

Dvočestične valne funkcije harmoničkog oscilatora

Rožman, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:754258>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2021-03-07**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Katarina Rožman

DVOČESTIČNE VALNE FUNKCIJE
HARMONIČKOG OSCILATORA

Diplomski rad

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Katarina Rožman

Diplomski rad

**Dvočestične valne funkcije
harmoničkog oscilatora**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Denis Sunko

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2019.

Zahvala

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Denisu Sunku koji je svojim znanstvenim i stručnim savjetima oblikovao ideju i pomogao mi u izradi ovog diplomskog rada te potpori tijekom izrade rada.

Također, zahvaljujem se obitelji i Slaveni koji su me podupirali tokom mog školovanja i poticali moju težnju k ostvarivanju viših ciljeva.

Na kraju se želim zahvaliti kolegama koji su mi provedeno vrijeme na fakultetu uljepšali svojim prisustvom i pomogli da to vrijeme smatram najljepšim dijelom svog života.

Sažetak

Polazeći sa stajališta funkcionalne analize, valne funkcije obično shvaćamo kao vektore u Hilbertovom prostoru kvantnih stanja. Kad je broj identičnih čestica veći od jedan, pojavi se specifična algebarska struktura, tako da je isti Hilbertov prostor graduirana algebra nad prstenom simetričnih polinoma (bozonskih pobuđenja).

Generatori algebre (vakuumi) su od prije poznati u Kartezijevoj bazi, a u ovom radu ih prevodimo u bazu dobrog zakretnog impulsa za poseban slučaj dvije čestice. Tada tri generatora (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) čine vektor osnovnog stanja, a četvrti $\Psi_4 = \Psi_1\Psi_2\Psi_3$ je pseudoskalar i nalazi se među dvostruko pobuđenim stanjima, kojih ima 28.

Kad se sva ta stanja napišu u obliku bozonskih pobuđenja vakuuma i u bazi dobrog zakretnog impulsa, otkrije se da je Ψ_4 komponenta određenog pobuđenog stanja zakretnog impulsa $l=3$ i projekcije $m = \pm 2$. Time se to stanje identificira kao glava vrpce pobuđenih stanja drugačije simetrije od vrpce koja nastaje pobuđivanjem osnovnog stanja.

Ključne riječi: harmonički oscilator, dvočestična stanja, algebra Hilbertovog prostora

Two-body wave functions of the harmonic oscillator

Abstract

From the point of view of functional analysis, wave functions are understood as vector in Hilbert's space of quantum states. When the number of identical particles is greater than one, there appears a specific algebraic structure, where the same Hilbert space is a graded algebra over the ring of symmetric polynomials (bosonic excitations).

Generators of the algebra (vacuums) are known in the Cartesian basis. In this work we translate them to the basis of good angular momentum for the specific case of two particles. Then three generators (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) make up the ground-state vector and the fourth $\Psi_4 = \Psi_1\Psi_2\Psi_3$ is a pseudoscalar found among doubly excited states, of which there are 28.

When all those states are written in the form of bosonic excitations of the vacuums and in the basis of good angular momentum, it is revealed that Ψ_4 is a component of a specific excited state of angular momentum $l=3$ and projection $m = \pm 2$. Therefore this state is identified as a band head of excited states with different symmetry than the band which is generated by excitations of the ground state.

Keywords: harmonic oscillator, two-particle states, Hilbert space

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Valna funkcija	2
2.1	Kvantni harmonijski oscilator	2
2.2	Zakretni impuls u kvantnoj fizici	4
3	Bargmannov prostor	7
4	Hilbertov prostor mnoštva čestica	10
5	Sustav dvije čestice	11
5.1	Bargmannov prostor dvije čestice	12
5.2	Prvo pobuđeno stanje	14
5.3	Drugo pobuđeno stanje	16
6	Zaključak	23
	Dodaci	24
A	Metodički dio	24
	Literatura	29

1 Uvod

Kvantna fizika grana je fizike koja objašnjava pojave u svijetu atomskih dimenzija. Zajedno s teorijom relativnosti čini modernu fiziku. Najjednostavniji kvantni sustav je kvantni harmonički oscilator koji je kvantnomehanička čestica kojoj je potencijalna energija razmjerna masi, kvadratu kružne frekvencije i kvadratu udaljenosti od ravnotežnog položaja. Ako u takvom sustavu promatramo dvije čestice bez interakcije, onda promatramo najjednostavniji mnogočestični sustav.

Do sada je sustav dva fermiona u oscilatorskom potencijalu bez interakcije puno puta opisan, prema tome je iznenađenje da se njihove valne funkcije mogu napisati na novi način. Novi način zapisivanja valne funkcije je

$$\sum_{i=1}^D \Phi_i \Psi_i, \quad D = (N!)^2 \text{ u tri dimenzije} \quad (1.1)$$

gdje su Φ_i simetrične funkcije, a antisimetrične funkcije Ψ_i generatori algebre Hilbertovog prostora koje zovemo oblici ili vakuumi. Detaljno o tome kako uvesti i koristiti novi zapis opisano je u literaturi [2]. Kako su tema diplomskog rada dvočestične valne funkcije, prema navedenoj literaturi postoje četiri oblika, naime $D = (2!)^2 = 4$.

Simetrične funkcije zajedno s generatorima algebre čine novi zapis kvantnih stanja. Valne funkcije se u njemu prikazuju faktorizirano, dakle kao umnožak funkcija. Zbog toga će nam biti koristan prikaz valnih funkcija u Bargmannovom prostoru, jer se u njemu kvantni brojevi oscilatorskih pobuđenja pojavljuju u eksponentu. Tako se množenje valnih funkcija svodi na zbrajanje kvantnih brojeva, $t^n t^m = t^{n+m}$, slično kao kod ravnih valova. Tada se struktura 1.1 očituje na najjednostavniji mogući način, kao faktorizacija polinoma. U našem će slučaju ti polinomi biti najviše trećeg stupnja, jer nećemo ići dalje od drugog pobuđenog dvočestičnog stanja.

2 Valna funkcija

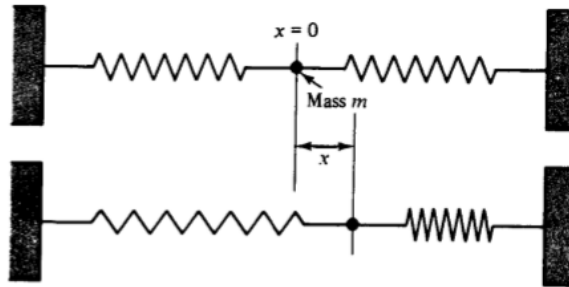
U ovom poglavlju objašnjeni su neki od osnovnih principa i ideja iz koje prozlati sam diplomski rad. U početku je opisana valna jednađba te kvantni harmonički oscilator kao temeljna ideja. Uz to, cijeli rad oslanja se na svojstva zakretnog impulsa.

Valna funkcija je veličina kojom potpuno opisujemo stanja i vremenske promjene kvantnog fizikalnog sustava. Danas je prihvaćena statistička interpretacija po kojoj umnožak valne funkcije ψ i njene kompleksno konjugirane funkcije ψ^* daje vjerojatnost nalaženja čestice na nekom položaju (x, y, z) , $P(x, y, z) = \psi(x, y, z)\psi^*(x, y, z) = |\psi(x, y, z)|^2$.

Napisana valna funkcija mora zadovoljiti rubne uvjete, biti jednoznačna i neprekidna, njena prva derivacija nužno je neprekidna dok druga konačna te integral vjerojatnosti mora biti konačan.

2.1 Kvantni harmonijski oscilator

Polazeći sa stajališta klasične fizike, konfiguracija harmoničkog oscilatora u jednodimenzionalnom slučaju prikazana je na slici 2.1.



Slika 2.1: Jednodimenzionalni harmonički oscilator te harmonički oscilator pomaknut iz ravnotežnog stanja za udaljenost x

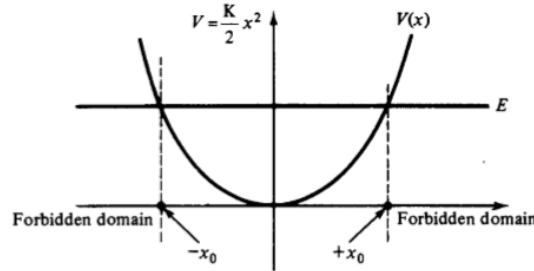
Jednađba gibanja čestice mase m dana je Hookeovim zakonom

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad (2.1)$$

gdje K označava konstantu opruge koja je vezana uz prirodnu frekvenciju danog oscilatora $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$. Poznavajući jednađbu gibanja čestice, na jednostavan način

dolazimo do izraza za energiju koji se sastoji od kinetičkog i potencijalnog dijela.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{K}{2}x^2 \quad (2.2)$$



Slika 2.2: Točke okretišta harmoničkog oscilatora $x = \pm x_0$

Kad grafički prikažemo energiju, slika 2.2, vidimo klasično dozvoljeno i nedozvoljeno područje. Klasično nedozvoljeno područje otvorilo je nova pitanja koja imaju odgovor unutar kvantne fizike.

U okvirima kvantne fizike postavljamo Schrödingerovu jednadžbu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{K}{2} x^2 \psi = E \psi. \quad (2.3)$$

Kad se uvrsti uvjet klasičnog nedozvoljenog područja, $x^2 > x_0^2$, dobiju se dva rješenja valne jednadžbe:

$$\psi \sim A \exp\left(\pm \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = A \exp\left(\pm \frac{k^2 x^2}{2}\right) \quad (2.4)$$

gdje je k karakteristični valni broj. Rastuće rješenje (+) krši uvjet normalizacije

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx < \infty$$

te preostaje jedno padajuća valna funkcija. Predznak valne funkcije mijenja se od oscilirajuće za $x^2 < x_0^2$ do padajuće za $x^2 > x_0^2$ pa su točke okretišta $x = \pm x_0$ fizikalno relevantne u kvantnoj fizici. Izraz 2.3 rješava se algebarskom metodom koja uključuje operatore. Za valnu funkciju $\psi = \psi(\mathbf{r})$, operator položaja je sam vektor položaja. Operator impulsa izražava se kao $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ i njegova je x komponenta

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.5)$$

Komponente y i z su jednake uz promjenu parcijalne derivacije zadane komponente. Komutator operatora položaja i impulsa je po komponentama

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (2.6)$$

Normirane vlastite funkcije harmonijskog oscilatora su

$$\psi_n(\eta) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} H_n(\eta), \quad \eta = \sqrt{\lambda}x, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \quad (2.7)$$

gdje su H_n Hermiteovi polinomi. Alternativno se Hamiltonijan može zapisati pomoću operatora

$$\hat{a} \equiv \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right) \quad (2.8)$$

Komutator operatora \hat{a} i \hat{a}^\dagger jednak je $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ i tada je Hamiltonijan

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

Ovdje su ukratko opisani pojmovi i jednadžbe kvantnog harmoničkog oscilatora, a detaljnije je to opisano u literaturi [6].

2.2 Zakretni impuls u kvantnoj fizici

U klasičnoj mehanici, zakretni impuls \vec{L} , definiran je : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ gdje je \vec{r} položaj čestice i \vec{p} količina gibanja čestice. Zakretni impuls aditivan je kao i količina gibanja te je ukupni zakretni impuls definiran kao suma svih zakretnih impulsa

$$\vec{L}_{total} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{L}^\alpha \quad (2.10)$$

Proširujemo definiciju zakretnog impulsa na kvantnu mehaniku tako da interpretiramo simbole kao operatore. Definiramo zakretni impuls čestice kao operator $\vec{L} \rightarrow \hat{L} \equiv \hat{r} \times \hat{p}$. Koristeći izraz 2.6 slijedi

$$[L_i, L_j] = -i\hbar e_{ijk} L_k \quad (2.11)$$

gdje je

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{za } (i, j, k) \text{ parne permutacije od } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{za } (i, j, k) \text{ neparne permutacije od } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Vektorski gledano, rezultat ima oblik: $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L}$.

Pretpostavimo sada uobičajeni kvantno-mehanički zapis koji uključuje Hilbertov prostor preko kompleksih brojeva sa promatranim Hermiteovim linearnim operatorima. Vektore Hilbertovog prostora označavamo sa $|\phi\rangle$, a vektore dualnog prostora sa $\langle\psi|$ te unutarnji produkt kao $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$.

Možemo tražiti komutacijske relacije za \mathbf{L} tako da pretvaramo problem u konačno dimenzionalni matrični svojstveno vrijednosni problem. Prvo promatramo operator L^2 gdje je

$$\mathbf{L}^2 \equiv L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (2.13)$$

te komutira s \mathbf{L} na način: $[\mathbf{L}^2, L_i] = 0$. To znači da su \mathbf{L}^2 i jedna od komponenti istovremeno dijagonalni, recimo \mathbf{L}^2 i L_3 .

$$\mathbf{L}^2 |L^{2'}, L'_3\rangle = L^{2'} |L^{2'}, L'_3\rangle \quad (2.14)$$

$$L_3 |L^{2'}, L'_3\rangle = L'_3 |L^{2'}, L'_3\rangle \quad (2.15)$$

gdje je $L^{2'}$ realan nenegativan broj te L'_3 realan broj.

Definiramo nehermitske operatore

$$L_{\pm} \equiv L_1 \pm iL_2, \quad L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp} \quad (2.16)$$

gdje je križ oznaka za Hermitsku konjugaciju te oni zadovoljavaju pravila:

$$[\mathbf{L}^2, L_{\pm}] = 0, \quad [L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = 2L_3 \quad (2.17)$$

Zbog 2.14 i 2.15 vrijedi

$$L_{\pm} |L^{2'}, L'_3\rangle \equiv |L^{2'}, L'_3 \pm 1\rangle \quad (2.18)$$

Koristeći komutacijska pravila, 2.17, nalazimo da vektor-stupac ("ket") $|L^{2'}, L'_3 + 1\rangle$,

ukoliko nije nula ima svojstvenu vrijednost:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2|\mathbf{L}^2, L'_3 + 1\rangle &= L^{2'}|\mathbf{L}^2, L'_3 + 1\rangle \\ L_3|\mathbf{L}^2, L'_3 + 1\rangle &= (L'_3 + 1)|\mathbf{L}^2, L'_3 + 1\rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

Slično $|\mathbf{L}^2, L'_3 - 1\rangle$, ako nije nula, ima svojstvene vrijednosti $L^{2'}$ i $L'_3 - 1$. Ovakvo ponašanje operatora naziva se u slučaju $+$ *operator podizanja* i označava s L_+ , a *operator spuštanja* L_- u slučaju $-$.

Proces se može ponavljati. Jedan očigledno stvara svojstvene "ket" dijelove koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti $L^{2'}$, a drugi L_3 svojstvene vrijednosti $L'_3 + k$ gdje je $k \in \mathbb{Z}$.

Proces dizanja mora biti konačan, a to vidimo iz

$$\langle \mathbf{L}^2, L'_3 + 1 | \mathbf{L}^2, L'_3 + 1 \rangle = \langle L^{2'}, L'_3 | L_- L_+ | L^{2'}, L'_3 \rangle = [L^{2'} - L'_3(L'_3 + 1)] \langle L^{2'}, L'_3 | L^{2'}, L'_3 \rangle \geq 0 \quad (2.20)$$

Kad bi se L'_3 mogao podizati beskonačno puta to bi bilo kontradiktorno činjenici da je norma vektora u Hilbertovom prostoru nenegativna. Dakle, za neki $L'_{3,max}$ mora vrijediti $L_+ |L^{2'}, L'_{3,max}\rangle = 0$, $|L^{2'}, L'_{3,max}\rangle \neq 0$ stoga je očito $L'_{3,max} = L$ te $L^{2'} = L(L + 1)$.

Isto tako, proces spuštanja mora biti konačan. Norma $|\mathbf{L}^2, L'_3 - 1\rangle$ dana je

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L}^2, L'_3 - 1 | \mathbf{L}^2, L'_3 - 1 \rangle &= \langle L(L + 1), L'_3 | L_+ L_- | L(L + 1), L'_3 \rangle \\ &= [L(L + 1) - L'_3(L'_3 - 1)] \langle L(L + 1), L'_3 | L(L + 1), L'_3 \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Iz istog razloga kao i kod procesa podizanja, postoji $L'_{3,min}$ takav da $L_- |L^{2'}, L'_{3,min}\rangle = 0$, $|L^{2'}, L'_{3,min}\rangle \neq 0$ stoga $L^{2'} = L'_{3,min}(L'_{3,min} - 1)$ što je konzistentno sa $L'_{3,min} = -L$.

Uspoređivanjem 2.20 i 2.21 možemo zaključiti da kad operator spuštanja djeluje na normiranu valnu funkciju $|LM\rangle$, on je množi faktorom $\sqrt{(L + M)(L - M + 1)}$, a operator podizanja faktorom $\sqrt{(L - M)(L + M + 1)}$. Naime,

$$L(L + 1) - M(M \pm 1) = (L \mp M)(L \pm M + 1) \quad (2.22)$$

U našem slučaju, gdje ćemo raditi s nenormiranim funkcijama, pojavljuje se jednostavno $(L + M)$ za operator spuštanja, a $(L - M)$ za operator podizanja.

3 Bargmannov prostor

Ideja prelaska u Bargmannov prostor iz prostora $L_2(\mathbb{R})$ je zasnovana na tome da je algebarska struktura problema lakše uočljiva. Bargmannov transformat ima oblik:

$$\mathcal{B}[f](t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+x^2}{2}+xt\sqrt{2}} f(x) dx \quad (3.1)$$

gdje ako uvrstimo

$$f(x) = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{\pi}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.2)$$

Hermiteova funkcija $\psi_n(x)$ ovim transformatom prelazi u potenciju kompleksne varijable t . $f(x)$ je Hermiteova funkcija gdje je H_n Hermiteov polinom. Ta funkcija pripada Hilbertovom prostoru.

Bitno je lakše raditi uzmemo li nenormiranu Hermiteovu funkciju jer norma nema lijepa svojstva kod množenja, $n!m! \neq (n+m)!$. Uvrsti li se nenormiranu funkciju u Bargmannov transformat dobije se:

$$\mathcal{B}[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}](t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+x^2}{2}+xt\sqrt{2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi_n(t) \quad (3.3)$$

Računanje transformata je najlakše putem funkcije izvodnice koja ima oblik:

$$G(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(t) \frac{z^m}{m!} \quad (3.4)$$

Svođenjem potencija na potpuni kvadrat te rješavanjem integrala, funkcija izvodnica $G(t, z) = \sqrt[4]{\pi} e^{tz\sqrt{2}}$ razvija se u red

$$G(t, z) = \sqrt[4]{\pi} \sum (\sqrt{2}t)^n \frac{z^n}{n!} \quad (3.5)$$

Iz toga Bargmannov transformat ima rješenje oblika $\mathcal{B}[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}](t) = (\sqrt{2}t)^n \sqrt[4]{\pi}$. Ako to rješenje proučavamo za slučaj normalizirane funkcije, transformat glasi:

$$\mathcal{B}[\psi_n](t) = \mathcal{B}[\mathcal{N}_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}](t) = \frac{t^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.6)$$

gdje je $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$, no tu norma kviri lijepo svojstvo $t^n t^m = t^{n+m}$.

Kao što smo već rekli, Bargmannov prostor ujedno je i Hilbertov prostor s pripa-

dajućim operatorima, na primjer Hamiltonijan harmoničkog oscilatora je

$$H = (t\partial_t + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (3.7)$$

čije su svojstvene funkcije monomi u t .

Bargmannov transformat se prirodno proširuje na sve tri dimenzije pa za svaki smjer (x, y, z) uvodimo redom varijablu (t, u, v) . Kad se Bargmannovim transformatom djeluje na x i ∂_x dobije se

$$x \xrightarrow{\mathcal{B}} \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \partial_t), \quad \partial_x \xrightarrow{\mathcal{B}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-t + \partial_t) \quad (3.8)$$

koji se prirodno nasljeđuje i u y i z .

Operator zakretnog impulsa je:

$$\vec{L} = -i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \equiv -i\hbar\vec{\mathcal{L}} \quad (3.9)$$

i

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{L}} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm} \quad (3.10)$$

gdje su Y_{lm} sferni harmonici. Sferni harmonici definirani su

$$Y_{lm} = \mathcal{N}_{lm} P_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi}, \text{ normalizacija } \mathcal{N}_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \quad (3.11)$$

Sferni harmonici mogu se proučavati iz kartezijevog sustava i u slučaju $m = l$

$$r^l Y_l^l(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} (x \pm iy)^l \quad (3.12)$$

$r^l Y_l^m$ odgovara prostornom harmoniku (eng. solid harmonic). Općenito se norma može izlučiti,

$$r^l Y_l^m(\theta, \phi) = N_{lm} p_{lm}(x, y, z), \quad (3.13)$$

$$N_{lm} = \frac{(2l)!}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi(l+m)!(l-m)!}}$$

gdje onda polinom p_{lm} ima najjednostavniji oblik "bez norme", npr. $p_{11} = -x - iy$.

Zbog toga što operator zakretnog impulsa u Bargmannovom prostoru ima isti oblik

kao u laboratorijskom sustavu, prostorni harmonik laboratorijskog i Bargmannovog prostora izgleda jednako samo što trebamo (x, y, z) zamijeniti s (t, u, v) , što se može zapisati:

$$p_{lm}(x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathfrak{p}_{lm}(t, u, v) = p_{lm}(t, u, v) \quad (3.14)$$

Analogno je $\tau^2 = t^2 + u^2 + v^2$ rotaciona invarijanta kao i r^2 .

Iz istog razloga, svi prostorni harmonici Bargmannovog prostora mogu se dobiti od $m = l$ homogeniziranih polinoma koristeći formu operatora podizanja i spuštanja u Bargmannovom prostoru:

$$\mathfrak{L}_{\pm} = \mathfrak{L}_x \pm i\mathfrak{L}_y = (u \mp it)\partial_v - v(\partial_u \mp i\partial_t) \quad (3.15)$$

Podsjećajući se da je p_{lm} svojstveno stanje operatora zakretnog impulsa $-i\hbar\vec{\mathfrak{L}}$:

$$-i\hbar\vec{\mathfrak{L}} \cdot \vec{\mathfrak{L}} p_{lm}(t, u, v) = \hbar^2 l(l+1) p_{lm}(t, u, v) \quad (3.16)$$

Na primjer

$$\begin{aligned} -i\hbar\mathfrak{L}_+ v &= -i\hbar(u - it) = \hbar(-t - iu) \\ -i\hbar\mathfrak{L}_- v &= -i\hbar(u + it) = \hbar(t - iu) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Upravo to odgovara Condon-Shortley faznoj konvenciji $\mp x - iy$ za prostorne harmonike $rY_1^{\pm 1}$.

Rješenje za trodimenzionalni oscilator moguće je napisati

$$\Psi_{klm}(x, y, z) = \mathcal{N}_{kl} r^l Y_l^m L_k^{\frac{l+1}{2}}(r^2) e^{-\frac{r^2}{2}} \quad (3.18)$$

gdje je $L_k^{\frac{l+1}{2}}(r^2)$ generalizirani Laguerreov polinom. Glavni kvantni broj je $n = 2k + l$ pa za slučaj kad nam je $k = 0$ već gore imamo rješenje, tj. Laguerreov polinom je konstanta, a prostorni harmonik prelazi u Bargmannov prostor po već opisanom principu.

U slučaju kada $k \neq 0$ zanemarujući normalizaciju dobivamo:

$$\psi_{klm}(x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{B}} \tau^{2k} p_{lm}(t, u, v) \quad (3.19)$$

4 Hilbertov prostor mnoštva čestica

Primjena Hilbertovih prostora temeljni je element matematičkih jednadžbi kvantne fizike. U takvom prostoru definiran je skalarni produkt vektora (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Iz toga slijedi norma vektora $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$.

Također, dva su vektora ortogonalna ako im je skalarni produkt jednak nuli.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad (4.1)$$

Položaji, brzine i ostale fizikalne veličine su operatori čiju je srednju vrijednost moguće izračunati iz vektora stanja. Vektori u Hilbertovom prostoru koji se razlikuju samo za konstantni kompleksni broj ne predstavljaju različita stanja.

Operatorske funkcije $f(\hat{A})$ mogu se definirati kao redovi potencija ako se funkcije $f(x)$ mogu razviti na sljedeći način $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onda je operatorska funkcija definirana s:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n \quad (4.2)$$

Hilbertov prostor u kvantnoj mehanici detaljno je objašnjen u literaturi 6.

5 Sustav dvije čestice

Jedna od karakteristika kvantne mehanike je nerazpoznatljivost identičnih čestica. Identičnim česticama nazivamo one čestice koje imaju istu masu, naboj, spin itd. Ako promatramo sistem identičnih čestica, ne možemo pripisati dano stanje ψ_n određenoj (i-toj) čestici n . Možemo odrediti samo koja su stanja zauzeta, a koja nisu.

Postoje dvije vrste sistema čestica: sistemi s valnim funkcijama koje mijenjaju predznak uslijed izmjene dvije čestice te sistemi gdje valne funkcije ostaju nepromijenjene. Stoga vrijedi:

$$\hat{P}_{ij}\psi_s = \psi_s \quad \text{ili} \quad \hat{P}_{ij}\psi_a = -\psi_a \quad (5.1)$$

gdje je P_{ij} operator izmjene dvije čestice. Valna funkcija ψ_s čija je vlastita vrijednost $+1$ naziva se simetričnom valnom funkcijom, a ona s vlastitom vrijednosti -1 naziva se antisimetričnom. Hoćemo li čestice opisati simetričnom ili antisimetričnom valnom funkcijom ovisi o samoj prirodi čestice. Obje vrste čestica pojavljuju se u prirodi. Čestice opisane antisimetričnom funkcijom nazivamo fermionima, a one opisane simetričnom funkcijom bozonima. Kriterij razlikovanja tih čestica je njihov spin.

Antisimetričnost fermionske valne funkcije je ekvivalentna Paulijevom principu isključivosti jer povlači da se u određenom kvantno-mehaničkom stanju može nalaziti samo jedan elektron.

Znamo da elektron ima četiri stupnja slobode (uzima se i spin) tako da je stanje karakterizirano sa četiri nezavisna broja. Uobičajeno je da se za te veličine uzima energija, moment količine gibanja, z komponenta momenta količine gibanja te z komponenta spina elektrona. Ovdje se bavimo česticama iste orijentacije spina (polarizirane su), te orbitalni dio mora biti antisimetričan na sebe. Zbog nerazlikovanja čestica, ne možemo reći koja je čestica u kojem stanju što znači da postoji $\frac{N!}{n_1!n_2!\dots}$ kombinacija valnih funkcija pojedinačnih čestica koje daju istu vlastitu vrijednost energije E .

Antisimetričnu valnu funkciju najbolje je predstaviti u formi determinante. Determinantu $N \times N$ koja se sastoji od produkta jednočestičnih valnih funkcija nazivamo

Slaterova determinanta te ona izgleda:

$$\psi_{fermioni} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_1, s_1) & \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_1, s_1) & \cdots & \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_1, s_1) \\ \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_2, s_2) & \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_2, s_2) & \cdots & \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_2, s_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i_1}(\mathbf{r}_N, s_N) & \varphi_{i_2}(\mathbf{r}_N, s_N) & \cdots & \varphi_{i_N}(\mathbf{r}_N, s_N) \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Predstavljanje fermionske valne funkcije u obliku determinante je elegantan način da ta funkcija ima tražene osobine. Ukoliko zamijenimo dva reda determinante zapravo smo izmijenili dvije čestice te se mijenja predznak valne funkcije. Ako nam se dvije čestice nalaze u istom stanju, tj. ako su dva stupca determinante jednaka tada će funkcija biti jednaka nuli što je upravo Paulijev princip.

5.1 Bargmannov prostor dvije čestice

U poglavlju o Bargmannovom prostoru izveden je prijelaz iz laboratorijskog sustava u Bargmannov prostor na slučaju jedne čestice. Nama je od interesa sustav dvije čestice koji je izravno proširenje slučaja jedne čestice. Posebno nas zanima kako se opisuje slučaj dvije čestice na rotaciono invarijantan način.

U slučaju dvije čestice, kako je navedeno u uvodu, valne funkcije možemo zapisati u obliku $\Phi_i \Psi_i$ gdje su Φ_i simetrične funkcije, a Ψ_i generatori algebre. U radu [2] pokazano je da u tom slučaju postoje četiri generatora algebre. Ti generatori su:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= t_1 - t_2, & \Psi_2 &= u_1 - u_2 \\ \Psi_3 &= v_1 - v_2, & \Psi_4 &= \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Simetrične funkcije pišemo u bazi elementarnih simetričnih funkcija, koje zovemo Eulerovi bozoni:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= t_1 + t_2, & e_2(t) &= t_1 t_2 \\ e_1(u) &= u_1 + u_2, & e_2(u) &= u_1 u_2 \\ e_1(v) &= v_1 + v_2, & e_2(v) &= v_1 v_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uvodimo notaciju za Slaterovu determinantu rotaciono invarijantnih rješenja za tro-dimenzionalni harmonički oscilator:

$$[klm, k'l'm']_{\psi} = [\psi_{klm}(1), \psi_{k'l'm'}(2)] = \begin{vmatrix} \psi_{klm}(1) & \psi_{klm}(2) \\ \psi_{k'l'm'}(1) & \psi_{k'l'm'}(2) \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

Brojevi unutar zagrade služe nam da razlikujemo prvu i drugu česticu u računu. Slaterove determinante rješenja trodimenzionalnog harmoničkog oscilatora se grade od $\psi_{klm} = \tau^{2k} p_{lm}(t, u, v)$. Isto tako može se napisati i Slaterova determinanta Hermiteovih funkcija:

$$[nmk, n'm'k']_{\Phi} = [\Phi_{nmk}(1), \Phi_{n'm'k'}(2)] = \begin{vmatrix} \Phi_{nmk}(1) & \Phi_{nmk}(2) \\ \Phi_{n'm'k'}(1) & \Phi_{n'm'k'}(2) \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

gdje je $\Phi_{nmk}(\vec{r}) = \psi_n(x)\psi_m(y)\psi_k(z)$ te je normalizacija izostavljena radi jednostavnosti. Ako pretpostavimo da ta rješenja obitavaju u $k = 0$ podprostoru, to će ograničiti moguće determinante.

Sad možemo povezati valne funkcije osnovnog stanja u jednom i drugom zapisu:

$$\begin{aligned} [01 \pm 1, 000]_{\psi} &= \mp \Psi_1 - i \Psi_2 = \Psi_{1, \pm 1} \\ [010, 000]_{\psi} &= \Psi_3 = \Psi_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vidimo da je osnovno stanje vektor, koji je ovdje zapisan u sfernoj bazi po Condon-Shortley konvenciji.

Umnožak tri komponente osnovnog stanja daje četvrti generator $\Psi_4 = \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3$, koji se može raspisati u determinante

$$(t_1 - t_2)(u_1 - u_2)(v_1 - v_2) = [111, 000]_{\Phi} - [110, 001]_{\Phi} - [101, 010]_{\Phi} - [011, 100]_{\Phi} \quad (5.8)$$

Promotrimo strukturu izraza 5.8. Prvi član je $t_1 u_1 v_1 - t_2 u_2 v_2$ dok ostali mijenjanju točno jedan indeks od t, u, v u redosljedu, npr. drugi izraz izgleda: $-t_1 u_1 v_2 + t_2 u_2 v_1$. Sličnim računom pronađeno je da je u bazi dobrog zakretnog impulsa izraz nešto

jasniji,

$$4i\Psi_4 = [032, 000]_\psi - [03 - 2, 000]_\psi - [022, 010]_\psi + [02 - 2, 010]_\psi + 2([021, 011]_\psi - [02 - 1, 01 - 1]_\psi) \quad (5.9)$$

To je struktura realnog prostornog harmonika sinusne vrste (razlika stanja m i $-m$). Naš je glavni zadatak naći koja stanja dobrog zakretnog impulsa sadrže ovo stanje.

5.2 Prvo pobuđeno stanje

Osnovno stanje ili stanje najniže energije postoji samo jedno, a svako više stanje naziva se pobuđenim stanjem. Prvo pobuđeno stanje dvije čestice sastoji se od devet (9) stanja i prikazana su na slici 5.1.

	m				
	⏟				
l=2	2	1	0	-1	-2
l=1		1	0	-1	
l=0			0		

Slika 5.1: Grafički prikaz mogućih stanja dvije čestice u prvom pobuđenom stanju

Na primjer:

$$[022, 000]_\psi = \begin{vmatrix} \psi_{022}(1) & \psi_{022}(2) \\ \psi_{000}(1) & \psi_{000}(2) \end{vmatrix} = [-e_1(t) - ie_1(u)] [-\Psi_1 - i\Psi_2] \sim \Psi_{122} \quad (5.10)$$

gdje vidimo da se $m = +2$ stanje dobiva množenjem $m = +1$ Eulerovog bozona (e) sa $m = +1$ generatorom (Ψ). Ovdje smo povezali novu strukturu, umnožak Eulerovog bozona i generatora, sa starom strukturom. Od ovog trenutka više nećemo pisati determinante nego ćemo koristiti novu strukturu. Podrazumijevamo da je valna funkcija označena sa tri kvantna broja k, l, m (k je broj pobuđenja) normirana, samo normu ne pišemo. Nove funkcije označavamo s Ψ_{klm} .

Kada znamo stanje $k = 0, l = 2, m = +2$ napisano u obliku $e\Psi$, najjednostavnije

kako možemo doći do ostalih stanja istoga l , a različitog $m = +1, 0, -1, -2$ je tako da koristimo operator spuštanja.

Podsjetimo se da operator spuštanja u laboratorijskom sustavu izgleda

$$\mathcal{L}_- = -i\mathcal{L}_x - \mathcal{L}_y = (x - iy)\partial_z + z(-\partial_x + i\partial_y) \quad (5.11)$$

te da je prelazak iz laboratorijskog sustava u Bargmannov prostor jednostavan. Sve što je potrebno je promijeniti varijable po principu $(x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{B}} (t, u, v)$, stoga operator spuštanja u Bargmannovom prostoru ima oblik

$$\mathcal{L}_- = (t - iu)\partial_v + v(-\partial_t + i\partial_u) \quad (5.12)$$

Uzmimo na primjer izraz 5.10 i odredimo stanje $l = 2, m = 1$ odnosno želimo spustiti indeks m . Na izraz 5.10 primijenimo operator 5.12.

$$e_1(v)[- \Psi_1 - i\Psi_2] + [-e_1(t) - ie_1(u)]\Psi_3 \sim \Psi_{121} \quad (5.13)$$

$a_{11} = -a_t - ia_u$
$a_{10} = a_v$
$a_{1-1} = a_t - ia_u$

Tablica 5.1: Tablica komponenti vektora u sfernoj bazi.

Ovdje se pojavljuju vektori u sfernoj bazi, kako je prikazano u tablici 5.1, koja se koristi i za Eulerove bozone $(e_{11}, e_{10}, e_{1-1})$ i za osnovno stanje $(\Psi_{11}, \Psi_{10}, \Psi_{1-1})$. U toj bazi naš rezultat 5.13 glasi:

$$\Psi_{121} \sim e_{10}\Psi_{11} + e_{11}\Psi_{10} \quad (5.14)$$

Isto tako možemo zapisati i 5.10

$$\Psi_{122} \sim e_{11}\Psi_{11} \quad (5.15)$$

Ako usporedimo izraze 5.15 i 5.14 vidi se da operator spuštanja djeluje kao derivacija

do na konstantu $(l + m)$ prilikom svake derivacije. Odnosno

$$\mathcal{L}_- [e_{11}\Psi_{11}] = (1 + 1)e_{10}\Psi_{11} + (1 + 1)e_{11}\Psi_{10} = 2[e_{10}\Psi_{11} + e_{11}\Psi_{10}] \quad (5.16)$$

Stoga jednostavno možemo koristiti pravila za deriviranje produkta na $e\Psi$ obliku uz dodavanje faktora $(l + m)$ od operatora spuštanja. Ako koristimo operator spuštanja lančano, dobivamo svih pet stanja $l = 2$. Pojavljuje se pitanje kako dobiti tri stanja $l = 1$. Kako stanja različitih l i m moraju biti ortogonalna, moramo prvo pronaći stanje Ψ_{121} te zatim tražiti ortogonalno stanje na to kako bismo dobili Ψ_{111} . Stanju $\Psi_{121} = e_{10}\Psi_{11} + e_{11}\Psi_{10}$ tražimo ortogonalno stanje uvjetom ortogonalnosti $(\Psi_{121}, \Psi_{111}) = 0$. Pretpostavimo da traženi vektor stanja ima oblik

$$\Psi_{111} \sim \alpha e_{10}\Psi_{11} + \beta e_{11}\Psi_{10} \quad (5.17)$$

Rješavanjem dobijemo koeficijente α i β te uvrštavanjem tih koeficijenata u pretpostavljeni oblik dobijemo $\Psi_{111} \sim e_{10}\Psi_{11} - e_{11}\Psi_{10}$. Stanje je određeno zakretnim impulsom $l = 1$ i projekcijom $m = 1$. Kako bi se izbjegle pogreške u računu kod određivanja nepoznatih koeficijenata preporučuje se korištenje računala. U tu svrhu napravljen je u Sage [8] okruženju radni list u kojem se računaju koeficijenti. Nakon što smo dobili ortogonalizirano stanje možemo koristiti operator spuštanja kako bismo pronašli projekcije $m = 0, -1$.

Sva ta stanja moguće je napisati u obliku $e_1(t, u, v)\Psi_{1,2,3}$ te ih grupirati u vektor stanja (p), tenzor stanja (d) te skalar. Tenzor stanja obuhvaća pet stanja oblika Ψ_{12m} , $m = \pm 2, \pm 1, 0$, dok vektor stanja tri stanja Ψ_{11m} gdje je $m = \pm 1, 0$. Preostali skalar je jednostavno skalarni produkt $\vec{e} \cdot \vec{\Psi}$.

5.3 Drugo pobuđeno stanje

Pri rješavanju prvog pobuđenog stanja dvije čestice uočili smo da nam se u svakom stanju od njih 9 pojavljuje umnožak Eulerovih bozona i oblika Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 . Takve kombinacije zovemo trivijalne. Ranije smo spomenuli da postoji još jedan oblik koji je umožak ova tri, kojeg smo označili Ψ_4 i on je pseudoskalar. Glavna ideja je pronaći netrivialna stanja u kojima se nalazi ovaj generator. S obzirom da se radi o polinomu

trećeg stupnja, tražimo ga unutar drugog pobuđenog stanja. Također u jednadžbi 5.9 smo vidjeli da bi Ψ_4 morao imati ukupni zakretni impuls $l = 3$, a prvo mjesto gdje se pojavljuje takav l je upravo drugo pobuđeno stanje. Jednako kao i ranije cilj nam je pronaći sva moguća stanja i zapisati ih u obliku produkata oblika $(e\Psi)$.

U drugom pobuđenom stanju nalazi se 28 različitih stanja raspoređenih po zakretnim momentima $l = 3, 2, 1$. Do toga ćemo doći brojanjem "na prste" kakvim smo se služili u slučaju prvog pobuđenog stanja.

Koristeći novu strukturu, jedno od 28 stanja možemo zapisati ugledajući se na 5.15

$$\Psi_{233}^I \sim [e_1(t) + ie_1(u)]^2 [\Psi_1 + i\Psi_2] = e_{11}^2 \Psi_{11} \quad (5.18)$$

Za razliku od prvog pobuđenog stanja gdje smo imali samo jedno stanje najvećeg zakretnog impulsa, u slučaju drugog pobuđenog stanja pojavljuju se dva. Drugo takvo stanje mora biti ortogonalno na 5.18 te smo ga dobili raspisivanjem preko Slaterovih determinanti i ortogonalizacijom, no moglo bi ga se i pogoditi:

$$\Psi_{233}^{II} \sim [-\Psi_1 - i\Psi_2]^3 = \Psi_{11}^3 \quad (5.19)$$

Obzirom da znamo kako nam projekcija m može imati sve vrijednosti m od $-l$ do l te da postoje dva stanja najvećeg zakretnog momenta, zaključujemo da ćemo mijenjajući projekciju tih stanja ukupno dobiti 14 stanja. Preostalih 12 stanja (od tih 14) dobivamo korištenjem operatora spuštanja tj. derivacijama.

Lančanim korištenjem operatora spuštanja na stanje $\Psi_{233}^I = e_{11}^2 \Psi_{11}$ dobivamo ostale projekcije. Svih 7 stanja prikazano je u tablici 5.2 u nenormiranom obliku.

Ψ_{233}^I	$\sim e_{11}^2 \Psi_{11}$
Ψ_{232}^I	$\sim 2e_{11}e_{10} \Psi_{11} + e_{11}^2 \Psi_{10}$
Ψ_{231}^I	$\sim 4e_{10}^2 \Psi_{11} + 2e_{11}e_{1-1} \Psi_{11} + e_{11}^2 \Psi_{1-1} + 8e_{11}e_{10} \Psi_{10}$
Ψ_{230}^I	$\sim e_{10}e_{1-1} \Psi_{11} + 2e_{10}^2 \Psi_{10} + e_{11}e_{1-1} \Psi_{10} + e_{11}e_{10} \Psi_{1-1}$
Ψ_{23-1}^I	$\sim 4e_{10}^2 \Psi_{1-1} + 2e_{11}e_{1-1} \Psi_{1-1} + e_{1-1}^2 \Psi_{11} + 8e_{10}e_{1-1} \Psi_{10}$
Ψ_{23-2}^I	$\sim 2e_{10}e_{1-1} \Psi_{1-1} + e_{1-1}^2 \Psi_{10}$
Ψ_{23-3}^I	$\sim e_{1-1}^2 \Psi_{1-1}$

Tablica 5.2: Tablica nenormiranih stanja Ψ_{23m}^I , $m = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Isti postupak primijenimo za Ψ_{233}^{II} . Tablica 5.3 prikazuje dobivena stanja.

Ψ_{233}^{II}	$\sim \Psi_{11}^3$
Ψ_{232}^{II}	$\sim \Psi_{11}^2 \Psi_{10}$
Ψ_{231}^{II}	$\sim 4\Psi_{11} \Psi_{10}^2 + \Psi_{11}^2 \Psi_{1-1}$
Ψ_{230}^{II}	$\sim 2\Psi_{10}^3 + 3\Psi_{11} \Psi_{10} \Psi_{1-1}$
Ψ_{23-1}^{II}	$\sim 4\Psi_{10}^2 \Psi_{1-1} + \Psi_{11} \Psi_{1-1}^2$
Ψ_{23-2}^{II}	$\sim \Psi_{10} \Psi_{1-1}^2$
Ψ_{23-3}^{II}	$\sim \Psi_{1-1}^3$

Tablica 5.3: Tablica nenormiranih stanja Ψ_{23m}^{II} , $m = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Ovom metodom pronađeno je 14 od ukupno 28 stanja koliko smo izbrojali da ih ima. Zagledamo li se u tablice stanja možemo uočiti kako postoji određena simetrija između stanja projekcije $\pm m$. Kao svojevrsnu provjeru odgovaraju li pojedine relacije pojedinom stanju zbrajamo projekcije svakog člana. Svaki član mora imati ukupnu projekciju zadanog m . Tom provjerom, ovih četrnaest stanja smatramo dobro opisanim. Da bismo pronašli ostala stanja, moramo pronaći koja su stanja na njih ortogonalna. Prvo takvo stanje koje tražimo je stanje ortogonalno na stanje Ψ_{232}^I koje ćemo nazvati Ψ_{222} . Uvjet za ortogonalnost vektora dan je s $(\Psi_{232}^I, \Psi_{222}) = 0$. Pretpostavimo da traženi vektor stanja ima oblik

$$\Psi_{222} = \alpha e_{11} e_{10} \Psi_{11} + \beta e_{11}^2 \Psi_{10} \quad (5.20)$$

Rješavanjem dobijemo koeficijente α i β te dobijemo $\Psi_{222} \sim 1e_{11}e_{10}\Psi_{11} - 1e_{11}^2\Psi_{10}$. Stanje je određeno sa zakretnim momentom $l = 2$ i projekcije $m = 2$. Nakon što smo dobili ortogonalizirano stanje možemo koristiti operator spuštanja kako bismo pronašli sve projekcije. U ovom slučaju dobit ćemo 5 stanja jer projekcija može imati vrijednosti $m = \pm 2, \pm 1, 0$. Operatorom spuštanja dobijemo stanja u tablici 5.4.

Ψ_{222}	$\sim e_{11}e_{10}\Psi_{11} - e_{11}^2\Psi_{10}$
Ψ_{221}	$\sim 2e_{10}^2\Psi_{11} + e_{11}e_{1-1}\Psi_{11} - e_{11}^2\Psi_{1-1} - 2e_{11}e_{10}\Psi_{10}$
Ψ_{220}	$\sim e_{10}e_{1-1}\Psi_{11} - e_{11}e_{10}\Psi_{1-1}$
Ψ_{22-1}	$\sim e_{1-1}^2\Psi_{11} + 2e_{10}e_{1-1}\Psi_{10} - 2e_{10}^2\Psi_{1-1} - e_{11}e_{1-1}\Psi_{1-1}$
Ψ_{22-2}	$\sim e_{1-1}^2\Psi_{10} - e_{10}e_{1-1}\Psi_{1-1}$

Tablica 5.4: Tablica nenormiranih stanja Ψ_{22m} , $m = \pm 2, \pm 1, 0$.

Nedostaje još devet stanja. Iduća tri stanja dobijemo ortogonalizacijom na Ψ_{231}^{II} .

Takvo ortogonalno stanje sastoji se od istih vektora kao i stanje Ψ_{231}^{II} s drugim koeficijentima i ima oblik $\Psi_{211}^{II} \sim -\Psi_{11}\Psi_{10}^2 + \Psi_{11}^2\Psi_{1-1}$, zakretni moment $l = 1$ i projekciju $m = 1$ što znači da ćemo uporabom operatora spuštanja dobiti još dva stanja. Sva stanja oblika Ψ_{21m}^{II} , $m = \pm 1, 0$ nalaze se u tablici 5.5 .

Ψ_{211}^{II}	$\sim -\Psi_{11}\Psi_{10}^2 + \Psi_{11}^2\Psi_{1-1}$
Ψ_{210}^{II}	$\sim -\Psi_{10}^3 + \Psi_{11}\Psi_{10}\Psi_{1-1}$
Ψ_{21-1}^{II}	$\sim -\Psi_{10}^2\Psi_{1-1} + \Psi_{11}\Psi_{1-1}^2$

Tablica 5.5: Tablica nenormiranih stanja Ψ_{21m}^{II} , $m = \pm 1, 0$.

Preostala stanja moramo tražiti paralelno kako bismo mogli odrediti koeficijente. Imamo naime dva nepoznata vektora u četverodimenzionalnom prostoru. Oba su nova stanja ortogonalna i na poznata stanja Ψ_{221} i Ψ_{231}^I i međusobno. Tražimo ih u obliku

$$\Psi_{211}^I \sim \alpha_1 \cdot e_{10}^2 \Psi_{11} + \alpha_2 \cdot e_{11}e_{1-1} \Psi_{11} + \alpha_3 \cdot e_{11}e_{10} \Psi_{10} + \alpha_4 \cdot e_{11}^2 \Psi_{1-1} \quad (5.21)$$

i

$$\Psi_{211}^{III} \sim \beta_1 \cdot e_{10}^2 \Psi_{11} + \beta_2 \cdot e_{11}e_{1-1} \Psi_{11} + \beta_3 \cdot e_{11}e_{10} \Psi_{10} + \beta_4 \cdot e_{11}^2 \Psi_{1-1} \quad (5.22)$$

Koeficijente α_i te β_i za $i = 1, 2, 3, 4$ možemo odrediti Gaussovom eliminacijom. U matricu upisujemo skalarne produkte te je svodimo na gornju trokutastu matricu elementarnim operacijama na retcima. Paralelno na jediničnoj matrici obavljamo jednake operacije. Jedinična matrica "pamti" korake te ćemo na kraju iz nje isčitati linearne kombinacije koje nam trebaju. Matricu punimo s dva već dobivena stanja te dva proizvoljna bazna vektora (od četiri) tih stanja. Početna matrica izgleda:

$$\left[\begin{array}{cccc} (\Psi_{231}^I, \Psi_{231}^I) & (\Psi_{231}^I, \Psi_{221}^{III}) & (\Psi_{231}^I, e_{10}^2 \Psi_{11}) & (\Psi_{231}^I, e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}) \\ (\Psi_{221}^{III}, \Psi_{231}^I) & (\Psi_{221}^{III}, \Psi_{221}^{III}) & (\Psi_{221}^{III}, e_{10}^2 \Psi_{11}) & (\Psi_{221}^{III}, e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}) \\ (e_{10}^2 \Psi_{11}, \Psi_{231}^I) & (e_{10}^2 \Psi_{11}, \Psi_{221}^{III}) & (e_{10}^2 \Psi_{11}, e_{10}^2 \Psi_{11}) & (e_{10}^2 \Psi_{11}, e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}) \\ (e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}, \Psi_{231}^{III}) & (e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}, \Psi_{221}^I) & (e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}, e_{10}^2 \Psi_{11}) & (e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}, e_{11}e_{1-1} \Psi_{11}) \end{array} \right] \quad (5.23)$$

Kad u matricu 5.23 unesemo skalarne produkte pazeći da je $(t^n, t^m) = n! \delta_{nm}$ te para-

lelno napišemo jediničnu matricu dobivamo navedenim postupkom:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1920 & 0 & 128 & 128 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 384 & 64 & 64 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 128 & 64 & 32 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 128 & 64 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1920 & 0 & 128 & 128 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 384 & 64 & 64 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 64/5 & -96/5 & -1/15 & -1/6 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 16 & -1/6 & -5/12 & 3/2 & 1
 \end{array} \right] \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Istaknuti elementi su nepoznanice pomoću kojih određujemo α_i te β_i za $i = 1, 2, 3, 4$ iz jednadžbi 5.21 i 5.22. Način na koji dobivamo α_i te β_i je:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \frac{-1}{15} \cdot \Psi_{231}^I + \frac{-1}{6} \cdot \Psi_{221}^{III} + 1 \cdot e_{10}^2 \Psi_{11} + 0 \cdot e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} \\
 \mathbf{D} &= \frac{-1}{6} \cdot \Psi_{231}^I + \frac{-5}{12} \cdot \Psi_{221}^{III} + \frac{3}{2} \cdot e_{10}^2 \Psi_{11} + 1 \cdot e_{11} e_{1-1} \Psi_{11}
 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uvrštavanjem izraza za poznate valne funkcije dobivamo nove vektore stanja:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= 2e_{10}^2 \Psi_{11} - 3e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1} \\
 \mathbf{D} &= e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1}
 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Vidljivo je da se \mathbf{C} i \mathbf{D} ne sastoje od istog broja vektora stoga ćemo od njih napraviti dvije linearne kombinacije kako bismo dobili dva stanja s jednakim brojem vektora. To radimo iz estetskih razloga iako bi i ovako zapisan rezultat bio valjan. Jedna od linearnih kombinacija je $\Psi_{211}^I \sim 2e_{10}^2 \Psi_{11} - e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1}$. Na nju možemo djelovati operatorom spuštanja, stanja su prikazana u tablici 5.6.

Ψ_{211}^I	$\sim 2e_{10}^2 \Psi_{11} - e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1}$
Ψ_{210}^I	$\sim e_{10} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{1-1} \Psi_{10} + e_{11} e_{10} \Psi_{1-1}$
Ψ_{21-1}^I	$\sim e_{1-1}^2 \Psi_{11} - 2e_{10} e_{1-1} \Psi_{10} - e_{11} e_{1-1} \Psi_{1-1} + 2e_{10}^2 \Psi_{1-1}$

Tablica 5.6: Tablica nenormiranih stanja Ψ_{21m}^I , $m = \pm 1, 0$.

Druga linearna kombinacija je $\Psi_{211}^{III} \sim -e_{10}^2 \Psi_{11} + 2e_{11} e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11} e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1}$. Kad na nju djelujemo operatorom spuštanja dobijemo posljednja tri stanja koja su

nam nedostajala od njih 28. U tablici 5.7 se nalaze stanja Ψ_{21m}^{III} , $m = \pm 1, 0$.

Ψ_{211}^{III}	$\sim -e_{10}^2 \Psi_{11} + 2e_{11}e_{1-1} \Psi_{11} - 2e_{11}e_{10} \Psi_{10} + e_{11}^2 \Psi_{1-1}$
Ψ_{210}^{III}	$\sim e_{10}e_{1-1} \Psi_{11} - 3e_{10}^2 \Psi_{10} + e_{11}e_{1-1} \Psi_{10} + e_{11}e_{10} \Psi_{1-1}$
Ψ_{21-1}^{III}	$\sim e_{1-1}^2 \Psi_{11} - 2e_{10}e_{1-1} \Psi_{10} + 2e_{11}e_{1-1} \Psi_{1-1} - e_{10}^2 \Psi_{1-1}$

Tablica 5.7: Tablica nenormiranih stanja od Ψ_{21m}^{III} , $m = \pm 1, 0$.

Sad kad znamo svih 28 stanja dvije čestice u drugom pobuđenom stanju i dalje je otvoreno pitanje gdje je smješten pseudoskalar Ψ_4 , jedini novi generator algebre (vakuum) u drugom pobuđenom stanju. Još u jednadžbi 5.9 otkrili smo da se skriva u stanju angularnog momenta $l = 3$ i projekcije $m = \pm 2$. Takvih stanja ima ukupno 6. Ψ_4 ćemo pronaći tako da gledamo razlike istih valnih funkcija sa projekcijama suprotnih iznosa.

Prve funkcije koje ćemo gledati su oblika $\Psi_{23\pm 2}^I$. Njihova razlika izgleda:

$$\Psi_{232}^I - \Psi_{23-2}^I \sim 4i[e_1(t)e_1(v)\Psi_2 - e_1(u)e_1(v)\Psi_1 + e_1(t)e_1(u)\Psi_3] \quad (5.27)$$

Iz jednadžbe 5.27 vidimo da je ona u formi "eΨ" gdje se pojavljuju samo $\Psi_{1,2,3}$. Zato gledamo sljedeću razliku dva stanja danu funkcijama oblika $\Psi_{23\pm 2}^{II}$. Da bismo mogli lakše odrediti, odnosno pronaći četvrti oblik, trebamo funkcije $\Psi_{23\pm 2}^{II}$ raspisati u formi $e\Psi$. Tako su raspisane funkcije:

$$\Psi_{232}^{II} \sim [e_1^2(t) - 4e_2(t) - e_1^2(u) + 4e_2(u) + 2i\Psi_1\Psi_2]\Psi_3 \quad (5.28)$$

$$\Psi_{23-2}^{II} \sim [e_1^2(t) - 4e_2(t) - e_1^2(u) + 4e_2(u) - 2i\Psi_1\Psi_2]\Psi_3 \quad (5.29)$$

Njihovom razlikom dobivamo:

$$\Psi_{232}^{II} - \Psi_{23-2}^{II} \sim 4i\Psi_1\Psi_2\Psi_3 = 4i\Psi_4 \quad (5.30)$$

Iz jednadžbe 5.30 vidimo da smo pronašli traženi netrivialni generator Ψ_4 . Iako nam se čini da je naše pitanje pronalaska tog generatora završeno, trebamo provjeriti i zadnja dva stanja odnosno njihovu razliku kako bismo bili sigurni da se u njima ne nalazi također komponenta pseudoskalara Ψ_4 .

Zadnje dvije funkcije koje provjeravamo su $\Psi_{22\pm 2}^I$. Njihova razlika je:

$$\begin{aligned} \Psi_{222}^I - \Psi_{22-2}^I \sim & 7[e_1(t)e_1(v)\Psi_1 - e_1(u)e_1(v)\Psi_2 - e_1^2(t)\Psi_3 - e_1^2(u)\Psi_3] + \\ & i[3e_1(t)e_1(v)\Psi_2 + 3e_1(u)e_1(v)\Psi_1 - 11e_1(t)e_1(u)\Psi_3] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Iz jednadžbe 5.31 vidimo da nam se generator Ψ_4 nalazi samo u stanjima Ψ_{232}^{II} i Ψ_{23-2}^{II} te smo time odgovorili na pitanje gdje je smješten pseudoskalar.

6 Zaključak

Tema ovog diplomskog rada je bila prevesti od prije poznate generatore algebre Hilbertovog prostora za dvije čestice u tri dimenzije iz Kartezijeve baze u bazu dobrog zakretnog impulsa. Generatori (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) čine vektor osnovnog stanja. Njihov umnožak Ψ_4 je četvrti generator i pronađen je u drugom pobuđenom stanju kao razlika dva specifična stanja zakretnog impulsa $l = 3$ i projekcije $m = \pm 2$. Ukupno postoji 28 stanja dvostrukog pobuđenja i u ovom radu su sva raspisana u obliku generatora ("vakuuma") i njihovih bozonskih pobuđenja. Time smo identificirali Ψ_{23m}^{II} kao glavnu vrpce pobuđenih stanja drugačije simetrije od vrpce koja nastaje pobuđivanjem osnovnog stanja.

Ovim je radom zaključeno pitanje rotaciono invarijantne algebarske strukture sustava dva identična fermiona jer se sva viša pobuđena stanja mogu dobiti množenjem Eulerovim bozonima, odnosno, ne pojavljuju se novi generatori.

Dodaci

Dodatak A Metodički dio

Nastavna priprema iz fizike za nastavnu jedinicu:

Jednadžba i graf elongacije harmonijskog titranja.

Sama tema titranja u srednjoškolskom kurikulumu smještena je u treći razred gimnazijskog programa te kao takva od učenika očekuje specifična znanja matematike. Vrsta nastave koja se preporučuje kurikulumom je interaktivna istraživači usmjerena nastava kako bi učenici bili angažirani tijekom nastave. Sve više se napuštaju tradicionalni oblici nastave gdje je učenik pasivan, a inzistira na tome da učenici samostalno istražuju, analiziraju i donose zaključke. Takvu nastavu moguće je provesti koristeći nastavne metode poput metode razgovora- usmjerena rasprava, kooperativnog rješavanja zadataka u skupinama, učeničkog izvođenja pokusa/mjerenja u skupinama te samom demonstracijom pokusa. Upravo te metode preporučujem prilikom izvođenja nastave na gore navedenu temu.

Obrazovni ishodi odnosno očekivana učenička postignuća za nastavnu jedinicu *Jednadžba i graf elongacije harmonijskog titranja* su povezivanje harmonijskog titranja s jednolikim gibanjem po kružnici odnosno projekcijom takvog gibanja. Osim toga od učenika se očekuje da objasni i izračuna period harmonijskog titranja, navede jednadžbu elongacije te analizira graf elongacije harmonijskog titranja.

Odgojni ishodi koje očekujemo su razvoj znanstveno-istraživačkog pristupa i zaključivanja, formuliranje istraživačkih pitanja i hipoteza, razvoj formalnog kritički-logičkog i sustavnog razmišljanja, razvoj komunikacijskih vještina.

Nastavni sat možemo podijeliti na tri dijela: uvodni dio, središnji dio te završni dio. Svaki od tih dijelova je bitan segment u zaokruživanju teme. Nastavna priprema zamišljena je za provedbu u dva školska sata.

Uvodni dio: otvaranje problema, prikupljanje ideja te upoznavanje s pojavom. Kao uvodni problem ove nastavne jedinice je titranje kao projekcija jednolikog kružnog gibanja s obzirom da pretpostavljam da su prethodni sat obradili uvod u harmonijskog gibanje. Motivacija proizlazi iz ideje da su vidjeli sliku ili video London eyea. Kako bih bila sigurna da razmišljamo o istoj stvari pokazala bih sliku preko projek-

tora. Zanima nas kako se pojedine kućice na kotaču gibaju u odnosu na promatrača na Zemlji. Učenici već prije stečenim znanjem zaključuju da se radi o gibanju po kružnici. Zatim ih metodom razgovora navodimo da kružno gibanje prikažu u x - y ravnini (slika A.1).



Slika A.1: Kružno gibanje u x - y ravnini

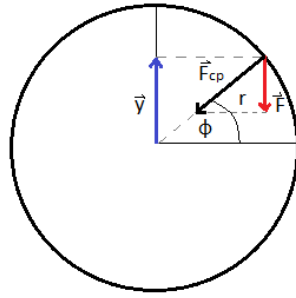
Da bi se učenici uvjerali da smo dobro postavili osi x i y prikažemo im online simulaciju: <https://scratch.mit.edu/projects/107138360/>. Ovim smo završili uvodni dio te slijedi središnji dio.

Središnji dio: konstrukcija modela- fizikalni i matematički opis pojave. U ovom trenutku postavljamo istraživačka na koja moramo pronaći odgovor.

1. Kako glasi jednačina elongacije harmonijskog titranja?
2. Kako izgleda graf elongacije harmonijskog titranja?

Promatrat ćemo titranje po vertikalnom pravcu (os y , plava os na slici A.1) koji prolazi središtem kružnice i u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Titranje kao komponenta kružnog gibanja u vertikalnom smjeru ima svoj uzrok. Od učenika tražimo da pronađu uzrok. Uzrok je sila, vektor, stoga mora imati iznos i smjer. Zanima nas od kuda je ta sila u sustavu i dolazimo do odgovora da je ona komponenta centripetalne sile. Zatim od učenika tražimo da nacrtaju te sile, označe radijus kružnice te elongaciju u tom trenutku. Za to vrijeme potrebno je prolaziti razredom i gledati što crtaju kako bi mogli intervenirati. Kad završe svoje skice, putem projektora prikažemo konačnu sliku (A.2)

Nakon prikaza sila slijedi interaktivni izvod perioda titranja. Učenici samostalno rade uz male intervencije i navode nastavnika. Za početak tražimo da iz sličnih trokuta

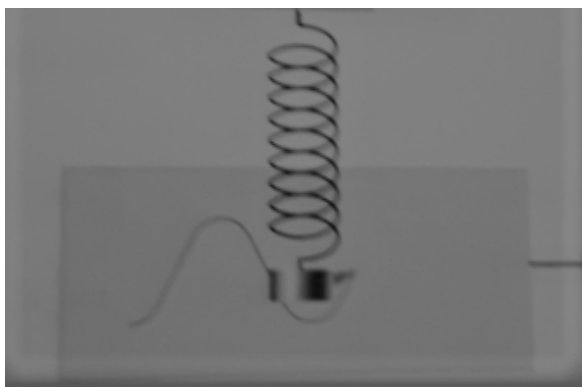


Slika A.2: Prikaz sile i elongacije u nekom trenutku kružnog gibanja

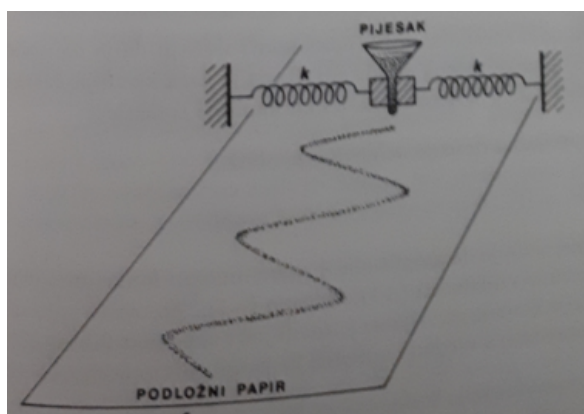
odrede omjer sile i centripetalne sile. $\frac{F}{F_{cp}} = \frac{-y}{r}$. Zatim uvrstavaju izraz za centripetalnu silu ($F_{cp} = m\omega^2 r$) i odrede iznos sile ($F = -m\omega^2 y$). Kako su kutna brzina i masa stalne to možemo prozvati konstantom c pa sila izgleda: $F = -cy$. Nakon toga treba učenike pustiti da zaključe kako se radi o harmonijskoj sili pa je i gibanje harmonijsko. Kako harmonijska sila ima oblika $F_h = -ky$, jednostavno našu konstantu c zamijenimo s k . Podsjetimo učenike da znaju izraz koji povezuje kružnu frekvenciju i period ($\omega = \frac{2\pi}{T}$). U taj izraz uvrstimo ω kojeg smo izrazili preko konstante k , $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ te dolazimo do zaključka kako period ne ovisi o amplitudi.

Sa slike A.2 možemo očitati elongaciju koja je $y = r \sin \phi$. Taj kut možemo izraziti preko kutne brzine i vremena $\phi = \omega t$, te sa slike vidimo da je amplituda, maksimalna elongacija, jednaka polumjeru kružnice $y_o = r$. Sad možemo napisati jednadžbu elongacije: $y = y_o \sin \omega t$. Graf elongacije učenici će izvesti u grupama. Podjelimo ih u 4 grupe. Po dvije grupe imaju isti zadatak kako bismo mogli međusobno raspravljati.

- Grupa A i C: na stalak ovjesimo uteg i za uteg zalijepimo flomaster. Okomito na flomaster stavimo papir i zatitramo uteg. Flomaster će na papiru ostavljati sinusoidalni trag. (slika A.3)
- Grupa B i D: za krajeve stola pričvrstimo opruge, sa svake strane po jednu i između njih stavimo ljevak. U ljevak usipamo pijesak te zatitramo sustav i paralelno pomičemo papir ispod ljevka. Na papiru će ostajati sinusoidalni trag (slika A.4)



Slika A.3: Prikaz postava pokusa za grupe A i C



Slika A.4: Prikaz postava pokusa za grupe B i D

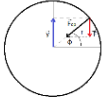
Završni dio: primjena modela-korištenje novostečenog znanja u novim situacijama, provjera ostvarenosti obrazovnih ishoda. Posvećujemo se vježbanju zadataka.

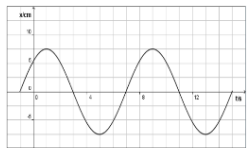
1. Kada o elastičnu oprugu ovjesimo uteg, ona se produlji za 10 cm. Kolikim će periodom titrati uteg ako ga povučemo iz ravnotežnog položaja prema dolje i pustimo? (Rj: 0,63s)
2. Utteg mase m ovješeno je o oprugu konstante k titra periodom T . Kojim će periodom titrati uteg mase $4m$ ovješeno o istu oprugu? (Rj: dvostruko veći period)
3. Utteg je ovješeno na elastičnu oprugu. Što će se dogoditi s periodom titranja ako na oprugu ovjesimo još jedan uteg? Obrazloži. (Rj: povećat će se)
4. Tijelo titra harmonijski kružnom frekvencijom $0,5 \text{ rad/s}$. Amplituda titranja je 80 cm. Napiši ovisnost elongacije tijela o vremenu ako se u trenutku $t=0$ tijelo nalazilo u ravnotežnom položaju. (Rj: $y = 0,8 \sin 0,5t$)

Na slici A.5 je prikazan plan ploče.

Jednadžba i graf elongacije harmonijskog titranja

Kako glasi jednadžba elongacije harmonijskog titranja?
 Kako izgleda graf elongacije harmonijskog titranja?





$$\frac{F}{F_{cp}} = -\frac{y}{r}$$

$$y = y_0 \sin(\omega t)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Slika A.5: Plan ploče

Literatura

- [1] Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, <http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=63769>, 06.08.2018.
- [2] Sunko D. K. : Natural generalization of the ground-state Slater determinant to more than one dimension.
Physical Review A 93 (2016) 062109-1–13
- [3] Sunko D. K. : Fundamental invariants of many-body Hilbert space.
Modern physics letters B 30 (2016) 1630009-1–15
- [4] Liboff, R. L. Introductory quantum mechanics. Sjedinjene Američke Države: Cornell University, 1980.
- [5] Biedenharn L. C., Louck J. D. Encyclopedia of mathematics and its applications, Volume 8, Angular Momentum in Quantum Physics. Cambridge University press
- [6] Griffiths, D. J. Introduction to quantum mechanics. Sjedinjene Američke Države: Prentice Hall, 1995.
- [7] Sakurai, J. J., Napolitano, J. J. Modern Quantum Mechanics, 2nd ed. Sjedinjene Američke Države: Addison-Wesley, Reading, 2011.
- [8] Sage, <http://www.sagemath.org/>