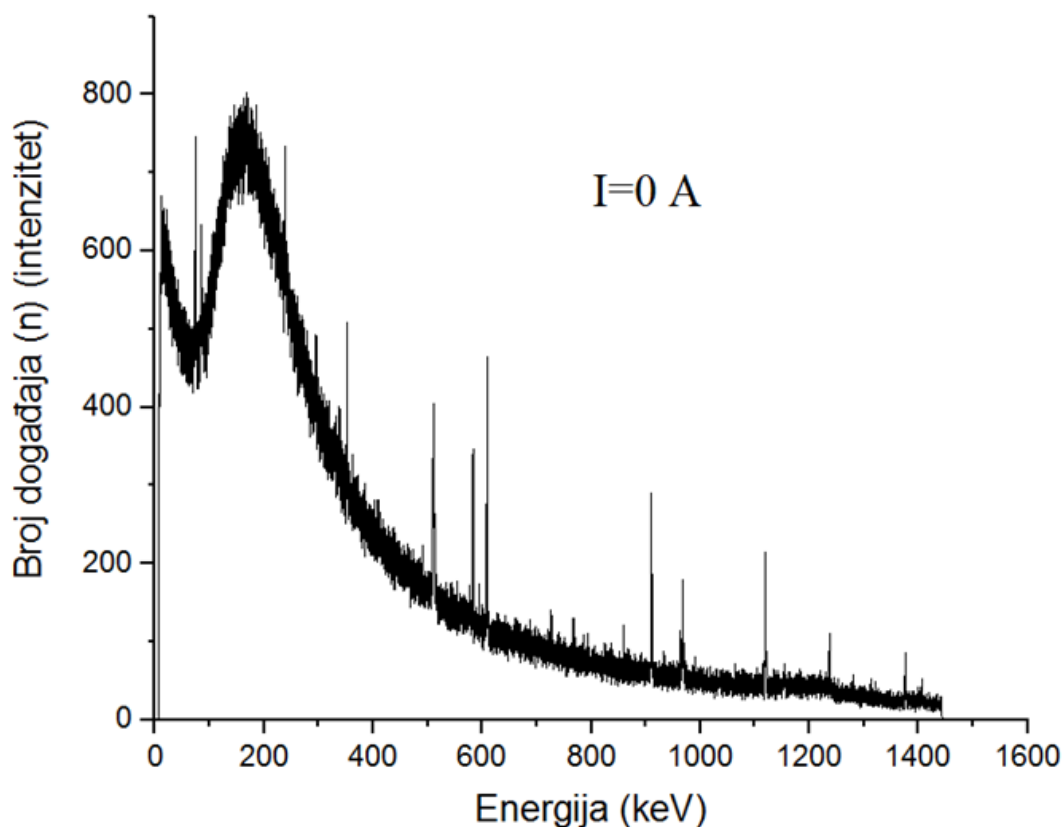
napravili tako što smo za poznate vrijednosti energije maksimuma i broja kanala na kojem se taj maksimum nalazi linearnom regresijom odredili kalibracijsku funkciju $E(N) = aN + b$. Faktor N predstavlja redni broj kanala. Kalibracijsku funkciju možemo vidjeti na grafu 7.18.



Slika 7.18: Kalibracijska funkcija dobivena linearnog regresijom.

Nakon što smo odredili kalibracijsku funkciju pomnožili smo je s rednim brojem kanala za svaki spektar olovne pločice i na taj način smo dobili energijske dijagrame za oba spektra zračenja. U našem spektru ^{133}Ba smo prepoznali maksimume (3, 6, 7) na grafu 7.17. Maksimum ispod broja 3 na grafu 7.12 također smo uključili u kalibraciju i kao takav nije poboljšao poziciju već poznatih prijelaza te ga nismo uzeli u daljnju analizu. Zbog velikog šuma nismo bili u stanju pronaći vjerojatnost narušenja ali cilje je postignut jer je probno mjerenje odrađeno. Spektar zračenja bez električne struje koji je bio snimljen u 24 h možemo vidjeti na grafu 7.19. Iako je snimljeni graf u rasponu energija od 0 keV do 1400 keV naše područje interesa je između 70 i 80 keV-a kao što vidimo na grafu 7.19. Područje od interesa u spektru olovne pločice bez električne struje ne prikazuje najzornije maksimume, odnosno specifične X- prijelaze, ali se uz pomoć gausijana došlo do poznatih vrijednosti karakterističnih prijelaza

$(K\alpha_1, K\alpha_2)$.

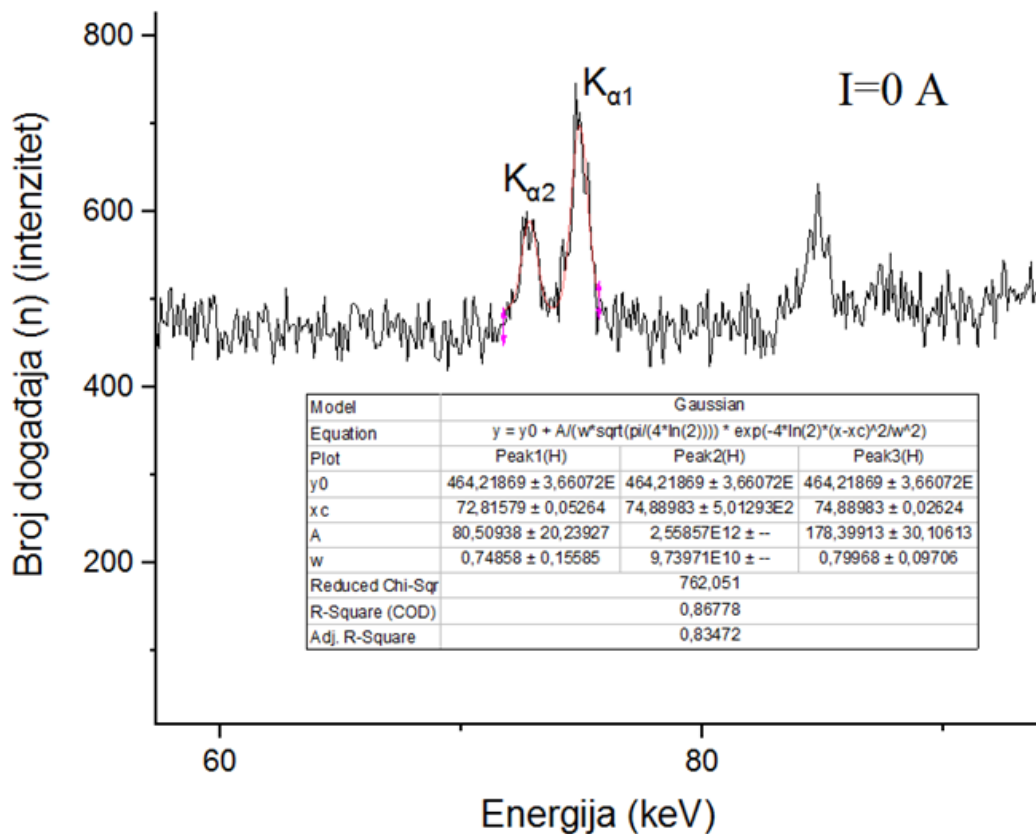


Slika 7.19: Spektar zračenja olovne pločice bez električne struje.

Na grafu 7.21 možemo vidjeti spektar zračenja olovne pločice (24 h) za vrijeme kada je bila priključena na izvor istosmjerne električne struje ($I = 49,5$ A).

Kao što je već rečeno, eventualno narušenje tražit ćemo u području interesa gdje se nalaze zabranjeni prijelazi nakon što oduzmemo spektre olovne pločice i to tako da spektar s električnom strujom oduzmemo od spektrom bez električne struje. Graf koji nam pokazuje razliku tih dvaju spektara možemo vidjeti na slici 7.23.

Na sljedećem grafu (slika 7.24) možemo vidjeti područje od interesa (70 – 80 keV-a) gdje bi se u slučaju dovoljnog broja događaja statistički mogao odrediti broj događaja koji signaliziraju narušenje Paulijeve principa isključenja. U našem istraživanju je provedeno ispitno ili probno mjerenje koje pokazuje da je za statističku obradu potrebno snimiti puno više događaja ali također je potrebno smanjiti pozadinski šum koji bitno utječe na statistiku daljnjeg mjerenja. Na grafu možemo vidjeti područje od interesa gdje bi se u budućim mjerenjima mogao dobiti broj narušenih prijelaza. Iz grafa je očito da za $K\alpha_2$ prijelaz postoji maksimum na spektru međutim zbog šumova on se ne može smatrati dovoljnom statističkom mjerom jer je i sam broj



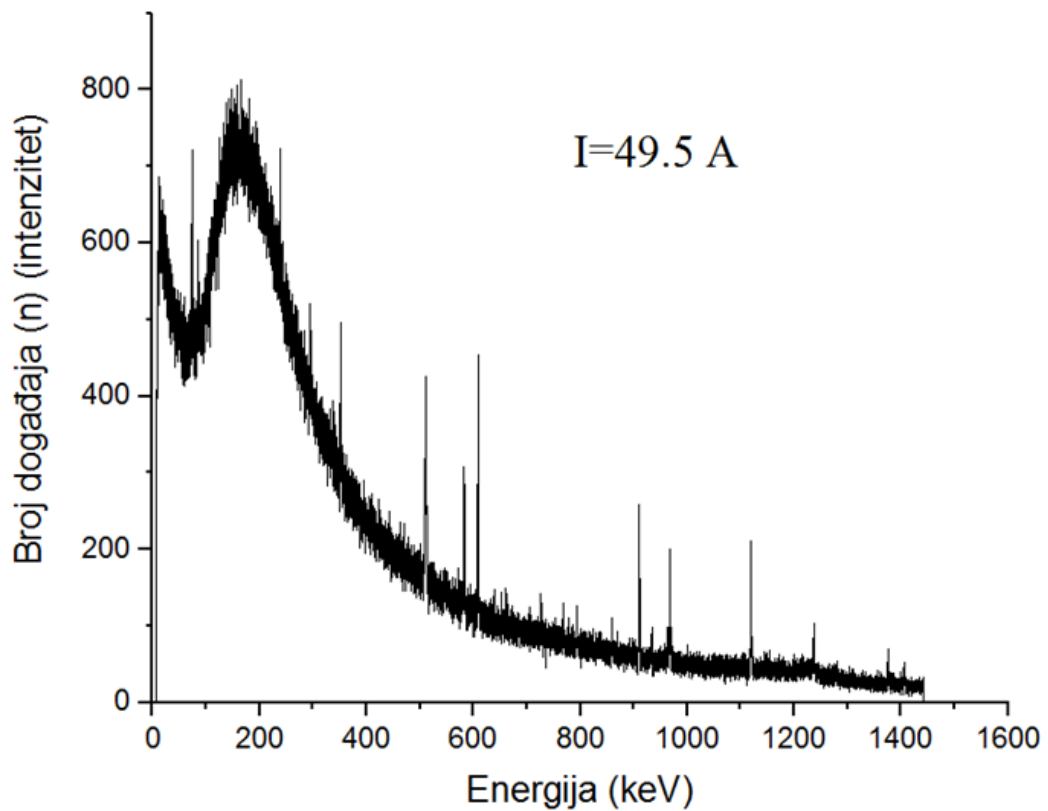
Slika 7.20: Spektar olovne pločice i pripadne karakteristične X-zrake. Područje interesa se nalazi ispod ($K\alpha_2$) prijelaza (71.652 keV) i između karakterističnih zraka (73.713 keV).

događaja veoma malen i iznosi svega 4 događaja.

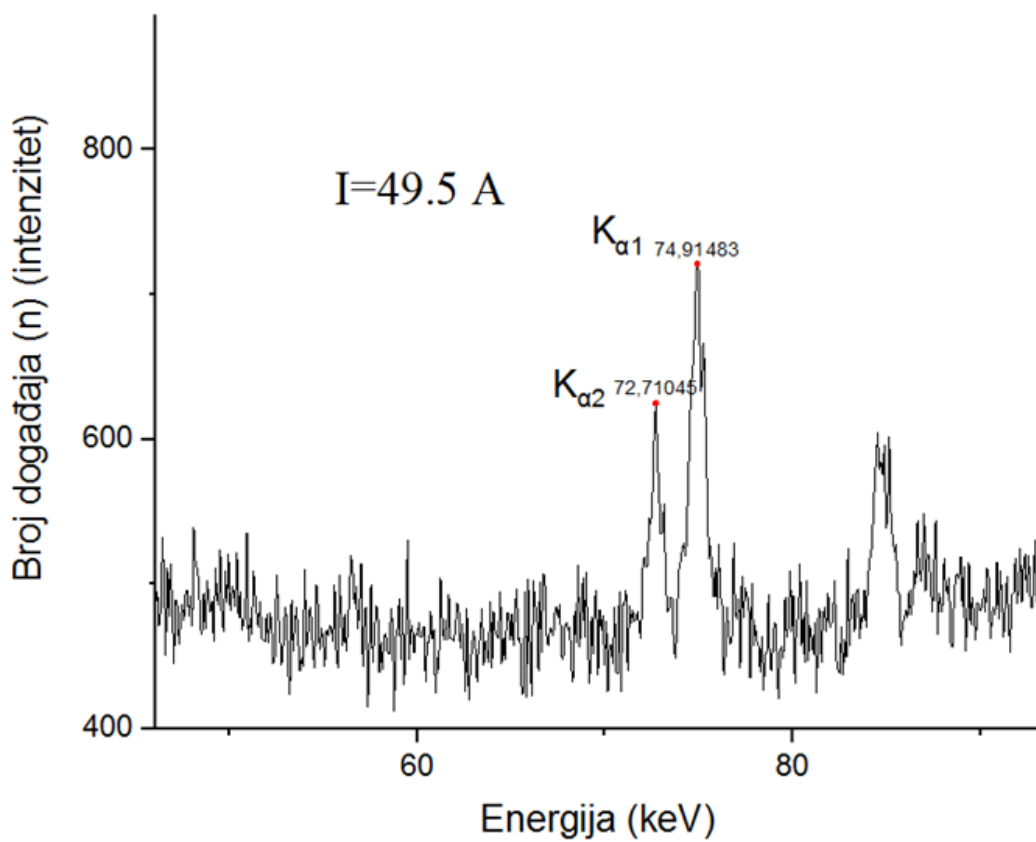
7.4.1 Analiza vremena trajanja budućeg eksperimenta s postojećim parametrima eksperimentalnog postava

U ovom potpoglavlju ću dati teorijsko predviđanje za vrijeme mjerenja u eksperimentu koji bi koristio postojeću eksperimentalnu strukturu. Dano vrijeme će se usporediti s rezultatima autora [8], odnosno vjerojatnosti narušenja koju su autori dobili $\beta^2/2 < 1.5 \cdot 10^{-27}$. U prvom dijelu ću dati teorijsko predviđanje za eksperimentalni postav s jednim HPGe detektorom dok ću u drugom dijelu dati predviđanje za vrijeme mjerenja u slučaju korištenja dva HPGe detektora. Za početak pogledajmo izraz koji nam govori o broju događaja koji narušavaju PPI:

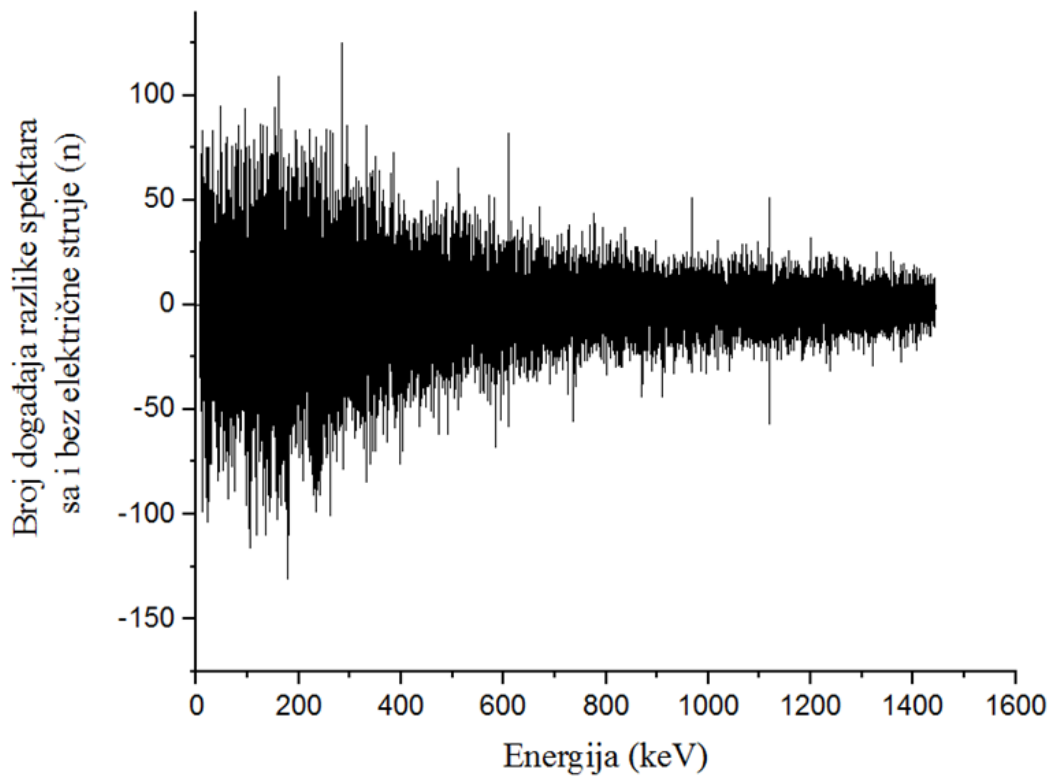
$$N_X \geq \frac{\beta^2}{2} \cdot \frac{L \sum I \Delta t_{\text{mjerenja}}}{e\mu} \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_e} \cdot (\text{geometrijski faktor}). \quad (7.9)$$



Slika 7.21: Spektar zračenja olovne sa električnom strujom ($I = 49.5 \text{ A}$).



Slika 7.22: Spektar zračenja olovne sa električnom strujom ($I = 49.5 \text{ A}$).



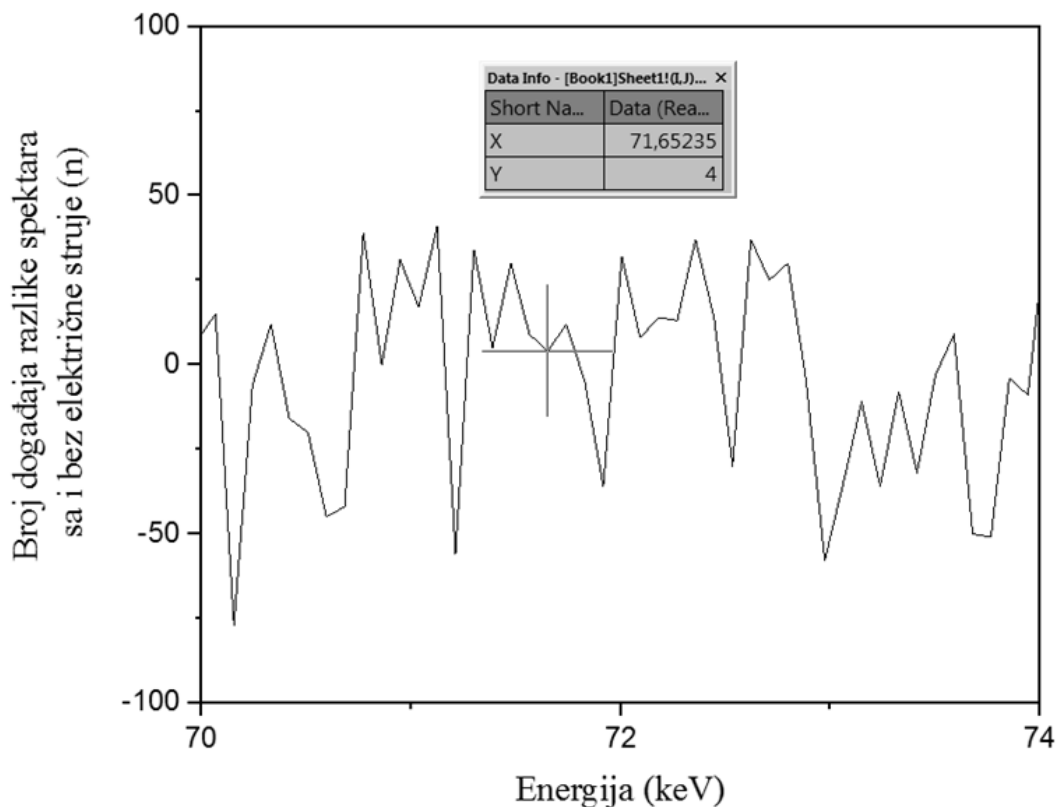
Slika 7.23: Graf prikazuje razliku broja događaja za spektar olovne pločice sa električnom strujom i bez električne struje.

Kada se iz gornje jednačbe izrazi vrijeme (vrijeme trajanja snimanja spektra pločice) dolazimo do sljedeće jednačbe:

$$\Delta t_{\text{mjerenje}} \geq \frac{e\mu N_X}{LI \cdot \text{g.f.} \cdot \frac{1}{2}\beta^2} \cdot \frac{\sigma_D}{\sigma_E}. \quad (7.10)$$

Podaci našeg eksperimentalnog postava za olovnu pločicu su sljedeći:

1. Duljina pločice $L = 7$ cm.
2. Duljina srednje slobodnog puta $\mu = 2.34 \cdot 10^{-7}$ cm.
3. Vjerojatnost elektronskog uhvata po raspršenju u olovnoj pločici $P_{cpt} = \frac{\sigma_D}{\sigma_e} = 0.009$.
4. Broj događaja narušenje u rasponu 3 standardne devijacije: $N_{3\sigma} = 2307$.
5. Jakost električne struje korištene u našem eksperimentu $I = 49.5$ A.
6. Geometrijski faktori za HPGe detektore: g.f. (1HPGe) = 0.0345, g.f. (2HPGe) = 0.069.



Slika 7.24: Energetsko područje razlike spektara koje bi u slučaju narušenja trebalo pokazivati izdvojeni maksimum na energiji zabranjenog X -prijelaza. U slučaju narušenja taj broj bi trebao biti dovoljno velik da ima statističku težinu kako bi se mogla provesti analiza.

7. Vjerojatnost narušenja PPI-a prema autoru (CITE 8): $\beta^2/2 = 1.5 \cdot 10^{-27}$.

Kada sve ove podatke uvrstimo 7.10 dolazimo do rezultata vremena potrebnoga za mjerenje spektra olovne pločice koristeći naš eksperimentalni postav i rezultate vjerojatnosti narušenja od autora[8]. Vrijeme mjerenja iznosi:

$$\Delta t_{\text{mjerenje}}(1\text{HPGe}) \approx 150 \text{ h.} \quad (7.11)$$

U slučaju korištenja dvaju detektora minimalno vrijeme potrebno za postizanje iste vjerojatnosti uočavanja narušenja:

$$\Delta t_{\text{mjerenje}}(2\text{HPGe}) \approx 75 \text{ h.} \quad (7.12)$$

Iz gornjih podataka vidimo da je u slučaju dva detektora vrijeme potrebno za datu vjerojatnost narušenja znatno manje. Ono što su autori [8] također preporučili u poboljšanoj verziji eksperimenta je spiralna olovna žica u kojoj bi bilo znatno više

raspršenja. Za usporedbu rezultata vremena mjerenja, autori [8] su koristeći također olovnu pločicu mjerili oko 254 h, ali uz manji geometrijski faktor u oba slučaja, Dakle, s jednim i dva HPGe detektora.

8 Zaključak

Iako Paulijev princip isključenja ima ogromne posljedice na razumijevanje fizike gdje njegovo narušenje ne postoji, njegov uzrok i dalje nema jednostavnog objašnjenja. Kao takav on se u svim fizikalnim procesima, odnosno sistemima pokazuje točnim pa je kao takav opće prihvaćen u znanstvenoj zajednici bez nekog posebnog objašnjenja. S obzirom da se njegov uzrok još ne zna objasniti to ostavlja prostor eksperimentalnom istraživanju granica njegove valjanosti, odnosno eventualnog narušenja. UCilj našeg eksperimenta bio je baš taj, pronaći eventualno narušenje Paulijeva principa. Iako takva istraživanja nisu nova, njihova povijest nije pretjerano duga i seže od četrdesetih godina prošloga stoljeća. Eksperimentalni fizičari su na razne načine i procese tražili takvo narušenje i nekako se najjednostavnije pokazalo traženje anomalnih X -zraka. Dakle, fokus je ostao na ishodištu Paulijeva principa, odnosno u atomskoj fizici. Mi smo koristili metodu RS-a [18] i mjerili takve anomalne X -zrake u olovnoj pločici kada smo u nju pomoću generatora istosmjerne struje uvodili nove elektrone koji bi u slučaju narušenja zauzeli nedozvoljeno kvantno stanje. U slučaju narušenja emitirala bi se X -zraka koja je energijski vrlo slična karakterističnoj X -zraci ($K\alpha_1$, $K\alpha_2$). Energijske vrijednosti tih zraka su izračunate od strane autora[8] gdje su raznim korekcijama došli do njihovih vrijednosti. Dakako, njihove energije su ispod energija karakterističnih X -zraka zato što je zasjenjenje jezgre veće kada se u osnovnom stanju već nalaze 2 elektrona. Atomska teorija koja bi objašnjavala takve procese ne postoji samim time što se nalazi izvan standardnog modela. Teorija koja na neki način daje dobar uvid u narušenje svodi se na korekciju postojeće teorije koja objašnjava elektronski uhvat od strane visoko ioniziranih atoma. Dakle, da bi se procijenili udarni presjeci po raspršenju za eventualni elektronski uhvat od strane atoma olova visoko ionizirani atom se zamjenjuje neutralnim atomom. Nerelativistička teorija koja objašnjava vjerojatnost narušenja je Ignatiev Kuzmin teorija. Ona kao takva nije prihvaćena kao teorija zato što u svojoj biti nema neke pretpostavke kao što su relativistički efekti itd. Međutim ta teorije/model se redovno koristi u prikazivanju rezultata narušenja. Njezina glavna pretpostavka je ta da postoji vjerojatnost za fermionsko dvočestično stanje. U njihovom modelu oni s operatorima stvaranja i poništenja povezuju 3 kvantna stanja: vakuumsko stanje (stanje bez čestica) $|0\rangle$, jednočestično stanje $|1\rangle$ i nestandardno (obzirom na fermione) dvočestično stanje $|2\rangle$.

Faktor vjerojatnosti narušenja se onda povezuje kroz jednadžu RS-a , odnosno kroz procjenu broja X -zraka koje daju potpis narušenja. Broj tih zraka je proporcionalan broju (atom olova-novi elektron) interakcija, broju novih elektrona u sustavu, vjerojatnosti narušenja $\beta^2/2$, geometrijskom faktoru i vjerojatnosti elektronskog uhvata novog elektrona po raspršenju. Mi smo takve zabranjene X -zrake tražili pomoću HPGe detektora , odnosno snimili smo X -spektar olovne pločice sa i bez električne struje u trajanju mjerenja 24 h. Ta mjerenja su bila probna mjerenja i kao takva nisu poslužila u svrhu određivanja parametra narušenja, ali se dala teoretska predikcija kojom bi se danim eksperimentalnim postavom mogla osigurati minimalna vjerojatnost narušenja , odnosno broj anomalnih X -zraka koje bi bile jednake broju X -zraka u eksperimentu[8].

9 Metodički dio

9.1 Uvod

Bohrov model atoma pripada skupini najznačajnijih znanstvenih postignuća u modernoj fizici. Iako je taj model pogrešan iz današnje perspektive on učenicima predstavlja važan most iz klasične fizike na putu prema otkrivanju nove teorije odnosno kvantne teorije atoma. Bohr je do svog modela atoma došao tako što je promatrao linijske spektre zračenja pojedinih kemijskih elemenata te je obzirom na ideju Maxa Plancka, koji je uveo kvant energije u fiziku, odlučio isto primjeniti na elektrone koristeći pri tome klasičan račun. Zato se Bohrov model atoma još zove i poluklasičan model atoma. Njegov model je osim za vodikov atom bio neupotrebljiv za ostale kemijske elemente kada su se promatrali njihovi linijski spektri. U to vrijeme 1926. godine, Werner Heisenberg je došao do principa neodređenosti, koji je također bio u suprotnosti Bohrovu modelu, jer je dao restrikciju na određenost mjerenja. Drugim riječima Heisenbergov princip neodređenosti je zabranio postojanje elektronskih orbitala po kojima elektron kruži i na kojima ga promatrač nesmetano nalazi. Također je otkriveno da elektroni pokazuju valna svojstva kada međusobno interferiraju, što je potisnulo Bohrove pretpostavke o elektronima kao klasičnim česticama. Iz valno-čestične prirode materije Erwin Schrödinger 1926. godine daje valnu teoriju materije koja opisuje ponašanje valova materije. Iako Schroedingerova jednadžba predstavlja determinističku jednadžbu gibanja, njezina je interpretacija statistička, drugim riječima integral kvadrata valne funkcije po dijelu prostora interpretira se kao vjerojatnost nalaženja čestice u tom dijelu prostora. Takvu statističku interpretaciju dao je 1928. godine Max Born. Valna funkcija se pokazala izvrsnim matematičkim alatom, jer se iz nje računaju gotovo sva svojstva atoma. U opisu kvantne prirode veliku važnost imaju i kvantni brojevi, koji su proizašli iz rješenja Schroedingerove valne jednadžbe. Kvantni brojevi koji proizlaze iz Schroedingerove teorije daju opću lokaciju ili adresu glavne podatke o elektronu u atomu. Rješavajući Schroedingerovu jednadžbu dobivaju se tri kvantna broja n , l i m_l . Međutim Wolfgang Pauli i Paul Dirac su pokazali da za potpuno razumijevanje elektronske strukture kemijskih elemenata treba dodati i četvrti kvantni broj, koji predstavlja dodatni stupanj kvantne slobode. Zaokruživši cijelu priču, W. Pauli dodaje restrikciju na kvantne brojeve na način da dva ili više elektrona ne mogu imati identične sve kvantne brojeve, što se

kasnije nazvalo Paulijevim principom isključenja.

Razvoj modela atoma je nezaobilazna tema iz fizike u četvrtom razredu srednje škole. Učenicima se daje povijesni pregled stvaranja modela te se daje poseban osvrt na Bohrov model atoma i njegov prijelaz na kvantno mehanički model atoma. Tema razvoja modela atoma pripada tzv. modernoj fizici i kao takva zahtijeva dublje razmišljanje pri samom shvaćanju ali i tumačenju kvantne teorije. Većina tema koje se obrađuju iz moderne fizike na neki način zaostaju u eksperimentalnom dijelu nastave zato što su eksperimenti većinom neizvedivi u razredu, neizvedivi u razredu, pa se stoga često u zamjenu koriste računalne simulacije. Uz takve teme moderne fizike potrebno je diskutirati puno širi aspekt njihova utjecaja na razvoj društva. To je vrlo važno jer daje širu sliku znanosti za one učenike koji se neće opredijeliti za prirodne ili srodne znanosti. Smatram da bi se glavne učeničke konceptualne poteškoće u vezi Bohrova modela i kvantno mehaničkog modela mogle javiti u doslovnom shvaćanju slike modela u kojem sve subatomske čestice predstavljamo kao „kuglice“ odnosno valove u kvantno mehaničkom modelu koji bi se mogli poistovjetiti s valovima iz svakodnevnoga života (valovi na vodi npr.) i općenito teškoj vizualizaciji kvantnomehaničkih veličina. Pri obradi tema moderne znanosti fizike u nastavi najviše bih koristio frontalni rad, koristeći pri tome power point prezentacije i dostupne računalne simulacije vezane uz navedenu temu jer, kao što sam već naveo, eksperimentalni dio većinom ne bi bio moguć zbog prevelike tehničke zahtjevnosti

9.2 Nastavna priprema iz fizike. Bohrov model atoma.

OBRAZOVNI ISHODI (OČEKIVANA UČENIČKA POSTIGNUĆA)

- Opisati Bohrov model atom.
- Povezati povijesne eksperimente s aktualnim teorijama.
- Iskazati Bohrove postulate.
- Navesti, protumačiti i primijeniti izraz za energiju vodikovog atoma
- Protumačiti pojam energijskih razina u atomu i nastanak linijskog spektra

UČENICI ĆE NA SATU RAZVIJATI SPOSOBNOSTI

- Logičkog razmišljanja.
- Znanstveno kritičkog mišljenja.
- Promatranja i iskazivanja opažanja.

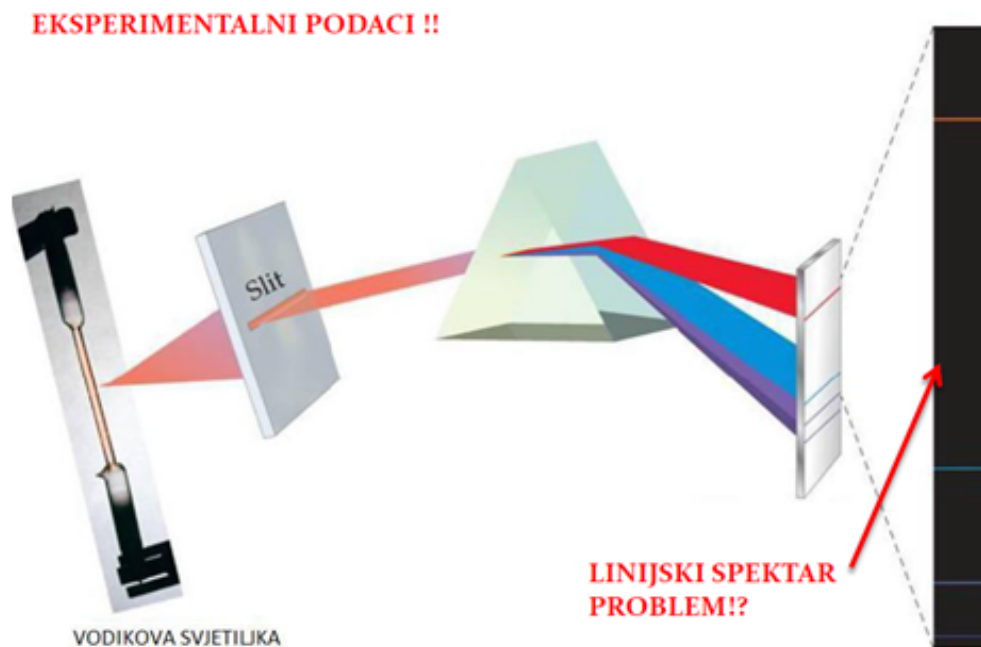
ODGOJNI ISHODI

- Poticati radoznalost povezivanjem realnih situacija sa teorijskim pretpostavkama koje smo iznijeli na satu.
- Razvijati uvažavanje tuđeg mišljenja
- Razvijati sposobnost rada u grupi.
- Razvijati i poticati diskusiju.

9.3 Tijek nastavnog sata

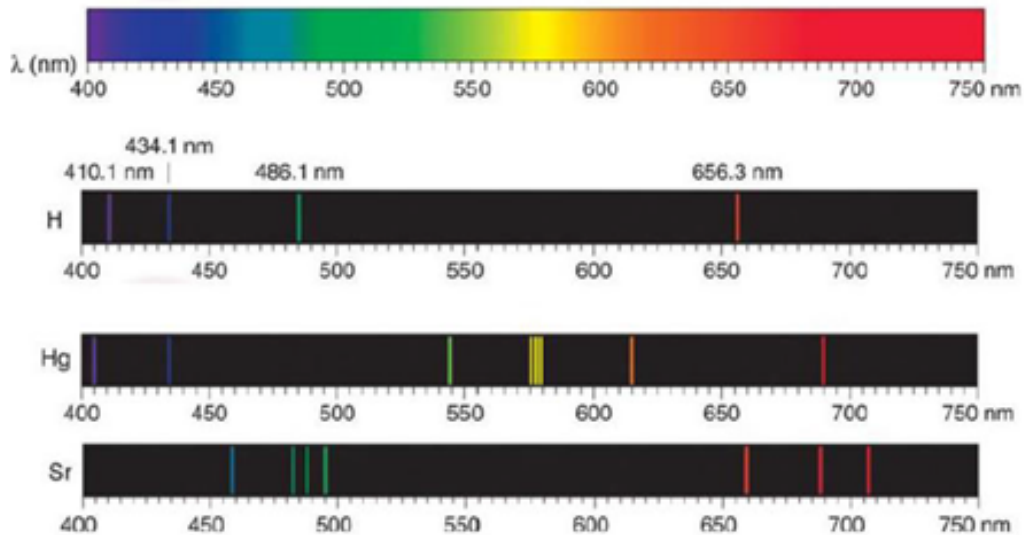
1. Uvodni dio:

Učenicima je od prijašnjeg nastavnog sata poznat Rutherfordov model atoma. Nastavnik pitanjima vezanim uz Rutherfordov model atoma navodi učenike na promišljanje o tom modelu. Nastojeći doći do glavnog problema Rutherfordova atoma nastavnik pokušava doći do pitanja stabilnosti atoma. Nastojeći predstaviti problem stabilnosti, nastavnik prisjeća učenike o ponašanju nabijenih čestica koje se ubrzavaju. Učenici zaključuju da bi se u Rutherfordovom modelu elektronima morala kontinuirano smanjivati energija zračenja i da bi naposljetku pali na jezgru atoma. Prije eksperimentalnih podataka koji pobijaju taj model, nastavnik prikuplja ideje, kakav bi u slučaju ispravnosti Rutherfordova modela, trebao izgledati spektar zračenja. Nakon konstatacije kontinuiranog spektra, nastavnik učenicima pokazuje eksperimentalne podatke koji pokazuju linijski spektar zračenja 9.1, uvodeći na taj način problem i nedostatnost Rutherfordova modela atoma.



Slika 9.1: Prikaz linijskog spektra zračenja pobuđenih plinova. Preuzeto iz [29]

Nastavnik s učenicima raspravlja o položaju karakterističnih linija spektra zračenja za vodik i prikuplja ideje o strukturi linijskog spektra. Također uspoređuje kontinuirani i linijski spektar zračenja.

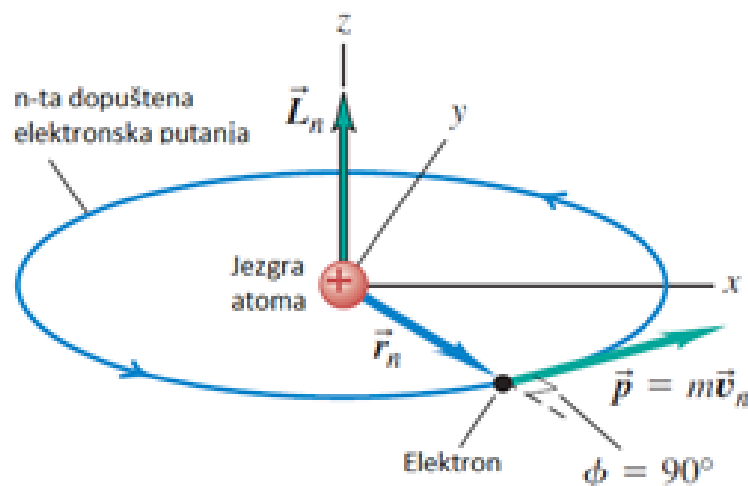


Slika 9.2: Usporedba kontinuiranog i linijskog spektra zračenja. Preuzeto iz [30]

2. Središnji dio: Kako modificirati model atoma da se riješi problem nestabilnosti atoma u Rutherfordovom modelu i objasne linijski spektir?

U središnjem dijelu sata, nastavnik učenike navodi na ideju diskretnih energija atoma. Nakon rasprave o diskretnim energijama, nastavnik učenicima daje povijesni kontekst u kojem je fizičar Max Planck uveo kvant energije zračenja. Nakon toga kroz raspravu najprije o stabilnosti atoma a zatim o linijskom spektru nastavnik učenike potiče na razmišljanje o boljem modelu koji bi zadovoljavao eksperimentalne podatke ali i teorijsko objašnjenje stabilnosti. Učenicima daje zadatak da svatko za sebe napiše ideje odnosno u grupama pokušaju opisati model atoma koji bi zadovoljavao riješio te očite nedostatke. Nakon samostalnog rada nastavnik pohvaljuje dobre ideje te ih zajedno s učenicima raspravlja da bi im na koncu dao model koji najbolje opisuje atom, odnosno predstavio Bohrov model atoma. Učenicima predstavlja Bohrove postulate i nakon toga kroz interaktivni izvod dolaze do matematičkih izraza za energiju atoma. Prvi Bohrov postulat: elektron kruži oko jezgra atoma po određenim, dopuštenim, putanjama (kružnicama) a da pri tome ne emitira energiju. To je stacionarno stanje. Najniža od tih putanja (kružnica) je osnovno stanje atoma.

Učenike se prisjeća na matematički opis kružnog gibanja tijela te na zakone očuvanja energije, kutne količine gibanja i količine gibanja. Uvodi se matematički izraz prvog Bohrovog postulata tako što se kvantizira kutna količina

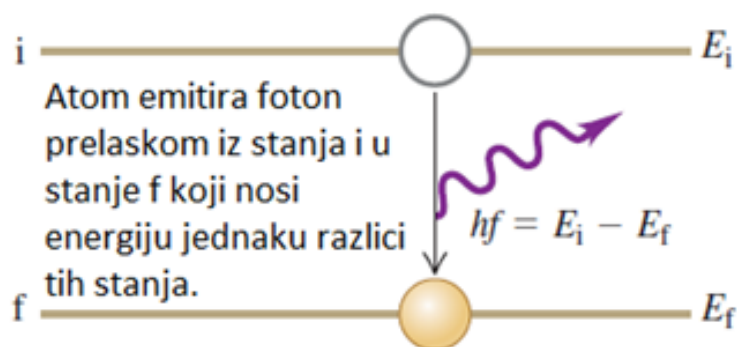


Slika 9.3: Usporedba kontinuiranog i linijskog spektra zračenja. Preuzeto iz [30]

gibanja elektrona u atomu. Pojašnjava se da Bohrov postulat govori kako postoje samo određene putanje u kojima se elektron može gibati i da pri tome ne zrači, odnosno gubi energiju. Učenici zapisuju izraze za iznos vektora kutne količine gibanja, a nakon toga izraz za kvantizaciju kutne količine gibanja:

$$L_n = mv_n r_n, \quad L_n = n \frac{h}{2\pi}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

Nakon toga izjednačavaju izraz za kutnu količinu gibanja s diskretnim vrijednostima količine gibanja koja je proporcionalna s $h/2\pi$. Apsorpcija ili emitiranje energije od strane atoma se događa samo prilikom kvantiziranih skokova elektrona s jedne stabilne putanje u drugu stabilnu putanju (drugi Bohrov postulat). Nakon uvođenja prvog postulata, uvodi se drugi te nastavnik objašnjava proces



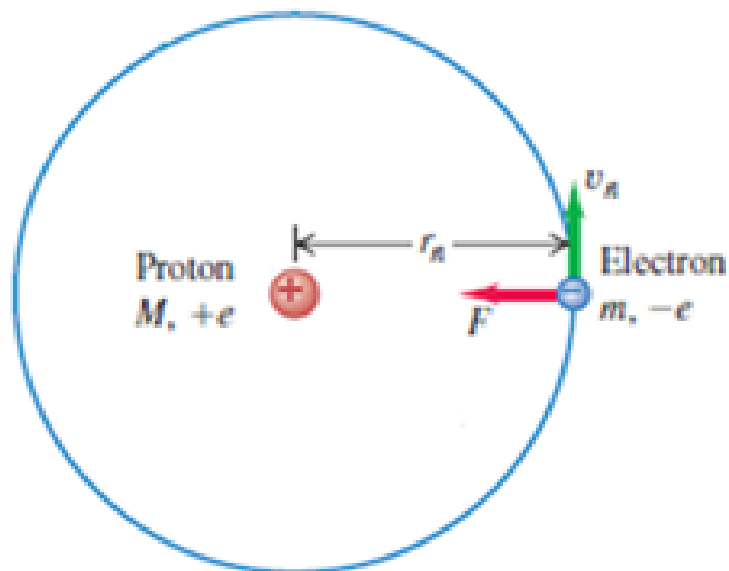
Slika 9.4: Shema mehanizma emitiranja elektromagnetskog zračenja. Preuzeto iz [30]

apsorpcije i emisije elektromagnetskog zračenja u atomu. Nastavnik zaključuje postulat s matematičkim izrazom koji povezuje energiju atomskih stanja s energijom izzračenoga fotona:

$$h\nu = E_2 - E_1. \quad (9.2)$$

KOLIKA JE ENERGIJA ELEKTRONA U ATOMU?

Nakon predstavljanja oba postulata nastavnik s učenicima kroz interaktivni izvod dolazi do izraza za energiju elektrona ovisno u kojoj stazi se taj elektron nalazi. Učenici skiciraju atomsku jezgru i elektron koji kruži oko jezgre na određenoj putanji (9.5). Učenici zaključuju da ulogu centripetalne sile na elek-



Slika 9.5: Shema Bohrovog modela atoma. Preuzeto iz [30]

tron ima Coulombova elektrostatska sila.

$$F_{\text{Coulomb}} = F_{\text{centripetalna}} \implies \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n} \quad (9.3)$$

Nakon što uvrste izraze 9.1 u 9.3 učenici dobivaju:

$$\begin{aligned} r_n &= \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2} \\ v_n &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{2nh}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Kolika je kinetička, a kolika električna potencijalna energija elektrona pri

kruženju? Kolika je ukupna energija elektrona? Učenici izvode sljedeće izraze:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{mv_n^2}{2} = \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{4n^2h^2} \\ E_p &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2} \\ \implies E &= -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{me^4}{8n^2h^2} \approx -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Što možemo zaključiti iz gornjeg izraza, kakva je energija elektrona u vodikovu atomu i o čemu ovisi? Energija elektrona je kvantizirana i negativna. Energija je obrnuto proporcionalna kvadratu broja staze elektrona.

Koliko energije trebamo uložiti da izbijemo elektron iz vodikova atoma? Trebamo uložiti energiju od 13.6 eV. Takvu energiju zovemo energijom ionizacije.

3. Završni dio

U završnom dijelu nastavnik ako mu preostaje dovoljno vremena predstavlja neke povijesne činjenice vezane uz Nilsa Bohra i Maxa Plancka s posebnim osvrtom na njihov posjet Hrvatskoj te učenici odgovaraju na konceptualna pitanja.

Ako s $n=1$ označimo energiju osnovnog stanja vodikova atoma, kod kojeg od navedenih prijelaza elektrona vodikova atoma, s jedne na drugu energijsku razinu, emitirani foton ima najveću frekvenciju?

- Iz stanja $n=2$ u stanje $n=1$.
- Iz stanja $n=4$ u stanje $n=3$.
- Iz stanja $n=6$ u stanje $n=5$.
- Iz stanja $n=5$ u stanje $n=3$.
- Iz stanja $n=3$ u stanje $n=2$.

9.4 Literatura korištena u metodičkom dijelu

1. Petar Kulišić i Mladen Pavlović; udžbenik za dvogodišnji i trogodišnji program fizike.
2. Jon Balchin; 100 znanstvenika koji su promijenili svijet.
3. University Physics with Modern Physics 1.
4. Vladimir Paar; udžbenik za 4. Rezred gimnazije, školska knjiga Zagreb, 2009.

Literatura

- [1] Wolfgang Pauli – Nobel Lecture. NobelPrize.org. Nobel Media AB 2019. Thu. 7 Feb 2019. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1945/pauli/lecture/>
- [2] The Feynman Lectures on Physics. http://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_04.html7.2.
- [3] Genaro Auletta, Mauro Fortunato, Giorgio Parisi; Quantum mechanics: into a modern perspective, Cambridge University Press New York, 2009.
- [4] Couteau, Christophe. "Spontaneous parametric down-conversion." *Contemporary Physics* 59.3 (2018): 291-304.
- [5] Povh, Bogdan, Klaus Rith, and Frank Zetsche. *Particles and nuclei*. Vol. 4. Berlin: Springer, 1995.
- [6] Demtröder, Wolfgang. *Atoms, Molecules, and Photons*. Germany, 2006.
- [7] Sperandio, Laura. "New experimental limit on the Pauli Exclusion Principle violation by electrons from the VIP experiment." (2008).
- [8] Elliott, S. R., LaRoque, B. H., Gehman, V. M., Kidd, M. F., & Chen, M. (2012). An improved limit on Pauli-exclusion-principle forbidden atomic transitions. *Foundations of Physics*, 42(8), 1015-1030.
- [9] Iva Božičević Mihalić; Visokorazlučiva spektroskopija rendgenskoga zračenja na ionskoj mikroprobi. Doktorski rad. Prirodoslovno matematički fakultet Zagreb, 2015.
- [10] Zschornack, Günter H. *Handbook of X-ray Data*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] L'Annunziata, Michael F., ed. *Handbook of radioactivity analysis*. Academic Press, 2012.
- [12] Podgoršak, Ervin B. "Introduction to Modern Physics." *Radiation Physics for Medical Physicists*. Springer, Cham, 2016. 1-78.

- [13] Khandaker, Mayeen Uddin. "High purity germanium detector in gamma-ray spectrometry." *International Journal of Fundamental Physical Sciences* 1.2 (2011): 42-46.
- [14] A. Yu. Ignatiev and V. A. Kuzmin: Is small violation of the Pauli principle possible? , ICTP preprint IC/87/13 (1987); V. N. Gavrin, A. Yu. Ignatiev and V. A. Kuzmin: Search for small violations of the Pauli principle, *Phys. Lett. B* 206 (1988) 343.
- [15] Govorkov, A. B. "Can the Pauli principle be deduced with local quantum field theory?." *Physics Letters A* 137.1-2 (1989): 7-10.
- [16] L. C. Biedenharn, P. Truini and H. van Dam: A remark on possible violations of the Pauli principle, *J. Phys. A* 22 (1989) L67.
- [17] B. A. Logan and A. Ljubicic: Validity of the Pauli exclusion principle for nucleons, *Phys. Rev. C* 20 (1979) 1957.
- [18] E. Ramberg e G. A. Snow: Experimental limit on a small violation of the Pauli principle, *Phys. Lett. B* 238 (1990) 438.
- [19] Leo, William R. *Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] Mirion Technologies. Germanium detectors. <https://www.mirion.com/products/germanium-detectors>
- [21] K. Debertin, R.G. Helmer, *Gamma- and X-ray Spectrometry with Semiconductor Detectors*, North- Holland, 1988.
- [22] A Parmentier et al 2018 *J. Phys.:* Conf. Ser. 1055 012010 .Absolute efficiency calibration of a coaxial HPGe detector for quantitative PGAA and T-PGAA.
- [23] F. Reines and H. W. Sobel: Test of the Pauli Exclusion Principle for Atomic Electrons, *Phys. Rev. Lett.* 32 (1974) 954.
- [24] J. Marton et all. Detector setup of the VIP2 Underground Experiment at LNGS. arXiv:1807.02182v1 9.2.

- [25] J. Marton et al. Detector setup of the VIP2 Underground Experiment at LNGS. arXiv:1807.02182v1 9.2.
- [26] Sunko, D. "Statistička fizika i termodinamika (27.10. 2016.)." (2017).
- [27] W. Pauli, Zs. Phys. 31, 765 (1925).
- [28] HPGe Detector Manufacturing, ORTEC, URL: <http://www.ortec-online.com/>
- [29] Krauskopf K.B. i Beiser A. (2006). The physical Universe, eleventh edition, McGraw Hill, Higher Education]
- [30] Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and Lewis Ford. University Physics Vol 2 (Chapters 21-37). Vol. 2. Pearson education, 2007.
- [31] Catalina Curceanu, Dmitry Budker, Edward J Hall, Johann Marton, and Edoardo Milotti. Putting the Pauli exclusion principle on trial, Posted. (2018). <https://cerncourier.com/putting-the-pauli-exclusion-principle-on-trial/> 10.1.
- [32] V. M. Novikov et al., Phys. Lett. B 240 (1990) 227.
- [33] <https://geant4.web.cern.ch/>
- [34] Messiah, A. M. L., and O. W. Greenberg. "Symmetrization postulate and its experimental foundation." Physical Review 136.1B (1964): B248.
- [35] Kokanović I. Skripta iz kolegija "Fizika poluvodiča".