

# M. C. Escher i eliptičke krivulje

---

**Galiot, Mia**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:710980>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-17**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mia Galiot

**M.C.ESCHER I ELIPTIČKE KRIVULJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv.prof.dr.sc.Matija Kazalicki

Zagreb, rujan/2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

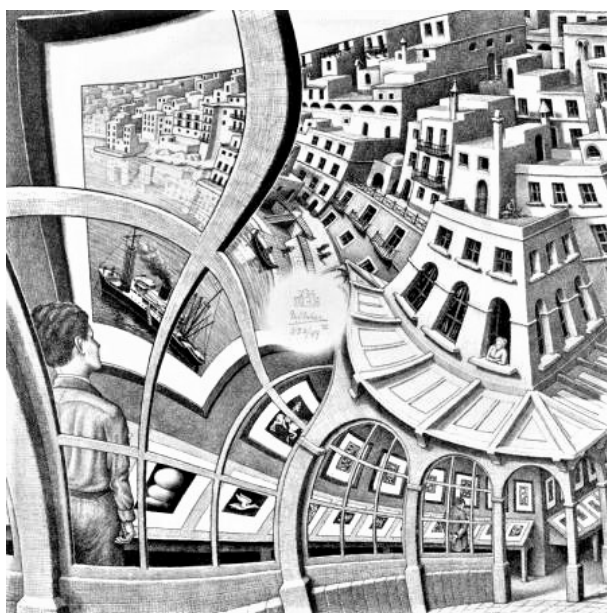
Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Escherova metoda</b>	<b>3</b>
<b>2 Transformacije kompleksne ravnine</b>	<b>9</b>
<b>3 Kompleksne transformacije na kompleksnom torusu</b>	<b>15</b>
3.1 Modularna grupa i Möbiusove transformacije . . . . .	15
3.2 Fundamentalna domena . . . . .	18
3.3 Kompleksna rešetka u $\mathbb{C}$ . . . . .	18
3.4 Kompleksni torus . . . . .	21
<b>4 Rekonstrukcija Escherove „Print Gallery“</b>	<b>27</b>
4.1 Ispunjenje rupe i završetak slike . . . . .	29
4.2 M.C. Escher biografija . . . . .	32
<b>Bibliografija</b>	<b>35</b>

# Uvod



Slika 0.1: „Print Gallery“

Litografija „Print Gallery“ (1956.) jedna je od najfascinirajućih djela nizozemskog grafičara M.C.Eschera. Slika prikazuje arkade galerije kroz koje se vidi mladi čovjek na izložbi kako promatra sliku mediteranske luke na Malti. Gledajući sliku, u njoj otkriva, među zgradama uz rijeku, istu galeriju u kojoj on stoji i sebe kako promatra sliku ispred koje on trenutno stoji. Kada se promatra luka u smjeru kazaljke na satu ona se rotira i u isto vrijeme povećava, te izlazi iz okvira slike. Bijela okrugla zakrpa na sredini predstavlja Escherov monogram i potpis, te je dan danas brojnim matematičarima i umjetnicima enigma, jer predstavlja nedovršen kraj koji su mnogi pokušali završiti. Henrik Lenstra, profesor na Sveučilištu u Leidenu, oduvijek je bio fasciniran matematikom iza umjetničkih djela, te ju je prepoznao unutar Escherovih djela. 2000.godine, pokrenuo je projekt analiziranja Escherove „Print Gallery“. Lenstra je uspio Escherovu sliku matematički opisati

eksponencijalnom funkcijom i pomoću nje i posebno izrađenog softvera, uspio je završiti sliku u sredini. Također, važno je naglasiti da je Escherov doticaj sa matematikom završio nakon srednje škole, te je fascinirajuće koliko je blizu bio dovršenju slike. Matematičko objašnjenje ćemo prikazati u sljedećim poglavljima koja se baziraju na činjenici da se litografija promatra kao slika na određenim eliptičkim krivuljama nad poljem kompleksnih brojeva, te idejom da se u sredini slika sama ponavlja. Preciznije, da slika sadrži kopiju sebe koja je rotirana za  $-157,625^\circ$  i umanjena za faktor 22,58.

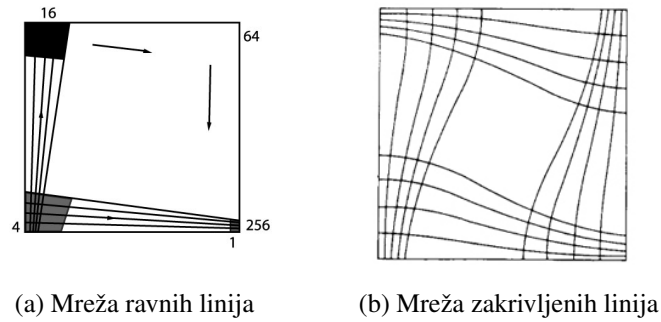
Jedina misterija koja ostaje je sam Escher. Da li je on razumio što radi, da li je stvarno na intuitivan način nacrtao sliku ili je zaista razumio cijelu matematiku iza toga? Da li je ostavio prazninu u sredini kako ne bi morao ponavljati iznova istu stvar, ili nije bio siguran kako dalje? Escher je preminuo 1972.godine, puno ranije nego je H.Lenstra započeo svoj projekt i ova pitanja ostaju zauvijek neodgovorena.

# Poglavlje 1

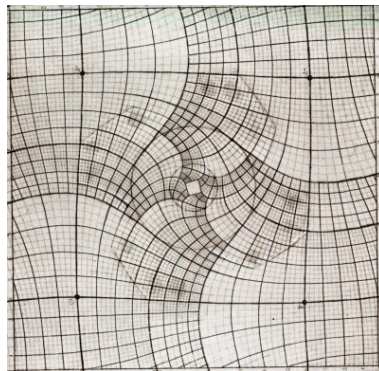
## Escherova metoda

Na letu iz New Jerseya za Amsterdam, dok je prolazio kroz časopis aviokompanije, Lenstra je uočio Escherovu „Print Gallery“ i ostao zatečen Escherovim radom, te je za vrijeme slijetanja aviona u Amsterdam već započeo svoj projekt. Lenstra se pitao, što ako se nastave crtati arkade i linije u sredini, da li se dođe do matematičkog problema kojeg se ne može riješiti i koja je matematička struktura slike. Samo nekoliko dana nakon povratka u Nizozemsku, Lenstra je krenuo tražiti odgovore. Njegov izvor bila je knjiga *The Magic Mirror of M.C. Escher*, koju je napisao blizak prijatelj Eschera, Hans de Rijk i koja je odobrena i ispravljena od strane samog Eschera. Hans de Rijk osobno je potvrdio i objasnio Lenstri u detalje Escherovu metodu kreiranja „Print Gallery“. Hans de Rijk je objasnio da je Escher želio dobiti efekt kontinuirane cikličke ekspanzije, tj. slike koja se kontinuirano ponavlja sama u sebi i u isto vrijeme širi u svim smjerovima. Poglavlje Escherova metoda bazira se na literaturi [1].

Kako bi što preciznije nacrtao sliku, Escher je prvotno konstruirao mrežu ravnih linija na način da se kvadrati mreže proporcionalno šire u svim smjerovima za faktor 256. Objasnimo sliku 1.1. Ukoliko se krećemo po donjem rubu od desnog prema lijevom kutu, dimenzija originalnog kvadratića se povećala 4 puta. Nastavimo li dalje po rubu, dimenzija originalnog kvadratića povećat će se 16, zatim 64 i na kraju 256 puta. Ponavljanjem gore opisanog postupka, slika, odnosno kvadrati ravnih linija, širi se oko sebe za 256 puta. De Rijk je objasnio da Escher nije bio zadovoljan rezultatom, jer kako se mreža širila, linije su se previše odmicale jedna od druge, te su zgrade i arkade na slici bile previše izobličene. Iz tog razloga, Escher je svaku ravnu liniju intuitivno pretvorio u zakrivljenu liniju kako bi kvadrati mreže širenjem zadržali svoj izgled i na taj način dobio konačnu mrežu, prikazanu na slici 1.2. Promatrajući središte mreže i gledajući u smjeru kazaljke na satu oko središta, može se uočiti ponavljajući uzorak koji se proširuje za faktor  $4^4 = 256$ .



Slika 1.1: Konstrukcija Escherove mreže



Slika 1.2: Escherova mreža

Objasnimo sliku 1.3. Beskonačne reducirane kopije slike unutar originalne slike naziva se Droste efekt. Escher je težio slici koja sadrži Droste efekt, i dodatno, da se svaka kopija slike rotira i reducira u isto vrijeme.

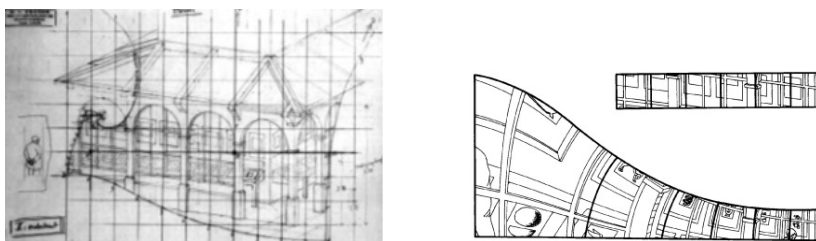


Slika 1.3: Droste efekt



Radi lakšeg daljnijeg razumijevanja, uvedimo novu terminologiju. Neka je izraz za Escherovu sliku koja sadrži reducirane kopije sebe, odnosno koja sadrži Droste efekt, „ravni svijet“. Izraz „zakrivljeni svijet“ koristit ćemo za konačnu verziju Escherove slike, odnosno za sliku koju dobijemo kada sliku u ravnom svijetu rotiramo i skaliramo u isto vrijeme.

Mreža ravnih linija rezultirala je previše izobličenom slikom i nezadovoljan rezultatom, Escher je crtež u ravnom svijetu želio prebaciti u zakrivljeni svijet, nadajući se boljem ishodu. Kako bi pravilno ucrtao sve detalje slike u svoju mrežu, Escher je najprije preko slike u ravnom svijetu postavio kvadratnu mrežu, te zatim jedan po jedan kvadratić intuitivno prebacio u mrežu zakrivljenih linija.

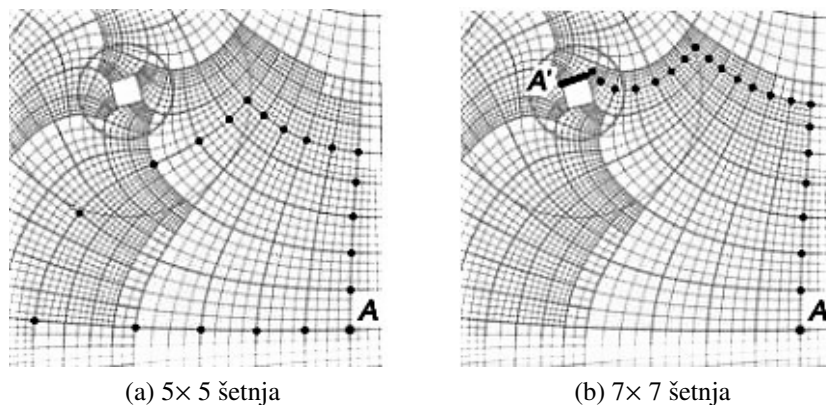


Slika 1.4: Ispunjenje mreže crtežom

Pretpostavimo sad da je ravni svijet kompleksna ravnina  $\mathbb{C}$  sa nulom u sredini, te promatrajmo sliku u ravnom svijetu kao preslikavanje  $f : \mathbb{C} \rightarrow \{\text{crno}, \text{bijelo}\}$  koje svakom  $z \in \mathbb{C}$  pridružuje boju  $f(z)$ . Kako se slika sama ponavlja oko sebe za faktor 256, tada vrijedi da svaka točka  $z$  i točka  $256z$  poprimaju jednaku boju, tj. vrijedi da je

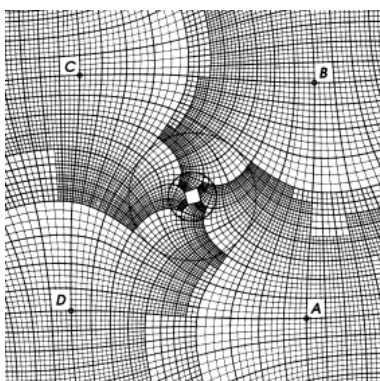
$$f(256z) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Promotrimo sad nekoliko šetnji u ravnom svijetu, te ih paralelno promatrajmo u zakrivljenom svijetu. Na slici 1.5 prikazane su dvije šetnje u zakrivljenom svijetu. Neka je  $A$  početna točka šetnje i uzmimo za primjer 5 jediničnih mjera kojim putujemo od točke  $A$  prema gore, prikazano na slici 1.5(a). Zatim pod pravim kutem skrenemo u lijevo i putujemo dalje 5 jediničnih mjera, te napravimo to još dva puta. U zakrivljenom svijetu ova šetnja je zatvorena petlja. U ravnom svijetu također je zatvorena petlja, odnosno  $5 \times 5$  kvadrat. Sada napravimo istu stvar ali umjesto 5 odaberimo 7 jediničnih mjera, slika 1.5(b). U ravnom svijetu dobivamo kvadrat  $7 \times 7$ , dok u zakrivljenom svijetu ne dobivamo više zatvorenu petlju, točka  $A'$  u kojoj završava šetnja vrh je centralnog kvadrata. Dakle, odabrem li 7 ili više jediničnih mjera petlja će se raspetljati u zakrivljenom svijetu i završiti u centralnom dijelu.

(a)  $5 \times 5$  šetnja(b)  $7 \times 7$  šetnja

Slika 1.5: Šetnje u zakrivljenom svijetu

Pretpostavimo sad da je zakrivljeni svijet također kompleksna ravnina  $\mathbb{C}$ , sa nulom u sredini. Definirajmo  $\gamma \in \mathbb{C}$  tako da je  $\gamma = \frac{A}{A'}$ . Za lakše razumijevanje, objasnimo  $\gamma$  na sljedeći način. Točka  $A$  predstavlja točku na mreži gdje je ucrtana originalna galerija, a točka  $A'$  predstavlja istu tu točku slike, ali na dijelu mreže gdje je ucrtana kopija galerije reducirana za  $|\gamma|$  i rotirana za kut od  $\gamma$  (obzirom da je  $\gamma$  kompleksni broj). Grubim mjerenjem dobije se modul od  $\gamma$  malo manji od 20 i kut od  $\gamma$  malo manji od  $160^\circ$ . Tada se svaki kvadrat  $ABCD$ , prikazan na slici 1.6 i čije je središte bijeli centralni kvadrat, rotiran u smjeru obrnutom od kazaljke na satu za kut približno  $160^\circ$  i reduciran za približno faktor 20, podudara sa centralnim kvadratom. Takva točka  $A$  nije jedinstvena. Neka je  $P \in \mathbb{C}$ , gdje  $P$  leži na jednoj od linija kvadrata  $ABCD$  čije središte je centar mreže. Tada, odgovarajuća točka  $P'$ , završna točka šetnje opisane u prethodnom paragrafu, leži na stranici malog kvadrata u sredini i poprima boju točke  $P$ , te vrijedi da je kvocijent  $\frac{P}{P'}$  jednak  $\gamma$ .



Slika 1.6: Escherova mreža

Matematički opis navedenog primjera u zakrivljenom svijetu možemo zapisati na sljedeći način. Sliku promatrajmo kao preslikavanje  $g : \mathbb{C} \rightarrow \{\text{crno}, \text{bijelo}\}$  koje svakom  $w \in \mathbb{C}$  pridružuje boju  $g(w)$ . Tada vrijedi da je  $g(w) = g(\gamma w)$ ,  $\forall w \in \mathbb{C}$ . Ova realizacija rješava pitanje što se nalazi u sredini slike: manja verzija iste slike, rotirana skoro naopako koja dalje sadrži opet umanjenju kopiju sebe i tako dalje nestajući u singularnosti jedne točke. Lenstra je želio izračunati vrijednost  $\gamma$  kako bi mogao zapisati matematičku formulu za prijelaz između ravnog i zakrivljenog svijeta.

Budući da Escher nije bio matematičar, ne možemo točno znati kako je zapravo Escher došao do matematičkog zaključka da ukoliko sliku rotira za  $-160^\circ$  i reducira za faktor 20 dobit će upravo ono što je zamislio u početku, sliku koja se ponavlja oko središta i u isto vrijeme proporcionalno širi u svim smjerovima. U sljedećim poglavljima prikazat ćemo kako pomoću matematike možemo izračunati vrijednost  $\gamma$  i vidjeti koliko je zapravo Escher bio blizu cilja da završi sliku. Naglasimo da  $\gamma$  nije jedinstven i da različitim odabirom  $\gamma$  dobivamo različite faktore skaliranja i rotacije, te na kraju različite verzije „Print Gallery“.



## Poglavlje 2

# Transformacije kompleksne ravnine

Ovo poglavlje pokazuje kako se pomoću kombinacije više različitih kompleksnih transformacija dobivaju faktori rotacije i skaliranja jednaki kojima je Escher težio.

Promotrimo prvo  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Svaku točku kompleksnog prostora možemo zapisati u polarnom obliku  $\gamma = |\gamma|e^{i\varphi}$ , gdje je  $|\gamma|$  modul od  $\gamma$  i  $\varphi$  njegov argument. Prisjetimo se, Escherova slika u ravnom svijetu sadrži kopiju sebe reduciranu za faktor 256, odnosno svaku točku  $z$  možemo preslikati u točku  $256z$  koja poprima jednaku boju kao točka  $z$ . U zakrivljenom svijetu  $\gamma$  ima jednako djelovanje kao faktor 256. Cilj je izračunati  $\gamma$  i dobiti mogućnost potpune rekonstrukcije Escherove slike koja bi u tom slučaju bila skalirana za modul  $|\gamma|$  i rotirana za kut  $\varphi$ . Za poglavlje Transformacije kompleksne ravnine korištene su literature [6] i [7].

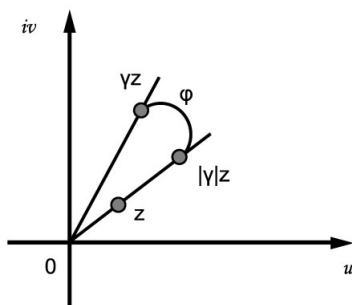
Definicije transformacija rotacije i skaliranja su sljedeće:

1. Rotacija za kut  $\theta$  je preslikavanje  $f(z) = z \cdot e^{i\theta}$ . Polarni zapis točke  $w = f(z)$  je  $w = |w|e^{i\arg w}$ , za  $|w| = |z|$  i  $\arg w = \arg z + \theta$ . Preslikavanje  $f(z)$  točku  $z$  preslikava u točku  $w$  čiji je modul jednak modulu od  $z$ , dok se argument povećao za  $\theta$ .

2. Kontrakcija ili dilatacija (skaliranje) je preslikavanje  $f(z) = z \cdot a$ , za koeficijent  $a \in \mathbb{R}$ . Preslikavanje  $f(z)$  točku  $z$  preslikava u točku  $w$  čiji modul se produljio ili skratio  $a$  puta.

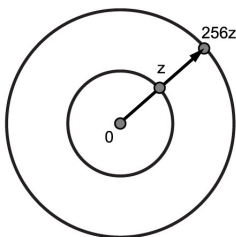
3. Kompozicija kontrakcije ili dilatacije i rotacije je preslikavanje  $f(z) = z \cdot ae^{i\theta}$  koje točku  $z$  preslikava u točku  $w$  čiji modul je jednak  $|a||z|$  i čiji argument se povećao za  $\theta$ .

Na slici 2.1 prikazano je preslikavanje točke  $z$  u točku  $w_1 = |\gamma| \cdot z$  (dilatacija), te zatim preslikavanje točke  $w_1$  u točku  $w_2 = \gamma \cdot z$  (rotacija), čiji je modul jednak  $|\gamma||z|$  i čiji argument se povećao za  $\varphi$ .



Slika 2.1: Kompozicija dilatacije i rotacije

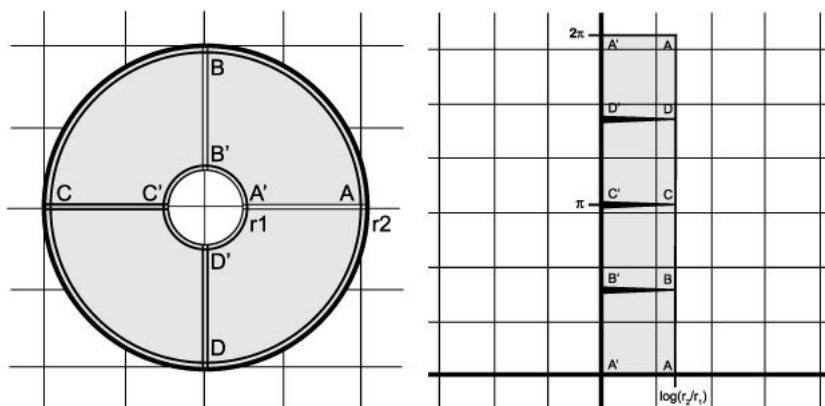
Pokažimo sad transformacije pomoću kojih dolazimo do iznosa modula i argumenta od  $\gamma$ . Označimo sa  $r_1$  radijus manje kružnice koji povezuje točke 0 i  $z$ , i sa  $r_2$  radijus veće kružnice koji povezuje točke 0 i  $256z$ . Kvocijent  $\frac{r_2}{r_1} = 256$  omjer je Escherove slike u ravnom svijetu preko kojeg ćemo odgovarajućim transformacijama doći do omjera  $\gamma$  u zakrivljenom svijetu.

Slika 2.2: Omjer  $\frac{r_2}{r_1} = 256$  Escherove slike u ravnom svijetu

Najprije ćemo na generaliziranom primjeru pokazati sustav transformacija kojim se postiže Escherov efekt:

#### 1. Logaritamska transformacija:

Transformacija  $z \mapsto \log(z)$  preslikava kompleksnu ravninu u prugu  $\{w : 0 \leq \text{Im}(w) \leq 2\pi\}$ . Kako se svaka točka u kompleksnoj ravnini može definirati kao  $re^{i\theta}$ , gdje  $r$  označuje modul kompleksnog broj i  $\theta$  njegov argument, slijedi da je  $\log(z) = \log(r) + i\theta$ , za  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Nas zanima transformacija kružnog vijenca između koncentričnih kružnica radijusa  $r_1$  i  $r_2$  na slici 2.2, a to je transformacija  $z \mapsto \log\left(\frac{z}{r_1}\right)$  ilustrirana na slici 2.3. Logaritamska funkcija preslikava krug u pravac i u tom slučaju manji krug postaje vertikalni pravac koji prolazi kroz ishodište,  $\log\left(\frac{r_1}{r_1}\right) = \log(1) = 0$ , dok se veći krug preslika u vertikalni pravac u točki  $\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  na realnoj osi. Dobiven je pravokutnik čije su stranice jednake  $\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$  i  $2\pi$ .

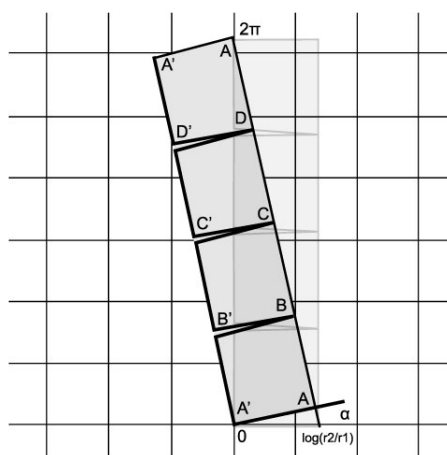


Slika 2.3: Logaritamska transformacija kružnog vijenca

### 2. Rotacija i skaliranje:

Naveli smo da je kompozicija rotacije i skaliranja preslikavanje  $z \mapsto z \cdot f \cdot e^{i\theta}$ . Iz Escherove slike se može uočiti da se pravokutnik rotira tako da se njegova dijagonala poklopi sa imaginarnom osi, te reducira tako da je njegova dijagonala jednaka  $2\pi$ , kao što je prikazano na slici 2.4, a to vrijedi u slučaju kad je

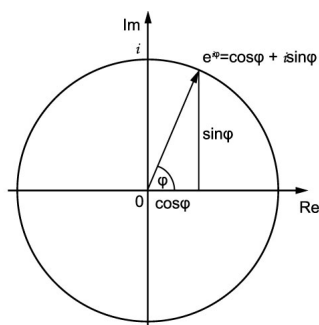
$$\theta = \arctan\left(\frac{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi}\right) \quad i \quad f = \cos(\theta).$$



Slika 2.4: Transformacija rotacije i skaliranja

Prisjetimo se, odabirom drugačijeg kuta rotacije i faktora skaliranja ne dobivamo sliku jednakoj Escherovoj. Faktor skaliranja dobiven je pomoću funkcije kosinus, primjer je

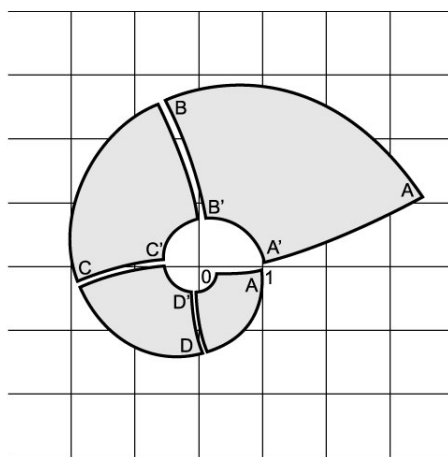
dan na slici 2.5. Neka je dan pravokutni trokut unutar kružnice u kompleksnoj ravnini i neka je poznat kut  $\varphi$ . Hipotenuza  $h$  tada je jednaka radijusu kružnice, te je prva kateta koja leži na realnoj osi manja od radijusa kružnice, ali pitanje je koliko puta? Kateta ima duljinu jednaku  $h \cos(\varphi)$ , dakle  $\cos(\varphi)$  je primjereni faktor reduciranja u ovom slučaju. Kut rotacije  $\theta$  dobiven je pomoću Pitagorinog poučka pravokutnog trokuta  $A'A'A$ , obzirom da se dijagonala  $A'A$  rotirala za kut  $A'A'A$  u smjeru obrnutom od kazaljke na satu.



Slika 2.5

### 3. Eksponencijalna transformacija:

Zadnja transformacija inverzna je prvoj transformaciji, a to je  $z \mapsto e^z$ . Sve stranice pravokutnika transformirane su u spirale, prikazane na slici 2.6. Primjetimo da se točke  $A$  i  $A'$  sada poklapaju, obzirom da je  $e^{2\pi} = e^0 = 1$ .



Slika 2.6: Eksponencijalna transformacija

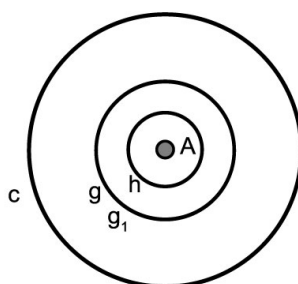
Kompozicijom svih gore opisanih transformacija dobivamo:

$$z \mapsto \left(\frac{z}{r_1}\right)^\beta, \quad \beta = f e^{i\theta}.$$



Prije nego što uzmemo u obzir konačnu transformaciju, pogledajmo kako dobiti reduciranu kopiju sadržanu unutar originalne slike, odnosno Droste efekt kojeg smo ranije definirali. U ravnom svijetu originalna slika dviju koncentričnih kružnica će se transformirati u identičnu sliku ali reduciranu transformacijom  $z \mapsto \left(\frac{z}{r_2/r_1}\right)$ . Transformacija je prikazana na slici 2.7, kružnica  $c$  preslikava se u originalnu manju kružnicu  $g_1$ , te se manja kružnica  $g$  preslikava u kružnicu  $h$ .

$$\begin{aligned} c &= \text{circle}(A, 1.36) \rightarrow g_1 = \text{circle}(A, 0.7) \\ g &= \text{circle}(A, 0.7) \rightarrow h = \text{circle}(A, 0.36) \end{aligned}$$



Slika 2.7: Transformacija  $z \mapsto \left(\frac{z}{r_2/r_1}\right)$

Dakle, na Escherovoj slici u ravnom svijetu ukoliko točku  $z$  podijelimo sa omjerom  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 256$  dobivamo identičnu ali reduciranu sliku. Kako bi transformirana slika sadržavala također identičnu, reduciranu sliku unutar sebe, točku  $z$  podijelimo sa transformiranim omjerom  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta$ . Kako smo  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta$  dobili rotacijom i skaliranjem omjera  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ , slijedi da je  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta = \gamma$ . Sada možemo izračunati faktor skaliranja, odnosno modul  $|\gamma|$  i kut rotacije, odnosno argument od  $\gamma$ .

Uvrštavanjem  $\frac{r_2}{r_1} = 256$  u formulu transformacije dobivamo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\log(256)}{2\pi}\right) = 41.4297$$

$$f = \cos(\theta) = \cos(41, 4297) = 0.749767$$

Sa  $\beta = f e^{i\theta}$  dobivamo  $|\gamma| = \left|\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^\beta\right| = 22.5836$  i argument  $\varphi = 157.62559$ .

Slijedi da transformirana slika sadrži kopiju sebe zumiranu za faktor 22.5836 i rotiranu za 157.62559 stupnjeva.

Prisjetimo se da je Escher reducirao svoju sliku za faktor malo manji od 20 i rotirao za kut malo manji od  $160^\circ$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, što je jako blizu dobivenim brojkama i fascinirajuće da je on do svojih brojki došao samo grubim mjerenjem i intuitivnim crtanjem. Važno je napomenuti da ovaj pristup nije jedinstven, naime različitim

odabirom kuta rotacije dobiju se različite verzije. U ovom slučaju birali smo točan kut rotacije pomoću kojeg smo dobili najbližu sliku Escherovoj slici. Na sljedećim slikama primjeri su različitih kombinacija rotacije i skaliranja na sliku u cilju postizanja Escherovog efekta.



Slika 2.8: Primjeri Escherovog efekta

## Poglavlje 3

# Kompleksne transformacije na kompleksnom torusu

U ovom poglavlju definirat ćemo modularnu grupu, njeno djelovanje na gornju poluravninu Möbiusovim transformacijama i kompleksni torus. Zatim, prikazati ćemo djelovanje kompleksnih transformacija na Escherovu sliku koja se promatra kao slika na određenim eliptičkim krivuljama nad poljem kompleksnih brojeva, odnosno na kompleksnom torusu. Za poglavlje Kompleksne transformacije na kompleksnom torusu korištene su literature [2] i [3].

### 3.1 Modularna grupa i Möbiusove transformacije

**Definicija 3.1.1.** *Modularna grupa  $SL_2(\mathbb{Z})$  je grupa  $2 \times 2$  matrica s cjelobrojnim matričnim elementima i determinantom 1, tj.*

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Označimo s  $\mathbb{H}$  gornju poluravninu, tj.  $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}$ .

Neka je  $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , definirajmo preslikavanje  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  dano formulom

$$\delta(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Dano preslikavanje zovemo *Möbiusova transformacija*.

U slučaju kada je  $c \neq 0$ , tada definiramo  $f\left(\frac{d}{c}\right) = \infty$  i  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ , a ako je  $c = 0$  tada

definiramo  $f(\infty) = \infty$ .

Za  $c\tau + d \neq 0$  vrijedi sljedeće,

$$\operatorname{Im}(\delta(\tau)) = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}, \quad \forall \delta \in SL_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathbb{H}.$$

Dakle, svaki element modularne grupe preslikava gornju poluravninu u gornju poluravninu, odnosno ako je  $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$  i  $\tau \in \mathbb{H}$  tada je također i  $\delta(\tau) \in \mathbb{H}$ .

Uočimo da  $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$  zadovoljava

$$\delta\tau = \tau, \forall \tau \in \mathbb{H} \quad \leftrightarrow \quad \delta \in I, -I.$$

Dakle, za  $\forall \delta \in SL_2(\mathbb{Z})$  elementi  $\delta, -\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$  djeluju na potpuno jednaki način, te možemo zaključiti da djelovanjem  $SL_2(\mathbb{Z})$  na gornju poluravninu  $\mathbb{H}$  inducira djelovanje grupe  $PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ .  $PSL_2(\mathbb{Z})$  je također modularna grupa.

**Propozicija 3.1.1.** *Möbiusove transformacije su holomorfne i bijektivne izometrije od  $\mathbb{H}$ , te definiraju djelovanje grupe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  na  $\mathbb{H}$ .*

Svaka Möbiusova transformacija je kompozicija translacije, rotacije, dilatacije, ili kontrakcije, i inverzije u odnosu na kružnicu. Prilikom transformacije čuvaju se kutevi, odnosno svaka Möbiusova transformacija je konformno preslikavanje. Razmotrit ćemo dvije Möbiusove transformacije koje su nam ključne za daljnje razumijevanje.

Definirajmo matrice  $S, T \in SL_2(\mathbb{Z})$  sa

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za  $\forall \tau \in \mathbb{H}$  vrijedi

$$S(\tau) = -\frac{1}{\tau}, \quad T(\tau) = \tau + 1,$$

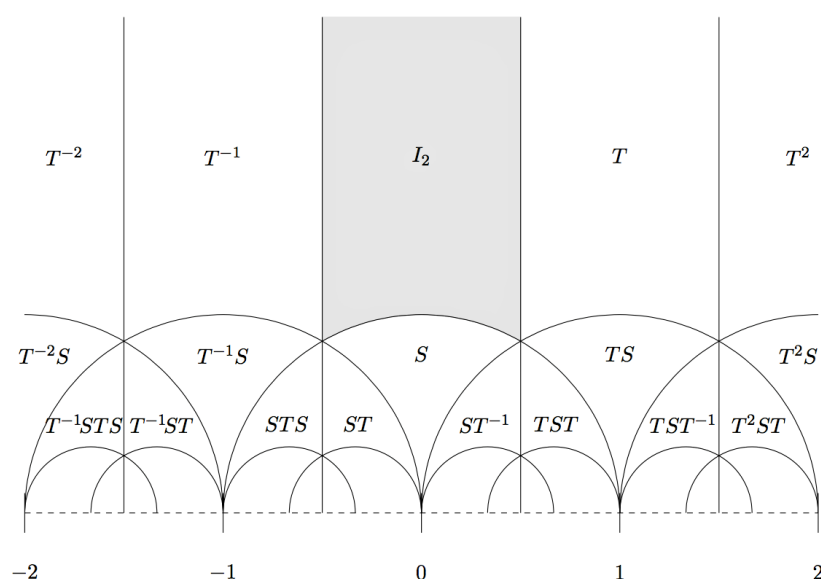
odnosno, možemo zapisati  $S$  i  $T$  kao preslikavanja

$$S : \tau \mapsto -1/\tau$$

$$T : \tau \mapsto \tau + 1.$$

$S$  i  $T$  su Möbiusove transformacije, njihovo djelovanje na gornju poluravninu  $\mathbb{H}$  geometrijski možemo interpretirati na sljedeći način. Preslikavanje  $T$  predstavlja translaciju za 1

u desno, dok  $S$  predstavlja inverzno preslikavanje u odnosu na kružnicu i popratno refleksiju u odnosu na imaginarnu os. Prisjetimo se, inverzijom ravnine  $E$  u odnosu na kružnicu  $k(O, r)$  nazivamo preslikavanje koje svaku točku te ravnine  $P$ , različitu od  $O$ , preslikava u točku  $P'$  na polpravcu  $OP$  tako da vrijedi  $OP \cdot OP' = r^2$ . U našem slučaju, točka  $\tau$  preslika se u točku  $\tau'$  kada vrijedi  $|\tau||\tau'| = 1$ , a to vrijedi kada je  $\tau' = 1/\tau$ . To je upravo način na koji djeluje preslikavanje  $S$ , ostaje nam još predznak minus koji predstavlja refleksiju obzirom na imaginarnu os. Djelovanje matrica  $S$  i  $T$  na gornju poluravninu  $\mathbb{H}$  prikazano je na slici 3.1.



Slika 3.1: Djelovanje  $SL_2(\mathbb{Z})$  na gornju poluravninu  $\mathbb{H}$

Koristeći razne kompozicije matrica  $S$  i  $T$  svaka točka iz sivo označenog dijela, odnosno skupa  $\{\tau \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\}$  može se preslikati u točku gornje poluravnine izvan tog skupa.

Prisjetimo se, skup koji generira grupu je podskup te grupe takav da se svaki element te grupe može izraziti kao kombinacija elementa iz navedenog podskupa i njihovih inverza. Oznaka za to je sljedeća, neka je  $S$  podskup grupe  $G$ , tada je  $\langle S \rangle$  podgrupa od  $G$  generirana podskupom  $S$ .

**Teorem 3.1.2.** *Matrice  $S$  i  $T$  generiraju grupu  $SL_2(\mathbb{Z})$ .*

Svaki element modularne grupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  se može izraziti, ne na jedinstveni način, kao kompozicija matrica  $S$  i  $T$ , njihovih inverza i potencija.

## 3.2 Fundamentalna domena

Svake dvije točke  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ , su  $SL_2(\mathbb{Z})$ -ekvivalentne ako vrijedi  $\tau_2 = \frac{a\tau_1+b}{c\tau_1+d}$ , za neku matricu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Neka je  $\Gamma$  podgrupa od  $SL_2(\mathbb{Z})$ , definirajmo klase ekvivalencije djelovanja grupe  $\Gamma$  na  $\mathbb{H}$ .

**Definicija 3.2.1.** Za zatvoren i povezan podskup  $F$  od  $\mathbb{H}$  kažemo da je fundamentalna domena za podgrupu  $\Gamma$  ako je svaki  $\tau \in \mathbb{H}$   $\Gamma$ -ekvivalentan nekoj točki iz  $F$ , s time da nikoje dvije točke iz unutrašnjosti od  $F$  nisu  $\Gamma$ -ekvivalentne.

U prethodnom potpoglavlju pokazali smo da je svaki  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $SL_2(\mathbb{Z})$ -ekvivalentan nekoj točki iz skupa  $\{\tau \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\}$ , te da nikoje dvije točke iz unutrašnjosti tog skupa nisu  $SL_2(\mathbb{Z})$ -ekvivalentne.

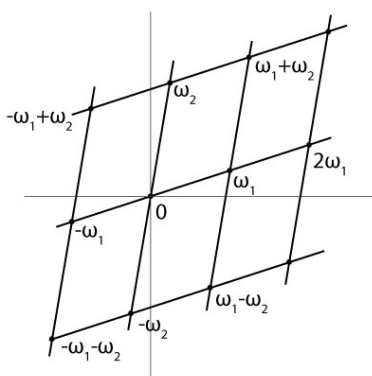
**Propozicija 3.2.1.** Skup

$$F := \left\{ \tau \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}$$

Zovemo fundamentalnom domenom djelovanja grupe  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

## 3.3 Kompleksna rešetka u $\mathbb{C}$

**Definicija 3.3.1.** Neka je  $\{\omega_1, \omega_2\}$  baza za  $\mathbb{C}$  nad  $\mathbb{R}$ . Tada skup  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$  zovemo rešetka u  $\mathbb{C}$ .



Slika 3.2: Rešetka  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$

Rešetku  $\Lambda$  možemo također zapisati na način  $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  ili obzirom da  $\omega_1, \omega_2$  generiraju rešetku  $\Lambda$ ,  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ . Prikaz rešetki nije jedinstven, već ovisi o izboru baze  $\{\omega_1, \omega_2\}$ .

**Definicija 3.3.2.** Za dva para kompleksnih brojeva  $(\omega_1, \omega_2)$  i  $(\omega'_1, \omega'_2)$  kažemo da su ekvivalentni ako generiraju istu rešetku, tj.  $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega'_1, \omega'_2 \rangle$

**Definicija 3.3.3.** Rešetke  $\Lambda$  i  $\Lambda'$  su homotetične ako postoji  $\alpha \in \mathbb{C}$  takav da je  $\alpha\Lambda = \Lambda'$ .

Primjer homotetičnih rešetki su  $\Lambda = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  i  $\Lambda' = \langle \frac{\omega_1}{\omega_2}, 1 \rangle$ ,  $\Lambda = \omega_2\Lambda'$ ,  $\omega_2 \in \mathbb{C}$ . Sljedećom lemom objasnit ćemo kada su dvije rešetke u  $\mathbb{C}$  jednake.

**Lema 3.3.1.** Neka su  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$  i  $\Lambda' = \omega'_1\mathbb{Z} \oplus \omega'_2\mathbb{Z}$  dvije rešetke takve da je  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  i  $\omega'_1/\omega'_2 \in \mathbb{H}$ . Tada je  $\Lambda = \Lambda'$  ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} &= \delta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{za neki } \delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \delta \left( \frac{\omega'_1}{\omega'_2} \right), \quad \text{za neki } \delta \in SL_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

*Dokaz.* Pretpostavimo prvu tvrdnju, da je  $\Lambda = \Lambda'$ , tj. da je  $\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z} = \omega'_1\mathbb{Z} \oplus \omega'_2\mathbb{Z}$ , te dokažimo da vrijedi  $\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ , za neki  $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Prema pretpostavci vrijedi da je  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda'$ , a kako je  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  baza od  $\Lambda'$ , možemo prikazati  $\omega_1$  i  $\omega_2$  kao  $\mathbb{Z}$ -linearane kombinacije od  $\omega'_1$  i  $\omega'_2$ . Zapišimo to u matričnom obliku, dakle

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{za neki } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Analogno, budući da su  $\omega'_1, \omega'_2 \in \Lambda$ , vrijedi da je

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{za neki } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2\mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Iz (3.1) i (3.2) sada proizlazi da je

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Budući da su  $\omega_1, \omega_2$  baza od  $\Lambda$ , oni su linearno nezavisni nad  $\mathbb{R}$ , te možemo zaključiti da je  $AB = I$ , pa vrijedi da je

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1,$$

tj.  $\det(A) = \det(B) = 1$  ili  $\det(A) = \det(B) = -1$ . Preostaje nam pokazati da su te determinante jednake 1.

Iz

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a\omega'_1 + b\omega'_2}{c\omega'_1 + d\omega'_2},$$

dijeljenjem brojnika i nazivnika s  $\omega'_2$  dobijemo

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a\frac{\omega'_1}{\omega'_2} + b}{c\frac{\omega'_1}{\omega'_2} + d}$$

tj.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = A\left(\frac{\omega'_1}{\omega'_2}\right).$$

Prema pretpostavci leme je  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  i stoga mora vrijediti  $\text{Im}\left(A\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right) > 0$ , a to vrijedi jedino za  $ad - bc = 1$ , te zaključujemo da je  $\det(A) = \det(B) = 1$ , tj.  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ .

Obratno, pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \text{ za neki } \delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Iz toga zaključujemo da je

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2.$$

Inkluzija  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  očito vrijedi, s obzirom na to da su  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , pa je  $\omega'_1, \omega'_2 \in \Lambda$ .

Preostaje nam pokazati obratnu inkluziju. Izračunajmo najprije inverznu matricu od  $\delta$ .

Formula za računanje inverza, gdje je  $\delta_{ij}$  algebarski komplement pripadajućeg elementa polazne matrice, je

$$\delta^{-1} = \frac{1}{\det(\delta)} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Uz pretpostavku leme da je  $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$ , uvjet  $ad - bc = 1$  povlači da je

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zapišimo gornju matičnu jednakost u sljedećem obliku:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. } \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$



Budući da je

$$\omega_1 = d\omega'_1 - b\omega'_2, \quad \omega_2 = -c\omega'_1 + a'_2$$

i da su  $d, -b, -c, a \in \mathbb{Z}$ , slijedi da je  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda'$  te iz toga slijedi i inkuzija  $\Lambda \subseteq \Lambda'$ , čime je dokazana tvrdnja.  $\square$

**Definicija 3.3.4.** *Fundamentalni paralelogram za  $\Lambda$  i  $a \in \mathbb{C}$  je definiran skupom*

$$F = \{a + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1\}.$$

Svaki  $z \in \mathbb{C}$  može se zapisati kao  $z = p + m\omega_1 + n\omega_2$ , gdje je  $p \in F$  i  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

## 3.4 Kompleksni torus

**Definicija 3.4.1.** *Za kvocijent kompleksne ravnine i rešetke,*

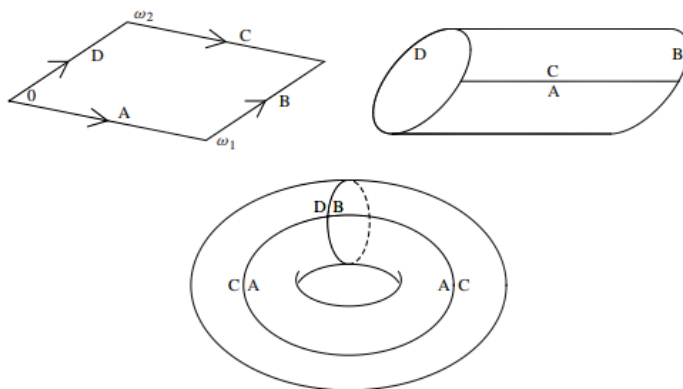
$$\mathbb{C}/\Lambda = \{z + \Lambda : z \in \mathbb{C}\}$$

*kažemo da je kompleksni torus.*

Kompleksni torus je tada klasa ekvivalencije elemenata iz  $\mathbb{C}$  sa relacijom ekvivalencije

$$z \sim z' \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \mid z = z' + m\omega_1 + n\omega_2.$$

Geometrijski prikazano na slici 3.3, kada se kraći par nasuprotnih stranica paralelograma zarola u valjak, rubovi  $C$  i  $A$  se poklope. Zatim se valjak savije, tako da se drugi par nasuprotnih stranica također poklopi i dobiveni rezultat je torus. Dakle, kompleksni torus kada se razmota u ravnini je paralelogram.



Slika 3.3: Kompleksni torus

**Propozicija 3.4.1.** *Neka su  $\Lambda$  i  $\Lambda'$  dvije rešetke u  $\mathbb{C}$ . Pretpostavimo da je  $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$  holomorfno preslikavanje između dva kompleksna torusa. Tada postoji kompleksni broj  $\alpha$  sa  $\alpha\Lambda \subset \Lambda'$  tako da  $\varphi(z + \Lambda) = \alpha z + \Lambda'$ . Preslikavanje je inverzno ako i samo ako je  $\alpha\Lambda = \Lambda'$ .*

Uzmimo za primjer sljedeći izomorfizam dviju homotetičnih rešetki. Neka je  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$  proizvoljna rešetka tako da je  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ . Označimo  $\tau = \omega_1/\omega_2$  i  $\Lambda_\tau = \tau\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Vrijedi da je  $(1/\omega_2)\Lambda = \Lambda_\tau$ , tj.  $\Lambda$  i  $\Lambda_\tau$  su homotetične rešetke. Tada po prethodnoj propoziciji slijedi da je preslikavanje  $\varphi_\tau : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_\tau$  dano s  $\varphi_\tau(z + \Lambda) = z/\omega_2 + \Lambda_\tau$  izomorfizam. Ovo nam pokazuje da je svaki kompleksni torus izomorfan nekom kompleksnom torusu čija je rešetka generirana s kompleksnim brojem  $\tau \in \mathbb{H}$  i brojem 1. Takav  $\tau$  nije jedinstven. Neka je  $\tau' = \sigma_1/\sigma_2 \in \mathbb{H}$  i  $\Lambda = \sigma_1\mathbb{Z} \oplus \sigma_2\mathbb{Z}$ , tada po lemi 3.3.1 postoji  $\delta \in SL_2(\mathbb{Z})$  tako da je  $\tau' = \delta(\tau)$ . Time pokazujemo da svaki kompleksni torus određuje  $\tau \in \mathbb{H}$  do na djelovanje od  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Vratimo se na priču o Escherovoj slici i pomoću kompleksnih transformacija, opisanih u 2. poglavlju, na kompleksnim torusima dobiti preslikavanje između zakrivljenog i ravnog svijeta.

Najprije, preformulirat ćemo ranije definiranu funkciju kojom smo opisali Escherovu sliku u ravnom svijetu,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \{\text{crno, bijelo}\}$  koja svakom  $z \in \mathbb{C}$  pridružuje boju  $f(z)$  i funkciju kojom smo opisali Escherovu sliku u zakrivljenom svijetu,  $g : \mathbb{C} \rightarrow \{\text{crno, bijelo}\}$  koje svakom  $w \in \mathbb{C}$  pridružuje boju  $g(w)$ . Također, definirali smo na slici u ravnom svijetu period 256 tako da vrijedi  $f(256z) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$ , te period  $\gamma$  na slici u zakrivljenom svijetu tako da vrijedi  $g(w) = g(\gamma w), \forall w \in \mathbb{C}$ . Nadalje, umjesto kompleksne ravnine  $\mathbb{C}$  promatrat ćemo radije prostor  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , to i dalje ostavlja rupu u sredini, ali za razliku

od Escherove, premlu da bi se primjetila. Prijelaz između prostora  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{C}^*$  eksponencijalno je preslikavanje, tj.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad i \quad z' \in \mathbb{C}^* \quad \text{vrijedi} \quad z' = e^z.$$

Definirajmo prostor  $\mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  kao kvocijent grupe  $\mathbb{C}^*$  i podgrupe generirane sa 256, tj.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad i \quad z' \in \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \quad \text{vrijedi} \quad z' = z \cdot 256^n.$$

Na isti način definiramo prostor  $\mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$ . Funkcije koje sada opisuju slike u ravnom i zakrivljenom svijetu su  $f : \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \rightarrow \{\text{crno, bijelo}\}$  i  $\bar{g} : \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle \rightarrow \{\text{crno, bijelo}\}$ .

Kompleksne transformacije koje smo definirali u 2. poglavlju na generaliziranom primjeru, sada ćemo primjeniti na Escherovu sliku. Budući da Escher iza sebe nije ostavio sliku u ravnom svijetu, krenuti ćemo od Escherove slike u zakrivljenom svijetu, odnosno od prostora  $\mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$ . Objasnimo redom:

### 1. Logaritamska transformacija

Logaritamskom transformacijom preslikavamo sliku u prostoru  $\mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$  na kompleksni torus  $\mathbb{C}^*/\Lambda_\gamma$ . Neka je  $w_1 \in \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$ , oblika  $w_1 = e^w \cdot \gamma$ ,  $w \in \mathbb{C}$ . Logaritamska funkcija preslikava točku  $w_1$  u točku  $w_2 = \log(w_1) \in \mathbb{C}^*/\Lambda_\gamma$ , oblika

$$w_2 = \log(w_1) = \log(e^w \cdot \gamma) = \log(e^w \cdot e^{2\pi i n} \cdot \gamma) = w + n \cdot 2\pi i + \log \gamma,$$

gdje su  $2\pi i$  i  $\log \gamma$  generatori rešetke  $\Lambda_\gamma$ .

### 2. Rotacija i skaliranje

Kombinacijom rotacije i skaliranja opisuju preslikavanje između kompleksnih torusa  $\mathbb{C}^*/\Lambda_\gamma$  i  $\mathbb{C}^*/\Lambda_{256}$ . Prema Propoziciji 3.4.1 slijedi da postoji holomorfnu izomorfizam  $\varphi$  između kompleksnih torusa  $\mathbb{C}^*/\Lambda_\gamma$  i  $\mathbb{C}^*/\Lambda_{256}$  sa  $\varphi(w_2 + \Lambda_\gamma) = \alpha w_2 + \Lambda_{256}$  ako i samo ako postoji  $\alpha \in \mathbb{C}$  takav da je  $\alpha \Lambda_\gamma = \Lambda_{256}$ . Rešetka  $\Lambda_{256} = \langle 2\pi i, \log 256 \rangle$  homotetična je rešetki  $\Lambda_\tau = \langle \frac{2\pi i}{\log 256}, 1 \rangle$ , za  $\tau = \frac{2\pi i}{\log 256} \in \mathbb{H}$ . Tada prema propoziciji 3.4.1 vrijedi da je preslikavanje između torusa  $\mathbb{C}^*/\Lambda_\tau$  i  $\mathbb{C}^*/\Lambda_{256}$  izomorfno.

Prisjetimo se matrica  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  koje generiraju modularnu grupu  $SL_2(\mathbb{Z})$  i definiraju njeno djelovanje na gornju poluravninu  $\mathbb{H}$ . Geometrijski, matrice S i T opisuju djelovanje kompleksnih transformacija rotacije, skaliranja i translacije. Prikažimo djelovanje matrica S i T na  $\tau = \frac{2\pi i}{\log 256} \in \mathbb{H}$ , pomoću formula  $S(\tau) = -1/\tau$ ,  $T(\tau) = \tau + 1$ . Neka je

$\alpha = S^{-1}T^{-1}S(\tau)$ , te računamo

$$\begin{aligned}\alpha &= S^{-1}T^{-1}S(\tau) \\ &= S^{-1}T^{-1}\left(\frac{-1}{\tau}\right) \\ &= S^{-1}\left(\frac{-\tau}{1+\tau}\right) \\ &= \frac{1+\tau}{\tau} \\ &= \frac{2\pi i + \log 256}{2\pi i}.\end{aligned}$$

$\alpha$  je kompleksni broj čiji je modul jednak 0.749767 i argument jednak 41.4297, a to su upravo faktori skaliranja i rotacije koje želimo kako bi dobili verziju slike jednake Escherovoj slici. Postavimo sad  $\alpha\Lambda_\tau = \Lambda_{256}$ , tj. da su  $\Lambda_\gamma$  i  $\Lambda_{256}$  homotetične za  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Izračunajmo za koji  $\gamma$  to vrijedi.

$$\begin{aligned}\frac{2\pi i + \log 256}{2\pi i} \cdot \log \gamma &= \log 256 \\ \log \gamma &= \frac{2\pi i(\log 256)}{2\pi i + \log 256} \\ \gamma &= \exp\left(\frac{2\pi i(\log 256)}{2\pi i + \log 256}\right) \\ &= \exp(3.117227721 + 2.7510856371i).\end{aligned}$$

$|\gamma| = 22.5836$  i argument od  $\gamma$  je  $\varphi = 157.62559$ , primjetimo da smo dobili jednaki  $\gamma$  kao u prethodnom poglavlju. Naglasimo da bi odabirom druge kompozicije matrica S i T dobili različiti  $\gamma$ . Dakle, u slučaju dobivenog  $\gamma$  za  $\alpha = \frac{2\pi i}{2\pi i + \log 256}$  postoji holomorfnu izomorfizam između kompleksnih torusa  $\mathbb{C}^*/\Lambda_\gamma$  i  $\mathbb{C}^*/\Lambda_{256}$ , te se točka  $w_2$  preslikava u točku  $w_3 = \varphi(w_2 + \Lambda_\gamma) = \alpha w_2 + \Lambda_{256} = \alpha w_2 + n \cdot 2\pi i + \log 256$ .

### 3. Eksponencijalna transformacija:

Eksponencijalnom transformacijom preslikavamo sliku sa kompleksnog torusa  $\mathbb{C}^*/\Lambda_{256}$  u prostor  $\mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$ . Tada točku  $w_3$  preslikavamo u točku

$$z = \exp(w_3) = \exp(\alpha w_2 + n \cdot 2\pi i + \log 256) = e^{\alpha w_2} \cdot 256 = e^{w_2^\alpha} \cdot 256,$$

$\alpha$  se podiže u eksponent jer je  $w_2$  logaritam.

Konačno, kada bi točku  $z \in \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  preslikali u točku  $z' \in \mathbb{C}^*$  dobijemo  $z' = e^{w_2^\alpha} = w_2^\alpha$ .

Dobivena funkcija upravo je preslikavanje između zakrivljenog i ravnog svijeta pomoću koje je Henrik Lenstra uspio ispuniti bijelu rupu u sredini i završiti sliku, što ćemo pokazati u sljedećem poglavlju.

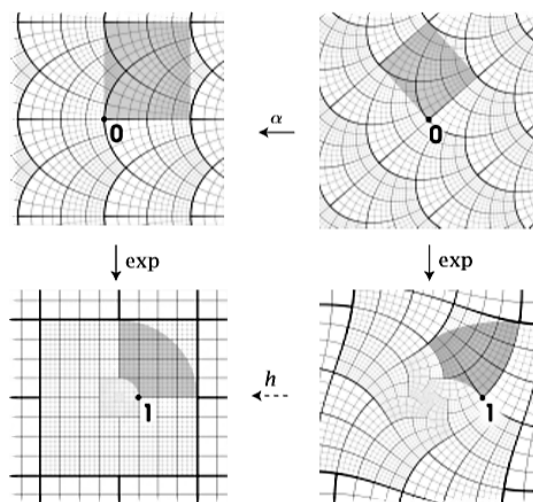


## Poglavlje 4

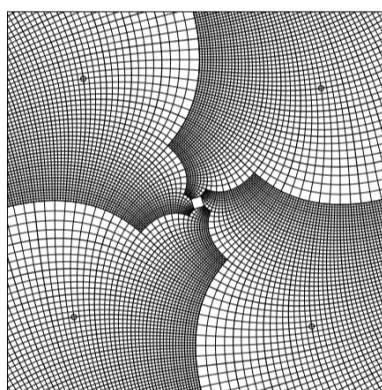
# Rekonstrukcija Escherove „Print Gallery“

Nakon što je izračunao vrijednost od  $\gamma$  i došao do eksponencijalnog preslikavanja između ravnog i zakrivljenog svijeta, Lenstra je svoje otkriće želio vizualno prikazati. Joost Batenburg, jedan od matematičara u timu, izradio je poseban softver pomoću kojeg su uspjeli vizualizirati transformacije na Escherovoj mreži. Za poglavlje Rekonstrukcija Escherove „Print Gallery“ korištene su literature [1] i [4].

Neka je  $w$  točka u zakrivljenom svijetu u prostoru  $\mathbb{C}^*$  koju logaritamskom funkcijom preslikamo u točku  $\log(w)$ . Zatim, točku  $\log(w)$  skaliranjem za faktor 0.749767 i rotacijom za kut 41.4297, u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, preslikamo u točku  $\log(w) \cdot \alpha$  i konačno, eksponencijalnom funkcijom je preslikamo u ravni svijet u prostoru  $\mathbb{C}^*$ , odnosno u točku  $z = h(w) = \exp(\log(w) \cdot \alpha) = w^\alpha$ . Navedene transformacije prikazane su na slici 4.1 gdje vertikalne strelice označavaju eksponencijalne transformacije i horizontalna strelica koja predstavlja transformaciju rotacije i skaliranja.

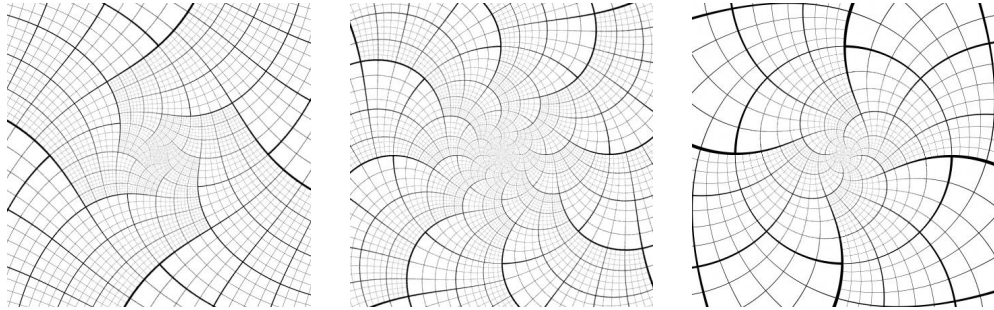
Slika 4.1:  $h(w) = \exp(\log(w) \cdot \alpha) = w^\alpha$ 

Na slici 4.2 prikazana je mreža dobivena funkcijom  $h(w)$ .

Slika 4.2: Escherova mreža dobivena funkcijom  $h(w)$ 

Za različiti odabir  $\gamma$ , kut rotacije i faktor skaliranja bili bi drugačiji. Na sljedećim slikama primjeri su verzija mreže sa različitim odabirom  $\gamma$ .



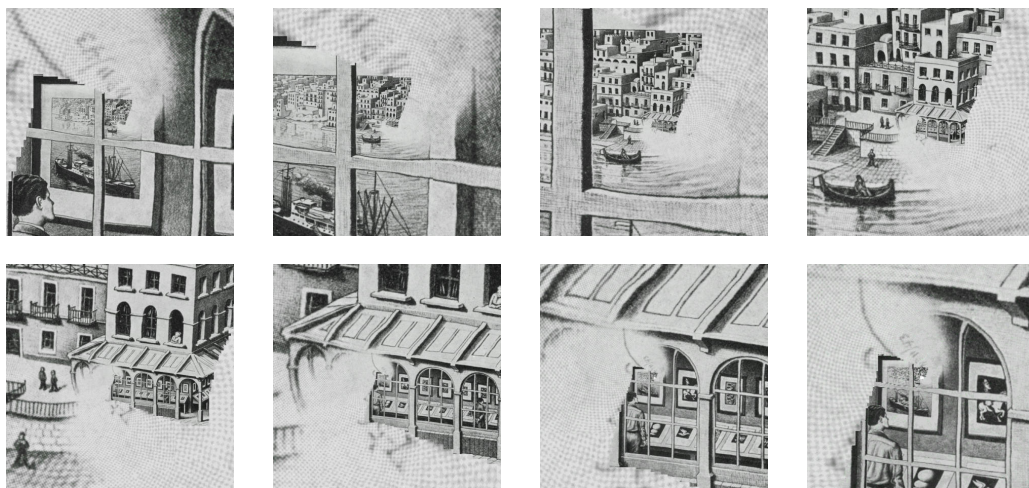
Slika 4.3: Verzije Escherove mreže sa odabirom različitog  $\gamma$ 

## 4.1 Ispunjenje rupe i završetak slike

Glavni cilj istraživanja prof. Lenstra i njegovog tima bio je završetak slike, odnosno ispunjenje bijele rupe u sredini slike. Posebno izrađeni softver mogao je transformirati sliku iz zakrivljenog svijeta u ravni svijet pomoću dobivene funkcije  $h$ . Originalne skice Eschera pripadaju privatnom kolekcionaru kojima Lenstra i njegov tim nisu imali pristupa, te iz tog su razloga ručno morali rekonstruirati sliku. Sljedeći koraci opisuju ispunjenje bijele rupe i završetak Escherove slike.

### 1. Otpetljavanje slike

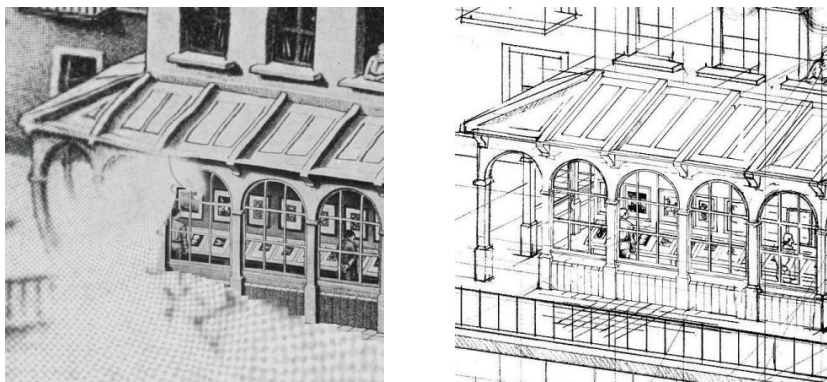
Prvi korak bio je otpetljati bijelu mrlju u sredini. Sljedećih 8 slika prikazuju Escherovu sliku kao ciklus od 8 zasebnih okvira, svaki zumiran za faktor 2.



Slika 4.4: Otpetljavanje bijele mrlje u sredini

### 2. Rekonstrukcija slike

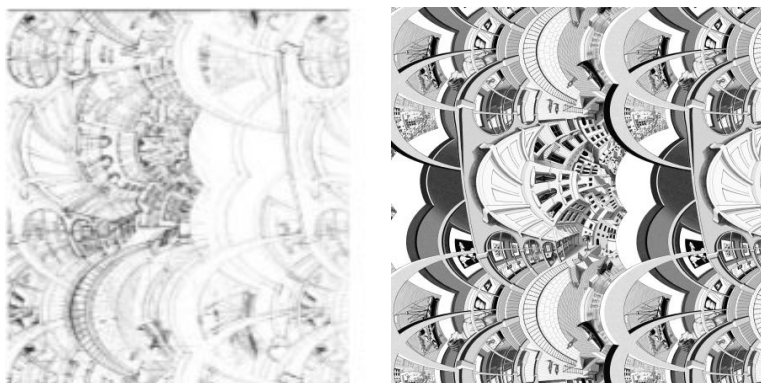
Nakon što su otpetljali bijelu mrlju, bilo je potrebno rekonstruirati prethodnih 8 okvira, što je učinio nizozemski umjetnik Hans Richter. Na slici ispod prikazan je primjer rekonstrukcije jednog okvira.



Slika 4.5: Rekonstrukcija dijela Escherove slike

### 3. Primjena kompjuterskog logaritma

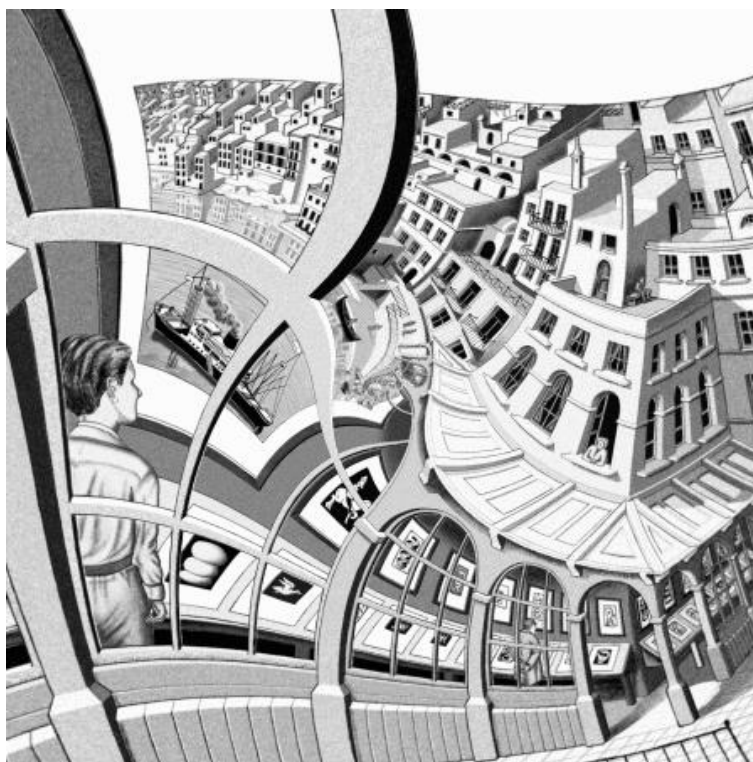
Nakon rekonstrukcije, pomoću softvera, Batenburg je uspio producirati dvostruko peri-odičnu verziju gornjih rekonstrukcija, koju je zatim umjetnik Jacqueline Hofstra ispunio sivim tonovima.



Slika 4.6: Ispunjenje rekonstruirane slike sivim tonovima

### 4. Escherov efekt

Pomoću softvera, gornju sliku možemo rotirati i skalirati na mnogo različitih načina, kao što smo već naveli. Slika 4.7 prikazuje gornju sliku kada se na nju djeluje funkcijom  $h(w) = w^\alpha$ . Tako dobivena slika prikazuje dovršenu Escherovu litografiju „Print Gallery“.

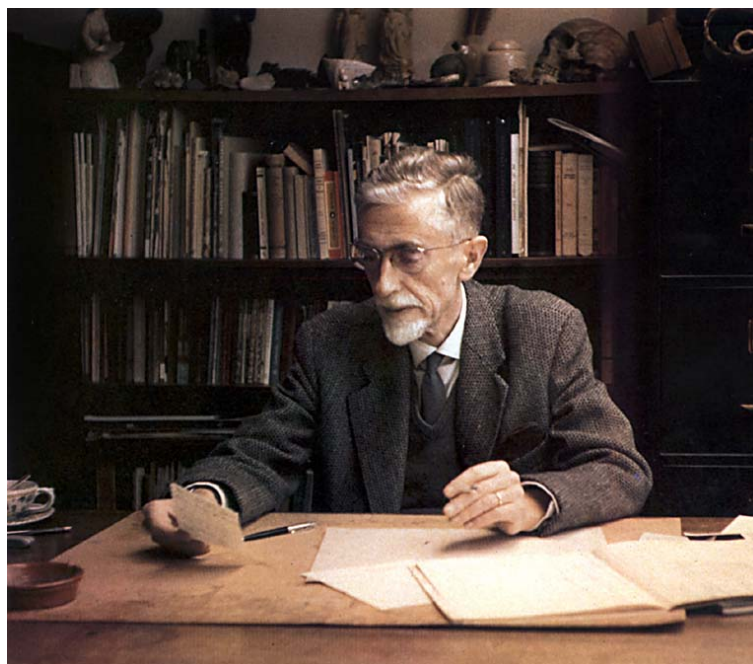


Slika 4.7: Dovršena Escherova slika „Print Gallery“

## 4.2 M.C. Escher biografija

Maurits Cornelis Escher (1898.-1972., Nizozemska) jedan je od najvećih grafičkih dizajnera na svijetu. Svojim djelima, inspirirao je milijune ljudi diljem svijeta poigravajući se u njima orijentacijom i prostorom. Na taj je način uživao u divljenju, ne samo umjetničke svjetske scene, nego je svojim radovima zaintegrirao i znanost te matematičku zajednicu. Escher je od ranog djetinjstva pokazivao naznake kreativnosti i uočavanja različitih obrazaca u prostoru i prirodi. Od 1919. do 1922. pohađao je školu arhitekture i dekorativne umjetnosti, u Nizozemskoj, gdje je razvio interes za grafiku i gdje je pod mentorstvom Samuela Jessurun de Mesquita izradio svoja prva djela u drvorezu. Tijekom svog života putovao je i živio u mnogim europskim gradovima koji su ga inspirirali za stvaranje njegovih najvećih djela. 1923. godine njegova obitelj dom je pronašla u Rimu čija ga je arhitektura i krajolik potakla na stvaranje realnijih obrazaca u kojima se u svojim djelima poigrava sa perspektivom i sjenama. U tom periodu nastala su djela „hand with a reflecting sphere“, „Castrovalva“ i „Atrani“ po uzoru na male talijanske gradove, te nekoliko samoportreta njega i njegove žene, Jette Umiker. Porastom fašizma u Italiji, Escher je odselio u Švicarsku 1935. te od tamo odlazio često na put u Španjolsku gdje je bio inspiriran

kompleksnim dizajnom struktura za svoj početak izrade mozaika i ponavljajućih obrazaca sa međusobno preklapajućim i povezanim slikama i figurama koji su se pretvarali u nešto sasvim drugo kao što se vidi u njegovim serijama „Metamorfoza“ i „Razvoj“, („[Alhambra] je bila najbogatiji izvor inspiracije koji sam ikad pronašao.“). Nakon Švicarske 1937. odlazi u Belgiju, ali sa invazijom Nacističkih snaga, vraća se u Nizozemsku 1941. gdje nastaju njegova najpoznatija crno-bijela djela „Oko“, „Galerija“, „Kristal“, „Uzlazno i silazno“, „Kapljica rose“. Kroz litografije i radeći u drvorezu, pokazao je svoje izvanredne sposobnosti prikazivanja nemogućih konstrukcija u arhitekturi, beskonačnih prostora i metamorfoza jednog predmeta u drugi. Escher je iza sebe ostavio 450 litografija, drvoreza, drvenih gravura i više od 2000 skica i crteža, uživajući pritom titulu „Otac modernog mozaika“. 2002. godine otvorena je stalna postava Escherovih djela u muzeju Escher in Het Paleis (Escher u palači) u Haagu, Nizozemska, gdje se nalazi original „Print Gallery“, slika koja je postavila Eschera među najveće svjetske umjetnike.



Slika 4.8: M.C. Escher

*„So let us then try to climb the mountain, not by stepping on what is below us, but to pull us up at what is above us, for my part at the stars; amen“ - M.C. Escher*

# Bibliografija

- [1] B.de Smit, H.W.Lenstra Jr., *Artful Mathematics: The Heritage of M. C. Escher*, American Mathematical Society, 2003., dostupno na: <https://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>
- [2] F.Diamond, J.Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Springer-Verlag New York, 2005.
- [3] M.Kazalicki, *Modularne forme*, skripta, PMF-Matematički odsjek, dostupno na: [https://web.math.pmf.unizg.hr/~mkazal/reprints/modularne\\_forme.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~mkazal/reprints/modularne_forme.pdf)
- [4] Escher and the Droste effect, dostupno na: <http://escherdroste.math.leidenuniv.nl/index.php?menu=intro>
- [5] M.C.Escher biography, dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/M.\\_C.\\_Escher](https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher)
- [6] A logarithmic image transformation, dostupno na: [http://www.josleys.com/article\\_show.php?id=82](http://www.josleys.com/article_show.php?id=82)
- [7] V.Čuljak, *Primijenjena matematika*, skripta, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011.



# Sažetak

U ovom diplomskom radu objašnjena je matematička struktura umjetničkog djela „Print Gallery“ nizozemskog umjetnika M.C. Eschera. Objašnjenje se bazira na činjenici da se litografija promatra kao slika na određenim eliptičkim krivuljama nad poljem kompleksnih brojeva, te idejom da se u sredini slika sama ponavlja. Preciznije, da slika sadrži kopiju sebe koja je rotirana za  $-157,625^\circ$  i umanjena za faktor 22,58. U 1. poglavlju prikazana je Escherova metoda konstrukcije mreže i ucrtavanja slike u mrežu. U 2. poglavlju na generaliziranom primjeru objašnjene su kompleksne transformacije koje se koriste kako bi se postigao Escherov efekt. U 3. poglavlju opisana je teorija modularne grupe, djelovanje Möbiusovih transformacija na gornju poluravninu, te teorija kompleksnih torusa. Zatim se promatra Escherova slika na kompleksnom torusu i primjena kompleksnih transformacija iz 2. poglavlja sa ciljem da se dobije preslikavanje, koje uz pomoć posebno izrađenog softvera omogućuje završetak slike, što je prikazano u 4. poglavlju.





# Summary

This thesis shows the mathematical structure of the artwork "Print Gallery", made by the Dutch graphic artist Maurits Cornelis Escher (1898–1972). The explanation is based on the fact that lithography is viewed as an image on certain elliptic curves over the field of complex numbers and on the idea that picture is rotated until it is almost upside down and containing another copy of itself. More precisely, the image contains a copy of itself rotated at  $-157,625^\circ$  and reduced by factor 22.58. In Chapter 1 Escher's method of his grid construction is presented. In Chapter 2, a generalized example explains complex transformations that are used to achieve Escher's effect. Chapter 3 describes the theory of the modular group, the effect of Möbius transformations on the upper half-plane and the theory of complex torus. Then the Escher's image on the complex torus is considered and the use of complex transformations from the 2nd chapter on the image, with the aim of obtaining a mapping which, with the help of a specially made software, enables to finish the image, as shown in Chapter 4.



# Životopis

Rođena sam 05.10.1993. godine u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu Žuti brijeg, nakon koje, 2008.godine upisujem 3.gimnaziju u Zagrebu. 2012.godine, upisujem preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2015.godine upisujem diplomski studij Matematike, smjer Financijska i poslovna matematika. U 9.semestru odlazim u Dresden, gdje sam putem ERASMUS programa studirala na fakultetu Technische Universität Dresden.