# Fraktalne dimenzije

**Havić, Lea**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lea Havić

# FRAKTALNE DIMENZIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj


**Sadržaj** **iv**

**1 Uvod** **1**

**2 Topološka dimenzija** **7**
2.1 Definicija topološke dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2.2 Primjeri računanja topološke dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**3 Fraktalne dimenzije** **13**
3.1 Hausdorffova dimenzija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
3.1.1 Hausdorffova mjera . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
3.1.2 Svojstva Hausdorffove mjere . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3.1.3 Definicija Hausdorffove dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
3.1.4 Svojstva Hausdorffove dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
3.2 Box dimenzija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
3.2.1 Definicije box dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
3.2.2 Svojstva box dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
3.3 Usporedba Hausdorffove i box dimenzije . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

**4 Primjeri** **41**

**Bibliografija** **57**

# Poglavlje 1

# Uvod

Pojam fraktala najbolje je objasniti na primjeru iz prirode. Ako promotrimo biljku paprati na Slici 1.1 možemo uočiti da se glavna stabljika račva u manje stabljike simetrično s lijeve i desne strane. Svaka od tih stabljika opet se račva u manje stabljike na isti način i tako

Slika 1.1: List paprati

dalje. Kad bismo promatrali neku od manjih stabljika, mogli bismo uočiti istu strukturu kakvu ima glavna stabljika. To svojstvo slične strukture na svim razinama promatranja objekta nakon skaliranja naziva se *samosličnost* (svojstvo da cjelina ima isti oblik kao jedan ili više dijelova) i jedno je od glavnih svojstava fraktala. Slično možemo uočiti i ako promatramo stablo i način na koji se grane račvaju, pahuljicu snijega, satelitsku snimku razvedene obale i slično.
Definicija fraktalnih skupova nije jedinstvena i razni autori navode različite i ne potpuno precizne definicije. Riječ ”fraktal” prvi je upotrijebio Mandelbrot [5]. Dolazi od latinske riječi *fractus* što znači slomljen. Falconer [1] navodi da konkretna defincija fraktalnih skupova ne postoji, ali navodi svojstva koja možemo uočiti kod većine fraktalnih skupova. Svaki fraktal vrijedan proučavanja ima detalje na svim razinama, dakle, koliko god

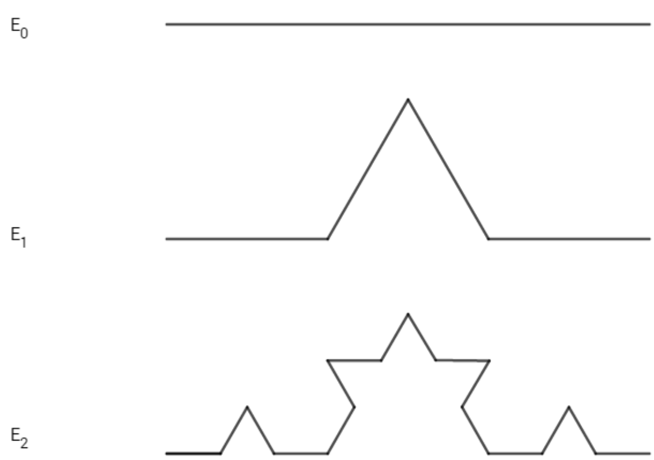
uvećavamo neki dio tog skupa, uvijek će se pojavljivati novi detalji. Također navodi i da je većina fraktala barem donekle samoslična, s tim da ta sličnost ne mora biti strogo geometrijska sličnost nego može biti približna ili statistička sličnost. Kao još svojstava navodi iregularnost takvih skupova, to jest nemogućnost opisivanja takvih skupova pomoću elemenata klasične geometrije niti lokalno niti globalno. Fraktalni skupovi većinom su definirani vrlo jednostavno, često rekurzivno. Slično, Pesin i Climenhaga [7] opisuju fraktalne skupove kao one koji imaju neku vrstu samosličnosti i geometrijski su komplicirani, točnije, ne mogu se usporediti niti opisati pomoću klasičnih geometriskih objekata kao što su dužine, krugovi, mnogokuti i slično. Jednostavni geometrijski objekti kao trokuti, kvadrati, krugovi i tako dalje, kao rub imaju glatke krivulje, ili barem po dijelovima glatke. Tako njihov rub možemo opisati parametarski s $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, gdje su $x$ i $y$ po dijelovima diferencijabilne funkcije sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, pa vektor tangente $\vec{r}'(t)$ postoji za sve osim za najviše konačno mnogo izoliranih vrijednosti od $t$. Nasuprot tome, vidjet ćemo da su fraktalne "krivulje" neprekidne svuda, ali nigdje nisu diferencijabilne, jer imaju 'lom' u svakoj točki.

U radu ćemo obraditi Cantorov skup, Von Kochovu krivulju te spiralu i analizirati njihovu Lebesgueovu mjeru u pripadnom ambijentnom prostoru, te njihove topološke i fraktalne dimenzije. Pokazat ćemo da je fraktalna dimenzija dobar pokazatelj razgranatosti fraktalnog skupa, koju niti Lebesgueova mjera niti topološka dimenzija ne vide. Jedan od najpoznatijih fraktalnih skupova u matematici je Cantorov skup [1]. Konstruira se na sljedeći način: Neka je $E_0$ zatvoreni interval $[0, 1]$. Neka je $E_1$ skup koji ostaje kada uklonimo otvoreni interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ koji sadrži srednju trećinu skupa $E_0$ tako da se $E_1$ sastoji od dva zatvorena intervala $[0, \frac{1}{3}]$ i $[\frac{2}{3}, 1]$. Brisanjem otvorenih intervala srednje trećine svakog od ovih intervala dobivamo skup $E_2$. Nastavljamo induktivno na ovaj način tako da $E_k$ dobijemo brisanjem otvorenih intervala srednje trećine svakog od intervala iz $E_{k-1}$, kao što je prikazano na slici 1.2.


Slika 1.2: Konstrukcija Cantorovog skupa

Čini se da smo na ovaj način u limesu uklonili toliko točaka da ništa nije ostalo. Unatoč tome, kasnije ćemo pokazati da je Cantorov skup neprebrojiva unija točaka, a ipak je 'tanak', to jest duljina (u smislu Lebesgueove mjere) mu je 0. Očito, duljina nije precizna mjera za razgranatost ovog skupa jer ima istu duljinu kao točka, a sastoji se od neprebrojivo mnogo točaka. Svojstva slična Cantorovom skupu ima fraktalni skup poznat kao *sag Sierpinskog* [7] koji je generalizacija Cantorovog skupa na ravninu. Konstruira se tako da krenemo od ispunjenog zatvorenog kvadrata, u sljedećem koraku podijelimo ga na 9 jednakih kvadrata te brišemo otvoreni kvadrat u sredini. Postupak nastavljamo sa svakim od preostalih 8 manjih kvadrata i tako dalje. Površina (u smislu Lebesgueove mjere) ovog skupa je 0, što opet ne opisuje dobro razgranatost danog skupa. Na kraju, primijetimo da navedeni skupovi očito imaju svojstvo samosličnosti zbog načina na koji ih konstruiramo.

Još jedan poznati fraktal je *von Koch-ova krivulja* [1]. Neka je $E_0$ dužina jedinične duljine. Skup $E_1$ sastoji se od 4 dužine dobivene tako da je uklonjena srednja trećina dužine $E_0$ i zamijenjena dvjema stranicama jednakostraničnog trokuta duljine stranice jednake duljini uklonjene srednje trećine. Skup $E_2$ konstruiramo tako da primijenimo opisani postupak na svaku dužinu skupa $E_1$ i tako dalje, kao na Slici 1.3. Kad je $k$ jako velik, krivulje $E_{k-1}$ i




Slika 1.3: Konstrukcija Von Koch-ove krivulje

$E_k$ se razlikuju samo u sitnim detaljima. Krivulje $E_k$ su poligonalne aproksimacije krivulje $F$ koja se dobije navedenom konstrukcijom kada k teži u beskonačnost i koju nazivamo *von Koch-ova krivulja*. Jednostavan račun pokazuje da je krivulja $E_k$ duljine $(\frac{4}{3})^k$. Naime, krivulja $E_1$ se sastoji od 4 kopije krivulje $E_0$ od kojih je svaka skalirana s $\frac{1}{3}$. Krivulja $E_2$ sastoji se od 16 dužina, svaka duljine $\frac{1}{9}$ i tako dalje. Na ovaj način dobivamo da se krivulja $E_k$ sastoji od $4^k$ dužina od kojih je svaka duljine $(\frac{1}{3})^k$, stoga je duljina krivulje $E_k$ jednaka $(\frac{4}{3})^k$ [7]. Ako $k$ teži u beskonačnost, vidimo da $F$ ima beskonačnu duljinu. Kasnije ćemo pokazati da $F$ ima Lebesgueovu mjeru (površinu) 0 u ravnini, pa tako niti duljina ni površina nisu dobre mjere za razgranatost danog skupa.

Navedimo još dva osnovna primjera skupova koji nisu fraktalni u smislu Mandelbrotove definicije, ali imaju akumulaciju oko 0 koju će dobro 'mjeriti' fraktalna dimenzija, pa su zanimljivi sa stajališta fraktalne dimenzije: spiralu i graf *chirp-funkcije*. Spiralu zadanu parametarski u polarnim koordinatama $(r, \varphi)$ definiramo na sljedeći način [8]:

$$\begin{cases} \varphi(t) = t, \\ r(t) = \frac{1}{t^\alpha}, \qquad 1 < t < \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

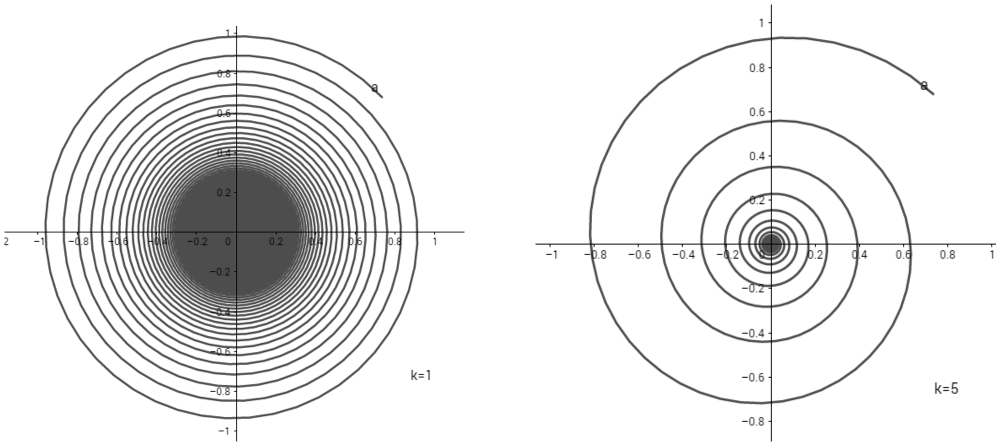
gdje je $\alpha \in (0, 1)$.
Parametar $t$ možemo zamišljati kao vremensku varijablu te funkcije $t \mapsto \varphi(t), r(t)$ opisuju kako kut raste, odnosno kako radijus pada s vremenom. Spirala koju promatramo je slika funkcije $t \mapsto (r(t)\cos(\varphi(t)), r(t)\sin(\varphi(t)))$, $t \in (1, \infty)$ u $\mathbb{R}^2$.

Uočavamo da joj možemo odrediti duljinu po namotajima (lokalno), ali duljina cijele krivulje, kako ćemo kasnije pokazati, je beskonačna. Stoga, duljina ne daje dobru informaciju o tome koliko gusto spirala ispunjava prostor. Uočimo da, što je veći $\alpha$, gustoća je očito manja. Naime, točke na spirali određene su svojom udaljenošću od ishodišta $r(t)$ i kutem $\varphi(t)$ koji spojnica točke s ishodištem zatvara s pozitivnim dijelom $x$-osi u trenutku $t$. Uočimo da kako $t$ raste, raste i $\varphi(t)$, dok se $r(t)$ smanjuje. Također, što je veći $\alpha$, izraz $t^\alpha$ brže će rasti s povećanjem varijable $t$, pa će se time i $r(t)$ brže smanjivati. Zbog toga, za veće $\alpha$ dobivamo spiralu koja rjeđe ispunjava prostor jer se udaljenost točaka spirale od ishodišta brže smanjuje, kako pokazuje Slika 1.4. U radu ćemo vidjeti da za veće $\alpha$ dobivamo spirale koje imaju manju fraktalnu dimenziju i obratno.

*Chirp-funkcije* su funkcije oblika $y = x^\alpha sin(x^\beta)$, $x \in (0, 1)$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$. Primjer grafa takve funkcije možemo vidjeti na Slici 1.5. Slično kao za spiralu, možemo odrediti duljinu krivulje po dijelovima, ali duljina cijele krivulje je beskonačna. Možemo primijetiti da parametar $\alpha$ određuje ponašanje amplitude, a parametar $\beta$ određuje kojom brzinom duljina perioda vala trne kad se približavamo ishodištu zdesna [2]. Pokazat ćemo da će za veći $\beta$ graf chirp-funkcije gušće ispunjavati prostor što se više približavamo nuli zdesna, to jest imat će veću fraktalnu dimenziju.

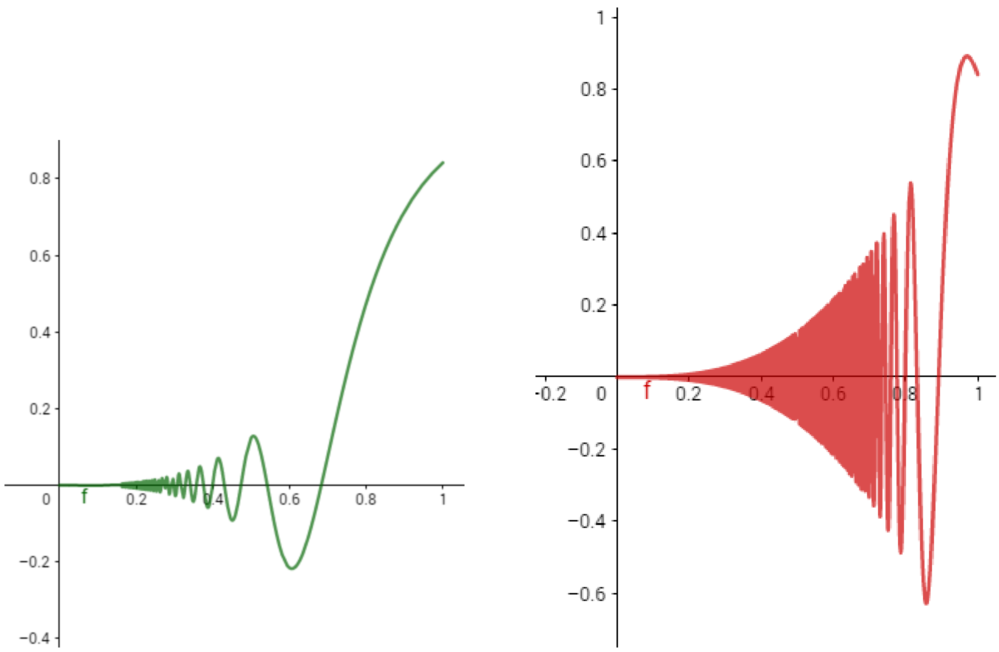
U radu ćemo također precizno definirati topološku dimenziju koja također nije dobra mjera razgranatosti fraktalnih skupova. Topološka dimenzija je, ukratko, dimenzija na koju smo naviknuti u klasičnoj geometriji. Tako je točka dimenzije 0, pravac je dimenzije 1, ravnina dimenzije 2, euklidski prostor dimenzije 3 i tako dalje. Ukratko, možemo objasniti

Slika 1.4: Graf spirale




(a) Spirala kad je $\alpha = 1$ (b) Spirala kad je $\alpha = 5$

Slika 1.5: Graf chirp funkcije




(a) Graf funkcije $y = x^3 \sin(x^{-3})$ (b) Graf funkcije $y = x^3 \sin(x^{-10})$

induktivno. Ako oko svake točke nekog skupa $X$ u $\mathbb{R}^n$ postoji otvorena okolina u $\mathbb{R}^n$ koja ne sadrži niti jednu drugu točku skupa $X$, tada je topološka dimenzija skupa $X$ jednaka 0. Inače, topološka dimenzija skupa $X \subset \mathbb{R}^n$ je najmanji prirodan broj $k$ takav da za svaku točku skupa $X$ i za svaku otvorenu okolinu te točke u $\mathbb{R}^n$ presjek ruba te okoline i skupa $X$ ima dimenziju $k - 1$. Tako se može pokazati [1] da je topološka dimenzija Cantorovog skupa 0, saga Sierpinskog 1, von-Kochove krivulje 1. Vidimo da niti topološka dimenzija kao niti Lebesgueova mjera ne daje preciznu informaciju o razgranatosti danih skupova. Naime, ne razlikuje Cantorov skup od konačnog skupa točaka niti von Kochovu krivulju i sag Sierpinskog od dužine. U svrhu 'mjerenja' fraktalnih skupova zato uvodimo fraktalne dimenzije: Hausdorffovu i box dimenziju koje mjere razgranatost skupa, odnosno gustoću kojom skup ispunjava prostor. Za standardne skupove kao što su točka, linija konačne duljine, skup pozitivne površine, fraktalne dimenzije se poklapaju s topološkim: redom 0,1,2, no za fraktalne skupove daju razlomljeni broj te pokazuju gustoću ispunjavanja prostora. Tako ćemo vidjeti da je Hausdorffova dimenzija Cantorovog skupa jednaka $\log_3(2)$, von-Kochove krivulje $\log_3(4)$, a saga Sierpinskog $\log_3(8)$. Primijetimo da je Hausdorffova dimenzija vezana uz omjer samosličnosti danih fraktalnih skupova: npr. Cantorov skup je unija 2 kopije samog sebe skalirane s faktorom 3.

# Poglavlje 2

# Topološka dimenzija

## 2.1 Definicija topološke dimenzije

Prisjetimo se najprije pojmova iz analize koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

**Definicija 2.1.1** (Metrika)**.** *[6] Neka je $X$ proizvoljan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ako zadovoljava sljedeća svojstva za bilo koji izbor točaka $a, b, c \in X$:*

1. $d(a, b) \geq 0$.

2. $d(a, b) = 0 \iff a = b$.

3. $d(a, b) = d(b, a)$.

4. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

*Uređeni par $(X, d)$ skupa i neke metrike na njemu nazivamo metričkim prostorom.*

Na skupu $\mathbb{R}^n$ na kojem najčešće radimo, jednu od metrika definiramo kao:

$$d_2(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2} \tag{2.1}$$

gdje su $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Ovu metriku nazivamo euklidskom metrikom. Metrika na $\mathbb{R}^n$ može biti definirana i na druge načine, ali mi ćemo u nastavku koristiti euklidsku metriku.

**Definicija 2.1.2.** *[6] Neka je $(X, d)$ metrički prostor. Otvorena kugla sa središtem $x \in X$ i radijusom $r$ definirana je s $K_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.*

**Definicija 2.1.3.** *[6] Za proizvoljan skup A a u metričkom prostoru $(X, d)$ kažemo da je otvoren ako za svaku točku $x \in A$ postoji otvorena kugla sa središtem u $x$ i pozitivnim radijusom koja je sadržana u A.*

Otvorene skupove definiramo već u topološkim prostorima, koji su općenitiji od metričkih. Naime, svaki metrički prostor je ujedno i topološki s topologijom koja je inducirana danom metrikom.

**Definicija 2.1.4.** *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je uređeni par skupa X i topologije $\mathcal{T}$ na X, gdje je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X za koji vrijede sljedeći uvjeti:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $U_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in J \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

*gdje je J proizvoljan skup indeksa.*

Elemente topologije $\mathcal{T}$ nazivamo otvorenim skupovima u $X$.

Ako je $X$ metrički prostor, on je ujedno i topološki s topologijom koja je inducirana metrikom (naravno, ima i drugih topologija na njemu, na primjer trivijalna topologija $\{\emptyset, X\}$ ili maksimalna topologija na $X$ koju čine svi podskupovi od $X$). Naime, familija svih podskupova metričkog prostora $X$ koji su otvoreni u $X$ po Definiciji 2.1.3 zadovoljava svojstva 1., 2. i 3. topologije.
Svojstvo 1. je trivijalno zadovoljeno. Sam metrički prostor $X$ je otvoren po Definiciji 2.1.3 jer trivijalno sadrži svaku kuglu oko svake svoje točke.
Svojstvo 2. Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Kako je $U$ otvoren, po Definiciji 2.1.3, postoji $r_1 > 0$ takav da je $K(x, r_1) \in U$. Analogno, kako je $V$ otvoren, po Definiciji 2.1.3, postoji $r_2 > 0$ takav da je $K(x, r_2) \in V$. Tada je $K(x, min\{r_1, r_2\}) \in U \cap V$ i $U \cap V$ je otvoren po Definiciji 2.1.3.
Svojstvo 3. Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, tada je $x \in U_\alpha$ za neki $\alpha \in J$. Kako su svi $U_\alpha, \alpha \in J$ otvoreni, po Definiciji 2.1.3, za $x \in U_\alpha$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \in U_\alpha$, tada je $K(x, r) \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pa je $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ otvoren skup po Definiciji 2.1.3.

**Definicija 2.1.5.** *[7] Neka je A proizvoljan podskup topološkog prostora X. Otvoreni pokrivač od A je prozvoljna familija $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J\}$ otvorenih skupova koji pokrivaju A, to jest za koje vrijedi: $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supseteq A$, gdje je J proizvoljni skup indeksa.*

Promotrimo sada otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ topološkog prostora $X$. Ako fiksiramo točku $x \in X$ i prebrojimo elemente pokrivača koji sadrže $x$ dobivamo broj koji nazivamo *multiplicitet* *pokrivača $\mathcal{U}$ prostora $X$ u točki $x \in X$* i označavamo sa $M(\mathcal{U}, x) \in [1, +\infty]$. Broj

$$M(\mathcal{U}) = \sup_{x \in X} M(\mathcal{U}, x) \in [1, +\infty]$$

nazivamo *multiplicitet pokrivača $\mathcal{U}$ skupa $X$*. Multiplicitet pokrivača je prirodan broj koji može biti namanje 1 jer se svaka točka skupa mora nalaziti u barem jednom elementu pokrivača da bi on uopće bio pokrivač tog skupa. Multiplicitet $M(\mathcal{U})$ označava najmanji broj $k$ (ako postoji) takav da se svaki element skupa $X$ nalazi u najviše $k$ elemenata pokrivača $\mathcal{U}$. Primijetimo da $M(\mathcal{U})$ možemo učiniti proizvoljno velikim tako da dodajemo "nepotrebne" elemente pokrivača. Zbog toga želimo odabrati pokrivač za koji je $M(\mathcal{U})$ "minimalan"[7]. U tu svrhu, promatramo otvorena profinjenja (profinjenje pokrivača je familija koja je i dalje pokrivač danog skupa, a čiji je svaki element podskup nekog elementa pokrivača koji profinjujemo) otvorenih pokrivača skupa $X$.

**Definicija 2.1.6.** *[7] Topološka dimenzija $M(X)$ prostora $X$ definira se kao minimalna vrijednost $k \in \mathbb{N}_0$ takva da za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $X$ postoji otvoreno profinjenje $\mathcal{U}'$ takvo da je $M(\mathcal{U}') \leq k + 1$. Ako takav $k$ ne postoji, smatramo da je $M(X) = \infty$.*

Mi najčešće radimo na metričkom prostoru $\mathbb{R}^n$ s ranije definiranom euklidskom metrikom.

Po ranije navedenom, otvorena kugla sa središtem $x$ i radijusom $r$ definirana je s $K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_2(x, y) < r\}$. Podskup $X$ skupa $\mathbb{R}^n$ bit će otvoren ako i samo ako za svaku točku $x \in X$ postoji otvorena kugla sa središtem u $x$ i pozitivnim radijusom koja je sadržana u $X$, pa otvorene skupove definiramo kao sve (prebrojive i neprebrojive) unije otvorenih kugala. Familija svih otvorenih skupova tvori topologiju u smislu Definicije 2.1.4, kako smo ranije pokazali. Tu topologiju nazivamo topologijom induciranom euklidskom metrikom. Na $\mathbb{R}^n$ postoje i druge topologije, npr. topologija koja se sastoji samo od praznog skupa i cijelog skupa $\mathbb{R}^n$ i mnoge druge.

## 2.2 Primjeri računanja topološke dimenzije

Izračunajmo topološku dimenziju nekih podskupova $\mathbb{R}^n$, gdje je $\mathbb{R}^n$ topološki prostor s topologijom induciranom euklidskom metrikom.

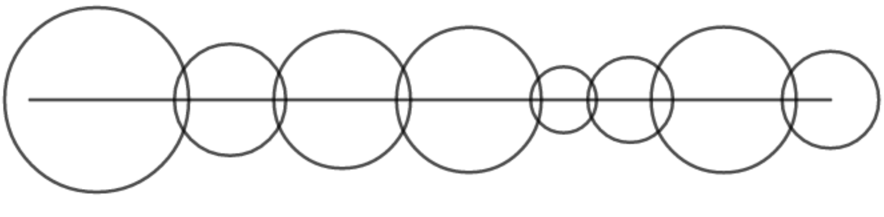
**Primjer 1.** *Odredimo topološku dimenziju točke.*

Neka je $X = \{x\} \subset \mathbb{R}^n$ jednočlani skup koji se sastoji od jedne točke. Uzmimo proizvoljni otvoreni pokrivač skupa $X$. Tada $x$ leži u nekom otvorenom skupu tog pokrivača i po definiciji otvorenosti postoji otvorena kugla sa središtem u $x$ koja je podskup tog otvorenog skupa. To je ujedno i profinjenje pokrivača s minimalnim mogućim brojem elemenata.

Stoga je multiplicitet najpovoljnijeg profinjenja $\mathcal{U}'$ svakog otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$ jednak $M(\mathcal{U}') = 1$, pa je po Definiciji 2.1.6, topološka dimenzija točke jednaka 0.

**Primjer 2.** *Odredimo topološku dimenziju dužine konačne duljine.*

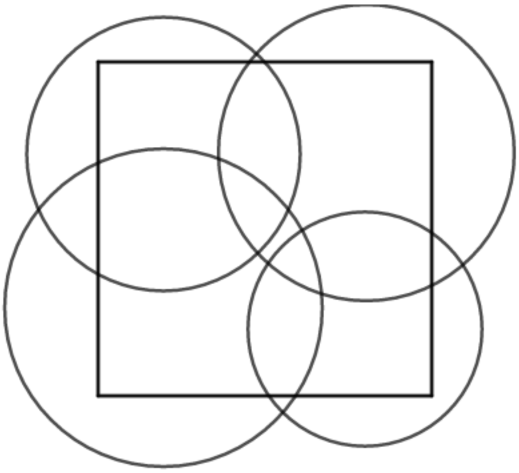
Neka je sada $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ dužina konačne duljine. Za proizvoljan otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ postoji lančasto profinjenje (pokrivač kuglama tako da se nikoje 3 ne sijeku, a da je ujedno i profinjenje danog pokrivača). Jedno od takvih profinjenja prikazano je na Slici 2.1. Naime, za dani otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ postoji profinjenje otvorenim kuglama sa središtima na $[a, b]$. Na primjer, u svakoj točki skupa uzmemo kuglu koja se nalazi u nekom elementu pokrivača. To možemo učiniti jer pokrivač pokriva čitavu dužinu i njegovi su skupovi otvoreni. Kako je dužina kompaktan skup, postoji konačan otvoreni potpokrivač tog profinjenja kuglama, koji je onda također profinjenje od $\mathcal{U}$. Ako on nije lančast, nađemo prvu kuglu koja narušava lančastost te je zamijenimo s konačno manjih kugala koje u njoj leže, koje su ulančane s prethodnima, a da je dobiveno opet pokrivač skupa $X$. Naime, kad uklonimo kuglu iz pokrivača, neki dio dužine ostane nepokriven. Nađemo konačno mnogo manjih kugala koje su ulančane, koje ga pokruivaju, i koje leže u uklonjenoj kugli. Nastavljamo induktivno dok ne dobijemo konačan ulančan pokrivač otvorenim kuglama $\mathcal{U}'$, koji je profinjenje od U. Uočimo da se točke skupa $X$ nalaze u najviše dva elementa pokrivača $\mathcal{U}'$ istovremeno. S druge strane, nismo mogli odabrati profinjenje u kojem se kugle ne presijecaju jer neki elementi ne bi bili pokriveni, pa je najpovoljnije profinjenje multipliciteta 2. Iz toga slijedi da je topološka dimenzija dužine konačne duljine jednaka 1.



Slika 2.1: Jedan lančasti pokrivač dužine

**Primjer 3.** *Odredimo topološku dimenziju nedegeneriranog kvadrata (ne-nul površine).*

Slično kao u primjeru s dužinom i ulančanim profinjenjem, proizvoljan otvoreni pokrivač kvadrata možemo profiniti tako da se sastoji od konačno mnogo otvorenih kugala sa središtima unutar kvadrata ali tako da se nigdje ne sijeku više od 3 kugle, kako je prikazano na Slici 2.2. Uočimo kako se sada svaka točka kvadrata nalazi u najviše 3 elementa



Slika 2.2: Pokrivač kvadrata ne-nul površine

pokrivača. Stoga je multiplicitet najpovoljnijeg profinjenja otvorenog pokrivača jednak 3, a topološka dimenzija kvadrata jednaka 2.

Odredimo sada topološku dimenziju jednog fraktalnog skupa.

**Primjer 4.** *[7] Odredimo topološku dimenziju Cantorovog skupa.*

Cantorov skup je kompaktan jer je zatvoren (kao komplement unije otvorenih intervala) i omeđen u $\mathbb{R}$. Svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač otvorenim intervalima. Naime, svaki otvoreni pokrivač može se prikazati kao unija otvorenih intervala. Dalje, svaki konačan potpokrivač otvorenim intervalima ima profinjenje disjunktnim otvorenim intervalima u $\mathbb{R}$. Naime, između svake dvije točke Cantorovog skupa postoji otvoreni interval koji ne leži u Cantorovom skupu. Možemo uspostaviti bijekciju između točaka Cantorovog skupa i nizova sastavljenih od 1 i 2. Neka 1 označava da je točka u lijevoj trećini segmenta u kojem je bila u prethodnom koraku, dok 2 označava da je u desnoj trećini segmenta iz prethodnog koraka. Tako je svaka točka Cantorovog skupa poistovjećena s nizom u kojemu prvi broj označava je li ta točka u prvom koraku konstrukcije u lijevoj ili desnoj trećini početnog skupa. Nadalje, drugi broj u nizu opet označava je li točka u lijevoj ili desnoj trećini skupa u kojem se nalazila točka u prethodnom koraku (na primjer, neka točka Cantorovog skupa može biti određena beskonačnim nizom 112122212121 1122111...). Sada za dvije točke Cantorovog skupa određene takvim nizovima, možemo tvrditi da je između njih točka koja nije u Cantorovom skupu. Naime, svaka točka je jednoznačno određena nizom kako smo naveli. To znači da će se nizovi kojim su označene točke razlikovati barem u nekom članu. Prvi član u kojem se razlikuju pokazuje da je jedna od točaka u lijevoj, a druga u desnoj strani prethodnog segmenta, što znači da je između njih izbrisan otvoreni interval koji sigurno nije u Cantorovom skupu. Multiplicitet takvog disjunktnog profinjenja je 1, pa je topološka dimenzija Cantorovog skupa jednaka 0.

Vidimo da je topološka dimenzija uvijek prirodan broj, čak i za fraktalne skupove. Upravo zbog toga, topološka dimenzija nije prikladna kad se radi o fraktalnim skupovima jer ne 'prepoznaje' skupove. U sljedećim poglavljima zato uvodimo fraktalne dimenzije: Hausdorffovu i box dimenziju koje su preciznije od topološke te poprimaju i razlomljene vrijednosti, ovisno o gustoći kojom skup ispunjava prostor.

# Poglavlje 3

# Fraktalne dimenzije

## 3.1 Hausdorffova dimenzija

### 3.1.1 Hausdorffova mjera

Definirajmo najprije pojmove koje ćemo koristiti u nastavku. Općenito, mjera nekog skupa je broj koji opisuje 'veličinu' tog skupa. Skup koji sadrži sve podskupove skupa $X$ nazivamo partitivni skup skupa $X$ i označavamo s $\mathcal{P}(X)$.

**Definicija 3.1.1** (Mjera, [1])**.** *Funkcija* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty)$ *je mjera na* $\mathbb{R}^n$ *ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *ako je* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ *(monotonost mjere).*
3. *Za niz* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *disjunktnih podskupova od* $\mathbb{R}^n$ *vrijedi:* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *(prebrojiva aditivnost mjere).*

Iz 2. i 3. svojstva Definicije 3.1.1. slijedi svojstvo *prebrojive subaditivnosti mjere*:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

za bilo koji niz, ne nužno disjunktnih, podskupova od $\mathbb{R}^n$. Naime, neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz ne nužno disjunktnih podskupova od $\mathbb{R}^n$. Neka je $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih podskupova od $\mathbb{R}^n$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $B_i = A_i \setminus (\bigcup_{n=1}^{i-1} A_n)$. Tada vrijedi $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$, $B_i \subseteq A_i$. Sada vrijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

Prema svojstvima 2. i 3. Definicije 3.1.1 slijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Neka je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ metrički prostor s euklidskom metrikom. Definiramo:

**Definicija 3.1.2.** *[1] Dijametar nepraznog podskupa $X$ skupa $\mathbb{R}^n$ u oznaci $|X|$, definiramo kao supremum euklidskih udaljenosti svih mogućih parova točaka iz $X$:*

$$|X| = \sup\{d_2(x, y) : x, y \in X\}.$$

**Definicija 3.1.3.** *[7] Neka je $X$ neki neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$, gdje je $J$ proizvoljan skup indeksa, proizvoljna familija skupova dijametra najviše $\delta$ koja pokriva $X$. Familiju $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$, nazivamo $\delta$-pokrivač od $X$.*

Za definiciju Hausdorffove dimenzije potrebna nam je definicija Hausdorffove mjere [7]. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ *prebrojivi* pokrivač skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Za skup kažemo da je prebrojiv ako njegove elemente možemo poredati u niz, to jest ako možemo naći neku bijekciju sa skupa prirodnih brojeva na taj skup. Za svaki skup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ postoji prebrojivi pokrivač. Budući da je $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ prebrojiv, postoji prebrojivi pokrivač od $\mathbb{R}^n$: oko svake točke iz $\mathbb{Q}^n$ opišemo otvorenu kuglu radijusa $\delta > 0$. Takva familija otvorenih kugala će biti prebrojiva zbog prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}^n$ i bit će pokrivač od $\mathbb{R}^n$ zbog gustoće $\mathbb{Q}^n$ u $\mathbb{R}^n$. Unija onih kugala koje imaju neprazan presjek s $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bit će prebrojivi pokrivač skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Definicija 3.1.4.** *[7] Neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ prebrojivi pokrivač skupa $X$ u $\mathbb{R}^n$. Tada $s$-ti potencijal pokrivača $\mathcal{U}$, $s \geq 0$, definiramo kao $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$.*

Budući da u pokrivač skupa $X$ možemo dodavati proizvoljno mnogo "nepotrebnih" elemenata, a da i dalje ostane pokrivač istog skupa, $s$-ti potencijal pokrivača skupa $X$ može biti proizvoljno velik, stoga ga želimo minimizirati. Za skup $X$ koji je podskup skupa $\mathbb{R}^n$ i $s \geq 0$ te za svaki $\delta > 0$ sada definiramo:

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}\,\text{je prebrojivi}\,\delta - \text{pokrivač skupa}\,X\right\} \in [0, \infty]. \tag{3.1}$$

Dakle, za zadani $s \geq 0$ i dijametar pokrivača $\delta > 0$ želimo minimizirati (u smislu infimuma) zbroj $s$-tih potencija dijametara svih elemenata pokrivača skupa $X$ po svim pokrivačima dijametra najviše $\delta$. Znamo da infimum postoji u $[0, \infty]$ jer je $|U_i| \geq 0$ po Definiciji 3.1.2 dijametra skupa, pa je $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ ograničena odozdo s 0.

Primijetimo, kako se $\delta$ smanjuje, smanjuje se i broj dopuštenih $\delta$-pokrivača skupa $X$. Naime, ako je $\mathcal{U}$ $\delta$-pokrivač nekog skupa, on je ujedno i $\delta_1$-pokrivač za svaki $\delta_1 \geq \delta$. Stoga slijedi da je

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(X) \leq \mathcal{H}^s_\delta(X) \text{ za } \delta_1 \geq \delta \text{ i } s \geq 0,$$

jer je infimum nadskupa uvijek manji ili jednak od infimuma skupa. Ova nejednakost pokazuje da je za svaki $s \geq 0$ funkcija $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(X)$ padajuća funkcija. Sada definiramo:

**Definicija 3.1.5.** *[7] Neka je $s \geq 0$. Definiramo* $s$-dimenzionalnu Hausdorffovu mjeru skupa $X$ *kao:*

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X). \tag{3.2}$$

Uočimo da za $s \geq 0$, $s$-dimenzionalna Hausdorffova mjera skupa postoji za svaki podskup $X$ skupa $\mathbb{R}^n$ i poprima vrijednosti unutar $[0, \infty]$. Naime, $\mathcal{H}^s_\delta(X) \in [0, \infty]$ za svaki $\delta > 0$. Nadalje, $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(X)$ raste kada $\delta \to 0$, pa limes sigurno postoji u skupu $[0, \infty]$. Naime, ako funkcija raste i ograničena je odozgo u skupu $\mathbb{R}$, mora imati limes. Ako nije ograničena odozgo u skupu $\mathbb{R}$, ima limes $\infty$.

Sljedeća propozicija pokazuje da je $\mathcal{H}^s(X)$ za svaki $s > 0$ zaista mjera po ranije navedenim svojstvima mjere (Definicija 3.1.1).

**Propozicija 3.1.6** (Svojstva Hausdorffove mjere)**.** *[7] Funkcija $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ za $s > 0$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ *za svaki* $s > 0$*,*
2. $\mathcal{H}^s(X_1) \leq \mathcal{H}^s(X_2)$ *ako je* $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$*,*
3. $\mathcal{H}^s(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j)$ *za svaku prebrojivu familiju podskupova* $X_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$.

Može se pokazati da u svojstvu 3. Propozicije 3.1.6 vrijedi i jača tvrdnja, to jest da vrijedi jednakost za uniju disjunktnih skupova [1].

*Dokaz.* Dokažimo svojstva Hausdorffove mjere:

1. Prazan skup možemo pokriti bilo kojim otvorenim skupom bilo kojeg dijametra. Kada se $\delta$ smanjuje, dijametar tog skupa, koji je ujedno i pokrivač, također teži u 0, pa i $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ za svaki $\delta$, te je $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
2. Ako je $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ tada je $\delta$-pokrivač od $X_2$ ujedno i $\delta$-pokrivač od $X_1$, a infimum podskupa je uvijek veći ili jednak od infimuma skupa.

3. Za dokaz ovog svojstva potrebna nam je Lema 1.

**Lema 1.** *[7] Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $s > 0$ takav da $\mathcal{H}^s(X) < \infty$. Za svaki $\beta > 0$, i za svaki $\delta > 0$ postoji otvoreni prebrojivi $\delta$-pokrivač $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ od $X$ takav da vrijedi $d_2(\mathcal{H}^s(X), \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s) \leq \beta$.*

*Dokaz.* Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $s > 0$. Po Definiciji 3.1.5, $\mathcal{H}^s(X)$ definiran je kao limes $\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X)$ funkcije $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(X)$ kad $\delta \to 0$. Primjenjujući definiciju limesa na ovu funkciju dobivamo:
Za svaki $\beta > 0$ postoji $\delta_\beta$ takav da za svaki $0 < \delta \leq \delta_\beta$ vrijedi:

$$d_2(\mathcal{H}^s_\delta(X), \mathcal{H}^s(X)) = |\mathcal{H}^s(X) - \mathcal{H}^s_\delta(X)| < \frac{\beta}{2}.$$

Kako je $\mathcal{H}^s_\delta(X)$ infimum skupa $\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}$ je prebrojivi $\delta -$ pokrivač skupa $X\}$, on mora biti najveća donja međa tog skupa. Tada za svaki $\epsilon' > 0$ postoji $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ prebrojivi $\delta$-pokrivač od $X$ takav da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s - \epsilon' \leq \mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Stavimo $\epsilon' = \frac{\beta}{2}$ (možemo jer je $\epsilon'$ proizvoljno mali). Iz prethodne nejednakosti slijedi da postoji prebrojivi $\delta$-pokrivač $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s - \mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \frac{\beta}{2}.$$

Sada za taj pokrivač možemo zaključiti:

$$|\mathcal{H}^s(X) - \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s| \leq |\mathcal{H}^s(X) - \mathcal{H}^s_\delta(X)| + |\mathcal{H}^s_\delta(X) - \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s| < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta.$$

Sada smo pokazali da za svaki $\beta > 0$ postoji $\delta_\beta > 0$ takav da za svaki $\delta \leq \delta_\beta$ postoji prebrojivi $\delta$-pokrivač $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi: $d_2(\mathcal{H}^s(X), \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s) \leq \beta$.
Primijetimo da vrijedi i jača tvrdnja u Lemi 1, to jest da za svaki $\beta > 0$ i za svaki $\delta > 0$ postoji otvoreni $\delta$-pokrivač $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi $d_2(\mathcal{H}^s(X), \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s) \leq \beta$. Naime, svaki $\delta_\beta$-pokrivač je ujedno i $\delta$-pokrivač za $\delta > \delta_\beta$. □

Uočimo da ako je bilo koja od vrijednosti $\mathcal{H}^s(X_j)$ beskonačna, njihova je suma beskonačna, pa je nejednakost trivijalna. Zato pretpostavimo da su sve vrijednosti konačne. Fiksiramo li $\beta > 0$ i $\delta > 0$ zapišemo $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$, možemo primijeniti

Lemu 1 na svaki $X_j$ kako bismo dobili prebrojive $\delta$-pokrivače $\mathcal{U}_j = \{U_{ji}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ (za proizvoljno mali $\delta > 0$) takve da:

$$d_2(\mathcal{H}^s(X_j), \sum_{i=1}^{\infty} |U_{ji}|^s) \leq \frac{\beta}{2^j}.$$

Vidimo da je $\mathcal{U} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_j = \{U_{ji}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ otvoreni prebrojivi pokrivač od $X$, a budući da svaki od $U_{ji}$ ima dijametar $\leq \delta$, on je i $\delta$-pokrivač. Zato:

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |U_{ji}|^s = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |U_{ji}|^s\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\mathcal{H}^s(X_j) + \frac{\beta}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j) + \beta.$$

Ova nejednakost vrijedi za svaki $\beta > 0$ i za svaki $\delta > 0$, stoga puštamo limese i nejednakost 3. slijedi:

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j) + \beta \qquad \Big/ \lim_{\delta\to 0}$$

$$\mathcal{H}^s(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j) + \beta \qquad \Big/ \lim_{\beta\to 0}$$

$$\mathcal{H}^s(X) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_j).$$

□

Napomena (s=0). Za $s = 0$ propozicija ne vrijedi jer je tada $|U|^0 = 1$ za svaki skup $U$ pa je za svaki $\delta > 0$, $\mathcal{H}^0(\emptyset) = 1$. Također, za neograničene skupove $X$, svaki $\delta$-pokrivač, $\delta > 0$, sastoji se od beskonačno mnogo elemenata $U_i, i \in \mathbb{N}$, za koje vrijedi $|U_i|^0 = 1$, pa je $\mathcal{H}^0_\delta(X) = \infty$ za sve $\delta > 0$, te je $\mathcal{H}^0(X) = \infty$. Zbog toga ne vrijedi svojstvo 2. Dakle, za $s = 0$, $\mathcal{H}^s$ definirana kao u Definiciji 3.1.5, nije mjera.

### 3.1.2 Svojstva Hausdorffove mjere

**Propozicija 3.1.7** (Svojstvo skaliranja Hausdorffove mjere, [4]). *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka su $\lambda > 0$, i $s \geq 0$. Tada je:*

$$\mathcal{H}^s(\lambda X) = \lambda^s \mathcal{H}^s(X).$$

*Dokaz.* Ako je $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\delta$-pokrivač od $X$, tada je $\{\lambda U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\lambda\delta$-pokrivač od $\lambda X$. Naime, $|\lambda U_i| = sup\{d_2(\lambda x, \lambda y) : x, y \in U_i\} = \sup\{\lambda d_2(x, y) : x, y \in U_i\} = \lambda \sup\{d_2(x, y) : x, y \in U_i\} = \lambda |U_i|$. Dakle,

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

za svaki $\delta$-pokrivač $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ od $X$. Za svaki $\delta$-pokrivač $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ od $X$ vrijedi:

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda X) \leq \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Sada vidimo da je $\frac{\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda X)}{\lambda^s}$ donja međa za $s$-potencijale svih prebrojivih $\delta$-pokrivača od $X$. S druge strane, $\mathcal{H}^s_\delta(X)$ je infimum svih takvih $s$-potencijala, pa po definiciji infimuma vrijedi:

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda X) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(X). \tag{3.3}$$

Relacija (3.3) vrijedi za svaki $\delta > 0$. Ako pustimo limes kad $\delta \to 0$, dobijemo:

$$\mathcal{H}^s(\lambda X) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(X).$$

Kako relacija (3.3) vrijedi za svaki proizvoljan $\lambda > 0$, zamijenimo $\lambda$ s $\frac{1}{\lambda}$ i $X$ s $\lambda X$. Tada vrijedi:

$$\mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{\lambda}}(\frac{1}{\lambda}\lambda X) \leq \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^s \mathcal{H}^s_\delta(\lambda X) \quad \Big/ \cdot \lambda^s,$$

$$\lambda^s \mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{\lambda}}(X) \leq \mathcal{H}^s_\delta(\lambda X).$$

Puštanjem limesa kad $\delta \to 0$, slijedi:

$$\lambda^s \mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(\lambda X). \tag{3.4}$$

Iz (3.3) i (3.4) slijedi:

$$\mathcal{H}^s(\lambda X) = \lambda^s \mathcal{H}^s(X).$$

□

**Definicija 3.1.8** (Hölderova, Lipschitzova i bi-Lipschitzova funkcija, [1]). *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq R^m$ za $m, n \in \mathbb{N}$ te neka je $d_2$ euklidska udaljenost. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je Hölderova funkcija eksponenta $\alpha \in \mathbb{R}$ ako postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki $x, y \in X$ vrijedi:*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c(d_2(x, y))^\alpha. \tag{3.5}$$

*Funkciju $f$ zovemo Lipschitzovom ako je $\alpha = 1$, to jest ako postoji konstanta $c > 0$ takva da za svaki $x, y \in X$ vrijedi:*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c d_2(x, y), \tag{3.6}$$

*a bi-Lipschitzovom ako postoje konstante $c_1, c_2$, takve da $0 \leq c_1 \leq c_2 < \infty$ i takve da za svaki $x, y \in X$ vrijedi:*

$$c_1 d_2(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq c_2 d_2(x, y). \tag{3.7}$$

Primijetimo, ako je $f : X \to Y$ bi-Lipschitzova, tada je $f : X \to f(X)$ bijekcija. Naime, surjekcija je jer joj je kodomena jednaka slici. Pokažimo da je injekcija. Pretpostavimo suprotno, da funkcija $f : X \to f(X)$ nije injekcija. Tada moraju postojati $x, y \in X, x \neq y$ takvi da je $f(x) = f(y)$. Tada po (3.7) dobivamo $c_1 d_2(x, y) \leq 0 \leq c_2 d_2(x, y)$, što je kontradikcija jer je euklidska udaljenost uvijek veća od 0 za različite točke. Dakle, $f : X \to f(X)$ je bijekcija. Primijetimo da su $f : X \to f(X)$ i $f^{-1} : f(X) \to X$ Lipschitzove. Naime, $f$ je Lipschitzova zbog relacije (3.7). Pokažimo da je $f^{-1}$ Lipschitzova. Neka su $u, v \in f(X)$ proizvoljni te neka je $x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$. Uvrštavanjem u (3.7), slijedi:

$$c_1 d_2(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq d_2(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))), \quad \Big/ \cdot \frac{1}{c_1}$$

$$d_2(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq \frac{1}{c_1} d_2(u, v),$$

pa je $f^{-1} : f(X) \to X$ Lipschitzova.

**Propozicija 3.1.9** (Hausdorffova mjera pri Hölderovoj transformaciji, [4])**.** *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *i neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *Hölderova eksponenta* $\alpha \in \mathbb{R}$ *kako je definirana u* (3.5)*. Tada za svaki* $s \geq 0$ *vrijedi:*

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(X),$$

*gdje je c konstanta iz Definicije 3.1.8 Hölderove funkcije i* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Dokaz.* Neka je $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\delta$-pokrivač od $X$. Tada je $X \cap U_i = X$, za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je i $\{X \cap U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\delta$-pokrivač od $X$. Zbog činjenice da je funkcija $f$ Hölderova, za svaki $i \in \mathbb{N}$ i za svaki $x, y \in X \cap U_i$ vrijedi:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c(d_2(x, y))^{\alpha}.$$

Ako s obje strane uzmemo $\sup_{x,y \in X \cap U_i}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, po Definiciji 3.1.2 vrijedi:

$$|f(X \cap U_i)| \leq c \sup\{(d_2(x, y))^{\alpha} : x, y \in X \cap U_i\}. \tag{3.8}$$

Želimo pokazati da je $\sup\{(d_2(x, y))^{\alpha} : x, y \in X \cap U_i\} \leq |x \cap U_i|^{\alpha}$.

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &\leq \sup\{d_2(x, y) : x, y \in X \cap U_i\} \quad \Big/^{\alpha} \\ (d_2(x, y))^{\alpha} &\leq (\sup\{d_2(x, y) : x, y \in X \cap U_i\})^{\alpha} \\ (d_2(x, y))^{\alpha} &\leq |X \cap U_i|^{\alpha} \end{aligned}$$

Dakle, $|X \cap U_i|^{\alpha}$ je gornja međa za $\{(d_2(x, y))^{\alpha} : x, y \in X \cap U_i\}$, pa je:

$$\sup\{(d_2(x, y))^{\alpha} : x, y \in X \cap U_i\} \leq |X \cap U_i|^{\alpha}. \tag{3.9}$$

Sada iz (3.8) i (3.9) slijedi:

$$|f(X \cap U_i)| \leq c|X \cap U_i|^{\alpha},$$

pa, budući da je za svaki $i \in \mathbb{N}$, $X \cap U_i \subseteq U_i$, vrijedi:

$$|f(X \cap U_i)| \leq c|U_i|^{\alpha}. \tag{3.10}$$

Stoga je $\{f(X \cap U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\epsilon$-pokrivač od $f(X)$, gdje je $\epsilon = c\delta^{\alpha}$. Potenciramo li (3.10) sa $\frac{s}{\alpha}$ i obje strane nejednakosti sumiramo po $i \in \mathbb{N}$, dobivamo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(X \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Ako s obje strane nejednakosti gledamo infimum po svim $\delta$-pokivačima $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dobivamo:

$$\mathcal{H}_{\epsilon}^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(X).$$

Kad $\delta \to 0$, tada i $\epsilon \to 0$ i tvrdnja propozicije slijedi puštanjem limesa kad $\delta \to 0$. □

### 3.1.3 Definicija Hausdorffove dimenzije

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Promotrimo funkciju $\mathcal{H}^s(X) : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ kao funkciju varijable $s$.

**Propozicija 3.1.10.** *[7] Ako je $s \geq 0$ takav da $\mathcal{H}^s(X) < \infty$, tada je $\mathcal{H}^t(X) = 0$ za svaki $t > s$.*

*Dokaz.* Uzmimo $t > s$. Neka je $\delta > 0$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\delta}^{t}(X) &= \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ \delta - \text{pokrivač od } X\Big\} \\
&= \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s}|U_i|^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ \delta - \text{pokrivač od } X\Big\} \\
&\leq \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{t-s}|U_i|^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ \delta - \text{pokrivač od } X\Big\} \\
&= \delta^{t-s}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(X),
\end{aligned}$$

pa slijedi:

$$\mathcal{H}_{\delta}^{t}(X) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(X). \tag{3.11}$$

Kako je $t - s > 0$, slijedi da $\delta^{t-s} \to 0$ kad $\delta \to 0$. Pustimo limes kad $\delta \to 0$ u (3.11). Zbog pretpostavke da je $\mathcal{H}^s(X) > \infty$ i budući da $\delta^{t-s} \to 0$ kad $\delta \to 0$, slijedi da

$$\mathcal{H}^t(X) = 0.$$

$\square$

Iz Propozicije 3.1.10 direktno slijedi:

**Propozicija 3.1.11.** *[7] Ako je $s \geq 0$ takav da $\mathcal{H}^s(X) > 0$, tada je $\mathcal{H}^t(X) = \infty$ za svaki $t < s$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, da je za neki $s \geq 0$, $\mathcal{H}^s(X) > 0$ i da je $\mathcal{H}^t(X) < \infty$ za neki $t < s$. Tada po prethodnoj propoziji vrijedi $\mathcal{H}^s(X) = 0$ za svaki $s > t$ i to je kontradikcija s $\mathcal{H}^s(X) > 0$. $\square$

Iz navedenih propozicija vidimo da je vrijednost funkcije $s \mapsto \mathcal{H}^s(X), X \subseteq \mathbb{R}^n$, beskonačno do kritične točke $s_X \in [0, \infty]$, a za sve $s > s_X$ vrijednost funkcije jednaka je nuli. Dakle, postoji točka skoka u kojoj vrijednost funkcije skače s beskonačno na nula. Stoga graf funkcije izgleda kao na Slici 3.1. Tako je funkcija $s \mapsto \mathcal{H}^s(X)$ potpuno određena položajem $s_X \in [0, \infty]$ i vrijednošću $\mathcal{H}^{s_X}(X)$ koja može biti bilo gdje unutar skupa $[0, \infty]$. Naravno, o skupu $X$ ovisi koje će vrijednosti imati $s_X$ i $\mathcal{H}^{s_X}(X)$.
Vrijednost funkcije $\mathcal{H}^s(X)$ za bilo koji $s$ može biti $0, \infty$ ili neka konačna vrijednost (što je moguće samo u kritičnoj vrijednosti).

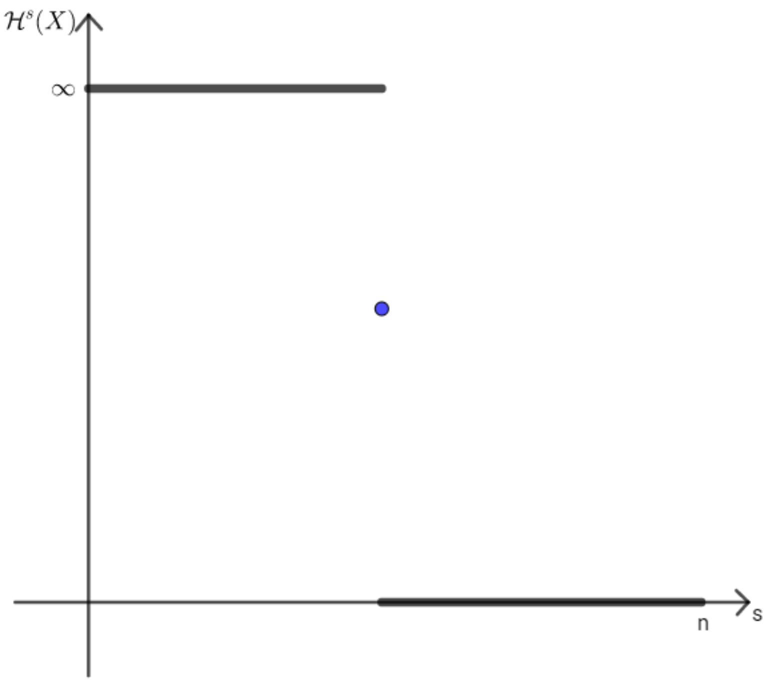
**Definicija 3.1.12.** *[1, 7] Hausdorffova dimenzija skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$, označena s $\dim_H X$, je kritična vrijednost $s_X$ u kojoj funkcija s-dimenzionalne Hausdorffove mjere $s \mapsto \mathcal{H}^s(X)$ prelazi iz $\infty$ u $0$. Tada vrijedi:*

$$\dim_H X = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\}. \tag{3.12}$$

*Napomena.* Hausdorffova dimenzija podskupa od $\mathbb{R}^n$ ne može biti veća od $n$. Naravno, ona je uvijek veća ili jednaka 0. U Korolaru 3.1.16, pokazat ćemo da je Hausdorffova dimenzija svakog podskupa od $\mathbb{R}^n$ manja ili jednaka $n$.

### 3.1.4 Svojstva Hausdorffove dimenzije

Iako smo definirali Hausdorffovu dimenziju korištenjem pojma Hausdorffove mjere, iz definicije nije odmah jasno kako ona opisuje veličinu skupova niti kakve veze ima s fraktalnim skupovima. Proučimo zato njezina svojstva.
Većina osnovnih svojstava slijedi iz svojstava $s$-dimenzionalne Hausdorffove mjere.




Slika 3.1: Graf funkcije Hausdorffove mjere skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$ obzirom na varijablu $s$, $s \mapsto \mathcal{H}^s(X)$

**Propozicija 3.1.13** (Svojstva Hausdorffove dimenzije,[7],[1])**.** *Hausdorffova dimenzija ima sljedeća osnovna svojstva:*

1. $\dim_H \emptyset = 0$.
2. $\dim_H X_1 \leq \dim_H X_2$, *za svaki par* $X_1 \subseteq X_2$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ *(monotonost Hausdorffove dimenzije).*
3. $\dim_H(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_H X_i$ *za bilo koju prebrojivu familiju* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *podskupova od* $\mathbb{R}^n$ *(prebrojiva stabilnost Hausdorffove dimenzije).*
4. *Ako je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *tada je* $0 \leq \dim_H X \leq n$.

*Dokaz.* Prva tri svojstva slijede direktno iz definicije Hausdorffove mjere.

1. Dokazali smo u Propoziciji 3.1.6 da je $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, za svaki $s > 0$, pa po definiciji Hausdorffove dimenzije (3.12) slijedi da je $\dim_H(\emptyset) = 0$.

2. Neka je $X_1 \subseteq X_2$. U Propoziciji 3.1.6 (2) smo pokazali da tada za svaki $s \geq 0$ vrijedi:
$$\mathcal{H}^s(X_1) \leq \mathcal{H}^s(X_2). \tag{3.13}$$
Ako je $\mathcal{H}^s(X_1) = \infty$ za neki $s$, tada je po (3.13) za taj $s$ i $\mathcal{H}^s(X_2) = \infty$, pa je:
$$\sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X_1) = \infty\} \leq \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X_2) = \infty\}.$$
Po Definiciji 3.1.12, slijedi:
$$\dim_H X_1 \leq \dim_H X_2.$$

3. Neka je $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija podskupova od $\mathbb{R}^n$ i neka je $s \geq 0$. Po svojstvu prebrojive stabilnosti Hausdorffove mjere Propozicije 3.1.6 (3), vrijedi:
$$\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_i). \tag{3.14}$$
Kako je za svaki $i \in \mathbb{N}$, $X_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$, po prethodno dokazanom svojstvu (2) vrijedi:
$$\dim_H X_i \leq \dim_H \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\Big).$$
Prema tome, $\dim_H \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big)$ je gornja međa skupa $\{\dim_H X_i : i \in \mathbb{N}\}$. Kako bismo pokazali da je $\dim_H \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big)$ supremum tog skupa, pretpostavimo suprotno. Ako $\dim_H \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big)$ nije supremum, onda postoji $\epsilon > 0$ takav da vrijedi:
$$\dim_H \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\Big) - \epsilon > \dim_H X_i,$$
za svaki $i \in \mathbb{N}$. Označimo $\dim_H \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big) = s_0$. Tada $\dim_H X_i < s_0 - \epsilon$, pa $\mathcal{H}^{s_0-\epsilon}(X_i) = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Također, $\mathcal{H}^{s_0-\epsilon}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big) = \infty$, što je kontradikcija s (3.14). Dakle, $\dim_H \big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\big)$ je supremum skupa $\{\dim_H X_i : i \in \mathbb{N}\}$.

4. Hausdorffova dimenzija je očito nenegativna. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen skup. Naime, ako je omeđen u $\mathbb{R}^n$, sadržan je u nekoj $n$-dimenzionalnoj kugli velikog radijusa, čija je Hausdorffova dimenzija po Korolaru 3.1.16 jednaka $n$, pa je po svojstvu (2) $\dim_H X \leq n$.
Svaki podskup $X$ od $\mathbb{R}^n$ možemo prikazati kao prebrojivu uniju $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ograničenih skupova (ima prebrojivi pokrivač, pa možemo presjeći elemente pokrivača s X), a po prethodno dokazanom, $\dim_H X_i \leq n$ za svaki ograničen skup $X_i$. Po svojstvu (3) Hausdorffove dimenzije, za svaki $X \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi: $\dim_H X \leq n$.

□

Za jednočlani skup $X = \{x\}$ je $\mathcal{H}^s_\delta(\{x\}) = 0$ za svaki $\delta > 0$ i $s > 0$, pa je $\mathcal{H}^s(\{x\}) = 0$ za svaki $s > 0$ te je $\dim_H(\{x\}) = 0$ po Definiciji 3.1.12. Naime, jednočlani skup možemo pokriti jednočlanim pokrivačem $U$ dijametra $\delta$, pa kad $\delta \to 0$, $|U|^s \to 0$. Primjenimo svojstvo (3) Propozicije 3.1.13, pa dobivamo:

**Korolar 3.1.14.** *[1] [7] Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ prebrojiv, tada je* $\dim_H X = 0$.

**Propozicija 3.1.15.** *Hausdorffova dimenzija n-dimenzionalne otvorene kugle u $\mathbb{R}^n$ jednaka je n.*

*Skica dokaza.* Neka je $K(0,R)$ $n$-dimenzionalna kugla radijusa $R > 0$ sa središtem u ishodištu u $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $c_n$ $n$-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru jedinične kugle u $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi:

$$\mathcal{L}^n(K(0,\delta)) = c_n\delta^n,$$

$$\mathcal{L}^n(K(0,R)) = c_nR^n.$$

Prema tome, u $n$-kuglu $K(0,R)$ 'stane' $\frac{c_nR^n}{c_n\delta^n} = \left(\frac{R}{\delta}\right)^n$ $\delta$-kugala, pa je:

$$\mathcal{H}^s_\delta(K(0,R)) \sim (2\delta)^s\Big(\frac{R}{\delta}\Big)^n = 2^sR^n\delta^{s-n}, \text{ kad } \delta \to 0.$$

Pustimo li $\delta \to 0$, slijedi:

$$\mathcal{H}^s(K(0,R)) = \begin{cases} 0, & s > n, \\ \infty, & s < n. \end{cases}$$

Stoga je za svaki $R > 0$:

$$\dim_H(K(0,R)) = n.$$

**Korolar 3.1.16.** *[1] Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, tada je* $\dim_H X = n$.

*Dokaz.* Budući da $X$ sadrži kuglu pozitivnog $n$-dimenzionalnog volumena, čija je Hausdorffova dimenzija po Propoziciji 3.1.15 jednaka $n$, po svojstvu monotonosti Hausdorffove dimenzije iz Propozicije 3.1.13, $\dim_H X \geq n$, pa zbog 4. svojstva Propozicije 3.1.13, vrijedi $\dim_H X = n$. □

**Propozicija 3.1.17** (Hausdorffova dimenzija Hölderovih transformacija skupova, [1])**.**

1. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $f : X \to \mathbb{R}^m$ Hölderova s eksponentom $\alpha > 0$. Tada* $\dim_H f(X) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \dim_H X$.
   *Posebno, ako je f Lipschitzova funkcija, onda je:* $\dim_H f(X) \leq \dim_H X$.

2. *Ako je* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *bi-Lipschitzova funkcija, tada* $\dim_H f(X) = \dim_H X$.

*Dokaz.*

1. Neka je $s > \dim_H X$. Po Propoziciji 3.1.9, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(X) = 0$, gdje je $c$ konstanta iz Definicije 3.1.8 Hölderove funkcije. Kako je Hausdorffova mjera uvijek nenegativna, slijedi da je za svaki $s > \dim_H X$:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(X)) = 0.$$

   Po Definiciji 3.1.12 slijedi da je $\dim_H f(X) \leq s/\alpha$ za svaki $s > \dim_H X$, pa stoga vrijedi i $\dim_H f(X) \leq \frac{\dim_H X}{\alpha}$. Zaključak za Lipschitzova preslikavanja slijedi kada uzmemo $\alpha = 1$.

2. Ako je $f$ bi-Lipschitzova funkcija, tada je $f : X \to f(X)$ bijekcija s inverzom $f^{-1} : f(X) \to X$. Obje su funkcije Lipschitzove. Primijenjujući 1. tvrdnju na $f : X \to f(X)$ i $f^{-1} : f(X) \to X$ dobivamo $\dim_H X = \dim_H f^{-1}(f(X)) \leq \dim_H f(X)$.

□

**Korolar 3.1.18.** *[1] Neka je* $\pi(X)$ *oznaka za ortogonalnu projekciju skupa* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *na neki zadani pravac kroz ishodište. Vrijedi:* $\dim_H \pi(X) \leq \min\{1, \dim_H X\}$.

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je zadani pravac kroz ishodište $x$-os. Pokažimo da je $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitzova. Naime, trebamo pokazati da postoji $c > 0$ takav da vrijedi:

$$d_2(\pi(x), \pi(y)) \leq c d_2(x, y),$$

to jest,

$$|x_1 - x_2| \leq c\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Kako je $(x_1 - x_2)^2, (y_1 - y_2)^2 \geq 0$, takav $c > 0$ sigurno postoji. Dakle, $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je Lipschitzova. Tada po Propoziciji 3.1.17 (1), vrijedi: $dim_H \pi(X) \leq dim_H X$. Nadalje, po Propoziciji 3.1.13 (4), vrijedi $dim_H \pi(X) \leq 1$ jer je $\pi(X) \subseteq \mathbb{R}$. □

# 3.2 Box dimenzija

## 3.2.1 Definicije box dimenzije

Manje poznata fraktalna dimenzija od Hausdorffove je box dimenzija. Njezina prednost je što joj je definicija intuitivnija te je relativno lako računljiva. Za razliku od Hausdorffove dimenzije, ne definira se preko mjere. Vidjet ćemo da se za mnoge (ali ne za sve) fraktalne skupove Hausdorffova i box dimenzija podudaraju te da je Hausdorffova dimenzija uvijek manja ili jednaka od box dimenzije.

Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen. Za svaki $\delta > 0$ tražimo najmanji broj skupova dijametra najviše $\delta$ koji čine pokrivač skupa $X$. Taj broj označavamo s $N_\delta(X)$. Očito je konačan za svaki $\delta > 0$ jer je skup $X$ omeđen. Dimenzija skupa $X$ odražava način na koji $N_\delta(X)$ raste kada $\delta \to 0$. Za očekivati je, što je taj rast u $\delta$ brži kada $\delta \to 0$, to je skup $X$ "razgranatiji". Ako $N_\delta(X)$ za pozitivne konstante $c > 0$ i $s \geq 0$ zadovoljava "zakon potencije":

$$N_\delta(X) \sim c\delta^{-s}, \text{ kad } \delta \to 0,$$

box dimenzija skupa $X$ bit će $s$ (vidjet ćemo kasnije kad uvedemo definiciju box dimenzije). Oznaka $\sim$ gore znači da se $N_\delta(X)$ *asimptotski ponaša* kao $c\delta^{-s}$ kad $\delta \to 0$, to jest da vrijedi:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{N_\delta(X)}{c\delta^{-s}} = 1. \tag{3.15}$$

Dakle, što je $s$ veći, $N_\delta$ brže raste kad $\delta \to 0$ i skup je razgranatiji, a box dimenzija veća. Stoga je box dimenzija dobra "mjera" za "razgranatost" skupa u prostoru.

Pretpostavimo da se $N_\delta$ ponaša kao u (3.15). Zapišimo $N_\delta(X) = c\delta^{-s} + R(\delta)$, gdje je $R$ funkcija od $\delta$. Uvrštavanjem u (3.15), slijedi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \to 0} \frac{c\delta^{-s} + R(\delta)}{c\delta^{-s}} = 1,\\
&\lim_{\delta \to 0} \Big(1 + \frac{R(\delta)}{c\delta^{-s}}\Big) = 1,\\
&\lim_{\delta \to 0} \frac{R(\delta)}{c\delta^{-s}} = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
&N_\delta(X) = c\delta^{-s} + R(\delta), \quad \Big/ \log\\
&\log N_\delta(X) = \log\Big(c\delta^{-s}\Big(1 + \frac{R(\delta)}{c\delta^{-s}}\Big)\Big),\\
&\log N_\delta(X) = \log c - s\log\delta + \log\Big(1 + \frac{R(\delta)}{c\delta^{-s}}\Big), \quad \Big/ : (-\log\delta)\\
&\frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta} = \frac{\log c}{-\log\delta} + s + \frac{\log\Big(1 + \frac{R(\delta)}{c\delta^{-s}}\Big)}{-\log\delta}, \quad \Big/ \lim_{\delta \to 0}\\
&\lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta} = s.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Izraz (3.16) bit će skoro definicija box-dimenzije. Međutim, općenito za omeđeni skup $X$ taj limes ne mora postojati (jer se $N_\delta(X)$ ne mora ponašati kao potencija), pa koristimo limes inferior i limes superior u definiciji. Prisjetimo se definicije limesa inferiora i superiora:

**Definicija 3.2.1** ([1])**.** *Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Limes inferior definiramo kao:*

$$\liminf_{x\to 0} f(x) := \lim_{\delta\to 0}\big(\inf\{f(x) : 0 < x < \delta\}\big).$$

*Limes uvijek postoji u proširenom skupu $[-\infty, \infty]$ jer je $\inf\{f(x) : 0 < x < \delta\}$ ili $-\infty$ za sve $\delta > 0$ ili raste kada se $\delta$ smanjuje. Limes superior definiramo kao:*

$$\limsup_{x\to 0} f(x) := \lim_{\delta\to 0}(\sup\{f(x) : 0 < x < \delta\}).$$

*i ovaj limes uvijek postoji u proširenom skupu $[-\infty, \infty]$ jer je $\sup\{f(x) : 0 < x < \delta\}$ ili $\infty$ za sve $\delta > 0$ ili pada kada se $\delta$ smanjuje.*

Definiramo redom *donju i gornju box dimenziju* skupa $X$:

**Definicija 3.2.2** ([1],[7])**.** *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen. Neka je $N_\delta(X)$ najmanji broj skupova dijametra najviše $\delta$ koji čine pokrivač skupa $X$. Donja box dimenzija skupa $X$ definirana je kao:*

$$\underline{\dim}_B X := \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta}, \tag{3.17}$$

*a gornja box dimenzija kao:*

$$\overline{\dim}_B X := \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta}. \tag{3.18}$$

*Ukoliko su vrijednosti $\liminf$ i $\limsup$ jednake, kažemo da postoji box dimenzija skupa $X$ i tu vrijednost nazivamo box dimenzijom skupa $X$:*

$$\dim_B X = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta}. \tag{3.19}$$

Kako je $\frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta} > 0$ za male $\delta$, limes inferior i superior uvijek postoje u skupu $[0, +\infty]$. Nadalje, uvijek vrijedi $\underline{dim}_B X \leq \overline{dim}_B X$.

Pogledajmo još nekoliko alternativnih načina na koje možemo definirati box dimenziju. Neka je $\delta > 0$. Definirajmo *$\delta$-mrežu* skupa $\mathbb{R}^n$ kao familiju $n$-dimenzionalnih kocki stranice duljine $\delta$:

$$\{[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times ... \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta] : m_i \in \mathbb{Z},\ \ i = 1, ..., n\}.$$

Imajmo na umu da je "kocka" u $\mathbb{R}$ segment, u $\mathbb{R}^2$ zatvoreni kvadrat, a u $\mathbb{R}^n$ je zovemo zatvorenom $n$-kockom.

**Definicija 3.2.3** (Ekvivalentne definicije box dimenzije, [1])**.** *Ako postoji box dimenzija omeđenog skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$, to jest ako postoji limes u* (3.19)*, za $N_\delta$ u definiciji box dimenzije možemo odabrati bilo što od sljedećeg, a da se vrijednost box dimenzije ne promijeni:*

1. *najmanji broj skupova dijametra najviše $\delta$ koji čine pokrivač od $X$,*
2. *najmanji broj zatvorenih kugli radijusa $\delta$ koje čine pokrivač od $X$,*
3. *najmanji broj $n$-kocki s bridom duljine $\delta$ koje čine pokrivač od $X$,*
4. *broj $n$-kocki $\delta$-mreže koje presijecaju skup $X$,*
5. *najveći broj disjunktnih kugli radijusa $\delta$ sa središtima u $X$.*

*Dokaz.* Dokazat ćemo ekvivalencije između nekih parova definicija, ostali dokazi su vrlo slični. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen.
1. $\Leftrightarrow$ 4. Neka je $N_\delta(X)$ najmanji broj skupova dijametra najviše $\delta$ koji čine pokrivač od $X$. Neka je $N'_\delta(X)$ broj $n$-kocki $\delta$-mreže koje presijecaju skup $X$. Budući da te kocke očito čine pokrivač od $X$ koji se sastoji od $N'_\delta(X)$ skupova dijametra $\delta\sqrt{n}$, vrijedi:

$$N_{\delta\sqrt{n}}(X) \leq N'_\delta(X).$$

S druge strane, svaki skup dijametra najviše $\delta$ se nalazi u najviše $3^n$ kocki $\delta$-mreže. Naime, svaki skup dijametra najviše $\delta$ se može umetnuti u $n$-kuglu radijusa $\delta$ i dijametra $2\delta$, koja, u najgorem slučaju, ako joj je središte u centru neke od kocki $\delta$-mreže, presijeca $3^n$ kocki $\delta$-mreže. Stoga je:

$$N'_\delta(X) \leq 3^n N_\delta(X).$$

Kombinirajući ove nejednakosti, logaritmiramo ih i dijelimo s $-\log\delta$ ($-\log\delta > 0$ za male $\delta$). Slijedi:

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(X)}{-\log\delta} \leq \frac{\log N'_\delta(X)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 3^n + \log N_\delta(X)}{-\log\delta}, \tag{3.20}$$

pa, uzimajući limes inferior kada $\delta \to 0$, slijedi:

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(X)}{-\log\delta} \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(X)}{-\log\delta} \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta}, \tag{3.21}$$

jer ostali pribrojnici iščezavaju u limesu. Raspišemo:

$$\begin{aligned}
-\log\delta &= -\log\Big(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\Big),\\
&= -\log(\delta\sqrt{n}) + \log\sqrt{n},\\
&= -\log(\delta\sqrt{n})\Big(1 - \frac{\log\sqrt{n}}{\log(\delta\sqrt{n})}\Big),
\end{aligned}$$

pa možemo staviti $\delta' = \delta\sqrt{n}$. Tada, kad $\delta \to 0$, i $\delta' \to 0$, a $1 - \frac{\log\sqrt{n}}{\log(\delta\sqrt{n})} \to 1$ pa slijedi:

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(X)}{-\log\delta} = \liminf_{\delta'\to 0} \frac{\log N_{\delta'}(X)}{-\log(\delta')\Big(1 - \frac{\log\sqrt{n}}{\log(\delta')}\Big)} = \liminf_{\delta'\to 0} \frac{\log N_{\delta'}(X)}{-\log(\delta')},$$

dakle,

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(X)}{-\log\delta} = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_{\delta}(X)}{-\log\delta},$$

pa prema (3.21) slijedi:

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N'_{\delta}(X)}{-\log\delta} = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_{\delta}(X)}{-\log\delta}.$$

Prema tome, definicija donje box dimenzije je jednaka bez obzira na to je li definirana preko $N_\delta(X)$ ili $N'_\delta(X)$. Ukoliko gledamo limes superior u (3.20), dobit ćemo sličan zaključak za gornju box dimenziju.

1. $\Leftrightarrow$ 5. Neka je $N_\delta(X)$ kako je definirano u prvom dijelu dokaza. Neka je sada $N''_\delta(X)$ najveći broj disjunktnih kugli radijusa $\delta$ sa središtima u $X$ i neka je $K_1, ..., K_{N''_\delta(X)}$ takva kolekcija kugli. Ako $x$ pripada skupu $X$, tada je on na udaljenosti manjoj ili jednakoj $\delta$ od jedne od kugli $K_i$ jer bismo inače mogli dodati još jednu kuglu sa središtem u $x$ i radijusom $\delta$ te formirati veću kolekciju disjunktnih kugli. Prema tome, $N''_\delta(X)$ kugli sa istim središtima kao kugle $K_i$, ali s radijusima $2\delta$, pokrivaju $X$ i vrijedi

$$N_{2\delta}(X) \leq N''_\delta(X).$$

Neka je $U_1, ..., U_{N_\delta}$ najmanja kolekcija skupova dijametra najviše $\delta$ koji čine pokrivač od $X$. Budući da familija $\{U_i\}_{i=1...N_\delta}$ mora pokrivati središta kugli $K_i$, svaka kugla $K_i$ sadrži barem jedan od skupova $U_i$. Budući da su $K_i$ disjunktne kugle, mora biti više ili jednako skupova $U_i$ nego skupova $K_i$. Stoga,

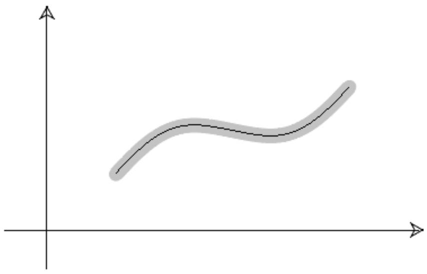
$$N''_\delta(X) \leq N_\delta(X).$$

Kao i u (3.20) i (3.21), ukoliko logaritmiramo dane nejednakosti te ih podijelimo sa $-\log\delta$ i uzimajući limes kada $\delta \to 0$ vidimo da je definicija box dimenzije jednaka bez obzira na to je li definirana pomoću $N_\delta(X)$ ili $N''_\delta(X)$. □

U praksi koristimo onu formulaciju definicije koju je za dani skup najlakše izračunati. Postoji još jedna ekvivalentina definicija box dimenzije. Uvodimo je jer je primjenjivija i lakše računljiva.
Za $\delta > 0$, definirajmo *$\delta$-okolinu* $X_\delta$ skupa $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$X_\delta := \bigcup_{y\in X} \{x \in \mathbb{R}^n : d_2(x, y) \leq \delta\}. \tag{3.22}$$

Dakle, $X_\delta$ je skup svih točaka udaljenih najviše $\delta$ od skupa $X$. Drugim riječima, unija svih zatvorenih kugala radijusa $\delta$ sa središtima u točkama skupa kao na slici 3.2.



Slika 3.2: $\delta$-okolina krivulje

Za alternativnu definiciju box dimenzije, uzimamo u obzir brzinu kojom se n-dimenzionalna Lebesgueova mjera $\mathcal{L}^n(X_\delta)$ skupa $X_\delta$ smanjuje kad $\delta \to 0$. Intuitivno je jasno da što se ona smanjuje brže, skup je manje razgranat u $\mathbb{R}^n$, pa bi fraktalna box dimenzija trebala biti manja.

**Primjer 5** ($n$-dimenzionalne Lebesgueove mjere $\delta$-okolina standardnih skupova u $\mathbb{R}^n$)**.** *Odredimo n-dimenzionalne Lebesgueove mjere $\mathcal{L}^n(X_\delta)$ $\delta$-okolina $X_\delta$ nekih standardnih skupova $X \subseteq \mathbb{R}^n$:*

1. *Neka je $X = \{x\} \subseteq \mathbb{R}^2$ točka. Njezina $\delta$-okolina je krug radijusa $\delta$, pa je njena Lebesgueova mjera:*
$$\mathcal{L}^2(X_\delta) = \delta^2\pi,$$
*pa $\mathcal{L}^2(X_\delta) \sim 0$, kad $\delta \to 0$.*

2. *Neka je $X$ segment duljine $l$ u $\mathbb{R}^3$. Njegova $\delta$-okolina izgledat će poput "kobasice", to jest bit će valjak radijusa $\delta$ i visine $l$ sa dvije polukugle radijusa $\delta$ na krajevima. Prema tome, Lebesgueova mjera $\delta$-okoline $X_\delta$ jednaka je:*
$$\mathcal{L}^3(X_\delta) = \pi l\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3.$$
*Dakle, $\mathcal{L}^3(X_\delta) \sim \pi l\delta^2$, kad $\delta \to 0$ (taj član je* vodeći *kad $\delta \to 0$ jer drugi pribrojnik ide u 0 brže od njega, kad $\delta \to 0$).*

3. *Neka je $X$ kvadrat pozitivne površine $a$, ali nul-volumena u $\mathbb{R}^3$. Njegova $\delta$-okolina $X_\delta$ bit će "zadebljani" skup $X$ čija će Lebesgueova mjera izositi:*
$$\mathcal{L}^3(X_\delta) = 2a\delta + 2\pi\sqrt{a}\delta^2 + \frac{4}{3}\pi\delta^3,$$

*pa* $\mathcal{L}^3(X_\delta) \sim 2a\delta$ *kad* $\delta \to 0$.

4. *Neka je X kugla radijusa R u* $\mathbb{R}^3$. *Njezina* $\delta$*-okolina je kugla radijusa za* $\delta$ *duljeg od radijusa kugle X. Stoga je:*

$$\mathcal{L}^3(X_\delta) = \frac{4}{3}(R+\delta)^3\pi = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2\delta + 3R\delta^2 + \delta^3),$$

*pa je* $\mathcal{L}^3(X_\delta) \sim \frac{4}{3}R^3\pi$, *kad* $\delta \to 0$, *što je volumen kugle X.*

Kasnije u Primjeru 7 u Poglavlju 4. odredit ćemo box dimenzije skupova iz Primjera 5 koristeći definiciju box dimenzije iz Propozicije 3.2.4 ispod i Lebesgueove mjere izračunate u Primjeru 5. U danim primjerima vrijedi: $\mathcal{L}^n(X_\delta) \sim c\delta^{n-s}$ kad $\delta \to 0$. Vidimo da je u našim primjerima koeficijent $c$ u vezi s Lebesgueovom mjerom originalnog skupa $X$, a u Primjeru 7 ćemo vidjeti da je $s$ upravo box dimenzija skupa $X$.
Tu ideju proširujemo i na fraktalne skupove. Naime, Propozicija 3.2.4 nam daje sljedeće: ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen i za neki $s > 0$ vrijedi:

$$\mathcal{L}^n(X_\delta) \sim \delta^{n-s}, \text{ kad } \delta \to 0, \tag{3.23}$$

box dimenzija skupa $X$ definirana u Definiciji 3.2.2 bit će jednaka $s$ (relaciju (3.23) logaritmiramo, podijelimo s $-\log\delta$ i pustimo $\lim_{\delta\to 0}$, slično kao što iz (3.15) dobijemo (3.16)). Box dimenzija uspoređuje Lebesgueovu mjeru $\delta$-okoline s potencijama od $\delta$ i detektira *kritičnu* potenciju.

**Propozicija 3.2.4.** *[1] Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđen. Tada vrijedi:*

$$\underline{\dim}_B X = n - \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(X_\delta)}{\log\delta},$$

$$\overline{\dim}_B X = n - \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(X_\delta)}{\log\delta},$$

*gdje je* $X_\delta$ $\delta$*-okolina skupa X u* $\mathbb{R}^n$, *a* $\mathcal{L}^n(X_\delta)$ *n-dimenzionalna Lebesgueova mjera skupa* $X_\delta$. *Ako su* lim sup *i* lim inf *jednaki, tada postoji limes i jednak je box dimenziji skupa X:*

$$\dim_B X = n - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(X_\delta)}{\log\delta}.$$

*Dokaz.* Ako se pokrivač skupa $X$ sastoji od $N_\delta(X)$ skupova dijametra najviše $\delta < 1$, tada skup $X_\delta$ sigurno možemo pokriti s $N_\delta(X)$ kugala radijusa $2\delta$ u kojima leže elementi pokrivača. Stoga je $\mathcal{L}^n(X_\delta) \leq N_\delta(X) c_n (2\delta)^n$, gdje je $c_n$ $n$-dimenzionalna Lebesgueova mjera jedinične kugle [1] u $\mathbb{R}^n$. Logaritmiranjem i dijeljenjem s $-\log\delta$ dobijemo:

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(X_\delta)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 2^n c_n + n\log\delta + \log N_\delta(X)}{-\log\delta},$$

pa vrijedi:

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(X_\delta)}{-\log\delta} \leq -n + \underline{\dim}_B X. \tag{3.24}$$

S druge strane, ako gledamo maksimalni broj $N''_\delta(X)$ disjunktnih kugli radijusa $\delta$ sa središtima u $X$, zbrajanjem njihovih volumena dobivamo:

$$N''_\delta(X) c_n \delta^n \leq \mathcal{L}^n(X_\delta).$$

Logaritmiranjem te puštanjem $\delta \to 0$ dobivamo suprotnu nejednakost od (3.24). □

### 3.2.2 Svojstva box dimenzije

Svojstva box dimenzije jako su slična onima Hausdorffove dimenzije.

**Propozicija 3.2.5** (Svojstva box dimenzije, [1], [7])**.** *Gornja i donja box dimenzija imaju sljedeća osnovna svojstva:*

1. $\underline{\dim}_B \emptyset = \overline{\dim}_B \emptyset = 0.$

2. $\underline{\dim}_B X_1 \leq \underline{\dim}_B X_2$ *i* $\overline{\dim}_B X_1 \leq \overline{\dim}_B X_2$ *za sve* $X_1 \subseteq X_2$, $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđene u* $\mathbb{R}^n$ *(monotonost box dimenzije).*

3. $$\overline{\dim}_B\Big(\bigcup_{i=1,\dots,n} X_i\Big) = \max_{i=1,\dots,n} \overline{\dim}_B X_i,$$

   *gdje je* $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ *neka konačna familija omeđenih podskupova od* $\mathbb{R}^n$ *(konačna stabilnost gornje box dimenzije).*
   *Za donju box-dimenziju vrijedi nejednakost:*

   $$\underline{\dim}_B\Big(\bigcup_{i=1,\dots,n} X_i\Big) \geq \max_{i=1,\dots,n} \underline{\dim}_B X_i.$$

4. *Ako je* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *omeđen, tada je* $0 \leq \underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X \leq n$.

[1] Naime, volumen $n$-dimenzionalne kugle u $\mathbb{R}^n$ (njezina $n$-Lebesgueova mjera) radijusa $2\delta$ jednak je $c_n(2\delta)^n$, gdje je $c_n$ $n$-volumen jedinične kugle (vidjeti [1] za dokaz). Primijetimo da za $n = 1, 2, 3$ ta formula vrijedi.

*Dokaz.*

1. Za svaki $\delta > 0$ prazan skup možemo pokriti jednim skupom dijametra $\delta$, pa je $N_\delta(\emptyset) = 1$. Po Definiciji 3.2.2 slijedi tvrdnja.

2. Slijedi iz Definicije 3.2.2 box dimenzije jer je $N_\delta(X_1) \leq N_\delta(X_2)$ za svaki $X_1 \subseteq X_2$ i svaki $\delta > 0$.

3. Uočimo da je:
$$N_\delta(X_1 \cup X_2) \leq N_\delta(X_1) + N_\delta(X_2). \tag{3.25}$$
Naime, pokrijemo $X_1$ s $N_\delta(X_1)$ skupova dijametra $\delta$, a $X_2$ s $N_\delta(X_2)$ skupova dijametra $\delta$. Unija tih skupova (njih najviše $N_\delta(X_1) + N_\delta(X_2)$) je neki $\delta$-pokrivač od $X_1 \cup X_2$, pa vrijedi nejednakost (3.25). Razlikujemo dva slučaja:

   a) $N_\delta(X_1) \leq N_\delta(X_2)$
   Tada je $N_\delta(X_2) = \max\{N_\delta(X_1), N_\delta(X_2)\}$, pa je i $\overline{\dim}_B(X_1) \leq \overline{\dim}_B(X_2)$, to jest $\overline{\dim}_B(X_2) = \max\{\overline{\dim}_B(X_1), \overline{\dim}_B(X_2)\}$. Prema (3.25) vrijedi $N_\delta(X_1 \cup X_2) \leq 2N_\delta(X_2)$. Logaritmiranjem i dijeljenjem s $-\log\delta$ dobivamo:
$$\frac{\log N_\delta(X_1 \cup X_2)}{-\log\delta} \leq \frac{\log 2}{-\log\delta} + \frac{\log N_\delta(X_2)}{-\log\delta}. \tag{3.26}$$
   Pustimo li s obje strane $\limsup$ kad $\delta \to 0$, dobivamo:
$$\overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2) \leq \overline{\dim}_B(X_2). \tag{3.27}$$

   b) $N_\delta(X_1) \geq N_\delta(X_2)$
   Analogno dobivamo nejednakost:
$$\overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2) \leq \overline{\dim}_B(X_1).$$

   Iz a) i b) slijedi:
$$\overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2) \leq \max\{\overline{\dim}_B X_1, \overline{\dim}_B X_2\}. \tag{3.28}$$
Suprotna nejednakost slijedi iz toga da su $X_1, X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$ i iz svojstva 2. Propozicije 3.2.5. Naime, $\overline{\dim}_B X_1 \leq \overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2)$ i $\overline{\dim}_B X_2 \leq \overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2)$, pa je:
$$\max\{\overline{\dim}_B X_1, \overline{\dim}_B X_2\} \leq \overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2). \tag{3.29}$$
Iz (3.28) i (3.29) slijedi:
$$\overline{\dim}_B(X_1 \cup X_2) = \max\{\overline{\dim}_B X_1, \overline{\dim}_B X_2\}.$$

Primijetimo da za puštanje $\limsup_{\delta\to 0}$ u (3.26) koristimo sljedeću nejednakost:

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Primijetimo da za infimum vrijedi suprotna nejednakost:

$$\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B.$$

Naime, elementi skupa $A + B$ su $a + b$, gdje je $a \in A$, a $b \in B$. Za svaki $a + b$ vrijedi $a + b \geq \inf A + \inf B$, pa je $\inf A + \inf B$ donja međa skupa $A + B$, a infimum je najveća donja međa, pa vrijedi $\inf(A+B) \geq \inf A+\inf B$. Zato ne možemo zaključiti nejednakost (3.27) i zatim jednakost za donju box dimenziju. Naime, kako su $X_1, X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$, prema svojstvu 2. Propozicije 3.2.5, za donju box dimenziju možemo zaključiti samo nejednakost:

$$\underline{\dim}_B(X_1 \cup X_2) \geq \max\{\underline{\dim}_B X_1, \underline{\dim}_B X_2\}.$$

4. Prve dvije nejednakosti su očite. Za treću, neka je $X$ smješten u dovoljno veliku $n$-kocku $C$ neke fiksne stranice $R > 0$ (možemo ga smjestiti u neku $n$-kocku dovoljno velike, fiksne stranice jer je omeđen). Budući da je $X \subseteq C$ dobivamo:

$$N'_\delta(X) \leq N'_\delta(C) \leq c\delta^{-n}, \tag{3.30}$$

za neku konstantu $c > 0$ i male $\delta > 0$, gdje su $N'_\delta(X), N'_\delta(C)$, kao u Definiciji 3.2.3 broj kocaka $\delta$-mreže koje presijecaju $X$, odnosno $C$. Objasnimo sada zadnju nejednakost. Lako se geometrijski vidi da je $N'_\delta(C) = \left\lfloor \left(\frac{R}{\delta}\right)^n \right\rfloor$, pa je:

$$\left(\frac{R}{\delta}\right)^n \leq N'_\delta(C) \leq \left(\frac{R}{\delta}\right)^n + 1,$$

te je:

$$N'_\delta(C) \sim \left(\frac{R}{\delta}\right)^n, \text{ kad } \delta \to 0, \tag{3.31}$$

to jest:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{N'_\delta(C)}{\left(\frac{R}{\delta}\right)^n} = 1.$$

Po definiciji limesa, za svaki $\epsilon$ postoji neki $\delta_0$ takav da, ako je $0 < \delta < \delta_0$, vrijedi: $\left|\frac{N'_\delta(C)}{\left(\frac{R}{\delta}\right)^n} - 1\right| \leq \epsilon$. Sada stavimo $\epsilon = \frac{1}{2}$. Postoji $\delta_0$ takav da za svaki $\delta < \delta_0$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{N'_\delta(C)}{\left(\frac{R}{\delta}\right)^n} - 1\right| &\leq \frac{1}{2}, \\
-\frac{1}{2} \leq \frac{N'_\delta(C)}{\left(\frac{R}{\delta}\right)^n} - 1 &\leq \frac{1}{2}, \quad \Big/ \cdot \left(\frac{R}{\delta}\right)^n \\
-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{\delta}\right)^n \leq N'_\delta(C) - \left(\frac{R}{\delta}\right)^n &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{\delta}\right)^n, \\
\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{\delta}\right)^n \leq N'_\delta(C) &\leq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{R}{\delta}\right)^n, \\
\frac{1}{2} \cdot R^n \delta^{-n} \leq N'_\delta(C) &\leq \frac{3}{2} \cdot R^n \delta^{-n}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Ako uzmemo $c = \frac{3}{2} \cdot R^n$, dobivamo desnu nejednakost u (3.30). Logaritmiranjem nejednakosti (3.30) i dijeljenjem s $-\log\delta$ dobivamo:

$$\frac{\log N'_\delta(X)}{-\log\delta} \leq \frac{\log c}{-\log\delta} + n.$$

Pustimo limes kad $\delta \to 0$ i dobivamo:

$$\dim_B(X) \leq n.$$

□

**Korolar 3.2.6.** *[1] Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i omeđen, tada je* $\dim_B X = n$.

*Dokaz.* Kako je $X$ otvoren, on sadrži neku $n$-kocku $C$, dovoljno male, fiksne duljine stranice, stavimo $\delta > 0$. Kao i u dokazu gore, vrijedi $N'_\delta(X) \geq N'_\delta(C) \geq c\delta^{-n}$, gdje $c$ ne ovisi o $\delta$. Zadnja nejednakost slijedi iz (3.32) kada uzmemo $c = \frac{1}{2} \cdot R^n$. Logaritmiranjem, dijeljenjem s $-\log\delta$ te puštanjem limesa kad $\delta \to 0$, slijedi:

$$\dim_B X \geq n,$$

pa zbog 4. svojstva Propozicije 3.2.5 slijedi:

$$dim_B X = n.$$

□

**Korolar 3.2.7.** *[1] Ako je X neprazan i konačan, tada je $dim_B X = 0$.*

*Dokaz.* Budući da $X$ uključuje $m$ različitih točaka, $m \in \mathbb{N}$, $N_\delta(X) = m$ za svaki dovoljno mali $\delta$. Po Definiciji 3.2.2 box-dimenzije slijedi da je ona jednaka 0. □

Lipschitzove funkcije imaju važnu ulogu u fraktalnoj geometriji. Točnije, pokazali smo u Propoziciji 3.1.17 da slika skupa s obzirom na Lipschitzovo preslikavanje ima Hausdorffovu dimenziju manju ili jednaku od početnog skupa. Ovdje pokazujemo isto svojstvo za box-dimenziju. Najveći je značaj tvrdnje da, ako je jedan skup bi-Lipschitzova slika drugoga, Hausdorffova i box-dimenzija ostaju nepromijenjene. Ta činjenica nam olakšava račun, jer možemo računati dimenziju za neki jednostavniji skup koji je bi-Lipschitzova slika skupa kojem tražimo dimenziju. To ćemo vidjeti u Primjeru 11 u zadnjem poglavlju.

**Propozicija 3.2.8** (Box dimenzija Hölderovih transformacija skupova, [1])**.**

1. *Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen i $f : X \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzova funkcija, tada je $\underline{\dim}_B f(X) \leq \underline{\dim}_B X$ i $\overline{\dim}_B f(X) \leq \overline{\dim}_B X$.*
2. *Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen i $f : X \to \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitzova funkcija, tada je $\underline{\dim}_B f(X) = \underline{\dim}_B X$ i $\overline{\dim}_B f(X) = \overline{\dim}_B X$.*
   *Specijalno, ako postoji $\dim_B X$, tada postoji i $\dim_B f(X)$ i jednaka je $\dim_B X$.*

*Dokaz.*

1. Neka je $\{U_i\}_{i=1,\dots,N_\delta(X)}$ najmanji konačan $\delta$-pokrivač od $X$, kao u definiciji box dimenzije. Tada je i $\{U_i \cap X\}_{i=1,\dots,N_\delta(X)}$ konačan $\delta$-pokrivač od $X$. Kako je $f$ Lipschitzova na $X$ s konstantom $c > 0$, $\{f(U_i \cap X)\}_{i=1,\dots,N_\delta(X)}$ je $c\delta$-pokrivač od $f(X)$. Naime, po Definiciji 3.1.8 vrijedi: $|f(U_i \cap X)| \leq c|U_i \cap X| \leq c|U_i| \leq c\delta$. Stoga je $N_{c\delta}(f(X)) \leq N_\delta(X)$ za svaki $\delta > 0$, jer je $\{f(U_i \cap X)\}_{i=1\dots N_\delta(X)}$ s $N_\delta(X)$ elemenata, po prethodno dokazanom, jedan $\delta$-pokrivač skupa $f(X)$. Logaritmitanjem i dijeljenjem s $-\log\delta > 0$, dobivamo:
$$\frac{\log N_{c\delta}(f(X))}{-\log(c\delta) + \log c} \leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta},$$
$$\frac{\log N_{c\delta}(f(X))}{-\log(c\delta)\left(1 - \frac{\log c}{\log(c\delta)}\right)} \leq \frac{\log N_\delta(X)}{-\log\delta}.$$
   Stavimo $\delta' = c\delta$, pa $\delta' \to 0$ kad $\delta \to 0$. Kako je $c$ konstanta, $1 - \frac{\log c}{\log(c\delta)} \to 1$ kad $\delta \to 0$. Naime, $1 - \frac{\log c}{\log(c\delta)} = 1 - \frac{\log c}{\log c + \log\delta} = 1 - \frac{\log c}{\log c\left(1 + \frac{\log\delta}{\log c}\right)} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\log\delta}{\log c}}$. Množenjem zadnje nejednakosti s $1 - \frac{\log c}{\log(c\delta)}$ i uzimajući $\liminf$ i $\limsup$ kad $\delta \to 0$ (tj. $\delta' \to 0$), dobivamo tvrdnju.

2. Ako je $f$ bi-Lipschitzova funkcija, tada je $f : X \to f(X)$ bijekcija s inverzom $f^{-1}$ : $f(X) \to X$ koji je također Lipschitzova funkcija. Primijenjujući 1. na $f^{-1}$ dobivamo $\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B f^{-1}(f(X)) \leq \underline{\dim}_B f(X)$ i $\overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B f^{-1}(f(X)) \leq \overline{\dim}_B f(X)$, a obratne nejednakosti su dane u 1.

□

Sljedeća svojstva slijede iz Propozicije 3.2.8:

**Korolar 3.2.9.** *[1] Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđen i neka je $f : X \to \mathbb{R}^2$ afina funkcija. Tada vrijedi: $\underline{\dim}_B f(X) = \underline{\dim}_B X$ i $\overline{\dim}_B f(X) = \overline{\dim}_B X$.*

*Dokaz.* Sjetimo se da je afina funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funkcija oblika $f(x) = ax + b$, gdje je $a \in \mathbb{R}$, a $x, b \in \mathbb{R}^2$. Pokazujemo da je afina funkcija $f$ bi-Lipschitzova. Trebamo pokazati da postoje konstante $c_1, c_2 > 0$ takve da za svaki $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi:

$$c_1 d_2(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq c_2 d_2(x, y).$$

Naime,

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &= d_2(ax + b, ay + b) \\ &= \sqrt{(ax_1 + b - ay_1 - b)^2 + (ax_2 + b - ay_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{a^2(x_1 - y_1)^2 + a^2(x_2 - y_2)^2} \\ &= |a| \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= |a| d_2(x, y). \end{aligned}$$

Stoga, sigurno postoje takve konstante $c_1, c_2$, na primjer $c_1 = c_2 = |a|$, pa je svaka afina funkcija bi-Lipschitzova. Tvrdnja sada slijedi po svojstvu 2. Propozicije 3.2.8. □

**Korolar 3.2.10.** *[1] Neka je $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lipschitzova funkcija. Tada je $\dim_B \Gamma(g) = 1$ gdje je $\Gamma(g) = \{(x, g(x)) : x \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ graf funkcije $g$.*

*Dokaz.* Trebamo pokazati da je funkcija $f : [0, 1] \to \Gamma(g)$ dana sa $f(x) = (x, g(x))$ bi-Lipschitzova.
Po definiciji euklidske metrike vrijedi:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_2((x, g(x)), (y, g(y))) = \sqrt{(y - x)^2 + (g(y) - g(x))^2},$$

pa, kako je $g$ Lipschitzova, vrijedi:

$$\sqrt{(y - x)^2 + (g(y) - g(x))^2} \leq \sqrt{(y - x)^2 + c^2(y - x)^2} = \sqrt{(1 + c^2)(y - x)^2} = \sqrt{1 + c^2}\, d_2(x, y),$$

gdje je $c$ konstanta Lipschitzove funkcije $g$. S druge strane, očito je $d_2(x,y) = |y-x| \leq \sqrt{(y-x)^2 + (g(y)-g(x))^2} = d_2(f(x), f(y))$. Budući da za $x, y \in [0,1]$ vrijedi $d_2(x,y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \sqrt{1+c^2}d_2(x,y)$, $f$ je bi-Lipschitzova. Po propoziciji 3.2.8 (2), $\dim_B \Gamma(g) = \dim_B[0,1] = 1$. □

**Korolar 3.2.11.** *[1] Neka je $\pi(X)$ oznaka za ortogonalnu projekciju skupa $X$ sa $\mathbb{R}^2$ na neki dani pravac kroz ishodište. Tada vrijedi: $\underline{\dim}_B\pi(X) \leq min\{1, \underline{\dim}_B X\}$, sa sličnom nejednakosti za $\overline{\dim}_B\pi(X)$.*

*Dokaz.* Isto kao u dokazu Korolara 3.1.18 za Hausdorffovu dimenziju. □

## 3.3 Usporedba Hausdorffove i box dimenzije

**Propozicija 3.3.1.** *[1] Za svaki neprazan ograničen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

$$\dim_H X \leq \underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X.$$

*Dokaz.* Za $s < \dim_H(X)$, po Propoziciji 3.1.11 vrijedi: $1 < \mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(X)$. Po definiciji limesa, postoji $\delta_0$, takav da za svaki $\delta < \delta_0$ vrijedi:

$$1 \leq \mathcal{H}^s_\delta(X). \tag{3.33}$$

Kako je $\mathcal{H}^s(X) > 1$, postoji $\epsilon > 0$ takav da je i $\mathcal{H}^s(X) > 1+\epsilon$. Po definiciji $\mathcal{H}^s(X)$ preko limesa, za taj $\epsilon$ postoji $\delta_0$ takav da za svaki $\delta < \delta_0$ vrijedi: $|\mathcal{H}^s_\delta(X) - \mathcal{H}^s(X)| < \epsilon$, pa je $\mathcal{H}^s(X) - \epsilon < \mathcal{H}^s_\delta(X)$ i zato po (3.33) vrijedi:

$$1 < \mathcal{H}^s_\delta(X).$$

S druge strane, vrijedi :

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq N_\delta(X)\delta^s,$$

gdje je $N_\delta(X)$ najmanji broj skupova dijametra $\delta$ koji pokriva $X$. Zato je za $\delta < \delta_0$,

$$1 \leq N_\delta(X)\delta^s.$$

Logaritmiranjem dobivamo: $0 < \log N_\delta(X) + s\log\delta$, pa slijedi da je $s \leq \liminf_{\delta\to 0}\frac{N_\delta(X)}{-\log\delta}$, za svaki $s < \dim_H(X)$. Stoga ista relacija vrijedi i za $s_0 = \underline{\dim}_H(X)$. Ako gledamo $\limsup_{\delta\to 0}$, dobivamo istu nejednakost za gornju box dimenziju. □

Primijetimo da i u slučaju da postoji $\dim_B(X)$, $\dim_H(X) \leq \dim_B(X)$ za $X$ ograničen je najbolje što općenito možemo dobiti. Jednakost općenito ne vrijedi, kao što pokazuje sljedeći primjer.

**Primjer 6.** *[7] Neka je* $X = \mathbb{Q} \bigcap [0,1]$ *skup racionalnih brojeva unutar jediničnog intervala. Tada je X prebrojiv, što povlači* $\dim_H X = 0$ *prema Korolaru 3.1.14. Ipak, X je gust na* $[0,1]$ *pa vrijedi:*

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B [0,1] = 1,$$

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B [0,1] = 1.$$

Naime, box dimenzija skupa $X$ jednaka je box dimenziji skupa $[0,1]$ po Propoziciji 3.2.4 jer su $\delta$-okoline skupova $X$ i $[0,1]$ zbog gustoće skupa $X$ u $[0,1]$ jednake. Naime, $X_\delta$ i $[0,1]_\delta$ su segmenti $[-\delta, 1+\delta]$, pa je $\mathcal{L}^1(X_\delta) = \mathcal{L}^1([0,1]_\delta) = 1 + 2\delta$.

Postoji još puno primjera u kojima se Hausdorffova i box dimenzija ne podudaraju (na primjer, Primjer 11). Iako neki vrlo jednostavni skupovi daju ovakvo nepovoljno ponašanje, postoji i puno primjera za koje vrijedi $\dim_H X = \underline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B X$. Na primjer, sve tri vrijednosti će biti jednake za standardne geometrijske objekte kao što su dužine, kvadrati, kocke i slično.

# Poglavlje 4

# Primjeri

**Primjer 7.** *Odredimo box dimenziju točke, dužine i skupa pozitivne površine u* $\mathbb{R}^3$.

1. *Neka je* $X = \{x\} \subset \mathbb{R}^3$. *Kako smo pokazali u Primjeru 5,* $\delta$*-okolina skupa* $X$ *u ovom je slučaju kugla radijusa* $\delta$*, pa je* $\mathcal{L}^3(X_\delta) = \frac{4}{3}\delta^3\pi$. *Prema Propoziciji 3.2.4, vrijedi:*

$$\begin{aligned}
\dim_B X &= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(\frac{4}{3}\delta^3\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(\frac{4}{3}\pi) + \log\delta^3}{\log\delta} \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \left( \frac{\log(\frac{4}{3}\pi)}{\log\delta} + \frac{\log\delta^3}{\log\delta} \right) \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \left( \frac{\log(\frac{4}{3}\pi)}{\log\delta} + \frac{3\log\delta}{\log\delta} \right) \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \left( \frac{\log(\frac{4}{3}\pi)}{\log\delta} + 3 \right) \\
&= 3 - 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(\frac{4}{3}\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - 3 - \frac{\log(\frac{4}{3}\pi)}{-\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. *Neka je* $X$ *segment duljine* $l$ *u* $\mathbb{R}^3$. *Njegova* $\delta$*-okolina je valjak s dvije polukugle na krajevima, stoga je Lebesgueova mjera* $\delta$*-okoline skupa* $X$*:* $\mathcal{L}^3(X_\delta) = \frac{4}{3}\delta^3\pi + l\delta^2\pi$.

*Prema Propoziciji 3.2.4, vrijedi:*

$$\begin{aligned}
\dim_B X &= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(\frac{4}{3}\delta^3\pi + l\delta^2\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log\delta^2 + \log(\frac{4}{3}\delta\pi + l\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - 2 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(\frac{4}{3}\delta\pi + l\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - 2 - \frac{\log(l\pi)}{-\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. *Neka je X kvadrat sa stranicom duljine a. Sada je δ-okolina skupa X kvadar s bazom $a^2$ i visinom $2\delta$ na čijim su bočnim stranama četiri poluvaljka s bazama $\delta^2\pi$ i visinama a, dok valjke spajaju četiri četvrtine kugle radijusa δ, stoga je $\mathcal{L}^3(X_\delta) = 2a^2\delta + 2a\delta^2\pi + \frac{4}{3}\delta^3\pi$. Prema Propoziciji 3.2.4, vrijedi:*

$$\begin{aligned}
\dim_B(X) &= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(2a^2\delta + 2a\delta^2\pi + \frac{4}{3}\delta^3\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log\delta + \log(2a^2 + 2a\delta\pi + \frac{4}{3}\delta^2\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - 1 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log(2a^2 + 2a\delta\pi + \frac{4}{3}\delta^2\pi)}{\log\delta} \\
&= 3 - 1 - \frac{\log(2a^2)}{-\infty} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

U Primjeru 7 vidimo da se box-dimenzija standardnih objekata poklapa s njihovom topološkom dimenzijom.

**Primjer 8.** *[1] Neka je X Cantorov skup prikazan na Slici 1.2.*

1. *Za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, s-dimenzionalna mjera $\mathcal{H}^s(X)$ Cantorovog skupa zadovoljava nejednakost $\frac{1}{2} \le \mathcal{H}^s(X) \le 1$.*

2. *Hausdorffova dimenzija Cantorovog skupa je* $\dim_H(X) = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$.

*Dokaz.* Nazovimo intervale koji čine skupove $E_k$ u konstrukciji skupa $X$ intervalima $k$ razine. Tada se $E_k$ sastoji od $2^k$ intervala $k$ razine, svaki duljine $3^{-k}$. Kako intervali iz $E_k$

čine $3^{-k}$-pokrivač od $X$, vrijedi da je $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(X) \leq 2^k 3^{-ks}$ po (3.1). Primijetimo da za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ vrijedi $2^k 3^{-ks} = 1$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Zato za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ vrijedi $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(X) \leq 1$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Hoćemo pokazati da je za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$,

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X) \leq 1.$$

Uzmimo bilo koji $\delta$ (proizvoljno mali). Tada postoji $k_\delta$ takav da je $3^{-k_\delta}$-pokrivač od $X$ ujedno i $\delta$-pokrivač od $X$. Skup svih $3^{-k_\delta}$-pokrivača od $X$ je očito podskup skupa svih $\delta$-pokrivača od $X$. Tada je $\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \mathcal{H}^s_{3^{-k_\delta}}(X)$ jer je infimum nadskupa uvijek manji ili jednak od infimuma skupa. Kako je $\mathcal{H}^s_{3^{-k_\delta}}(X) \leq 1$ za $k_\delta \in \mathbb{N}$, slijedi $\mathcal{H}^s(X) \leq 1$ prema (3.2). Preostaje pokazati da je $\mathcal{H}^s(X) \geq \frac{1}{2}$. Dovoljno je pokazati da je:

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

za svaki pokrivač $\{U_i\}$ od $X$. Cantorov skup $X$ je kompaktan jer je omeđen u $[0, 1]$ i zatvoren, kao komplement unije otvorenih skupova koje izbacujemo [6]. Zato svaki otvoreni pokrivač možemo reducirati na konačan potpokrivač. Možemo pretpostaviti da su elementi tog pokrivača otvoreni intervali. Neka je $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ jedan takav konačni pokrivač od $X$. Tada za svaki element $U_i$ postoji neki $k_i \in \mathbb{N}_0$ takav da vrijedi:

$$3^{-(k_i+1)} \leq |U_i| < 3^{-k_i}. \tag{4.2}$$

Tada $U_i$ može presijecati najviše jedan interval $k_i$ razine jer je razmak između intervala $k_i$ razine najmanje $3^{-k_i}$. Tada, za $j \geq k_i$, $j \in \mathbb{N}$, po konstrukciji, $U_i$ presjeca najviše

$$2^{j-k_i} = 2^j 3^{-sk_i} \leq 2^j 3^s |U_i|^s \tag{4.3}$$

intervala u $E_j$ (zadnja nejednakost dobivena je iz lijeve nejednakosti u (4.2)). Odaberimo dovoljno velik $j$ takav da je $j \geq k_i$, za svaki $i = 1, \dots, n$. Tada za svaki taj $j$ svaki $U_i$ iz pokrivača presijeca najviše $2^j 3^s |U_i|^s$ intervala u $E_j$. Primijetimo da $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ presijeca svih $2^j$ intervala duljine $3^{-j}$ (jer je $E_j$ nadskup Cantorovog skupa, a $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ je pokrivač Cantorovog skupa). S druge strane, po (4.3), $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ presijeca najviše $\sum_{i=1}^n 2^j 3^s |U_i|^s$ intervala u $E_j$. Usporedbom dobivamo $2^j \leq \sum_{i=1}^n 2^j 3^s |U_i|^s$, što je ekvivalentno (4.1) za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Tvrdnja 2. vrijedi jer smo dokazali da za $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, $s$-dimenzionalna mjera $\mathcal{H}^s(X)$ Cantorovog skupa zadovoljava nejednakost $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(X) \leq 1$, to jest pokazali smo da postoji kritična vrijednost $s$ Hausdorffove mjere Cantorovog skupa i da je ona jednaka $\frac{\log 2}{\log 3}$ pa $\frac{\log 2}{\log 3}$ mora biti Hausdorffova dimenzija skupa $X$ po Definiciji 3.1.12. □

Za samoslične fraktalne skupove postoji dobar način za procjenu Hausdorffove dimenzije pod pretpostavkom da ona postoji. Koristi se svojstvo samosličnosti skupa i skaliranja za Hausdorffovu mjeru. Naime, Cantorov skup $X$ se dijeli u lijevi dio $X_L = X \cap [0, \frac{1}{3}]$ i desni dio $X_D = X \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Oba dijela su očigledno slična početnom skupu ali skalirana faktorom $\frac{1}{3}$, pišemo $X_L = X_D = \frac{1}{3}X$. Vrijedi $X = X_L \cup X_D$, gdje su $X_L$ i $X_D$ disjunktni skupovi. Tako za svaki $s > 0$ vrijedi:

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X_L) + \mathcal{H}^s(X_D) = \mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}X\right) + \mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}X\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X),$$

prema Svojstvu 3. Propozicije 3.1.6 za disjunktne skupove i svojstvu skaliranja navedenom u Propoziciji 3.1.7. Uz pretpostavku da za kritičnu vrijednost $s = \dim_H X$ vrijedi $0 < \mathcal{H}^s(X) < \infty$, dijeljenjem izraza s $\mathcal{H}^s(X)$ dobivamo $1 = 2(\frac{1}{3})^s$, to jest $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

**Primjer 9.** *[1] Neka je X von-Kochova krivulja. Tada je* $\dim_H X = \frac{\log 4}{\log 3}$.
*Slično kao za Cantorov skup, zbog samosličnosti i svojstva skaliranja možemo procijeniti Hausdorffovu dimenziju von Kochove krivulje. Naime, Von Kochova krivulja se sastoji od 4 disjunktne kopije same sebe skalirane faktorom* $\frac{1}{3}$. *Tako za svaki* $s > 0$ *vrijedi:*

$$\mathcal{H}^s(X) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(X),$$

*prema svojstvu 3. Propozicije 3.1.6 i svojstvu skaliranja po Propoziciji 3.1.7. Dijeljenjem izraza s* $\mathcal{H}^s(X)$ *te logaritmiranjem, dobivamo* $s = \frac{\log 4}{\log 3}$.

Precizan dokaz da je kritična vrijednost $\mathcal{H}^s(X)$, za $s = \frac{\log 4}{\log 3}$, različita od 0 i $\infty$ može se provesti slično kao za Cantorov skup.
Istom heuristikom, može se zaključiti da je dimenzija saga Sierpinskog, ako postoji, jednaka $\frac{\log 8}{\log 3}$.

**Primjer 10.** *[1] Još jedan primjer fraktalnog skupa koji do sada nismo gledali je* Cantorova prašina. *Cantorova prašina X konstruira se tako da pođemo od zatvorenog jediničnog kvadrata. U prvom koraku dijelimo jedinični kvadrat na 16 jednakih kvadrata i potom ostavljamo 4 zatvorena kvadrata, ali tako da je u svakom stupcu jedan, a ostale brišemo. U svakom koraku konstrukcije ponavljamo postupak na preostalim kvadratima tako da svaki od njih dijelimo na 16 jednakih kvadrata i ostavljamo 4 na isti način kao u prvom koraku. Tada je* $1 \leq \mathcal{H}^1(X) \leq \sqrt{2}$ *te je* $\dim_H X = 1$ .

*Dokaz.* Skup $X$ očito možemo pokriti pokrivačem $\{U_i\}$ koji se sastoji od $4^k$ zatvorenih kvadrata stranice $4^{-k}$, to jest dijametra $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$ u $k$-tom koraku konstrukcije. Tada je $\{U_i\}$ $4^{-k}\sqrt{2}$-pokrivač od $X$, pa vrijedi $\mathcal{H}^s_{4^{-k}\sqrt{2}} \leq 4^k 4^{-sk}(\sqrt{2})^s$ prema (3.1). Za $s = 1$ sada dobivamo ocjenu $\mathcal{H}^1_{4^{-k}\sqrt{2}}(X) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Želimo pokazati da je za $s = 1$, $\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \sqrt{2}$. Uzmimo proizvoljno mali $\delta$. Tada postoji $k_\delta$ takav da je

$4^{-k_\delta}\sqrt{2}$-pokrivač od $X$ ujedno i $\delta$-pokrivač od $X$. Skup svih $4^{-k_\delta}\sqrt{2}$-pokrivača od $X$ je očito podskup skupa svih $\delta$-pokrivača od $X$. Tada je $\mathcal{H}^s_\delta(X) \leq \mathcal{H}^s_{4^{-k_\delta}\sqrt{2}}(X)$ jer je infimum nadskupa uvijek manji ili jednak od infimuma skupa. Kako je $\mathcal{H}^s_{4^{-k_\delta}\sqrt{2}}(X) \leq \sqrt{2}$ za $k_\delta \in \mathbb{N}$, slijedi $\mathcal{H}^s(X) \leq \sqrt{2}$ prema (3.2).

Neka je $\pi$ oznaka za ortogonalnu projekciju skupa na $x$-os. Poznato je da ortogonalna projekcija ne povećava udaljenosti pa vrijedi $d_2(\pi(x), \pi(y)) \leq d_2(x, y)$, za $x, y \in X$, te je $\pi$ Lipschitzova funkcija. Iz konstrukcije skupa $X$ vidi se da je $\pi(X)$ zapravo cijeli interval $[0, 1]$ (jer se u svakom koraku konstrukcije u svakom stupcu ostavlja po jedan kvadrat). Prema Propoziciji 3.1.9 slijedi:

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \mathcal{H}^1(\pi(X)) \leq \mathcal{H}^1(X). \tag{4.4}$$

Naime, $[0, 1]$ je kompaktan i svaki otvoreni $\delta$-pokrivač ima konačan potpokrivač otvorenim intervalima koji je i dalje pokrivač skupa $[0, 1]$. Podešavanjem skupova u pokrivaču presjeci se mogu učniti proizvoljno malim i pokazuje se da je $\mathcal{H}^1_\delta([0,1]) = 1$ za svaki $\delta > 0$. Onda je po Definiciji 3.1.5 $\mathcal{H}^1([0,1])$ očito jednaka 1. Iz (4.4) slijedi $\mathcal{H}^1(X) \geq 1$. □

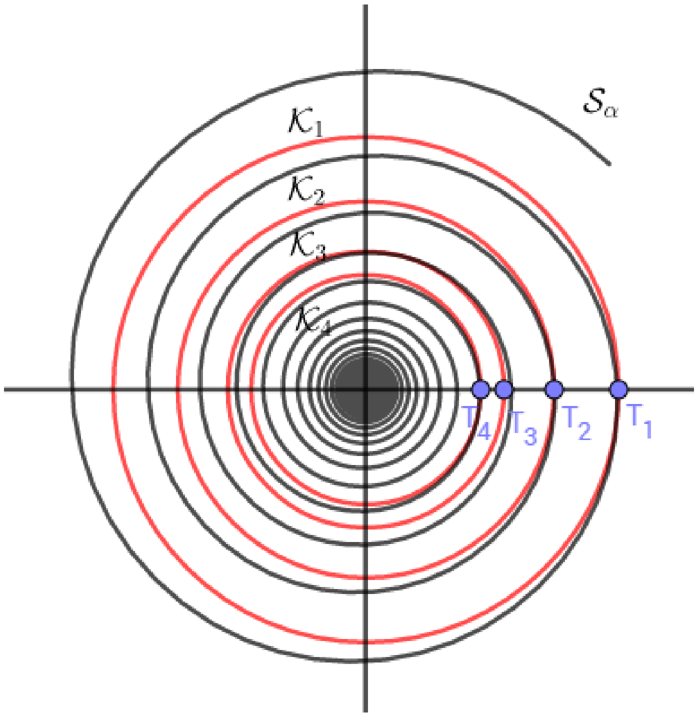
**Primjer 11.** *[4] [8] Odredimo duljinu i fraktalne dimenzije (Hausdorffovu i box dimenziju) spirale definirane kao u* (1.1).

Uzmimo $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, te definirajmo spiralu $\mathcal{S}_\alpha$ kao skup točaka:

$$\mathcal{S}_\alpha := \left\{ \left( \frac{1}{t^\alpha}\cos(t), \frac{1}{t^\alpha}\sin(t) \right) : t \in (1, \infty) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Ranije smo utvrdili da za različite $\alpha$ dobivamo spirale različite "gustoće". Primijetimo da za $\alpha = 0$ dobivamo kružnicu radijusa 1, koja je konačne duljine. Primjećujemo da, što je $\alpha$ veći, to je gustoća manja. Za spiralu $\mathcal{S}_\alpha$ odredimo duljinu i fraktalne dimenzije. Radi jednostavnosti računa, 'namotaje' spirale aproksimiramo koncentričnim kružnicama $\mathcal{K}_i, i \in \mathbb{N}$, sa središtima u ishodištu, a koje sijeku os $x$ u točkama $T_i$ presjeka početne spirale i $x$-osi, kao što je prikazano na Slici 4.1. Spirala siječe $x$-os u točkama oblika $T_i = \left(\frac{1}{(2i\pi)^\alpha}, 0\right)$, $i \in \mathbb{N}$. Naime, sve točke na $x$-osi imaju $y$-koordinatu jednaku 0. Uočimo da, ukoliko želimo dobiti točke na $x$-osi, trebamo birati kutove $2i\pi, i \in \mathbb{N}$, pa su stoga radijusi jednaki $\frac{1}{(2i\pi)^\alpha}$. Tada je $\mathcal{K}_i = S(0, r_i)$, gdje je $r_i = d_2(0, T_i) = \frac{1}{(2i\pi)^\alpha}$, $i \in \mathbb{N}$, a $S(0, r_i)$ oznaka za kružnicu sa središtem u 0, radijusa $r_i$. Označimo s $\mathcal{K}_\alpha = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_i$ uniju kružnica koja aproksimira čitavu spiralu $\mathcal{S}_\alpha$.

1. **Duljina spirale**
   Duljina kružnice $\mathcal{K}_i$ koja aproksimira $i$-ti "namotaj" spirale jednaka $\ell(\mathcal{K}_i) = \frac{1}{(2i\pi)^\alpha} \cdot 2\pi$.




Slika 4.1: Aproksimacija spirale kružnicama

Prema tome, duljina aproksimacije cijele spirale bila bi jednaka:

$$\ell(\mathcal{K}_\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(\mathcal{K}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\pi}{(2i\pi)^\alpha} = (2\pi)^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}. \tag{4.5}$$

**Propozicija 4.0.1.** *[3] Red*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} \tag{4.6}$$

*realnih brojeva konvergira ili divergira u ovisnosti o* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Red* (4.6) *divergira za* $\alpha \leq 1$, *a konvergira za* $\alpha > 1$.

Primijetimo da duljina spirale i to hoće li ona biti konačna ovisi o tome kakav je $\alpha$, to jest o konvergenciji reda (4.6). Naime, za $\alpha > 1$, po Propoziciji 4.0.1 red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ konvergira, pa ima konačnu sumu. Dakle, za $\alpha > 1$, duljina spirale je konačna i može se izračunati, pa za usporedbu takvih spirala ne trebamo fraktalnu dimenziju. S druge strane, za $\alpha \leq 1$, red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ divergira, pa mu je suma beskonačna, to jest dobivamo spirale beskonačne duljine. Takve spirale bit će zanimljive za fraktalnu dimenziju, pa ćemo nadalje promatrati spirale za koje je $0 < \alpha \leq 1$.

2. **Hausdorffova dimenzija spirale**
Možemo uočiti da Hausdorffova dimenzija neće biti dobar pokazatelj gustoće ispunjavanja prostora spirale. Naime, spiralu $\mathcal{S}_\alpha$ možemo prikazati kao uniju prebrojivo mnogo "namotaja". Hausdorffova dimenzija svakog od tih namotaja bit će jednaka 1 jer su namotaji samo linije konačne duljine. Zbog svojstva 3 prebrojive stabilnosti Hausdorffove dimenzije u Propoziciji 3.1.13 vrijedi da je Hausdorffova dimenzija spirale jednaka 1. Zbog toga za 'očitavanje gustoće akumulacije u 0' koristimo box dimenziju koja nema svojstvo prebrojive stabilnosti.

3. **Box dimenzija spirale**
Odredimo box dimenziju spirale $\mathcal{S}_\alpha$, te je analizirajmo u ovisnosti o parametru $\alpha \in (0,1]$. Kao i gore, aproksimirajmo spiralu unijom koncentričnih kružnica, $\mathcal{K}_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$. Računamo box dimenziju te unije preko formule iz Propozicije 3.2.4 jer nam je ona najprikladnija. Primijetimo da moramo izračunati površinu $\delta$-okoline $\mathcal{L}^2(\mathcal{K}_\alpha)$ (3.2). Prema ideji Tricota [8], $\delta$-okolina od $\mathcal{K}_\alpha$ se sastoji od dva disjunktna dijela:

   a) Jezgre $N_\delta$ koju čine $\delta$-okoline kružnica koje se sijeku. Uočimo da kada udaljenosti izmedu sjecišta spirale sa $x$-osi postanu manje od $2\delta$, $\delta$-okoline namotaja se spajaju u krug oko ishodišta.

   b) Repa $T_\delta$ koji čine $\delta$-okoline početnih konačno mnogo kružnica koje su disjunktne.

Primijetimo:
$$\mathcal{L}^2((\mathcal{K}_\alpha)_\delta) = \mathcal{L}^2(N_\delta) + \mathcal{L}^2(T_\delta).$$
Izračunajmo sad ocjene površina redom repa i jezgre, kad $\delta \to 0$. Primijetimo da jezgru i rep razdvaja *kritični indeks* $n_\delta$. Primijetimo da, što je $\delta$ manji, to je $n_\delta$ veći. Rep, jezgru i kritični indeks želimo izraziti kao funkcije od $\delta$.

1. **Kritični indeks** $n_\delta$
Intuitivno, $n_\delta$ je broj namotaja spirale prije nego što se $\delta$ okoline spoje u krug. Za kritični indeks $n_\delta \in \mathbb{N}$ vrijede nejednakosti:
$$d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) \leq 2\delta, \tag{4.7}$$
$$d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta-1}) > 2\delta. \tag{4.8}$$
Primijetimo da je tada u repu $n_\delta - 1$ kružnica.
Ocijenimo $n_\delta$ za koji vrijede nejednakosti (4.7) i (4.8). Budući da su točke $T_{n_\delta}$ i $T_{n_\delta+1}$ na $x$-osi, udaljenost $d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1})$ između točaka $T_{n_\delta}$ i $T_{n_\delta+1}$ jednaka je razlici

njihovih apscisa, pa vrijedi $d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) = \frac{1}{(2\pi n_\delta)^\alpha} - \frac{1}{(2\pi(n_\delta+1))^\alpha}$.
Prisjetimo se *Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*:

**Teorem 4.0.2.** *[3] Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka su $a, b \in I, a < b$. Tada postoji $c \in (a, b)$ takav da je $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Definirajmo
$$f(x) := \frac{1}{(2\pi x)^\alpha}, \quad x \in (0, \infty), \tag{4.9}$$
te na nju primijenimo Teorem 4.0.2. Tada po Teoremu 4.0.2 vrijedi da postoji $\xi_{n_\delta} \in (n_\delta, n_\delta + 1)$ takav da je:
$$d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) = f(n_\delta) - f(n_\delta + 1) = f'(\xi_{n_\delta})(n_\delta - (n_\delta + 1)) = -f'(\xi_{n_\delta}). \tag{4.10}$$
Odredimo sada derivaciju funkcije $f$ dane u (4.9).
$$f'(x) = \frac{-\alpha}{(2\pi)^\alpha} x^{-\alpha-1} \Rightarrow f'(\xi_{n_\delta}) = \frac{-\alpha}{(2\pi)^\alpha} {\xi_{n_\delta}}^{-\alpha-1}. \tag{4.11}$$
Za $\xi_{n_\delta}$ vrijedi $n_\delta < \xi_{n_\delta} < n_\delta + 1$. Primijenimo funkciju $f'$ na tu nejednakost. Funkcija $f'$ je očito rastuća na $(0, \infty)$ jer je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (0, \infty)$, stoga vrijedi $f'(n_\delta) < f'(\xi_{n_\delta}) < f'(n_\delta + 1)$. Sada prema (4.10) i (4.11) vrijedi:
$$\frac{-\alpha}{(2\pi)^\alpha} {n_\delta}^{-\alpha-1} < -d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) < \frac{-\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta + 1)^{-\alpha-1},$$
$$\frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha} {n_\delta}^{-\alpha-1} > d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) > \frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta + 1)^{-\alpha-1}. \tag{4.12}$$
Sad iz (4.12) i (4.7) dobivamo ocjenu na $n_\delta$ odozdo i odozgo:
$$\frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha} {n_\delta}^{-\alpha-1} > d_2(T_{n_\delta}, T_{n_\delta+1}) > \frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta + 1)^{-\alpha-1}.$$
Zbog (4.7) vrijedi:
$$\frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta + 1)^{-\alpha-1} < 2\delta.$$
Želimo procijeniti $n_\delta$ pomoću $\delta$ pa sređujemo izraz.
$$(n_\delta + 1)^{-\alpha-1} < \frac{2\delta(2\pi)^\alpha}{\alpha},$$
$$n_\delta + 1 > \left(\frac{2\delta(2\pi)^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha+1}},$$

$$n_\delta > \left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1. \tag{4.13}$$

Dobili smo ocjenu odozdo za $n_\delta$. Kako bismo dobili ocjenu odozgo, primijenimo (4.12) na $i = n_\delta - 1$. Analogno dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta - 1)^{-\alpha-1} > d_2(T_{n_\delta - 1}, T_{n_\delta}) > \frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha} n_\delta^{-\alpha-1},$$

Zbog (4.8), vrijedi:

$$\frac{\alpha}{(2\pi)^\alpha}(n_\delta - 1)^{-\alpha-1} > 2\delta,$$

$$(n_\delta - 1)^{-\alpha-1} > \frac{2\delta(2\pi)^\alpha}{\alpha},$$

$$n_\delta - 1 < \left(\frac{2\delta(2\pi)^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{-1}{\alpha+1}},$$

$$n_\delta < \left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + 1. \tag{4.14}$$

Zapišimo sada (4.13) i (4.14) kao jednu nejednakost:

$$\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1 < n_\delta < \left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + 1,$$

$$1 - \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}} < \frac{n_\delta}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}} < 1 + \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}.$$

Dobili smo ocjenu za $n_\delta$ preko $\delta$. Pogledajmo što se događa s $n_\delta$ kada se $\delta$ smanjuje, pa pustimo $\delta \to 0$ i dobivamo:

$$1 \leq \lim_{\delta \to 0} \frac{n_\delta}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}} \leq 1. \tag{4.15}$$

Prisjetimo se *teorema o sendviču*:

**Teorem 4.0.3.** *[3] Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Ako je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz za koji, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $a_n < c_n < b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, onda je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.*

Sada iz (4.15) po Teoremu 4.0.3 slijedi:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{n_\delta}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}=1.$$

Što znači da se $n_\delta$ ponaša kao $\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, kad $\delta\to 0$. Pišemo:

$$n_\delta\sim\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}},\text{kad }\ \delta\to 0.$$

2. **Rep $T_\delta$ spirale**
Lebesgueova mjera $\delta$-okoline repa bit će jednaka zbroju površina $\delta$-okolina prvih $n_\delta - 1$ kružnica $\mathcal{K}_i$. Dakle,

$$\mathcal{L}^2(T_\delta)=\sum_{i=1}^{n_\delta-1}\frac{1}{i^\alpha}2\pi\cdot 2\delta=4\pi\delta\sum_{i=1}^{n_\delta-1}i^{-\alpha}. \tag{4.16}$$

Zanima nas ponašanje $\sum_{i=1}^{n_\delta-1}i^{-\alpha}$, kad $\delta\to 0$. Dobit ćemo ocjenu odozdo i odozgo po $\delta$, tako da sumu $\sum_{i=1}^{n_\delta-1}i^{-\alpha}$, kad $\delta\to 0$. odozdo i odozgo aproksimiramo integralima. Definirajmo:

$$g(x):=x^{-\alpha},\alpha\in(0,1).$$

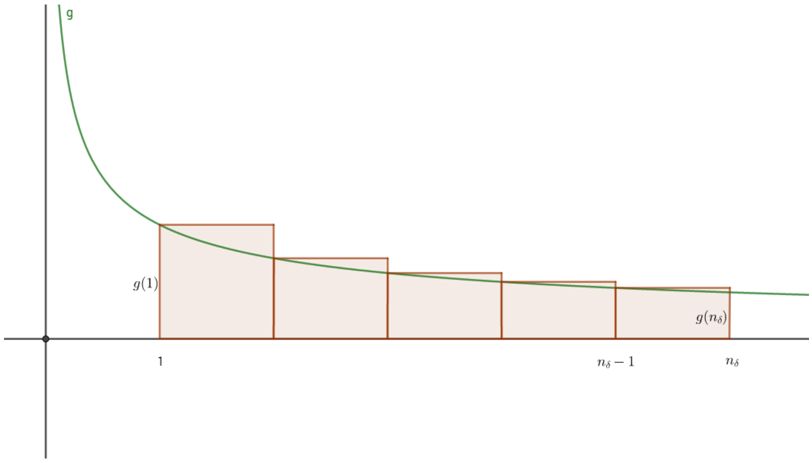
Slučaj spirale $\mathcal{S}_\alpha$ za $\alpha = 1$ nećemo promatrati, jer će postupak biti isti, ali ocjene malo drugačije.
Na grafu $g$ možemo primijetiti da površinu ispod grafa funkcije možemo aproksimirati sumom površina pravokutnika. Označimo s $P_i$ površine pravokutnika kojima jedna stranica leži na $x$-osi od $i$ do $i+1$ (duljine 1), gdje je $i = 1, ...n_\delta - 1$, a druga stranica je duljine $g(i)$ kao na Slici 4.2a. Površina pravokutnika $P_i$ tada je jednaka $g(i)$. Vidimo da je suma površina tih pravokutnika veća od površine ispod grafa funkcije $g$, pa vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n_\delta-1}P_i>\int_1^{n_\delta}x^{-\alpha}dx,$$

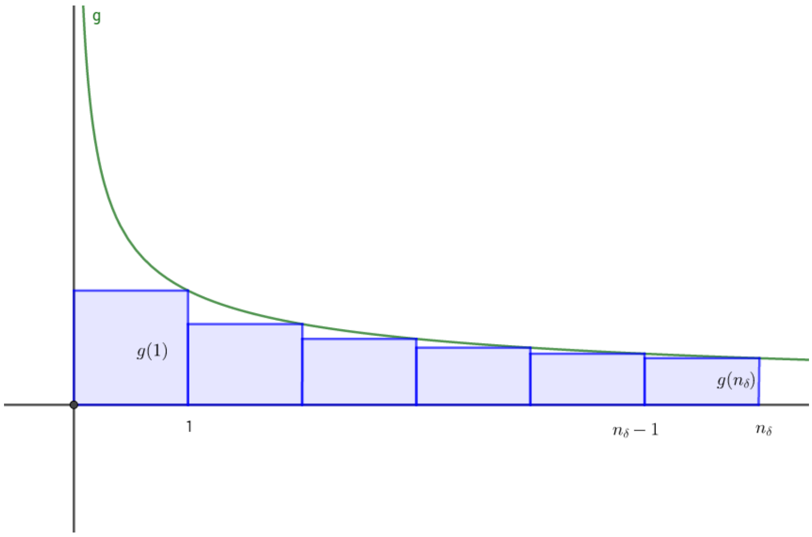
$$\sum_{i=1}^{n_\delta-1}i^{-\alpha}>\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^{n_\delta},$$

$$\sum_{i=1}^{n_\delta-1}i^{-\alpha}>\frac{{n_\delta}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}.$$

Slika 4.2: Aproksimacija površine ispod grafa pravokutnicima




(a) Procjena površine odozgo




(b) Procjena površine odozdo

Ne gledamo slučaj $\alpha = 1$ za koji je integral logaritam. Može se provesti čitav postupak za $\alpha = 1$, ali nećemo jer je postupak sličan.
Budući da želimo $\sum_{i=1}^{n_\delta - 1} i^{-\alpha}$ procijeniti pomoću $\delta$, izrazimo $\frac{n_\delta{}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ pomoću $\delta$. Ako izraz (4.13) potenciramo s $-\alpha + 1$ dobivamo:

$$n_\delta{}^{-\alpha+1} > \left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1 \right)^{-\alpha+1},$$

$$\frac{n_\delta{}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} > \frac{\left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1 \right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},$$

$$\frac{n_\delta{}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} > \frac{\left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1 \right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1},$$

pa slijedi ocjena sume odozdo:

$$\sum_{i=1}^{n_\delta - 1} i^{-\alpha} > \frac{\left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} - 1 \right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}. \tag{4.17}$$

S druge strane, neka su $Q_i$ površine pravokutnika kojima je jedna stranica na $x$-osi od $i - 1$ do $i$, a druga stranica je duljine $g(i)$ kao na Slici 4.2b. Suma površina ovih pravokutnika bit će manja od površine ispod grafa funkcije $g(x)$, pa vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n_\delta - 1} Q_i < \int_0^{n_\delta - 1} x^{-\alpha} dx,$$

$$\sum_{i=1}^{n_\delta - 1} i^{-\alpha} < \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^{n_\delta - 1},$$

$$\sum_{i=1}^{n_\delta - 1} i^{-\alpha} < \frac{n_\delta{}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}. \tag{4.18}$$

Sada iz (4.14) slijedi:

$$n_\delta{}^{-\alpha+1} < \left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + 1 \right)^{-\alpha+1},$$

$$\frac{n_\delta{}^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} < \frac{\left( \left( \frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + 1 \right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},$$

pa iz (4.18) slijedi

$$\sum_{i=1}^{n_\delta-1} i^{-\alpha} < \frac{\left(\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}+1\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}. \tag{4.19}$$

Opet, zapišimo (4.17) i (4.19) kao jednu nejednakost. Dobivamo:

$$\frac{\left(\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}-1\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} < \sum_{i=1}^{n_\delta-1} i^{-\alpha} < \frac{\left(\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}+1\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} < \sum_{i=1}^{n_\delta-1} i^{-\alpha} < \frac{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}}\right)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Podijelimo li cijelu nejednakost sa $\frac{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}$ i pustimo $\delta \to 0$, po Teoremu 4.0.3, dobivamo:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n_\delta-1} i^{-\alpha}}{\frac{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}} = 1.$$

Pišemo

$$\sum_{i=1}^{n_\delta-1} i^{-\alpha} \sim \frac{\left(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1} = \delta^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{2\cdot(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}.$$

Uvrštavanjem u (4.16) dobivamo:

$$\mathcal{L}^2(T_\delta) \sim 4\pi\delta\cdot\delta^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{2\cdot(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1},$$

$$\mathcal{L}^2(T_\delta) \sim \delta^{\frac{2}{1+\alpha}} \cdot \frac{4\pi\cdot\left(\frac{\alpha}{2\cdot(2\pi)^\alpha}\right)^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1},$$

$$\mathcal{L}^2(T_\delta) \sim \delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{2^{\alpha+1}\cdot\alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}\cdot\pi^{\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}. \tag{4.20}$$

3. **Jezgra $N_\delta$ spirale**
   Lebesgueova mjera $\delta$-okoline jezgre bit će jednaka površini kruga radijusa $r_{n_\delta}+\delta$.

Dakle, $\mathcal{L}^2(N_\delta) = (r_{n_\delta} + \delta)^2\pi = \left(\frac{1}{(2\pi n_\delta)^\alpha} + \delta\right)^2 \pi$, to jest:

$$\mathcal{L}^2(N_\delta) = \left(\frac{1}{\left(2\pi(\frac{\alpha}{2\delta(2\pi)^\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)^\alpha} + \delta\right)^2 \pi,$$

$$\mathcal{L}^2(N_\delta) = \left(\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(2\pi)^{-\alpha}(\frac{2(2\pi)^\alpha}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + \delta\right)^2 \pi,$$

$$\mathcal{L}^2(N_\delta) = \left(\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot (\pi\alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} + \delta\right)^2 \pi.$$

Kako je:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\left(\delta^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot (\pi\alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} + \delta\right)^2 \pi}{(\pi\alpha)^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}} \cdot \delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}} = 1,$$

zaključujemo da je:

$$\mathcal{L}^2(N_\delta) \sim \delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot (\pi\alpha)^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}}. \tag{4.21}$$

Konačno, kako smo rekli da je površina $\delta$-okoline unije $\mathcal{K}_\alpha$ koncentričnih kružnica jednaka zbroju repa i jezgre, slijedi:

$$\mathcal{L}^2((\mathcal{K}_\alpha)_\delta) = \mathcal{L}^2(N_\delta) + \mathcal{L}^2(T_\delta).$$

Zato prema (4.20) i (4.21) imamo ocjenu:

$$\mathcal{L}^2((\mathcal{K}_\alpha)_\delta) \sim \delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot (\pi\alpha)^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}} + \delta^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \cdot \frac{2^{\alpha+1} \cdot \alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}} \cdot \pi^{\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1},$$

$$\mathcal{L}^2((\mathcal{K}_\alpha)_\delta) \sim \delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}}\alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}(-1 + \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} + 2^{\alpha+1} \cdot \pi^{\frac{\alpha^2+1}{-2\alpha}}), \ \text{kad } \delta \to 0. \tag{4.22}$$

Sada možemo odrediti box dimenziju unije $\mathcal{K}_\alpha$ koncentričnih kružnica kojima smo aproksimirali spiralu po Propoziciji 3.2.4:

$$\dim_B(\mathcal{K}_\alpha) = 2 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log \mathcal{L}^2((\mathcal{K}_\alpha)_\delta)}{\log\delta},$$

$$\dim_B(\mathcal{K}_\alpha) = 2 - \lim_{\delta\to 0} \frac{\log\left(\delta^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}}\alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}( - 1 + \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} + 2^{\alpha+1} \cdot \pi^{\frac{\alpha^2+1}{-2\alpha}})\right)}{\log\delta},$$

$$\dim_B(\mathcal{K}_\alpha) = 2 - \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\frac{2\alpha}{\alpha+1}\log\delta}{\log\delta} + \frac{\log\left(\frac{\pi^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}}\alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}\left(-1+\alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+2^{\alpha+1}\cdot\pi^{\frac{\alpha^2+1}{-2\alpha}}\right)\right)}{\log\delta}\right),$$

$$\dim_B(\mathcal{K}_\alpha) = 2 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} - \lim_{\delta\to 0}\frac{\log\left(\frac{\pi^{\frac{-2\alpha}{\alpha+1}}\alpha^{\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}}}{-\alpha+1}\left(-1+\alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+2^{\alpha+1}\cdot\pi^{\frac{\alpha^2+1}{-2\alpha}}\right)\right)}{\log\delta},$$

$$\dim_B(\mathcal{K}_\alpha) = \frac{2}{\alpha+1}.$$

*Napomena:* Račun je rađen za box dimenziju koncentričnih kružnica $\mathcal{K}_\alpha$. Može se pokazati da postoji bi-Lipschitzovo preslikavanje tog skupa i spirale $\mathcal{S}_\alpha$, pa po Propoziciji 3.2.8, box dimenzija ostaje ista.

Primijetimo da će u ovisnosti o $\alpha \in (0,1)$, box dimenzija spirale biti između 1 i 2. Za $\alpha = 1$, dimenzija će biti jednaka 1. Kako $\alpha$ pada prema 0, dimenzija raste i spirala sve gušće ispunjava prostor i približava se vrijednosti 2 kad $\alpha \to 0$.

# Bibliografija


[1] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & sons, Ltd, 2014.

[2] S. Grubeša, M. Resman, T. Šikić i D. Žubrinić, *Kako se čuje dimenzija* $\sqrt{3}$, lipanj 2014., `https://hrcak.srce.hr/132255`.

[3] Boris Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2 (Skripta)*, 2017., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf`.

[4] Lana Horvat, *Fraktalna analiza dinamičkih sustava*, Magistarska radnja, Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO, 2006.

[5] Benoit Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., 1982.

[6] Sibe Mardešić, *Matematička analiza*, Školska knjiga, 1991.

[7] Y. Pesin i V. Climenhaga, *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2009.

[8] Claude Tricot, *Curves and Fractal Dimension*, Springer- Verlag New York, Inc., 1995.

# Sažetak

U ovom radu bavimo se fraktalnim dimenzijama. U uvodu objašnjavamo pojam fraktala te navodimo neke poznate primjere fraktalnih skupova. U drugom poglavlju definiramo topološku dimenziju te određujemo topološke dimenzije raznih objekata kako bismo ih kasnije mogli usporediti s fraktalnim dimenzijama. U trećem poglavlju uvodimo pojam Hausdorffove mjere i pomoću njega definiramo Hausdorffovu dimenziju. Potom proučavamo i dokazujemo važna svojstva Hausdorffove dimenzije. Nakon toga, definiramo box dimenziju, navodimo razne ekvivalentne definicije box dimenzije te potom dokazujemo njezina svojstva. Na kraju poglavlja, kratko uspoređujemo Hausdorffovu i box dimenziju te navodimo primjer za koji se one razlikuju. Konačno, u četvrtom poglavlju određujemo fraktalne dimenzije raznih objekata, počevši od klasičnih geometrijskih objekata. Zatim određujemo Hausdorffovu i box dimenziju nekih fraktalnih skupova te na kraju spirale koja nije fraktalni skup u pravom smislu riječi, ali box dimenzija dobro opisuje njezinu gustoću oko ishodišta.

# Summary

In this thesis we study fractal dimensions. In the introduction we explain the concept of fractals and we introduce some well-known fractal sets. In the second chapter we define topological dimension and we calculate topological dimensions of some sets, in order to compare them later with their fractal dimensions. In the third chapter we introduce the concept of the Hausdorff measure and we define the Hausdorff dimension. We further study and prove some important properties of Hausdorff dimension. After that, we define the box dimension, we list equivalent definitions of box dimension and then we prove its properties. At the end of the chapter, we shortly compare Hausdorff and box dimension and we give an example of a set for which they are different. Finally, in the fourth chapter, we calculate fractal dimensions of different sets, starting with classical geometric objects. After that, we calculate Hausdorff and box dimensions of some fractal sets. Finally, we compute the box dimension of a spiral which is not really a fractal set, but its box dimension nevertheless describes its density of accumulation at the origin.

# Životopis

Rođena sam 7. srpnja 1992. godine u Slavonskom Brodu. U Slavonskom Brodu završila sam osnovnu skolu Ivana Gorana Kovačića. Zatim 2007. godine upisujem opću gimnaziju Matije Mesića u Slavonskom Brodu, te se, zbog pojačanog interesa za matematiku, 2009. godine prebacujem u prirodoslovno-matematičku gimnaziju, također u sklopu gimnazije Matije Mesića. Srednjoškolsko obrazovanje završila sam 2011. godine nakon čega iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2015. godine. Iste godine nastavljam svoje obrazovanje na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisom diplomskog sveučilišnog studija Matematika, smjer: nastavnički.