SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Silvia Franović

KONZISTENTNE FAMILIJE KRIVULJA ZA MODELE KAMATNIH STOPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Igor Velčić
Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, studeni, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Investiranje je odricanje potrošnje u sadašnjosti kako bi se ostvarili što veći povrati u budućnosti. Kako bi se investicija mogla zvati "uspješnom", povrati moraju kompenzirati investitora za vrijeme na koje su sredstva uložena i očekivanu stopu inflacije[1]. Naravno, svaka investicija nosi i rizik da se u budućnosti uložena sredstva i/ili kamate neće isplatiti investitoru. Ukoliko je tržište efikasno, nijedan investitor ne može ostvariti bezrizičan profit, tj. nema mogućnosti arbitraže.

Jednom od najsigurnijih vrsta investicija smatraju se obveznice. Obveznica je vrijednosni papir (ugovor) koji izdavatelja obvezuje na isplatu određenog iznosa - glavnice, u određenom roku - roku dospijeća, s određenim kamatama - kuponima. Kamate se mogu isplaćivati periodično, mogu se pribrajati vrijednosti glavnice i isplatiti po dospijeću obveznice, ili se čak ne moraju isplaćivati (tzv. bezkuponske obveznice). Osim prema vrsti kupona, obveznice se razlikuju obzirom na rok dospijeća (primjerice obveznice s rokom dospijeća do godine dana nazivaju se trezorski zapisi), obzirom na izdavatelja (državne i korporativne obveznice) i obzirom na rizik neotplate- rizik da izdavatelj neće moći u potpunosti isplatiti iznos obećan obveznicom.

U ovom radu bavit ćemo se bezkuponskim obveznicama. Bezkuponska obveznica sa dospijećem T je financijski instrument koji vlasniku isplaćuje jedinicu gotovine na unaprijed određen datum T. Dakle, dogovorno je glavnica bezkuponske obveznice jednaka 1. Kako odabrati u koje obveznice investirati?

Pretpostavimo da ulažemo samo u bezkuponske obveznice. Treba još odabrati vrijeme dospijeća obveznica u koje ćemo ulagati. Krivulja kamatnih stopa je krivulja koja opisuje kretanje kamatnih stopa u ovisnosti o vremenu dospijeća. Postoje razni matematički modeli koji modeliraju krivulje kamatnih stopa, no budući da nijedan takav model nije stvarna slika stvarnosti, ti se modeli moraju redovito prilagođavati. Dakle, u svakom trenutku[2] dobiva se nova krivulja kamatnih stopa koja ovisi o vremenu dospijeća, odnosno o vremenu do dospijeća.

Označimo sa $\mathcal{M}$ model kamatnih stopa. Pitanja kojima će se ovaj rad baviti su:

[1] Povećanje opće razine cijena (pad vrijednosti novca).

[2] U praksi, modeli se prilagođavaju jednom tjedno, dnevno, svakih sat vremena, svake minute ili svake sekunde.

1. Neka je uz $\mathcal{M}$ zadana parametrizirana familija $\mathcal{G}$ krivulja kamatnih stopa. Pod kojim je uvjetima familija $\mathcal{G}$ konzistentna[3] sa dinamikom modela $\mathcal{M}$?

2. Kada se zadani model $\mathcal{M}$, koji je općenito beskonačnodimenzionalan, može svesti na konačnodimenzionalan model?

[3]U ovom konktekstu konzistentnost znači da, ako je zadana početna krivulja iz $\mathcal{G}$, model $\mathcal{M}$ daje samo krivulje kamatnih stopa koje pripadaju familiji $\mathcal{G}$.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Itôv diferencijalni račun

Kako bi mogli proučavati kamatne stope obveznica u neprekidnom vremenu, uvest ćemo pojam difuzijskih procesa i definirati Itôv diferencijalni račun. Najjednostavnije, slučajni proces X je difuzijski proces ako se njegova dinamika može opisati stohastičkom diferencijalnom jednadžbom sljedećeg tipa:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t). \tag{1.1}$$

Pri tome je $Z(t)$ normalno distribuiran i ne ovisi o događajima prije trenutka t, a μ i σ su determinističke funkcije. 'Element' slučajnosti modelira se Brownovim gibanjem:

Definicija 1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $W = (W(t), t \geq 0)$ je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

(i) *Putevi $t \mapsto W(t)(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ za gotovo svaki $\omega \in \Omega$*

(ii) $W(0) = 0$

(iii) *Za proizvoljne $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisni

(iv) *Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $W(t) - W(s)$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.*

Pomoću Brownovog gibanja jednadžbu (1.1) pišemo kao

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t), \tag{1.2}$$

gdje je $\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t)$. Formalno, rješenje gornje jednadžbe mogli bi zapisati kao

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \tag{1.3}$$

pri čemu $ds-$integral možemo interpretirati kao Reimannov integral. Intuitivno, na $dW-$integral gledamo kao na Riemann-Stieltjesov integral, ali to ovdje nije moguće jer putevi Brownovog gibanja nisu diferencijabilne funkcije. Iz tog razloga definirat ćemo Itôv integral. Pojam koji moramo uvesti prije toga je filtracija Brownovog gibanja.

Definicija 2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $W = (W(t), t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ $\sigma-$algebri koja zadovoljava:*

(i) Za sve $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}(s) \subsetneq \mathcal{F}(t)$ tj. informacija poznata u kasnijem trenutku ne može biti manja od informacije poznate u ranijem trenutku.

(ii) Za svaki $t \geq 0$, $W(t)$ je $\mathcal{F}(t)-$izmjeriva slučajna varijabla, tj. informacija dostupna do trenutka t dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku.

(iii) Za sve $0 \leq s < t$, prirast $W(t) - W(s)$ nezavisan je od $\mathcal{F}(s)$, tj. svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s ne ovisi o informaciji dostupnoj u trenutku s.

Najprije ćemo definirati integral tipa

$$\int_0^T \Delta(t)dW(t)$$

za jednostavne slučajne procese Δ.

Definicija 3. *Adaptirani slučajni proces $\Delta = (\Delta(t), 0 \leq t < T)$ zove se jednostavan proces ako je*

$$\Delta(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta(t_j)\chi_{[t_j, t_{j+1}\rangle}(t)$$

za neku particiju $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ intervala $[0, T]$, i omeđene slučajne varijable $\Delta(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, takve da je $\Delta(t_j)$ $\mathcal{F}(t_j)-$izmjeriva.

Dakle, adaptiran slučajni proces Δ je jednostavan ako postoji particija takva da je Δ konstantan[1] na svakom intervalu te particije.
Za jednostavne procese definiramo Itôv integral:

Definicija 4. *Neka je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ particija intervala $[0, T]$ i $\Delta = (\Delta(t), 0 \leq t < T)$ jednostavan slučajni proces. Za $t_k \leq t < t_{k+1}$ definiramo*

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j) \left[W(t_{j+1}) - W(t_j) \right] + \Delta(t_k) \left[W(t) - W(t_k) \right]. \tag{1.4}$$

$I = (I(t), 0 \leq t < T)$ je slučajni proces koji zovemo Itôv integral jednostavnog procesa Δ i označavamo ga kao

$$I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s).$$

Pokazuje se da je slučajan proces definiran formulom (1.4) martingal.
Sada možemo definirati Itôv integral za opće integrande, tj. za $\mathcal{F}(t)-$adaptirane slučajne procese $\Delta = (\Delta(t), 0 \leq t < T)$ koji zadovoljavaju uvjet

$$\mathbb{E} \int_0^T \Delta^2(t) dt < \infty. \tag{1.5}$$

Takave procese Δ aproksimirat ćemo jednostavnim procesima, naime vrijedi:

Lema 1. *Neka je $\Delta = (\Delta(t), 0 \leq t < T)$ adaptiran slučajni proces koji zadovoljava uvjet* (1.5). *Tada postoji niz $(\Delta_n(t), n \geq 1)$ jednostavnih slučajnih procesa takav da je*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2 dt = 0. \tag{1.6}$$

Neka je $(\Delta_n(t), n \geq 1)$ niz aproksimirajućih jednostavnih slučajnih procesa iz leme 1 i označimo sa $I_n(t) = \int_0^t \Delta_n(u) dW(u)$. Iz svojstava Itôvog integrala za jednostavne slučajne procese slijedi da je $(I_n(t), n \geq 1)$ Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te zato ima limes. Taj limes zovemo Itôv integral i označavamo sa $I(t)$. Dakle, Itôv integral za opće integrande definiran je sa:

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u) = \lim_{n \to \infty} \int_0^t \Delta_n(u) dW(u). \tag{1.7}$$

Kasnije ćemo procese kamatnih stopa predstavljati kao procese općenitije od Brownovog gibanja, preciznije - kao Itôve procese.

[1] Konstantan slučajan proces u ovom kontekstu znači da je na intervalu jednak slučajnoj varijabli koja se ne mijenja kroz taj interval.

Definicija 5. *Neka je $W = (W(t), t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ pridružena filtracija. Itôv proces je slučajni $(X(t), t \geq 0)$ proces oblika*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Theta(u)du, \tag{1.8}$$

gdje je $X(0)$ neslučajan, a $(\Delta(X_t, t), t \geq 0)$ i $(\Theta(X_t, t), t \geq 0)$ adaptirani slučajni procesi koji zadovoljavaju uvjete $\mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u)du < \infty$ i $\int_0^t |\Theta(u)|du < \infty$ za sve $t \geq 0$.

Formula (1.8) može se zapisati i u diferencijalnom obliku:

$$dX(t) = \Delta(t)dW(t) + \Theta(t)dt.$$

U Itôvom diferencijalnom računu ne možemo primjeniti 'uobičajeno' pravilo za derivaciju kompozicije funkcija već vrijedi sljedeći teorem (Itôva formula za Itôv proces):

Teorem 1. *Neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (1.8) i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi:*

$$df(t, X(t)) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))\Delta(t)dt + f_x(t, X(t))\Theta(t)dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t))\Delta^2(t)dt.$$

Sada ćemo postaviti tržište na kojem će nam koristiti Itôv diferencijalni račun.

1.2 Tržište bezkuponskih obveznica

Promatramo tržište bezkuponskih obveznica. Pretpostavljamo da ne postoji rizik neisplate i sa $p(t, x)$ označimo cijenu bezkuponske obveznice s dospijećem $t + x$ u trenutku t (x je preostalo vrijeme držanja, tj. $x = T - t$). Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, pretpostavljamo da cijene prate striktno pozitivan $\mathbb{F}$ adaptiran proces, gdje je $\mathbb{F}$ filtracija inducirana $m-$dimenzionalnim Brownovim gibanjem W. Kako bismo mogli formalno opisati proces cijena i kamatnih stopa na obveznice, uvodimo još nekoliko pretpostavki:

1. Postoji tržište bez trenja (zanemarujemo transakcijske troškove) za obvezice s dospijećem T za svaki $T > 0$.
2. Za svako T, proces $(p(t, T - t); 0 \leq t \leq T)$ je opcionalan stohastički proces takav da je $p(t, T - t) = 1$ za gotovo svaki t.
3. Za svako t, $p(t, x)$ je $\mathbb{P} - g.s.$ neprekidno diferencijabilna u varijabli x.

Neka je $t < S < T$. Pretpostavimo da u trenutku t želimo sklopiti ugovor takav da, ako u vremenu S uložimo 1, imamo determinističku stopu povrata za vrijeme trajanja intervala $[S, T]$. Takav ugovor možemo postići na sljedeći način:

- U vremenu t prodamo jednu obveznicu s dospijećem S. Na taj način dobili smo $p(t, S - t)$.
- Za dobivenu količinu gotovine, možemo kupiti točno $p(t, S - t)/p(t, T - t)$ obveznica s dospijećem T.
- U vremenu S, dospijeva obveznica koju smo prodali, dakle obvezni smo isplatiti 1.
- U vremenu T dospijevaju obveznice koje smo kupili, a kako za svaku dobivamo 1, ukupno dobivamo $p(t, S - t)/p(t, T - t)$.
- Investicija u iznosu 1 u vremenu S rezultirala je povratom od $p(t, S - t)/p(t, T - t)$ u vremenu T. Zaključujemo da konstantna kamatna stopa r koja bi nam donijela jednak povrat zadovoljava jednadžbu

$$e^{r(t-s)} = \frac{p(t, S - t)}{p(t, T - t)}.$$

Kamatna stopa za period $[S, T]$ iznosi $r(t; S, T) = -\frac{\log p(t,T-t) - \log p(t,S-t)}{T-S}$. Zbog prethodno navedenih pretpostavki, možemo uvesti sljedeću definiciju:

Definicija 6. *Kamatna stopa r u trenutku t na obveznicu s dospijećem t + x dana je s*

$$r(t, x) = -\frac{\partial \log p(t, x)}{\partial x}.$$

Kratkoročnu kamatnu stopu definiramo kao $R(t) = r(t, 0)$. Pretpostavimo da u vremenu 0 uložimo jednu jedinicu novca u obveznicu s beskonačnim dospijećem. Količina novca koju tako akumuliramo u vremenu t dana je sa: $B(t) = exp\left\{\int_0^t R(s)ds\right\}, \quad \forall t \in [0, T]$. Proces $B = (B(t), t \geq 0)$ je adaptiran, ima konačnu varijancu i neprekidne puteve, a naziva se proces akumulacije novca. Alternativno, ali ekvivalentno, proces akumulacije novca može se definirati kao rješenje diferencijalne jednadžbe $dB(t) = R(t)B(t)dt$ sa početnim uvjetom $B(0) = 1$.
Pretpostavljamo također da tržište ne dozvoljava arbitražu odnosno da cijene obveznica zadovoljavaju sljedeću definiciju:

Definicija 7. *Familija $p(t, x)$ adaptiranih procesa zove se familija nearbitražnih cijena obveznice ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(a) $p(t, 0) = 1$*, za svaki* $t \in [0, T]$

(b) *Postoji vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ *ekvivalentna* $\mathbb{P}$ *i takva da za svako vrijeme dospijeća* T *vrijedi da je proces* $Z(t, T) = p(t, T - t)/B(t)$ $\mathbb{P}^*$*-martingal.*

1.3 Heath-Jarrow-Morton metodologija

Heath-Jarrow-Morton ([7]) predstavljaju svaki proces kamatnih stopa kao Itôv proces induciran $m-$dimenzionalnim Brownovim gibanjem, pa u skladu s tim promatramo sljedeći model kamatnih stopa:

$$dr(t, x) = \beta(t, x)dt + \sigma(t, x)dW, \tag{1.9}$$

$$r(0, x) = r^o(0, x), \tag{1.10}$$

gdje su, za svaki $x, \beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ dani opcionalni procesi. Početna krivulja $\{r^o(0, x)\}$ je također zadana. Može se pokazati da vrijedi:

Propozicija 1. *Uz ekvivalentnu martingalnu mjeru* $\mathbb{P}^*$*, dinamika kamatnih stopa dana je sa:*

$$dr(t, x) = \left\{\frac{\partial}{\partial x} r(t, x) + \sigma(t, x) \int_0^x \sigma(t, u)^\tau du\right\} dt + \sigma(t, x)dW, \tag{1.11}$$

$$r(0, x) = r^o(0, x) \tag{1.12}$$

Napomena 1. *Definiranje cijene obveznice i kamatnih stopa kao funkcije koja ovisi o vremenu do dospijeća obilježje je tzv. Musieline parametrizacije. Često se cijene obveznica i kamatne stope definiraju tako da ovise o vremenu dospijeća* T*. Korištenje Musieline parametrizacije olakšava promatranje problema konzistentnosti.*

1.4 Problemi

Pretpostavimo da nam je zadan konkretan model kamatnih stopa $\mathcal{M}$ (na gore opisan način), tj. da je zadana volatilnost σ. Nekoliko problema se prirodno nameće:

1. Neka je uz $\mathcal{M}$ zadana parametrizirana familija $\mathcal{G}$ krivulja kamatnih stopa. Pod kojim je uvjetima familija $\mathcal{G}$ konzistentna sa dinamikom modela $\mathcal{M}$?

2. Kada se zadani model $\mathcal{M}$, koji je općenito beskonačnodimenzionalan, može svesti na konačnodimenzionalan model? Preciznije, tražimo uvjete pod kojima se proces kamatnih stopa $r(t, x)$ induciran modelom $\mathcal{M}$ može realizirati sustavom oblika

$$dZ_t = a(Z_t)dt + b(Z_t)dW_t, \tag{1.13}$$

$$r(t, x) = G(Z_t, x), \tag{1.14}$$

pri čemu je Z proces stanja, $a(z)$, $b(z)$ i $G(z, x)$ determinističke funkcije (a i G su realne funkcije, a b poprima vrijednosti u $\mathbb{R}^m$), a W Brownovo gibanje iz (1.9).

Poglavlje 2

Linearna realizacija

Općenito, jednadžba (1.11) je nelinearna beskonačna stohastička diferencijalna jednadžba. U ovom ćemo se poglavlju koncentrirati na linearni, jednostavniji oblik i tražiti linearne realizacije konačnih dimenzija.

2.1 Deterministička volatilnost kamatnih stopa

Pretpostavimo da je volatilnost kamatnih stopa σ determinističko preslikavanje klase C^∞ te da ne ovisi o t, tj. da je $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$. Ako još funkciju $x \mapsto r(t,x)$ označimo sa $r(t)$, iz (1.11) imamo:

$$dr(t) = \{Fr(t) + D\}\,dt + \sigma(x)dW(t) \tag{2.1}$$

$$r(0) = r^o(0) \tag{2.2}$$

Gdje je linearni operator F definiran sa

$$F = \frac{\partial}{\partial x},$$

a funkcija D dana sa

$$D(x) = \sigma(x)\int_0^x \sigma(s)^\tau ds.$$

Zbog izbora determinističke volatilnosti $\sigma(x)$, jednadžba kamatnih stopa (2.1) je linearna stohastička diferencijalna jednadžba. Zbog toga očekujemo da ćemo moći naći eksplicitno rješenje od (2.1). Naime, prisjetimo se da jednadžba oblika $dy(t) = [\alpha y(t) + b]\,dt + cdW(t)$ ima rješenje:

$$y(t) = e^{at}y(0) + \int_0^t e^{a(t-s)}bds + \int_0^t e^{a(t-s)}cdW(s).$$

Dolazimo do zaključka da je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.1) dano sljedećim (formalnim) izrazom:

$$r(t) = e^{Ft}r_0 + \int_0^t e^{F(t-s)}Dds + \int_0^t e^{F(t-s)}\sigma dW(s).$$

Da bi u potpunosti razumijeli gornji izraz, moramo vidjeti kako e^{Ft} djeluje na realne funkcije. Iz razvoja eksponencijalne funkcije u red imamo:

$$\left[e^{Ft}f\right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left[F^n f\right](x).$$

U našem je slučaju $F^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ pa, pod pretpostavkom da je f analitička funkcija, slijedi da je

$$\left[e^{Ft}f\right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x) \tag{2.3}$$

Budući da je (2.3) zapravo Taylorov razvoj funkcije f oko točke x, za analitičku funkciju f vrijedi $\left[e^{Ft}f\right](x) = f(x+t)$. Preciznije, vrijedi sljedeće:

Propozicija 2. *Operator F je infinitezimalni generator polugrupe lijevih translacija, tj. za svaku $f \in C\,[0,\infty\rangle$ imamo*

$$\left[e^{Ft}f\right](x) = f(t+x).$$

Rješenje jednadžbe kamatnih stopa (2.1) *je dano sa:*

$$r(t,x) = e^{Ft}r^o(0,x) = \int_0^t e^{F(t-s)}D(x)ds + \int_0^t e^{F(t-s)}\sigma(x)dW(s), \tag{2.4}$$

ili ekvivalentno, sa:

$$r(t,x) = r^o(0,x+t) + \int_0^t D(x+t-s)ds + \int_0^t \sigma(x+t-s)dW(s). \tag{2.5}$$

Iz (2.4) je jasno da jednadžbu kamatnih stopa (2.1) možemo pisati kao

$$dr_0(t,x) = Fr_0(t,x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad r^o(0,x) = 0 \tag{2.6}$$

$$r(t,x) = r_0(t,x) + \delta(t,x), \tag{2.7}$$

gdje je

$$\delta(t,x) = r^o(0,x+t) + \int_0^t D(x+t-s)ds. \tag{2.8}$$

Kako $\delta(t,x)$ ne ovisi o Brownovom gibanju W, problem nalaženja realizacije sustava (2.1) ekvivalentan je nalaženju realizacije sustava (2.6). Pojam realizacije sustava dan je sljedećom definicijom:

Definicija 8. *Uređena trojka matrica* $[A, B, C(x)]$*, gdje je* A $n \times n$ *matrica,* B $n \times m$ *matrica i* C $n-$ *dimenzionalna funkcija je* $n-$*dimenzionalna realizacija sustava* (2.1) *i* (2.6) *ako* r_0 *ima reprezentaciju*

$$dZ(t) = AZ(t)dt + BdW(t), \quad Z(0) = 0 \tag{2.9}$$

$$r_0 = C(x)Z(t). \tag{2.10}$$

Sada nam se nameću sljedeći problemi:

- Kako odabrati volatilnost $\sigma(x)$?
- Kada postoji konačnodimenzionalna realizacija?
- Ako konačnodimenzionalna realizacija postoji, koja je minimalna dimenzija takve realizacije?
- Uz dano σ, kako konstruirati minimalnu realizaciju?
- Koja je ekonomska interpretacija procesa stanja Z u realizaciji?

2.2 Egzistencija konačne linearne realizacije

Pretpostavimo sada da postoji konačnodimanezionalna realizacija sustava (2.6) u obliku (2.9)-(2.10). Rješavajući (2.6) dobivamo:

$$r_0(t, x) = \int_0^t e^{F(t-s)}\sigma(x)dW(s) = \int_0^t \sigma(x + t - s)dW(s).$$

Iz realizacije (2.9)-(2.10) imamo:

$$r_0(t, x) = C(x)Z(t) = C(x)\int_0^t e^{A(t-s)}BdW(s).$$

Dakle, gotovo sigurno, za sve x i t vrijedi:

$$\int_0^t \sigma_x(t - s)dW(s) = \int_0^t C(x)e^{A(t-s)}BdW(s) \tag{2.11}$$

gdje indeks x označava lijevu translaciju, tj. $\sigma_x(t) = \sigma(x + t)$. To nas dovodi do zaključka da jednadžba

$$\sigma_x(t) = C(x)e^{At}B$$

treba vrijediti za sve x i t, pa dolazimo do jednog od najvažnijih rezultata:

Propozicija 3. *1. Proces kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako se volatilnost σ može zapisati u obliku*

$$\sigma(x) = C_0 e^{Ax} B \tag{2.12}$$

2. Ako je σ dana s (2.12)*, tada je realizacija od r_0 dana s:*

$$dZ(t) = AZ(t)dt + BdW(t), \quad Z(0) = 0 \tag{2.13}$$

$$r_0(t,x) = C(x)Z(t), \tag{2.14}$$

gdje je $C(x) = C_0 e^{Ax} B$. Kamatne stope $r(t,x)$ su tada dane sa (2.7)-(2.8).

Dokaz. Iz diskusije prije propozicije jasno je da, ukoliko konačnodimenzionalna realizacija postoji, tada imamo faktorizaciju $\sigma_x(t) = C(x)e^{At}B$. Za $x = 0$, i označimo li sa C_0 $C(0)$, dobivamo relaciju (2.12).
S druge strane, ako je σ dana s (2.12), tada Z definiramo sa (2.13). Direktnim uvrštavanjem dobivamo da je $r_0(t,x) = C_0 e^{Ax} z(t)$. □

Napomena 2. *Neka je c vektor redak, A kvadratna matrica i b vektor stupac. Funkciju oblika $ce^{Ax}b$ nazivat ćemo kvazieksponencijalnom (QE) funkcijom. Općenito, kvazieksponencijalna funkcija f dana je sa*

$$f(x) = \sum_i e^{\lambda_i x} + \sum_j e^{\alpha_j x} \left[p_j(x) cos(\omega_j x) + q_j(x) sin(\omega_j x) \right], \tag{2.15}$$

pri čemu su λ_i, α_j i ω_j realni brojevi, a p_j i q_j realni polinomi.

Kvazieksponencijalne funkcije pojavit će se i kasnije, pa su navedena neka osnovna svojstva:

Lema 2. *Za QE funkcije vrijede sljedeća svojstva:*

- *Funkcija je QE ako i samo ako je ona komponenta rješenja vektorske linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima*
- *Funkcija je QE ako i samo ako se može zapisati kao $f(x) = ce^{Ax}b$*
- *Ako je f QE, tada je i f' QE*
- *Ako je f QE, tada je i njezina primitivna funkcija QE*
- *Ako su f i g QE, tada je i fg QE.*

2.3 Funkcije transfera

Problem egzistencije konačnodimenzionalne realizacije možemo riješiti i analizom sustava u tzv. frekvencijskom području. Za početak, kako bismo stekli dojam o tome što očekivati, jednadžbu

$$dr_0 = Fr_0(t,x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad r^o(0,x) = 0 \tag{2.16}$$

formalno podijelimo sa dt, time dobivamo:

$$\frac{dr_0}{dt}(t,x) = Fr_0(t,x) + \sigma(x)\frac{dW}{dt}(t),$$

pri tome $\frac{dW}{dt}(t)$ interpretiramo kao bijeli šum. Na tu jednadžbu gledamo kao na ulazno-izlazni sustav koji slučajni ulazni signal $t \mapsto \frac{dW}{dt}(t)$ transformira u beskonačnodimenzionalni izlazni signal $t \mapsto r_0(t,\cdot)$. Dakle, na gornju jednadžbu možemo gledati kao na kontroliranu običnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dr_0}{dt}(t,x) = Fr_0(t,x) + \sigma(x)u(t), \tag{2.17}$$

$$r^o(0) = 0,$$

pri čemu je u deterministički ulazni signal.
Naravno, općenito ne možemo poistovjećivati elemente standardnog diferencijalnog računa s elementima Itôvog diferencijalnog računa, no u ovom slučaju, to možemo napraviti zbog linearnosti.
Sada kada imamo ulazno-izlazni sustav, uvodimo pojam funkcija transfera.

Definicija 9. *Funkcija transfera $K(s,x)$ sustava* (2.17) *određena je relacijom*

$$\tilde{r}_0(s,x) = K(s,x)\tilde{u}(s),$$

gdje $\tilde{}$ *označava Laplaceovu transformaciju u varijabli t.*

Iz jedinstvenosti Laplaceove transformacije slijedi:

Lema 3. *Sustav*

$$dZ(t) = AZ(t)dt + BdW(t), \quad Z(0) = 0 \tag{2.18}$$

$$r_0(t,x) = C(x)Z(t), \tag{2.19}$$

je realizacija od

$$dr_0(t,x) = Fr_0(t,x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad r^o(0,x) = 0 \tag{2.20}$$

ako i samo ako deterministički (kontrolirani) sustav

$$\frac{dr_0}{dt}(t,x) = Fr_0(t,x) + \sigma(x)u(t), \tag{2.21}$$

ima istu funkciju transfera kao i sustav

$$\frac{dZ}{dt}(t) = AZ(t) + Bu(t) \tag{2.22}$$

$$r_0(t,x) = C(x)Z(t). \tag{2.23}$$

Dalje, možemo odrediti funkciju transfera sustava:

Lema 4. *Funkcija transfera $K(s,x)$ sustava* (2.21) *dana je sa*

$$K(s,x) = \tilde{\sigma_x}(s),$$

gdje σ_x označava lijevu translaciju, tj. $\sigma_x(s) = \sigma(s+x)$.

Kada tražimo realizaciju danog sustava, općenito je jednostavnije raditi sa funkcijom transfera nego naći faktorizaciju $\sigma(x) = Ce^{Ax}B$. Sljedeći rezultat je koristan u tu svrhu:

Lema 5.
- *Funkcija transfera sustava* (2.22)-(2.23) *dana je sa*

$$K(s,x) = C(x)\left[sI - A\right]^{-1} B$$

- *Sustav $dr_0(t,x) = Fr_0(t,x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad r_0(0,x) = 0$ ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako postoji realizacija oblika*

$$\tilde{\sigma_x}(s) = C(x)\left[sI - A\right]^{-1} B$$

- *Neka je $K(s,x)$ funkcija transfera sustava za r_0 i neka postoji konačnodimenzionalna realizacija. Ako su A, B i C takvi da je*

$$K(s,0) = C\left[sI - A\right]^{-1} B,$$

tada je realizacija od r_0 dana sa $\left[A, B, Ce^{Ax}\right]$.

2.4 Minimalna realizacija

Sada znamo kada (uz navedene pretpostavke) postoji konačnodimenzionalna linearna realizacija. Idući problem je naći takvu linearnu realizaciju najmanje moguće dimenzije.

Definicija 10. *Dimenzija realizacije* $[A, B, C(x)]$ *definirana je kao dimenzija odgovarajućeg prostora stanja. Za realizaciju* $[A, B, C(x)]$ *kažemo da je minimalna ako ne postoji realizacija manje dimenzije. McMillanov stupanj* $\mathcal{D}$ *sustava kamatnih stopa definiran je kao dimenzija minimalne realizacije.*

Primjetimo da r_0 ima ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako se r_0 razvija na konačnodimenzionalnom potprostoru beskonačnodimenzionalnog prostora funkcija $\mathcal{H}$. Intuitivno se čini da McMilannov stupanj odgovara dimenziji tog potprostora. Kako bi odrediti takav potprostor, ponovno gledamo na r_0 kao na specijalan slučaj sustava kontroliranih jednadžbi, iz kojih je izostavljen x

$$\frac{dr_0}{dt} = Fr_0 + \sigma u(t), \tag{2.24}$$

$$r^o(0) = 0. \tag{2.25}$$

Rješenje je dano sa

$$r_0(t) = \int_0^t e^{F(t-s)} \sigma u(s) ds = \int_0^t \sum_0^\infty \frac{(t-s)^n}{n!} F^n \sigma u(s) ds.$$

Budući da je rješenje linearna kombinacija vektora oblika $F^n\sigma_i$, najmanji potprostor $\mathcal{R}$ koji sadrži $r_0(t)$ za sve t i za sve ulazne signale u je dan sa

$$\mathcal{R} = span\left[\sigma, F\sigma, F^2\sigma, \dots\right] = span\left[F^k\sigma_i; i = 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots\right] \tag{2.26}$$

Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 4. *Neka je volatilnost* $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ *zadana. Tada je McMillanov stupanj* $\mathcal{D}$ *dan sa*

$$\mathcal{D} = dim(\mathcal{R}), \tag{2.27}$$

gdje je $\mathcal{R}$ *definiran sa* (2.26). *Dakle, sustav kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako je prostor razapet komponentama od* σ *i njihovim derivacijama konačnodimenzionalan.*

2.5 Ekonomska interpretacija prostora stanja

Stanja minimalne realizacije definirane u prošlom poglavlju interpretiraju se kao minimalan skup "osnovnih" kamatnih stopa. Pretpostavimo da je $[A, B, C]$ $n-$ dimenzionalna minimalna realizacija (2.13)-(2.14). Odaberimo skup fiksnih vremena do dospijeća $x_1, \ldots, x_n$ (oznaka $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$). Nadalje, pretpostavljamo da je vektor vremena do dospijeća $\overline{x}$ odabran tako da je matrica

$$T(\overline{x}) = \begin{bmatrix} Ce^{Ax_1} \\ \vdots \\ Ce^{Ax_n} \end{bmatrix}$$

invertibilna. Može se pokazati ([4]) da se to može napraviti gotovo sigurno ukoliko su vremena do dospijeća različita. Uvedimo oznake:

$$r_0(t, \overline{x}) = \begin{bmatrix} r_0(t, x_1) \\ \vdots \\ r_0(t, x_n) \end{bmatrix},$$

te analogno $r(t, \overline{x})$ i $\delta(t, \overline{x})$. Sljedeći rezultat opisuje kako je cjelokupna vremenska struktura kamatnih stopa određena "osnovnim" kamatnim stopama:

Propozicija 5. *Neka je* (2.13)-(2.14) *minimalna realizacija kamatnih stopa te neka je vektor vremena do dospijeća odabran tako da je $T(\overline{x})$ invertibilna. Vrijedi sljedeće:*

- *Vektor kamatnih stopa $r(t, \overline{x})$ ima dinamiku*

$$dr(t, \overline{x}) = \left[T(\overline{x})AT^{-1}(\overline{x})r(t, \overline{x}) + \Psi(t, \overline{x})\right]dt + T(\overline{x})BdW(t), \tag{2.28}$$
$$r(0, \overline{x}) = r^o(0, \overline{x}),$$

  gdje je deterministička funkcija Ψ dana sa

$$\Psi(t, \overline{x}) = \frac{\partial r^o}{\partial x}(0, t\overline{e} + \overline{x}) + D(t\overline{e} + \overline{x}) - T(\overline{x})AT^{-1}(\overline{x})\delta(t, \overline{x})$$

  pri čemu $\overline{e}$ označava vektor jedinica

- *Skup "osnovnih" kamatnih stopa određuje cjelokupni proces kamatnih stopa prema sljedećoj formuli:*

$$r(t, x) = Ce^{Ax}T^{-1}(\overline{x})r(t, \overline{x}) - Ce^{Ax}T^{-1}(\overline{x})\delta(t, \overline{x}) + \delta(t, x) \tag{2.29}$$

- *Korespondencija između Z i r dana je sa*

$$r_0(t, \overline{x}) = T(\overline{x})Z(t) \tag{2.30}$$

Dokaz. • Budući da je $T = T(\overline{x})$ invertibilna, iz (2.12) imamo:

$$r_0(t, \overline{x}) = Tz(t), \tag{2.31}$$

$$z(t) = T^{-1} r_0(t, \overline{x}), \tag{2.32}$$

a iz (2.11) i (2.31) dobivamo:

$$\begin{aligned} dr_0(r, \overline{x}) &= Tdz = TAzdt + TBdW & (2.33) \\ &= TAT^{-1} r_0(t, \overline{x})dt + TBdW. & (2.34) \end{aligned}$$

Iz (2.6) dobivamo

$$dr(t, x) = dr_0(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}\delta(t, x)dt. \tag{2.35}$$

Ukoliko uvrstimo (2.34) u (2.35) te iskoristimo (2.6) i (2.8) dobivamo prvu tvrdnju.

• Vrijedi

$$\begin{aligned} r(t, x) &= r_0(t, x) + \delta(t, x) = Ce^{Ax} z(t) + \delta(t, x) \\ &= Ce^{Ax} T^{-1}(\overline{x}) r_0(t, \overline{x}) + \delta(t, x) \qquad = Ce^{Ax} T^{-1}(\overline{x}) \left[r(t, \overline{x}) - \delta(t, \overline{x}) \right] + \delta(t, x), \end{aligned}$$

iz čega slijedi druga tvrdnja.

□

2.6 Primjer (Hull-Whiteov model)

U Hull-Whiteovom modelu kamatnih stopa Brownovo gibanje je jednodimenzionalno, a volatilnost zadana s

$$\sigma(x) = \sigma e^{-ax},$$

gdje su $\sigma, a > 0$. Prema propoziciji 4 McMillanov stupanj sustava kamatnih stopa je

$$\mathcal{D} = dim(\mathcal{R}),$$

gdje je $\mathcal{R}$ prostor zadan s

$$\mathcal{R} = span\left[\frac{d^k}{dx^k} \sigma e^{-ax}; k \geq 0 \right].$$

Prostor $\mathcal{R}$ je jednodimenzionalan prostor razapet funkcijom e^{-ax}, dakle McMillanov stupanj $\mathcal{D}$ iznosi 1.

Sada želimo pronaći realizaciju, prema propoziciji 3 moramo faktorizirati funkciju volatilnosti. U ovom slučaju $\sigma(x)$ možemo zapisati kao $\sigma(x) = 1 \cdot e^{-ax} \cdot \sigma$. Dakle:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ A &= -a \\ B &= \sigma. \end{aligned}$$

Prema propoziciji 3 realizacija sustava kamatnih stopa dana je sa

$$\begin{aligned} dZ(t) &= -aZ(t)dt + \sigma dW(t), \\ r_0(t,x) &= e^{-ax}Z(t), \\ r(t,x) &= r_0(t,x) + \delta(t,x), \end{aligned}$$

a budući da je prostor stanja dimenzije 1, ta je realizacija i minimalna.
Preostalo je još analizirati interpretaciju prostora stanja. Kako je $\mathcal{D} = 1$, dovoljno je odabrati jedno "osnovno" vrijeme dospijeća. Odaberemo li $x_1 = 0$, tj. kratkoročnu kamatnu stopu $R(t)$, iz propozicije 5 imamo da je

$$T(\overline{x}) = 1,$$

$$r(t,\overline{x}) = R(t),$$

a dinamika kamatnih stopa je

$$dR(t) = \{\Psi(t,0) - aR(t)\}\, dt + \sigma dW(t).$$

Općenito, za vrijeme dospijeća x_1, dinamika koju dobivamo je

$$dr(t,x_1) = \{\Psi(t,x_1) - ar(t,x_1)\}\, dt + e^{-ax_1} dW(t),$$

a cjelokupni proces kamatnih stopa određen je formulom (2.29).

Poglavlje 3

Konzistentnost modela kamatnih stopa i familije krivulja

Pretpostavimo da u vremenu $t = 0$ (ili bilo kojem fiksnom vremenu) modeliramo cijene/kamatne stope obveznica. Svaki model koji odaberemo samo je aproksimacija stvarnih vrijednosti. Iz tog razloga, u praksi se model prilagođava svakoga dana (ili čak češće). U svakom trenutku prilagodbe modela, dobivamo novu krivulju kamatnih stopa. Označimo sa $\mathcal{G}$ neku familiju krivulja kamatnih stopa, a sa $\mathcal{M}$ korišten model kamatnih stopa. Reći ćemo da je par $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ konzistentan (ili da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{G}$ međusobno konzistentni) ako su sve krivulje kamatnih stopa koje možemo dobiti iz modela $\mathcal{M}$ sadržane u familiji $\mathcal{G}$, uz uvjet da je početna krivulja kamatnih stopa iz $\mathcal{G}$. Inače, za par $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ ćemo reći da je inkonzistentan. Ako koristimo fiksan model kamatnih stopa $\mathcal{M}$ i želimo prilagođavati krivulje, poželjno je da je dobivena familija krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}$ konzistentna sa modelom $\mathcal{M}$. Pitanja koja se nameću ću sljedeća:

1. Neka su dani model $\mathcal{M}$ i familija $\mathcal{G}$. Koji su nužni i dovoljni uvjeti za njihovu međusobnu konzistentnost?

2. Neka je dana familija $\mathcal{G}$. Postoji li model kamatnih stopa $\mathcal{M}$ koji je konzistentan sa $\mathcal{G}$?

3. Neka je zadan model $\mathcal{M}$. Postoji li konačna parametrizirana familija krivulja $\mathcal{G}$ konzistentna s $\mathcal{M}$?

3.1 Formulacija problema

Tržište je zadano kao i ranije: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F}$ filtracija inducirana $m-$dimenzionalnim Brownovim gibanjem W. Pretpostavljamo da je to tržište bez trenja koje ne dopušta arbitražu. Kamatna stopa u trenutku t na obveznicu s dospijećem $t + x$ dana je s

$$r(t,x) = -\frac{\partial \log p(t,x)}{\partial x}, \tag{3.1}$$

a dinamika kamatnih stopa s

$$dr(t,x) = \beta(t,x)dt + \sigma(t,x)dW. \tag{3.2}$$

Prisjetimo se, (propozicija 1), model kamatnih stopa $\mathcal{M}$ u potpunosti je određen volatilnošću $\sigma(t,x)$: Uz ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$, dinamika kamatnih stopa dana je sa:

$$dr(t,x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} r(t,x) + \sigma(t,x) \int_0^x \sigma(t,u)^\tau du \right\} dt + \sigma(t,x)dW(t). \tag{3.3}$$

Krivulje kamatnih stopa promatrat ćemo u težinskom Soboljevom prostoru, čije ćemo elemente označavati sa r.

Definicija 11. *Neka je $\gamma > 0$ proizvoljan. Prostor $\mathcal{H}_\gamma$ je prostor svih diferencijabilnih funkcija*

$$r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

koje zadovoljavaju uvjet $\|r\|_\gamma < \infty$. Pri tome je norma definirana sa

$$\|r\|_\gamma^2 = \int_0^\infty r^2(x) e^{-\gamma x} dx + \int_0^\infty \left(\frac{dr}{dx}(x) \right)^2 e^{-\gamma x} dx.$$

Ubuduće će indeks γ biti izostavljan, pisat ćemo $\mathcal{H}$ umjesto $\mathcal{H}_\gamma$. Sada promatramo preslikavanje

$$G : \mathcal{Z} \to \mathcal{H}, \tag{3.4}$$

pri čemu je $\mathcal{Z}$ otvoren povezan podskup od $\mathbb{R}^d$. Dakle za svaki parametar $z \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^d$ imamo krivulju $G(z) \in \mathcal{H}$. Vrijednost te krivulje u točki $x \in \mathbb{R}_+$ označavat ćemo sa $G(x,z)$, pa G možemo shvatiti i kao preslikavanje

$$G : \mathcal{Z} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Sada možemo formalno zadati problem konzistentnosti modela kamatnih stopa (3.2) i parametrizirane krivulje kamatnih stopa (3.5):
Pretpostavimo da smo u proizvoljnom trenutku $t = s$ prilagodili krivulju kamatnih stopa G modelu. To znači da smo odredili početnu krivulju kamatnih stopa, tj. da za neko $z_0 \in \mathcal{Z}$ imamo

$$r^*(s,x) = G(x;z_0), \quad \forall x \geq 0. \tag{3.6}$$

Pitanje je tada sljedeće: ostaju li krivulje dobivene iz modela (3.2) unutar dane familije krivulja, tj. postoji li za svako fiksno $t \geq s$ $z \in \mathcal{Z}$ takav da vrijedi

$$r(t, x) = G(x; z), \quad \forall x \geq 0? \tag{3.7}$$

Ovdje z može ovisiti o t i o $\omega \in \Omega$. Uvodimo pojam mnogostrukosti krivulja kamatnih stopa:

Definicija 12. *Mnogostrukost krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ defnirana je sa*

$$\mathcal{G} = Im(G).$$

Definicija 13. *Neka je $\mathcal{G}$ mnogostrukost krivulja kamatnih stopa i $r(t, x)$ proces kamatnih stopa. Kažemo da je $\mathcal{G}$ invarijantna na djelovanje procesa r ako, za svako fiksno početno vrijeme s, uvjet $r(s, \cdot) \in \mathcal{G}$ implicira da je $r(t, \cdot) \in \mathcal{G}$, $\forall t \geq s$, $\mathbb{P}^*-g.s.$*

Dakle, par $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ je konzistentan ako i samo ako je mnogostrukost $\mathcal{G}$ invarijantna na djelovanje procesa r, a pitanje koje se postavlja je kada je to slučaj.

3.2 Konačnodimenzionalan slučaj

Deterministički slučaj

Neka su zadani:

- Determinističko $n-$dimenzionalno preslikavanje $Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

  sa diferencijalom zadanim sa

$$\frac{dY}{dt} = \mu(t, Y(t)). \tag{3.9}$$

  Pri tome je $\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neko glatko vektorsko polje[1].

[1]Glatko vektorsko polje X na mnogostrukosti M je linearno preslikavanje $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ takvo da je $X(fg) = fX(g) + X(f)g$ za sve $f, g \in C^\infty(M)$.

- Glatko preslikavanje $G : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^n$

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) \\ G_2(z) \\ \vdots \\ G_n(z) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Proces kamatnih stopa odgovara funkciji Y na način da svaka komponenta $Y(t)$ odgovara određenoj $x-$toj koordinati beskonačnodimenzionalnog vektora $r(t, x)$ (primjerice jednogodišnjoj kamatnoj stopi u trenutku t). Dakle, na taj način zadan je model kamatnih stopa $\mathcal{M}$.
Definiramo i mnogostrukost krivulja $\mathcal{G}$ kao

$$\mathcal{G} = \{G(z) : z \in \mathcal{Z}\}\,. \tag{3.11}$$

Pretpostavljamo da je $Y(s) \in \mathcal{G}$, tj. da je za neko $z_0 \in \mathcal{Z}$ početna struktura kamatnih stopa dana sa $G(z_0)$. Zanima nas kada vrijedi

$$Y(t) \in \mathcal{G}, \quad \forall t \geq s, \quad \mathbb{P}^* - g.s. \tag{3.12}$$

To vrijedi ako i samo ako vektor $\frac{dY}{dt}$ pripada tangencijalnom prostoru $T_{Y(t)}(\mathcal{G})$ za svaki $t \geq s$. Ako je $y = G(z)$ proizvoljna točka na $\mathcal{G}$, tangencijalni prostor u toj točki je razapet tangencijalnim vektorima oblika

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{3.13}$$

Označimo sa $DG(z)$ Frechetovu derivaciju (Jakobijan) od G u (z), tj. stupci matrične reprezentacije DG su gornji tangencijalni vektori. Dakle, tangencijalni prostor $T_y(\mathcal{G})$ na $\mathcal{G}$ u točki $y = G(z)$ poklapa se sa slikom $Im\,[DG(z)]$.
Slijedi da vrijedi (3.12) ako i samo ako je

$$\mu(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)] \tag{3.14}$$

za sve $t \geq s$ i za sve z takve da je $G(z) = Y(t)$. Budući da (3.12) mora vrijediti za sve početne trenutke s i za sve početne točke $Y(s)$, relacija (3.14) zapravo mora vrijediti za sve t i za sve z, što nam daje sljedeći rezultat:

Propozicija 6. *Mnogostrukost $\mathcal{G}$ je invarijantna na djelovanje Y ako i samo je*

$$\mu(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)] \tag{3.15}$$

za sve $z \in \mathcal{Z}$ i svaki $t \geq 0$.

Dakle, par $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ je konzistentan pod danim uvjetom.

Kontrolirani slučaj

Sada pretpostavljamo da je Y kontrolirani sustav oblika

$$\frac{dY}{dt} = \mu(t, Y(t)) + \sigma(t, Y(t))u(t), \tag{3.16}$$

gdje $u(t) \in \mathbb{R}^m$ predstavlja deterministički ulazni signal, a σ $n \times m$ matricu. Za u možemo odabrati bilo koju od funkcija u $\mathbb{R}^m$. Sustav ima ulogu modela $\mathcal{M}$ za koji pretpostavljamo da je u vezi sa nekom mnogostrukošću $\mathcal{G}$. Pretpostavljamo dakle da je $Y(s) \in \mathcal{G}$ za proizvoljan početni trenutak s. Pitanje koje se postavlja je kada trajektorija od Y ostaje na $\mathcal{G}$ za sve $t \geq s$, neovisno o izboru u. Odgovor je ponovo intuitivan: $\mathcal{G}$ je invarijantna na djelovanje Y ako vektor $\frac{dY}{dt}$ pripada tangencijalnom prostoru na $\mathcal{G}$, neovisno o izboru u. Vrijedi:

Propozicija 7. *Mnogostrukost $\mathcal{G}$ je invarijantna na djelovanje Y ako i samo ako je*

$$\mu(t, G(z)) + \sigma(t, G(z))u \in Im\,[DG(z)]\,, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m \tag{3.17}$$

za sve $z \in \mathcal{Z}$ i svaki $t \geq 0$.

Zaključujemo da je $\mathcal{M}$ konzistentan s $\mathcal{G}$ ako i samo ako su, u svakoj točki iz $\mathcal{G}$, svi smjerovi razapeti parametrima modela μ i σ sadržani u tangencijalnom prostoru na $\mathcal{G}$ u toj točki.
Lako se vidi da je uvjet (3.17) ekvivalentan uvjetima

$$\mu(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)]\,, \tag{3.18}$$

$$\sigma(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)]\,^{2}, \tag{3.19}$$

za sve $t \geq 0$ i sve $z \in \mathcal{Z}$.
Još jedan ekvivalentan uvjet je postojanje preslikavanja $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^d$ i $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_{d\times m}$ takvih da je $\mu(t, G(z)) = DG(z)\gamma(t, z)$ i $\sigma(t, G(z)) = DG(z)\psi(t, z)$ za svaki par $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$.

Stohastički slučaj

Naposlijetku promatramo slučaj u kojem je $n-$dimenzionalni proces Y rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe oblika

$$dY(t) = \mu(t, Y(t))dt + \sigma(t, Y(t))dW(t). \tag{3.20}$$

Mnogostrukost $\mathcal{G}$ definirana je kao i ranije. Pretpostavljamo da za proizvoljan početni trenutak s vrijedi $Y(s) \in \mathcal{G}$. Pitanje je sada kada Y ostaje na mnogostrukosti $\mathcal{G}$ $\mathbb{P}^* - g.s.$

[2] Svaki stupac matrice σ pripada $Im\,[DG(z)]$.

Ovdje, zbog razlika između običnog i Itôvog diferencijalnog računa, ne možemo primijeniti iste metode kao u poglavlju 2.3. Problem ćemo riješiti uvođenjem Stratonovichevog integrala.

Definicija 14. *Za dane semimartingale X i Y, Stratonovichev integral od X u odnosu na Y definiran je sa*

$$\int_0^t X(s) \circ dY(s) = \int_0^t X(s)dY(s) + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t . \tag{3.21}$$

Prvi član na desnoj strani je Itôv integral, a drugi kvadratna varijacija procesa X i Y definirana sa

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t dX(s)dY(s). \tag{3.22}$$

Slijede glavni rezultati i razlog uvođenja Stratonovicheva integrala. Naime, u Stratonovichevom diferencijalnom računu Itôva formula poprima oblik lančanog pravila u standardnom diferencijalnom računu:

Propozicija 8. *Neka je $F(t, y)$ glatka funkcija. Tada vrijedi:*

$$dF(t, Y(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, Y(t))dt + \frac{dY}{dt} \circ dY(t). \tag{3.23}$$

Nužan i dovoljan uvjet za konzistentnost para $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ dani su u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 9. *Pretpostavimo da je proces Y dan sljedećim Stratonovichevim diferencijalom*

$$dY(t) = \mu(t, Y(t))dt + \sigma(t, Y(t)) \circ dW(t). \tag{3.24}$$

Tada je mnogostrukost $\mathcal{G}$ invarijantna na djelovanje Y ako i samo ako postoje preslikavanja $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^d$ i $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_{d\times m}$ takva da je:

$$\mu(t, G(z)) = DG(z)\gamma(t, z), \tag{3.25}$$

$$\sigma(t, G(z)) = DG(z)\psi(t, z), \tag{3.26}$$

za sve $t \geq 0$ i $Z \in \mathcal{Z}$.

Kao i u prethodnom slučaju, uvjeti (3.25)-(3.26) mogu se zamijeniti uvjetima

$$\mu(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)]\,, \tag{3.27}$$

$$\sigma(t, G(z)) \in Im\,[DG(z)]\,. \tag{3.28}$$

3.3 Invarijantni modeli kamatnih stopa

Vraćamo se rješavanju originalnog, beskonačnodimenzionalnog slučaja. Definiramo operator H sa

$$H\sigma(r,x) = \int_0^x \sigma(r,s)ds.$$

Kada izostavimo x, uz ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$, Itôva dinamika kamatnih stopa dana je sa:

$$dr_t = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} r_t + \sigma(r_t) H\sigma(r_t)^\tau \right\} dt + \sigma(r_t) dW_t. \tag{3.29}$$

Stratonovicheva dinamika uz ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ je tada dana sa:

$$dr_t = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} r_t + \sigma(r_t) H\sigma(r_t)^\tau \right\} dt - \frac{1}{2} d\left\langle \sigma(r_t), W_t \right\rangle + \sigma(r_t) \circ dW_t \tag{3.30}$$

Koristeći beskonačnodimenzionalnu Itôvu formulu dobivamo

$$\langle \sigma(r_t), W \rangle = \sigma'(r_t)\sigma(r_t)dt = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i'(r_t)\sigma_i(r_t), \tag{3.31}$$

gdje σ' označava Frechetovu derivaciju od σ. Neka je time zadan model kamatnih stopa $\mathcal{M}$, i neka je mnogostrukost krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}$ zadana. Kao i ranije, zanimaju nas uvjeti pod kojima će par $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ biti konzistentan. U beskonačnodimenzionalnom slučaju, definicija invarijantnosti je sljedeća:

Definicija 15. *Neka je proces kamatnih stopa $r(t,x)$ zadan modelom $\mathcal{M}$, i neka je zadana mnogostrukost krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}$. Kažemo da je $\mathcal{G}$ r-invarijantna na djelovanje procesa $r(t,x)$ ako postoji stohastički proces Z sa prostorom stanja $\mathcal{Z}$ koji zadovoljava Stratonovichev diferencijal oblika*

$$dZ(t) = \gamma(t, Z(t))dt + \psi(t, Z(t)) \circ dW(t), \tag{3.32}$$

tako da je, za svaki izbor početnog trenutka s, za svaku $y(s,\cdot) \in \mathcal{G}$, stohastički proces definiran sa

$$y(t,x) = G(x; Z(t)), \quad \forall t \geq s, \quad x \geq 0, \tag{3.33}$$

rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.30) *sa početnim uvjetom $r(s,\cdot) = y(s,\cdot)$.*

Proces Z iz definicije prikazuje kako se, pomicanjem krivulje kamatnih stopa po $\mathcal{G}$, mijenja parametar z. Ponovno izostavljajući x, vrijedi sljedeći teorem koji je glavni rezultat vezan uz invarijantnost:

Teorem 2. *Neka je Itôva dinamika kamatnih stopa dana s* (3.29)*. Mnogostrukost krivulja kamatnih stopa* $\mathcal{G}$ *je r-invarijantna na djelovanje procesa kamatnih stopa* $r(t,x)$ *iz modela* $\mathcal{M}$ *ako i samo ako je*

$$G_x(z) + \sigma(r_t)H\sigma(r_t)^\tau - \frac{1}{2}\sigma'(r_t)\sigma(r_t) \in Im\left[G_z(z)\right], \tag{3.34}$$

$$\sigma(r_t) \in Im\left[G_z(z)\right]^3, \tag{3.35}$$

za sve $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$.

G_z i G_x označavaju Frechetove derivacije funkcije G po z i x, respektivno (za koje pretpostavljamo da postoje). Uvjet (3.34) naziva se uvjet konzistentnosti drifta, a uvjet (3.35) uvjet konzistnentnosti volatilnosti.

Dokaz. $\Rightarrow$
Pretpostavljamo da da je mnogostrukost $\mathcal{G}$ r-invarijantna. Iz definicije slijedi

$$dy(t,x) = G_z(x;Z(t))\gamma(t,Z(t))dt + G_z(x;Z(t))\psi(t,Z(t)) \circ dW(t) \tag{3.36}$$

Uspoređujući taj izraz sa (3.30) i izjednačavajući koeficijente, za svaki $t \geq s$, uz $z = Z(t)$ dobivamo uvjete (3.34)-(3.35). Budući da je početni trenutak s proizvoljan, kao i $r(s,\cdot)$ i $Z(s)$, zaključujemo da uvjeti (3.34)-(3.35) vrijede za sve $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$.
$\Leftarrow$
Pretpostavljamo da vrijede uvjeti (3.34)-(3.35). Neka su $\gamma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^d$ i $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_{d\times m}$ preslikavanja koja zadovoljavaju

$$G_x(\cdot;z) + \sigma(t,\cdot)H\sigma(t,x)^\tau + \varphi(t,\cdot) = G_z(\cdot;z)\gamma(t,z), \tag{3.37}$$

$$\sigma(t,\cdot) = G_z(\cdot;z)\psi(t,z) \tag{3.38}$$

za sve $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Z}$. Neka je $y(s,\cdot) \in \mathcal{G}$, dakle za neki $z_0 \in \mathcal{Z}$ neka je $y(s,\cdot) = G(\cdot;z)$. Definiramo Z kao rješenje jednadžbe (3.32) sa početnim uvjetom $Z(s) = z_0$, i definiramo beskonačnodimenzionalan proces $y(t,x)$ sa $y(t,x) = G(x;Z(t))$. Tada je

$$\begin{aligned} dy(t,x) &= G_z(x;Z(t))\gamma(t,Z(t))dt + G_z(x;Z(t))\psi(t,Z(t)) \circ dW(t) \\ &= \{G_x(x;Z(t)) + \sigma(t,x)H\sigma(t,x)^\tau + \varphi(t,x)\}\, dt + \sigma(t,x) \circ dW(t) \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}y(t,x) + \sigma(t,x)H\sigma(t,x)^\tau + \varphi(t,x)\right\} dt + \sigma(t,x) \circ dW(t). \end{aligned}$$

Dakle, y je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.30), što znači da je mnogostrukost $\mathcal{G}$ r-invarijantna na djelovanje procesa $r(t,x)$. □

[3] Svaka komponenta od σ pripada $Im\left[G_z(\cdot;z)\right]$.

Sada imamo nužan i dovoljan uvjet za invarijantnost pa možemo definirati konzistentnost na sljedeći način:

Definicija 16. *Kažemo da je model kamatnih stopa $\mathcal{M}$ konzistentan sa mnogostrukošću krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}$ ako vrijede uvjeti konzistentnosti drifta i volatilnosti* (3.34)-(3.35).

Dakle, dan je odgovor na problem 1 i približili smo se rješenjima problema 2 i 3. U idućem poglavlju riješit ćemo te probleme u nekoliko posebnih slučajeva.

3.4 Primjeri

U ovom poglavlju promatrat ćemo konkretan model krivulja, modele kamatnih stopa i njihovu međusobnu (ne)konzistentnost.

Nelson-Siegelova familija krivulja

Mnogostrukost krivulja kamatnih stopa iz Nelson-Siegelove (NS) familije krivulja $\mathcal{G}$ parametrizirana je sa $z \in \mathcal{Z} = \mathbb{R}^4$:

$$G(x; z) = z_1 + z_2 e^{-z_4 x} + z_3 x e^{-z_4 x}. \tag{3.39}$$

Za $z_4 \neq 0$ Frechetove derivacije su

$$G_z(x; z) = \left[1, e^{-z_4 x}, x e^{-z_4 x}, -(z_2 + z_3 x) x e^{-z_4 x}\right], \tag{3.40}$$

$$G_x(x; z) = (z_3 - z_2 z_4 - z_3 z_4 x) e^{-z_4 x}. \tag{3.41}$$

Za degeneriran slučaj $z_4 = 0$ imamo

$$G(x; z) = z_1 + z_2 + z_3 x, \tag{3.42}$$

vidimo da bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $z_2 = 0$ pa tako dobivamo dvodimenzionalnu degeneriranu familiju oblika

$$G(x; z) = z_1 + z_3 x, \tag{3.43}$$

čije su Frechetove derivacije

$$G_z(x; z) = [1, x], \tag{3.44}$$

$$G_x(x; z) = z_3. \tag{3.45}$$

Prostor parametara za nedegeneriran slučaj NS označit ćemo sa $\mathcal{Z}_{NS} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_4 \neq 0\}$, a odgovarajuću mnogostrukost krivulja sa $\mathcal{G}_{NS} = G(\mathcal{Z}_{NS})$. U degeneriranom slučaju, prostor parametara označit ćemo sa $\mathcal{Z}_0 = \{z \in \mathcal{Z} : z_2 = z_4 = 0\}$, a odgovarajuću mnogostrukost krivulja sa $\mathcal{G}_0 = G(\mathcal{Z}_0)$.

Ho-Leejev model

Kratkoročna kamatna stopa definira se kao

$$s(t) = r(t, 0).$$

Ho-Leejev (HL) model je model kamatnih stopa oblika

$$ds(t) = \Phi(t)dt + \sigma dW(t), \tag{3.46}$$

gdje je volatilnost $\sigma > 0$ konstantna, W jednodimenzionalno Brownovo gibanje, a funkcija drifta Φ dobivena tako da se opažena i teoretska krivulja kamatnih stopa poklapaju u trenutku $t = 0$. Preciznije

$$\Phi(t) = \sigma^2 t + \frac{\partial r^*}{\partial T}(0, t), \tag{3.47}$$

gdje je $\{r^*(0, x) : x \geq 0\}$ dobivena iz cijena obveznica koristeći neki model prilagodbe krivulja, recimo Nelson-Siegelov model. HL model, u skladu sa Heath-Jarrow-Morton metodologijom, glasi;

$$dr(t, x) = \beta(t, x)dt + \sigma dW(t), \tag{3.48}$$

gdje je σ jednak kao u (3.46). Nadalje, budući da je volatilnost ovdje deterministički proces, vrijedi $\langle\sigma, W\rangle = 0$, tj. $\varphi = 0$ u uvjetu (3.34). Dakle, prema teoremu 2, nužni i dovoljni uvjeti za konzistentnost HL modela $\mathcal{M}$ i dane mnogostrukosti krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}$ su uvjeti konzistentnosti volatilnosti i drifta:

$$G_x(\cdot, z) + \sigma^2 x \in Im\left[G_z(\cdot, z)\right], \tag{3.49}$$

$$\sigma \in Im\left[G_z(\cdot, z)\right]. \tag{3.50}$$

Lako se vidi da je uvjet (3.50) zadovoljen pa preostaje provjeriti samo uvjet (3.49). Za konkretan slučaj familije krivulja kamatnih stopa- Nelson-Siegelovu familiju $\mathcal{G}_{NS}$ moramo provjeriti postoje li za svako $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ konstante A, B, C, D (koje mogu ovisiti o z) takve da je

$$\left[z_3 - z_2 z_4 - z_3 z_4 x\right] e^{-z_4 x} + \sigma^2 x = A + Be^{-z_4 x} + Cxe^{-z_4 x} - D(z_2 + z_3 x)xe^{-z_4 x}, \tag{3.51}$$

za sve $x \geq 0$. Gornja jednakost ne može vrijediti osim ako je $z_4 = 0$. Dakle, HL model kamatnih stopa nije konzistetntan s nedegeneriranon mnogostrukošću krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}_{NS}$. Preostaje provjeriti je li HL model konzistentan s degeneriranom Nelson-Siegelovom mnogostrukošću krivulja. Uvjet (3.50) je zadovoljen, a da bi vrijedio uvjet (3.49) za proizvoljne z_1 i z_3 moraju postojati konstante A i B takve da vrijedi

$$z_3 + \sigma^2 x = A + Bx, \quad \forall x \geq 0. \tag{3.52}$$

To vrijedi za $A = z_3$ i $B = \sigma^2$. Time smo dokazali sljedeći rezultat:

Propozicija 10. *(a) Potpuna Nelson-Siegelova familija krivulja nije konzistentna s Ho-Leejevim modelom kamatnih stopa*

(b) Degenerirana Nelson-Siegelova familija $G(x;z) = z_1 + z_3 x$ je konzistentna s Ho-Leejevim modelom kamatnih stopa.

Zaključujemo da, ukoliko je početna struktura kamatnih stopa afina funkcija, ona djelovanjem HL dinamike ostaje afina funkcija. Riješili smo problem 3- za dani model, pronašli smo njemu konzistentnu mnogostrukost kamatnih stopa. Obrnuto, za klasu afinih funkcija kamatnih stopa pronašli smo konzistentan model kamatnih stopa- dakle riješili smo i problem 2.

Hull-Whiteov model

Sljedeći model kamatnih stopa koji promatramo je Hull-Whiteov (HW) model dan sa:

$$ds(t) = \{\Phi(t) - as(t)\}\,dt + \sigma dW(t), \tag{3.53}$$

pri čemu su $a, \sigma > 0$. Ovaj model poopćuje HL model kamatnih stopa u smislu da dozvoljava centriranje[4]. Kao i u HL modelu, funkcija drifta Φ dobivena je iz opažene početne familije krivulja kamatnih stopa koja je dobivena iz nekog modela prilagodbe krivulja, primjerice Nelson-Siegelovog modela. HW model, u skladu s Heath-Jarrow-Morton metodologijom, glasi

$$dr(t,x) = \beta(t,x)dt + \sigma e^{-ax} dW(t). \tag{3.54}$$

Uvjeti teorema 2 sada postaju

$$G_x(x;z) + \frac{\sigma^2}{a}\left[e^{-ax} - e^{-2ax}\right] \in Im\left[G_z(x,z)\right], \tag{3.55}$$

$$\sigma e^{-ax} \in Im\left[G_z(x,z)\right]. \tag{3.56}$$

Kako bi mnogostrukost krivulja kamatnih stopa $\mathcal{G}_{NS}$ bila invrijantna za HW model kamatnih stopa, za proizvoljan $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ moraju postojati konstante A, B, C i D tako da za svaki $x \geq 0$ vrijedi

$$\sigma e^{-ax} = A + Be^{-z_4 x} + Cxe^{-z_4 x} - D(z_2 + z_3 x)xe^{-z_4 x}. \tag{3.57}$$

To je slučaj ako i samo ako je $z_4 = a$, iz čega odmah zaključujemo da model kamatnih stopa HW i mnogostrukost krivulja iz potpunog Nelson-Siegel modela nisu međusobno konzistentni. Možemo se pitati je li HW model kamatnih stopa sa fiksno izabranim a konzistentan

[4]Eng. *mean reversion* što označava financijsku teoriju u kojoj se, dugoročno, cijene financijske imovine stabiliziraju.

sa trodiomenzionalnom restringiranom mnogostrukošću NS krivulja kamatnih stopa definiranom sa

$$G(x;z) = z_1 + z_2 e^{-ax} + z_3 x e^{-ax}. \tag{3.58}$$

Preciznije, ako označimo sa $\mathcal{Z}_a = \{z \in \mathcal{Z}_{NS} : z_4 = a\}$, je li model kamatnih stopa HW konzistentan sa $\mathcal{G}_a = G(\mathcal{Z}_a)$? U tom slučaju, Frechetove derivacije dane su sa

$$G_z(x;z) = \left[1, e^{-ax}, xe^{-ax}\right], \tag{3.59}$$

$$G_x(x;z) = [z_3 - az_2 - az_3 x]\, e^{-ax}. \tag{3.60}$$

Za tako definiranu podmnogostrukost, uvjet (3.56) je zadovoljen po definiciji. Kako bi uvjet (3.55) bio zadovoljen, za proizvoljno $z \in \mathcal{Z}_a$ tražimo konstante A, B i C takve da vrijedi

$$[z_3 - az_2 - az_3 x]\, e^{-ax} + \frac{\sigma^2}{a}\left[e^{-ax} - e^{-2ax}\right] = A + Be^{-ax} + Cxe^{-ax}, \quad \forall x \geq 0. \tag{3.61}$$

Takve konstante ne postoje, osim ako je $a = 0$, a u tom slučaju dobivamo Ho-Leejev model koji smo već proučavali. Dakle, dokazali smo sljedeće:

Propozicija 11. *Hull-Whiteov model kamatnih stopa i Nelson-Siegelova familija krivulja nisu međusobno konzistentni.*

Zaključujemo da, iako početna krivulja pripada NS familiji, djelovanjem dinamike HW modela kamatnih stopa, vremenska struktura kamatnih stopa napušta tu mnogostrukost krivulja nakon određenog vremenskog trenutka.
Vidjeli smo da restringiranjem NS familije ne postižemo konzistentnost sa HW modelom. Postavlja se pitanje može li se konzistentnost postići proširivanjem NS familije. Pokazuje se da je odgovor potvrdan, a gornja razmatranja mogu nas navesti na ideju što je 'nedostajalo' originalnoj NS familiji krivulja. Najprije, mora vrijediti da je $z_4 = a$, a zatim, kako bi izbjegli izlazak vremenske strukture kamatnih stopa sa mnogostrukosti krivulja dobivene iz NS modela, u modelu mora sudjelovati eksponencijalni član oblika e^{-2ax}. Definiramo proširenu mnogostrukost krivulja iz NS familije krivulja $\overline{\mathcal{G}_a}$ sa

$$G(x;z) = z_1 + z_2 e^{-ax} + z_3 x e^{-ax} + z_4 e^{-2ax}, \tag{3.62}$$

gdje je konstanta a jednaka kao i u (3.53). Analogno kao i ranije, dolazimo do sljedećeg rezultata:

Propozicija 12. *Proširena Nelson-Siegelova familija krivulja i Hull-Whiteov model kamatnih stopa su međusobno konzistentni.*

Napomena 3. *Proširena Nelson-Siegelova familija krivulja nije minimalna familija konstistentna sa Hull-White modelom kamatnih stopa. Minimalna konzistentna familija dana je sa*

$$G(x; z) = z_1 e^{-ax} + z_2 e^{-2ax}.$$

Poglavlje 4

Egzistencija nelinearne realizacije

Vraćamo se problemu 2 iz poglavlja 1, tj. pitamo se kada dani model kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju. Zbog jednostavnosti, ograničit ćemo se na jednodimenzionalno Brownovo gibanje (iako će rezultati biti dani u općenitom slučaju) i na vremenski invarijantnu dinamiku kamatnih stopa. Slučajevi sa višedimenzionalnim Brownovim gibanjem i vremenski promjenjivim sustavima kamatnih stopa rješavaju se slično. Kako bi mogli proučavati zadani problem, treba nam nekoliko dodatnih pretpostavki na prostor koji promatramo.

4.1 Prostor

Odabrat ćemo prostor tako da osiguramo egzistenciju jakog lokalnog rješenja jednadžbe kamatnih stopa za svaku početnu točku iz tog prostora.

Definicija 17. *Neka je $\gamma > 0$ realan broj. prostor $\mathcal{B}_\gamma$ definiran je kao prostor svih beskonačno diferencijabilnih funkcija*

$$r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

koje zadovoljavaju uvjet $\|r\|_\gamma < \infty$. Pri tome je norma definirana sa

$$\|r\|_\gamma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \int_0^\infty \left(\frac{d^n r}{dx^n}(x) \right)^2 e^{-\gamma x} dx.$$

Kao i ranije, i ovdje ćemo izostavljati indeks γ te umjesto $\mathcal{B}_\gamma$ pisati samo $\mathcal{B}$.

Propozicija 13. *Prostor $\mathcal{B}$ je Hilbertov prostor, tj. potpun prostor. Svaka funkcija koja pripada prostoru $\mathcal{B}$ je realna analitička, dakle može se na jedinstven način proširiti do holomorfne funkcije na cijeloj kompleksnoj ravnini.*

Pretpostavljamo da je zadana volatilnost $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ takva da vrijedi:

- Preslikavanje σ je glatko
- Preslikavanje
$$r \mapsto \sigma(t, r(t))H\sigma(t, r(t))^\tau - \frac{1}{2}\sigma'(t, r(t))\sigma(t, r(t))$$
je glatko preslikavanje sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}$.

Promatramo model kamatnih stopa induciran zadanom volatilnošću (u Stratonovichevu obliku):
$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t)) \circ dW(t), \tag{4.1}$$
gdje je
$$\mu(t, r(t)) = \frac{\partial}{\partial x}r(t) + \sigma(t, r(t))H\sigma(t, r(t))^\tau - \frac{1}{2}\sigma'(t, r(t))\sigma(t, r(t)). \tag{4.2}$$
U prostoru $\mathcal{B}$, linearni operator $F = d/dx$ je omeđen. Iz te činjenice i iz pretpostavki navedenih iznad slijedi da su μ i σ glatka vektorska polja na $\mathcal{B}$. Dakle, postoji jako lokalno rješenje jednadžbe kamatnih stopa za svaku početnu točku $r^* \in \mathcal{B}$.

4.2 Geometrijska interpretacija problema

Zanima nas kada, uz zadanu volatilnost i početnu krivulju kamatnih stopa r^*, odgovarajući sustav kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju te kako ju pronaći. Zapravo tražimo $d-$dimenzionalna vektorska polja a i b, početnu točku $z_0 \in \mathbb{R}^d$ i preslikavanje $G : \mathbb{R}^d \to \mathcal{B}$ takve da r lokalno[1] ima reprezentaciju

$$dZ(t) = a(Z(t))dt + b(Z(t)) \circ dW(t), \quad Z(0) = z_0 \tag{4.3}$$

$$r(t, x) = G(Z(t), x). \tag{4.4}$$

Napomena 4. *Primjetimo da se za zadano σ može dogoditi da model kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju za određenu početnu krivulju kamatnih stopa r^*, dok je realizacija beskonačnodimenzionalna za sve ostale početne krivulje u okolini od r^*. Za takav model kažemo da je negenerički ili slučajan konačnodimenzionalan model. Ako pak r ima konačnodimenzionalne realizacije za sve početne krivulje u okolini od r^* kažemo da je model generički konačnodimenzionalan model. Ovdje ćemo se baviti samo generičkim problemom.*

[1]Lokalno u ovom kontekstu znači da reprezentacija vrijedi za sve $0 \geq t \geq T$, gdje je T fiksno vrijeme zaustavljanja.

Sljedeća propozicija povezuje problem nalaženja konačnodimenzionalne realizacije sa invarijantnim mnogostrukostima:

Propozicija 14. *Proces kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako postoji konačnodimenzionalna invarijantna mnogostrukost $\mathcal{G}$ takva da je $r^* \in \mathcal{G}$.*

Iz teorema 2 direktno slijedi sljedeća karakterizacija egzistencije konačnodimenzionalne realizacije:

Korolar 1. *Proces kamatnih stopa ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako postoji konačnodimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{G}$ koja sadrži r^*, tako da za svaku krivulju $r \in \mathcal{G}$ vrijede sljedeći uvjeti*

$$\mu(\cdot, r(\cdot)) \in T_{\mathcal{G}}(r(\cdot)),$$

$$\sigma(\cdot, r(\cdot)) \in T_{\mathcal{G}}(r(\cdot)).$$

$T_{\mathcal{G}}$ označava tangencijalan prostor na mnogostrukost $\mathcal{G}$ u točki r, a μ i σ su vektorska polja kao i ranije.

4.3 Glavni rezultat

Ukoliko imamo zadanu volatilnost σ (a time imamo i μ), suočavamo se s problemom egzistencije konačnodimenzionalne mnogostrukosti $\mathcal{G}$ takve da σ i μ pripadaju tangencijalnom prostoru na $\mathcal{G}$ u svakoj točki iz $\mathcal{G}$.
Krećemo s pojednostavljenim problemom - promatramo prostor $\mathcal{B}$ i glatko vektorsko polje f na tom prostoru. Pitamo se postoji li, za svaku fiksnu $r^* \in \mathcal{B}$, konačnodimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{G}$ takva da je $r^* \in \mathcal{G}$ i takva da je f u tangencijalnom prostoru na $\mathcal{G}$ u svakoj točki. Odgovor na to pitanje bit će potvrdan, štoviše mnogostrukost će se moći odabrati tako da bude jednodimenzionalna.
Promatramo beskonačno dimenzionalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dr(t)}{dt} = f(r(t)), \tag{4.5}$$

$$r(0) = r^*. \tag{4.6}$$

Ako je $r(t)$ rješenje gornje jednadžbe u vremenu t, koristit ćemo zapis

$$r(t) = e^{fr} r^*.$$

Dakle definirali smo grupu operatora $\left\{e^{ft} : t \in \mathbb{R}\right\}$, a skup $\left\{e^{ft} r^* : t \in \mathbb{R}\right\}$ je integralna krivulja vektorskog polja f koja prolazi kroz točku r^*. f pripada tangencijalnom prostoru na tu krivulju u svakoj točki krivulje, pa $\mathcal{G}$ možemo odabrati kao tu integralnu krivulju.

Pretpostavimo sada da imamo zadana dva vektorska polja f_1 i f_2 (možemo ih shvatiti kao σ i μ). Uz fiksnu $r^* \in \mathcal{B}$, pitamo se postoji li konačnodimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{G}$ koja sadrži r^* takva da su f_1 i f_2 u tangencijalnom prostoru na $\mathcal{G}$ u svakoj točki iz $\mathcal{G}$. Kada bi sljedili raniji postupak, krenuvši od r^* generirali bismo integralnu krivulju $\left\{e^{f_1 s} r^* : s \geq 0\right\}$. Tada bismo za svaku točku $e^{f_1 s} r^*$ te krivulje generirali integralnu krivulju koristeći f_2. Dakle kandidat za mnogostrukost $\mathcal{G}$ je dvodimenzionalni prostor koji se sastoji od objekata oblika $e^{f_2 t} e^{f_1 s} r^*$. U općenitom slučaju, to neće biti odgovarajuća mnogostrukost. Naime krenuli smo od integralne krivulje generirane s f_1 pa zatim primjenili f_2. Isto tako mogli smo krenuti od integralne krivulje generirane s f_2 i zatim primjeniti f_1. Kako bi zaobišli taj problem komutativnosti, definiramo tzv. Liejevu zagradu.

Definicija 18. *Za glatka vektorska polja f i g na $\mathcal{B}$, Liejeva zagrada $[f, g]$ je vektorsko polje definirano sa*

$$[f, g]\,(r) = f'(r)g(r) - g'(r)f(r). \tag{4.7}$$

Liejeva zagrada mjeri 'manjak komutativnosti', a nas zanima kada je taj 'manjak komutativnosti' dovoljno malen. Važan uvjet za to bit će pripadnost Liejeve zagrade linearnoj ljusci vektorskih polja.

Definicija 19. *Neka su $f_1, \ldots, f_n$ nezavisna glatka vektorska polja na nekom prostoru X. Takav skup zove se distribucija, a za distribuciju kažemo da je involutivna ako je*

$$\left[f_i, f_j\right](x) \in span\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}, \quad \forall i, j.$$

Vrjedi sljedeći rezultat (Frobeniusov teorem):

Teorem 3. *Neka su $f_1, \ldots, f_n$ nezavisna glatka vektorska polja na $\mathcal{B}$ i neka je $r^* \in \mathcal{B}$ fiksno. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- *Za svaku točku r u okolini od r^* postoji $k-$dimenzionalna tangencijalna mnogostrukost koja prolazi kroz r*
- *Skup $f_1, \ldots, f_k$ vektorskih polja je involutivan.*

Dokaz. Indukcijom, vidjeti [5]. □

Vratimo se sada na model kamatnih stopa. Zadane su nam volatilnost σ, drift μ i početna krivulja kamatnih stopa r^*. Pitanje je postoji li konačnodimenzionalna tangencijalna mnogostrukost koja sadrži r^*. Iz teorema 3 zaključujemo sljedeće. Ukoliko je distribucija $\{\mu, \sigma\}$ involutivna, tada postoji dvodimenzionalna mnogostrukost s traženim svojstvima. Ako $\{\mu, \sigma\}$ nije involutivna, što znači da Liejeva zagrada $[\mu, \sigma]$ nije u linearnoj ljusci od μ i σ, promatramo skup vektorskih polja $\{\mu, \sigma, [\mu, \sigma]\}$. Ako je ta distribucija involutivna tada postoji trodimenzionalna tangencijalna mnogostrukost, a ukoliko nije involutivna to znači da barem jedna od zagrada $[\mu, [\mu, \sigma]]$, $[\sigma, [\mu, \sigma]]$ nije u linearnoj ljusci od $\{\mu, \sigma, [\mu, \sigma]\}$. Na taj način nastavljamo postupak, formirajući zagrade zagrada, dok ne dobijemo skup vektorskih polja koji je zatvoren na operaciju Liejeve zagrade.

Definicija 20. *Neka su zadana vektorska polja $f_1, \ldots, f_k$. Liejeva algebra generirana sa $f_1, \ldots, f_k$ je najmanji vektorski prostor (nad $\mathbb{R}$) vektorskih polja takav da sadrži $f_1, \ldots, f_k$ i zatvoren je na operaciju Liejeve zagrade. Liejeva algebra označava se sa*

$$\mathcal{L} = \{f_1, \ldots, f_k\}_{LA}\,.$$

Dimenzija Liejeve algebre $\mathcal{L}$, za svaku točku $r \in \mathcal{B}$ definirana je kao

$$dim\,[\mathcal{L}(r)] = dimspan\,\{f_1(r), \ldots, f_k(r)\}\,.$$

Uzimajući u obzir sve navedeno, dolazimo do glavnog (općenitog) rezultata vezanog uz konačnodimenzionalne realizacije:

Teorem 4. *Neka je zadana volatilnost $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Tada model kamatnih stopa generiran sa σ ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako je*

$$dim\,\{\mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}_{LA} < \infty$$

u okolini točke r^*.

Pri računanju Liejeve algebre generirane sa μ i σ, korisna je sljedeća lema:

Lema 6. *Neka su zadana vektorska polja $f_1, \ldots, f_k$. Liejeva algebra $\mathcal{L} = \{f_1, \ldots, f_k\}_{LA}$ ostaje nepromjenjena pod djelovanjem sljedećih operacija:*

- *Vektorsko polje $f_i(r)$ može se zamijeniti sa $\alpha(r) f_i(r)$, gdje je α glatko nenul skalarno polje*

- *Vektorsko polje $f_i(r)$ može se zamijeniti sa*

$$f_i(r) + \sum_{j \neq i} \alpha_j(r) f_j(r),$$

  gdje su α_j proizvoljna skalarna polja.

Primjetimo da nam teorem govori kada postoji konačnodimenzionalna realizacija, ali nam ne govori kako ju konstruirati. Također, linearne realizacije nisu jedinstvene jer će svako difeomorfno preslikavanje sa $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{R}^d$ dati ekvivalentnu realizaciju.

4.4 Primjeri

Konstantna volatilnost

Kao i u poglavlju 2, pretpostavit ćemo da je $\sigma(r,x)$ konstantni vektor u $\mathcal{B}$. Također pretpostavljamo da je W jednodimenzionalno Brownovo gibanje. Tada nema potrebe za korištenjem Stratonovicheve teorije pa su vektorska polja μ i σ dani sa

$$\mu(r,x) = Fr(x) + \sigma(x)\int_0^x \sigma(s)ds,$$

$$\sigma(r,x) = \sigma(x).$$

Kao i ranije, F je operator $F = \frac{\partial}{\partial x}$.
Frechetove derivacije su u ovom slučaju dane sa

$$\mu_r' = F,$$

$$\sigma_r' = 0,$$

dakle Liejeva zagrada $[\mu,\sigma]$ je

$$[\mu,\sigma] = F\sigma,$$

isto tako je

$$[\mu,[\mu,\sigma]] = F^2\sigma.$$

Induktivno, lako zaključujemo da je Liejeva algebra $\mathcal{L}$ dana sa

$$\mathcal{L} = \{\mu,\sigma\}_{LA} = span\left\{\mu,\sigma,F\sigma,F^2\sigma,\dots\right\} = span\left\{\mu,F^n\sigma : n = 0,1,2,\dots\right\}.$$

Jasno je da je $\mathcal{L}$ konačnodimenzionalna[2] ako i samo je prostor $span\{F^n\sigma : n = 0,1,2,\dots\}$ konačnodimenzionalan. To je zapravo uvjet propozicije 4, a vrijedi i općenita verzije propozicije 3:

Propozicija 15. *Uz gornje pretpostavke, konačnodimenzionalna realizacija sustava kamatnih stopa postoji ako i samo je σ kvazieksponencijalna funkcija.*

Volatilnost sa konstantnim smjerom

Još uvijek pretpostavljamo da je W jednodimenzionalno Brownovo gibanje, ali da je sada volatilnost oblika

$$\sigma(r,x) = \varphi(r)\lambda(x). \tag{4.8}$$

[2] U svakoj točki r.

U ovom slučaju, svako vektorsko polje σ ima konstantan smjer $\lambda \in \mathcal{H}$, ali se razlikuju po duljini određenoj sa φ. φ može biti bilo koji glatki funkcional na krivulji kamatnih stopa. Prvu pretpostavku za koju ćemo zahtijevati da vrijedi uvodimo kako bi izbjegli trivijalne slučajeve:

Pretpostavka 1. *Pretpostavljamo da je* $\varphi(r) \neq 0$ *za sve* $r \in \mathcal{H}$.

Za vektor drifta tada dobivamo

$$\mu(r) = Fr + \varphi^2(r)D - \frac{1}{2}\varphi'(r)[\lambda]\,\varphi(r)\lambda, \tag{4.9}$$

pri tome $\varphi'(r)[\lambda]$ označava Frechetovu derivaciju $\varphi'(r)$ koja djeluje na vektor λ, a vektor $D \in \mathcal{H}$ jednak je

$$D(x) = \lambda(x) \int_0^x \lambda(s)ds.$$

Pitamo se koje uvjete moraju zadovoljavati φ i λ kako bi realizacija sustava kamatnih stopa bila konačnodimenzionalna, tj. kada je Liejeva algebra generirana sa

$$\mu(r) = Fr + \varphi^2(r)D - \frac{1}{2}\varphi'(r)[\lambda]\,\varphi(r)\lambda,$$

$$\sigma(r) = \varphi(r)\lambda,$$

konačnodimenzionalna. Ako pod pretpostavkom 1 iskoristimo lemu 6 dobivamo da je Liejeva algebra zapravo generirana jednostavnijim vektorskim poljima

$$f_0(r) = Fr + \Phi(r)D,$$

$$f_1(r) = \lambda,$$

pri čemu je

$$\Phi(r) = \varphi^2(r).$$

Prva Liejeva zagrada je

$$[f_0, f_1](r) = F\lambda + \Phi'(r)[\lambda]\,D,$$

sljedeća Liejeva zagrada dana je s

$$[[f_0, f_1], f_1] = \Phi''(r)[\lambda;\lambda]\,D^3$$

Uvodimo još jednu pretpostavku:

[3] Φ'' je Frechetova derivacija drugog reda od Φ koja djeluje na par vektora $[\lambda;\lambda]$. Par vektora $[\lambda;\lambda]$ treba razlikovati od Liejeve zagrade $[\lambda,\lambda]$ koja iznosi 0.

Pretpostavka 2. *Pretpostavljamo da je* $\Phi''(r)[\lambda;\lambda] \neq 0$ *za sve* $r \in \mathcal{H}$.

Koristeći tu pretpostavku, ponovo iz leme 6 možemo vidjeti da je Liejeva algebra generirana još jednostavnijim vektorskim poljima:

$$f_0(r) = Fr,$$

$$f_1(r) = \lambda,$$

$$f_2(r) = F\lambda,$$

$$f_3(r) = D.$$

Sva navedena vektorska polja, osim f_0 su konstantna, pa je lako izračunati Liejeve zagrade i vidjeti da je

$$\{\mu, \sigma\}_{LA} = span\{Fr, F^n\lambda, F^n D : n = 0, 1, \ldots\}.$$

Dakle nužan uvjet da bi Liejeva algebra bila konačnodimenzionalna je da je vektorski prostor razapet sa $\{F^n\lambda : n = 0, 1, \ldots\}$ konačnodimenzionalan. Prema napomeni 2 taj prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je λ kvazieksponencijalna funkcija. Također znamo, prema lemi 2, da ukoliko je λ QE, tada je i D QE kao integral QE funkcije. Dakle, prostor $\{F^n D : n = 0, 1, \ldots\}$ je također konačnodimenzionalan, čime smo dokazali sljedeće:

Propozicija 16. *Pod pretpostavkama 1 i 2, model kamatnih stopa sa volatilnošću danom sa* $\sigma(r, x) = \varphi(r)\lambda(x)$ *ima konačnodimenzionalnu realizaciju ako i samo ako je* λ *kvazieksponencijalna funkcija.*

Bibliografija

[1] Björk, T., *An Overview of Interest Rate Theory*, Handbook of Financial Time Series (Mikosch T., Kreiß JP., Davis R., Andersen T.), Springer Berlin Heidelberg, 2009., 615-650.

[2] Björk, T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Incorporated, 2004

[3] Björk, T. & Christensen, B.J., *Interest rate dynamics and consistent forward rate curves*, Mathematical Finance, 9, br. 4 (1999), 323-348.

[4] Björk, T. & Gombani, A., *Minimal realization of interest rate models*, Finance and Stohastics, 3, br. 4 (1999), 413-432.

[5] Björk, T. & Svensson, L., *On the Existence of Finite Dimensional Realizations for Nonlinear Forward Rate Models*, SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 338, Stockholm School of Economics.

[6] Filipović, D., *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[7] Heath, D. & Jarrow, R. & Morton, A., *Bond pricing and the term structure of interest rates*, Econometrica, 60, br. 1 (1992), 77-106.

[8] Musiela, M. & Rutkowski, M., *Martingale Methods in Financial Modeling*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

Sažetak

U radu su prikazani nužni i dovoljni uvjeti da bi određena konačnodimenzionalna familija krivulja bila invarijantna za određeni model promjene kamatnih stopa. S matematičke točke gledišta, pitanje se svodi na traženje invarijantnih mogostrukosti za stohastičke diferencijalne jednadžbe. U radu su također dani primjeri traženja invarijantne familije krivulja za određeni model, kao i obrnuto.

Summary

This paper explains necessary and sufficient conditions under which a specific finitedimensional family of curves is invariant for a specific forward rates model. From mathematical point of view, the problem can be understood as looking for invariant manifolds for stohastic differential equations. The paper also contains several examples of looking for family of curves which is invariant for a given forward rates model and vice versa.

Životopis

Silvia Franović rođena je 28. kolovoza, 1995. u Rijeci. Nakon završene Opće gimnazije Eugena Kumičića u Opatiji 2013. godine, upisala je preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Rijeci. 2016. godine, pod mentorstvom dr. sc. Ane Jurasić napisala je završni rad *Particijska funkcija* i time završila preddiplomski studij. Iste godine upisala je diplomski studij Financijske i poslovne matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta na Sveučilištu u Zagrebu. Krajem završetka studija zapošljava se u ISBD CRM uredu u Zagrebu, gdje i sada radi.