

Stroga pravila ishoda

Grlić, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:221716>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Grlić

STROGA PRAVILA ISHODA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sonja Radas

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Karakterizacija pravila ishoda	3
1.1 Pravila ishoda i prikladnost	3
1.2 Konveksna funkcija i pravilo ishoda	5
1.3 Očekivana funkcija ishoda i Bregmanova divergencija	7
1.4 Teorija odluke	9
1.5 Vještina ishoda	9
2 Pravila ishoda za kategorijske varijable	11
2.1 Savage reprezentacija	11
2.2 Schervish reprezentacija	14
3 Pravila ishoda za neprekidne varijable	21
3.1 Pravila ishoda za predikciju gustoće	21
3.2 Neprekidno rangirani ishodi vjerojatnosti i ishod energije	22
3.3 Pravila ishoda koja ovise samo o prvom i drugom momentu	24
4 Pravila ishoda pomoću jezgre	27
4.1 Ishod pomoću negativno definitne jezgre	27
4.2 Pozitivno definitna jezgra	29
4.3 Konstrukcija s kompleksnom jezgrom	31
5 Pravila ishoda za kvantile i predikcije intervala	33
5.1 Prikladna pravila ishoda za kvantile	33
5.2 Ishod intervala	34
5.3 Case study: Microsoft	35
5.4 Case study: Predviđanje intervala za uvjetno heteroskedastičan proces	41
5.5 Pravila ishoda za predikciju distribucije	44

6	Bayesovi faktori i slučajna k-struka unakrsna provjera	47
6.1	Logaritamski ishod i Bayesovi faktori	47
6.2	Pravila ishoda i slučajna k-struka unakrsna provjera	49
7	Bayesov serum istine	51
7.1	Karakterizacija Bayesovog seruma istine	51
7.2	Pravilo ishoda i Bayesov serum istine	53
7.3	Istraživanje	54
	Bibliografija	61

Uvod

Glavni cilj statističke analize je da napravi što bolju predikciju za budućnosti. Pravila ishoda su alat koja procjenjuju kvalitetu vjerojatnosnih predikcija pridružujući im ocjenu koja se temelji na prediktivnoj distribuciji i događaju koji se materijalizira. Uvodimo osnovno svojstvo, prikladnost, koje u predikcijskom problemu ohrabruje prognostičara da govori istinu čime maksimizira svoju očekivanu dobit. Ako je ta maksimizirana dobit jedinstvena, tada kažemo da je pravilo ishoda strogo prikladno. Strogo prikladna pravila ishoda imaju svoju ulogu i u estimacijskim problemima gdje služe kao procjenitelji parametara i pružaju funkciju korisnosti ili gubitka. U ovom diplomskom radu ćemo se usredotočiti na predikcijski problem, predstaviti pravila ishoda na generalnom vjerojatnosnom prostoru te pokazati poveznicu s konveksnom funkcijom, informacijskom mjerom i Bergmanovom divergencijom. Uvesti ćemo pravila za kategorijske varijable čiji su predstavnici reprezentacija Savage i Schervish te dati primjere. Nadalje, pokazat ćemo što se događa ako imamo neprekidne varijable te zašto je predikciju gustoće bolje zamijeniti s predikcijom kumulativne distribucije. Uvesti ćemo pojam jezgre te njegovu povezanost s pravilom ishoda. Sljedeće na redu će biti obrada ishoda za kvantile i intervale za koje ćemo izložiti 2 case study-a. Nadogradit ćemo znanje o predikciji distribucije te povezati Bayesove faktore s pravilom ishoda. Na kraju diplomskog rada, uvodimo poseban slučaj pravila ishoda zvan Bayesov serum istine kojeg je uveo Dražen Prelec.

Poglavlje 1

Karakterizacija pravila ishoda

U ovom odjeljku ćemo uvesti notaciju, karakterizaciju te povezati ih s konveksnom funkcijom, informativnom mjerom te Bregmanovom divergencijom.

1.1 Pravila ishoda i prikladnost

Predikciju promatramo na generalnom uzorku prostora Ω . Neka je \mathcal{A} σ -algebra podskupa na Ω i neka je \mathcal{P} konveksna klasa vjerojatnosnih mjera na (Ω, \mathcal{A}) . Funkcija definirana na Ω , koja poprima vrijednosti iz skupa $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, je P -kvazi-integrabilna ako je mjerljiva s obzirom na σ -algebru A i kvazi-integrabilna s obzirom na svaki $P \in \mathcal{P}$, pokazao je Bauer prema [3]. Vjerojatnosna predikcija je bilo koja vjerojatnosna mjera $P \in \mathcal{P}$. Pravilo ishoda je bilo koja funkcija iz $\overline{\mathbb{R}}$, tj. za koju vrijedi $S : \mathcal{P} \times \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ poput $S(P, \cdot)$ koja je \mathcal{P} -kvazi-integrabilna za sve $P \in \mathcal{P}$. Stoga, ukoliko imamo predikciju P i ostvari se događaj ω , nagrada analitičaru je $S(P, \omega)$. Pravilo ishoda se može gledati kao kazna ili gubitak, ali u tom slučaju bismo ga željeli minimizirati. Nadalje ćemo promatrati pravilo ishoda kao nagradu za dobro obavljen posao, stoga imamo pozitivnu orijentaciju. Pravila ishoda su u praksi rabljena kao realne vrijednosti, ali postoje iznimke, poput logaritamskog pravila (Good 1952) koji dopušta beskonačne rezultate (vidi [19]). To je upravo svojstvo regularnosti. Promatrano u praksi, pravila ishoda su alat za mjerenje točnosti predikcija. Očekivani ishod

$$S(P, Q) = \int S(P, \omega) dQ(\omega)$$

je očekivana vrijednost pravila ishoda za sve moguće realizacije distribucije Q kada je P vjerojatnosna predikcija. Možemo ga zapisati i ovako

$$S(P, Q) = E_{x \sim Q} [S(P, x)]$$

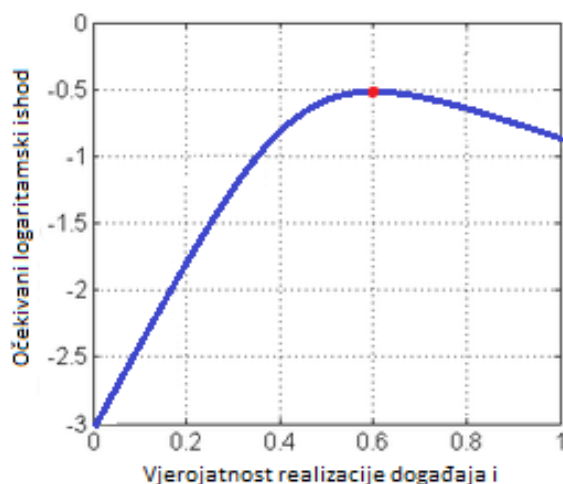
Najvažnije svojstvo pravila ishoda je prikladnost.

Definicija 1.1.1. (*Prikladnost pravila ishoda*) Pravilo ishoda S je prikladno s obzirom na \mathcal{P} ako vrijedi

$$S(Q, Q) \geq S(P, Q) \text{ za sve } P, Q \in \mathcal{P}. \quad (1.1)$$

Strogo prikladno je s obzirom na \mathcal{P} ukoliko jednakost u 1.1 vrijedi ako i samo ako je $P = Q$.

Kao što smo već rekli, pravila ishoda mjere točnost vjerojatnosnih predikcija. Dakle prognostičari daju vjerojatnosnu predikciju za niz mogućih događaja. Neka to bude vektor r koji sadrži vjerojatnosti r_i da će se događaj i , $i = 1, \dots, n$ realizirati. Skup događaja nam je konačan i veličine n . Pravilo ishoda $S(r, i)$ nagrađuje prognostičara ukoliko se događaj i realizira. Ako koristimo pravilo ishoda koje je prikladno, najveća moguća očekivana nagrada je ako analitičar prognorizira istinsku vjerojatnosnu distribuciju, bolje rečeno distribuciju događaja koji se realizira. Stoga, prikladno pravilo ishoda potiče analitičara da bude iskren da bi maksimizirao svoj očekivanu dobit. Upravo svojstvo prikladnosti je najvažnije u primjeni pravila ishoda u praksi. Radi bolje motivacije, objasnimo prikladnost na sljedećoj slici.



Slika 1.1: Odnos između vjerojatnost realizacije događaja i te očekivanog logaritamskog ishoda

Očekivani logaritamski ishod je prikazan kao funkcija vjerojatnosti događaja i . Kao što vidimo, očekuje se da će se događaj i realizirati s vjerojatnošću od 60%. Pošto je očekivani

logaritamski ishod očekivana nagrada analitičara, on je želi maksimizirati. Upravo zbog toga će dati predikciju od 0.6 za događaj i jer će sve druge predikcije dati manji očekivani ishod. Kao što možemo zaključiti, logaritamski ishod je prikladan.

Ako je S prikladno pravilo ishoda, $c > 0$ je konstanta i h je \mathcal{P} -integrabilna funkcija, tada

$$S^*(P, \omega) = cS(P, \omega) + h(\omega) \quad (1.2)$$

je prikladno pravilo ishoda. Vidimo da vrijedi:

$$S^*(Q, Q) = \int S^*(Q, \omega) dQ(\omega) = \int (cS(Q, \omega) + h(\omega)) dQ(\omega) = cS(Q, Q) + \int h(\omega) dQ(\omega) \geq cS(P, Q) + \int h(\omega) dQ(\omega) = \int (cS(P, \omega) + h(\omega)) dQ(\omega) = S^*(P, Q)$$

Dakle prikladno pravilo ishoda je invarijantno na linearnu transformaciju uz uvjete na c i h . Slično, ukoliko je S strogo prikladno, tada je i S^* strogo prikladno pravilo ishoda. Po Dawidu (1998), kažemo da S i S^* su *ekvivalentni ili strogo ekvivalentni* ukoliko je $c = 1$ (vidi [11]). Izraz *prikladno* je povezan s Winkler i Murphy ([30], str. 754.), a potječe još od Good-a iz 1952. ([19], str. 112) i Brier-a iz 1950. [7].

Definirajmo ranije spomenuto svojstvo regularnosti.

Definicija 1.1.2. *Pravilo ishoda $S : \mathcal{P} \times \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ je regularno s obzirom na klasu \mathcal{P} ukoliko $S(P, Q)$ poprima realnu vrijednost za sve $P, Q \in \mathcal{P}$, osim mogućnosti da vrijedi $S(P, Q) = -\infty$ ukoliko $P \neq Q$.*

Cilj cjelokupne vjerojatnosne predikcije možemo definirati kao maksimizacija oštine prediktivne distribucije i kalibracije. Kalibracija je statistička konzistentnost između predikcije i realizacije, stoga to je njihovo zajedničko svojstvo. Kao naprimjer, ukoliko je predikcija koja se temelji na podacima zadnjih 20 godina davala 55% šanse da će kišiti na prvi dan jeseni, a stvarna frekvencija padanja kiše toga dana je bila 10%, kažemo da je predikcija slabo kalibrirana, upravo zbog velike razlike između stvarnih događaja i predikcija. Za razliku od kalibracije, oština je samo svojstvo predikcije. Odnosi se na koncentraciju prediktivne distribucije. U poglavlju 5 ćemo vidjeti zašto nam je od važnosti.

1.2 Konveksna funkcija i pravilo ishoda

Nakon što smo definirali svojstva, sljedeće što želimo jest naći poveznicu između konveksne funkcije i pravila ishoda. Definirajmo konveksnost funkcije.

Definicija 1.2.1. *(konveksna funkcija) Funkcija $G : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$ je konveksna ako*

$$G((1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1) \leq (1 - \lambda)G(P_0) + \lambda G(P_1) \text{ za sve } \lambda \in (0, 1), P_0, P_1 \in \mathcal{P} \quad (1.3)$$

Funkcija je strogo konveksna ukoliko jednakost u formuli 1.3 vrijedi ako i samo ako je $P_0 = P_1$.

Po članku [18] definiramo subtangent i iznosimo karakterizacijski teorem pravila ishoda.

Definicija 1.2.2. Funkcija $G^*(P, \cdot) : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ je subtangent od G u točki $P \in \mathcal{P}$ ako je integrabilan s obzirom na P , kvazi-integrabilna s obzirom na sve $Q \in \mathcal{P}$ i

$$G(Q) \geq G(P) + \int G^*(P, \omega) d(Q - P)(\omega) \text{ za sve } Q \in \mathcal{P} \quad (1.4)$$

Teorem 1.2.3. Regularno pravilo ishoda $S : \mathcal{P} \times \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ je prikladno s obzirom na klasu \mathcal{P} ako i samo ako postoji konveksna, realna funkcija G na \mathcal{P} tako da vrijedi

$$S(P, \omega) = G(P) - \int G^*(P, \omega) dP(\omega) + G^*(P, \omega) \text{ za sve } P \in \mathcal{P} \text{ i } \omega \in \Omega \quad (1.5)$$

gdje je $G^*(P, \cdot) : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ subtangent od G u točki $P \in \mathcal{P}$. Vrijedi i ako prikladno zamijenimo strogo prikladnim i konveksno strogo konveksnim.

Dokaz. \Leftarrow Ako je pravilo bodovanja S navedenog oblika, tada subtangentova nejednakost 1.4 podrazumijeva definiranje nejednakosti 1.1, tj. prikladnost.

\Rightarrow S druge strane, pretpostavimo da je S prikladno regularno pravilo ishoda. Definiramo $G : \mathcal{P} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ tako da $G(P) = S(P, P) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} S(Q, P)$, što je supremum klase konveksnih funkcija i stoga konveksan na \mathcal{P} . Nadalje, subtangentova nejednakost 1.4 vrijedi za $G^*(P, \omega) = S(P, \omega)$

$$\begin{aligned} S(Q, Q) = G(Q) &\geq G(P) + \int G^*(P, \omega) d(Q - P)(\omega) = S(P, P) + \int S(P, \omega) d(Q - P)(\omega) = \\ &= S(P, P) + S(P, Q) - S(P, P) = S(P, Q) \end{aligned}$$

iz čega dobijemo 1.5 i ispunjen zahtjev za prikladnošću. Odnosno,

$$\begin{aligned} S(P, \omega) &= S(P, P) - S(P, P) + S(P, \omega) = G(P) - \int S(P, \omega) dP(\omega) + S(P, \omega) = \\ &= G(P) - \int G^*(P, \omega) d(P)(\omega) + G^*(P, \omega) \end{aligned}$$

□

Možemo reći da je regularno pravilo ishoda S prikladno s obzirom na klasu $\mathcal{P} \Leftrightarrow G(P) = S(P, P)$ konveksna i $S(P, \omega)$ je subtangent od G u točki P , za svaki $P \in \mathcal{P}$.

1.3 Očekivana funkcija ishoda i Bregmanova divergencija

Po članku [18] te izvorno po Grünwaldu i Dawidu [14], Buji, Stuetzle-u i Shen-u [9], definiramo očekivanu funkciju ishoda, informacijsku mjeru ili generaliziranu entropijsku funkciju.

Definicija 1.3.1. *Pretpostavimo da je pravilo ishoda S prikladno s obzirom na klasu \mathcal{P} . Očekivanu funkciju ishoda*

$$G(P) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} S(Q, P), \quad P \in \mathcal{P}, \quad (1.6)$$

zovemo informacijska mjera, očekivana funkcija ishoda ili generalizirana entropijska funkcija, povezana s pravilom ishoda S . To je maksimalna korisnost koja se može postići pri predikciji nekog događaja. Dakle to je slučaj u kojoj su predikcija i realizirana distribucija događaja identične. Koristi se i termin entropijska funkcija.

Definicija 1.3.2. *Ukoliko je S regularan i pravilan tada funkciju $d : \Omega \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_+ \cup 0$*

$$d(Q, P) = S(Q, Q) - S(P, Q), \quad P, Q \in \mathcal{P}, \quad (1.7)$$

zovemo funkcija divergencije.

Drugim riječima, funkciju divergencije predstavlja razliku ostvarene vrijednosti od maksimalne moguće. Možemo uočiti da je nenegativna i ukoliko je strogo prikladna, tada je $d(P, Q)$ strogo pozitivna, uz izuzetak ako je $P = Q$. Ukoliko je prostor uzorka konačan i entropijska funkcija dovoljno glatka, tada funkcija divergencije postaje *Bregmanova divergencija* (Bregman, [6]), povezana s konveksnom funkcijom G . Bregmanova divergencija je slična metrici, ali ne zadovoljava nejednakost trokuta i simetričnost. Pomoću [35] ćemo pokazati kako preko kvadratne euklidske udaljenosti (nadalje ćemo pisati KEU) doći do Bregmanove divergencije, koja će kasnije igrati važnu ulogu.

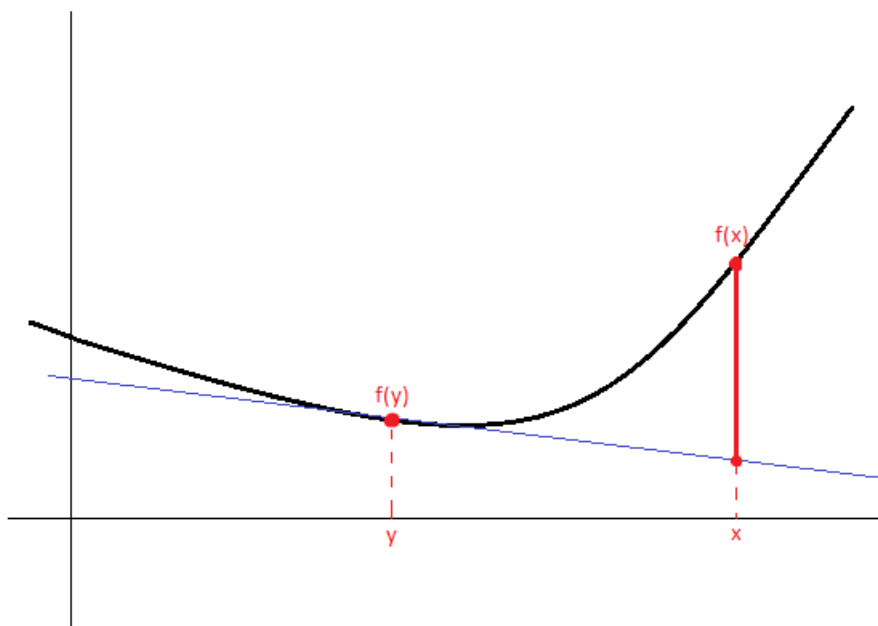
Neka imamo 2 točke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Tada KEU između njih iznosi:

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \quad (1.8)$$

Tu funkciju divergenciju možemo okarakterizirati kao nenegativna funkcija koja mjeri udaljenost između 2 točke. Definiramo skalarni produkt kao $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ te normu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Sada 1.8 možemo zapisati kao

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 - \langle 2\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

Uočavamo da je $2y$ upravo derivacija od $\|y\|^2$. Cijeli izraz je zapravo razlika između vrijednosti funkcije $\|x\|^2$ u x i vrijednosti njezine tangente povučene kroz točku y , promatrano u točki x . Pokažimo na slici za 1-dimenzionalan primjer.



Slika 1.2: Geometrijska interpretacija kvadratne euklidske udaljenosti.

Crvena vertikalna crta prikazuje kvadratnu euklidsku udaljenost spomenutih točaka. Pošto smo zahtijevali da je udaljenost nenegativna, geometrijski gledano, mora biti položena iznad tangente, zato zahtijevamo

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \quad \text{za sve } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

što je zapravo identično kao zahtijevati da je f konveksna funkcija. Stoga možemo dobiti neku mjeru udaljenosti koja je slična strukturi kvadratne euklidske udaljenosti ako zahtijevamo konveksnost funkcije i definiramo mjeru s

$$d_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) - \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0 \quad (1.10)$$

Upravo će nenegativnost biti posljedica konveksnosti. Takvo definiranu mjeru zovemo *Bregmanova divergencija*.

Bregmanova divergencija ima veliku ulogu u optimizaciji i u strojnom učenju. Koristi se naziv Bregmanova udaljenost iako $d(P, Q)$ nije jednako kao $d(Q, P)$.

Problem je pronaći uvjete u kojim funkcija divergencije d je *divergencija ishoda*, u smislu da dopušta reprezentaciju 1.7 za sva prikladna pravila ishoda S i da opiše načine pronalaska takvog pravila ishoda. Savage (1971) je dao nužne uvjete: Ukoliko su P i Q disjunktni događaji s vjerojatnostima $p, q \in [0, 1]$, tada $d(P, Q)$ postaje linearna funkcija $(p - q)^2$ te mora biti simetrična [37].

Friedman i Nau su prema [17] i [31], ograničili pozornost na metriku (tj. mjere udaljenosti koje su simetrične i zadovoljavaju nejednakost trokuta) i nazvali da je pravilo ishoda S *efektivno* s obzirom na metriku d ako vrijedi

$$S(P_1, Q) \geq S(P_2, Q) \Leftrightarrow S(Q, Q) - S(P_1, Q) \leq S(Q, Q) - S(P_2, Q) \Leftrightarrow d(P_2, Q) \leq d(P_1, Q)$$

Dakle, ukoliko se dogodi Q , pravilo ishoda je veće ako prognoziramo P_1 nego prognozu P_2 , ako i samo ako funkcija divergencije poprima manju vrijednost za prognozu P_1 nego prognozu P_2 , ukoliko se dogodi Q . Nau je nazvao mjeru *koefektivnu* ako postoji pravilo ishoda koje je efektivno u odnosu na mjeru. Promatrat ćemo primjere koje su dali Grünwald, Dawid i Buja prema članku [9] i [14]), te su objasnili vezu s Bregmanovom divergencijom.

1.4 Teorija odluke

Definiramo $U(\omega, a)$ kao korisnost ishoda ω i akcije a , neka P bude konveksna klasa vjerojatnosnih mjera na prostoru ishoda. Neka je a_p označava Bayesov čin za $P \in \mathcal{P}$. Tada je pravilo ishoda

$$S(P, \omega) = U(\omega, a_p)$$

pravilno s obzirom na klasu \mathcal{P} . Uistinu vrijedi

$$S(Q, Q) = \int U(\omega, a_Q) dQ(\omega) \geq \int U(\omega, a_p) dQ(\omega) = S(P, Q)$$

jer optimalna Bayesova odluka maksimizira očekivanu korisnost. Dakle korisnost ishoda je zapravo prikladno pravilo ishoda.

1.5 Vještina ishoda

Do sada smo pričali o pravilima ishoda, nagradi analitičaru za obavljeni rad i iskrenosti analitičara u želji za maksimizacijom svoje dobiti. Želja nam je otkriti koja je kvaliteta naše predikcije i usporediti različite procedure predviđanja. U praksi ishodi se zbrajaju i

uspoređuju se različite procedure predikcija koje se rangiraju prema aritmetičkoj sredini ishoda,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(P_i, x_i)$$

preko fiksnog skupa predviđenih situacija. Dajemo primjere slučajeva u odjeljku 5. Preporuke za odabirom pravila ishoda je dao Winkler u članku [44], Buja u [9] te T. Gneiting i Adrian E. Raftery u [18].

Htjeli bismo usporediti različite procedure predikcija, ali trenutno je moguće samo ako se radi o istom skupu predviđenih situacija. Ako se uspoređuju rezultati za različite skupine, tada se mora poduzeti velika pažnja kako bi se razdvojila zbrka učinka intrinzične predvidljivosti i prediktivne izvedbe. Na primjer, Langland (1999.) je u članku [26] ukazao da postoji znatna prostorna i vremenska varijabilnost predvidljivosti vremenskih i klimatskih elemenata. Tako rezultat koji je superiorniji za određenu lokaciju ili sezonu će biti inferioran za drugu, ili obrnuto. Da bi se riješio taj problem, prema Murphyjevom članku [29] i Pottsovoj knjizi (vidi [32], str. 27) atmosferski znanstvenici su definirali *vještinu ishoda* u formi

$$S_n^{skill} = \frac{S_n^{fcst} - S_n^{ref}}{S_n^{opt} - S_n^{ref}}, \quad (1.11)$$

gdje je S_n^{fcst} ishod prognostičara, S_n^{opt} hipotetski idealna ili optimalna predikcija i S_n^{ref} rezultat referentne ili standardne strategije. Izlazne vrijednosti mogu biti od $-\infty$ do 1, te pokazuju poboljšanje procjene s obzirom na referentnu. Ishod vještina je standardiziran u 1.11 te poprima vrijednost 1 ukoliko je prognostičar predvidio optimalnu prognozu, a vrijednost 0, ukoliko je predviđena referentna prognoza. Negativne vrijednosti ishoda vještine ukazuje na slabije predviđanje od referentne. Referentna prognoza je tipično klimatološka prognoza, odnosno procjena marginalne distribucije. Naprimjer, klimatološka prognoze za maksimalnu temperaturu na prvi dan ljeta u Hrvatskoj može biti izgladnena verzija povijesnih rekordnih temperatura na dana 21. lipnja. Nažalost, bodovi vještina u formi 1.11 su najčešće neprikladne, iako je pravilo ishoda S prikladno.

Poglavlje 2

Pravila ishoda za kategorijske varijable

Sada ćemo pregledati reprezentacije Savage-a (1971) i Schervish-a (1989) koje opisuju pravila ishoda vjerojatnosne predikcije za kategorijske varijable te daju primjere prikladnih pravila ishoda.

2.1 Savage reprezentacija

Prema članku [37] i [18] diskutiramo o navedenoj reprezentaciji i danim primjerima. Promatramo vjerojatnosnu predikciju kategorijskih varijabli. Prostor uzorka $\Omega = \{1, 2, \dots, m\}$ je konačan i sastoji se od disjunktih događaja. Vjerojatnosna prognoza je vjerojatnosni vektor (p_1, p_2, \dots, p_m) . Konveksna klasa je $\mathcal{P} = \mathcal{P}_m$, gdje je

$$\mathcal{P}_m = \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) : p_1, \dots, p_m \geq 0, p_1 + \dots + p_m = 1\}$$

Možemo definirati pravilo ishoda S s m fukcija,

$$S(\cdot, i) : \mathcal{P} \mapsto \overline{\mathbb{R}}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dakle, ako analitičar prognozira vektor vjerojatnosti \mathbf{p} te se realizira događaj i , tada nagrada analitičaru je $S(\mathbf{p}, i)$. Očito je da nagrada raste ukoliko raste vjerojatnost da će se događaj i realizirati. Teorem 2.1.2 je poseban slučaj teorema 1.2.3 i pruža verziju za Savage reprezentaciju (1971) za prikladna pravila ishoda na konačnom skupu. Neka je $G : \mathcal{P}_m \mapsto \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Vektor $G'(\mathbf{p}) = (G'_1(\mathbf{p}), G'_2(\mathbf{p}), \dots, G'_m(\mathbf{p}))$ je subgradijent u točki $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$ ako vrijedi

$$G(\mathbf{q}) \geq G(\mathbf{p}) + \langle G'(\mathbf{p}), \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \quad (2.1)$$

za sve $\mathbf{q} \in \mathcal{P}_m$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt. Ako je G derivabilan u unutarnjoj točki $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$, tada $G'(\mathbf{p})$ postoji i jedinstven je, te pretpostavljamo da poprima realne vrijednosti,

ali dopuštamo i $G'(\mathbf{p}) = -\infty$ ukoliko $p_i = 0$.

Kao što vidimo 2.1 je ekvivalentno s 1.9 ako definiramo $G(p) = f(p)$ za svaki $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$, sada zbog konveksnosti funkcije G slijedi da je pripadna funkcija divergencije Bergmanova divergencija.

Definicija 2.1.1. *Pravilo ishoda S za kategorijske predikcije je regularno ako S je realan za $i = \{1, 2, \dots, m\}$ ili $S(\mathbf{p}, i) = -\infty$ ukoliko $p_i = 0$.*

Regularna pravila ishoda daju konačne rezultate, izuzet predikcije da se realizirao događaj za kojeg tvrdimo da je bilo nemoguće da se dogodi. Tada regularno pravilo ishoda daje rezultat $-\infty$.

Definirajmo sada prikladno regularno pravilo ishoda za kategorijske varijable.

Teorem 2.1.2. *(McCarthy, Savage) Regularno pravilo ishoda S za kategorijske predikcije je prikladno ako i samo ako*

$$S(\mathbf{p}, i) = G(\mathbf{p}) - \langle G'(\mathbf{p}), q \rangle + G'_i(\mathbf{p}) \text{ za } i = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

gdje $G : \mathcal{P}_m \mapsto \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $G'(\mathbf{p})$ je subgradijent od G u točki \mathbf{p} za sve $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$. Vrijedi i ukoliko prikladnost zamijenimo sa strogom prikladnošću i konveksnost sa strogom konveksnošću.

Kao i u teoremu 1.2.3, regularno pravilo ishoda je prikladno ako i samo ako je očekivana funkcija ishoda $G(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ konveksna na \mathcal{P}_m i vektor s komponentama $S(\mathbf{p}, i)$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ je subgradijent od G u \mathbf{p} , za sve $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$. Dakle svaka ograničena funkcija G na \mathcal{P}_m generira regularno prikladno pravilo ishoda. Funkcija G postaje očekivana funkcija ishoda, informacijska mjera ili entropijska funkcija 1.6, a funkcija divergencije 1.7 je Bregmanova udaljenost.

Primjer 2.1.3. *(Kvadrčan ili Brierov ishod) Primjer strogo prikladnog pravila ishoda za kategorijske varijable je Brierov ishod. Njegova entropijska funkcija je zadana s $G(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^m p_j^2 - 1$, te Brierov ishod je zadan s*

$$S(\mathbf{p}, i) = - \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} - p_j)^2$$

$\delta_{ij} = 1$ ukoliko $i = j$, inače $\delta_{ij} = 0$, dok Bregmanova udaljenost je kvadratna euklidska udaljenost zadana s 1.8.

Vidimo da ishod poprima vrijednosti od $-\infty$ do 0. Ukoliko je prognostičar bio siguran u realizaciju događaja i te se on realizirao, tada je ishod 0, ukoliko je predvidio nemogućnost realizacije događaja i , tada je Brierov ishod $-\infty$. Brierov ishod govori nam kolika je

točnost predikcije, ali ne govori nam koliko je točna u usporedbi s ičim drugim. Neka imamo predikciju da će sutra kišiti s vjerojatnošću 70%, te se prognoza ostvarila. Koliki je Brierov ishod? Vidimo da je $m = 1$, $\delta_{ij} = 1$ te Brierov ishod iznosi -0.3 .

Primjer 2.1.4. Logaritamski ishod je definiran s

$$S(\mathbf{p}, i) = \log p_i$$

te je njegova entropijska funkcija zadana s $G(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^m p_j \log p_j$ inače poznata kao Shannonova entropijska funkcija. Pripadna Bregmanova udaljenost je Kullback-Leiberova divergencija $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^m q_j \log\left(\frac{q_j}{p_j}\right)$.

Primjer 2.1.5. (0-1 ishod) 0-1 ishod nagrađuje prognostičara samo ukoliko se njegova predikcija događaja ostvari. Ako se radi o višestrukim događajima, odabire se događaj s najvećom vjerojatnosti realizacije. Maksimalan rezultat je 1, u slučaju jednake predikcije za više slučajeva, smanjuje se proporcionalno. Funkcija ishoda 1.6 je zadana s $G(\mathbf{p}) = \max_{j=1,2,\dots,m} p_j$, dok je nagrada, tj. 0-1 ishod prikazan s

$$S(\mathbf{p}, i) = \begin{cases} \frac{1}{\#M(\mathbf{p})}, & \text{ukoliko } i \text{ pripada } M(\mathbf{p}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

gdje $M(\mathbf{p}) = \{i : p_i = \max_{j=1,2,\dots,m} p_j\}$ Poznat je još kao gubitak misklasifikacije. Tada se promatra gubitak, to jest broje se krivi rezultati naspram realizacije, nakon čega se normaliziraju. Funkcija divergencije je zadana s

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \max_{j=1,2,\dots,m} q_j - \frac{\sum_{j \in M(\mathbf{p})} q_j}{\#M(\mathbf{p})}$$

Ona ne definira Bregmanovu divergenciju jer entropijska funkcija nije diferencijabilna niti strogo konveksna, pa time nije ni S strogo prikladna.

Želimo napraviti predikciju vremena za sljedeći dana. Smatramo da će pasti kiša 35%, biti oblačno 30% ili biti sunce s vjerojatnošću od 35%. Pošto se realizira kiša, naša nagrada je $\frac{1}{2}$ pošto je $M(\mathbf{p})$ dvočlan.

Do sada su se promatrala pravila ishoda koja su simetrična,

$$S((p_1, \dots, p_m), i) = S((p_{\Pi_1}, \dots, p_{\Pi_m}), \Pi_i) \quad (2.3)$$

za sve $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_m$, sve permutacije Π od m elemenata i sve događaje $i = 1, 2, \dots, m$. Pošto simetrična pravila ne nagrađuju uvijek korektno predikcijske vještine uviđa se potreba za asimetričnim. Asimetrična prikladna pravila ishoda mogu se generirati po članku [18] tako da teorem 2.1.2 primijenimo na konveksnu funkciju G koja nije invarijantna na permutaciju koordinata.

2.2 Schervish reprezentacija

U ovom odjeljku obraćamo pažnju na članak [18], gdje pomoću članka Schervisha [38], Gneiting i Raftnery definiraju pravila ishoda s 2 moguća ishoda. Promatrat ćemo prostor $\Omega = \{1, 0\}$. Vjerojatnosna predikcija je dana s $p \in [0, 1]$ da će se događaj dogoditi. Pravilo ishoda možemo identificirati s 2 funkcije $S(\cdot, 1), S(\cdot, 0) : [0, 1] \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. $S(p, 1)$ je nagrada prognostičaru ukoliko se događaj realizira, a on ga je s vjerojatnošću p prognorizirao. $S(p, 0)$ je nagrada ako se ne događaj ne realizira, a taj slučaj je predviđen s vjerojatnošću p . Definiramo konveksnu klasu s $\mathcal{P}_m = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \in [0, 1], p_2 = 1 - p_1$.

Pravilo ishoda za binarne varijable je *regularno* ako su $S(\cdot, 1)$ i $S(\cdot, 0)$ realne osim mogućnosti $S(0, 1) = -\infty$ ili $S(1, 0) = -\infty$. Dakle ukoliko prognostičar kaže da ne postoji mogućnost da se događaj realizira, a on se dogodi i obrnuto. Regularno prikladno pravilo ishoda definiramo s

$$\begin{aligned} S(p, 1) &= G(p) + (1 - p)G'(p) \\ S(p, 0) &= G(p) - pG'(p) \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje je $G : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $G'(p)$ je subgradijent od G u točki $p \in [0, 1]$, tako da vrijedi

$$G(q) \geq G(p) + G'(p)(q - p)$$

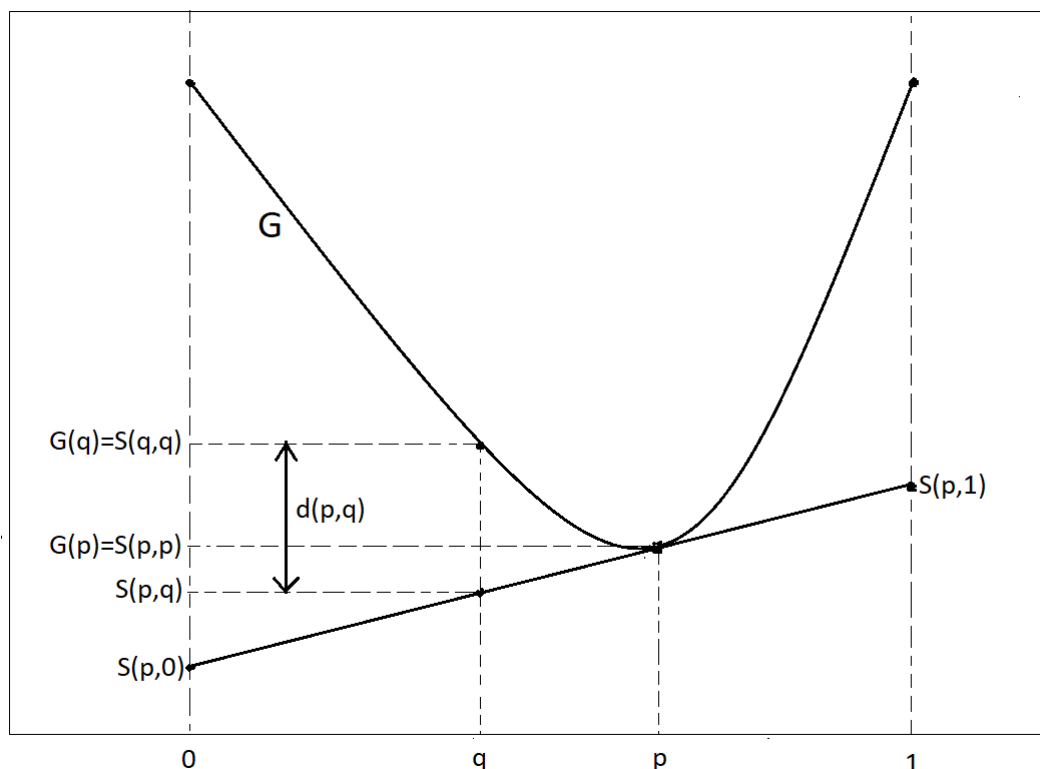
za sve $q \in [0, 1]$. Vrijedi kao i ranije, ukoliko prikladnost zamjenimo sa strogom prikladnošću i konveksnost sa strogom konveksnošću. Subgradijent $G'(p)$ poprima realne vrijednosti, osim za $G'(0) = -\infty$ i $G'(1) = \infty$. G je očekivana funkcija ishoda definirana s $G(p) = pS(p, 1) + (1 - p)S(p, 0)$. Ukoliko je diferencijabilna u unutarnjoj točki $p \in \langle 0, 1 \rangle$, tada $G'(p)$ je jedinstven i jednak derivacije od G u točki p . Pogledajmo geometrijsku interpretaciju na slici 2.1.

Reprezentacija 2.4 daje interesantna svojstva regularno prikladnih pravila ishoda. Iz Rockafellarovog teorema 24.2 članka [36]. Gneiting i Raftnery su zaključili da

$$S(p, 1) = \lim_{q \rightarrow 1} G(q) - \int_p^1 (G'(q) - G'(p))dq \tag{2.5}$$

za $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Ukoliko $G'(p)$ raste, tada $S(p, 1)$ raste. Slično, $S(p, 0)$ pada. Izjava vrijedi i ukoliko prikladnost, rast i pad zamijenimo sa stroga prikladnost, strogi rast i strogi pad.

Što bi bilo ako želimo dati veću važnost realizaciji jednog ishoda? Naprimjer, želimo nagraditi prognozu za predikciju vremena (sunce, kiša) za jedan ljetni dan. Pošto zbog historijskih podataka znamo da je na taj dan u 60% slučajeva bilo sunce, želimo da je veća



Slika 2.1: Prikazan je geometrijski odnos entropijske funkcije G , Bregmanove divergencije i pripadne funkcije ishoda. Za bilo koju vjerojatnost $p \in [0, 1]$, očekivan ishod $S(p, q) = qS(p, 1) + (1 - q)S(p, 0)$ je jednak vrijednosti ordinate tangente funkcije G u točki p kada se procjenjuje za $q \in [0, 1]$. Bregmanova udaljenost $d(p, q) = S(q, q) - S(p, q)$ je razlika između G i njezove tangente u točki p , mjerena za q . Slika nacrtana prema uzoru iz članka [18].

nagrada ukoliko uspije predvidjeti pojavu kiše s vjerojatnosti p , naspram da s tom isto vjerojatnosti pogodi pojavu sunca. Zato uvodimo sljedeći teorem i s njim, granicu c .

Neka $\mathbb{1}\{\cdot\}$ označava indikacijsku funkciju koja poprima vrijednost 1 ukoliko se događaj u zagradi dogodi, inače 0.

Teorem 2.2.1. *Pretpostavimo da je S regularno pravilo ishoda. S je prikladno takvo da vrijedi $S(0, 1) = \lim_{p \rightarrow 0} S(p, 1)$, $S(0, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} S(p, 0)$ te $S(p, 1)$ i $S(p, 0)$ su neprekidni*

s lijeva ako i samo ako postoji nenegativna mjera ν na $\langle 0, 1 \rangle$ takva da

$$\begin{aligned} S(p, 1) &= S(1, 1) - \int (1 - c) \mathbb{1}_{\{p \leq c\}} \nu(\mathrm{d}c) \\ S(p, 0) &= S(0, 0) - \int c \mathbb{1}_{\{p > c\}} \nu(\mathrm{d}c) \end{aligned} \quad (2.6)$$

za sve $p \in [0, 1]$. Pravilo ishoda je strogo prikladno akko ν je pozitivna mjera na svakom otvorenom intervalu.

Dokaz. Pretpostavljamo da S zadovoljava prepostavke teorema. Da bi dokazali da $S(p, 1)$ zadovoljava 2.6, promotrimo reprezentaciju 2.5. Identificira se rastuća funkcija $G'(p)$ s lijevom neprekidnom distribucijskom funkcijom nenegativne mjere ν na $\langle 0, 1 \rangle$ i primjenjuje parcijalna integracija. Analogno za $S(p, 0)$. \square

Posljedica teorema je da su $S(p, 1)$ i $S(p, 0)$ ograničeni odozgo. Možemo pretpostaviti da $S(1, 1) = 1$ i $S(0, 0) = 1$. Stoga očekivani prihod ide od $-\infty$ u najgorem slučaju, do 1 u najboljem.

Sada ćemo pomoću teorema 2.2.1 prikazati primjere prikladnih pravila ishoda.

Primjer 2.2.2. (*Brierov ishod*) Definirajmo $\nu(\mathrm{d}c) = 2\mathrm{d}c$. Tada 2.6 postaje $S(p, 1) = -(1 - p)^2$ i $S(p, 0) = -p^2$ što predstavlja Brierov ishod.

Primjer 2.2.3. (*Logaritamski ishod*) Neograničena mjera, koja je pozitivna na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, definirana s $\nu(\mathrm{d}c) = \frac{\mathrm{d}c}{c(1-c)}$, daje logaritamsko pravilo ishoda $S(p, 1) = \log p$ i $S(p, 0) = \log(1 - p)$. Za logaritamsko pravilo ishoda kažemo da je lokalno strogo prikladno jer predikcija za događaj daje ishod ukoliko se događaj k je i nije realizirao.

Neka je naša predikcija da će se događaj k dogoditi dana s vjerojatnošću od 70%, tada ukoliko se realizira promatrani događaj, naš dobitak je -0.1249 , ali ukoliko se naša predikcija pokaže krivom, dobivamo -0.6021 . U slučaju da pridajemo jako malu vjerojatnost događaju koji se realizira, naša nagrada će težiti u $-\infty$ kada predikcija realizacije teži u 0. Neka označimo $x = 1$ ako se događaj k realizirao, inače je 0. Tada logaritamski ishod možemo zapisati s $x \log(p) + (1 - x) \log(1 - p)$.

Primjer 2.2.4. (*0-1 ishod*) $\nu(\mathrm{d}c)$ je mjera u točki c dok 0-1 ishod je definiran s $S(p, 1) = (1 - c) \mathbb{1}_{\{p \geq c\}}$ i $S(p, 0) = c \mathbb{1}_{\{p \leq c\}}$, gdje $c \in \langle 0, 1 \rangle$ možemo nazvati granica dobitka. Predikcija analitičara mora biti bar iznad granice c da bi bio nagrađen.

Prethodna 3 primjera su bila strogo prikladna, sada ćemo dati primjer jednog koji je prikladan, ali nije strogo prikladan.

Primjer 2.2.5. Definiramo prikladno pravilo ishoda s

$$S(p, 0) = \begin{cases} \frac{-25}{36}, & \text{ako } p > \frac{5}{6} \\ -p^2, & \text{ako } \frac{1}{5} \leq p \leq \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{36}, & \text{ako } p < \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$S(p, 1) = \begin{cases} \frac{-1}{36}, & \text{akop } > \frac{5}{6} \\ -(1-p)^2, & \text{ako } \frac{1}{5} \leq p \leq \frac{5}{6} \\ \frac{-25}{36}, & \text{akop } < \frac{1}{6} \end{cases}$$

lako se da primjetiti da $v(dc) = 2dc$ za $p \in \left[\frac{1}{5}, \frac{5}{6}\right]$, inače 0 te vidimo da rubne točke iznose $S(1, 1) = S(0, 0) = \frac{-1}{36}$ i $S(1, 0) = S(0, 1) = \frac{-25}{36}$.

Buya je u članku [9] uveo 2-parametarsku beta familiju koja uključuje simetrične i nesimetrične članove koji potječu od mješovitih mjera beta tipa koji rješavaju problem asimetričnosti. U ovom slučaju problem asimetričnosti smatramo kao preferiranje jednog ishoda više. U našem problemu (kiša/sunce) pojava kiše je bila preferabilnija. Beta familija rješava taj problem.

Primjer 2.2.6. (Beta familija) Neka je $\alpha, \beta > -1$ i definiramo 2-parametarsku familiju

$$S(p, 1) = - \int_p^1 c^{\alpha-1} (1-c)^\beta dc$$

$$S(p, 0) = - \int_0^p c^\alpha (1-c)^{\beta-1} dc,$$

što zadovoljava formu 2.6 za miješane mjere $v(dc)$ s Lebesqueovom gustoćom $c^{\alpha-1}(1-c)^{\beta-1}$. To je verzija Brierov ishoda ($\alpha = \beta = 1$), logaritamskog ishoda ($\alpha = \beta = 0$) i 0-1 ishoda kada $c = \frac{1}{2}$ ($\alpha = \beta \mapsto \infty$). Asimetrični članovi nastaju kada je $\alpha \neq \beta$ kao naprimjer, pravilo ishoda $S(p, 1) = p - 1$ i $S(p, 0) = p + \log(1-p)$ ($\alpha = 1, \beta = 0$).

Pokažimo sad drugačiju asimetričnost pomoću primjera (kiša/sunce). Naspram prošlog slučaja, sada želimo nagradit analitičara samo ako je uspio predvidjeti sunce ili kišu s više od 55%, te samo u tom slučaju dobiva pozitivnu dobit. Dakle postoji granica od koje počinjemo nagrađivat analitičara. Takvu vrstu problematike rješava Winkler koji je u članku [44] predložio kako iz simetričnog pravila ishoda dobiti asimetričan. Ukoliko je S simetrično prikladno pravilo ishoda i $c \in \langle 0, 1 \rangle$ tada

$$S^*(p, 1) = \frac{S(p, 1) - S(c, 1)}{T(c, p)}$$

$$S^*(p, 0) = \frac{S(p, 0) - S(c, 0)}{T(c, p)} \tag{2.7}$$

gdje je $T(c, p) = S(0, 0) - S(c, 0)$ ako $p \leq c$ i $T(c, p) = S(1, 1) - S(c, 1)$ za $p > c$ je također prikladno pravilo ishoda čiji ishod postiže vrijednost između 0, ($p = c$) i 1, ($p = 0, p = 1$).

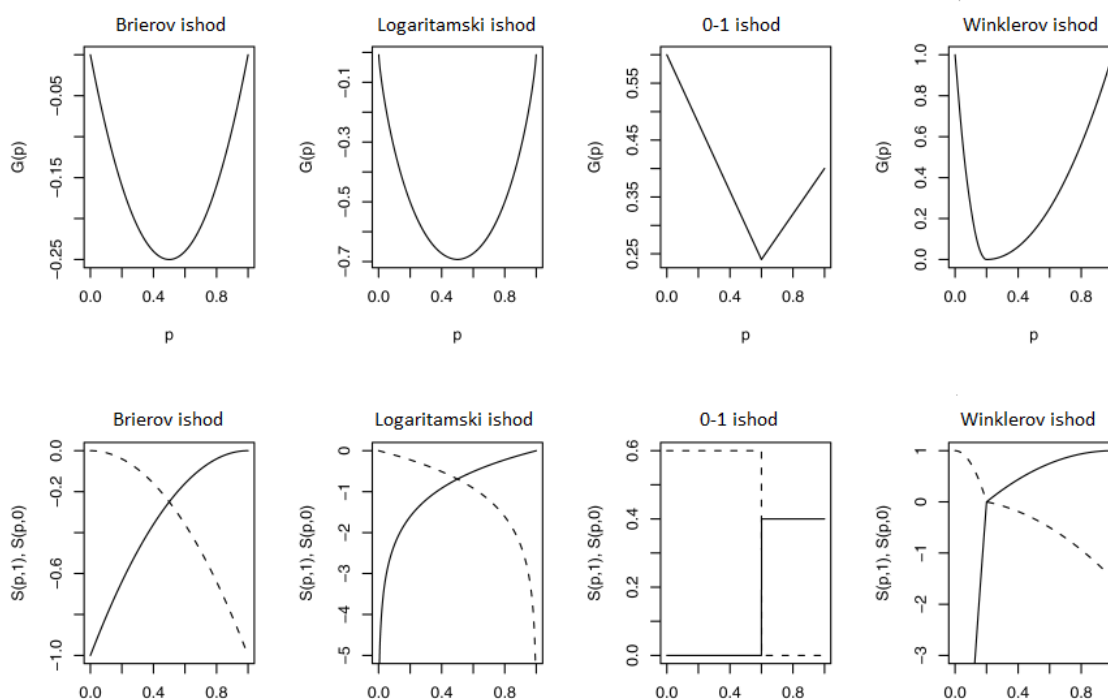
Primjer 2.2.7. (*Winklerov standardizirani ishod*) Tetlock (2005) je u [42] tražio način kako ocijeniti predikcije analitičara. Prilagodio je ocjenu prema težini zadatka koju je morao obaviti analitičar, tako da je koristio poseban slučaj formule 2.7 koji potječe od Brierovog ishoda.

$$S^*(p, 1) = \frac{(1-c)^2 - (1-p)^2}{c^2 \mathbb{1}_{\{p \leq c\}} + (1-c)^2 \mathbb{1}_{\{p > c\}}}$$

$$S^*(p, 1) = \frac{c^2 - p^2}{c^2 \mathbb{1}_{\{p \leq c\}} + (1-c)^2 \mathbb{1}_{\{p > c\}}}$$

gdje je $c \in (0, 1)$. To je predložio Winkler u članku [44] kao alternativu vještinama ishoda. Stručnjak bi trebao zadati granicu c da bi cjelokupan ishod imao smisla.

Na sljedećoj slici, preuzetoj iz [18], je prikazan očekivani ishod ili generalizirana entropijska funkcija, $G(p)$, i funkcije ishoda, $S(p, 1)$ i $S(p, 0)$, za Brierov ishod 2.2.2, logaritamski ishod 2.2.3, asimetričan 0-1 ishod 2.2.4 gdje je $c = 0.6$ i Winklerov ishod 2.2.7 za $c = 0.2$.



Slika 2.2: Očekivani ishod ili generalizirana entropijska funkcija $G(p)$ (gornji red) i funkcija ishoda $S(p, 1)$ (—) i $S(p, 0)$ (---) (donji red), za Brierov ishod, logaritamski ishod, asimetričan 0-1 ishod s $c = 0.6$ i Winklerov standardiziran ishod s $c = 0.2$.

Poglavlje 3

Pravila ishoda za neprekidne varijable

3.1 Pravila ishoda za predikciju gustoće

Pomoću članka [18] ćemo objasniti pravila ishoda za predikciju gustoće.

Definicija 3.1.1. *Neka je μ σ -konačna mjera na prostoru (Ω, A) . Za $\alpha > 0$ neka je \mathcal{L}_α klasa vjerojatnosnih mjera na (Ω, A) koje su neprekidne s obzirom na μ te imaju μ -gustoću p tako da*

$$\|p\|_\alpha = \left(\int p(\omega)^\alpha \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Vjerojatnosna predikcija $P \in \mathcal{L}_\alpha$ je dana s μ -gustoćom, p , koja se naziva prediktivna gustoća ili gustoća predikcije.

Prediktivne gustoće su definirane samo na skupu s μ -mjerom 0. Promatramo pravilo ishoda koje odgovara primjeru 2.1.3. Brierov ishod,

$$QS(P, \omega) = 2p(\omega) - \|p\|_2^2, \quad (3.1)$$

je strogo prikladan s obzirom na klasu \mathcal{L}_2 . Posjeduje očekivan ishod ili generaliziranu entropijsku funkciju $G(p) = \|p\|_2^2$ te simetričnu funkciju divergencije $d(p, q) = \|p - q\|_2^2$. Logaritamski ishod je definiran s

$$LogS(p, \omega) = \log p(\omega) \quad (3.2)$$

te je strogo prikladan s obzirom na klasu \mathcal{L}_1 vjerojatnosnih mjera dominiranih s μ . Informacijska mjera i funkcija divergencije su definirani kao i u primjeru 2.1.4.

„Kada se procjenjuje kvaliteta znanstvenog zaključaka, jedino vjerojatnost koju priklanja malom intervalu, koji poprima točnu vrijednost, treba uzeti u obzir.”

izjavio je Bernardo (vidi [5], str. 689). Dakle, od velike nam je važnosti imati pravila ishoda koja su *osjetljiva* na udaljenost. Bernardo je proučavao *lokalna* pravila ishoda $S(p, \omega)$ koja ovise o prediktivnoj distribuciji p , samo ako se događaj ω realizira. Pretpostavljajući regularnost, pokazao je da svako prikladno lokalno pravilo ishoda je ekvivalentno s logaritamskim ishodom s obzirom na 1.2. Linearni ishod $LinS(p, \omega) = p(\omega)$ nije prikladno pravilo ishoda jer ohrabruje prognostičare da ne daju iskrenu predikciju radi ostvarivanja većeg profita. Dawid je 2006. u članku [13] konstruirao prikladna pravila ishoda iz neprikladnih. Pitanje je da li se to može napraviti i za vjerojatnosne ishode. Ako se za prediktivno diskretno proučavanje koristi Lebesgueova gustoća na \mathbb{R} , logaritamski ishod potiče upotrebu umjetno visoke gustoće. Taj problem nestaje ukoliko se rabi prediktivna komulativna funkcija distribucije. Stoga umjesto predikcije gustoće bolje je koristiti predikciju pomoću komulativne distribucije.

3.2 Neprekidno rangirani ishodi vjerojatnosti i ishod energije

Jednostavni mjerni podaci o točnosti kao što su MAE (srednja apsolutna pogreška) ili MAPE (srednja vrijednost postotne apsolutne pogreške) nisu izravno primjenjivi na vjerojatnosne prognoze. Neprekidno rangirani ishod vjerojatnosti (CRPS - continuous ranked probability score) generalizira MAE u slučaju vjerojatnosnih predikcija. CRPS je jedan od najčešćih mjernih točnosti u kojima su uključene probabilističke prognoze.

Prethodna pravila ishoda nisu bila osjetljiva na udaljenost, dakle nikakva značajnost nije dana predikciji koja daje visoku vjerojatnost događajima koji su blizu onog koji se realizirao. Da bi to svojstvo bilo ispunjeno, neka se \mathcal{P} klasa Borelovih vjerojatnosnih mjera na \mathbb{R} . Vjerojatnosnu predikciju identificiramo s njezinom komulativnom distribucijom F

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (3.3)$$

gdje je $f_X(t)$ vjerojatnosna funkcija gustoće. Govori nam kolika je vjerojatnost da će X poprimiti vrijednost manju ili jednaku x . Vrijedi $F(x) \in [0, 1]$, $F(-\infty) = 0$ i $F(+\infty) = 1$.

Definicija 3.2.1. (*Neprekidno rangirani ishod vjerojatnosti*) *Neprekidno rangirani ishod vjerojatnosti (CRPS) je definiran s*

$$CRPS(F, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - \mathbb{1}_{\{y \geq x\}})^2 dy \quad (3.4)$$

što odgovara integralu Brierovog ishoda za binarnu vjerojatnosnu predikciju za sve realne vrijednosti. (Matheson i Wrinkler, [28]; Hersbach, [20]).

3.2. NEPREKIDNO RANGIRANI ISHODI VJEROJATNOSTI I ISHOD ENERGIJE 23

CRPS predstavlja udaljenost između komulativne predikcijske distribucije i komulativne distribucije istinitog ishoda x . Najmanja vrijednost 0 se može postići ukoliko imamo savršenu determinističku predikciju.

Integral pod 3.4 je često bio rješiv u zatvorenoj formi. Po lemi 2.2 od Baringhausa i Franza (2004) iz članka [2] ili identiteta (17) od Székely i Rizzo(2005) prema [40]

$$CRPS(F, x) = \frac{1}{2}E_F|X - X'| - E_F|X - x| \quad (3.5)$$

gdje su X i X' neovisne kopije slučajne varijable s distribucijom F i konačnim prvim momentom. CRPS je prikladan u odnosu na klasu \mathcal{P} i strogo prikladan relativno s podklasom \mathcal{P}_1 Borelovih vjerojatnosnih mjera koje imaju konačan prvi moment. Očekivana funkcija ishoda ili informacijska mjera je dana s

$$G(F) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(y) (1 - F(y)) dy = -\frac{1}{2}E_F|X - X'|$$

i odgovarajuća funkcija divergencije

$$d(F, G) = - \int_{-\infty}^{\infty} (F(y) - G(y))^2 dy$$

je simetrična i Cramér-von Mises oblika. Najčešće se koristi s negativnom orijentacijom, $CRPS^*(F, x) = -CRPS(F, x)$. 3.5 se može napisati u obliku

$$CRPS^*(F, x) = E_F|X - x| - \frac{1}{2}E_F|X - X'|.$$

Tada možemo opisati $CRPS^*$ kao očekivana udaljenost do realizacije, umanjena za očekivanu udaljenost 2 slučajna uzorka. Ukoliko je P deterministička, tada će $E_F|X - x|$ označavati udaljenost od realizacije, dok $\frac{1}{2}E_F|X - X'|$ će iznositi 0. Definicija je potekla iz članka [18], prema kojem dalje tražimo generalizaciju. $CRPS^*$, zapravo CRPS u negativnoj orijentaciji, generalizira apsolutnu pogrešku. Smanjuje se ukoliko je F deterministička predikcija, to jest mjera u točki. Radi toga, CRPS predstavlja direktnu usporedbu determinističke i vjerojatnosne predikcije.

Nadalje, uvodimo generalizaciju CRPS-a. Želimo prilagoditi CRPS za m -dimenzionalni prostor.

Definicija 3.2.2. Neka je \mathcal{P}_β klasa Borelovih vjerojatnosnih mjera, $\beta \in \langle 0, 2 \rangle$, Borelove vjerojatnosne mjere P poprimaju vrijednosti na \mathbb{R}^m i vrijedi da je očekivanje $E_P\|\mathbf{X}\|^\beta$ konačno, gdje $\|\cdot\|$ označava euklidsku normu. Definiramo ishod energije s

$$IE(F, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}E_P\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|^\beta - E_P\|\mathbf{X} - \mathbf{x}\|^\beta \quad (3.6)$$

gdje su \mathbf{X} i \mathbf{X}' nezavisne kopije slučajnog vektora s distribucijom $P \in \mathcal{P}_\beta$.

Vidimo da se ishod energije 3.6 reducira na CRPS za $\beta = 1$ i $m = 1$. Székelyjev teorem 1 prema [39] pokazuje da ishod energije je strogo prikladan s obzirom na klasu \mathcal{P}_β . U slučaju $\beta = 2$, ishod energije 3.6 se reducira na negativnu kvadratičnu pogrešku. Iskorištavamo nezavisnost X i X' te $E_P \mathbf{X} = E_P \mathbf{X}' = \mu_P$

$$\begin{aligned}
IE(P, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} E_P \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|^2 - E_P \|\mathbf{X} - \mathbf{x}\|^2 \\
&= \frac{1}{2} E_P (\mathbf{X} - \mathbf{X}')^2 - E_P (\mathbf{X} - \mathbf{x})^2 \\
&= \frac{1}{2} (E_P \mathbf{X}^2 - 2E_P \mathbf{X} E_P \mathbf{X}' + E_P \mathbf{X}'^2) - (E_P \mathbf{X}^2 - 2E_P \mathbf{X} E_P \mathbf{x} + E_P \mathbf{x}^2) \\
&= E_P \mathbf{X}^2 - E_P \mathbf{X} E_P \mathbf{X}' - E_P \mathbf{X}^2 + 2E_P \mathbf{X} E_P \mathbf{x} - E_P \mathbf{x}^2 \\
&= -E_P \mathbf{X}^2 + 2E_P \mathbf{X} E_P \mathbf{x} - E_P \mathbf{x}^2 \\
&= -(\mu_P^2 - 2\mu_P \mathbf{x} + \mathbf{x}^2) \\
&= -(\mu_P - \mathbf{x})^2 \\
&= -\|\mu_P - \mathbf{x}\|^2,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje je μ vektor očekivanja s obzirom P . Takvo pravilo ishoda je regularno i prikladno, ali nije strogo prikladno s obzirom na klasu \mathcal{P}_2 . Ishod energije s indexom $\beta \in [0, 2]$ vrijedi za sve Borelove vjerojatnosne mjere na \mathbb{R}^m ako definiramo energiju ishoda s

$$IE(P, \mathbf{x}) = -\frac{\beta 2^{\beta-2} \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{\beta}{2})}{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(1 - \frac{\beta}{2})} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\phi_P(\mathbf{y}) - e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}|^2}{\|\mathbf{y}\|^{m+\beta}} d\mathbf{y} \tag{3.8}$$

gdje je ϕ_P karakteristična funkcija od P . Ukoliko P pripada klasi \mathcal{P}_β , tada po teoremu 1 Székelyja vrijedi ekvivalentnost 3.6 i 3.8. Energija ishoda izračunava težinsku udaljenost između karakteristične funkcije P i karakteristične funkcije mjere u točki na vrijednosti koja se materijalizira.

3.3 Pravila ishoda koja ovise samo o prvom i drugom momentu

Promatramo pravila ishoda koja se odnose na Borelove vjerojatnosne mjere u prostoru \mathbb{R}^m i ovise o prediktivnoj distribuciji P kroz vektor očekivanja, μ_P , i kovarijacijskoj matrici, Σ_P . Po Dawidu [11], Dawid i Sebastianu [15] su Gneiting i Raftery proučavali takav tip pravila ishoda u članku [18]. Najatraktivniji primjer im je bio

$$S(P, \mathbf{x}) = -\log \det \Sigma_P - (\mathbf{x} - \mu_P)' \Sigma_P^{-1} (\mathbf{x} - \mu_P), \tag{3.9}$$

3.3. PRAVILA ISHODA KOJA OVIŠE SAMO O PRVOM I DRUGOM MOMENTU 25

uz koju je vezana očekivana funkcija ishoda

$$G(P) = -\log \det \Sigma_P - m,$$

i funkcija divergencije

$$d(P, Q) = \text{tr}(\Sigma_P^{-1} \Sigma_Q) - \log \det(\Sigma_P^{-1} \Sigma_Q) + (\mu_P - \mu_Q)' \Sigma_P^{-1} (\mu_P - \mu_Q) - m.$$

Vidimo da što je realizacija bliža vektoru očekivanja, to je očekivani ishod veći, odnosno, što je predikcija bolja, dobit analitičara će biti veća. Zato možemo zaključiti da je pravilo ishoda prikladno, ali ne i strogo prikladno s obzirom na klasu \mathcal{P}_2 Borelovih vjerojatnosnih mjera P za koje je očekivanje $E_P \|\mathbf{X}\|^2$ konačno. Strogo prikladno je s obzirom na konveksnu klasu vjerojatnosnih mjera koje su okarakterizirane s prvim i drugim momentom poput Gaussove mjere po članku [18].

Sljedeći kriterij odabira prediktivnog modela Laude i Ibrahima (PMCC-Predictive model choice criterion) procjenjuje prilagodbu modela. Pretpostavimo da smo našli model za procjenu uzorka $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koji poprima realne vrijednosti. Naš model je dan s

$$PMCC = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2,$$

gdje je μ_i očekivana vrijednost i σ_i varijanca kopije varijable X_i , s obzirom na dani model i realizaciju. Ako promatramo pravilo ishoda, PMCC odgovara pozitivno orijentiranom ishodu

$$S(P, x) = -(x - \mu_P)^2 - \sigma_P^2, \quad (3.10)$$

gdje je P ima očekivanje μ_P i varijancu σ_P . Takvo pravilo ishoda ovisi samo o prva dva momenta, ali nije prikladno. Ukoliko je prognostičarska iskrena predikcija P , pošto on želi maksimizirati očekivanu dobit, to jest pravilo ishoda, on će procijeniti da će se realizirati događaj μ_P . Dakle, bit će sklon determinističkoj predikciji, a ne vjerojatnosnoj. Stoga, ta činjenica nam govori da bi PMCC trebao biti zamjenjen s kriterijem baziranim na pravilu ishoda 3.9 koje se reducira na

$$S(P, x) = -\left(\frac{x - \mu_P}{\sigma_P}\right)^2 - \log \sigma_P^2 \quad (3.11)$$

ukoliko $m = 1$ i vrijednosti koje se realiziraju su realne. Sada vidimo da će prognostičar biti sklon vjerojatnosnoj predikciji.

Poglavlje 4

Ishoda pomoću jezgre, pozitivno i negativno definitne funkcije te nejednakosti Hoeffdingovog tipa

U ovom odjeljku želimo konstruirati prikladna pravila ishoda pomoću negativno definitnih funkcija. Ona će nam pomoći da u ishodu energije euklidsku normu $\|\cdot\|$ možemo zamijenimo bilo kojom funkcijom uz neke pretpostavke.

4.1 Ishod pomoću negativno definitne jezgre

Tražimo prema članku [18] konstrukciju prikladnih pravila ishoda pomoću negativno definitne jezgre čiji su ulazni podaci dvije nezavisne slučajne varijable distribucije P .

Definicija 4.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Realnu funkciju g na $\Omega \times \Omega$ zovemo negativno definitna jezgra ukoliko je simetrična i vrijedi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j(x_i, x_j) \leq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, za sve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ koji u sumi iznose 0 i za sve $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$.*

Sada ćemo prikazati generalizaciju jezgrine konstrukcije koju je dao Eaton (vidi [16], str. 335). Prvo, objasnimo što je Hausdorffov prostor.

Definicija 4.1.2. *Topološki prostor je Hausdorffov ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline.*

Slijedi iz [43] te vrijedi da niz u Hausdorffovom prostoru može konvergirati k jednoj točki i svaki konačan skup točaka je zatvoren skup.

Teorem 4.1.3. *Neka je Ω Hausdorffov prostor i neka je g nenegativna, neprekidna, negativno definitna jezgra na $\Omega \times \Omega$. Za Borelovu vjerojatnosnu mjeru P na Ω , neka su X i X' nezavisne slučajne varijable s distribucijom P . Tada je pravilo ishoda*

$$S(P, x) = \frac{1}{2}E_P g(X, X') - E_P g(X, x) \quad (4.1)$$

prikladno s obzirom na klasu Borelovih vjerojatnosnih mjera P na Ω za koje je očekivanje $E_P g(X, X')$ konačno.

Dokaz. Neka su P i Q Borelove vjerojatnosne mjere na Ω i pretpostavimo da X, X' i Y, Y' su nezavisne slučajne varijable s distribucijom P i Q . Da bi prikladnost bila zadovoljena mora vrijediti $S(Q, Q) \geq S(P, Q)$, za sve $P, Q \in \mathcal{P}$.

$$\frac{1}{2}E_Q g(Y, Y') - E_Q g(Y, Y') \geq \frac{1}{2}E_P g(X, X') - E_{P,Q} g(X, Y)$$

Dokazat ćemo da vrijedi

$$-\frac{1}{2}E_Q g(Y, Y') \geq \frac{1}{2}E_P g(X, X') - E_{P,Q} g(X, Y) \quad (4.2)$$

Ukoliko je $E_{P,Q} g(X, Y) = \infty$, tada je trivijalno zadovoljeno. Ako je $E_{P,Q} g(X, Y)$ konačno, po teoremu 2.1 Berg (vidi [4], str. 235) vrijedi

$$E_{Q,Q} g(Y, Y') \leq E_{P,Q} g(X, Y) \text{ i } E_{P,P} g(X, X') \leq E_{P,Q} g(X, Y)$$

te slijedi

$$E_Q g(Y, Y') + E_P g(X, X') \leq 2E_{P,Q} g(X, Y)$$

što povlači 4.2. □

Par primjera pravila ishoda, koji dopuštaju reprezentaciju pomoću jezgre, su dani iz članka [18].

Primjer 4.1.4. *(Brierov ishod) Neka je $\Omega = \{0, 1\}$ i pretpostavimo da $g(0, 0) = g(1, 1) = 0$ i $g(0, 1) = g(1, 0) = 1$. Tada 4.1 predstavlja Brierov ishod. Vidimo da $S(p, x) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.*

Primjer 4.1.5. *(CRPS) Ukoliko uzmemo $\Omega = \mathbb{R}$ i $g(x, x') = |x - x'|$ za $x, x' \in \mathbb{R}$, tada po teoremu 4.1.3 dobivamo CRPS definiran jednadžbom 3.5.*

Primjer 4.1.6. *(Ishod energije) Ishod energije dan jednadžbom 3.6 proizlazi iz 4.2 ukoliko je $\Omega = \mathbb{R}^m$, $\beta \in \langle 0, 2 \rangle$, i $g(x, x') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\beta$ za $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$, gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma.*

Tražimo generalizaciju ishoda energije za različite prostore. Po članku [18] uzmemo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ i $\alpha \in \langle 0, \infty \rangle$. Definira se vektor normi s $\|\mathbf{x}\|_\alpha = (\sum_{i=1}^m |x_i|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ukoliko $\alpha \in \langle 0, \infty \rangle$ i $\|\mathbf{x}\|_\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$ ukoliko $\alpha = \infty$. U članku [18] su napomenuli da po Schoenbergovom teoremu (pogledati [4], str. 74), temeljem rada Koldobskoga [25] i Zastavnyija [45], vrijedi da ako je $\alpha \in \langle 0, \infty \rangle$ i $\beta > 0$, tada jezgra

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_\alpha^\beta, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}_m,$$

je negativno definitna ako i samo ako vrijedi neka od pretpostavki. Pretpostavlja se da vrijedi jedno od:

- $m = 1, \alpha \in \langle 0, \infty \rangle$ i $\beta \in \langle 0, 2 \rangle$
- $m \geq 2, \alpha \in \langle 0, 2 \rangle$ i $\beta \in \langle 0, \alpha \rangle$
- $m = 2, \alpha \in \langle 2, \infty \rangle$ i $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$

Primjer 4.1.7. (Ishod energije za neeuclidiske prostore) Pod prethodnom pretpostavkom, pravilo ishoda

$$S(P, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} E_P \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\alpha^\beta - E_P \|\mathbf{X} - \mathbf{x}'\|_\alpha^\beta$$

je prikladno s obzirom na klasu Borelovih vjerojatnosnih mjera P na \mathbb{R}^m za koje je očekivanje $E_P \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\alpha^\beta$ konačno. Ukoliko je $m = 1$ ili $\alpha = 2$, onda imamo ishod energije definiran ranije, ukoliko $m \geq 2$ i $\alpha \neq 2$, tada je ishod energije definiran za neeuclidiske prostore.

4.2 Pozitivno definitna jezgra

Ako su očekivanja $E_P g(X, X')$ i $E_Q g(Y, Y')$ konačna, u tom slučaju 4.2 može biti zapisan kao Hoeffdingov tip nejednakosti,

$$2E_{P,Q} g(X, Y) - E_P g(X, X') - E_Q g(Y, Y') \geq 0 \quad (4.3)$$

Nadalje, ako je Ω grupa i negativno definitna funkcija g zadovoljava $g(x, x') = g(-x, -x')$ za $x, x' \in \Omega$, tada vrijedi

$$E_P g(X, -X') \geq E_P g(-X, -X') = E_P g(X, X') \quad (4.4)$$

Ukoliko $\Omega = \mathbb{R}^m$ i vrijedi pretpostavka 4.1, tada nejednakosti 4.3 i 4.4 se mogu svesti na

$$2E \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_\alpha^\beta - E \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\alpha^\beta - E \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\|_\alpha^\beta \geq 0 \quad (4.5)$$

$$E\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\alpha^\beta \leq E\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\|_\alpha^\beta \quad (4.6)$$

Buja (1994) je u sljedećem teoremu pokazao da je

$$h(x, x') = g(-x, -x') - g(x, x') \quad x, x' \in \Omega \quad (4.7)$$

pozitivno definitna jezgra, u smislu da je h simetrična i $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j h(x_i, x_j) \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, za sve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Specijalno, pod pretpostavkom 4.1, slijedi da vrijedi i za generalizaciju na \mathbb{R}^m . Pokažimo to pomoću Bujinog teorema.

Teorem 4.2.1. *Neka je $1 \leq \alpha \leq 2$ i neka je $1 \leq \beta \leq \alpha$, tada je funkcija $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|_\alpha^\beta - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_\alpha^\beta$, za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$ pozitivno definitna jezgra.*

Dokaz. Pokazat ćemo da za svaki konačni n vrijedi,

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j h(x_i, x_j) \geq 0$$

za svaki izbor n vektora $x_i \in \mathbb{R}^m$ i n skalara $a_i \in \mathbb{R}$. Po članku [18], funkcija $\|x\|_\alpha^\beta$ je negativno definitna ako

$$B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \|y_i - y_j\|_\alpha^\beta \leq 0$$

gdje je $\sum b_i = 0$. Definiramo $b_i = \text{sgn}(i)a_{|i|}$ te $y_i = \text{sgn}(i)x_{|i|}$ za $-n \leq i \leq n$, $i \neq 0$. Tada $\sum b_i = 0$ i vrijedi

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n \|y_i - y_j\|_\alpha^\beta b_i b_j \\ &= \left(\sum_{i=-n}^{-1} \sum_{j=-n}^{-1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \right) \|x_i - x_j\|_\alpha^\beta a_{|i|} a_{|j|} \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=-n}^{-1} + \sum_{i=-n}^{-1} \sum_{j=1}^n \right) \|x_i + x_j\|_\alpha^\beta a_{|i|} a_{|j|} \\ &= -2A \end{aligned}$$

Po Levyju (1937) $B \leq 0 \iff A \geq 0$. □

4.3 Konstrukcija s kompleksnom jezgrom

Definicija 4.3.1. Funkcija $h : \Omega \times \Omega \mapsto \mathbb{C}$ koja poprima kompleksne vrijednosti je pozitivno definitna jezgra ako je hermitska, $h(x, x') = \overline{h(x', x)}$ za $x, x' \in \Omega$ i za sve $n \in \mathbb{N}$, sve $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ i sve $x_1, \dots, x_n \in \Omega$ vrijedi $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j h(x_i, x_j) \geq 0$.

Sada definiramo po Dawidovom članku [11] prikladno pravilo ishoda uz uvjet da je h neprekidna i pozitivno definitna.

$$S(P, x) = E_P h(x, X) + E_P h(X, x) - E_P h(X, X') \quad (4.8)$$

Možemo vidjeti da ukoliko je h pozitivno definitna tada slijedi da je $g = -h$ negativno definitna. Ako poprima realne vrijednosti tada imamo ekvivalenciju formule 4.8 i 4.1. Prvo, zbog simetričnosti vrijedi

$$E_P h(x, X) + E_P h(X, x) - E_P h(X, X') = -E_P g(x, X) - E_P g(X, x) + E_P g(X, X') = E_P g(X, X') - 2E_P g(X, x)$$

te zbog invarijantnosti na afine transformacije (dijeljenje s 2) slijedi ekvivalentnost. Re-prezentacija 4.8 prema članku [21] dopušta konstrukciju prikladnih pravila ishoda za razne vjerojatnosne predikcije podataka, poput stringova, grafova i setova baziranih na pozitivnim definitnim jezgrama.

Poglavlje 5

Pravila ishoda za kvantile i predikcije intervala

Ponekad je teško odrediti cijelu prediktivnu distribuciju, zato analitičari odlučuju predviđeti kvantile. U financijama se često koristi, Value at Risk ili skraćeno VaR. To je mjera za rizik od gubitka što nije ništa drugo nego kvantil.

5.1 Prikladna pravila ishoda za kvantile

Po članku [18] pretpostavimo da tražimo kvantile na nivou značajnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \langle 0, 1 \rangle$. Ukoliko analitičar izračuna kvantile r_1, r_2, \dots, r_k i realizira se događaj x , tada definiramo pravilo ishoda

$$S(r_1, \dots, r_k; P) = \int S(r_1, \dots, r_k; x) dP(x) \quad (5.1)$$

kao očekivan ishod s obzirom na vjerojatnosnu mjerom P kada analitičar preudicira kvantile r_1, \dots, r_k . Nadalje definiramo prikladnost pravila ishoda.

Neka su stvarni P -kvantili q_1, \dots, q_k na nivou značajnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Po Cervaru i Muňozi [10], kažemo da je pravilo ishoda za kvantile prikladno ukoliko vrijedi

$$S(q_1, \dots, q_k; P) \geq S(r_1, \dots, r_k; P) \quad \text{za sve } r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathcal{P}$$

Uzeli su neke pretpostavke radi olakšanja. Pretpostavljaju da u narednim jednadžbama 5.2 i 5.4 su funkcije $s(x)$ i $h(x)$ \mathbb{P} -izmjerive i najviše polinomijalno rastuće u točki x .

Teorem 5.1.1. *Promatramo pravilo ishoda za jednog kvantila. Ukoliko je s neopadajuća i h proizvoljna funkcija, tada pravilo ishoda*

$$S(r; x) = \alpha s(r) + (s(x) - s(r)) \mathbb{1}_{\{x \leq r\}} + h(x) \quad (5.2)$$

je prikladno za predikciju kvantila na nivou značajnosti $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Dokaz. Neka je q jedinstven α -kvantil vjerojatnosne mjere $P \in \mathbb{P}$. P je funkcija distribucije takva da $P(q) = \alpha$. Ukoliko $r < q$, tada

$$\begin{aligned}
S(q; P) - S(r; P) &= \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha s(q) + (s(x) - s(q)) \mathbb{1}_{\{x \leq q\}} + h(x) - \alpha s(r) - (s(x) - s(r)) \mathbb{1}_{\{x \leq r\}} - h(x) \right) dP(x) \\
&= \alpha s(q) P(+\infty) + \int_{-\infty}^q (s(x) - s(q)) dP(x) - \alpha s(r) P(+\infty) - \int_{-\infty}^r (s(x) - s(r)) dP(x) \\
&= \alpha s(q) - \alpha s(r) \\
&= P(q) s(q) - \alpha s(r) + P(r) s(r) - P(r) s(r) \\
&\geq s(r) (P(q) - P(r)) + s(r) P(r) - \alpha s(r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ukoliko $r > q$, analogno. □

Najviše rabljeno pravilo ishoda u financijama i meteorologiji je

$$S(r; x) = (x - r) (\mathbb{1}_{\{x \leq r\}} - \alpha) \quad (5.3)$$

uz $s(x) = x$ i $h(x) = -\alpha x$ koje su predložili Koenker i Machado [24] i Taylor [41]. Lako se uoči da je $S(r, x)$ ima pozitivnu orijentaciju te je možemo promatrati kao nagradu analitičara kao i inače. Vidimo da u slučaju $x < r$ analitičar je pogrešno procjenio kvantil r i zaslužuje dobiti najmanju nagradu, koja teži u $-\infty$ ukoliko je obzervacija x daleko ispod r . Analitičar želi da je α što bliže 0 jer tada će nagrada biti što veća, ali je tada i granica r viša te je sve veća opasnost od pogreške. Stoga analitičar treba naći dobar omjer između α i r , stoga mora reći istinu da bi si maksimizirao prihod.

Korolar 1 u članku Gneiting i Raftery (vidi [18], str. 370) kaže da postoji prikladno pravilo ishoda za predikciju više kvantila odjednom uz pretpostavku linearnosti na s_i za $i = 1, 2, \dots, k$. Zaključili su da ne znaju da li 5.2 i jednažba 5.4, koja je dana u spomenutom korolaru 1, pružaju generalizaciju.

5.2 Ishod intervala

Ishod intervala je zapravo specijalan slučaj predikcije kvantila. Interval se sastoji od centralnog djela, $(1 - \alpha) \times 100\%$ intervala predikcije, donjeg i gornjeg ruba intervala što su predikcijski kvantili s razinom značajnosti $\frac{\alpha}{2}$ i $1 - \frac{\alpha}{2}$. Označimo pravilo ishoda s $S_\alpha(l, d; u)$ gdje l predstavlja lijevi rub intervala, a d desni.

Prema prethodno spomenutom korolaru 1 iz članka [18], prikladno pravilo ishoda za više kvantila je

$$S(r_1, r_2, \dots, r_k; x) = \sum_{i=1}^k [\alpha_i s_i(r_i) + (s_i(x) - s_i(r_i)) \mathbb{1}_{\{x \leq r_i\}}] + h(x) \quad (5.4)$$

uz uvjet da je s_i neopadajuća za sve i i h proizvoljna. Za ishod intervala potrebno je odrediti 2 kvantila. Stoga zapišimo $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $s_1(x) = s_2(x) = 2\frac{x}{\alpha}$ te $h(x) = -2\frac{x}{\alpha}$. Kao što vidimo pretpostavka za funkciju s je zadovoljena. Pravilo ishoda, ako promatramo kao nagradu, je negativno orijentirano. Dakle, najbolja nagrada prognostičara je vrijednost 0, što se može dogoditi ukoliko su lijeva l i desna d ograda iste, to jest ako interval postane jedna točka koja se i realizira. U ovom slučaju S možemo smatrati radi olakšanja kao kaznu. Što veću vrijednost S poprimi, to je kazna veća. Tada je ishod intervala

$$S_{\alpha}^{int}(l, d; x) = (d - l) + \frac{2}{\alpha}(l - x)\mathbb{1}_{\{x < l\}} + \frac{2}{\alpha}(x - d)\mathbb{1}_{\{x > d\}} \quad (5.5)$$

Dakle, prognostičar dobije kaznu $S_{\alpha}^{int}(l, d; x)$, čija veličina ovisi o α i pogrešci predikcije ako događaj koji se realizira nije unutar intervala. Što je α manji, to je analitičarska vjerojatnost $(1 - \alpha)\%$ upadanja realizacije u interval veća, time kazna za promašaj je veća. U slučaju da realizacija upadne u interval, analitičar je kažnjen za širinu intervala. Stoga, njegov je cilj dati što precizniju predikciju, tako da oštrina bude što bolja uz naravno, točnu predikciju, što možemo promatrati kao dobru kalibraciju.

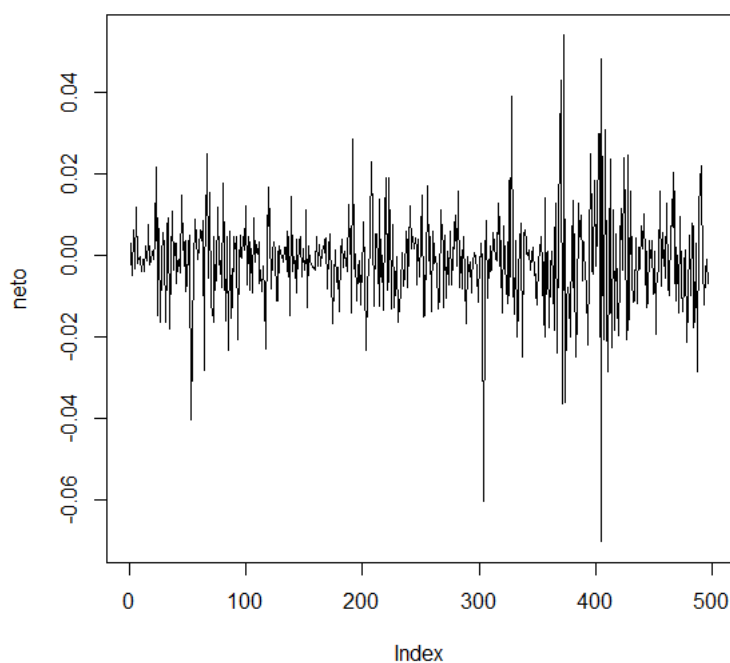
5.3 Case study: Microsoft

Reći ćemo da se bavimo kupnjom i prodajom dionica Microsofta. Odluku o kupnji ili prodaji zasnivamo na predikciji završne cijene trgovanja sljedećeg radnog dana. Na stranici [1] smo našli podatke koje ćemo koristiti za predikciju. Uzet ćemo podatke unatrag 2 godine krenuvši od 8.8.2016. do 8.8.2018. godine. Da bi se lakše stekao dojam o skinutim podacima, pokazat ćemo u tablici 5.1 podatke prvih 5 radnih dana, u kojem svaki sadrži 7 različitih vrsta. Redom: datum, cijena otvaranja, najviša, najniža cijena, cijena zatvaranja, prilagođena cijena zatvaranja i volumen trgovanja s dionicama Microsofta toga dana. Koristit ćemo cijenu zatvaranja, to jest cijena na kraju radnog dana pošto se ona uzima kao mjerodavna vrijednost dionice.

Ukupno 504 podataka koje odgovaraju cijeni zatvaranja. Tražimo kvantil s pouzdanošću od 95%. Da bismo to dobili, prvo je potrebno izračunati isti kvantil za dnevne povrate. Promatramo neto povrate na grafu 5.1. Prikazane su promjene iz dana u dan. Uspoređujući cijenu na dan t , s cijenom na dan $t + 1$. Vidimo da je raspon promjene cijene

Tablica 5.1: Prikaz dio podataka Microsoftovih dionica

Date	Open	High	Low	Close	Adj.Close	Volume
2016-08-08	58.06	58.09	57.78	58.06	55.55848	19473500
2016-08-09	58.17	58.50	58.02	58.20	55.69246	16920700
2016-08-10	58.16	58.32	57.82	58.02	55.52021	15756900
2016-08-11	58.03	58.45	58.03	58.30	55.78814	18133800
2016-08-12	58.03	58.19	57.62	57.94	55.44366	21655200



Slika 5.1: neto povrati cijena Microsofta unutar 2 godine

išao do 10% u par dana, a maksimalna promjena cijena je bila 5.411127%. Najmanja cijena u navedenom razdoblju je 56.21, median iznosi 72.78, dok najveća postignuta 110.83.

Promatrat ćemo 2 vrste procjene, parametarsku i neparametarsku.

Neparametarska procjena

Kod neparametarske procjene stvar se svodi na određivanje empirijskih kvantila, tj. kvantila danog uzorka. Neparametarski kvantil za cijenu se dobiva preko kvantila za neto povrate, za što postoji funkcija *quantile* ugrađena u program *R*. Da bismo ga pretočili u VaR za sutrašnju cijenu dionice, potrebno je znati zadnju cijenu dionice C . S vjerojatnošću $1 - \alpha$ sutrašnja cijena dionice će biti veća od

$$VaR_{dionice} = C(1 + VaR_{povrat})$$

Izračunali smo da je 106.7618 95% kvantil. Dakle, sigurni smo s 95% da će cijena idućeg dana 9.8.2018. biti veća ili jednaka 106.7618, dok je cijena prethodnog dana $C = 108.88$. Sada pogledajmo stvarnu cijenu toga dana. Stvarna cijena toga dana je iznosila 109.4900.

Parametarska procjena

Po predavanjima iz Financijskog praktikuma 2, na stranici [27], znamo da kod parametarske procjene postavljamo pretpostavku o distribuciji iz koje stiže uzorak s kojim raspolažemo. Na predavanjima je pretpostavljeno da su dionice Microsofta normalno distribuirane, ali mi ćemo provjeriti tu pretpostavku. U praksi ima smisla, jer dionice rastu u nekom vremenskom razdoblju, pa zatim padaju uz blage oscilacije. α -kvantil normalne distribucije $N(\mu, \sigma^2)$ je zadan s

$$\mu + \sigma\phi^{-1}(\alpha)$$

gdje je ϕ distribucija jedinične normalne razdiobe. Aproximacija tog kvantila na osnovu zadanog uzorka je dana s

$$\bar{X}_n + S_n\phi^{-1}(\alpha)$$

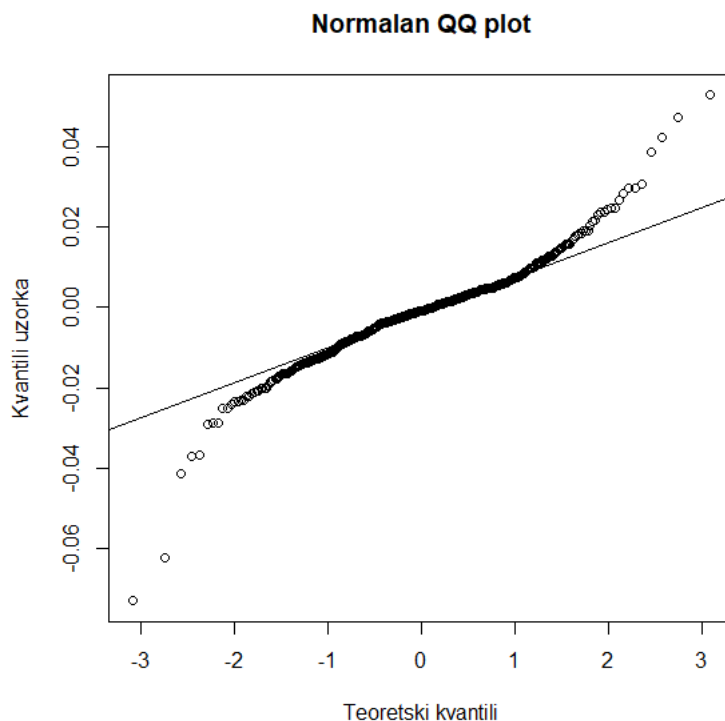
gdje je \bar{X}_n je aritmetička sredina danog uzorka, a S_n standardna devijacija. Naš sljedeći korak je pretvoriti povrate u log-povrate, provjeriti normalnost dobivenih podataka s *qqplot*-om i procijeniti očekivanje te devijaciju. Sada možemo izračunati VaR za log-povrate.

Vidimo da na grafu 5.2 pravac ne prolazi kroz sve točke ili dobru većinu točaka, stoga ne možemo zaključiti na temelju grafa da log-povrati dolaze iz normalne distribucije. KS test također nam ne daje bolje rješenje. Nastavit ćemo s našom pretpostavkom o normalnoj distribuciji log-povrata radi usporedbe rezultata iako ne smatramo da je zadovoljena.

S vjerojatnošću od 95% cijena Microsoftovih dionica za sljedeći dan biti će veća od

$$C e^{VaR_{logpovrat}}$$

Što u ovom slučaju iznosi 106.6346.



Slika 5.2: QQ plot za log-povrate

Prikladno pravilo ishoda za kvantile

Idemo sad pogledati primjer prikladnog pravila ishoda za kvantile. Uzmimo funkciju $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Po teoremu 5.1.1 mora biti neopadajuća i $h(x)$ proizvoljna tako da definiramo $s(x) = x$ i $h(x) = -\alpha x$. Znamo da ako se realizira x , te predviđeni kvantil r je manji od realizacije, tada će analitičar biti nagrađen s $S(r; x)$, također u ovisnosti o α . S velikom vjerojatnošću možemo zaključiti da će $x > r$ biti ispunjeno za malu vjerojatnost, jer će tada r biti "dosta mali". Pošto analitičar želi maksimizirati dobit, tražimo što manji α i r što bliži realizaciji x . Vidimo da $S(r; x)$ poprima vrijednosti od $-\infty$, za loše predikcije do 0, za najbolju predikciju.

Uspoređujući samo rezultat kvantila za cijene iz parametarske i neparametarske procjene znamo da će analitičar biti nagrađeniji za neparametarsku procjenu zbog $r_{\text{neparametar}} = 106.7618 > 106.6346 = r_{\text{parametar}}$, gdje je α ista u oba slučaja.

Prema jednadžbi,

$$S(r; x) = (x - r)(\mathbb{1}_{x \leq r} - \alpha)$$

nagrada analitičaru u slučaju neparametarske, odnosno parametarske predikcije iznosi

$$S(r_{\text{neparametar}}; x) = S(106.7618, 109.4900) = -0.13641$$

$$S(r_{\text{parametar}}; x) = S(106.6346, 109.4900) = -0.14277$$

Mogli bismo pretpostaviti da lošije rješenje parametarske procjene proizlazi iz loše pretpostavke o normalnosti log-povrata.

Ishod intervala za neparametarsku procjenu

Zadatak nam je naći 95%-tni interval za cijenu Microsoft dionica na dan 9.8.2018. godine. Ugledat ćemo se na formulu 5.5 i prvo izračunati kvantile s razinom značajnosti 0.025 i 0.975 neparametarskom procjenom. Dobili smo 95%-tni interval [106.3719, 111.4802] za cijenu Microsoft dionica na traženi dan. Izračunali smo pravilo ishoda prema 5.5 koje iznosi $S_{\alpha}^{\text{int}}(l, d; x) = (d - l) = 111.4802 - 106.3719 = 5.1083$, što je jednako širini intervala.

Sljedeće što želimo je naći prosječni ishod, prosječnu širinu i točnost predikcije pomoću neparametarske procjene, zato uzmimo veću količinu podataka. Da bi nam rezultati bili reprezentativniji, iskoristit ćemo podatke unazad 5 godina. Za svaki X_{t+1} ćemo napraviti predikciju intervala na temelju X_1, \dots, X_t te promatrati tražene podatke. Dobiveni rezultati: točnost= 0.947494, prosječna širina= 3.196995 i prosječan_ishod_intervala= 4.70959. Rezultatima smo zadovoljni pošto prosječan ishod intervala nije toliko veći od prosječne širine. Što znači, u slučajevima kada smo pogriješili, naša pogreška nije bila toliko velika. To je upravo svojstvo kalibracije, spominjano u prvom poglavlju. Možemo reći da je predikcija dobro kalibrirana. Nažalost, rezultate ishoda intervala u trajanju od 5 godina parametarske i neparametarske procjene ne možemo usporediti, jer rezultati ne bi bili mjerodavni zbog neispunjene pretpostavke vezano uz parametarsku procjenu.

Kod u R programu

U ovoj sekciji slijedi potreban kod za dobivanje rezultata.

```
read.csv('MSFT.csv') -> x
x$Close -> p
p <- p[1:504]
x <- p
p[504] -> zadnja_cijena
neto <- p[1:503] / p[2:504] - 1
neto <- neto[which(neto != 0)]
plot(neto, type='l')
```

40 POGLAVLJE 5. PRAVILA ISHODA ZA KVANTILE I PREDIKCIJE INTERVALA

Neparametarska procjena dionica dana 9.8.2018.

```
alfa<-0.05
VaRpovrati<-quantile(neto , alfa )
VaRdionica1<-zadnja _ cijena *(1+ VaRpovrati )
```

Parametarska procjena dionica dana 9.8.2018.

```
log ( neto+1)->logpovrat
mi<-mean( logpovrat )
sigma<-sd( logpovrat )
ks.test( logpovrat , 'pnorm' , mi , sigma ) #pv jako mala
qqnorm( logpovrat )
VaRlogpov<-mi+sigma*qnorm( alfa )
VaRdionica2<-zadnja _ cijena *exp( VaRlogpov )
```

Očekivan ishod intervala neparametarske procjene dana 9.8.2018.

```
alfa1 <0.025
alfa2<-0.975
VaRpovrati<-quantile(neto , alfa1 )
VaRdionica1<-zadnja _ cijena *(1+ VaRpovrati )
lijevo<-VaRdionica1
```

```
VaRpovrati<-quantile(neto , alfa2 )
VaRdionica2<-zadnja _ cijena *(1+ VaRpovrati )
desno<-VaRdionica2
#interval=[ lijevo , desno ]
```

Prosječan ishod, prosječna širina intervala i točnost za posljednjih 5 godina

```
alfa =0.05
read.csv( 'MSFT5.csv' )->x
x$Close->p
p<-p[1:1260]
x<-p
p[1260]->zadnja _ cijena
k1=k2=0
d1<-l1<-l2<-d2<-s2<-s1<-array( )

for(t in 2:1258)
{
neto<-p[1:t]/p[2:(t+1)]-1
neto<-neto[ which(neto !=0)]
```

```

l=quantile (neto ,0.025)
d=quantile (neto ,0.975)
l1 [ t -1]<-x [ t +1]*(1+l)
d1 [ t -1]<-x [ t +1]*(d+1)

s1 [ t -1]<-d1 [ t -1]-l1 [ t -1]
if (x [ t +2]<l1 [ t -1])
s1 [ t -1]<-s1 [ t -1] + (2 / alfa )*( l1 [ t -1]-x [ t +2])
if (x [ t +2]>d1 [ t -1])
s1 [ t -1]<-s1 [ t -1] + (2 / alfa )*( x [ t +2]-d1 [ t -1])
if (s1 [ t -1]==(d1 [ t -1]-l1 [ t -1])) k1<-k1+1
}

prosječna _ širina=mean (d1-l1 )
prosječan _ ishod _ intervala=mean (s1 )
točnost=k1 / 1257

```

5.4 Case study: Predviđanje intervala za uvjetno heteroskedastičan proces

U ovom odjeljku osvrnut ćemo se na članak [18] te proći njihov primjer za ishod intervala i procjenu za heteroskedastičan proces. Sami ćemo napraviti kod i dati svoje rezultate i zaključke. Predikcija intervala potječe od uvjetne distribucije, na način kako smo generirali podatke te optimizira očekivanu vrijednost za sva pravila ishoda. Promatramo bilinearan slučajni proces $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definiran s

$$X_{t+1} = \frac{1}{2}X_t + \frac{1}{2}X_t z_t + z_t \quad (5.6)$$

gdje su $z_t \sim N(0, 1)$ nezavisne, slučajne, normalno distribuirane varijable. Proučava se jedan korak unaprijed procjena 95%-tnog intervala. Proces je Markovljev i uvjetna distribucija od X_{t+1} koja ovisi o X_t, X_{t-1}, \dots je normalna s očekivanjem $\frac{1}{2}X_t$ i varijancom $(1 + \frac{1}{2}X_t)^2$. Zato je predložen interval predikcije

$$A = \left[\frac{1}{2}X_t - c \left| 1 + \frac{1}{2}X_t \right|, \frac{1}{2}X_t + c \left| 1 + \frac{1}{2}X_t \right| \right], \quad (5.7)$$

gdje je $c = \phi^{-1}(0.975)$. Prihvatili su A kao standardnu predikciju intervala. Smatra se standardnim jer je lijeva ograda na razini 2.5%, a desna 97.5% od prave uvjetne distribucije.

Tablica 5.2: Usporedba 95%-tne predikcije intervala za bilinearan proces 5.6

Interval predikcije	Empirijska pokrivenost	Prosječna širina	Prosječni ishod intervala
A	0.95033	4.003586	4.773551
B	0.94899	5.454785	8.067243
C	0.95021	3.800055	5.258259

Kabaila i He su još 2 vrste intervala promatrali. Kao i mi u prethodnom zadatku, promatrali su kvantile funkcije distribucije od X_t . Kvantile izračunamo korištenjem funkcije *quantile* u programu R-u za što su nam potrebni 2 argumenta. Podaci do trenutka t i razina značajnosti. Takav predikciju intervala zapisali su

$$B = [F^{-1}(0.025), F^{-1}(0.975)] \quad (5.8)$$

Također su predložili

$$C = \left[\frac{1}{2}X_t - \gamma \left(\left| 1 + \frac{1}{2}X_t \right| \right), \frac{1}{2}X_t + \gamma \left(\left| 1 + \frac{1}{2}X_t \right| \right) \right] \quad (5.9)$$

gdje je $\gamma(y) = (2(\log 7.36 - \log y))^{\frac{1}{2}}y$ za $y \leq 7.36$ inače $\gamma(y) = 0$. C . Ukoliko je $\gamma(y) = 0$, interval postaje točka.

Generirat ćemo slučajni uzorak $\{X_t : t = 1, 2, \dots, 200001\}$ iz procesa 5.6 i promatrati hoće li X_{t+1} upasti u interval. Promatrati ćemo 3 stvari, empirijsku pokrivenost, postotak „upada” X_{t+1} u interval, prosječnu širinu intervala i prosječan ishod intervala.

Inicijalizirat ćemo $X_1 = 0$. U tablici 5.2 se nalaze dobiveni rezultati. Vidimo da su po empirijskoj pokrivenosti blizu kao što je bilo pretpostavljeno u zadatku, oko 95%. Analitičar želi što manju širinu i manji ishod intervala pošto smo rekli da je pravilo ishoda negativno orijentirano. Možemo odmah odbaciti interval predikcije B jer ima najširi u prosjeku interval i najlošiji ishod. Vidimo da C ima najmanji raspon intervala, dakle najoštrije procjene u prosjeku, ali vidimo u slučajevima kada je „promašio” interval, realizacija nije bila baš tako blizu intervala. To se vidi po razlici između prosječne širine i prosječnog ishoda. Stoga možemo reći da je kalibracija lošija nego u A . Stoga, na mjestu analitičara bi koristili interval predikcije A jer u prosjeku postiže najbolji ishod.

Rezultate smo dobili iz priloženog koda pisanog u R-u. Nakon što ćemo izračunati niz X_{N+1} , tražit ćemo prosječan ishod, prosječna širina intervala i empirijska pokrivenost za intervale A , B i C .

```
alpha=0.05
N=200000
x<-array ()
```

5.4. CASE STUDY: PREDVIĐANJE INTERVALA ZA UVJETNO
HETEROSKEDASTIČAN PROCES

43

```
i=1
x[1]=0
z<-rnorm(N,0,1)
for( i in 1:N)
x[i+1]=x[i]/2+x[i]*z[i]/2+ z[i]

k=0
d<-1<-s<-numeric(N)
for( t in 1:N)
{
    c=qnorm(0.975)
    l[t]<-x[t]/2-c*abs(1+x[t]/2)
    d[t]<-x[t]/2+c*abs(1+x[t]/2)
    s[t]<-d[t]-l[t]
    if(x[t+1]<l[t])
    s[t]<-s[t] + (2/alfa)*(l[t]-x[t+1])
    if(x[t+1]>d[t])
    s[t]<-s[t] + (2/alfa)*(x[t+1]-d[t])
    if(s[t]==(d[t]-l[t])) k<-k+1
}
avg_sirina_A=mean(d-1)
avg_ishod_A=mean(s)
postotak_A<-k/N

k2=0
d2<-12<-s2<-numeric(N)
for( t in 1:N)
{
    l2[t]=quantile(x[1:t],0.025)
    d2[t]=quantile(x[1:t],0.975)
    s2[t]<-d2[t]-l2[t]
    if(x[t+1]<l2[t])
    s2[t]<-s2[t] + (2/alfa)*(l2[t]-x[t+1])
    if(x[t+1]>d2[t])
    s2[t]<-s2[t] + (2/alfa)*(x[t+1]-d2[t])
    if(s2[t]==(d2[t]-l2[t])) k2<-k2+1
}
avg_sirina_B=mean(d2-12)
```



```

avg_ishod_B=mean(s2)
postotak_B<-k2/N

k3=0
d3<-13<-s3<-numeric(N)
for(t in 1:N)
{
  y=abs(1+x[t]/2)
  if(y<=7.36) z<-(2*(log(7.36)-log(y)))^(1/2)*y
  if(y>7.36) z=0
  l3[t]=x[t]/2-z
  d3[t]=x[t]/2+z
  s3[t]<-d3[t]-l3[t]
  if(x[t+1]<l3[t])
  s3[t]<-s3[t]+(2/alfa)*(l3[t]-x[t+1])
  if(x[t+1]>d3[t])
  s3[t]<-s3[t]+(2/alfa)*(x[t+1]-d3[t])
  if(s3[t]==(d3[t]-l3[t])) k3<-k3+1
}
avg_sirina_C=mean(d3-l3)
avg_ishod_C=mean(s3)
postotak_C<-k3/N

```

5.5 Pravila ishoda za predikciju distribucije

U poglavlju 3.2 smo spominjali predikciju komulativne distribucije te pričali zašto je bolja od predikcije gustoće. Nakon što smo se upoznali s predikcijom kvantila, proširit ćemo naše znanje o predikciji distribucije.

Pravila ishoda za predikciju distribucije pomoću kvantila

U članku su rekli da specificirati prediktivnu kumulativnu funkciju distribucije je ekvivalentno s određivanjem svih prediktivnih kvantila. Posljedično, možemo odrediti pravila ishoda za predikciju distribucije od pravila ishoda za kvantile. Po Matheosonu i Winkleru [28] i Cervera i Muñoza [10] slijedi da ako je S_α prikladno pravilo ishoda za kvantile, na razini značajnosti $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ i ν Borelova mjera na $\langle 0, 1 \rangle$, tada pravilo ishoda

$$S(F, x) = \int_0^1 S_\alpha(F^{-1}(\alpha); x) \nu(d\alpha) \quad (5.10)$$

je prikladno, podložno ograničenjima integrala i regularnosti.

Pravila ishoda za predikciju distribucije pomoću binarnih vjerojatnosnih predikcija

Možemo odrediti pravila ishoda za predikciju distribucije pomoću pravila ishoda za binarnu vjerojatnosnu predikciju. To su izjavili u članku [18] te je to zapravo generalizacija CRPS-a. Neka je S pravilo ishoda za vjerojatnosnu distribuciju i ν Borelova mjera na \mathbb{R} , tada je pravilo ishoda

$$S(F, x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(F(y), \mathbb{1}_{\{x \leq y\}}) \nu(dy); \quad (5.11)$$

prikladno, s obzirom na integralna ograničenja [28]. Ukoliko je S Brierov ishod i ν Lebesgueova mjera, tada CRPS 3.4 odgovara jednadžbi 5.11. Također, prilagodili su i za m -dimenzionalni prostor. Ako je \mathcal{P} klasa Borelovih vjerojatnosnih mjera na \mathbb{R}^m , onda identificiramo vjerojatnosnu predikciju $P \in \mathcal{P}$ s kumulativnom funkcijom distribucije F . Pravilo ishoda se dobije tako da se jednadžba 3.4 integrira po cijelom \mathbb{R}^m . Borelova mjera ν se bira tako da ohrabri prognostičara da se usredotoči na važne karakteristike.

Poglavlje 6

Bayesovi faktori i slučajna k-struka unakrsna provjera

Pažnju usmjeravam na povezivanje prikladnih pravila ishoda s Bayesovim faktorima i unakrsnom provjerom te se predlaže, po članku [18], slučajna k-struka unakrsna provjera.

6.1 Logaritamski ishod i Bayesovi faktori

Bayesovi faktori uspoređuju vjerojatnosne modele, a modeli generiraju vjerojatnosna predikcijska pravila. Neka imamo uzorak $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ čije vrijednosti želimo predviđjeti. Neka imamo 2 predikcijska pravila koja se baziraju na vjerojatnosnim modelima H_1 i H_2 . Dosad smo razmatrali situacije gdje su bila zadana predikcijska pravila prije realizacije događaja, stoga se parametri nisu procjenjivali od podataka koju su bili predviđani. Jeffreys, 1939. u članku [22] te Kass i Raftery u [23], su ukazali da u takvim situacijama, Bayesov faktor za model H_1 nasuprot H_2 je

$$B = \frac{P(\mathbf{X}|H_1)}{P(\mathbf{X}|H_2)} \quad (6.1)$$

gdje je $P(\mathbf{X}|H_k) = \prod_{i=1}^n P(X_i|H_k)$ za $k = 1, 2$. Good (1952) je istaknuo da ako se koristi logaritamski ishod, tada log Bayesov faktor je razlika ishoda 2 modela,

$$\log B = \log S(H_1, \mathbf{X}) - \log S(H_2, \mathbf{X}) \quad (6.2)$$

zvana *težina dokaza*.

Možemo zaključiti da je Bayesov faktor ekvivalentan logaritamskom ishodu u slučaju bez parametara, te da Bayesovi faktori se mogu primijeniti i za usporedbu vjerojatnosnih predikcijskih pravila, ne samo modela.

Pretpostavimo sada da postoje nepoznati parametri predikcijskih pravila, θ_k za H_k , koje želimo procijeniti iz podataka. Tada je Bayesov faktor prikazan s 6.1, ali sad je uvjetna vjerojatnost $P(\mathbf{X}|H_k)$ definirana s

$$P(\mathbf{X}|H_k) = \int p(\mathbf{X}|\theta_k, H_k)p(\theta_k|H_k)d\theta_k$$

gdje je $p(\mathbf{X}|\theta_k, H_k)$ vjerojatnost od \mathbf{X} s obzirom na model H_k i $p(\theta_k|H_k)d\theta_k$ je apriorna distribucija parametra θ_k . Po [12] Dawid je pokazao da ukoliko podaci dolaze u određenom poretku, kao naprimjer vremenski poredak, tada možemo vjerodostojnost zapisati kao

$$P(\mathbf{X}|H_k) = \prod_{t=1}^n P(X_t|\mathbf{X}^{t-1}, H_k), \quad (6.3)$$

gdje je $\mathbf{X}^{t-1} = \{X_1, X_2, \dots, X_{t-1}\}$ ako $t \geq 1$. X^0 definiramo kao prazan skup i $P(X_t|\mathbf{X}^{t-1}, H_k)$ je predikcijska distribucija od X_t s obzirom na prošle vrijednosti \mathbf{X}^{t-1} u modelu H_k , definirana s

$$P(X_t|\mathbf{X}^{t-1}, H_k) = \int p(X_t|\theta_k, H_k)P(\theta_k|\mathbf{X}^{t-1}, H_k)d\theta_k$$

gdje je $P(\theta_k|\mathbf{X}^{t-1}, H_k)$ aposteriorna distribucija parametra θ_k kojemu je dana "prošla" realizacija, to jest realizacija do trenutka t , \mathbf{X}^{t-1} . Neka promatramo sada $\log P(\mathbf{X}|H_k) = S_{k,B}$ kao pravilo ishoda po članku [18]. Napišimo ga u jednostavnijem obliku

$$S_{k,B} = \sum_{i=1}^n \log P(X_i|\mathbf{X}^{i-1}, H_k) \quad (6.4)$$

$S_{k,B}$ je asimptotski ekvivalentan s ishodom

$$S_{k,D} = \sum_{i=1}^n \log P(X_i|\mathbf{X}^{i-1}, \hat{\theta}_k^{i-1}) \quad (6.5)$$

gdje je $\hat{\theta}_k^{t-1}$ MLE parametra θ_k koji je baziran na prošlim događajima, \mathbf{X}^{t-1} , u smislu da vrijedi $S_{k,D}/S_{k,B} \rightarrow 1$ kada $n \rightarrow \infty$, na što je ukazao Dawid (1984). Ignorirat ćemo slučajeve u kojima je $\hat{\theta}_k^{t-1}$ nedefiniran.

To opravdava uporabu $S_{k,D}$ za usporedbu predikcijskih pravila, ali uz dva ograničenja. Prvo, pretpostavlja se da su podaci dani u vremenskom redosljedju, drugo, da se koristi samo logaritamski ishod koji ne mora uvijek biti primjeren za dani zadatak.

6.2 Pravila ishoda i slučajna k-struka unakrsna provjera

Pretpostavimo da podaci nisu poredani. Zamijenimo tada jednadžbu 6.4 jednadžbom

$$S_{k,B}^* = \sum_{i=1}^n E_D \log p(X_i | \mathbf{X}^{(D)}, H_k) \quad (6.6)$$

gdje je D slučajan uzorak od $\{1, 2, \dots, t-1, t+1, \dots, n\}$, veličine koja je slučajna varijabla s uniformnom razdiobom na $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Dawidov rezultat implicira da je 6.6 asimptotski ekvivalentna s

$$S_{k,D}^* = \sum_{i=1}^n E_D \log p(X_i | \mathbf{X}^{(D)}, \hat{\theta}_k^{(D)}, H_k) \quad (6.7)$$

gdje je $\hat{\theta}_k^{(D)}$ MLE parametra θ_k koji je baziran na $\mathbf{X}^{(D)}$. Slučajevi u kojima je D mali te $\hat{\theta}_k^{(D)}$ nedefiniran, ignorirat ćemo kao i ranije.

Prema [8], unakrsna provjera je zapravo postupak izdvajanja, gdje iz skupa podataka izdvojimo jedan dio na kojem provjerimo valjanost rezultata. Taj skup podataka nazivamo skup za validaciju te se na njemu ne treniraju podaci. K-struka unakrsna provjera (engl. k-fold cross-validation) podrazumijeva podjelu skupa primjera D na k preklopa (engl. fold). Preklopi su jednake veličine i nakon svakog mjerenja rezultata na validacijskom skupu, model se prilagođava. Time se pazi da ne dođe do prenaučenosti modela.

Prikazali smo da je moguće zamijeniti ishod koji je bio suma različito distribuiranih slučajaja, u ishod koji je suma identično distribuiranih slučajaja koji su međusobno zamjenjivi. To otvara mogućnost ocjenjivanja $S_{k,B}^*$ i $S_{k,D}^*$ s Monte Carlom, što je metoda generiranja slučajnih brojeva te promatranje njihovog udjela. To je oblik unakrsne provjere gdje je broj preklopa slučajaj, stoga su ga u članku [18] nazvali *slučajna unakrsna provjera*. Pitanje je koliko bi podataka trebalo izbaciti van, jer drugačiji izbor dovodi do drukčijeg oblika unakrsne provjere.

Ako nema procjene parametara kao u 6.2, Bayesov faktor je ekvivalentan s razlikom logaritamskog ishoda. Prema tome, možemo zamijeniti logaritamski ishod s neki drugim prikladnim pravilom ishoda. Razlika u ishodima se tada treba gledati kao prediktivan Bayesov faktor s drugačijim pravilom ishoda.

Poglavlje 7

Bayesov serum istine

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s posebnim primjerom prikladnog pravila ishoda, a to je Bayesov serum istine.

7.1 Karakterizacija Bayesovog seruma istine

Želimo napraviti istraživanje vezano uz osobne preferencije na nekom određenom broju ispitanika. Kako ćemo biti sigurni da su naši rezultati mjerodavni? Jesu li ljudi iskreno odgovorili? Želimo ispitanikovo mišljenje, ali i istinu. Bayesov serum istine (BSI) je način na koji možemo doći do iskrenih odgovora, nagrađujući ljude koji govore istinu te kažnjavajući one koje lažu. Ovu temu je obradio Dražen Prelec u članku [33], na koju se referenciramo.

Ispitanici na svako pitanje daju 2 odgovora koji se zatim boduju. Prvi je njihov odgovor, a drugi vjerojatnost koliko je drugih ispitanika odgovorilo isto. Ispitanikov je cilj dobiti najbolje bodove, a to postižu govoreći istinu. Pretpostavka je da su ispitanici racionalni.

Razlikujemo 2 vrste pitanja, osobna (gdje je istina subjektivna) i neosobna (gdje je istina objektivna).

1. Preferiraš li više slatko ili slano? (Slatko/Slano)
2. Smatraš li da bi trebao kažnjavati ljude za piratstvo ("skidanje" filmova s internetskih stranica)?
3. Da li je Dubrovnik glavni grad Hrvatske? (Da/Ne)
4. Tko je osvojio Oscara za najbolji film 2017.(označi jedan)? _Spotlight _Moonlight
_La La Land _Blackbird

Prva 2 pitanja su u skupini osobnih, a druga 2 u skupini neosobnih pitanja. Svaki ispitanik r nam daje po 2 odgovora na n pitanja:

1. Odgovori na pitanje odabirući jedan od m ponuđenih odgovora. $x_k^r \in \{0, 1\}$ označava da li je ispitanik odabrao odgovor $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.
2. Daje predikciju distribucije ponuđenih odgovora na dano pitanje s obzirom na osobno mišljenje o odgovorima ostalih ispitanika $(y_1^r, y_2^r, \dots, y_m^r)$.

Ukupan BSI ishod za ispitanika r se temelji na 2 statistike: \bar{x}_k je stvarna distribucija odgovora k , dok je \bar{y}_k prediktivna distribucija za odgovor k . Ishod Bayesovog seruma istine je zbroj informacijskog ishoda i prediktivnog ishoda. Dobitak ispitanika r je zapisan s

$$BSI = \sum_{k=1}^m x_k^r \log \frac{\bar{x}_k}{\bar{y}_k} + \sum_{k=1}^m \bar{x}_k \log \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \quad (7.1)$$

Promatrajući prediktivan ishod, vidimo da on prikazuje odnos naše predikcijske distribucije i stvarne distribucije. Ukoliko je naša predikcija netočna dobiti ćemo negativan učinak na BSI, stoga smo potaknuti biti iskreni i napraviti najbolju moguću predikciju. Ali zašto bi dali iskren odgovor na osobna pitanja? Tko će znati lažemo li ili ne? Koji je odgovor točan? Po članku Dražena Preleca tvrdimo da će ispitanik biti potaknut reći istinu. Ocjenu koju dobijemo za osoban odgovor temelji se na udjelu koliko je stvarno ljudi dalo pozitivan odgovor naspram predikcije koliko je ostalih ispitanika taj odgovor izabralo. U slučaju da smo podržali odgovor, a manje je ljudi podržalo nego što je očekivano, tada je ispitanik kažnjen. Ukoliko odgovor nadiđe očekivanja, tada je nagrađen. Najbolji primjer je odabir dionica. Ako smo odabrali dionicu i ona raste više nego što je očekivano, nagrađeni smo. Ukoliko ne raste kao što je očekivano, naš dobitak je manji. Možemo reći da smo kažnjeni. Pošto ne znamo koliko će ljudi odabrati taj odgovor niti kakve će biti predikcije, uz uvjet da su ispitanici racionalni, ne preostaje im ništa drugo nego dati iskren odgovor.

Postoje 2 tvrdnje:

1. Smatramo da će naša predikcija biti podcijenjena. To je tvrdio Prelec na temelju sljedećeg primjera koji sadrži 2 moguća odgovora ($m = 2$). Pitanje: Voliš li više crveno ili bijelo vino? (Bijelo/Crveno) Ako ja volim crveno vino, smatram da će k broj ljudi voljeti crveno. Dok ljudi koji vole bijelo smatrat će da manja grupa ljudi $a > k$ voli crveno. Pošto ja smatram da sam u pravu, moja očekivanja će biti viša nego prosječna očekivanja (uprosječena očekivanja svih ispitanika).
2. Ukoliko je istina neosobna i imamo 2 moguća slučaja, točan odgovor je najuobičajeniji odgovor. Dražen Prelec je izjavio:

„Odgovor je točan ako i samo ako stvaran postotak glasova je veći nego očekivani postotak glasova.”

Iskren odgovor maksimizira očekivan informacijski ishod, pretpostavljajući da svi govore istinu. Upravo je to Nashova ravnoteža jer niti jedan drugi slučaj neće imati veću očekivanu dobit za pojedinca. U praksi nitko neće objašnjavati ispitanicima metodu ocjenjivanja već im samo objasniti da će njihov iskren odgovor donijeti im maksimalnu dobit bez obzira na to što drugi odlučili.

7.2 Pravilo ishoda i Bayesov serum istine

Kao što smo već rekli ishod Bayesovog seruma istine se dijeli na 2 komponente, informacijski i prediktivan ishod. Pomoću sljedećeg primjera koji je dao autor ćemo prikazati prikladnost informacijskog ishoda.

Primjer 7.2.1. *Neka imamo primjer binarne igre. Bacamo novčić i zanima nas da li je novčić „fer” ili nije, dok u tom slučaju glave prevladavaju. Ukoliko ispitanik promatra bacanje novčića i vidi da je više puta palo pismo, smatrat će da je novčić fer i njegova predikcija distribucije će biti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. U slučaju da ispitanik zaključiti da je više glava palo, smanjuje mu se apriorna vjerojatnost da je novčić „fer” od $\frac{1}{2}$ na aposteriornu vjerojatnost $\frac{1}{3}$, te je sada, po Bayesovom pravilu, očekivana frekvencija za pisma $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{2} * \frac{1}{3}$). S perspektive ispitanika koji je promatrao pisma, očekivanje tuđih predikcija pojava pisma će biti mix od $\frac{1}{2}$ (ispitanici koji su promatrali pismo) i $\frac{1}{6}$ (ispitanici koju su promatrali glavu). Tada će ti ispitanici očekivati da će pismo biti uobičajenije nego što je predviđano te će dobiti pozitivan informacijski ishod. S druge strane, očekuje mali broj pojave glava, zato što predviđena frekvencija $\frac{1}{2}$ je manja nego očekivana predikcija drugih, što je mješavina predikcija od $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{6}$.*

Slično, promotrimo sada sa strane ispitanika koji smatraju da novčić nije „fer”. Oni očekuju da će pojava glava biti učestalija. Te joj pridaju frekvenciju $\frac{5}{6}$ što je veće od geometrijske sredine predikcije svih ispitanika. (Mješavina $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{6}$). S druge strane, očekuju mali broj pojave pisama, za što je predviđena frekvencija $\frac{1}{6}$, što je manje od geometrijske sredine očekivanih ukupnih predikcija ispitanika. Tako da svi ispitanici smatraju da govoreći istinu će maksimizirati svoju dobit.

Pošto informacijski ishod i predikcijski ishod su maksimizirani ako ispitanik govori istinu, mogli bismo svojstvo prikladnosti prilagoditi za Bayesov serum istine. Kao što inače znamo, da bismo izračunali pravilo ishoda potrebno nam je znati točan ishod, u ovom slučaju, točan odgovor. Standardan instrument za mjerenje iskrenih vjerojatnosti koje su priklonjene javno mjerljivim događajima je logaritamsko prikladno pravilo ishoda. Stručnjak koji daje vjerojatnosnu distribuciju $h = (h_1, \dots, h_n)$ za n međusobno disjunktnih događaja dobiti će ishod

$$K + \log h_i \quad (7.2)$$

ako se i realizira, dok je K najveća nagrada unaprijed određena. Ako je stručnjakova iskrena procjena da će čovječanstvo nestati do 2100-te s vjerojatnošću od 90%, ali obznani drukčiju vjerojatnost h , njegov očekivan ishod je $0.9 \log h + 0.1 \log(1 - h)$, pretpostavljajući da postoji način kako saznati pravi ishod. Najveći mogući dobitak/ishod je upravo za njegov iskren odgovor, za $h = 0.90$.

Možemo zaključiti da je teško razlikovati pravilo ishoda koje zahtijeva znanje prave realizacije i informacijskog ishoda koje ne zahtijeva.

7.3 Istraživanje

Slijedi istraživanje kojeg su napisali S. Radas i D. Prelec u neobjavljenom članku [34], gdje žele saznati da li bi ponuđeni novi proizvodi bili kupljeni. Vidjet ćemo primjenu BSI-a, dobivene rezultate, zatim ćemo dati naš zaključak.

Želja je analizirati ljudske osobne preferencije vezano uz kupnju novog plasiranog proizvoda te razlikovati „dobrog” ispitanika od „lošeg”. Prva pretpostavka je informiranost. Ukoliko subjekti nisu informirani, neće dati pouzdane rezultate iako su njihovi odgovori iskreni. Drugi slučaj je pozornost ispitanika. Ako subjekt ne pridaje dovoljnu pozornost, rezultati neće biti mjerodavni. Tako da, naše je pitanje kako razlikovati „dobrog” i „lošeg” subjekta? Kao i ranije, dana su dva pitanja koja su vezana uz osobne preferencije i mišljenje o odabiru drugih ispitanika. U članku su na temelju rezultata 3 online eksperimenta prikazali kako korigirana namjera kupnje je bliže stvarnom ishodu i kako pomoću BSI razlikovati pouzdane od nepouzdatih subjekata. Mi ćemo prikazati jedan njihov eksperiment u smislu pravila ishoda.

Poznato je da postoji razlika između namjere kupnje i stvarne kupnje. Pošto je naša želja saznati koliko će se neki proizvod stvarno prodati, želimo da je ta razlika što manja. Ona se pomoću raznih statističkih modela smanjuje uz ispunjenu potrebu za velikim brojem ispitanika i informacija vezanih uz proizvod. Radas i Prelec prikazuju kako se ta divergencija može umanjiti odbacujući nepouzdanu, to jest „loše” ispitanike zbog njihove neinformiranosti o proizvodu, zadatku ili nedovoljnoj pažnji pri rješavanju upitnika. Stoga, da bi se popravila kvaliteta podataka, žele identificirati „dobre” ispitanike te koristiti jedino njihove informacije. Bayesov serum istine je pravilo ishoda koje je osigurava istinitost i iskrenost ispitanika te identificira one koji su najbolji u predikciji tuđih namjera.

Dva faktora utječu na namjeru kupnje: kvaliteta i potražnja. Potražnja reflektira zainteresiranost i nužnost za proizvod, kao naprimjer proizvodi: voda, kruh, mlijeko ili trenutno aktualan novitet. Napomenuli su da je cijena unaprijed određena te se promatra potražnja na jednoj razini cijena. Primjer pitanja glasi: Da li biste kupili bicikl za 2000 kuna? Podijelimo proizvode na 2 moguća stanja:

- proizvod loše kvalitete i visoke potražnje
- proizvod dobre kvalitete i niske potražnje

Prepozicija 2 iz spomenutog članka, nam govori da nevažno o kakvom je stanju proizvoda riječ, ispitanici koji postižu najveći predikcijski ishod za Da-Ne odgovore su pouzdani ispitanici. Stoga, propozicija govori da možemo identificirati pouzdane od nepouzdanih ispitanika tako da gledamo predikcijski ishod. Nadalje, stanje svijeta ω_1 možemo okarakterizirati kao stanje gdje potražnja dominira kvalitetom, dok ω_2 stanje u kojem kvaliteta dominira potražnjom. Pouzdani subjekt zna prepoznati kvalitetu u bilo kojem stanju svijeta, dok nepouzdana ih ne razlikuje, a time su mu predikcije u oba stanja svijeta iste, zato i netočne.

Korigirana stopa namjera kupnje

Kada smo odvoji pouzdane od nepouzdanih ispitanika, možemo odbaciti informacije dobivene od nepouzdanih. Računamo stopu namjere kupnje na temelju informacija „dobrih” subjekata. Nazvali su je *korigirana stopa kupnje*, k , definirana s

$$k = \frac{\text{pouzdana kupci}}{\text{pouzdana ispitanici}} \quad (7.3)$$

Time smo odbacili šum kojeg su stvarali nepouzdana subjekti. Nadalje, ako želimo otkriti koji je faktor utjecajni na određen proizvod, možemo iskoristiti informacijski ishod da otkrijemo koje stanje svijeta se realiziralo.

Ukoliko $k > x_Y$ (x_Y je postotak namjere kupnje), ostvareno stanje svijeta je ω_1 , inače je ω_2 .

Algoritam

U članku [34] su napisali algoritam za pronalazak traženih informacija.

1. izračun predikcijskog i informacijsko ishoda
2. identifikacija ispitanika s najvećim predikcijskim ishodom - pouzdani ispitanici
3. izračun korigirane stope namjere kupnje k
4. određivanje stanja svijeta: ako je informacijski ishod veći za odgovor „Da”, nego realizirano stanje, korigirana stopa namjere kupnje, tada smo u svijetu gdje kvaliteta nadvladava potražnju. Inače, obrnuto.

Tablica 7.1: Opis proizvoda

Proizvod	Opis proizvoda
proizvod 1	Uređaj koji pomoću pametnog telefona reproducira hologram
proizvod 2	Sklopiva cvjetna sadilica od biorazgradivog materijala
proizvod 3	Punjač koji omogućuje istodobno punjenje nekoliko elektroničkih uređaja
proizvod 4	Mala ploča za organiziranje / držanje malih objekata
proizvod 5	Metalni USB
proizvod 6	Napredni bežični sustav rasvjete u žarulji
proizvod 7	Ionizator za automobil koji čisti zrak stvaranjem struje negativnih iona

Pojasnili su da ne moraju biti nužno odgovori „Da” i „Ne”. Odgovori se mogu proširiti na veći broj ponuđenih kategorija, kao naprimjer od „sigurno neću kupiti” do „sigurno ću kupiti”, dok god postoje 2 pitanja „Hoćeš li kupiti?” i „Koliki postotak drugih ispitanika će reći da bi kupilo?”.

Eksperiment

Obratit ćemo se na 1. eksperiment od moguća 3 u prethodno navedenom članku te dati zaključke na temelju njihovog istraživanja.

166 ispitanika je podijeljeno u 2 grupe (82 i 84). Ukupno je bilo 7 proizvoda čije slike i opis su dani ispitanicama. Bilo je 3 razine cijene: najniža cijena (30% stvarne vrijednosti), srednja cijena i najveća (50% stvarne vrijednosti). Opis proizvoda je dan u tablici 7.1. Prikazani su proizvodi dani slučajnom permutacijom od najnižeg nivoa, preko srednjeg, do najvišeg. Proizvodi su bili u jednoj grupi dostupni za kupnju, dok u drugoj nisu. Tako su mogli usporediti „hipotetsku” kupnju sa stvarnom odlukom o kupnji. Pristanak na kupnju proizvoda na „neviđeno” se smatrala stvarnom odlukom kupovine, uz uvjet da su ispitanici bili unaprijed informirani o refundaciji u slučaju kupnje. U tablici 7.2 je prikazan primjer pitanja s obzirom na nisku razinu cijene proizvoda 1, odgovori te tražene informacije poput predikcijskog ishoda, informacijskog i BSI.

Proučava se 21 kombinacija cijena i proizvoda, te se slijedi dani algoritam 7.3. Pretpostavlja se, kao što smo i ranije rekli, da ispitanike možemo podijeliti u 2 grupe koje pripadaju dvjema različitim distribucijama. To ostvarimo tako da primijenimo konačni mješoviti model (FMM-finite mixture models) na predikcijski ishod. Nakon što su pretpostavili dvije klase, procijenili su jednostavan model:

$$f(y) = \sum_{i=1}^2 \pi_i f_i(y) \quad (7.4)$$

Tablica 7.2: Pitanje: Želite li kupiti proizvod 1 za 45 kuna?

Ispitanik	Odgovor (DA/NE)	P1=Za koliki postotak drugih ispitanika smatrate da je odgovorilo DA?	P2=1-P1	Predikcijski ishod	Informacijski ishod	BSI (7.1)
1.	NE	0,15	0,85	-0,210759373	0,58431267	0,373553298
2.	NE	0,1	0,9	-0,347902838	0,58431267	0,236409832
3.	NE	0,6	0,4	-0,065703386	0,58431267	0,518609284
4.	NE	0,08	0,92	-0,428875364	0,58431267	0,155437306
5.	NE	0,38	0,62	-0,003354055	0,58431267	0,580958615
6.	DA	0,59	0,41	-0,058440661	0,17845407	0,120013408
7.	NE	0,74	0,26	-0,227474855	0,58431267	0,356837815

gdje je π_i vjerojatnost pripadnosti i -toj klasi, $0 \leq \pi_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^2 \pi_i = 1$, $f_i(\cdot)$ je uvjetna vjerojatnosna distribucija za promatrani odgovor i -te klase u modelu. Za distribuciju $f_i(\cdot)$ su koristili logaritamsku familiju jer argumenti mogu biti različitih oblika, ali ako model 7.4 nije statistički dovoljno značajan, tada se koristi normalna distribucija. Takva strategija je bila dobra za sve osim za jedan slučaj gdje su rabili eksponencijalnu familiju. Sva segmentacija je bila na nivou značajnosti od 5%.

Nakon segmentacije, sljedeći je korak bio odrediti korigiranu stopu namjere kupnje. Umjesto da promatramo sve najbolje prediktore iznad proizvoljno odabranog praga, odlučili smo se za probabilistički pristup. Svaki je subjekt dobio vjerojatnost pripadanja svakom od dva segmenta koji su određeni konačnim mješovitim modelom. Neka su to segmenti A i B . Budući da su rezultati predviđanja bili rangirani, jedan od tih segmenata, naprimjer A , sadrži ljude s najvišim rezultatima predviđanja, dok segment B sadrži one s najnižim predviđanjima. Stoga korigirana stopa namjere kupnje neće biti identična 7.3 jer neće promatrati broj pouzdanih kupaca naspram pouzdanih ispitanika, već će promatrati vjerojatnost "pouzdanosti" ispitanika i odluke o kupnji. Definiramo korigiranu namjeru kupnje s

$$k = \frac{\sum_{j=1}^N p^j(A)}{\sum_{j=1}^N b^j}, \quad (7.5)$$

gdje vjerojatnost da je ispitanik $j = \{1, 2, \dots, N\}$ "pouzdan" iznosi $p^j(A)$, a b^j je vjerojatnost da je ispitanik pouzdan uz uvjet da je potencijalni kupac. Dakle b^j se može zapisati kao $b^j = \mathbb{1}_{DA} p^j(A)$, gdje je $b^j > 0$ ukoliko je ispitanik odgovorio da želi kupiti proizvod. Rezultati su prikazani u tablici 7.3, dok je na grafu 7.1 prikazana korelacija greške i korigirane greške.

Tablica 7.3: Korigirana stopa namjere kupnje i pripadne greške

Razina cijene	Proizvod	Stopa namjere kupnje	Distr. familija za FMM ¹	Korigirana stopa namjere kupnje k	stvarna odluka o kupnji ²	greška ³	Kor. greška ⁴
Niska	1	0.622	Log	0.620	0.387	0.235	0.233
	2	0.439	Log	0.340	0.187	0.252	0.153
	3	0.293	Log	0.000	0.120	0.173	0.120
	4	0.415	Log	0.420	0.267	0.148	0.153
	5	0.220	Norm	0.090	0.107	0.113	0.017
	6	0.146	Log	0.010	0.067	0.080	0.057
	7	0.671	Log	0.620	0.520	0.151	0.100
Srednja	1	0.537	Log	0.480	0.347	0.190	0.133
	2	0.317	Norm	0.280	0.227	0.090	0.053
	3	0.510	Log	0.360	0.364	0.146	0.004
	4	0.160	Norm	0.150	0.156	0.004	0.006
	5	0.050	Norm	0.020	0.052	0.002	0.032
	6	0.738	Norm	0.740	0.597	0.141	0.143
	7	0.512	Log	0.510	0.390	0.122	0.120
Visoka	1	0.250	Log	0.060	0.195	0.055	0.135
	2	0.810	Log	0.870	0.636	0.173	0.234
	3	0.500	Log	0.480	0.403	0.097	0.077
	4	0.250	Exp	0.190	0.143	0.107	0.047
	5	0.655	Log	0.620	0.488	0.167	0.132
	6	0.480	Norm	0.430	0.220	0.260	0.210
	7	0.240	Norm	0.160	0.195	0.045	0.035

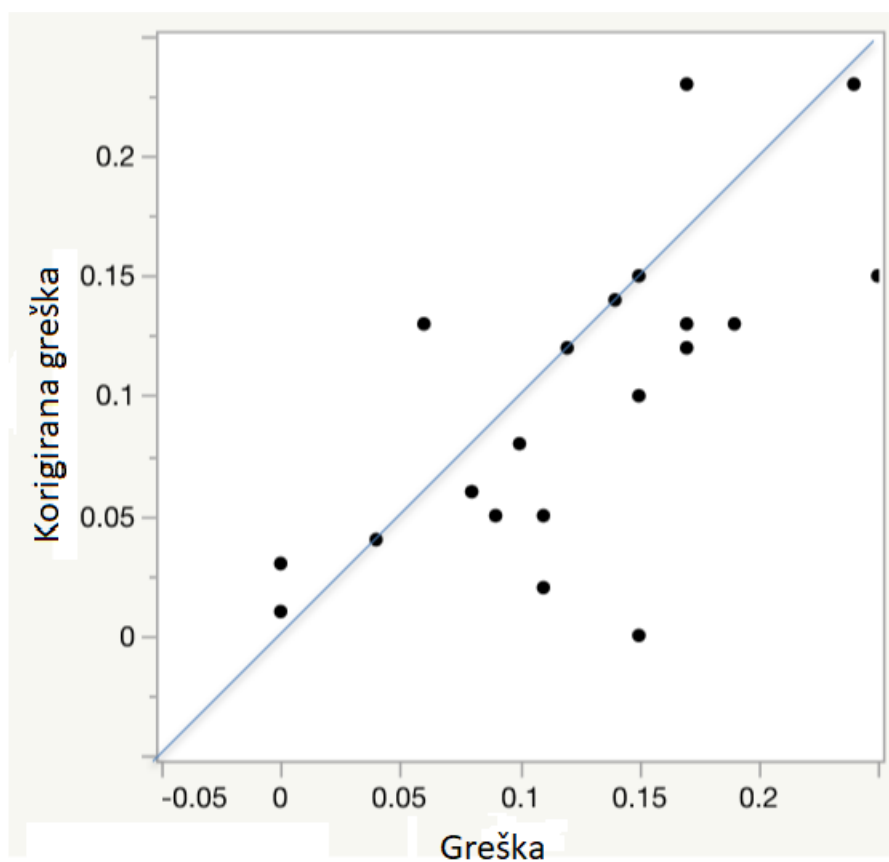
Uspoređujući tradicionalnu mjeru namjere kupnje s korigiranom, korigirana stopa namjere kupnje je bliže realnom ishodu, što je u ovom eksperimentu izbor ispitanika jedne grupe. Radas i Prelac ne tvrde da korelacija može zamijeniti ekonometrijske modele zbog smanjenja razlike namjere kupnje i realne kupnje, već traže jednostavan način kako popraviti namjeru u pravom smjeru odbacujući nepouzdanе podatke, pogotovo za one podatke gdje se ne mogu primijeniti ekonometrijski modeli zbog bilo kojeg razloga.

¹Distribucija familija za konačni mješani model na razini značajnosti od 5%

²Pristanak na kupnju kroz lutriju

³apsolutna razlika između stvarne kupnje i namjere o kupnji

⁴apsolutna razlika između stvarne kupnje i korigirane stope namjere kupnje k



Slika 7.1: Parovi greške i korelirane greške s obzirom na pravac $y = x$. Preuzeto iz članka [34]

Zaključak

Ovaj primjer nam je prikazao kako pravila ishoda, u ovom slučaju Bayesov serum istine, ima različite svrhe. Bayesov serum istine inače osigurava istinitost i točnost odgovora ispitanika, ali u ovom slučaju smo naišli na prepreku zbog neinformiranosti i nezainteresiranosti. BSI u istraživanju pomaže u davanju odgovora na pitanja o stanju tržišta, kvaliteti i potražnji za proizvodom kojeg bismo željeli predstaviti tržištu. Cijelokupan postupak je lagan i ne zahtijeva uporabu ekonometrijskih modela ili kompliciranih programa.

Bibliografija

- [1] *Yahoo finance*, <https://finance.yahoo.com/quote/MSFT/history?period1=1470607200&period2=1533679200&interval=1d&filter=history&frequency=1d>.
- [2] L. Baringhaus i C. Franz, *On a New Multivariate Two-Sample Test*, *Journal of Multivariate Analysis* (2004), 190–206.
- [3] H. Bauer, *Measure and Integration Theory*, Walter de Gruyter, 2001.
- [4] C. Berg, J. P. R. Christensen i P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, 1984.
- [5] J. M. Bernardo, *Expected Information as Expected Utility*, *The Annals of Statistics* (1979), 686–690.
- [6] L. M. Bregman, *The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and Its Application to the Solution of Problems in Convex Programming*, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* (1967), 200–217.
- [7] G. W. Brier, *Verification of Forecasts Expressed in Terms of Probability*, *Monthly Weather Review* (1950), 1–3.
- [8] J. Brownlee, *A Gentle Introduction to k-fold Cross-Validation*, <https://machinelearningmastery.com/k-fold-cross-validation/>.
- [9] A. Buja, W. Stuetzle i Y. Shen, *Loss Functions for Binary Class Probability Estimation and Classification: Structure and Applications*, 2005.
- [10] J. L. Cervera i J. Muñoz, *Proper Scoring Rules for Fractiles*, Oxford, U.K.: Oxford University Press (1996), 513–519.
- [11] A. H. Dawid, *Coherent Measures of Discrepancy, Uncertainty and Dependence, With Applications to Bayesian Predictive Experimental Design*, 1998.

- [12] A. P. Dawid, *Statistical Theory: The Prequential Approach*, Journal of the Royal Statistical Society (1984).
- [13] ———, *The Geometry of Proper Scoring Rules*, 2006.
- [14] A. P. Dawid i P. D. Grünwald, *Game Theory, Maximum Entropy, Minimum Discrepancy and Robust Bayesian Decision Theory*, The Annals of Statistics (2004), 1367–1433.
- [15] A. P. Dawid i P. Sebastiani, *Coherent Dispersion Criteria for Optimal Experimental Design*, The Annals of Statistics (1999), 65–81.
- [16] M. L. Eaton, *A Method for Evaluating Improper Prior Distributions*, str. 329–352, 1982.
- [17] D. Friedman, *Effective Scoring Rules for Probabilistic*, (1983), 447–454.
- [18] T. Gneiting i A. E. Raftery, *Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation*, Journal of the American Statistical Association (2007), 359–378.
- [19] A. H. Good, *Rational Decisions*, Journal of the Royal Statistical Society (1952), 107–114.
- [20] H. Hersbach, *Decomposition of the Continuous Ranked Probability Score for Ensemble Prediction Systems*, Weather and Forecasting (1976), 559–570.
- [21] T. Hofmann, B. Schölkopf i A. Smola, *A Review of RKHS Methods in Machine Learning*, (2005).
- [22] H. Jeffreys, *Theory of Probability*, Oxford, U.K.: Oxford University Press (1939).
- [23] R. E. Kass i A. E. Raftery, *Bayes Factors*, Journal of the American Statistical Association (1995).
- [24] R. Koenker i J. A. F Machado, *Goodness-of-Fit and Related Inference Processes for Quantile Regression*, Journal of the American Statistical Association (1999), 1296–1310.
- [25] A. L. Koldobskii, *Schoenberg's Problem on Positive Definite Functions*, St. Petersburg Mathematical Journal, 563–570.
- [26] R. H. Langland, Z. Toth, R. Gelaro, I. Szunyogh, M. A. Shapiro, S. J. Majumdar, R. E. Morss, G. D. Rohaly, C. Velden, N. Bond i C. H. Bishop, *The North Pacific Experiment (NORPEX-98): Targeted Observations for Improved North American Weather Forecasts*, Bulletin of the American Meteorological Society (1999), 1363–1384.

- [27] P. Lazić, *Financijski praktikum 2 - Value at risk*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/finprakt/vjezbe/fp_vj7_novo.pdf.
- [28] R. L. Matheson i J. E. Winkler, *Scoring Rules for Continuous Probability Distributions*, *Management Science* (1976), 1087–1096.
- [29] A. H. Murphy, *Hedging and Skill Scores for Probability Forecasts*, *Journal of Applied Meteorology* (1973), 215–223.
- [30] A. H. Murphy i R. L. Winkler, *Good Probability Assessors*, *Journal of Applied Meteorology* (1968), 751–758.
- [31] R. F. Nau, *Should Scoring Rules Be "Effective"?*, (1985), 527–535.
- [32] J. Potts, "Basic Concepts," in *Forecast Verification: A Practitioner's Guide in Atmospheric Science*, 2003.
- [33] D. Prelec, *A Bayesian truth serum for subjective data*, 2004, <https://economics.mit.edu/files/1966>.
- [34] D. Prelec i S. Radas, *Uncovering Reliable Respondents: An Application of Bayesian Truth Serum*.
- [35] M. Reed, *Meet the Bregman Divergences*, 2013, <http://mark.reid.name/blog/meet-the-bregman-divergences.html>.
- [36] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
- [37] L. J. Savage, *Elicitation of Personal Probabilities and Expectations*, *Journal of the American Statistical Association* (1971), 783–801.
- [38] M. J. Schervish, *A General Method for Comparing Probability*, *The Annals of Statistics* (1989), 1856–1879.
- [39] G. J. Székely, *E-Statistics: The Energy of Statistical Samples*, Technical Report, Bowling Green State University, Dept. of Mathematics and Statistics.
- [40] G. J. Székely i M. L. Rizzo, *A New Test for Multivariate Normality*, *Journal of Multivariate Analysis* (2005), 58–80.
- [41] J. W. Taylor, *Evaluating Volatility and Interval Forecasts*, *Journal of Forecasting* (1999), 111–128.
- [42] P. E. Tetlock, *Political Expert Judgement*, Princeton, Princeton University Press (2005).

- [43] Š. Ungar, *Opća topologija*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/OT/topologija.pdf>.
- [44] R. L. Winkler, *Evaluating Probabilities: Asymmetric Scoring Rules*, (1994), 1395–1405.
- [45] V. P. Zastavnyi, *Positive Definite Functions Depending on the Norm*, Russian Journal of Mathematical Physics, 511–522.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo pokazali da su pravila ishoda odličan alat za procjenu predikcije analitičara te uz svojstvo prikladnosti, koje osigurava iskrenost prognostičara, nagrađuje prognostičara s obzirom na predikciju i realizaciju događaja. Karakterizacijski teorem 1.2.3 pokazuje povezanost prikladnosti i postojanja konveksne očekivane funkcije ishoda G , koju još nazivamo informacijska mjera ili generalizirana entropijska funkcija. Informacijska mjera je maksimalna korisnost koja se može postići pri predikciji nekog događaja. Razlika između maksimalnog dobitka i dobitka kojeg smo dobili pri nekoj predikciji nazivamo funkcija divergencije. Osim nagrade analitičara, zanima nas i kvaliteta predikcije te potreba za usporedbom različitih predikcijskih procedura zbog čega uvodimo vještine ishoda.

Pravila ishoda mogu se primjenjivati na raznovrsne podatke. Glavni predstavnici kategorijskih su Savage i Schervish. Savage je konstruirao reprezentaciju za kategorijske varijable, dok Schervish reprezentacija definira pravila ishoda s 2 moguća ishoda. Do sada spominjana pravila ishoda su bila simetrična, ali ako imamo potrebu za asimetričnim, samo teorem 2.1.2 primjenimo na konveksnu funkciju G koja nije invarijantna na permutaciju koordinata. Beta familija i Winklerov ishod za binarne varijable prikazuju rješenje asimetričnog problema. Beta familija nagrađuje analitičara samo u slučaju ako je vjerojatnost događaja veća nego unaprijed zadana granica c , uz uvjet realizacije tog događaja, dok Winklerov ishod rješava situaciju ako želimo više nagraditi analitičara u slučaju realizacije, inače manje.

Promatrajući neprekidne varijable, pravila ishoda za predikciju gustoće zamjenjujemo s predikcijom za kumulativnu distribuciju zbog poticanja na preveliku umjetnu gustoću. Takvo pravilo ishoda nazivamo neprekidno rangirani ishod vjerojatnosti ako se radi o jednodimezionalnom prostoru, a ako ga generaliziramo na m -dimenzionalni, uz ispunjeni uvjet za euklidskom normom, ishod energije. Negativna jezgra poboljšava generalizaciju jer nema uvjeta na normu, dok postoji i konstrukcija s kompleksnom jezgrom.

Postoje situacije u kojima je teško odrediti cijelu prediktivnu distribuciju, zato analitičari odlučuju predvidjeti kvantile i intervale, stoga definiramo i pravila ishoda za dotične te dajemo primjer u case study-u u odjeljku 5.3 i 5.4. Nadalje, predikciju distribucije možemo prikazati uz pomoć predikcije kvantila.

Bayesovi faktori uspoređuju vjerojatnosne modele, a modeli generiraju vjerojatnosna predikcijska pravila. Bayesov faktor je ekvivalentan logaritamskom ishodu u slučaju bez parametara te Bayesovi faktori se mogu primijeniti i za usporedbu vjerojatnosnih predikcijskih pravila, ne samo modela. Ako pretpostavimo da postoje nepoznati parametri predikcijskih pravila koje dobivamo iz podataka te ako su podaci dani u određenom redosljedu, uz logaritamski ishod, možemo primijeniti Bayesove faktore. Problem nastaje ako ne postoji redosljed danih podataka, tada je rješenje primjena slučajne k-struke unakrsne provjere.

Jedno zanimljivo pravilo ishoda je Bayesov serum istine koji predstavlja način dolaska do iskrenih odgovora na osobna, ali i objektivna pitanja, nagrađujući ljude koji su iskreni te kažnjavajući one koje lažu. Zahtjev za istinom i iskrenošću ispitanika je ispunjen jer se time maksimizira nagrada ispitanika, što je upravo svojstvo prikladnosti. Za kraj diplomskog rada, dali smo primjer istraživanja S. Radas i D. Preleca koje primjenjuje Bayesov serum istine da bi dobili odgovore o potražnji i kvaliteti za određenim proizvodom, kao i o „dobrim” i „lošim” ispitanicima s obzirom na njihovu informiranost i zainteresiranost za istraživanje.

Summary

In this paper, we have shown that the scoring rules are an excellent tool for evaluating the analyst's prediction. Proper scoring rules ensures the forecasters honesty and rewards him, regard to the prediction and realization of event. The characterization theorem 1.2.3 shows the connection of the propriety and existence of the convex expected function score G , which is also called the information measure or the generalized entropy function. The information measure is the maximum utility that can be achieved in the prediction of an event. The difference between the maximum score and expected score we get at some prediction, is called the divergence function. In addition to the scoring rules, we are interested in the quality of the prediction and the need to compare different prediction procedures. Because of that, we introduce skill scores.

Scoring rules can be applied to a variety of data. Major representatives of the categorical are Savage and Schervish. Savage has constructed a representation for categorical variables, while the Schervish defines scoring rules for binary. So far the mentioned scoring rules have been symmetric, but if we have the need for asymmetric, we apply the theorem 2.1.2 to the convex function G which is not invariant on the permutation of the coordinates. The Beta family and Winkler's score for binary variables show the solution for an asymmetric problem. The Beta family rewards the analyst only if probabilistic forecast is greater than the lower limit c , for event or value that materializes, while Winkler's score resolves the situation if we want to give more importance to one outcome with respect to the other.

Further, if we have continuous variables, the rules for density forecasts are replaced with rules for a predictive cumulative distribution functions, due to the stimulation of artificially high density. This kind of scoring rule is called continuous ranked probability score if variables are in one-dimensional space, and if we generalize it to m -dimensional, with the fulfilled need for the Euclidean norm, energy score. Negative kernel improves generalization because there are no conditions on the norm, and also, there exist scoring rules constructed with complex-valued kernels.

There are situations where it is difficult to determine the entire predictive cumulative distribution function, so analysts decide to predict quantiles, and with help of quantiles we are able to make scoring rules for interval forecasts. We give an example in the case study

in the 5.3 and 5.4 section. Further, scoring rules for predictive distributions can be made from scoring rules for quantiles.

Bayesian factors compare probability models, and models generate probable prediction rules. Bayesian factor is equivalent to a logarithmic score in the case of no parameters and that Bayesian factors can also be applied to compare probable prediction rules, not just the model. If we assume that there are unknown prediction parameters that we get from the data, and if the data is given in a particular order, with the logarithmic score, we can apply Bayesian factors. The problem arises if there is no sequence of data given, then the solution is the use of a random-fold cross-validation.

One interesting scoring rule is the Bayesian truth serum (invented by Prelec, 2004), which is the way of getting honest answers for personal, and objective questions, rewarding honesty and punishing those who lie. The demand for the truth and honesty of the respondents is fulfilled because it maximizes the prize for subjects, which is precisely a description of propriety. We have given an example of S. Radas and D. Prelec's research using Bayesian truth serum to get answers about a need for a given product, and its quality. Also, can be used to identify „good” respondents from the collected data, thus improving data reliability, regard to their knowledge about product and interest in research.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu, 15.9.1993. gdje do danas živim s roditeljima. Započela sam školovanje u osnovnoj školi Stenjevec te zatim nastavila u gimnaziji „Ivan Supek”. Nakon završene srednje škole, zbog velikog zanimanja za matematiku, zaputila sam se na prirodoslovno-matematički fakultet, gdje sam upisala matematiku, inženjerski smjer. Pre-diplomski studij sam završila 2016. godine kada sam stekla zvanje sveučilišne prvostupnice (baccalaurea). Uz studij matematike, radila sam kao dječiji animator i održavala instrukcije, dok sam slobodno vrijeme posvetila hobijima, a to su trčanje i izrađivanje stvari.