

# Logistička funkcija u migracijama

---

Hadžismajlović, Neira

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:737700>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-30**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Neira Hadžismajlović

**LOGISTIČKA FUNKCIJA U**  
**MIGRACIJAMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Hrvoju Šikiću na vodstvu, razumijevanju te korisnim savjetima i preporukama tijekom izrade ovog rada.*

*Hvala od srca mojim roditeljima i braći na strpljenju, ljubavi i moralnoj podršci te posebno hvala mom mužu, njegovim roditeljima i našoj dječici na riječima podrške, nesebičnoj pomoći kad god je zatrebala i razumijevanju.*

*Hvala dragim prijateljima i kolegama koji su dijelili sa mnom, kroz suze i smijeh, moje fakultetske obveze i uljepšali moje studentsko razdoblje.*

*Pružali ste mi ohrabrenje u svim trenucima nesigurnosti i bez vas sve ovo što sam do sad postigla ne bi bilo moguće.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Osnovni pojmovi</b>	<b>2</b>
1.1 Eksponencijalna funkcija . . . . .	2
1.2 Logistička distribucija . . . . .	4
1.3 Vrijeme udvostručavanja populacije . . . . .	4
<b>2 Osnovni modeli rasta</b>	<b>5</b>
2.1 Diskretni modeli rasta populacije . . . . .	5
2.2 Kontinuirani modeli rasta populacije . . . . .	6
<b>3 Logistički rast s migracijama</b>	<b>23</b>
3.1 Logistički rast s konstantnom imigracijom . . . . .	23
3.2 Logistički rast s konstantnom emigracijom . . . . .	25
3.3 Logistički rast s promjenjivom emigracijom . . . . .	27
<b>4 Primjeri migracija</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>46</b>

# Uvod

Na početku ovog diplomskog rada prvo ćemo se podsjetiti dvaju osnovnih modela rasta, a to su eksponencijalni model i logistički model. Logistički model rasta temelji se na modifikaciji eksponencijalnog modela rasta. Ljudi odavno nastoje modelirati rast populacije. Tako je npr. Leonardo od Pise, poznat još kao Fibonacci, u svom radu "Liber abaci" iz 1202. g. postavio tzv. problem razmnožavanja zečeva. Svi matematički modeli rasta populacije mogu se podijeliti u diskretne i kontinuirane. Matematički modeli populacija mogu se koristiti za precizno opisivanje promjena u populaciji i, najvažnije, za predviđanje budućih promjena.

U trećem poglavlju opisat ću logistički rast s konstantnom imigracijom (useljavanjem) pri čemu ću navesti diferencijalnu jednadžbu koja ju opisuje te sva njezina svojstva. Kroz konkretne brojeve, na grafovima ćemo uočiti kako se logistička funkcija mijenja.

Nakon logističkog rasta s konstantnom imigracijom opisat ću logistički rast s konstantnom emigracijom (iseljavanjem) te logistički rast s promjenjivom emigracijom.

U zadnjem poglavlju navest ću nekoliko primjera kroz koje će nam cijela priča o logističkom modelu biti puno jasnija.

Iako se kroz nastavno i akademsko obrazovanje logistička funkcija, odnosno logistički model ne spominje, njegovu primjenu možemo naći u raznim područjima kao što su neuronske mreže, biologija, demografija, ekonomija, kemija, medicina, matematička psihologija, vjerojatnost, sociologija, političke znanosti i statistika. Logistička funkcija je često korištena u neuronskim mrežama za prikazivanje nelinearnosti u modelu i za ograničavanje signala na unaprijed zadani raspon. Element neuronske mreže pretvara linearni ulazni signal u izlazni signal u obliku logističke funkcije s ograničenjima. Logističke funkcije se koriste u statistici za logističku regresiju u cilju prikazivanja kako vjerojatnost nekog događaja  $P$  može biti pod utjecajem jedne ili više ulaznih varijabli. U medicini se logistička funkcija koristi pri modeliranju rasta tumora po sličnom principu kao modeliranje rasta u ekologiji. U kemiji se logistička funkcija može primjeniti za praćenje udjela reaktanata i produkata u vremenu u kemijskoj reakciji drugog reda. U lingvistici se logistička funkcija primjenjuje pri modeliranju razvoja jezika. Inovacija u jeziku je u početku marginalna, ali s vremenom sve više zahvaća populaciju, te na kraju tog procesa ostaje vrlo mali postotak populacije koji nije usvojio tu promjenu jezika.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi

Na početku upoznajmo dvije osnovne jednačbe koje su nam temelj za daljne razumijevanje ovog rada.

### 1.1 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je najosnovnija, najjednostavnija, a i najstarija funkcija. Defini-rana je na sljedeći način

$$\frac{dN}{dt} = kN \quad (1.1)$$

gdje je  $N$  veličina rasta,  $t$  je vrijeme i  $k$  je *stopa rasta* ili *koeficijent rasta* za koji pretpostavljamo da je konstantan. Ova jednačba nam govori da je promjena količine  $N$  u vremenu  $t$  proporcionalna s količinom  $N$  u istom trenutku. Rješenje jednačbe je oblika  $N = N(t)$ . Kako bismo dobili konačno rješenje potrebno je postaviti *početni uvjet*. Kažemo da je  $N = N_0$  kada je  $t = 0$ , odnosno kad vrijedi  $N(0) = N_0$ . U skladu s tim rješenje jednačbe (1.1) je

$$N = N_0 e^{kt}. \quad (1.2)$$

Ovaj izraz ćemo jednostavno zvati ekponencijalnom funkcijom ili ekponencijalnom jednačbom. Može biti prikazana kao beskonačan red koji je dan ovim izrazom:

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \quad (1.3)$$

Uvrštavanjem  $z = 1$  dobijemo vrijednost  $e \approx 2.71828$ . Logaritmiranjem obje strane jednačbe dobijemo

$$\log(N) = \log(N_0) + kt. \quad (1.4)$$

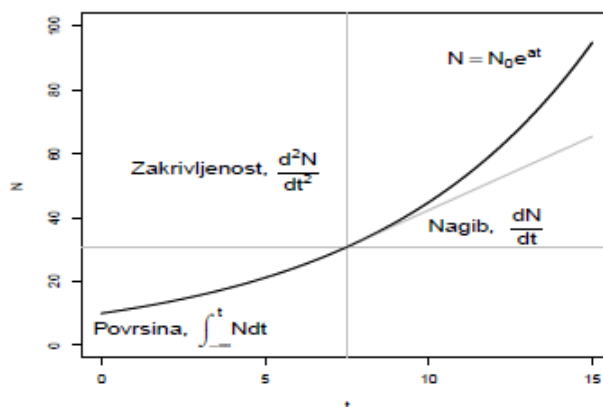
Derivacija izraza (1.2) po vremenu  $t$  daje nagib eksponencijalne funkcije. Druga derivacija pokazuje zakrivljenost funkcije, a integral mjeri površinu ispod krivulje od trenutka  $-\infty$  do trenutka  $t$ . Spomenute veze prikazane su ispod:

$$\frac{dN}{dt} = kN_0e^{kt}$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = k^2N_0e^{kt}$$

$$\int_{-\infty}^t N dt = \frac{1}{k}e^{kt}$$

Geometrijske interpretacije prikazane su na grafu:



Slika 1.1: [5]  $k = 0.15$ ,  $N_0 = 10$

Rast kod kojeg se individualna stopa fekunditeta (rađanja) ne mijenja s veličinom populacije, a populacija raste to brže što je stopa veća (veći se broj jedinki reproducira) naziva se eksponencijalni rast.



## 1.2 Logistička distribucija

Logistička distribucija potječe iz ranog doba te je iznimno važna u kolekciji rastućih funkcija i temeljni je pojam u ovom radu.

Njena definicija glasi

$$\frac{dN}{dt} = k_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.5)$$

pri čemu je  $K$  ono što ćemo mi zvati *noseći kapacitet*.

Stavimo li da je  $a = k_0$  tada je  $a$  *koeficijent rasta*, a  $b = \frac{k_0}{K}$  je tzv. *koeficijent gušenja* (eng. "crowding koeficijent") pa naša jednačba (1.5) glasi

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Uočimo, kada  $K$  teži u beskonačno, logistička distribucija postaje eksponencijalna. Isto tako možemo uočiti, zbog  $N^2$  ova jednačba je nelinearna diferencijalna jednačba. Rješenje ove diferencijalne jednačbe lako se dobije na nekoliko načina, a ono glasi

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-k_0(t-t_0)}}$$

Logistički model rasta temelji se na ideji da je stopa rasta populacija ovisna o njihovoj gustoći.

## 1.3 Vrijeme udvostručavanja populacije

Ako veličina eksponencijalno raste, lako možemo odrediti parametar nazvan *vrijeme udvostručavanja* (eng. "doubling time"). Pitamo se koliko je dugo potrebno da se vrijednost neke točke koja raste eksponencijalno dvostruko poveća? Označimo li to vrijeme s  $t_2$ , uvrstimo  $N = 2N_0$  u jednačbu (1.2) te rješavamo li jednačbu po  $t_2$ , dobit ćemo sljedeće rješenje

$$\frac{1}{k} \ln 2 = t_2 \approx \frac{1}{k} (0.693) \quad (1.6)$$

Još češće se koristi sljedeće pravilo

$$(100k)t_2 \approx 70$$

koje stopu rasta izraženu u postocima  $100k$  veže s vremenom udvostručavanja  $t_2$ .

# Poglavlje 2

## Osnovni modeli rasta

### 2.1 Diskretni modeli rasta populacije

#### Diskretni oblik Malthusovog modela

Populacija je skupina jedinki iste vrste koje žive na određenom prostoru i u određenom vremenu, te koje aktivno izmjenjuju genetički materijal dajući plodno potomstvo. To može biti skupina ljudi, životinja, biljaka ili nekih drugih organizama.

U ovom modelu pretpostavlja se da populacija raste diskretno u vremenskim trenucima. Eksponencijalni rast populacija koje se reproduciraju periodički (u odjeljenim vremenskim intervalima) obično se naziva *geometrijski rast*. Neka je  $t = 0$  trenutak od koga počinjemo pratiti populaciju čiji se rast dešava u vremenskim trenucima  $t = 1, 2, \dots$ . Nadalje, neka nam  $N_n, n = 0, 1, 2, \dots$  označava broj članova promatrane populacije u  $n$ -toj generaciji (tj. u trenutku  $t = n$ ). Diskretizacijom diferencijalne jednačbe (1.1) dobivamo

$$N_n - N_{n-1} = kN_{n-1}$$

što uz oznaku  $\lambda := 1 + k$  možemo zapisati kao

$$N_n = \lambda N_{n-1}.$$

Ova diferencijaska jednačba (rekurzivna relacija) zove se diskretni Malthusov model rasta populacije. Njeno rješenje glasi

$$N_n = \lambda^n N_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pri čemu je  $N_0$  početna veličina populacije, a  $\lambda$  geometrijska stopa rasta koja u sebi kombinira *rađanje + preživljavanje*, odnosno, može se definirati kao broj jedinki u narednoj generaciji po jedinki u sadašnjoj (tekućoj) generaciji, tj.

$$\lambda = 1 + r - u,$$

pri čemu je  $r$  - stopa fekunditeta, a  $u$  stopa mortaliteta. Ako je  $\lambda > 1$  populacija raste, ako je  $\lambda < 1$  populacija opada, a ako je  $\lambda = 1$  populacija je konstantna.

### Diskretni oblik Verhulstova modela

Diskretizacijom jednadžbe (1.5) dobiva se diferencijska jednadžba

$$N_n = N_{n-1} \left[ 1 + k_0 \left( 1 - \frac{N_{n-1}}{K} \right) \right] \quad (2.1)$$

za koju se kaže da je diskretni oblik Verhulstova modela.

**Napomena:** Za populaciju bakalara kadanski znanstvenik William Ricker (1958) našao je da vrijedi diskretni oblik Verhulstova zakona.

## 2.2 Kontinuirani modeli rasta populacije

### Kontinuirani oblik Malthusovog modela

Veličina populacije, koju označavamo s  $N(t)$ , je funkcija po vremenu  $t$ . Promjena veličine populacije od trenutka  $t$  do trenutka  $t + dt$  iznosi

$$dN = dR - dU + dM \quad (2.2)$$

gdje su:

- $dR$  – broj rođenih članova te populacije u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$
- $dU$  – broj umrlih članova te populacije u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$ ,
- $dM$  – broj članova migriranih jedinki u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$ .

Ako je  $dM > 0$ , govorimo o imigraciji, a ako je  $dM < 0$  radi se o emigraciji. Glavni razlozi za migracije su hrana, razmnožavanje i nepovoljni uvjeti u okolišu. Jednadžba (2.2) poznata je pod nazivom *jednadžba konzervacije* ili *sačuvanja* populacije. U matematičkoj biologiji veličinu

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

zovemo *stopa rasta* populacije. Dakle, stopa rasta populacije je prirast te populacije (u jedinici vremena) po "glavi". Slično,  $\frac{1}{N} \frac{dR}{dt}$  je *stopa rađanja (fekunditeta)*,  $\frac{1}{N} \frac{dU}{dt}$  je *stopa smrtnosti (umiranja, mortaliteta)*, a  $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$  je *stopa migriranja*.

Thomas Malthus (1766-1834, engleski demograf) je 1798. g. modelirao rast populacije bez migracija ( $dM = 0$ ). On je pretpostavio da su  $dR$  i  $dU$  proporcionalni trenutnoj veličini populacije  $N$  i duljini vremenskog intervala  $dt$ :

$$dR = rNdt, \quad dU = uNdt.$$

Konstante proporcionalnosti  $r$  i  $u$  su stopa rađanja i stopa smrtnosti, dok je njihova razlika,  $k = r - u$ , stopa rasta populacije. Uz navedene pretpostavke jednadžbu konzervacije (2.2) možemo zapisati u obliku

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{2.3}$$

Dakle, u tom najjednostavnijem modelu vrijedi:

$$dN = dR - dU = (r - u)Ndt = kNdt,$$

što znači da populacija veličine  $N$  u vremenskom intervalu duljine  $dt$  naraste do populacije veličine  $N + dN = N(1 + kdt)$ . Krenemo li od populacije  $N_0$ , u trenutku  $t = 0$ , ona će se do trenutka  $t = ndt$  transformirati na sljedeći način:

$$\begin{array}{c} \underbrace{N_0 \quad N_0(1 + kdt)}_{dt} \\ \\ \underbrace{N_0(1 + kdt) \quad N_0(1 + kdt)^2}_{dt} \\ \\ \vdots \\ \underbrace{N_0(1 + kdt)^{n-1} \quad N_0(1 + kdt)^n}_{dt} \end{array}$$

Dakle, u trenutku  $t = ndt$  populacija će imati veličinu:

$$N = N_0(1 + kdt)^{\frac{t}{dt}} = N_0[(1 + kdt)^{\frac{1}{kdt}}]^{kt}.$$

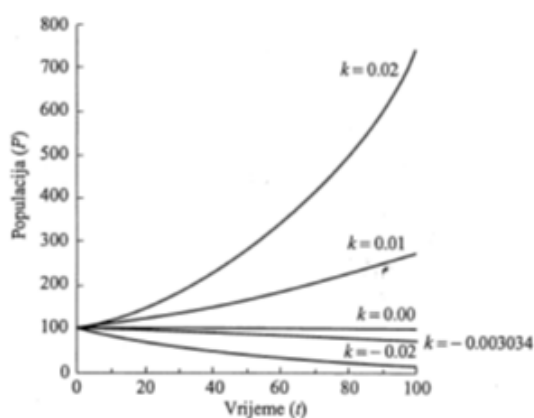
Ako rast populacije pratimo kroz sve manje vremenske intervale  $dt$ , onda će broj u uglatoj zagradi težiti broju  $e \approx 2.71828$ , npr. za  $kdt = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ ; u uglatoj

zagradi dobivamo sljedeće brojeve:  $1.1^{10}$ ;  $1.01^{100}$ ;  $1.001^{1000}$ , ... , što znači da za populaciju  $N$  koja raste kontinuirano vrijedi:

**EKS PONENCIJALNI RAST**

$$N = N_0 e^{kt} \quad (e \approx 2.71828)$$

Dakle, u ovom najjednostavnijem matematičkom modelu rast populacije je opisan eksponencijalnom funkcijom. Ako je  $k > 0$  radi se o rastu, dok se za  $k < 0$  radi o padu populacije. Ako je  $k = 0$ , populacija se nalazi u ravnotežnom stanju (ne mijenja se). Što je  $k$  po apsolutnom iznosu veći, to je rast, odnosno pad, brži. Sve to ilustrirano je na sljedećoj slici.



Slika 2.1: [6] Graf eksponencijalne funkcije  $N(t) = N_0 e^{kt}$ , za  $N_0 = 100$  i različite vrijednosti od  $k$

U sljedećoj tablici prikazani su stopa rasta  $k$  i vrijeme udvostručenja  $t_2$  za neke konkretne populacije, pri čemu vrijedi da je  $(100k) t_2 \approx 70$ .

Možemo uočiti da se prema Malthusovu modelu populacije udvostručuju bitno različitim brzinama. No, i „sporo rastuće“ populacije će narasti do proizvoljno velike vrijednosti (vidi tablicu (2.1)). Na primjer, stado goveda koje se pri eksponencijalnom rastu udvostručuje svake dvije godine, doseže sljedeće veličine (vidi tablicu (2.2)):

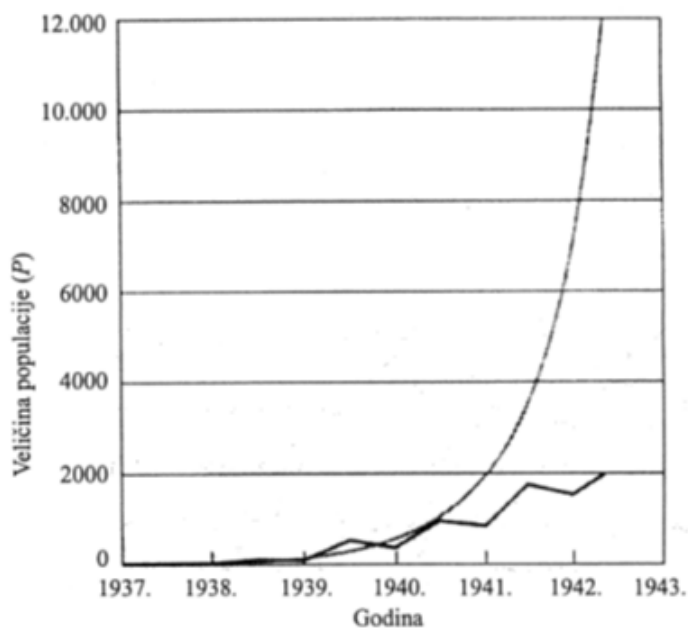
Vrsta	Uobičajeno ime	$k[\text{jedinke}/(\text{jedinke} \cdot \text{dan})]$	$t_2$
T fag	Virus	300.0	3.3 minuta
Escherichia coli	Bakterija	58.7	17 minuta
Paramecium caudatum	Papučica	1.59	10.5 sati
Hydra	Hidra	0.34	2 dana
Tribolium casteneum	Mali crveni brašnar	0.101	6.9 dana
Rattus norvegicus	Sivi štakor	0.0148	46.8 dana
Bos taurus	Europsko krakotogo govedo	0.001	1.9 godina
Avicennia marina	Mangrovo drvo	0.00055	3.5 godina
Nothofagus fusca	Novozelandska crvena bukva	0.000075	25.3 godine

Tablica 2.1: [6]

Broj proteklih godina	0	2	5	10	50	150	200
Veličina stada	50	104	310	1925	$4.2 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^{25}$	$2.5 \cdot 10^{33}$

Tablica 2.2: [6]

Dakle, za 200 godina eksponencijalni model predviđa stado od  $6.33 \cdot 10^{31}$  goveda. To bi stado bilo teže od cijele Zemlje ( $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ), pa je očito da model eksponencijalnog rasta u ovom slučaju nije dobar. Malthusov model nije dobar iz više razloga, no najvažniji razlog je taj što se pretpostavlja da su stopa rasta  $r$  i stopa smrtnosti  $u$  konstantne, odakle slijedi da je i stopa rasta  $k$  također konstantna što implicira neograničeni rast populacije. To je moguće samo uz neograničene resurse: neograničeni prostor, neograničene izvore hrane, neograničene izvore vode itd. Ako su resursi ograničeni ili se čak smanjuju s vremenom, stopa rađanja će se smanjivati, a stopa umiranja će rasti i više nećemo imati eksponencijalni rast. Zasigurno si opravdano možemo postaviti pitanje koja je uopće korist od eksponencijalnog modela uz sva ova ograničenja. Primjetimo da populacija ipak raste eksponencijalno dok resursi još nisu iscrpljeni. To se jasno vidi na sljedećim usporednim prikazima eksponencijalnog rasta i stvarnog empirijski utvrđenog rasta populacije od početnih 8 fazana koji su 1937. doneseni na jedan otok uz pacifičku obalu SAD-a.



Slika 2.2: [6] Rast populacije fazana (*Phasianus colchicus torquatus*) uvedene na spomenuti pacifički otok. Tanka crta je krivulja pretpostavljenog eksponencijalnog rasta, a debela prikazuje opaženu populaciju.

Osim toga, ljudi mnoge svoje resurse, dok su im još na raspolaganju, troše eksponencijalnom brzinom. Naime, potrošnja tih resursa (hrane, vode, energenata, itd.) ima konstantnu ili čak rastuću godišnju stopu rasta, tj. potrošnja raste barem eksponencijalno. Eksponencijalni model predviđa kontinuirani rast populacije. Međutim, mnoge populacije rastu diskretno, npr. tako da se razmnožavaju i umiru samo u određeno doba godine ili tako da se razmnožavaju samo u određeno doba godine, a umiru kontinuirano, itd. Eksponencijalni rast je tada samo prva aproksimacija stvarnog rasta populacije. Dakle, već je vrlo rano prepoznato da veličina prirodnih populacija mora nečim biti regulirana (ograničena). Pri tome su uočena tri fundamentalna principa:

1. Postoji jaka tendencija populacija za rastom.
2. Postoji tendencija da rast bude zaustavljen određenim ograničavajućim faktorima koji djeluju na stope fekunditeta i mortaliteta.
3. Na populacijske procese snažno djeluje veličina populacije (postoji efekt gustoće).

## Kontinuirani Verhulstov model

Najjednostavniji model smanjenja stope rađanja i povećanja stope umiranja predložio je 1838. godine Pierre-Francois Verhulst koji uključuje stopu rađanja te stopu umiranja.

Neka su  $r_0$  i  $u_0$  početne stope rađanja i umiranja u nekom trenutku  $t_0$ , a njihova razlika  $k_0 = r_0 - u_0$  početna stopa rasta (koja se još zove i *biotički potencijal*). Gustoća populacija u prirodi rezultat je ravnoteže između biotičkog potencijala jedinki koji je u pravilu golem i otpora okoliša koji se manifestira kroz nedostatak hrane i prostora, te utjecaj kompetitora, predatora, parazita i bolesti. Verhulst je pretpostavio da stopa rađanja pada proporcionalno napučenosti (tj. veličini populacije  $N$ ) te da stopa umiranja raste proporcionalno napučenosti:

$$r = \frac{1}{N} \frac{dR}{dt} = r_0 - aN,$$

$$u = \frac{1}{N} \frac{dU}{dt} = u_0 + bN$$

Konstante  $a > 0$  i  $b > 0$  su stope po kojima stopa rađanja pada, odnosno stopa umiranja raste. Pomoću njih definira se nova konstanta

$$K := \frac{r_0 - u_0}{a + b}$$

koju zovemo *nosivi kapacitet*.

Sada iz (2.2) slijedi

$$dN = dR - dU = [(r_0 - aN) - (u_0 + bN)]Ndt = [(r_0 - u_0) - (a + b)N]Ndt =$$

$$= (r_0 - u_0) \left[ 1 - \left( \frac{a + b}{r_0 - u_0} \right) N \right] Ndt,$$

odnosno

$$dN = k_0 \left( 1 - \frac{N}{K} \right) Ndt. \quad (2.4)$$

Jednadžba (2.4) je poznata pod nazivom *Verhulstov ili logistički model*.

Lako je zaključiti da nosivi kapacitet  $K$  predstavlja maksimalnu veličinu koju populacija može doseći. Zaista, pretpostavimo da je  $k_0 > 0$ . Tada iz (2.4) slijedi da je  $dN > 0$



samo za  $N < K$ . Prema tome, za  $N < K$  populacija raste prema  $K$  i prestaje rasti tek kada je  $dN = 0$ , tj. kada je  $N = K$ . Što je populacija bliža nosivom kapacitetu, to je njezin rast sporiji. Izraz  $1 - \frac{N}{K}$  možemo interpretirati kao slobodni dio nosivog kapaciteta, odnosno neupotrebljeni dio nosivog kapaciteta.

Na primjer, za  $K = 100$  i dosta udaljeni  $N = 1$  imamo

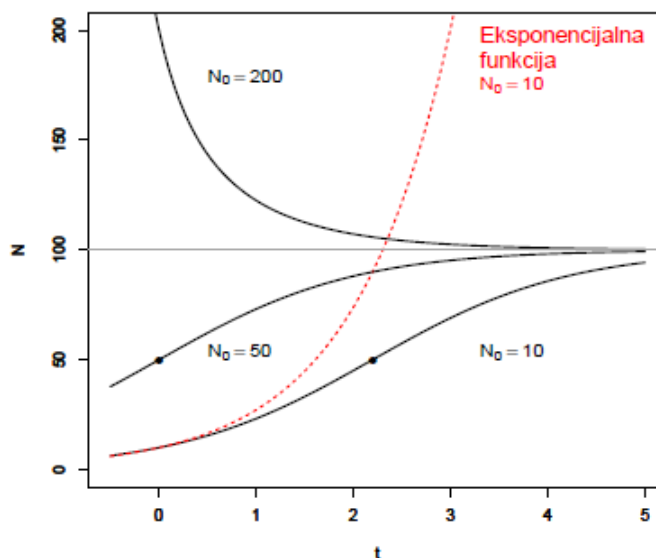
$$dN = k_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right) N dt = 0.99k_0 N dt,$$

i to je rast po stopi  $0.99k_0$ .

No, za  $N = 99$ , što je dosta blizu nosivom kapacitetu  $K = 100$ , imamo

$$dN = k_0 \left(1 - \frac{99}{100}\right) N dt = 0.01k_0 N dt,$$

i to je rast po bitno manjoj stopi  $0.01k_0$ .



Slika 2.3: [5]  $K = 100, k_0 = 1.0$

Sve se to vidi na S – grafu (graf u obliku izduženog slova S) koji pregledno prikazuje ovaj tip rasta (vidi sliku 2.3)

Za populaciju koja ima konstantnu stopu rasta  $k$ , tj. za koju je  $dN = kN dt$ , našli smo i egzaktnu formulu rasta,  $N = N_0 e^{kt}$ . Takvu egzaktnu formulu rasta možemo naći i za

populaciju čija stopa opada po Verhulstovom načelu, tj. za koju je  $dN = k_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right) N dt$ . Tu formulu zovemo logističkom, a njoj odgovarajući rast logističkim rastom.

Diferencijalnu jednačbu (2.4) možemo riješiti separacijom varijabli:

$$\frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{K}\right) N} = k_0 dt$$

Integriranjem lijeve strane dobivamo (bez konstante interakcije)

$$\int \frac{dN}{\left(1 - \frac{N}{K}\right) N} = \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}\right) dN = \ln N - \ln(K - N) = \ln\left(\frac{N}{K - N}\right)$$

dok integral desne strane glasi:

$$\int k_0 dt = k_0 t - \ln C,$$

gdje je  $-\ln C$ ,  $C > 0$ , konstanta interakcije. Dakle,

$$\ln\left(\frac{N}{K - N}\right) = k_0 t - \ln C,$$

odakle antilogaritmiranjem dobivamo

$$\frac{N}{K - N} = \frac{1}{C} e^{k_0 t}.$$

Sada rješavanjem po  $N$  dobivamo

$$N = \frac{K}{1 + C e^{-k_0 t}}.$$

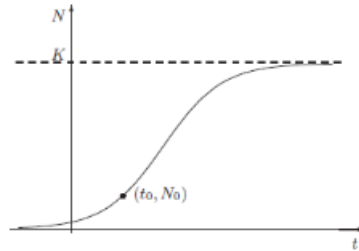
Konstantu  $C$  ćemo odrediti iz početnog uvjeta:  $N(t_0) = N_0$ . Lako je provjeriti da se dobiva

$$C = \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{k_0 t_0}$$

Dakle,

$$\boxed{N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-k_0(t - t_0)}}} \quad (2.5)$$

To je dobro znana logistička funkcija.

Slika 2.4: Graf logističke funkcije  $N(t)$ 

U ovoj analizi pretpostavljamo da je koeficijent rasta  $k_0$  pozitivan. Primjetimo da ako  $t$  u jednadžbi (2.5) teži u beskonačnost,  $N$  teži prema  $K$ . Početni uvjet  $N_0$  može biti veći ili manji od  $K$ , no u oba slučaja  $N$  teži prema  $K$  kako  $t$  teži prema beskonačnom. Logistička funkcija (2.5) ima točku infleksije

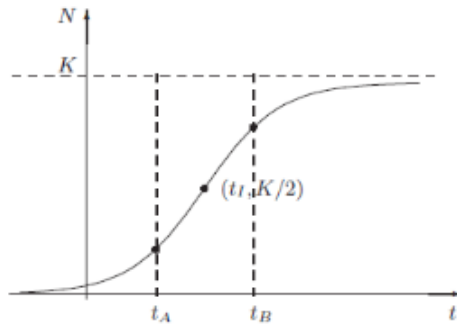
$$t_I = \frac{\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)}{k_0}$$

u kojoj postiže vrijednost  $N(t_I) = \frac{K}{2}$ . Za  $t \leq t_I$  funkcija je konveksna i u tom intervalu rast je progresivan. Za  $t \geq t_I$  funkcija je konkavna i na tom intervalu rast je degresivan. Zato je interesantno u intervalu progresivnog rasta pronaći točku maksimuma  $t_A$ , a u intervalu degresivnog rasta točku minimuma  $t_B$  druge derivacije  $N''(t)$ :

$$t_A = \frac{\ln\left[(2 - \sqrt{3})\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)\right]}{k_0}$$

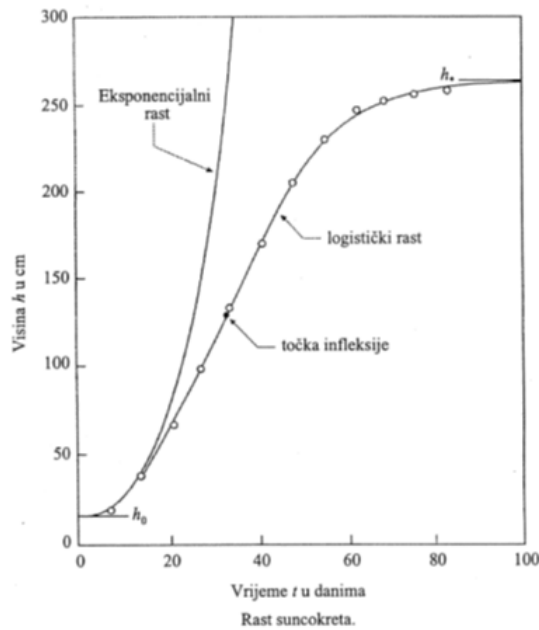
$$t_B = \frac{\ln\left[(2 + \sqrt{3})\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)\right]}{k_0}$$

Interval  $\langle -\infty, t_A \rangle$  predstavlja fazu formiranja rasta, u intervalu  $[t_A, t_B]$  je prisutan intenzivni rast, a interval  $[t_B, \infty)$  predstavlja fazu usporenog rasta.



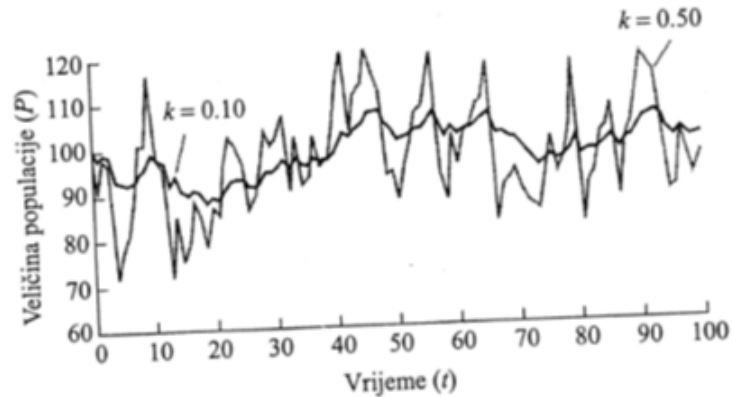
Slika 2.5: [9] Faze rasta logističke funkcije

Logistički je rast vrlo dobar matematički model za mnoge prirodne fenomene. Na primjer, ako pratimo rast suncokreta od mladice do zrele biljke, vidjet ćemo da je on logistički. Na sljedećoj slici točkama su prikazani rezultati konkretnih mjerenja visine suncokreta tijekom prva tri mjeseca njegova rasta. Možemo uočiti da se rezultati mjerenja gotovo savršeno poklapaju s logističkim rastom. Na slici je prikazan i eksponencijalni rast kojim bi suncokret rastao da je zadržao svoju početnu stopu rasta.



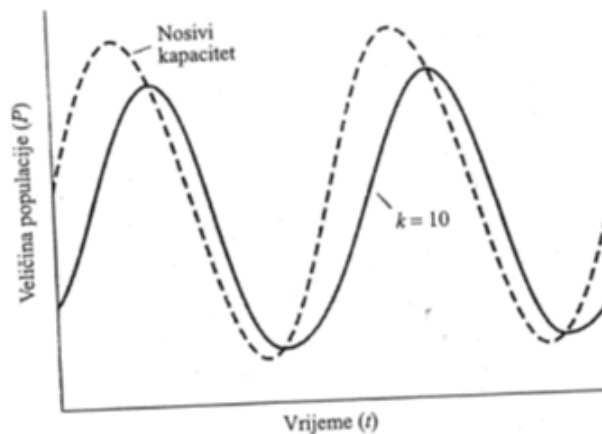
Slika 2.6: [6] Rast suncokreta

Naravno, logistički model rasta ima svoja ograničenja, tj. on vrijedi samo uz neke pretpostavke. Njegova osnovna pretpostavka je konstantan nosivi kapacitet  $K$ . Međutim, nosivi kapacitet često ima slučajne fluktuacije, što rezultira slučajnim fluktuacijama populacije u blizini nosivog kapaciteta (a ne njenom stabilizacijom na nosivom kapacitetu, kako predviđa logistički model). Dva takva slučaja prikazana su na sljedećoj slici.

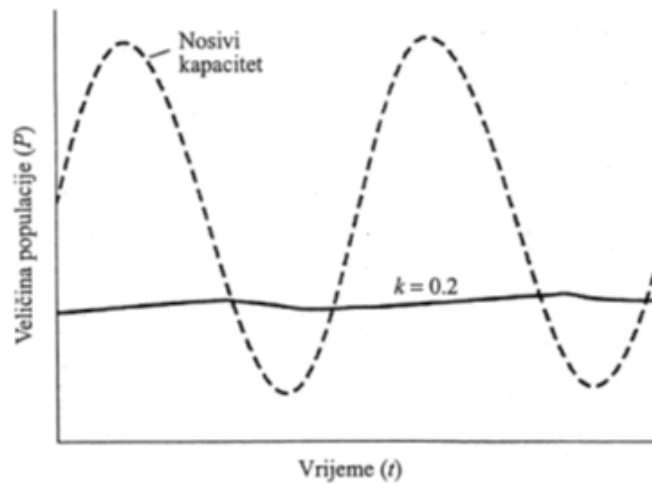


Slika 2.7: [6] Logistički rast populacija sa slučajnim fluktuacijama nosivog kapaciteta

U oba slučaja fluktuacije od  $K$  su iste, no uočite da su fluktuacije populacije s većom početnom stopom  $k_0$  ipak bitno veće. Nosivi kapacitet može imati i periodičke promjene, koje su npr. tipične reakcije mnogih populacija na izmjene godišnjih doba u umjerenom pojasu. Dva takva slučaja prikazana su na sljedećim dvijema slikama.



Slika 2.8: [6]



Slika 2.9: [6]

U oba slučaja nosivi se kapacitet periodički mijenja na isti način, no uočimo da reakcija populacije na tu periodičku promjenu bitno ovisi o početnoj stopi rasta  $k_0$ . Ako je ona velika (vidi sliku (2.8)) populacija vjerno prati periodičke promjene nosivog kapaciteta, ali ako nije (kao na slici (2.9)), onda ona gotovo uopće ne reagira na periodičke promjene nosivog kapaciteta. Važna pretpostavka logističkog i eksponencijalnog modela rasta jest da na prirast populacije u danom trenutku utječe veličina populacije u tom istom trenutku; dakle

$$dN_i = kN_i dt$$

i

$$dN_i = k_0 \left(1 - \frac{N_i}{K}\right) N_i dt.$$

Međutim, prirast populacije u danom trenutku često je određen njenom veličinom u nekom prethodnom trenutku. Na primjer, mnoge biljke u trenutku  $t$  klijaju iz sjemenki koje su stvorene u nekom ranijem trenutku  $t - \tau$ , a u međuvremenu su na neki način mirovale; dakle

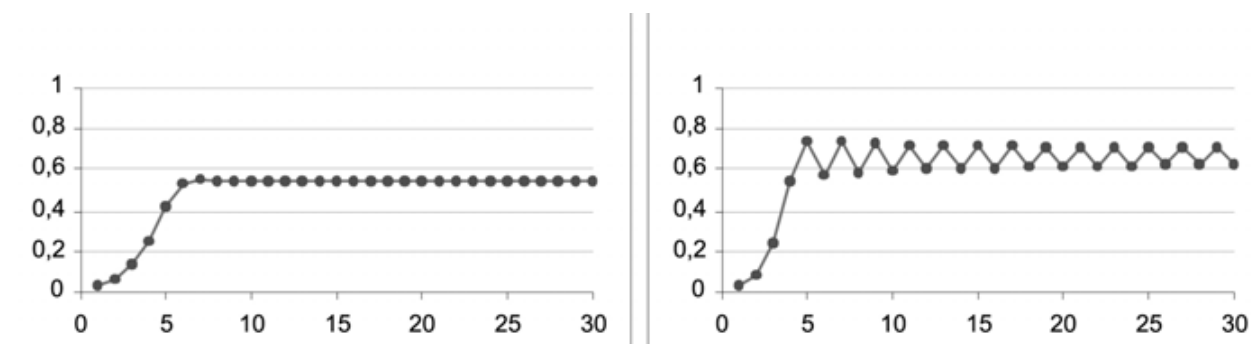
$$dN_i = kN_{i-\tau} dt$$

i

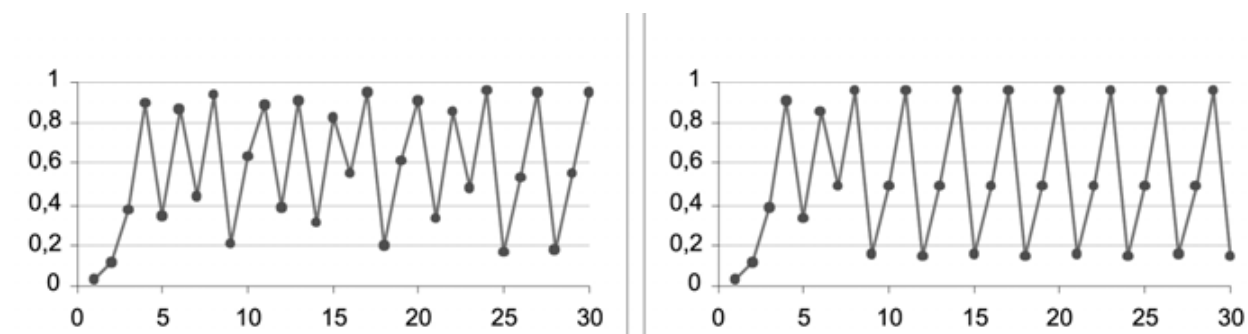
$$dN_i = k_0 \left(1 - \frac{N_{i-\tau}}{K}\right) N_{i-\tau} dt.$$

Ekolozi su s 1 označili maksimalni broj jedinki neke vrste koji može živjeti na određenom području. Nanesimo na os apscisu redni broj generacije, a na os ordinatu broj jedinki

u postocima od mogućeg maksimalnog broja te napravimo grafikone za vrijednosti parametra  $k_0$  od 2.2, 3, 3.8224 i 3.8368. Iz priloženih grafikona možemo zaključiti: u slučaju da umnožak  $k_0\tau$  ima mali iznos (slika (2.10) lijevo) „logistički“ rast ovog tipa gotovo je identičan pravom logističkom rastu. U slučaju veće vrijednosti umnoška  $k_0\tau$ , populacija će oscilirati oko svojeg nosivog kapaciteta prije nego što se na njemu stabilizira (slika (2.10) desno). U slučaju izrazito velikih vrijednosti umnoška  $k_0\tau$ , populacija se nikada neće stabilizirati na svojem nosivom kapacitetu, nego će oko njega stalno oscilirati (slika (2.11)).



Slika 2.10: [8]



Slika 2.11: [8]

O eksponencijalnom i logističkom rastu uspjeli smo mnogo toga zaključiti i bez njihovih egzaktnih formulacija u obliku  $N = N_0 e^{kt}$  i  $N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-k_0 t}}$ . Naime, već iz poznavanja prirasta populacije u prvom, odnosno drugom slučaju:

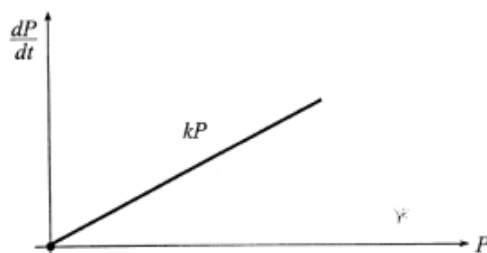
*EKSPONENCIJALNI RAST*

$$dN = kNdt$$

*LOGISTIČKI RAST*

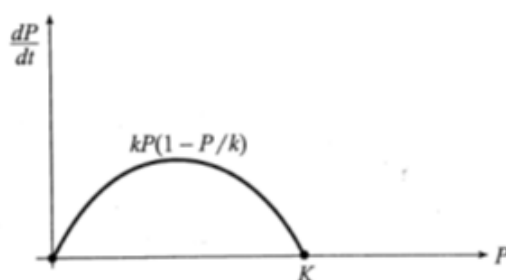
$$dN = k_0 \left(1 - \frac{N}{K}\right) Ndt$$

Iako smo zaključili da u prvom slučaju populacija raste za  $k > 0$  i pada za  $k < 0$ , dok u drugom slučaju (za  $k_0 > 0$ ) populacija raste za  $N < K$ , pada za  $N > K$ , a stabilizirana je na nosivom kapacitetu  $K$  za  $N = K$ . Da bismo to zaključili, ne trebamo znati diferencijalni i integralni račun, dovoljno je analizirati vrijednosti linearne i kvadratne funkcije koje opisuju kako prirasti populacije (u jedinici vremena) ovise o trenutnom iznosu populacije (usporedi sliku (2.12) i sliku (2.13)).



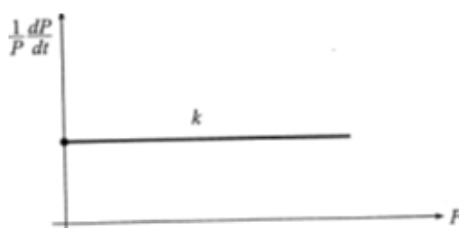
Slika 2.12: [6]



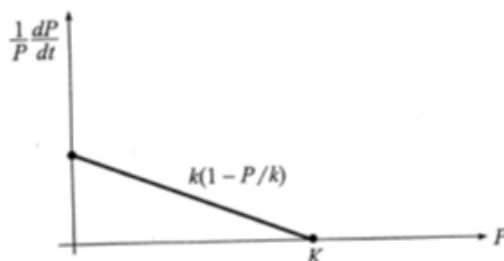


Slika 2.13: [6]

Još jednostavniji sažetak eksponencijalnoga i logističkoga rasta daju njihove stope. Stopa rasta neke populacije jest *prirast te populacije (u jedinici vremena) po „glavi“*. U prvom slučaju stopa je  $\frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) = k$ , dok je u drugom stopa izražena (Verhulstovom) padajućom linearnom funkcijom,  $\frac{dN}{dt} \left( \frac{1}{N} \right) = k_0 \left( 1 - \frac{N}{K} \right) Ndt$ , (usporedi sliku (2.14) i sliku (2.15)).

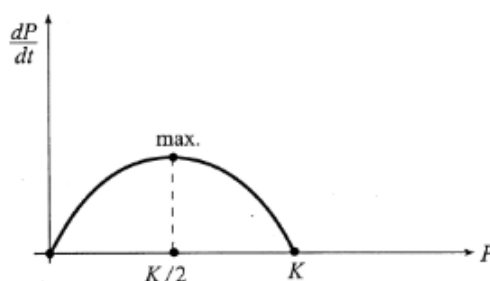


Slika 2.14: [6]



Slika 2.15: [6]

Uočimo da je nosivi kapacitet populacije ona vrijednost  $K$  u kojoj je stopa rasta populacije jednaka nuli. Sada ćemo na konkretnom primjeru vidjeti kako je za razumijevanje logističkog rasta neke populacije često važnije razumjeti kvadratnu funkciju njezinog prirasta, nego logističku  $S$  – funkciju samoga rasta. Pretpostavimo da smo eksperimentalno utvrdili kako populacija riba u nekom moru raste logistički i da ima nosivi kapacitet  $K$ . Ako ribolovom umjetno mijenjamo veličinu te populacije, koji je izlov ribe u tom moru optimalan? Očito je to onaj izlov uz koji je prirast populacije riba najveći, tj. uz koji je  $\frac{dN}{dt}$  najveće. No,  $\frac{dN}{dt}$  je jednostavna kvadratna funkcija od  $N$ , čiji je graf parabola (slika (2.16)):



Slika 2.16: [6]

Ona najveću vrijednost postiže u tjemenu, na pola puta između nultočaka  $0$  i  $K$ , dakle u  $\frac{K}{2}$ . To znači da je optimalni izlov onaj koji populaciju riba održava na polovici njezinog nosivog kapaciteta. Uočimo, s druge strane, da su najlošiji oni izlovi koji daju najmanji prirast, a to su oni koji populaciju riba dovode na  $N = 0$  ili  $N = K$ . To su oni izlovi u kojima izlovimo ili gotovo sve ili lovimo toliko malo da populaciji riba dopustimo da dosegne svoj nosivi kapacitet.

**Primjer:** Brzina  $v$  kojom se mijenja broj štika u Dravi zadana je sa

$$v = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right)$$

gdje su  $r$  i  $K$  dvije konstante, a  $N$  je broj štika. Konstanta  $r$  se zove biotički potencijal, a  $K$  je nosivi kapacitet Drave za štuke ( $K$  je maksimalan broj štika koje podržavaju izvori hrane u Dravi).

a) Koliki mora biti broj štika u Dravi ( $N = ?$ ) da bi populacija štika najbrže rasla, odnosno da  $v$  bude najveći? Koliki je taj  $v$ ?

b) Ako je brzina  $v$  promjene populacije štuke jednaka nuli kažemo da je broj štika u ravnoteži. Nađite sve ravnotežne vrijednosti broja štika u Dravi.

Rješenje: a) Iz prethodne analize možemo uočiti da je u ovom primjeru  $v = \frac{dN}{dt}$ . Kako se radi o paraboli s nultočkama u  $N = 0$  i  $N = K$  znamo da će  $v$  odnosno  $\frac{dN}{dt}$  biti najveći za  $N = \frac{K}{2}$  pa će u tom slučaju  $v$  iznositi

$$v = r \cdot \frac{K}{2} \cdot \left( 1 - \frac{\frac{K}{2}}{K} \right) = \frac{rK}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{rK}{4}.$$

b) Lako je zaključiti da su sve ravnotežne vrijednosti broja štika u Dravi ili za  $N = 0$  ili za  $N = K$ .

# Poglavlje 3

## Logistički rast s migracijama

### 3.1 Logistički rast s konstantnom imigracijom

U nastavku se bavimo logističkim rastom s konstantnom imigracijom (useljavanjem) ili emigracijom (iseljavanjem). Primjeri useljavanja su sadnja drveća u šumi i kretanje ljudi na određeno zemljopisno područje tijekom određenog vremenskog razdoblja. Primjeri emigracije su izvlačenje riba iz oceana i berba poljoprivrednih proizvoda. Predmet logističkog rasta s migracijama ispitali su brojni istraživači, uključujući Brauer i Sanchez (1975.), Clark (1976., 1981.) i Hallman (1986.) [1]. Imigracija ili kolonizacija, kako se spominje u metapopulacijskoj literaturi, može se pojaviti nizom različitih mehanizama ovisno o organizmu koji se razmatra. Sisavci i druga ne-leteća bića uđu u novo stanište te su s tim ograničeni, dok ptice i leteći insekti nisu slično ograničeni i mogu ući bilo gdje. Sjeme biljke, pelud i spore su složenije jer mogu koristiti oba ova mehanizma. (Napomena: Spora je posebna tvorba, koju tvore pojedini organizmi, kako bi preživjeli nepovoljne životne uvjete, koje uzrokuju različiti abiotski čimbenici, kao što su: pomanjkanje hrane i/ili vode, previsoka ili preniska temperatura i sl. Spore imaju bakterije, alge, neke gljive, praživotinje i neke necvijetajuće biljke poput paprati.)

*Napomena:* U nastavku rada koristit ću sljedeće oznake zbog lakšeg praćenja i ljepšeg zapisa:

$$k_0 = a, \quad \frac{k_0}{K} = b, \quad K = N_* = \frac{a}{b} (\text{nosivi kapacitet}), \quad k = a_* = \text{koeficijent (stopa) rasta}$$

Diferencijalna jednadžba za logistički rast s konstantnom imigracijom glasi

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 + s \quad (3.1)$$

pri čemu je  $s$  stopa imigracije izražena preko varijable  $N$  po jedinici  $t$ . Lako je zaključiti

da se radi o jednadžbi

$$\frac{dN}{dt} = a_*(N_* - N) + aN\left(1 - \frac{N}{N_*}\right)$$

koja opisuje linearnu kombinaciju logističkog i ograničenog eksponencijalnog rasta. Označimo li  $U = \frac{N}{N_*}$ ,  $T = at$ , i  $S = \frac{s}{aN_*}$  dimenzionarni oblik jednadžbe (3.1) glasi

$$\frac{dU}{dT} = U(1 - U) + S, \quad (3.2)$$

uz početne uvjete  $U(0) = U_0$ . Dobivamo sljedeća rješenja koristeći hiperbolni tangens umjesto eksponencijalne funkcije.

$$U = \frac{U_0 - (1 - 2U_0 - \lambda^2) \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1 - 2U_0}{\lambda}\right) \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)} \quad (3.3)$$

pri čemu je  $\lambda = \sqrt{1 + 4S}$ . Ako stavimo da je  $\frac{dU}{dT} = 0$  u jednadžbi (3.2) utvrdili smo da je vrijednost od  $U$  kada ona teži u beskonačno jednaka

$$U_\infty = \frac{1}{2}(1 + \lambda) \quad (3.4)$$

Druga derivacija jednadžbe (3.3) daje točku infleksije

$$T_i = \frac{2\phi}{\lambda}$$

$$U_i = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{dU}{dT}\right)_i = \frac{\lambda^2}{4}, \quad (3.5)$$

pri čemu

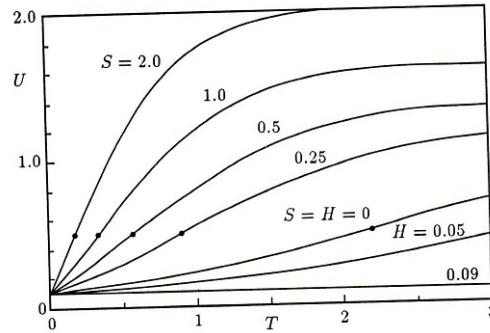
$$\phi = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1 - 2U_0}{\lambda}\right). \quad (3.6)$$

Zapišimo da je  $U_i = \frac{1}{2}$  bez obzira na vrijednost  $\lambda$ . Maksimalne točke zakrivljenosti dobivaju se iz treće derivacije jednadžbe (3.3).

$$T_c = \frac{2}{\lambda}\left(\phi \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad U_c = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right); \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_c = \frac{\lambda^2}{6}; \quad \left(\frac{d^2U}{dT^2}\right)_c = \frac{\lambda^3}{6\sqrt{3}} \quad (3.8)$$

Primjer s konkretnim brojevima prikazan je na sljedećoj slici. Vrijednost varijable  $S$  kreće se od  $S = 0$  do  $S = 2.0$ ; pri čemu je početna vrijednost jednaka  $U_0 = 0.1$ . Kao što smo mogli očekivati, vrijednosti od  $U$  povećavaju se s  $T$  za sve vrijednosti varijable  $S$ .



Slika 3.1: [1] Krivulje logističkog rasta s različitim stopama imigracije ( $S$ ) i malom stopom emigracije ( $H$ )

### 3.2 Logistički rast s konstantnom emigracijom

Umjesto logističkog rasta sa stalnim useljavanjem (imigracijom) sada promotrimo logistički rast s emigracijom (iseljavanjem). U ovom slučaju, diferencijalna jednačba glasi

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - h \quad (3.9)$$

pri čemu je  $h$  stopa iseljavanja. U terminima dimenzija ova jednačba glasi

$$\frac{dU}{dT} = U(1 - U) - H \quad (3.10)$$

pri čemu je  $H = \frac{h}{aN_*}$ . U ovom slučaju dobivamo isti odgovor kao u jednačbi (3.3)

$$U = \frac{U_0 - (1 - 2U_0 - \lambda^2) \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1 - 2U_0}{\lambda}\right) \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)} \quad (3.11)$$

pri čemu je sad  $\lambda = \sqrt{1 - 4H}$ .

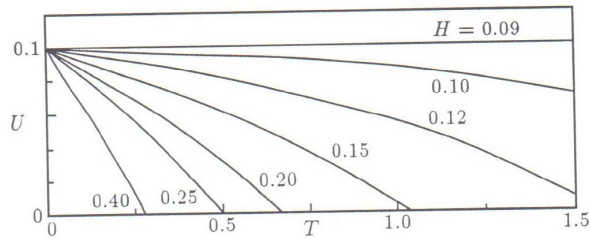
Predznak minus u ovoj definiciji čini fenomen emigracije nešto kompliciraniji, iako zanimljiviji od fenomena imigracije. Postoji nekoliko slučajeva koje treba razmotriti.

**Slučaj 1:**  $H < \frac{1}{4}$ 

Ako promatramo sliku (3.1), iako su u pitanju imigracije, u ovom slučaju kad je  $H < \frac{1}{4}$ , vrijednosti od  $U$  se ipak mogu povećavati s povećanjem vrijednosti  $T$  i time se približiti asimptotskoj vrijednosti  $U = \frac{1+\lambda}{2}$ , kao što je bio slučaj kod emigracija. Razlog za nastavak povećanja  $U$  jasan je ukoliko pogledamo jednadžbu (3.10). Vrijednost od  $\frac{dU}{dT}$  je pozitivna sve dok je učinak eksponencijalnog rasta (u oznaci  $U$ ) veći od kombiniranih učinaka gomilanja (oznaka  $U^2$ ) i emigracija (u oznaci  $H$ ). Jasno je, kada  $H$  dostigne određenu kritičnu vrijednost, veličina  $\frac{dU}{dT}$  postaje nula, a nakon toga, s povećanjem  $H$ , postaje negativna. Da bi bila specifičnija, nagib krivulje rasta za  $T = 0$  je

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_0 = U_0(1 - U_0) - H \quad (3.12)$$

Ako je  $H < U_0(1 - U_0)$ , onda je početni nagib nenegativan i ostaje tako s povećanjem  $T$ . Taj slučaj je opisan na slici (3.1) za  $H = 0.05$ . Ako je  $H = U_0(1 - U_0)$ , onda je nagib krivulje rasta jednak 0. Taj slučaj je opisan na slici (3.1) za  $H = 0.09$ . Ako je  $H > U_0(1 - U_0)$ , onda je početni nagib negativan i ostaje tako. Taj slučaj je opisan na slici (3.1) za  $H = 0.10$  do  $H = 0.40$ .



Slika 3.2: [1]Krivulje logističkog rasta s velikim stopama emigracije

U ova tri slučaja za koje je  $H < \frac{1}{4}$ , za računanje rasta koristimo jednadžbu (3.11). Kad je  $H > U_0(1 - U_0)$ , postoji vrijeme izumiranja u oznaci  $T_e$ , čija se vrijednost utvrđuje postavljanjem  $U = 0$ . To se određuje izjednačavanjem brojnika jednadžbe (3.11) na nulu. Rezultat je

$$T_e = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left( \frac{2U_0\lambda}{1 - 2U_0 - \lambda^2} \right). \quad (3.13)$$

**Slučaj 2:**  $H = \frac{1}{4}$ , Ako je bezdimenzionalna stopa emigracija  $H = \frac{1}{4}$ , diferencijalna jednačba (3.10) ima rješenje

$$U = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1 - 2U_0}{1 - (1 - 2U_0) \cdot \frac{T}{2}} \right] \quad (3.14)$$

U ovom slučaju vrijeme izumiranja je jednostavno

$$T_e = \frac{4U_0}{1 - 2U_0} \quad (3.15)$$

Krivulja za  $H = 0.25$  na slici (3.1) odgovara ovoj posebnoj situaciji. **Slučaj 3:**  $H > \frac{1}{4}$  U ovom slučaju

$$U = \frac{U_0 - \left( \frac{1-2U_0-\mu^2}{2\mu} \right) \tan\left(\frac{\mu T}{2}\right)}{1 - \left( \frac{1-2U_0}{\mu} \right) \tan\left(\frac{\mu T}{2}\right)} \quad (3.16)$$

pri čemu je  $\mu = \sqrt{4H - 1}$ . Uočimo, umjesto da ponovo rješavamo diferencijalnu jednačbu, jednačbu (3.16) možemo dobiti izravno iz jednačbe (3.11). Imajući na umu da je  $\lambda^2 = -\mu^2$ , u jednačbu (3.11) uvrštavamo  $\lambda = i\mu$  (pri čemu je  $i = \sqrt{-1}$ ). Uzimajući u obzir pravila za pretvaranje hiperboličke funkcije s imaginarnim argumentom u trigonometrijsku funkciju s realnim argumentom dobivamo jednačbu (3.16). U tom smislu, imamo odnos  $\tanh(iz) = i \tan(z)$ . Vrijeme izumiranja  $T_e$  kad je  $H > \frac{1}{4}$  je

$$T_e = \frac{2}{\mu} \operatorname{arctanh} \left( \frac{2U_0\mu}{1 - 2U_0 + \mu^2} \right) \quad (3.17)$$

Taj slučaj je ilustriran krivuljom na slici (3.2) pri čemu je  $H = 0.40$ .

### 3.3 Logistički rast s promjenjivom emigracijom

U prethodnom poglavlju utvrdili smo stopu useljavanja  $h$ . Sada možemo poopćiti jednačbu (3.9) zapisujući je na sljedeći način:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - h(N) \quad (3.18)$$

U ovom slučaju bi vrijednost  $h(N)$  ovisila o trenutnoj vrijednosti  $N$ . Funkcija  $h(N)$  može biti u bilo kojem obliku. Pretpostavimo da je u obliku

$$h(N) = h_0 + h_1N + h_2N^2 \quad (3.19)$$



U tom slučaju jednažba (3.18) postaje

$$\frac{dN}{dt} = (a - h_1)N - (b + h_2)N^2 - h_0. \quad (3.20)$$

Označimo li s  $T = (a - h_1)t$ ,  $N_* = \frac{a-h_1}{b+h_2}$ ,  $H = \frac{h_0}{a-h_1}N_*$ ,  $U = \frac{N}{N_*}$  jednažbu (3.20) svest ćemo na jednažbu (3.10). Slijedom toga, rješenje izrazito komplicirane parabolične funkcije emigracije (3.19) dano je jednažbom (3.11) ili (3.16) s naznačenom modifikacijom u definicijama koeficijenta rasta, koeficijenta „pražnjenja“ (crowding coefficient) i nosivog kapaciteta.

Parabolična funkcija emigracije (3.19) dopušta stalnu brzinu ( $h_1 = h_2 = 0$ ), linearnu brzinu emigracije ( $h_2 = 0$ ) ili paraboličnu brzinu emigracije bez ikakvih dodatnih matematičkih komplikacija.

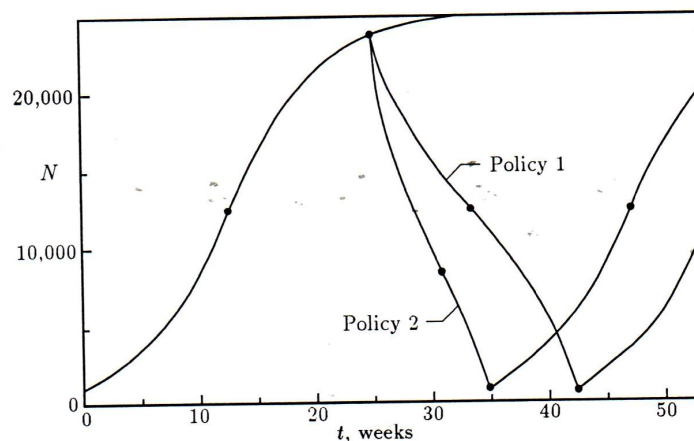
# Poglavlje 4

## Primjeri migracija

### 1. Emigriranje (iseljavanje) riba

Kao ilustraciju prethodno navedene analize, pretpostavimo da imamo vrlo velik ribnjak koji namjeravamo koristiti za uzgoj riba i emigriranje (iseljavanje). Utvrđujemo da koeficijent rasta riba iznosi  $a = 0.25/tjedno$ , a nosivost ribnjaka je  $N_* = 25000$ . Koeficijent „pražnjenja“ (eng. crowding coefficient) je  $b = \frac{a}{N_*} = 0.000010/tjedno$ . Ribnjak je u početku opskrbljen s  $N_0 = 1000$  riba. Za  $t = 0$  započinje obični logistički rast kao što je prikazan niže na slici.

Točka infleksije javlja se u  $t_i = \frac{1}{a} \log_e \left[ \frac{N_*}{N} - 1 \right] = 12.71$  tjednima, a  $N_i = \frac{N_*}{2} = 12500$ .



Slika 4.1: [1] Obični logistički rast nakon čega slijedi konstantno iseljavanje (Graf 1) i parabolno iseljavanje (Graf 2)

Proučavamo sljedeće grafove emigracija.

**Graf 1:** Kada naš  $N$  dostigne vrijednost od  $N = 0.95N_* = 23750$  riba, koje se pojavljuju nakon  $t_0 = 25,50$  tjedana, započinjemo s neprekidnim iseljavanjem od 2500 riba tjedno dok ne dođemo do  $N = 1000$ . U to vrijeme prestaje iseljavanje i obični logistički rast ponovno nastavlja za drugi ciklus uzgoja. Prema tome, imamo sljedeće podatke za računanje iseljavanja (emigriranja):

$$h_0 = 2500; \quad a = 0.25; \quad = 1.0 \cdot 10^{-5};$$

$$t_0 = 24.50; \quad N_0 = 23750; \quad N_* = 25000$$

Budući da je  $H = 0.40$  koristimo jednadžbu (3.16) za izračunavanje krivulje označene kao Graf 1 na slici (4.1).

Iz jednadžbe (3.17) vrijeme izumiranja je  $t_e = 42.79$  tjedana što je izmjereno od izvornog početka. Iseljavanje riba prestaje kada je  $N = 1000$  za  $t = 42,37$  tjedana nakon vremena iseljavanja od 17,87 tjedana. Ukupan broj iseljenih riba je  $M = 17,872500 = 44675$  prema ovom grafu (slika (4.1)).

**Graf 2:** Kao na grafu 1, kada je  $N = 0.95N_* = 23750$  za  $t_0 = 24.50$  tjedna započinje emigriranje (iseljavanje). Međutim, prema grafu 2 koristimo paraboličnu brzinu iseljavanja opisanu jednadžbom (3.19). Upotrebljavaju se sljedeće brojčane vrijednosti

$$h_0 = 2500; \quad h_1 = 0.050; \quad h_2 = 2.0 \cdot 10^{-6};$$

$$t_0 = 24.50; \quad N_0 = 23750; \quad a' = a - h_1 = 0.20;$$

$$b' = b + h_2 = 1.2 \cdot 10^5; \quad N_*' = \frac{a - h_1}{b + h_2} = 16667.$$

Ponovo koristimo jednadžbu (3.16) za izračunavanje krivulje što je prikazano kao graf 2 na slici (4.1). Vrijeme izumiranja nastupa nakon  $t_e = 35.33$  tjedna. Kao i prije, emigriranje (iseljavanje) riba prestaje kada je  $N = 1000$  što će se desiti za  $t = 34,92$ . Nije teško pokazati, koristeći jednadžbu (3.19), da je prosječna stopa iseljavanja u ovom slučaju  $h_m = 3510$  riba u tjednu. Sukladno tome, prema grafu 2, ukupan broj iseljenih riba tijekom ciklusa je  $M = 10.42 \cdot 3510 = 36575$ . Ovo se uspoređuje s  $M = 44675$  iz prethodnog primjera.

Međutim, s obzirom na trajanje ukupnog ciklusa, uključujući uzgoj i iseljavanje, prosječna tjedna proizvodnja prema grafu 1 je  $m = \frac{44674}{42.37} = 1054$ . Prema grafu 2 ona iznosi  $m = \frac{36575}{34.92} = 1047$ . Napominjemo da je, u ovom slučaju, prosječni tjedni prinos otprilike jednak kao u oba slučaju koja su opisana grafovima 1 i 2. Ostali numerički rezultati dobit će se korištenjem drugih vrijednosti u jednadžbi (3.19). Ovaj primjer služi kao uvod u mnoge vrste pitanja koja uključuju ekonomiju, a koja su povezana sa uzgojem i emigracijom (iseljavanjem) riba. Ove probleme u „bioekonomiji” ispitivali su Clark (1976, 1981), Conrad (1986), te Conrad i Clark (1987).

## 2. Emigriranje (iseljavanje) ždralova

Sada razmotrimo problem koji nije bitno različit od primjera iseljavanja (emigriranja) riba, a tiče se, prema Milleru i Botkinu (1974.), ugrožene vrste ždralova. Ovi istraživači ukazuju da je razina ravnoteže ili nosivost ždralova u SAD-u oko 194600. Oni također pokazuju da je koeficijent rasta ove vrste oko 0,087 godišnje. Počevši od početne vrijednosti  $N_0 = N_* = 194600$ , Miller i Botkin izračunavaju u kojoj mjeri bi se lovom ukupna populacija ždralova smanjila kao rezultat različitih stopa emigriranja. Oni koriste vrijednosti od  $h$  u rasponu od 2000 do 12000 ždralova dobivenih godišnje kroz emigracije.

**Slučaj 1:**  $H < \frac{1}{4}$  Sjetimo se da je  $H = \frac{h}{aN_*}$ . U ovom sad problemu pri čemu je  $N_0 = N_*$  imamo da je  $U_0 = 1$ . Prema tome jednadžbu (3.11) skraćeno zapisujemo

$$U = \frac{1 + \left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\right) \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)}{1 + \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\frac{\lambda T}{2}\right)} \quad (4.1)$$

pri čemu je  $\lambda = \sqrt{1 - 4H}$ . Iz ove jednadžbe dobijemo

$$U_\infty = \frac{1}{2}(1 + \lambda) \quad (4.2)$$

kada  $T$  teži k nuli. U ovom slučaju, populacija ždralova svodi se na novu i nižu ravnotežnu vrijednost, ali ptice nastavljaju preživljavati.

**Slučaj 2:**  $H = \frac{1}{4}$  Za ovaj specijalan slučaj, uzimajući  $U_0 = 1$ , jednadžba (3.14) jednaka je

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{4 + T}{2 + T} \right) \quad (4.3)$$

pri čemu je

$$U_\infty = \frac{1}{2}$$

kada  $T \rightarrow \infty$ .

**Slučaj 3:**  $H < \frac{1}{4}$  Za ovaj zadnji slučaj kad je  $U_0 = 1$ , jednadžba (3.16) postaje jednaka jednadžbi

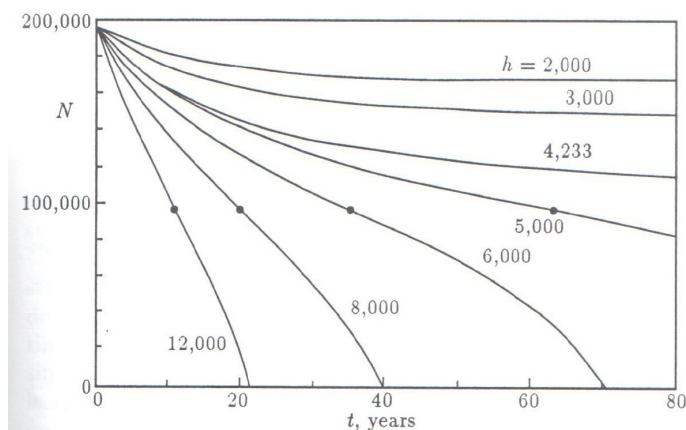
$$U = \frac{1 - \left(\frac{1-\mu^2}{2\mu}\right) \tan\left(\frac{\mu T}{2}\right)}{1 + \frac{1}{\mu} \tan\left(\frac{\mu T}{2}\right)} \quad (4.4)$$

U tom rasponu po  $H$  pojavljuje se točka infleksije

$$T_i = \frac{2}{\mu} \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right); U_i = \frac{1}{2}; \left(\frac{dU}{dT}\right) = -\frac{\mu}{4}. \quad (4.5)$$

Ono što je najvažnije, postoji vrijeme izumiranja. Iz jednadžbe (3.17) dobivamo

$$T_e = \frac{2}{\mu} \arctan\left(\frac{2\mu}{\mu^2 - 1}\right) \quad (4.6)$$



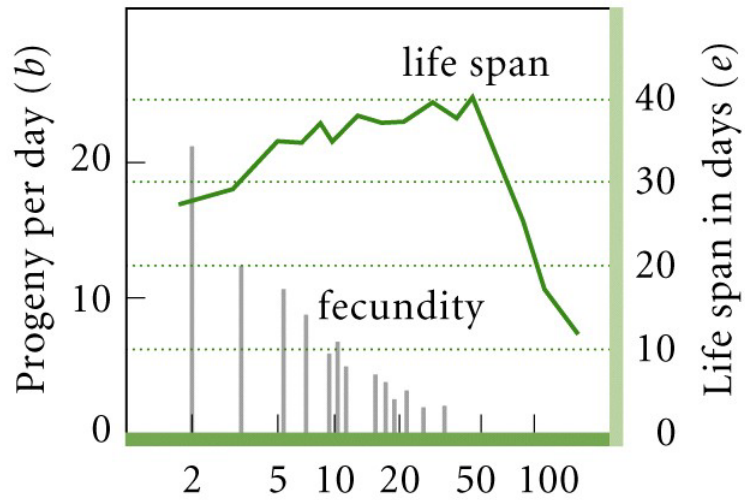
Slika 4.2: [1] Smanjenje broja ždralova zbog emigracije lovom (Miller i Botkin, 1974.)

Koristeći gore prikazane jednadžbe, nacrtane su krivulje prikazane na slici (4.2). Krivulja označena s  $h = 4233$  odgovara vrijednosti  $H = \frac{1}{4}$ . Ove krivulje, gotovo identične onima od Millera i Botkina, pokazuju populaciju ždralova za različite stope emigriranja. Na slici je također prikazano, da bi trajna godišnja količina emigracije od 12000 smanjila populaciju ždralova na polovicu njezine početne vrijednosti od 194600 u 10,8 godina, a izumiranje ždralova bi nastupilo nakon 21,6 godina.

### Još primjera

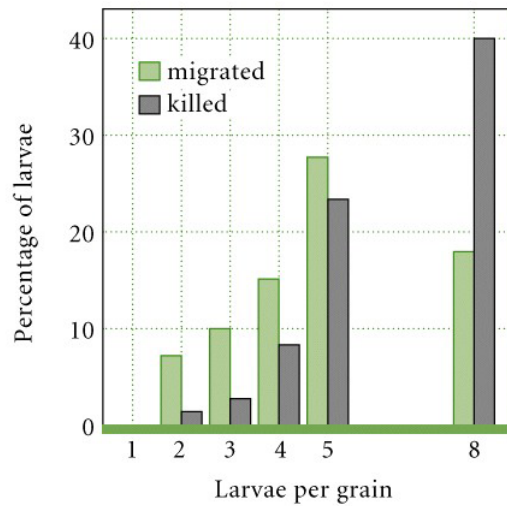
Kao što smo na početku rekli, logistički model rasta temelji se na ideji da je stopa rasta populacija ovisna o njihovoj gustoći. U nastavku pogledajmo nekoliko primjera gdje je stopa rasta ovisila upravo o gustoći populacije.

1. Eksperimenti koje je proveo Pearl (1927) na vinskoj mušici bili su prvi eksperimentalni radovi koji su pokazali kako gustoća populacije djeluje na stope fekunditeta i mortaliteta.



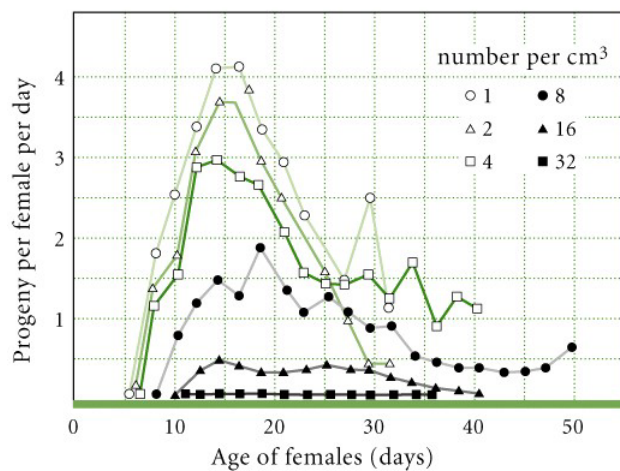
Slika 4.3: [7] Vinska mušica

- Crombie (1944) je pokazao da je udio ličinki žitnog moljca koji je bio ubijen ili koji je napustio zrno pšenice bio to veći što je gustoća ličinaka na zrnu bila veća.

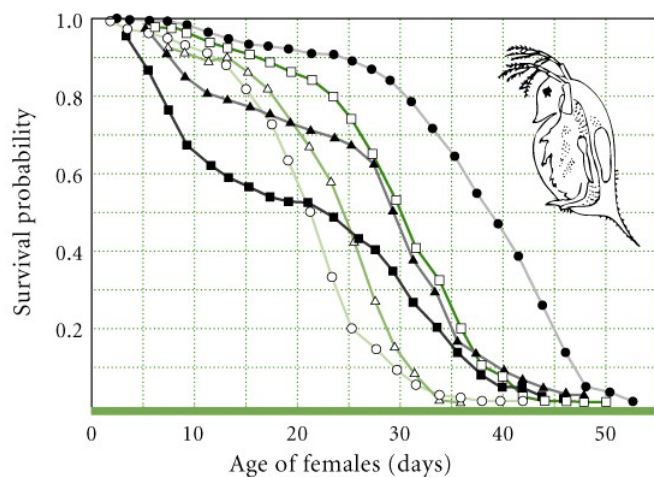


Slika 4.4: [7] Ličinke žitnog moljca

- Fekunditet ženki vodene buhe *Daphnia pulex* opada s njihovom gustoćom dok se mortalitet s gustoćom povećava.



Slika 4.5: [7] Ženke vodene buhe

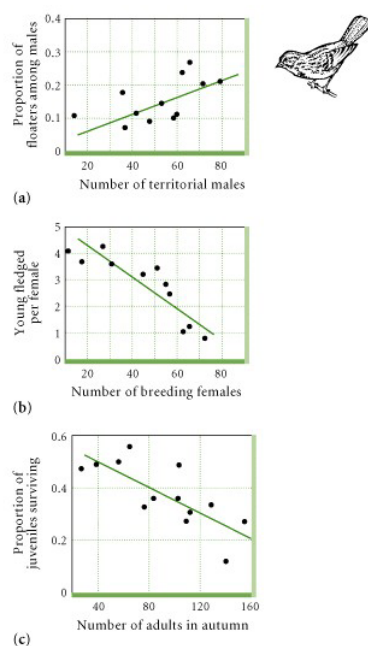


Slika 4.6: [7] Ženke vodene buhe

- Porastom broja mužjaka vrabaca spremnih za parenje u populaciji u Britanskoj Kolumbiji povećao se broj teritorijalnih mužjaka dok se broj izleglih ptica smanjio kao i njihovo preživljavanje.

	postotak trudnica	zametci po ženi	"Corpora lutea" po jajniku
1939. - 1943. (prije lova)	57	0.7	0.60
1947. (poslije lova)	100	1.78	1.86

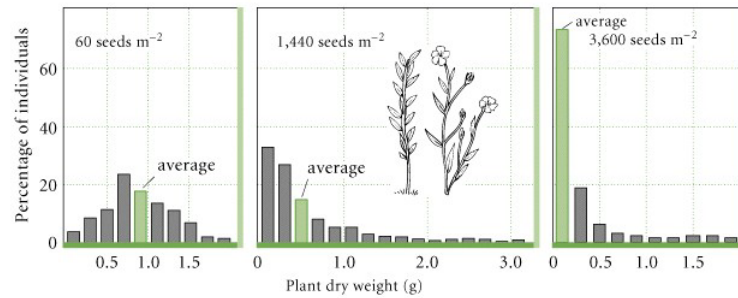
Tablica 4.1: [7] Reproductivni parametri bijelorepog jelena *odocoileus virginianus* u planinskom području New Yorka prije i poslije lova



Slika 4.7: [7] Mužjaci vrabaca

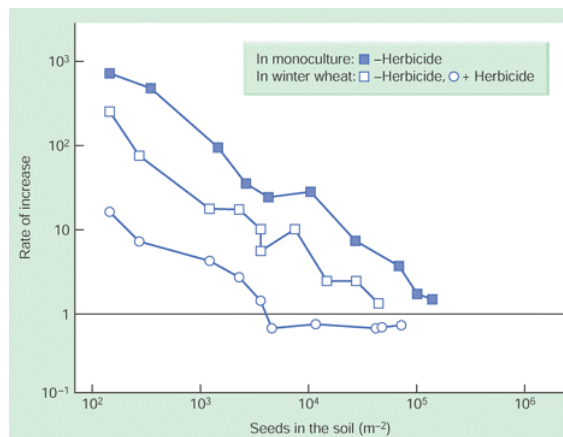
5. Nakon razdoblja intezivnog lova na bijelorepog jelena, stopa fekunditeta je u populaciji dramatično porasla.
6. Prosječna težina jedinki u populaciji lana opadala je s gustoćom populacije.





Slika 4.8: [7] Lan

7. Stopa rasta biljaka bila je obrnuto proporcionalna s gustoćom posijanih sjemenki.



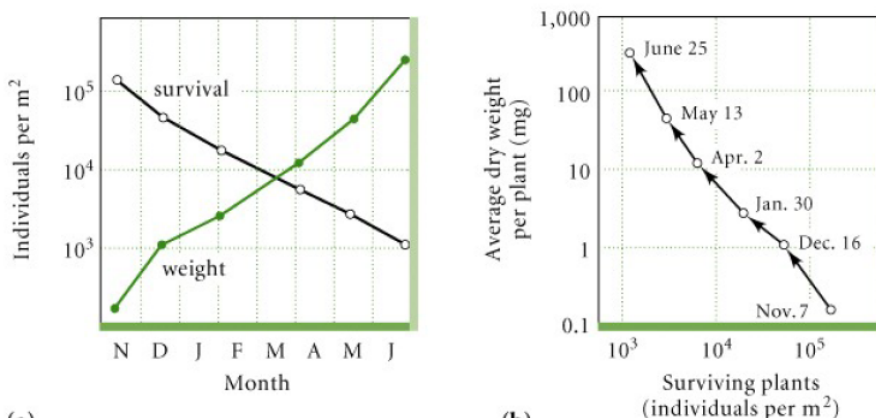
Slika 4.9: [7]Rast biljaka

8. Utjecaj gustoće sijanja na reprodukciju i rast trputca (*Plantago major*) možemo vidjeti na sljedećoj tablici te uočiti da se povećanjem gustoće sijanja smanjuje klijanje, ali povećava smrtnost što je upravo ono što logistički model opisuje. Prirodno je očekivati da će se suha težina po loncu povećavati s gustoćom sijanja. No, zanimljivo je kako drastično opada broj sjemenki po biljci što je gustoća sijanja veća, a isto tako opada i broj sjemenki po loncu.

PARAMETAR	Gustoća sisanja				
	1	5	50	100	200
Klijanje (%)	100	100	93	91	90
Smrtnost (%)	0	7	6	10	24
Suha težina po loncu (g)	8.05	11.09	13.06	13.74	12.57
Broj sjemenki po biljci	11980	2733	228	126	65
Broj sjemenki po loncu	11980	12760	8208	6552	4420

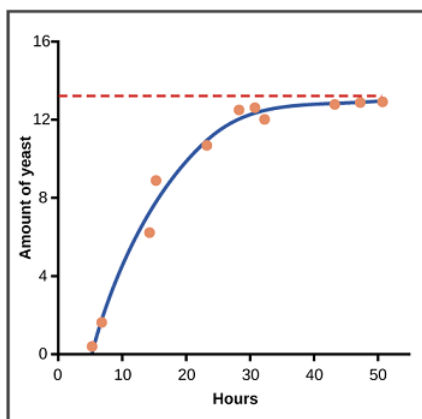
Tablica 4.2: [7] Rast trupca

9. Nakon gustog sisanja hudoljetnice (*Erigeron*) broj preživjelih biljaka s vremenom opada, prosječna biomasa preživjelih biljaka se povećava, te kao rezultat raste i ukupna biomasa populacije.



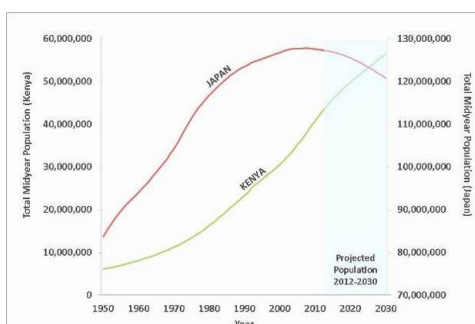
Slika 4.10: [7]Hudoljetnice

10. Kvasac, mikroskopska gljivica koja se koristi za izradu kruha i alkoholnih pića, može proizvesti klasičnu krivulju S-a kada se uzgaja u epruветama. Na grafikonu prikazanom u nastavku, razina kvasca raste kada stanovništvo dosegne granicu dostupnih hranjivih tvari.



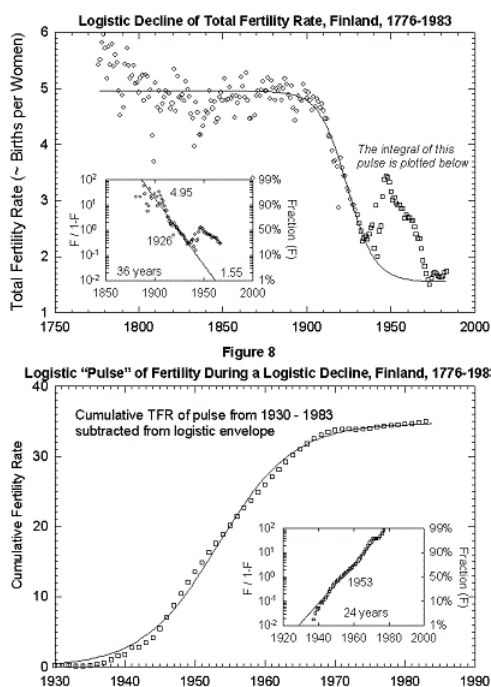
Slika 4.11: [7] Kvasac

11. Na temelju podataka iz Međunarodne baze podataka Američkog popisa stanovništva, ovaj graf pokazuje rast ljudskog stanovništva u Keniji i Japanu od 1950. do 2025. godine. Ljudska populacija u Keniji raste eksponencijalno, ali ljudska populacija u Japanu usporila je, a možda čak i pada.



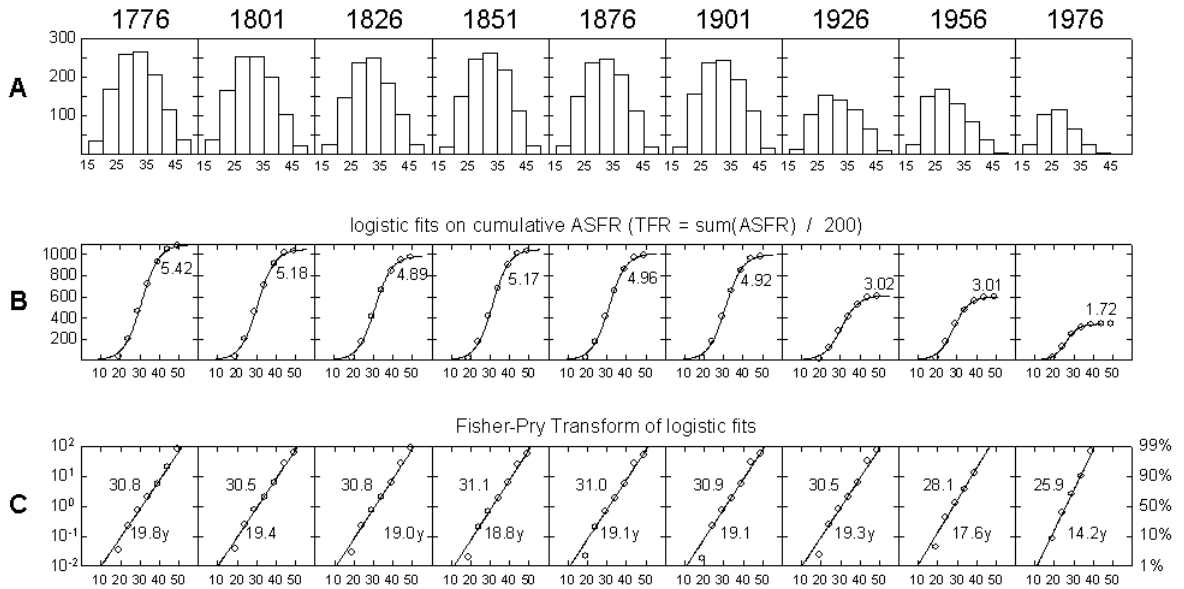
Slika 4.12: [11] Rast stanovništva u Keniji i Japanu od 1950. do 2025.

12. Na sljedećem grafu možemo vidjeti logistički pad ukupne stope plodnosti u Finskoj (prva slika), od 1776. do 1983. Graf opisuje pad od stabilne vrijednosti 1776. od 4,95 rođenih po ženi do trenutne vrijednosti od 1,55 rođenih po ženi u 1983. Ova slika prikazuje i rast plodnosti (dio podataka koji se ucrtava kvadratima umjesto krugova). Na drugoj slici vidimo logistički rast plodnosti tijekom logističkog pada od 1930. do 1983. Teoretska logistička krivulja odbijena je iz ovog "zvonolikog" dijela podataka, a kumulativni zbroj je zatim ucrtan i prilagođen logističkoj krivulji kako bi se prikazao oblik "babyboom" procesa.



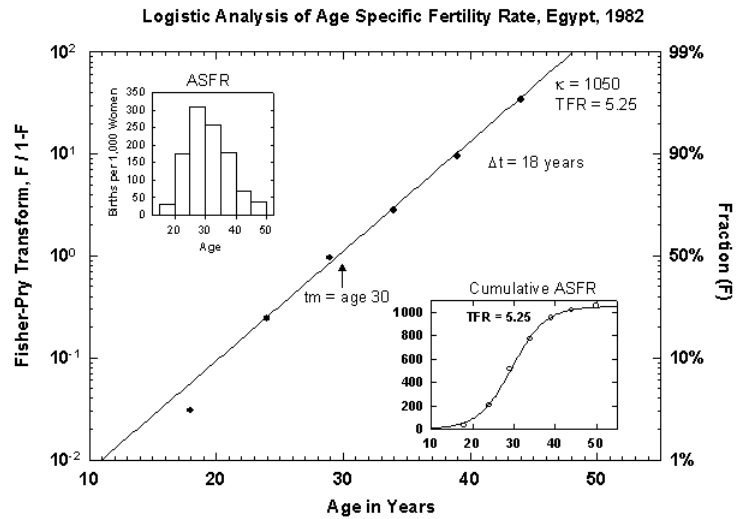
Slika 4.13: [12] Logistički pad ukupne stope plodnosti, Finska, 1776.-1983. (prva slika)  
 Logistički puls plodnosti tijekom logističkog pada od 1930. do 1983. (druga slika)

13. Na sljedećoj slici vidjet ćemo malo detaljniju analizu stope plodnosti prema dobi u Finskoj od 1776. do 1976.. U prvom redu podaci su prikazani histogramima na kojima možemo uočiti da je plodnost na vrhuncu između 25. i 35. godine, no od 1926. nadalje taj se trend smanjuje.



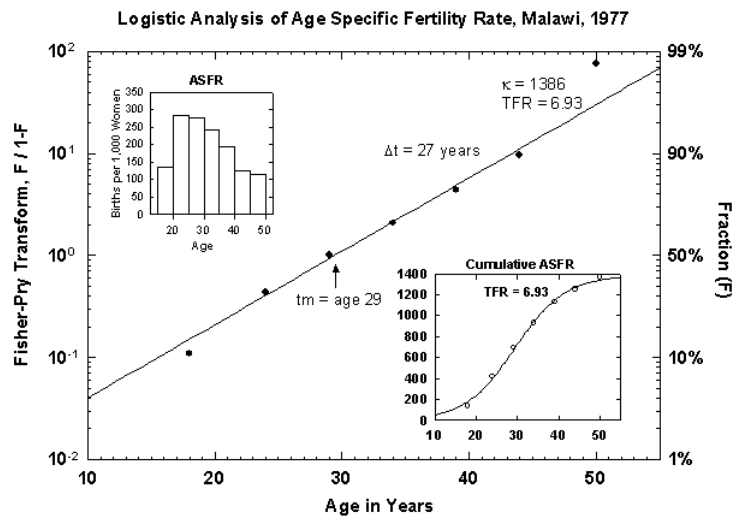
Slika 4.14: [12] Logistička analiza stope plodnosti prema dobi, Finska, 1776.-1976. (A) histogrami stope plodnosti određene dobi u intervalima od 25 godina. (B) Integralni (kumulativni zbroj) zvonolikih podataka histograma, što rezultira krivuljom u obliku slova S. Kumulativni zbroj ASFR-a podijeljen s 200 jednak je ukupnoj stopi plodnosti (TFR). (C) Fisher-Pry transformira odgovarajuću logističku krivulju u linearni pravac.

- Na sličan način analizirana je stopa plodnosti u Egiptu 1982. godine te se može uočiti nagli porast broja porodilja između 20. i 40. godine, a nakon toga stopa plodnosti opada.



Slika 4.15: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Egipat, 1982.

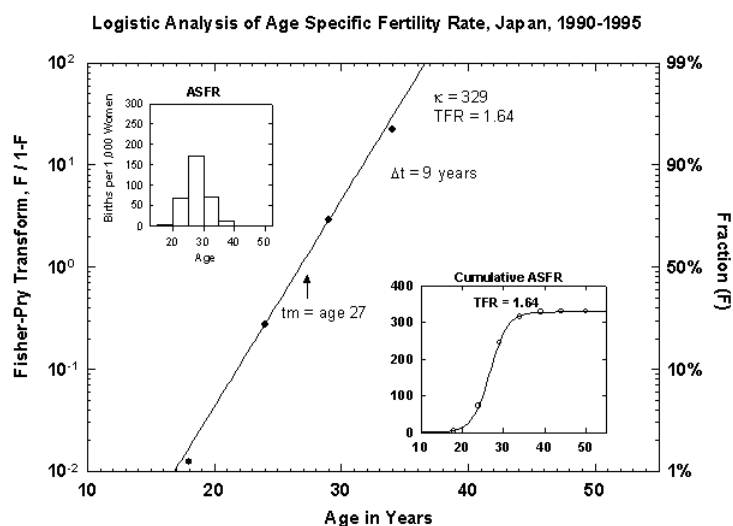
15. Opet na analogan način imamo analizu stope plodnosti 1977. u Malawiju. Visoka stopa plodnosti vidljiva je u periodu između 20. i 40. godine života žena.



Slika 4.16: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Malawi, 1977.

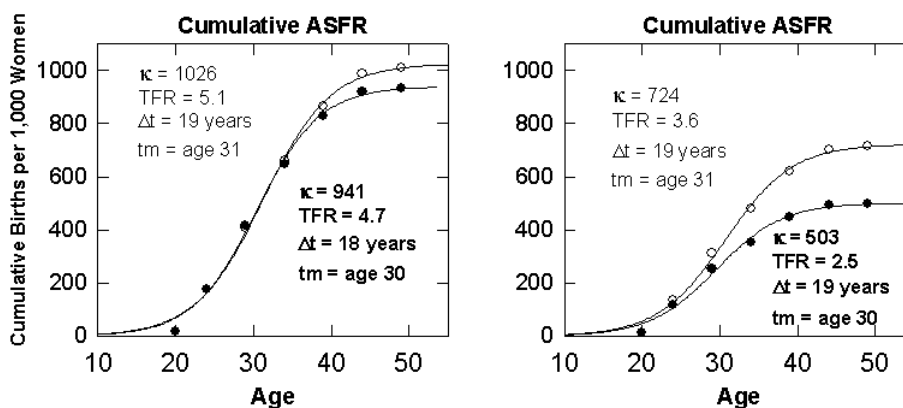
16. Sljedeći primjer nam prikazuje logistički rast stope plodnosti u Japanu, 1990.-1995..

U ovom primjeru možemo vidjeti dosta nisku stopu plodnosti u Japanu u odnosu na prethodne primjere. Najveća stopa plodnosti zabilježena je između 25. i 30. godine, a nakon toga stopa naglo pada.



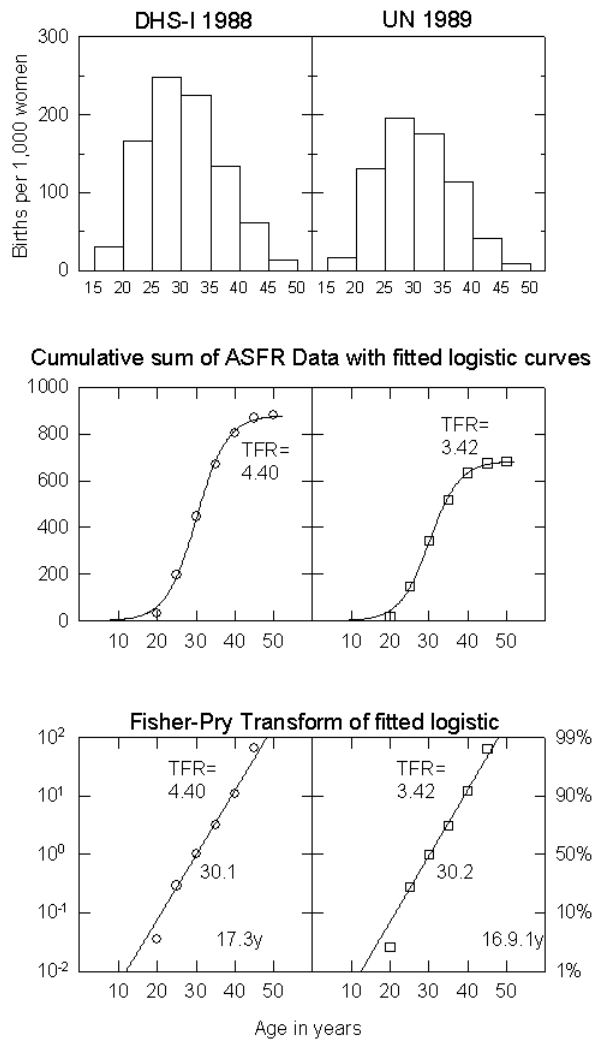
Slika 4.17: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Japan, 1990.-1995.

17. Logistička analiza specifične dobne plodnosti u Finskoj, 1891.(lijevo) i 1921.(desno). Može se uočiti znatni pad stop plodnosti 1921..



Slika 4.18: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Finska, 1891. i 1921.

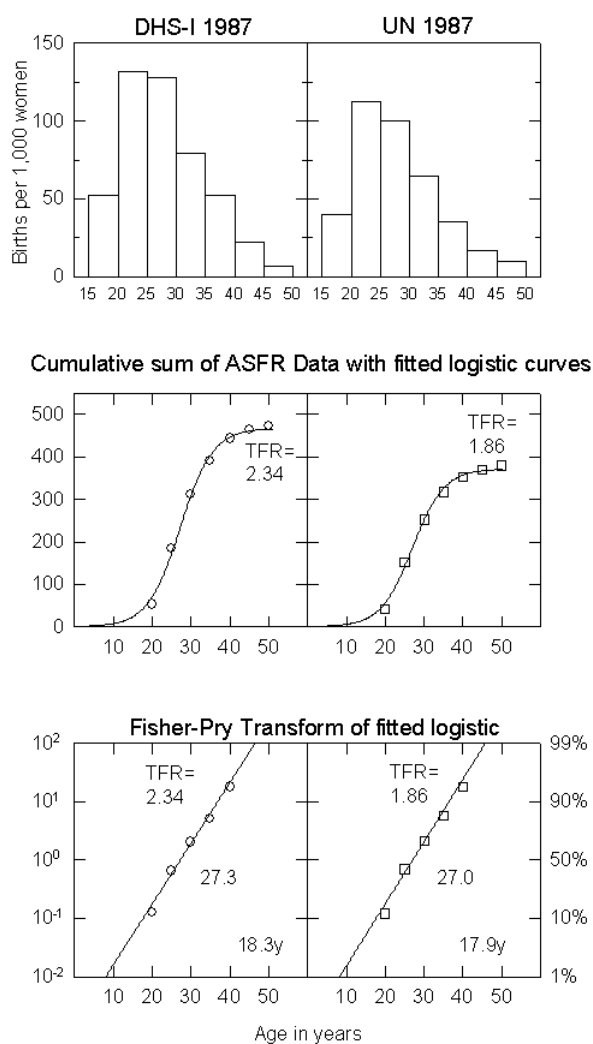
18. Na sljedećem primjeru imamo usporedbu dobnu specifičnih podataka o stopi fertiliteta u Tajlandu (1988.). Lijevo su prikazani podaci iz demografskih i zdravstvenih istraživanja (DHS), dok su desno korišteni UN podaci prijavljeni za istu godinu.



Slika 4.19: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Tajland, 1988.

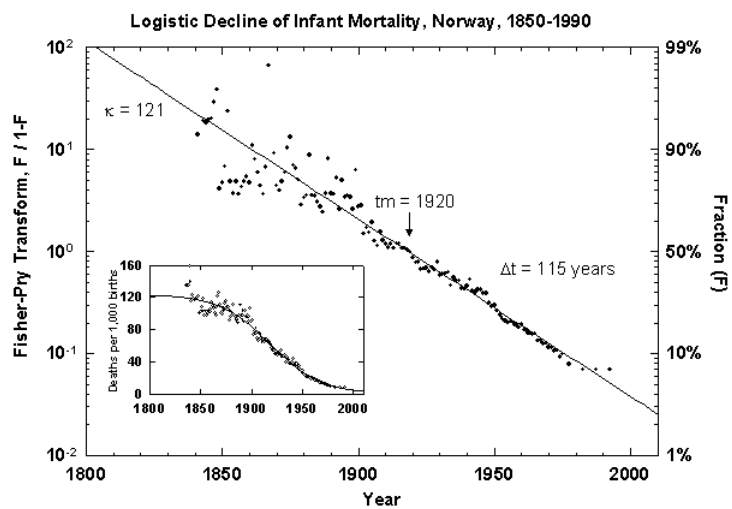
19. Još jedan primjer usporedbe dobnu specifičnih podataka o stopi fertiliteta u Tunisu (1987.). Lijevo su prikazani podaci iz demografskih i zdravstvenih istraživanja (DHS), dok su desno korišteni UN podaci prijavljeni za istu godinu.





Slika 4.20: [12] Logistički rast stope fertiliteta, Tunis, 1987.

20. Logistički pad mortaliteta dojenčadi u Norveškoj između 1850. i 1990. prikazan je na sljedećem grafu. Pad od 121 smrtnih slučajeva na 1000 rođenih dojenčadi na 10 dojenčadi dramatično je i redovito. Logistika je bila prikladna ako pretpostavlja konačni cilj nulte smrti, gdje bi teorijska granica mogla iznositi oko 3 do 4, ovisno o napredovanju medicinske tehnologije i postupcima probira.



Slika 4.21: [12] Logistički pad mortaliteta dojenčadi, Norveška, 1850-1990.

# Bibliografija

- [1] R. B. Banks, *Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications*, Springer-Verlang, 1994.
- [2] R. M. H. Doust, M. Saraj, *The logistic modeling population; having harvesting factor*, Yugoslav Journal of Operations Research 25, Number 1, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Neyshabur University, Neyshabur (Iran), 2013.
- [3] S. Harris, *Diffusive logistic population growth with immigration*, College of Engineering and Applied Sciences and Marine Sciences Resarch Center, SUNY, Stony Brook, NY 11794, United States, 2003.
- [4] A. Okubo, *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [5] I. Oremuš, *Osnovni modeli rasta*, diplomski rad, Zagreb, 2016.  
<http://digre.pmf.unizg.hr/4992/1/OSNOVNI>
- [6] Z. Šikić, *Eksponecijalni i logistički rast*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 13, 2003., 14-31
- [7] M. Šolić, *Osnove ekologije: Ekologija populacija*, prezentacija, Rujan, 2003.  
<http://jadran.izor.hr/hr/nastava/solic/EKOLOGIJA/PREDAVANJA>
- [8] Š. Šuljić, *Matematika šola: Logistička funkcija*, Časopis za nastavu matematike, broj 17, Pazin, 2002/2003., 77-82  
<https://mis.element.hr/fajli/308/17-08.pdf>
- [9] V. Vukadinović, I. Jug, B. Đurđević *Ekofiziologija bilja*, Osijek, 2014.
- [10] <https://www.khanacademy.org/science/biology/ecology>
- [11] <https://www.nature.com/scitable/knowledge>

[12] <https://phe.rockefeller.edu/poppies/>

[13] <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/3990>

# Sažetak

Logistička funkcija opisana je formulom

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-kt}}$$

te je za njen logistički model značajno da stopa rasta opada. Glavninu ovog rada predstavlja logistički rast u migracijama, tj. logistički rast s konstantnom emigracijom ili imigracijom. Diferencijalna jednačina za logistički rast s konstantnom imigracijom glasi

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 + s,$$

pri čemu je  $s$  stopa useljavanja, dok logistički rast s konstantnom emigracijom zapisujemo

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - h$$

pri čemu je  $h$  stopa iseljavanja. Kroz različite primjere i grafove uočavamo logistički rast.

# Summary

The logistic function is described by the formula

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-k_0 t}}$$

and for its logistic model it is significant that the rate of growth declines. The main goal of this work is to present logistic growth in migration - logistics growth with constant emigration or immigration. The differential equation for logistic growth with constant immigration is

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 + s,$$

where  $s$  is the immigration rate, while logistical growth with constant emigration we write

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - h$$

where  $h$  is the harvesting rate. Through various examples and graphs, we see a logistic growth.

# Životopis

Rođena sam 17.05.1991. u Ljubljani. Osnovnu školu završavam odličnim uspjehom u malom gradiću Moravče u Sloveniji. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja aktivno sam se bavila sportom, odbojkom i rukometom, sudjelovana na natjecanjima iz matematike, slovenskog jezika, povijesti i geografije, a isto tako sam bila odlična pijanistica. Glazbenu školu sam pohađala 5 godina. Nakon osnovne škole želja mi je bila upisati medresu (srednju teološku školu), a najbliža medresa bila je u Zagrebu, stoga svoje srednješkolsko obrazovanje i život provodim u sklopu Islamskog centra u Zagrebu. Odlazak od kuće bio je veliki izazov, ali i velika škola koja mi je pomogla da se osamostalim. Na Europskom natjecanju u učenju Kur'ana na arapskom jeziku osvajam 2.mjesto. Srednju školu završavam kao najbolja učenica generacije te stječem zvanje vjeroučiteljice. Tijekom osnovne i srednje škole matematika mi je bila omiljeni predmet, stoga nije bilo teško odlučiti se studirati upravo matematiku (inžinjerski smjer). Nakon tri godine studiranja stupam u bračnu vezu, a tijekom diplomskog studija na matematici (nastavnički smjer) postajem i majka dvojice dječaka. Kroz cijelo svoje obrazovanje voljela sam podučavati i pomoći drugima, stoga sam se nakon inžinjerskog smjera lako odlučila za nastavnički smjer. Uz sve obiteljske obveze i obveze vezane za studij, volim boraviti u prirodi, volim putovanja i upoznavanje novih ljudi i kultura. Uz maternji bosanski jezik, tečno govorim hrvatski i slovenski.