SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Horvat

OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Horvat

OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na pristupačnosti, razumijevanju i strpljenju tijekom izrade diplomskog rada. Hvala joj na posvećenom trudu i vremenu te iznimno korisnim savjetima.

Sadržaj

Uvod

Tijekom povijesti mnogi matematičari proučavali su polinome i njihova svojstva. Jedno od pitanja kojim su se bavili je ima li svaki nekonstantni polinom s kompleksnim koeficijentima nultočku u skupu kompleksnih brojeva. Odgovor na to daje nam jedan od temeljnih teorema analize: **osnovni teorem algebre**. Za početak navedimo iskaz teorema.

Svaki polinom

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

stupnja $n \geq 1$ *s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva.*

Dokazivanje osnovnog teorema algebre bio je veliki izazov mnogim matematičarima. Dio povijesnih dokaza zadirao je u, do tada, nedovoljno istražena područja matematike, stoga nisu bili šire prihvaćeni. Nepotpuni dokazi iz 17. i 18. stoljeća bili su poticaj pronalaženju točnog i potpunog dokaza. S protekom vremena težilo se jasnoći i jednostavnosti dokaza, pa matematičare, u pokušaju dokazivanja, nisu sputavali otprije poznati dokazi.

Neki matematičari osnovnim teoremom algebre smatraju sljedeći teorem:

Svaki polinom n-tog stupnja s kompleksnim koeficijentima ima n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

Primijetimo da egzistencija jedne nultočke, uz pomoć Bezoutovog teorema daje egzistenciju n nultočaka.

Danas je poznato mnogo dokaza osnovnog teorema algebre. Ovisno o području matematike koje se koristi u dokazu, dokaze možemo podijeliti na analitičke, algebarske i topološke. Analitički dokazi odnose se na dokaze koji koriste kompleksnu analizu. Većina algebarskih dokaza zahtijeva poznavanje teorije algebarskih proširenja polja ili koriste Galoisovu teoriju. Topološki dokazi uglavnom se vežu uz Riemannovu sferu.

Prvo poglavlje podijeljeno je na tri dijela. Prvi dio posvećen je povijesnom razvoju kompleksnih brojeva i osnovnog teorema algebre. Kronološkim redom navedeni su matematičari koji su se bavili teoremom, spomenuti su njihovi najvažniji doprinosi te prezentirani najznačajniji povijesni dokazi. U drugom dijelu, dokazu osnovnog teorema algebre pristupa se na nestandardni način. Pomoću spektra boja kompleksne funkcije kompleksne varijable prikazane su u dvodimenzionalnom prostoru te je na nekoliko primjera opravdan osnovni teorem algebre. Na kraju poglavlja razmatra se mogućnost upoznavanja srednjoškolskih učenika sa spomenutim teoremom i razlozi zbog kojih bi učenici mogli imati poteškoće u njegovom razumijevanju. Također, pomoću 3D grafa prikazana je veza između standardnog grafa kvadratne funkcije i njezinih kompleksnih nultočaka.

U drugom poglavlju obrađeno je nekoliko analitičkih dokaza: dokaz pomoću Liouvilleovog teorema, dokaz pomoću Velikog Picardovog teorema, dokaz pomoću Leibnizovog pravila za integrale, dokaz pomoću principa maksimuma modula za krug, dokaz razvojem u red potencija, dokaz pomoću Roucheovog teorema i dokaz temeljen na namotajnom broju.

Treće poglavlje sadrži algebarski dokaz. Dokazano je da svaka kvadratna matrica ima svojstvenu vrijednost iz čega slijedi tvrdnja osnovnog teorema algebre. Također, iskazane su definicije i dokazane leme koje se u dokazu koriste.

Poglavlje 1

Povijest, vizualizacija i srednjoškolski pristup

1.1 Povijest kompleksnih brojeva i osnovnog teorema algebre

Povijest kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prvi puta spominje talijanski matematičar i fizičar Girolamo Cardano (1501.-1576.). Cardano se bavio rješavanjem kubnih jednadžbi. Metodu za rješavanje preuzeo je od mletačkog matematičara Niccole Fontane Tartaglie (1499.-1557.). Godine 1545. Cardano objavljuje djelo *Ars Magna* u kojem opisuje preuzetu metodu zajedno sa svojim značajnim proširenjima. Prvi u povijesti uviđa potrebu za brojevima općenitijim od realnih. Tijekom rješavanja kubne jednadžbe

$$x^3 = 15x + 4,$$

u postupku mu se pojavio $\sqrt{-121}$. Kako je bio siguran u točnost svoje metode, prihvatio je taj broj kao neophodan međukorak u rješavanju bez samostalnog značenja. Cardano je kao rješenje jednadžbe dobio broj

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Budući da je znao da je rješenje $x = 4$ ostao je problem dokaza da je dobiveno rješenje jednako 4. To je tek kasnije dokazao na sljedeći način:

$$\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$$

Imamo
$$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 8 \pm 12\sqrt{-1} + 6 \cdot (-1) \pm \sqrt{-1} \cdot (-1) = 2 \pm 11\sqrt{-1}.$$
Sada vrijedi
$$x = \underbrace{\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}}_{\text{Cardanovo rješenje jednadžbe}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Talijanski matematičar Rafael Bombelli (1526.-1572.) proučavao je Cardanova rješenja spomenute kvadratne jednadžbe. Dokazao je točnost tih rješenja te postao prva osoba u povijesti koja je opravdala korištenje kvadratnih korijena iz negativnih brojeva i tako prihvatila kompleksne brojeve kao smislene. Bombelli je opisao pravila za računanje s kompleksnim brojevima; dao je pravila za njihovo zbrajanje, oduzimanje i množenje. Imaginarne brojeve zapisivao je kao kvadratne korijene negativnih brojeva.

U 17. stoljeću porastao je interes za kompleksne brojeve. Njima su se bavili Rene Descartes, John Wallis i Abraham de Moivre. Descartes je prvi koristio izraz „imaginarni”, Wallis je prvi pokušavao geometrijski interpretirati kompleksne brojeve, a De Moivre je zapisao formulu
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), n \in \mathbb{N},$$
koju danas, njemu u čast, zovemo De Moivreova formula.

Jedan od najznačajnijih matematičara 18. stoljeća svakako je Leonard Euler (1707.-1783.). Njegov doprinos je poznata formula
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
koja daje vezu između trigonometrijskih funkcija i kompleksne eksponencijalne funkcije. Euler je uveo simbol i za jedan od dva kvadratna korijena od -1.

Kompleksni brojevi šire su prihvaćeni tek kad im je nađena geometrijska interpretacija. Caspar Wessel je 1797. prvi put opisao kompleksnu ravninu te množenje s i interpretirao kao rotaciju za 90° u pozitivnom smjeru oko ishodišta. Njegovi zapisi nisu bili vidljivi dugi niz godina. Za to vrijeme, Johann Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.) i Jear-Robert Argand (1768.-1822.), nezavisno jedan od drugoga, opisuju geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva. Prvi su prikazali kompleksne brojeve u kompleksnoj ravnini i tako ih povezali s realnim brojevima.

Naziv kompleksan broj prvi puta spominje se u Gaussovim zapisima, 1849. godine.

Povijest osnovnog teorema algebre

Počeci formiranja osnovnog teorema algebre datiraju iz 17. stoljeća.

Peter Roth (1580.-1617.) prvi je tvrdio da algebarska jednadžba stupnja n ima najviše n rješenja. Godine 1629. francuski matematičar Albert Girard (1595.-1632.) tvrdio je da svaka jednadžba stupnja n ima točno n rješenja koja se mogu nalaziti u nekom još većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva. Dakle, Girard nije tvrdio da sva rješenja moraju biti oblika $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Matematičari su Girardovu tvrdnju prihvatili kao očitu. Iz tog se razloga, gotovo dvjesto godina, nije pokušavalo dokazati da postoji n rješenja, nego da su rješenja kompleksni brojevi.

Kako bismo dokazali osnovni teorem algebre dovoljno je dokazati sljedeći teorem:

Teorem 1.1.1. *Svaki polinom f stupnja $n \geq 1$ s realnim koeficijentima ima barem jednu nultočku u skupu kompleksnih brojeva.*

Zaista, ako je dan nekonstantni polinom p s kompleksnim koeficijentima tada njegove koeficijente možemo zamijeniti odgovarajućim konjugirano kompleksnim brojevima i dobivamo polinom $\overline{p}$. Množenjem polinoma p i $\overline{p}$ dobivamo polinom f s realnim koeficijentima, $f(z) = p(z)\overline{p}(z)$. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma f, tada je $p(z_0) = 0$ ili $\overline{p}(z_0) = 0$, tj. $p(z_0) = 0$ ili $p(\overline{z_0}) = 0$. Dakle, tada je z_0 ili $\overline{z_0}$ nultočka polinoma p.

Kako bi postavili prividno blaži zahtjev, matematičari su dokazivali sljedeći teorem ekvivalentan teoremu 1.1.1., a samim time i osnovnom teoremu algebre:

Teorem 1.1.2. *Svaki polinom s realnim koeficijentima može se napisati kao produkt polinoma stupnja* 1 *i* 2 *s realnim koeficijentima.*

Dokaz ekvivalencije teorema 1.1.1 i 1.1.2. Neka je f polinom s realnim koeficijentima. Neka su $z_1, \ldots, z_n$ njegove kompleksne nultočke tako da je

$$f(x) = a(x - z_1) \cdots (x - z_n),$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$ vodeći koeficijent polinoma f. Neka je z_i neka nultočka polinoma f. Ako je $z_i \in \mathbb{R}$, onda je $x - z_i$ polinom stupnja 1 s realnim koeficijentima. Ako $z_i \notin \mathbb{R}$, onda je i njegov konjugirano kompleksni broj $\overline{z_i}$ također nultočka polinoma f. Tada je $(x-z_i)(x-\overline{z_i}) = x^2-(z_i+\overline{z_i})x+z_i\overline{z_i}$ očito polinom stupnja 2 čiji su koeficijenti realni brojevi jer je $2\operatorname{Re}(z_i) \in \mathbb{R}$ i $|z_i|^2 \in \mathbb{R}$.

S druge strane, neka je f polinom s realnim koeficijentima koji se može napisati kao produkt polinoma stupnja 1 i 2 s realnim koeficijentima. Budući da svaki polinom s realnim koeficijetima stupnja 1, odnosno 2, ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva, polinom f imat će nultočku u skupu kompleksnih brojeva. □

Početkom 18. stoljeća Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) smatrao je da je pokazao da teorem 1.1.2. ne vrijedi. Tvrdio je da se polinom $x^4 + a^4$ ne može napisati kao produkt kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. Leibniz tvrdi da u rastavu

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{i})(x - a\sqrt{i})(x + a\sqrt{-i})(x - a\sqrt{-i})$$

produkt nikoja dva linearna polinoma na desnoj strani nije kvadratni polinom s realnim koeficijentima. Naime, Leibniz nije bio svjestan da su $\sqrt{i}$ i $\sqrt{-i}$ kompleksni brojevi. Ako znamo da je

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$
$$\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),$$

onda množenjem polinoma na desnoj strani dobivamo kvadratne polinome s realnim koeficijentima

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2).$$

Grešku u Leibnizovom zaključivanju ispravio je Euler. Euler je tvrdio da se imaginarne nultočke polinoma s realnim koeficijentima uvijek mogu grupirati u parove tako da se nakon množenja pripadnih polinoma dobiju kvadratni polinomi s realnim koeficijentima. Dokazao je da svaki polinom s realnim koeficijentima stupnja n, $n \leq 6$ ima točno n nultočaka. Godine 1749. pokušao je dokazati i općenitiji slučaj, no taj dokaz ostao je samo skica. Eulerov pokušaj dokaza proučavao je talijanski matematičar i astronom Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.), međutim nije uspio dovršiti dokaz. Lagrange je, kao i Euler, pretpostavljao da polinom n-tog stupnja ima n nultočaka i dokazivao jedino da su te nultočke kompleksni brojevi.

Sredinom 18. stoljeća, 1746. godine, francuski matematičar Jean le Rond d'Alambert (1717.-1783.) prvi je objavio opći dokaz koji je imao mnoštvo grešaka, ali i mnoštvo korisnih ideja. Dokaz je temeljio na konstrukciji niza kompleksnih brojeva koji konvergiraju prema nultočki polinoma. Unatoč tome što dokaz nije bio potpun, d'Alambertu u Francuskoj pripisuju prvi dokaz osnovnog teorema algebre i često ovaj teorem nazivaju po njemu.

Slika 1.1: Jean le Rond d'Alambert

D'Alambert je u dokazu osnovnog teorema algebre koristio lemu koju nije precizno dokazao. Dokazao ju je tek 1851. godine francuski matematičar Alexandre Puiseux, međutim, Puiseux je tom u dokazu koristio osnovni teorem algebre.

Lema 1.1.3. ***d'Alambertova lema***
Ako je p nekonstantni polinom i ako je $p(z_0) \neq 0$*, tada svaka okolina od* z_0 *sadrži točku* z_1 *takvu da je* $|p(z_1)| < |p(z_0)|$.

Prvi koji je kod svojih prethodnika primijetio nedostatak dokaza egzistencije točno n korijena polinoma n-tog stupnja i dao potpuni dokaz bio je jedan od najvećih matematičara svih vremena Johann Carl Fridrich Gauss (1777.-1855.).

Slika 1.2: Johann Carl Fridrich Gauss

Gauss se dokazivanjem osnovnog teorema algebre bavio pedeset godina i ponudio je četiri različita dokaza.

Svoj prvi dokaz objavio je 1799. godine u doktorskoj disertaciji sa samo 22 godine. Gauss u disertaciji komentira ranije pokušaje i daje algebarski dokaz teorema. U dokazu se oslanjao na geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva. Os apscisu koristio je za prikaz realnog dijela, a ordinatu za prikaz imaginarnog dijela kompleksnog broja. Tada kompleksnom broju odgovara točka čije su koordinate njegov realni i imaginarni dio. Međutim, i taj naizgled jednostavan dokaz sadrži neke nedostatke. Zadire u područje realnih algebarskih krivulja koje do tada nije bilo istraženo.

U međuvremenu, 1813. godine, dokaz zasnovan na d'Alambertovoj ideji dao je pariški knjižničar Jean Robert Argand (1767.-1822.). Argandov je dokaz najjednostavniji dokaz tog doba i temelji se na d'Alambertovoj lemi koju Argand također dokazuje. Njegov dokaz osnovnog teorema algebre postao je poznat tek krajem 19. stoljeća.

Dokaz koji ovdje navodimo preuzet je iz [17], a slika 1.3 izrađena je u GeoGebri.

Dokaz d'Alamberove leme: Neka je p nekonstantni polinom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ te neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ takva da $p(z_0) \neq 0$.

Vrijednost $p(z_0) = x_0 + iy_0$ interpretiramo kao točku u ravnini s koordinatama (x_0, y_0), a $|p(z_0)|$ kao udaljenost točke (x_0, y_0) od ishodišta koordinatnog sustava. Tražimo Δz tako da je $p(z_0 + \Delta z)$ bliže ishodištu nego $p(z_0)$. Imamo

$$\begin{aligned} p(z_0 + \Delta z) &= a_n(z_0 + \Delta z)^n + a_{n-1}(z_0 + \Delta z)^{n-1} + \cdots + a_1(z_0 + \Delta z) + a_0 \\ &= p(z_0) + A_1 \Delta z + A_2(\Delta z)^2 + \cdots + A_{n-1}(\Delta z)^{n-1} + A_n(\Delta z)^n \end{aligned}$$

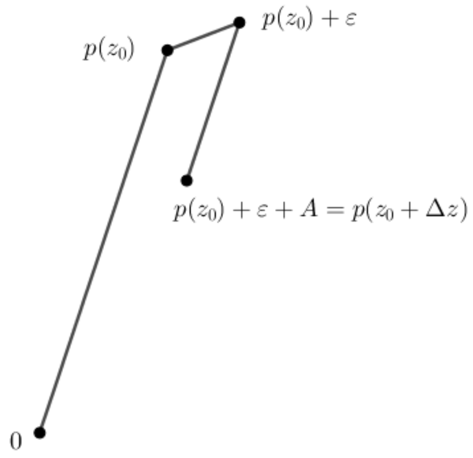
Očito je $A_n = a_n \neq 0$. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $A_1 = \cdots = A_{i-1} = 0$ i $A_i \neq 0$. Označimo sa

$$A = A_i(\Delta z)^i \quad \text{i} \quad \varepsilon = A_{i+1}(\Delta z)^{i+1} + \cdots + A_n(\Delta z)^n.$$

Tada je

$$p(z_0 + \Delta z) = p(z_0) + A + \varepsilon$$

Očito će za dovoljno male vrijednosti od $|\Delta z|$ vrijediti $|\varepsilon| < |A|$. Ako odaberemo smjer od Δz tako da $A_i(\Delta z)^i$ ima isti smjer kao $p(z_0)$, ali suprotnu orijentaciju, onda dobivamo da je $|p(z_0 + \Delta z)| < |p(z_0)|$.



Slika 1.3: $|p(z_0 + \Delta z)| < |p(z_0)|$

Time je dokazana d'Alambertova lema. □

Prijeđimo sada na Argandov dokaz osnovnog teorema algebre za polinome s realnim koeficijentima koji se zasniva na dvije tvrdnje:
1. Polinomi su neprekidne funkcije.
2. Svaka neprekidna funkcija definirana na zatvorenom krugu $|z| \leq R$ postiže minimum na tom krugu.

Dokaz koji ovdje navodimo preuzet je iz [17].

Dokaz. Uzmimo proizvoljan polinom p, $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, n \geq 1$. Promotrimo neprekidnu funkciju $z \mapsto |p(z)|$. Za velike $|z|$ vrijednost $|p(z)|$ ponaša se kao vodeći član polinoma p i povećava se izvan dovoljno velikog kruga $|z| \leq R$. Iz 1. i 2. Argandove tvrdnje zaključujemo da $|p(z)|$ postiže minimalnu vrijednost u nekoj točki z_0 unutar kruga $|z| \leq R$. Minimum je po definiciji promatrane funkcije nenegativan, a ako je pozitivan dobivamo kontradikciju s d'Alambertovom lemom. Time smo pokazali da je minimum jednak 0 pa možemo zaključiti da postoji točka z_0 za koju vrijedi $p(z_0) = 0$. □

Argandov dokaz nije bio u potpunosti prihvaćen jer nije objasnio svoju drugu tvrdnju o minimumu neprekidne funkcije. Danas je ta tvrdnja poznata kao Bolzano-Weierstrassov teorem:

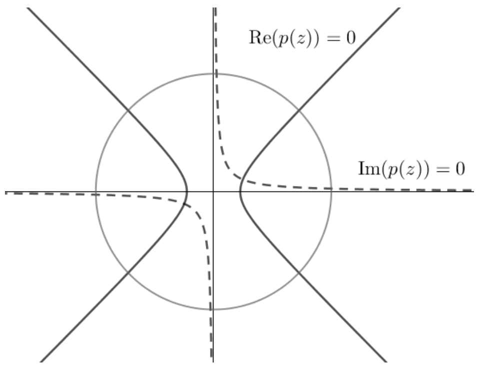
Teorem 1.1.4. *Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu postiže svoj minimum i maksimum.*

Gauss se u svojem prvom dokazu također oslanjao na neprekidnost kako bi pokazao da je $p(z) = 0$ u nekoj točki unutar kruga $|z| \leq R$. Promatrao je realne i imaginarne dijelove polinoma p i proučavao je krivulje $\text{Re}(p(z)) = 0$ i $\text{Im}(p(z)) = 0$. Želio je pronaći točku u kojoj se te krivulje sijeku jer u toj točki vrijedi $p(z) = 0$. Dokaz se može naći u [17].

Gaussov prvi dokaz

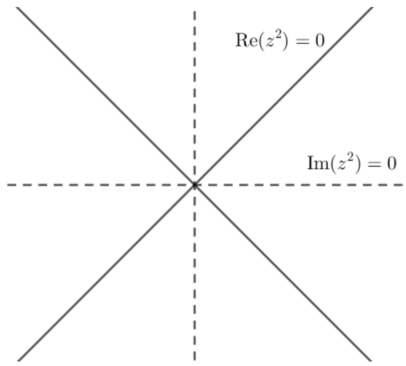
Za velike $|z|$ krivulje $\text{Re}(p(z)) = 0$ i $\text{Im}(p(z)) = 0$ blizu su krivuljma $\text{Re}(a_n z^n) = 0$ i $\text{Im}(a_n z^n) = 0$, a te su krivulje familije pravaca kroz ishodište.

Ilustrirat ćemo to na primjeru polinoma p; $p(z) = z^2 - 1 - i$. Sljedeća slika prikazuje krivulje $\text{Re}(p(z)) = 0$ i $\text{Im}(p(z)) = 0$:



Slika 1.4: $\text{Re}(p(z)) = 0$ i $\text{Im}(p(z)) = 0$

Slika 1.5 prikazuje $\text{Re}(z^2) = 0$ i $\text{Im}(z^2) = 0$ kao naizmjenične pune i isprekidane pravce.



Slika 1.5: $\text{Re}(z^2) = 0$ i $\text{Im}(z^2) = 0$

Zaista, vidimo da su za velike $|z|$ krivulje $\mathrm{Re}(p(z)) = 0$ i $\mathrm{Im}(p(z)) = 0$ blizu krivuljama $\mathrm{Re}(z^2) = 0$ i $\mathrm{Im}(z^2) = 0$.

Primijetimo da će se pravci za koje vrijedi $\mathrm{Re}(a_n z^n) = 0$ izmjenivati s onima za koje vrijedi $\mathrm{Im}(a_n z^n) = 0$ i tako činiti krug oko ishodišta. Naime, vrijedi $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ iz čega slijedi

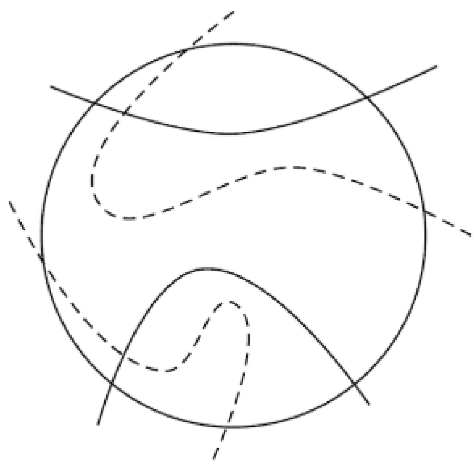
$$\mathrm{Re}(a_n z^n) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

i

$$\mathrm{Im}(a_n z^n) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{k\pi}{n}$$

gdje je $k \in \mathbb{Z}$.

Treba pokazati da se krivulje $\mathrm{Re}(p(z)) = 0$ i $\mathrm{Im}(p(z)) = 0$ sijeku unutar kruga $|z| \leq R$. Gauss je smatrao da se u to ne može posumnjati. Pretpostavio je da će se dijelovi krivulje $\mathrm{Re}(p(z)) = 0$ izvan kruga $|z| \leq R$ spojiti unutar kruga. Isto će se dogoditi i sa dijelovima krivulje $\mathrm{Im}(p(z)) = 0$. Budući da se dijelovi $\mathrm{Re}(p(z)) = 0$ izmjenjuju s dijelovima $\mathrm{Im}(p(z)) = 0$, Gauss je smatrao očitim da će se spojni dijelovi krivulje $\mathrm{Re}(p(z)) = 0$ sjeći sa spojnim dijelovima krivulje $\mathrm{Im}(p(z)) = 0$. Vizualizacija Gaussove tvrdnje prikazana je na idućoj slici:



Slika 1.6: Gaussove krivulje

Postojanje spojnih dijelova Gauss nije dokazivao, smatrao je to očiglednim. Međutim, to je iznimno težak i složen dokaz kojeg je 1920. godine ponudio Alexander Ostrowski.

(Slike 1.4 i 1.5 izrađene su u GeoGebri, a slika 1.6 preuzeta je iz [17].)

Godine 1816. Gauss daje druga dva dokaza. Prvi je bio algebarski dokaz temeljen na Eulerovim idejama i bio je potpuno točan. U njemu Gauss nije pretpostavio postojanje korijena već je to dokazivao. Drugi dokaz bio je topološki i nešto jednostavniji od prvog.

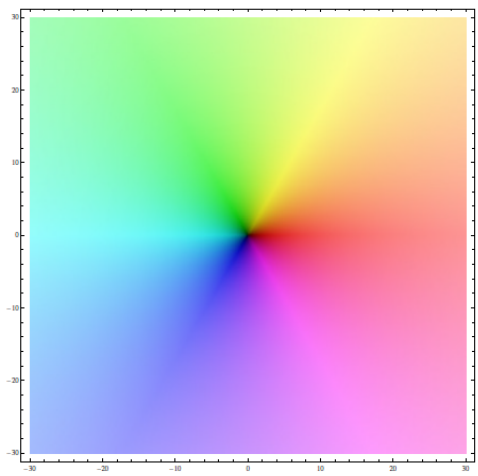
Godine 1849. Gauss daje svoj četvrti dokaz. Prvi put u povijesti dokazan je osnovni teorem algebre za polinome s kompleksnim koeficijentima. Taj je dokaz bio vrlo sličan njegovom prvom dokazu za polinome s realnim koeficijentima.

Osnovnim teoremom algebre bavili su se i mnogi drugi matematičari, no najznačajniji doprinos pripisujemo d'Alambertu i Gaussu.

1.2 Vizualni pristup

Standardni matematički dokazi svode se na niz implikacija u kojima se kreće od već dokazanih teorema ili aksioma i dolazi do novih rezultata. Takav postupak posjeduje matematičku preciznost i osigurava točnost u izgradnji matematičkih teorija. Međutim, takvi su dokazi ponekad suhoparni, neintuitivni i teški. U ovom ćemo poglavlju zaobići klasični dokaz i prezentirati zanimljiv „dokaz" temeljen na slikama koji se može naći u [19].

Za početak, grafički ćemo predočiti ponašanje polinoma na skupu kompleksnih brojeva. Kompleksni brojevi su dvodimenzionalni, pa imamo problem s prikazivanjem grafa kompleksne funkcije kompleksne varijable za koji trebamo četiri dimenzije. Rješenje nalazimo u korištenju boja koje će predstavljati neke dimenzije. Započinjemo pridruživanjem boje svakom broju u kompleksnoj ravnini. Na sljedećoj je slici prikazana kompleksna ravnina u kojoj su točkama dodijeljene različite boje.

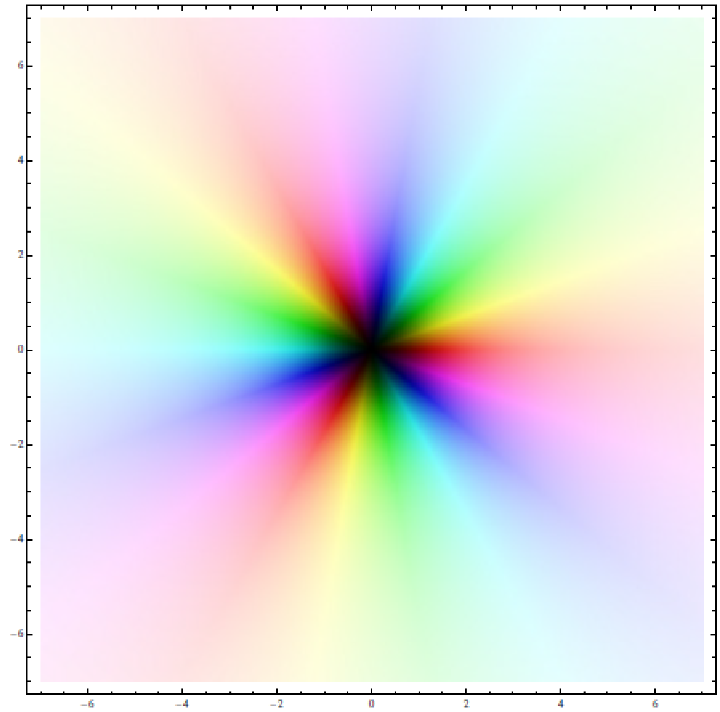


Slika 1.7: Dodjeljivanje boje svakoj točki u kompleksnoj ravnini

Ishodište je obojano crnom bojom. Obilazeći oko ishodišta u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, uočavamo da prolazimo bojama spektra: crvenom, narančastom, žutom, zelenom, plavom, modrom i ljubičastom. Kada se kompleksan broj z približava nuli, boja pridružena tom broju postaje sve tamnija i približava se crnoj. Boja pridružena kompleksnom broju z kada $|z|$ teži u beskonačnost postaje sve svjetlija i približava se bijeloj. Na opisani smo način svakom kompleksnom broju pridružili različitu boju i tako svaki kompleksan broj postaje jedinstveno određen.

Sada možemo grafički predočiti svaku funkciju $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tako što ćemo obojiti svaku točku z odgovarajućom bojom koja je pridružena vrijednosti $p(z)$. Iz takve slike možemo iščitati vrijednost $p(z)$ za svaki kompleksan broj z tako što ćemo odrediti boju koja pripada točki z na toj slici, a zatim iz gornje slike odredimo koji je kompleksni broj predočen tom bojom.

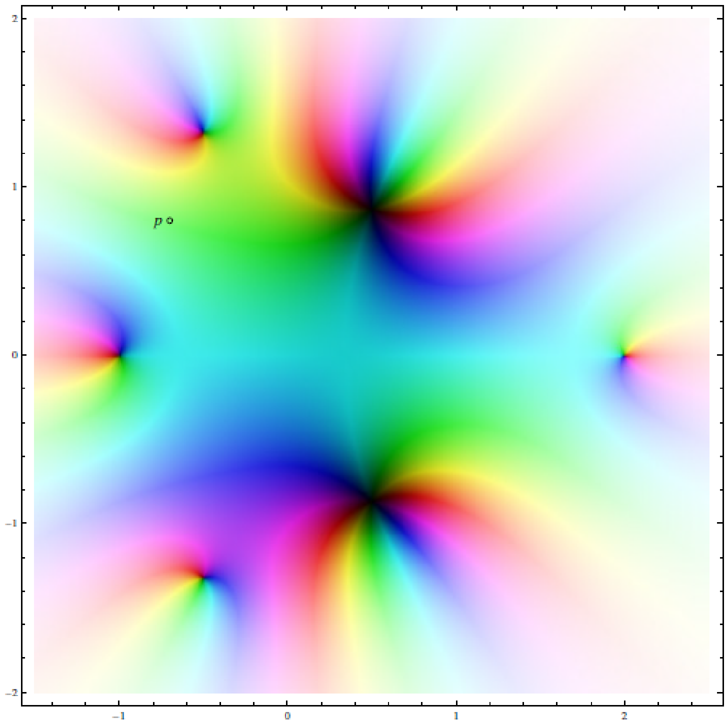
Kao primjer pogledajmo grafički prikaz funkcije $p(z) = z^3$.



Slika 1.8: $p(z) = z^3$

Vidimo da su boje oko ishodišta vrlo tamne. To je zato što je za male z i z^3 malen, pa je boja dodijeljena z^3 vrlo tamna. Također, vidimo da su boje svjetlije što smo udaljeniji od ishodišta jer je za velike z i z^3 vrlo velik pa je njegova dodijeljena boja svijetla. Na slici možemo primijetiti jednu zanimljivu pojavu. Ako zamislimo da se krećemo u pozitivnom smjeru po krugu sa središtem u ishodištu, tada svaku boju spektra susrećemo tri puta. Razlog tome je što svaki kompleksan broj različit od 0 ima tri kubna korijena. Kao primjer pogledajmo broj 1. Njemu je dodijeljena nijansa crvene boje. Ta ista nijansa dodijeljena je trima točkama na slici 1.8.; $(1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Te tri točke su tri kubna korijena iz jedinice.

Promotrimo sada grafički prikaz složenije funkcije: $p(z) = z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 - 5z^2 + 4z - 4$.



Slika 1.9: $p(z) = z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 - 5z^2 + 4z - 4$

Vidimo da su prema rubovima slike boje sve svjetlije. To je zato što su za velike z vrijednosti $p(z)$ vrlo velike pa je njihova dodijeljena boja svjetlija. Budući da za velike z vrijedi $p(z) \approx z^8$, krećući se po rubu slike, spektar boja ponavlja se osam puta pri čemu se izmjenjuju redom crvena, žuto-zelena, plava i modro-ljubičasta boja. Boja pridružena broju 0 je crna, pa se nultočke polinoma p pojavljuju u obliku šest crnih točaka. Prema dosadašnjim razmatranjima zaključujemo da bi se trebalo pojaviti osam crnih točaka (stupanj polinoma je osam), no na slici ih uočavamo samo šest. Razlog je taj što su dvije nultočke dvostruke što se također vidi na slici. Jednostruke nultočke polinoma p su -1, 2 i $\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$, a dvostruke $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Područja oko dvostrukih nultočaka nešto su tamnija od onih oko jednostrukih nultočaka. Također, oko dvostrukih nultočaka boje spektra pojavljuju se dva puta, dok jednostruke nultočke okružuju samo jednom.

Općenito, ako polinom p ima nultočku z_0 kratnosti k, tada će razvoj polinoma p u red po potencijama od $z - z_0$ biti oblika

$$p(z) = c(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z - z_0)^n.$$

Kada je z blizu z_0, tada će prvi član polinoma p dominirati i vrijedit će $p(z) \approx c(z - z_0)^k$. Dakle, u blizini točke z_0 prikaz polinoma p biti će sličan prikazu polinoma $h(z) = cz^k$ u blizini 0. Boje spektra k puta okružuju točku z_0. Možemo uočiti i značenje koeficijenta c. Naime, koeficijent c određuje svjetlinu područja oko točke z_0 i rotira raspored boja oko z_0. Na primjer, na slici 1.9 oko nultočke -1 boje su zarotirane za 180°, crvena se boja nalazi lijevo od nultočke, a ne desno. Kada polinom $p(z) = z^8-2z^7+2z^6-4z^5+2z^4-2z^3-5z^2+4z-4$ razvijemo u red po potencijama $z + 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} p(z) = &- 54(z + 1) + 153(z + 1)^2 - 216(z + 1)^3 + 192(z + 1)^4 - 114(z + 1)^5 \\ &+ 44(z + 1)^6 - 10(z + 1)^7 + (z + 1)^8. \end{aligned}$$

Uočimo da je koeficijent ispred $z + 1$ negativan realan broj što je uzrok rotacije boja. Općenito, $c = |c| \cdot e^{i\varphi}$. Što je broj $|c|$ veći, to je područje oko z_0 tamnije. Broj $e^{i\varphi}$ rotirat će boje za kut φ.

Očito je da na slici 1.7 možemo za svaku boju različitu od crne naći susjednu tamniju nijansu te boje, stoga vrijedi takozvani **Princip tamnijeg susjeda**:

U svakom prikazu nekonstantnog polinoma, za svaku točku koja nije crne boje, postoji susjedna točka koja je tamnija.

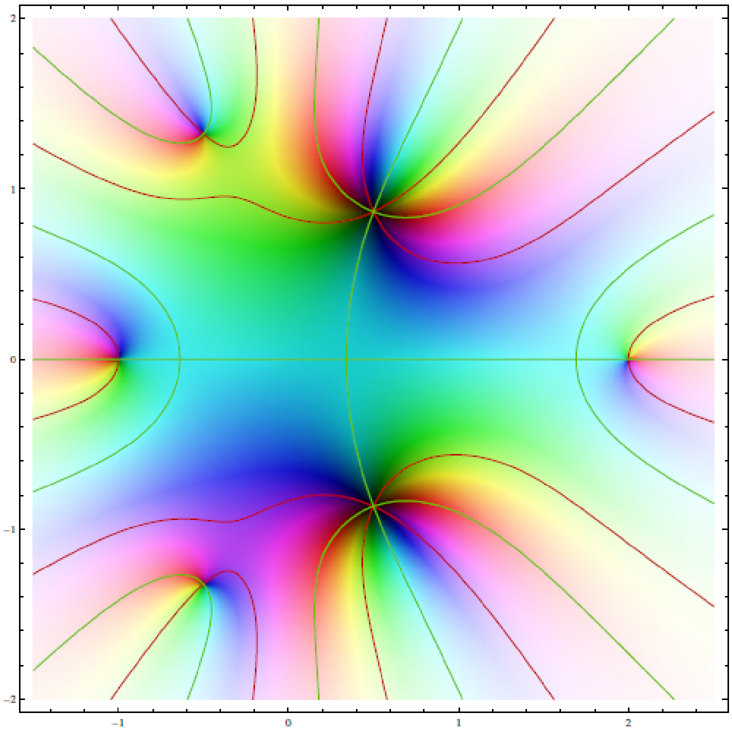
Primijetimo da je princip tamnijeg susjeda zapravo „obojana” verzija D'Alambertove leme.

Koristeći taj princip možemo vidjeti zašto vrijedi osnovni teorem algebre. Pretpostavimo da je p nekonstantni polinom i prikažimo ga na kvadratu

$$S = \{x + iy\colon\ -R \le x \le R, -R \le y \le R\}$$

za neki realni broj R. Budući da je S kompaktan skup i $z \mapsto |p(z)|$ neprekidna funkcija, postoji točka u skupu S u kojoj $|p(z)|$ poprima minimum. Ta će točka biti najtamnija točka na slici. Već smo objasnili da će za velike z vrijednosti funkcije $|p(z)|$ biti vrlo velike pa će njihova dodijeljena boja biti svjetlija i sve će više blijediti kada se približavamo rubu slike, za dovoljno velik R. Iz toga slijedi da najtamnija točka na slici ne može biti na rubu skupa S. Zaključujemo da najtamnija točka mora biti u unutrašnjosti od S. Također, najtamnija točka mora biti crne boje jer bi inače prema principu tamnijeg susjeda postojala točka koja je tamnija. Ta crna točka je nultočka od p.

Ovakvim vizualnim pristupom možemo objasniti i ideju Gaussovog prvog dokaza. Gauss je posebno promatrao točke u kojima je realni dio polinoma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ jednak 0 i posebno točke u kojima je imaginarni dio polinoma p jednak 0. Kompleksni broj čiji je imaginarni dio jednak 0 je realan broj i sa slike 1.7 vidimo da je njemu dodijeljena neka nijansa crvene boje ako je broj pozitivan, odnosno nijansa plave ako je broj negativan. Kompleksnim brojevima čiji su realni dijelovi 0 dodijeljena je nijansa žuto-zelene boje ili modro-ljubičaste. Tražeći ove posebne boje, lako možemo pronaći točke u kojima je realni ili imaginarni dio polinoma p jednak 0. Ako na slici 1.9 označimo te točke dobit ćemo iduću sliku:



Slika 1.10: Vizualizacija Gaussovog prvog dokaza

Crvene krivulje na slici čine točke čiji je realni dio polinoma p jednak 0, dok zelene krivulje čine točke čiji je imaginarni dio polinoma p jednak 0. Možemo uočiti da crvene krivulje prolaze kroz točke koje su žuto-zelene ili modro-ljubičaste boje, a zelene kroz točke koje su crvene ili plave boje. Krećući se po rubu slike, spektar boja ponavlja se osam puta pri čemu se izmjenjuju redom crvena, žuto-zelena, plava i modro-ljubičasta boja. Iz tog se razloga duž ruba slike izmjenjuju krajevi crvenih i zelenih krivulja. Ukupan broj tih krajeva je 32. Gauss je tvrdio da, ako krenemo na bilo koji od tih krajeva i slijedimo krivulju po slici, izaći ćemo na kraju druge krivulje iste boje kao polazna. Na primjer, ako krenemo na kraju crvene krivulje iznad sredine desne strane slike, izaći ćemo na kraju crvene krivulje samo ispod sredine desne strane. Ako pretpostavimo da je Gaussova tvrdnja točna, možemo iskoristiti činjenicu da se krajevi crvenih i zelenih krivulja izmjenjuju oko ruba slike kako bi pokazali da se negdje crvena i zelena linija moraju presjeći. Točka presjeka je točka u kojoj su realni i imaginarni dio polinoma p jednaki 0, a to je upravo nultočka polinoma p. Doista, na gornjoj slici vidimo da se crvene i zelene krivulje sijeku u šest točaka za koje znamo da su nultočke polinoma p.

Slike u ovom poglavlju preuzete su iz [19].

1.3 Osnovni teorem algebre u srednjoj školi

S kompleksnim brojevima učenici se prvi puta susreću na početku 2. razreda srednje škole (gimnazije i tehničke škole). Određivanjem rješenja jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ uviđaju potrebu za proširenjem skupa realnih brojeva. Nakon uvođenja skupa kompleksnih brojeva, definiraju imaginarnu jedinicu i kompleksan broj. Kroz nastavnu cjelinu nauče zbrajati, množiti i dijeliti kompleksne brojeve. Susreću se s kompleksnom ravninom, modulom kompleksnog broja, određuju udaljenost točaka te prikazuju skupove točaka u kompleksnoj ravnini.

Osnovni teorem algebre spominje se jedino u udžbenicima za 4. razred matematičkih gimnazija. Dokaz teorema izlazi iz okvira srednjoškolske matematike, pa se ne nalazi u udžbenicima.

Učenici u četvrtom razredu ponavljaju i nadopunjuju znanje o kompleksnim brojevima. Nakon nastavnih jedinica u kojima uče o trigonometrijskom prikazu kompleksnog broja te potenciranju i korjenovanju kompleksnih brojeva, slijedi jedinica u kojoj se detaljnije upoznaju s polinomima. Na početku se navodi kriterij djeljivosti polinoma:

Teorem 1.3.1. ***kriterij djeljivosti polinoma***
Ako je z_1 nultočka polinoma p, tada je on djeljiv polinomom $g(z) = z - z_1$.

Primijetimo da je spomenuti kriterij djeljivosti polinoma zapravo dio Bezoutovog teorema.

Teorem 1.3.2. ***Bezoutov teorem***
Broj z_1 je nultočka polinoma p ako i samo ako je p djeljiv polinomom $g(z) = z - z_1$.

Budući da učenici nisu upoznati s ekvivalencijama, odnosno nužnim i dovoljnim uvjetima, podrazumijeva se da će kriterij djeljivosti polinoma shvatiti u smislu Bezoutovog teorema.

U udžbeniku [6] se nakon kriterija djeljivosti postavlja pitanje ima li svaki polinom nultočku. Odgovor je negativan ukoliko nultočke tražimo u realnim brojevima. Razlog uvođenja kompleksnih brojeva leži upravo u tome što u skupu $\mathbb{C}$ svaki polinom ima nultočku.

Zatim se navodi osnovni teorem algebre. Spominje se složenost njegovog dokaza i ističe važnost vidljiva i u samom nazivu teorema. Na temelju osnovnog teorema algebre i kriterija djeljivosti polinoma opravdava se istinitost sljedećeg teorema:

Teorem 1.3.3. ***faktorizacija polinoma***
Svaki se polinom stupnja $n \geq 1$ može faktorizirati na sljedeći način:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

gdje su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ njegove nultočke.

U udžbeniku [6] se navodi dokaz tog teorema koji se temelji na osnovnom teoremu algebre i kriteriju djeljivosti polinoma. Primijetimo da gornji teorem govori samo o egzistenciji, ne spominje jedinstvenost faktorizacije do na poredak. U nastavku je prezentiran strogi matematički dokaz egzistencije i jedinstvenosti faktorizacije koji se može naći u [15].

Dokaz. Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Želimo pokazati da ako su $z_1, \ldots, z_n$ nultočke polinoma p, onda vrijedi da je

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Prema osnovnom teoremu algebre znamo da polinom p ima barem jednu kompleksnu nultočku. Neka je to z_1. Prema Bezoutovom teoremu postoji polinom p_1 takav da je

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z).$$

Ako je p_1 konstantan polinom, onda je $n = 1$ i $p_1(z) = a_1$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Inače, ako je p_1 polinom stupnja barem 1, onda prema osnovnom teoremu algebre polinom p_1 ima bar jednu nultočku. Neka je to z_2. Prema Bezoutovom teoremu postoji polinom p_2 takav da je

$$p_1(z) = (z - z_2)p_2(z).$$

Uvrštavanjem p_1 u prethodnu jednakost dobivamo

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_2(z).$$

Nastavimo li postupak dalje dobit ćemo da se p može zapisati kao produkt polinoma

$$\begin{aligned} p_1(z) &= z - z_1 \\ p_2(z) &= z - z_2 \\ &\vdots \\ p_n(z) &= (z - z_n)\beta, \end{aligned}$$

za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Dakle, vrijedi

$$p(z) = \beta(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

odnosno β je vodeći koeficijent. Budući da je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, slijedi da je $\beta = a_n$. Dakle, vrijedi

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Time je dokazana egzistencija rastava.

Pokažimo još jedinstvenost. Pretpostavimo da postoje dva rastava polinoma p. Neka su to:

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

i

$$p(z) = b_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Sada imamo

$$a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = b_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Kada bi nultočka z_i bila različita od svih w_j, $j = 1, \ldots, n$, onda bi uvrštavanjem $z = z_i$ lijeva strana bila jednaka nuli, a desna različita od nule. Prema tome, svaki z_i jednak je nekom w_j i obratno. Stoga je i $b_n = a_n$.

Potrebno je još provjeriti da ako je z_i k-struka nultočka polinoma $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, onda je i pripadni w_j k-struka nultočka polinoma $p(z) = b_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n)$. Pretpostavimo suprotno, da je z_i k-struka nultočka polinoma $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, a pripadni w_j l-struka nultočka polinoma $p(z) = b_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n)$. Tada je

$$a_n(z - z_i)^k g(z) = b_n(z - z_i)^l h(z)$$

gdje je g polinom stupnja $n - k$, a h polinom stupnja $n - l$, $g(z_i) \neq 0$, $h(z_i) \neq 0$. Kada bi bilo $k > l$, onda bismo dijeljenjem gornje jednakosti sa $(z - z_i)^l$ dobili jednakost

$$a_n(z - z_i)^{k-l} g(z) = b_n h(z)$$

u kojoj je lijeva strana djeljiva sa $z - z_i$, a desna nije. Analogno za $k < l$ dobivamo kontradikciju. Zaključujemo da vrijedi $k = l$ čime je jedinstvenost rastava dokazana. □

Posljednji teorem vezan je uz broj nultočaka. U udžbeniku se navodi da se neki među brojevima $z_1, z_2 \ldots, z_n$ mogu podudarati. Za nultočku koja se u faktorizaciji polinoma pojavljuje više puta kažemo da je višestruka ili da ima kratnost onoliku koliko se puta pojavljuje u tom prikazu.

Teorem 1.3.4. *Polinom stupnja n ima n nultočaka, brojeći njihovu kratnost.*

Slijedi dokaz koji se ne navodi u udžbeniku. Dokaz je preuzet iz [15].

Dokaz. Neka je p polinom stupnja $n \geq 1$ i neka su $z_1, z_2, \ldots, z_p$ međusobno različite nultočke polinoma p. Pretpostavimo da je z_1 k_1-struka nultočka, z_2 k_2-struka nultočka, $\ldots$, z_p k_p-struka nultočka. Tada polinom p možemo zapisati u obliku

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_p)^{k_p},$$

pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$. Dokazat ćemo da je svaki od brojeva $k_i, i = 1, \ldots, p$, jednak kratnosti nultočke z_i.

Pretpostavimo da je kratnost nultočke z_i jednaka m_i. Tada je $k_i \leq m_i$. Kada bi bilo $k_i < m_i$ imali bismo

$$p(z) = (z - z_i)^{m_i}\varphi(z),$$

gdje φ ne sadrži faktor $p_i(z) = z - z_i$. Rastavimo li polinom φ na linearne faktore te taj rastav uvrstimo u jednakost $p(z) = (z - z_i)^{m_i}\varphi(z)$, dobit ćemo rastav od p različit od rastava

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_p)^{k_p},$$

što je u kontradikciji s jedinstvenošću faktorizacije. Prema tome, mora vrijediti $k_i = m_i$. Time je tvrdnja dokazana. □

U nastavku slijede zadaci koji ilustriraju tipove zadataka u kojima se rade „primjene" osnovnog teorema algebre.

Zadatak 1. Odredite nultočke polinoma $f(z) = z^2 - z + 1 + i$.

Zadatak 2. Odredite sve nultočke polinoma $f(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3$ ako znate da je $f(i) = 0$.

Zadatak 3. Odredite koeficijent b i preostale nultočke polinoma $f(z) = z^3 - 3z^2 + bz - 6$ ako je $z = 3$ jedna njegova nultočka.

Zadatak 4. Odredite a i b tako da $z = -3$ bude dvostruka nultočka polinoma

$$f(z) = 4z^4 + az^3 - 24z^2 + bz + 216.$$

Zadatak 5. Pokažite da se polinom $p(z) = 8z^4 - 8z^3 + 27z - 27$ može napisati u obliku $p(z) = (z - 1)q(z)$, gdje je $q(z)$ polinom trećeg stupnja koji treba odrediti. Riješite u skupu $\mathbb{C}$ jednadžbu $p(z) = 0$.

Slijedi nekoliko zadataka sa županijskih i državnih natjecanja iz matematike za četvrte razrede srednjih škola [11] koji su vezani uz kompleksne brojeve i spomenute teoreme.

Zadatak 1. *(Županijsko natjecanje iz matematike 2018.)*
Odredite $n \in \mathbb{N}$ tako da polinom $P(x) = (2x^2 + 1)^{n+1} - (3x + 15)^{2n}$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x + 2$. Odredite u tom slučaju sve nultočke polinoma P koje nisu realne.

Rješenje. Polinom P je djeljiv s $x + 2$ ako i samo ako je $P(-2) = 0$. Vrijedi $P(-2) = 9^{n+1} - 9^{2n}$, pa slijedi $9^{n+1} - 9^{2n} = 0$. Prema tome $n + 1 = 2n$, odnosno $n = 1$. Tada je polinom P jednak

$$P(x) = (2x^2 + 1)^2 - (3x + 15)^2 = (2x^2 - 3x - 14)(2x^2 + 3x + 16).$$

Budući da su rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x - 14 = 0$ realni brojevi, tražene nultočke su rješenja jednadžbe $2x^2 + 3x + 16 = 0$, a to su $x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{119}}{4}$.

Zadatak 2. *(Državno natjecanje iz matematike 2011.)*
Odredite polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima tako da zadovoljava uvjete

$$P(1 + i) = 3i - 4 \quad i \quad P(-i) = 4i - 1.$$

Rješenje. Budući da je P polinom trećeg stupnja s realnim koeficijentima, vrijedi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Iz prvog uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}
P(1 + i) &= a(1 + i)^3 + b(1 + i)^2 + c(1 + i) + d, \\
3i - 4 &= a(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + b(1 + 2i + i^2) + c + ci + d, \\
3i - 4 &= -2a + 2ai + 2bi + c + ci + d.
\end{aligned}$$

Sada mora vrijediti

$$3 = 2a + 2b + c$$

i

$$-4 = -2a + c + d.$$

Iz drugog uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}
P(-i) &= a(-i)^3 + b(-i)^2 + c(-i) + d, \\
4i - 1 &= ai - b - ci + d.
\end{aligned}$$

Iz toga zaključujemo

$$4 = a - c$$

i

$$-1 = -b + d.$$

Rješavanjem jednostavnog sustava od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice dobivamo $a = d = 1, b = 2, c = -3$. Dakle, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Zadatak 3. *(Županijsko natjecanje iz matematike 2008.)*
Odredite polinom P stupnja 4 takav da je $P(0) = 0$ i $P(x) - P(x-1) = x^3$, za svaki realan broj x.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka, 0 je nultočka polinoma P. Nadalje, za $x = 0$ vrijedi

$$P(0) + P(-1) = 0,$$

pa je $x = -1$ također nultočka polinoma P. Iz tog je razloga polinom P djeljiv s $x(x+1)$ i možemo ga prikazati u obliku

$$P(x) = x(x+1)(ax^2 + bx + c).$$

Koeficijente polinoma možemo odrediti iz uvjeta zadatka. Imamo

$$P(x) - P(x-1) = x^3,$$

$$x(x+1)(ax^2 + bx + c) - (x-1)x(a(x-1)^2 + b(x-1) + c) = x^3,$$
$$ax^2(x+1) + bx(x+1) + c(x+1) - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) = x^2.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$x^2(4a - 1) + x(3b - 3a) + 2c + a - b = 0,$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} 4a - 1 &= 0, \\ 3b - 3a &= 0, \\ 2c + a - b &= 0. \end{aligned}$$

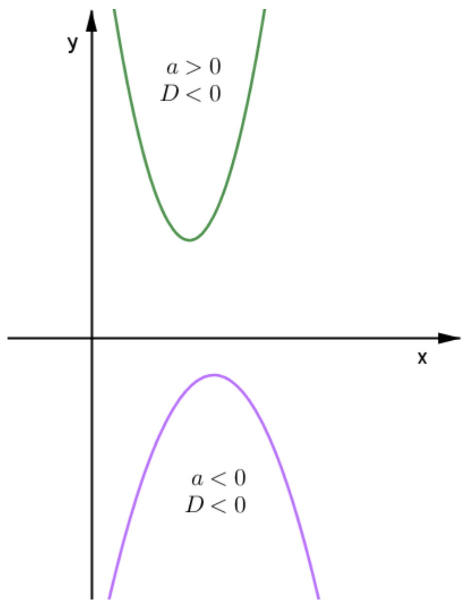
Sada lako odredimo koeficijente a, b i c i dobivamo

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2.$$

U nastavku je objašnjena interpretacija kompleksnih rješenja kvadratne jednadžbe na proširenju grafa kvadratne funkcije koja se može naći u [13]. Iako se to ne spominje u srednjoškolskim udžbenicima, vrlo je zanimljivo i lako razumljivo te stoga primjereno učenicima.

Graf kvadratne funkcije

Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2+bx+c$, čija pripadna kvadratna jednadžba ima kompleksna rješenja, kažemo da nema realnih nultočaka, tj. da njezin graf ne siječe x-os. Ovisno o predznaku vodećeg člana i diskriminante, graf funkcije može se nalaziti iznad ili ispod x-osi.



Slika 1.11: Grafovi kvadratne funkcije

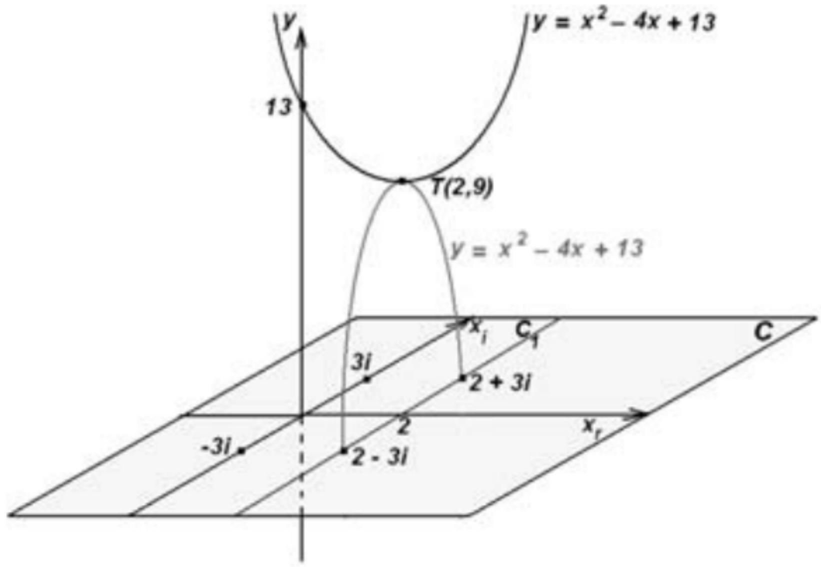
U ovom dijelu objasnit ćemo kakve veze imaju ta kompleksna rješenja s grafom funkcije. Pokazat ćemo da se ona nalaze na 3D grafu funkcije, odnosno na proširenju uobičajenog 2D grafa.

Kao primjer pogledajmo funkciju $f(x) = x^2 - 4x + 13$. Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe su konjugirano kompleksni brojevi: $2 + 3i$ i $2 - 3i$. Dakle, brojeve $2 + 3i$ i $2 - 3i$ funkcija f preslikava u realan broj 0. Pogledajmo koji se još kompleksni brojevi preslikavaju u realne

$$f(u + iv) = (u + iv)^2 - 4(u + iv) + 13 = u^2 - v^2 - 4u + 13 + i(2uv - 4v),$$

stoga mora vrijediti $2uv - 4v = 0$, odnosno $u = 2$ jer je $v \neq 0$. Zaključujemo da brojeve oblika $2 + vi, v \in \mathbb{R}$ funkcija f preslikava u realne brojeve.

Ako proširimo domenu funkcije f tako da je $D = \mathbb{R} \cup \mathbb{C}_1$ gdje je $\mathbb{C}_1 = \{2 + vi\colon v \in \mathbb{R}\}$, a za kodomenu ostavimo skup $\mathbb{R}$, dobit ćemo graf funkcije prikazan na slici 1.12.



Slika 1.12: Graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \cup \mathbb{C}_1 \to \mathbb{R}$

Primijetimo da se graf u 3D sastoji od dviju parabola, jedne realne iznad x-osi (uobičajeni graf) i jedne „imaginarne" parabole čija je ortogonalna projekcija pravac $\mathbb{C}_1$. Ta „imaginarna" parabola siječe pravac $\mathbb{C}_1$ u točkama $2 + 3i$ i $2 - 3i$. Dakle, kompleksne nultočke funkcije f probodišta su „imaginarne" parabole s ravninom $\mathbb{C}$.

Uočimo da realna i „imaginarna" parabola imaju zajedničko tjeme te da se nalaze u međusobno okomitim ravninama. Tjeme je uvijek realno, bez obzira jesu li nultočke kompleksne ili realne.

Podsjetimo se, ako su rješenja kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima kompleksni brojevi, onda su oni međusobno konjugirani. U suprotnom, ako su rješenja kompleksni brojevi koji nisu konjugirani (ne odnosi se na realne brojeve), onda je jednadžba s kompleksnim koeficijentima. Proširimo li domenu na skup $\mathbb{C}$, tada je graf objekt u 4D.

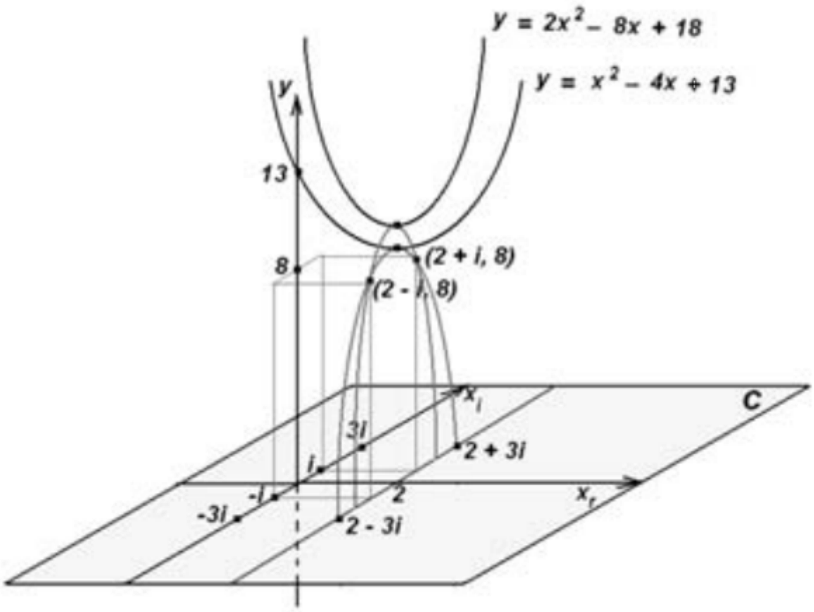
Presjek dviju parabola

Neka je zadan sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x + 18 \\ y = x^2 - 4x + 13 \end{cases}$$

koji trebamo riješiti. Standardni 2D grafovi pripadnih funkcija u ovom slučaju neće dati rješenje jer ćemo dobiti dvije parabole koje nemaju zajedničkih točaka. Budući da računski dobivamo rješenja $(2 + i, 8)$ i $(2 - i, 8)$, u nastavku ćemo objasniti gdje se ona nalaze na 3D grafu.

Označimo sa $f_1(x) = 2x^2 - 8x + 18$ i $f_2(x) = x^2 - 4x + 13$. Na opisani način nacrtamo 3D graf svake funkcije, odnosno njihove pripadne realne i „imaginarne" parabole.



Slika 1.13: Grafovi funkcija $f_1(x) = 2x^2 - 8x + 18$ i $f_2(x) = x^2 - 4x + 13$

Uočimo da se dobivena rješenja nalaze na presjeku „imaginarnih" parabola.

Ovakva je interpretacija moguća ako je $y = ax^2 + bx + c$ i $y = a'x^2 + b'x + c'$, uz uvjet da je $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$.

Slika 1.11 izrađena je u GeoGebri, a slike 1.12 i 1.13 preuzete su iz [13].

Poglavlje 2

Dokazi pomoću kompleksne analize

U ovom poglavlju obrađeni su dokazi u kojima koristimo kompleksnu analizu: dokaz koji se bazira na Liouvilleovom teoremu, dokaz koji se bazira na Velikom Picardovom teoremu, dokaz pomoću Leibnizovog pravila za integrale, dokaz na dva načina pomoću principa maksimuma modula za krug, dokaz razvojem u red potencija, dokaz pomoću Roucheovog teorema te dokaz koristeći namotajni broj.

2.1 Dokaz pomoću Liouvilleovog teorema

U dokazu koristimo sljedeće definicije i teorem:

Definicija 2.1.1. *Ako je funkcija $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna (derivabilna, analitička) na $\mathbb{C}$, tada kažemo da je f cijela funkcija.*

Definicija 2.1.2. *Kažemo da je funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ograničena ako postoji $M \geq 0$ takav da je $|f(z)| \leq M$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.*

Teorem 2.1.3. ***Liouvilleov teorem***
Ako je funkcija f cijela i ograničena, onda je f konstantna.

Dokaz osnovnog teorema algebre. Primijetimo da je teorem dovoljno dokazati za normirane polinome. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Pretpostavimo da je $p(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Definirajmo funkciju $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Očito je f cijela funkcija.

Pokažimo da je f ograničena. Pogledajmo limes

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| &= \lim_{|z|\to\infty}\left(|z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\right)\\ &= \lim_{|z|\to\infty} |z|^n \cdot \lim_{|z|\to\infty}\left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\\ &= \infty\end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| = \left\{w = \frac{1}{z}\right\} =$$
$$\lim_{w\to 0}\left|1 + a_{n-1}w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n\right| = 1.$$

Tada je

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0.$$

Po definiciji limesa, za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ takav da je $|f(z)| < 1$ za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje je $|z| > r$. Zaključujemo da je funkcija f ograničena na $\mathbb{C}\backslash K(0,r)$. Treba još pokazati da je f ograničena na $\overline{K(0,r)}$. Budući da je krug $\overline{K(0,r)}$ kompaktan skup, a funkcija f neprekidna, zaključujemo da je funkcija f na tom krugu ograničena. Iz toga slijedi da postoji $M > 0$ takav da $|f(z)| \leq M$ za svaki $z \in \overline{K(0,r)}$. Sada znamo da je funkcija f na $\mathbb{C}\backslash K(0,r)$ ograničena s 1, a na $\overline{K(0,r)}$ s M. Slijedi $|f(z)| \leq \max\{1, M\}$ za svaki $z \in \mathbb{C}$ pa je f ograničena funkcija. Prema Liouvilleovom teoremu funkcija f je konstantna. Sada zbog

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$$

vrijedi $f(z) = 0$, što je nemoguće zbog definicije funkcije f. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna, tj. postoji $z \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $p(z) = 0$. □

Dokaz koji smo ovdje naveli preuzet je iz [18], [9] i [10].

2.2 Dokaz pomoću Velikog Picardovog teorema

U dokazu koji slijedi koristimo Veliki Picardov teorem čiji je dokaz dugačak i složen, stoga ga nećemo prezentirati.

Teorem 2.2.1. ***Veliki Picardov teorem***
Ako je f nekonstantna cijela funkcija, onda f postiže svaku kompleksnu vrijednost s najviše jednom iznimkom.

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Pretpostavimo da je $p(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Budući da je p nekonstantna cijela funkcija i da ne postiže vrijednost 0, prema Velikom Picardovom teoremu p mora postizati sve kompleksne vrijednosti različite od 0. Zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo naći $z_n \in \mathbb{C}$ za koji vrijedi $p(z_n) = \frac{1}{n}$. Kako je

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$$

slijedi da postoji krug K, sa središtem u ishodištu, dovoljno velikog radijusa, takav da za sve $z \in \mathbb{C}$ koji su izvan kruga K vrijedi $|p(z)| > 1$. Slijedi da je niz (z_n) sadržan u K, dakle, omeđen je. Označimo sa (z_{ni}) njegov konvergentan podniz. Neka je

$$z_0 = \lim_{i\to\infty} z_{ni}.$$

Budući da je polinom p neprekidna funkcija, vrijedi

$$p(z_0) = \lim_{i\to\infty} p(z_{ni}) = 0.$$

Dobili smo $p(z_0) = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $p(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Time je teorem dokazan. □

Ovaj dokaz može se naći u [9], [4] i [1].

2.3 Dokaz pomoću Leibnizovog pravila za integrale

U sljedećem dokazu potrebno je poznavanje Leibnizovog pravila za integrale:

Teorem 2.3.1. ***Leibnizovo pravilo za integrale***
Ako su $(t, x) \mapsto f(t, x)$ i $(t, x) \mapsto \partial_t f(t, x)$ neprekidne funkcije na $[a, b] \times [c, d]$, tada je funkcija $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, $F(t) = \int_c^d f(t, x)\, dx$ derivabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$F'(t) = \int_c^d \partial_t f(t, x)\, dx.$$

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Pretpostavimo da p nema nultočaka. Tada je za realne brojeve t i x dobro definirana sljedeća funkcija

$$f(t, x) = \frac{1}{p(te^{ix})} = \frac{1}{t^n e^{inx} + \cdots + a_1 te^{ix} + a_0}.$$

Nazivnik je neprekidno derivabilna funkcija od t i x na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pa možemo zaključiti da je funkcija f neprekidno derivabilna na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Neka je

$$F(t) = \int_0^{2\pi} f(t, x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prema Leibnizovom pravilu, funkcija F je derivabilna po t i vrijedi

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} \partial_t f(t, x)\, dx.$$

Odredimo sada $\partial_t f(t, x)$ i $\partial_x f(t, x)$:

$$\partial_t f(t, x) = -\frac{nt^{n-1}e^{ixn} + \cdots + a_1 e^{ix}}{(t^n e^{inx} + \cdots + a_1 t e^{ix} + a_0)^2},$$

$$\partial_x f(t, x) = -\frac{t^n e^{ixn} \cdot in + \cdots + a_1 t e^{ix} \cdot i}{(t^n e^{inx} + \cdots + a_1 t e^{ix} + a_0)^2}.$$

Uočimo da je

$$\partial_x f(t, x) = it \cdot \partial_t f(t, x),$$

odakle slijedi

$$F'(t) = \frac{1}{it} \int_0^{2\pi} \partial_x f(t, x)\, dx = \frac{1}{it} f(t, x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{1}{it}\left(\frac{1}{p\left(te^{i2\pi}\right)} - \frac{1}{p\left(te^{i0}\right)}\right) = 0$$

za sve $t \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je F konstantna funkcija. Tada je

$$F(t) = F(0) = \int_0^{2\pi} f(0, x)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{p(0)}\, dx = \frac{1}{p(0)} x\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{p(0)}$$

za sve $t \in \mathbb{R}$. Međutim, to je u kontradikciji s činjenicom $F(t) \to 0$ kada $t \to \infty$, što slijedi iz definicije funkcije f. Slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Dokaz koji smo ovdje naveli preuzet je iz [14] .

2.4 Dokaz pomoću principa maksimuma modula za krug

Koristeći princip maksimuma modula za krug, na dva načina dokazat ćemo osnovni teorem algebre.

Teorem 2.4.1. ***Princip maksimuma modula za krug***
Ako je $f\colon \overline{K(z_0, r)} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i f holomorfna na $K(z_0, r)$, onda je

$$\max_{|z-z_0|\leq r} |f(z)| = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Gornji teorem govori nam da je maksimum funkcije f po zatvorenom krugu jednak maksimumu po kružnici, odnosno maksimum se postiže u nekoj rubnoj točki kruga.

Za dokaz je potrebno poznavanje teorema koji govori da holomorfna nekonstantna funkcija na području ne postiže svoj maksimum.

Dokaz. Neka je $f\colon K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na $K(z_0, r)$. Definirajmo

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z-z_0|\leq r} |f(z)|, \quad M' \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Očito vrijedi $M' \leq M$. Pretpostavimo $M' < M$. Slijedi da postoji točka $z' \in K(z_0, r)$ takva da je $|f(z')| = M$. Budući da je f holomorfna funkcija koja postiže svoj maksimum na $K(z_0, r)$ iz spomenutog teorema slijedi da je f konstantna funkcija na $K(z_0, r)$. Neprekidnost funkcije f povlači da je tada f konstantna funkcija na $\overline{K(z_0, r)}$ iz čega slijedi $M = M'$ što je u kontradikciji s pretpostavkom. Zaključujemo $M = M'$ čime je tvrdnja dokazana. □

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Neka je

$$\mu = \inf \{|p(z)| \colon z \in \mathbb{C}\}$$

i neka je $\varepsilon > 0$. Iz

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |z^n| = \infty$$

slijedi da možemo naći $R > 0$ takav da $|p(z)| > M$ za $|z| > R$. Definirajmo $M = \mu + \varepsilon$ iz čega slijedi $|p(z)| > \mu + \varepsilon$ za $|z| > R$. Stoga

$$\inf \{|p(z)| \colon |z| > R\} \geq \mu + \varepsilon. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo sada da p nema nultočaka. Tada je $\frac{1}{p}$ nekonstantna holomorfna funkcija na $K(0, 2R)$. Budući da je $\frac{1}{p}$ neprekidna funkcija, po principu maksimuma modula za krug ona postiže maksimum u nekoj točki z_0 takvoj da je $|z_0| = 2R$. Maksimum funkcije $\frac{1}{p}$

ujedno je minimum funkcije p, dakle p postiže minimum u z_0. Međutim, $|z_0| = 2R > R$ i $|p(z)| \geq |p(z_0)| > \mu + \varepsilon$ za sve $z \in \overline{K(0, 2R)}$. Stoga

$$\inf \{|p(z)| \colon |z| \leq 2R\} > \mu + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) slijedi

$$\mu = \min \{\inf \{|p(z)| \colon |z| > R\}, \inf \{|p(z)| \colon |z| \leq 2R\}\} = \mu + \varepsilon > \mu$$

što nije moguće. Zaključujemo da p mora imati barem jednu nultočku. □

Ovaj dokaz može se naći u [3].

Slijedi drugi način dokaza osnovnog teorema algebre koristeći princip maksimuma modula za krug.

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Pretpostavimo da p nema nultočku u skupu $\mathbb{C}$. Definirajmo funkciju f, $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Ta je funkcija holomorfna na $\mathbb{C}$. Iz principa maksimuma modula slijedi

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

za svaki krug K sa središtem u z_0 i radijusom $r > 0$. Stoga

$$|f(0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

za svaki krug K sa središtem u ishodištu i radijusom $r > 0$. Također, vrijedi

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0.$$

Dobili smo $|f(0)| \leq 0$, odnosno $f(0) = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom, pa slijedi tvrdnja teorema. □

Ovaj dokaz može se naći u [10] i [12].

2.5 Dokaz razvojem u red potencija

Svaka holomorfna funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, može se razviti u red potencija oko točke $z_0 \in \Omega$ na krugu $K(z_0, r) \subset \Omega$, $r > 0$.

Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Pretpostavimo da je $p(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Funkcija f zadana formulom $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ jest cijela funkcija pa se može razviti u red potencija. Dakle, postoje kompleksni brojevi $b_0, b_1, b_2, \ldots$ takvi da za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

Lema 2.5.1. *Postoje pozitivni realni brojevi c i r takvi da je $|b_k| > cr^k$ za beskonačno mnogo $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Iz definicije funkcije f, $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ slijedi:

$$1 = p(z)f(z) = \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + z^n\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\right).$$

Iz toga je $a_0 b_0 = 1$, pa vrijedi $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. Koeficijent uz z^{k+n} u izrazu $p(z)f(z)$ iznosi 0, pa je

$$a_0 b_{k+n} + a_1 b_{k+n-1} + \cdots + b_k = 0.$$

Pokazali smo $b_0 \neq 0$ pa iz toga slijedi da postoji realan broj $c > 0$ takav da je $c < |b_0|$. Također, $a_0 \neq 0$ pa možemo odabrati realan broj $r > 0$ takav da vrijedi

$$|a_0|r^n + |a_1|r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|r < 1.$$

Na primjer, možemo uzeti

$$r \leq \min\left\{1, \frac{1}{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}\right\}.$$

Naime, tada vrijedi

$$|a_0|r^n + |a_1|r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|r \leq |a_0|r + |a_1|r + \cdots + |a_{n-1}|r = (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)\, r < 1.$$

Dokaz provodimo indukcijom po k. Vrijedi $|b_0| > c = cr^0$. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $|b_k| > cr^k$. Pokazat ćemo da tada za neki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $|b_{k+i}| > cr^{k+i}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $|b_{k+i}| \leq cr^{k+i}$. Tada

$$\begin{aligned}
|b_k| &= |a_0 b_{k+n} + a_1 b_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} b_{k+1}| \\
&\leq |a_0||b_{k+n}| + |a_1||b_{k+n-1}| + \cdots + |a_{n-1}||b_{k+1}| \\
&\leq |a_0|cr^{k+n} + |a_1|cr^{k+n-1} + \cdots + |a_{n-1}|cr^{k+1} \\
&= cr^k\left(|a_0|r^n + |a_1|r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|r\right) \\
&\leq cr^k
\end{aligned}$$

što je u kontradikciji s $|b_k| > cr^k$. Iz toga slijedi da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $|b_{k+i}| > cr^{k+i}$. □

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $z = \frac{1}{r}$, gdje je r odabran kao u prethodnoj lemi. Vrijedi

$$|b_k z_k| = \frac{|b_k|}{r^k} > c > 0.$$

Budući da nejednakost vrijedi za beskonačno mnogo $k \in \mathbb{N}$, red potencija funkcije f divergira. Znamo da red potencija treba konvergirati prema $f(z)$ za svaki $z \in \mathbb{C}$, dakle došli smo do kontradikcije, tj. postoji $z \in \mathbb{C}$ tako da vrijedi $p(z) = 0$. □

Dokaz prethodne leme i osnovnog teorema algebre nalazi se u [9].

2.6 Dokaz pomoću Roucheovog teorema

U dokazu koristimo sljedeće definicije i teorem:

Definicija 2.6.1. *Kontura je po dijelovima gladak zatvoren put koji sam sebe ne presjeca.*

Definicija 2.6.2. *Ako je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = (x - \alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a nije djeljiv polinomom $h(x) = (x - \alpha)^{k+1}$, tada kažemo da je $x = \alpha$ k-struka nultočka od f, odnosno kratnost nultočke $x = \alpha$ jednaka je k.*

Teorem 2.6.3. ***Roucheov teorem***
Neka su f i g holomorfne funkcije na otvorenom skupu Ω koji sadrži konturu γ i njenu unutrašnjost. Ako je $|g(z)| < |f(z)|$ za svaki $z \in \gamma$ tada f i $f + g$ imaju isti broj nultočaka u unutrašnjosti od γ, pri čemu svaku nultočku računamo onoliko puta kolika je njezina kratnost.

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ normirani polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja barem 1. Definirajmo funkcije $f(z) = z^n$ i $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Promotrimo limes

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} &= \lim_{|z|\to\infty} \frac{|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|}{|z^n|} \\
&= \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Iz definicije limesa slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $r > 0$ takav da $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < \varepsilon$ za sve z takve da je $|z| > r$. Posebno, za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ takav da $|g(z)| < |f(z)|$ za sve z takve da je $|z| > r$.

Neka je $R \geq r$ i γ kružnica sa središtem u 0 radijusa R. Sada je $|g(z)| < |f(z)|$ za svaki $z \in \gamma$. Zadovoljene su pretpostavke Roucheovog teorema, pa slijedi da je broj nultočaka funkcije f u unutrašnjosti od γ jednak broju nultočaka funkcije p u unutrašnjosti od γ. Znamo da je broj nultočaka funkcije f u unutrašnjosti od γ jednak n (računajući njihovu kratnost) pa je i broj nultočaka funkcije p u unutrašnjosti od γ jednak n (računajući njihovu kratnost).

Dakle, p ima n nultočaka u $K(0, R)$ za svaki $R \geq r$, a kako svaka nultočka od p pripada nekom dovoljno velikom krugu $K(0, R)$, slijedi da p ima n nultočaka u $\mathbb{C}$. $\square$

Dokaz koji smo ovdje naveli preuzet je iz [9] i [2].

2.7 Dokaz pomoću namotajnog broja

Prvo ćemo se podsjetiti definicije te navesti činjenice koje ćemo koristiti u dokazu.

Definicija 2.7.1. *Put u $\mathbb{C}$ je svako neprekidno preslikavanje $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Put je zatvoren ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

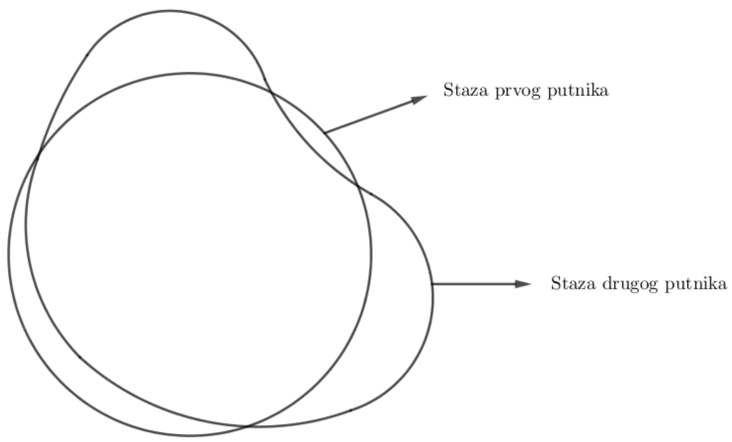
Činjenica koju ćemo koristiti u narednom dokazu govori da svaki zatvoren put koji ne prolazi kroz ishodište ima namotajni broj oko ishodišta. Namotajni broj predstavlja broj obilazaka puta γ oko ishodišta. Ako je γ zatvoren neprekidno derivabilan (gladak) put, onda je

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

cijeli broj koji je jednak namotajnom broju puta γ oko ishodišta.

Za dokaz osnovnog teorema algebre potrebna je generalizacija ideje namotajnog broja u smjeru funkcija. Ako je γ zatvoren neprekidno derivabilni put i $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Označimo sa $\Gamma = p(\gamma)$ put koji opisuje $p(z)$ kada z prolazi putem γ. Tada je Γ također zatvoren put. Ako Γ obilazi ishodište n puta, onda Γ ima namotajni broj n oko ishodišta.

Koristit ćemo i takozvano „svojstvo putnika”. Zamislimo dva putnika vezana zajedno užetom. Neka jedan putnik putuje po kružnici oko ishodišta. Ako je duljina užeta manja od radijusa kružnice, onda će drugi putnik, slijedeći drugačiji put, imati jednak broj obilazaka oko ishodišta. To je ilustrirano na sljedećoj slici:



Slika 2.1: Svojstvo putnika

Dokaz osnovnog teorema algebre. Neka je $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$ normirani polinom s kompleksnim koeficijentima. Ako je $a_0 = 0$, tada je $z = 0$ nultočka pa možemo pretpostaviti $a_0 \neq 0$. Pretpostavimo da je $p(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Neka je $\gamma_r(\varphi) = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zatvoren put koji opisuje kružnicu oko ishodišta radijusa r. Označimo sa $\Gamma_r(\varphi) = p(\gamma_r(\varphi))$ zatvoren put koji opisuje $p(z)$ kada z prolazi kružnicom $\gamma_r(\varphi)$. Vrijedi

$$|z^n - p(z)| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0| = |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}}\right].$$

Za radijus $r > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1$ i $z \in \gamma_r$, vrijedit će

$$|z^n - p(z)| \leq |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right] < r^n = |z^n|$$

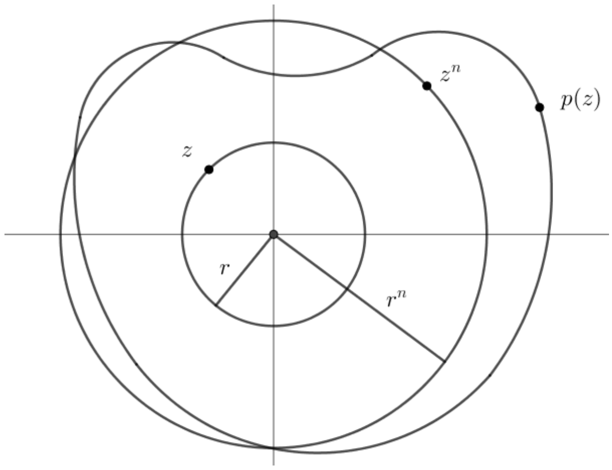
zato što

$$|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_0|}{r^{n-1}} < |a_{n-1}| + \cdots + |a_o| < r.$$

Zaključujemo da će za dovoljno veliki r udaljenost od z^n do $p(z)$ biti manja od udaljenosti z^n do ishodišta. Budući da zatvoren put $\gamma_r^n(\varphi) = r^n e^{in\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ima namotani broj oko ishodišta jednak $n > 0$, iz svojstva putnika slijedi da je namotajni broj puta Γ_r oko ishodišta jednak $n > 0$.

Namotajni broj je neprekidna funkcija koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}$, stoga mora biti konstanta. Slijedi da je namotajni broj puta Γ_r jednak n za svaki $r \geq 0$.

Međutim, kada je $r = 0$ put Γ_r je konstanta različita od nule, zato je broj obilazaka puta Γ_r oko ishodišta jednak 0, što je u kontradikciji s gornjom tvrdnjom. Time je teorem dokazan.



Slika 2.2: Putevi $\gamma_r^n(\varphi)$ i $\Gamma_r(\varphi)$

□

Slike 2.1 i 2.2 izrađene su u GeoGebri. Ovaj dokaz može se naći u [7]. Pogledajte i [16], [10].

Poglavlje 3

Algebarski dokaz osnovnog teorema algebre

Dokaz koji ćemo ovdje prezentirati može se naći u [8] i [5].

3.1 Osnovni teorem algebre i karakteristični polinom matrice

Definicija 3.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora A ako postoji ne-nul vektor $x \in V$ takav da vrijedi*

$$Ax = \lambda x$$

Taj vektor naziva se svojstveni vektor operatora A, pridružen svojstvenoj vrijednost λ.

Slijedi objašnjenje kako određujemo svojstvene vrijednosti danog operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Dakle, neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tražimo $\lambda \in \mathbb{F}$ takvu da je

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

za neki $x \in V \backslash \{0_v\}$. Slijedi

$$\lambda x - A(x) = 0_v,$$

odnosno

$$\lambda I(x) - A(x) = 0_v,$$

gdje je I jedinični operator na V. Po definiciji zbrajanja i množenja skalarom na prostoru $L(V)$ vrijedi

$$(\lambda I - A)(x) = 0_v,$$

gdje je $\lambda I - A$ linearan operator, odnosno element prostora $L(V)$. Zaključujemo da, ako postoji vektor $x \neq 0_v$ takav da vrijedi (3.1), onda je on nužno iz jezgre operatora $\lambda I - A$. Nadalje, vidimo da jezgra operatora $\lambda I - A$ nije trivijalna, odnosno operator $\lambda I - A$ nije monomorfizam, pa mu je defekt pozitivan; $d(\lambda I - A) \geq 1$. Dakle, $\lambda I - A$ nije regularan operator, stoga mu je determinanta jednaka nuli; $\det(\lambda I - A) = 0$.

Možemo rezimirati:

Propozicija 3.1.2. *Neka je $A \in L(V)$. Ako je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A, onda je λ_0 rješenje algebarske jednadžbe* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Definicija 3.1.3. *Neka je $A \in L(V)$. Polinom $k_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$ naziva se karakteristični polinom operatora A.*

Zaključujemo:

Korolar 3.1.4. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Ako je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A onda je λ_0 nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$.*

U tekstu koji slijedi dokazat ćemo da svaka kvadratna matrica s kompleksnim koeficijentima ima svojstvenu vrijednost. Nadalje, svaki polinom je karakteristični polinom neke matrice. Zaista, ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

gdje su $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, tada je pripadni karakteristični polinom $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$. Postojanje svojstvenog vektora, odnosno svojstvene vrijednosti $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ implicirat će $p(\lambda_0) = 0$, tj. polinom p imat će nultočku u skupu kompleksnih brojeva.

3.2 Dokaz postojanja svojstvene vrijednosti matrice

Lema 3.2.1. *Svaki polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima ima realnu nultočku.*

Dokaz. Neka je $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima. Vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$

Iz toga zaključujemo da postoji $x_1 \in \mathbb{R}$ takav da je $p(x_1) > 0$. S druge strane, vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty.$$

Slijedi da postoji $x_2 \in \mathbb{R}$ takav da je $p(x_2) < 0$. Polinom s realnim koeficijentima je neprekidna funkcija za svaki $x \in \mathbb{R}$. Budući da vrijedi $p(x_1) \cdot p(x_2) < 0$ zaključujemo da postoji $x_3 \in (x_1, x_2)$ takav da je $p(x_3) = 0$. Time je tvrdnja dokazana. □

Prisjetimo se sada definicija potrebnih za razumijevanje leme koja slijedi.

Definicija 3.2.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A\colon V \to W$ zove se linearan operator (homomorfizam) ako vrijedi*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

za svaki $x, y \in V$ i za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Skup svih linearnih operatora s $V \to W$ označavamo s $L(V, W)$.

Definicija 3.2.3. *Endomorfizam je linearni operator $A\colon V \to V$.*

Promotrimo sljedeću tvrdnju:

$\mathcal{P}(\mathbb{F}, d, r)$: Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_r$ komutirajući endomorfizmi n-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je dan prirodni broj d koji ne dijeli n. Tada $A_1, A_2, \ldots, A_r$ imaju zajednički svojstveni vektor.

Lema 3.2.4. *Ako vrijedi $\mathcal{P}(\mathbb{F}, d, 1)$, onda vrijedi $\mathcal{P}(\mathbb{F}, d, r)$ za svaki $r \geq 1$.*

Dokaz. Lemu ćemo dokazati indukcijom po r. Baza indukcije vrijedi jer smo za slučaj $r = 1$ pretpostavili da tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $r - 1$. Trebamo pokazati da endomorfizmi $A_1, A_2, \ldots, A_r$ imaju zajednički svojstveni vektor. Tu ćemo tvrdnju dokazati indukcijom po dimenziji n prostora V.

Slučaj $n = 1$ je trivijalan.

Pretpostavka indukcije glasi: ako je dimenzija prostora manja od n i d ne dijeli n, tada r komutirajućih endomorfizama tog vektorskog prostora ima zajednički svojstveni vektor.

Budući da lema vrijedi za $r = 1$ slijedi da A_r ima svojstvenu vrijednost $\lambda \in \mathbb{F}$. Neka je W jezgra i Z slika od $\lambda I - A_r$.

Pretpostavimo da je $W \neq V$. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi $\dim W + \dim Z = \dim V$, pa d ne dijeli jednu od dimenzija; $\dim W$ ili $\dim Z$. Budući da je $\dim W < n$ i $\dim Z < n$, možemo primijeniti pretpostavku indukcije na W ili na Z. Iz toga zaključujemo da $A_1, A_2, \ldots, A_r$ već imaju zajednički svojstveni vektor u W ili u Z, a taj je vektor iz V.

Ukoliko vrijedi $W = V$, zbog pretpostavke indukcije da lema vrijedi za broj $r - 1$, možemo pretpostaviti da $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ imaju zajednički svojstveni vektor x u V. S obzirom da je $W = \operatorname{Ker}(\lambda I - A_r) = V$ slijedi $(\lambda I - A_r)x = 0$, odnosno vrijedi $A_r x = \lambda x$. Zaključujemo da je x zajednički svojstveni vektor od $A_1, A_2, \ldots, A_r$. □

Lema 3.2.5. *Za svaki r vrijedi $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, r)$, tj. ako su $A_1, A_2, \ldots, A_r$ komutirajući endomorfizmi realnog vektorskog prostora čija je dimenzija neparan broj, onda oni imaju zajednički svojstveni vektor.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi dovoljno je dokazati $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, 1)$. Ako je A endomorfizam u realnom vektorskom prostoru čija je dimenzija neparan broj, onda je $\det(xI - A)$ polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima koji prema lemi 3.2.1. ima realnu nultočku λ. Zaključujemo da je λ realna svojstvena vrijednost od A kojoj pripada odgovarajući svojstveni vektor. □

Dokaz sljedeće leme bazira se na hermitskim matricama.

Definicija 3.2.6. *Matrica je hermitska ako vrijedi $A = A^*$, gdje je A^* adjungirana matrica matrice A, $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$.*

Lema 3.2.7. *Vrijedi $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2, 1)$, odnosno svaki endomorfizam kompleksnog vektorskog prostora čija je dimenzija neparan broj ima svojstveni vektor.*

Dokaz. Neka je n neparan broj i $A \in M_n(\mathbb{C})$. Označimo s $V = \operatorname{Herm}_n(\mathbb{C})$ skup svih hermitskih matrica u $M_n(\mathbb{C})$. Možemo definirati endomorfizme $L_1, L_2 \colon V \to V$

$$L_1(B) = \frac{AB + BA^*}{2}$$
$$L_2(B) = \frac{AB - BA^*}{2i}.$$

Provjerimo da L_1 i L_2 komutiraju:

$$\begin{aligned}(L_1 \circ L_2)(B) &= \frac{1}{4i} L_1 (AB - BA^*) = \frac{1}{4i} [A (AB - BA^*) + (AB - BA^*) A^*] \\ &= \frac{1}{4i} (AAB - ABA^* + ABA^* - BA^*A^*) = \frac{1}{4i} [A (AB + BA^*) - (AB + BA^*) A^*] \\ &= (L_2 \circ L_1)(B).\end{aligned}$$

Uočimo da je $\dim_{\mathbb{R}} V = n^2$ neparan broj. Prema lemi 3.2.5. vrijedi $\mathcal{P}(\mathbb{R}, 2, 2)$, odnosno postoji zajednički svojstveni vektor B od L_1 i L_2. Dakle, $L_1(B) = \lambda B$ i $L_2(B) = \mu B$ za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sada vrijedi

$$(L_1 + iL_2)(B) = L_1(B) + iL_2(B) = \frac{AB + BA^*}{2} + \frac{AB - BA^*}{2} = AB.$$

Također vrijedi

$$(L_1 + iL_2)(B) = L_1(B) + iL_2(B) = \lambda B + i\mu B = (\lambda + i\mu)B.$$

Možemo zaključiti

$$AB = (\lambda + i\mu)B.$$

Vidimo da je svojstveni vektor matrice A svaki vektor stupac od B različit od nulvektora. Taj vektor sigurno postoji jer je $B \neq 0$ pa je barem jedan stupac od B različit od 0. □

Prisjetimo se sada definicije antisimetrične matrice.

Definicija 3.2.8. *Matrica je antisimetrična ako vrijedi $A^T = -A$.*

Lema 3.2.9. *$\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$ vrijedi za svaki k i r.*

Dokaz. Lemu ćemo dokazati indukcijom po k. Baza indukcije, $k = 1$, slijedi iz lema 3.2.4. i 3.2.7. Pretpostavimo da $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^l, r)$ vrijedi za $l < k$. Prema lemi 3.2.4. dovoljno je dokazati da tvrdnja vrijedi za $r = 1$. Pretpostavimo da je $A \in M_n(\mathbb{C})$, gdje je n djeljiv s 2^{k-1}, ali ne i s 2^k. Neka je $V = \mathrm{Anti}_n(\mathbb{C})$ skup svih antisimetričnih matrica reda n. Možemo definirati endomorfizme $L_1, L_2 \colon V \to V$

$$L_1(B) = AB - BA^T$$

$$L_2(B) = ABA^T.$$

Provjerimo da komutiraju:

$$(L_1 \circ L_2)(B) = L_1\left(ABA^T\right) = AABA^T - ABA^TA^T = A\left(AB - BA^T\right)A^T = (L_2 \circ L_1)(B).$$

Primijetimo da je $\dim V = \frac{n(n-1)}{2}$ pa 2^{k-1} ne dijeli $\dim V$. Iz $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^{k-1}, 2)$ slijedi da L_1 i L_2 imaju zajednički svojstveni vektor B. Tada je $L_1(B) = \lambda B$ i $L_2(B) = \mu B$ za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Iz

$$L_2(B) = ABA^T = A(AB - L_1(B)),$$

slijedi

$$\mu B = A^2 B - \lambda AB,$$

odnosno

$$(A^2 - \lambda A - \mu I)B = 0.$$

Ako su α, β rješenja jednadžbe $x^2 - \lambda x - \mu = 0$, tada vrijedi

$$(A - \alpha I)((A - \beta I)B) = 0.$$

Ako je $(A - \beta I)B = 0$, tada je svaki vektor stupac od B, različit od nulvektora, svojstveni vektor matrice A (sa svojstvenom vrijednošću β). Ako je $(A - \beta I)B \neq 0$ tada je svaki svaki vektor stupac od $(A - \beta I)B$, različit od nulvektora, svojstveni vektor matrice A (sa svojstvenom vrijednošću α). □

Teorem 3.2.10. *Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_r$ komutirajući endomorfizmi kompleksnog konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, onda oni imaju zajednički svojstveni vektor.*

Dokaz. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da 2^k ne dijeli n. Teorem slijedi iz leme 3.2.9.; $\mathcal{P}(\mathbb{C}, 2^k, r)$. □

Iz prethodnog teorema slijedi da svaka kvadratna matrica s kompleksnim koeficijentima ima svojstvenu vrijednost.

Bibliografija

[1] A. A. Azzam, *A[n eighth] proof using Picard's Theorem.*, (2012), https://adamazzam.wordpress.com/?s=picard&submit.

[2] ______, *Touché, Rouché. A second proof.*, (2012), https://adamazzam.wordpress.com/2012/05/29/touche-rouche-a-second-proof/.

[3] ______, *Using the Maximum Modulus Principle. A third proof.*, (2012), https://adamazzam.wordpress.com/?s=maximum+modulus&submit.

[4] R. P. Boas, *A Proof of the Fundamental Theorem of Algebra: Standing on the shoulders of giants*, Am Math Monthly **42** (1935), 501–502, https://www.cut-the-knot.org/fta/picard.shtml.

[5] K. Conrad, *The Fundamental Theorem of Algebra via Linear Algebra*, http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/fundthmalg/fundthmalglinear.pdf.

[6] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, 1., Element d.o.o., Zagreb, 2013.

[7] J. W. Dawson, *Why Prove it Again? Alternitive Proofs in Mathematical Practice*, Birkhäuser, 2015.

[8] H. Derksen, *The Fundamental Theorem of Algebra and Linear Algebra*, The Amercan Mathematical Monthly **110** (2003), br. 7, 620–623.

[9] D. File i S. Miller, *Fundamental Theorem of Algebra*, (2003), https://people.math.osu.edu/sinnott.1/ReadingClassics/FundThmAlg_DFile.pdf.

[10] B. Fine i G. Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer Science & Business Media, 1997.

[11] A. Horvatek, *Natjecanja iz matematike RH*, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm, posjećena 29.08.2018.

[12] S. Ji, *Liouville Theorem and Fundamental Theorem of Algebra*, (2016), https://www.math.uh.edu/~shanyuji/Complex/29.pdf.

[13] I. Kalaba, *Kompleksne nultočke na vidljivom grafu elementarne finkcije*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **11** (2010), br. 44, 51–59, https://hrcak.srce.hr/103840.

[14] P. Loya, *An(other) Elementary Proof the Fundamental Theorem of Algebra*.

[15] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1: Skupovi, funkcije, brojevi, polinomi i neke elementarne funkcije, planimetrija - geometrija ravnine*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[16] R. Schwartz, *The Fundamental Theorem of Algebra*, (2014), https://www.math.brown.edu/~res/INF/handout5.pdf.

[17] J. Stillwel, *Mathematics and Its History*, 3., Springer, London, 2010.

[18] Š. Ungar, *Kompleksa analiza*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf, 2009.

[19] D. Velleman, *The Fundamental Theorem of Algebra: A Visual Approach*, https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_14/fta.pdf, 2012.

Sažetak

U radu se proučava jedan od temeljnih teorema analize - osnovni teorem algebre. Cilj rada je prezentirati različite dokaze spomenutog teorema. Na početku, u povijesnom pregledu, navedeni su matematičari koji su se njime bavili te su spomenuti njihovi najvažniji doprinosi. Nadalje, proučava se vizualni pristup pomoću kojeg je osnovni teorem algebre ilustriran na nekoliko primjera. Kraj prvog poglavlja obuhvaća srednjoškolske teoreme vezane uz osnovni teorem algebre. Za navedene teoreme dani su strogi matematički dokazi koji se uglavnom ne navode u srednjoškolskim udžbenicima. Drugo poglavlje sastoji se od analitičkih dokaza: dokaz pomoću Liouvilleovog teorema, dokaz pomoću Velikog Picardovog teorema, dokaz pomoću Leibnizovog pravila za integrale, dokaz pomoću principa maksimuma modula za krug, dokaz razvojem u red potencija, dokaz pomoću Roucheovog teorema i dokaz temeljen na namotajnom broju. Algebarski dokaz prezentiran je u trećem poglavlju. Dokazano je da svaka kvadratna matrica ima svojstvenu vrijednost iz čega slijedi tvrdnja osnovnog teorema algebre.

Summary

In this thesis we study one of the basic theorem of analysis - fundamental theorem of algebra. The goal of this paper is to present different proofs of that theorem. Firstly, in the historical overview, mathematicians who worked at this theorem are mentioned along with their most significant contributions. Furthermore, this paper study visual approach by which the fundamental theorem of algebra is illustrated with several examples. The end of the first chapter includes high school theorems connected to the fundamental theorem of algebra. For all stated theorems we included strict mathematical proofs although high school books usually do not contain their proofs. The second chapter consists of analytic proofs: proof by Liouville's theorem, proof by Great Picard's theorem, proof by Leibniz rule for integrals, proof by maximum modulus principle, proof by using power series, proof by Rouche's theorem and the proof based on winding numbers. Algebraic proof is presented in third chapter. It has been proven that every square matrix has an eigenvector which implies the statement of fundamental theorem of algebra.

Životopis

Rođena sam 24. travnja 1994. godine. Osnovnu školu završila sam u malom mjestu Mače u Krapinsko-zagorskoj županiji. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Opću gimnaziju u Zlataru te završila srednjoškolsko obrazovanje s odličnim uspjehom. Godine 2013./2014. upisala sam preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, školovanje nastavljam na diplomskom studiju.