Ptolomejev teorem - dokazi, posljedice i poopćenja

Hršak, Sanja

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:425004

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-22**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sanja Hršak

PTOLOMEJEV TEOREM - DOKAZI, POSLJEDICE I POOPĆENJA

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof.dr.sc. Mario Krnić
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru prof.dr.sc. Mariu Krniću na vodstvu i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.
Najveće hvala mami, tati, Nini i Marku na svim savjetima, strpljenju te bezuvjetnoj ljubavi i podršci tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Jedan od važnijih teorema u elementarnoj geometriji je Ptolomejev teorem. Ptolomejev teorem je otkriće velikog starogrčkog matematičara Ptolomeja, a opisuje relaciju koja povezuje duljine stranica i dijagonala tetivnog četverokuta. Taj je teorem vezan uz tetivni četverokut čije će karakterizacije biti dane u prvom poglavlju ovog rada. Nakon karakterizacija tetivnog četverokuta, iskazat ćemo Ptolomejev teorem, dati njegov klasičan dokaz te navesti neke njegove inačice. U sljedećem poglavlju dajemo još nekoliko različitih dokaza Ptolomejeva teorema. Nadalje, Ptolomejev teorem ima veliku primjenu kako u dokazivanju poznatih elementarnih teorema tako i u rješavanju nekih složenijih geometrijskih problema. Primjenama Ptolomejeva teorema bavit ćemo se u trećem poglavlju ovog rada. Dakle, bavit ćemo se primjenama Ptolomejeva teorema na klasične teoreme te na pravilne mnogokute, zatim formulom za površinu tetivnog četverokuta te Carnotovim teoremom, problemom koji se elegantno rješava upravo Ptolomejevim teoremom. Treće poglavlje završavamo Ptolomejevom tablicom tetiva u kojoj se sam Ptolomej također poslužio tim teoremom. Za kraj, u zadnjem poglavlju, opisat ćemo poopćenja Ptolomejeva teorema. Točnije, dokazat ćemo Bretschneiderovu formulu kao poopćenje Ptolomejeva teorema za konveksni četverokut, a zatim i Caseyjev teorem koji prelazi u Ptolomejev kada kružnice degeneriraju u točke.

Poglavlje 1

Tetivni četverokut. Ptolomejev teorem

1.1 Povijest

Klaudije Ptolomej je jedan od najpoznatijih starogrčkih matematičara. Djelovao je u 2. stoljeću naše ere. Bio je poznat i kao astronom, astrolog, geograf, teoretičar glazbe i filozof. Prema Proklosu jedino Ptolomejevo čisto matematičko djelo sadržavalo je pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama. Usavršio je Menelajeve i Hiparhove rezultate. Također, detaljno je obradio sfernu trigonometriju. Dakle, kod njega možemo naći sve bitne teoreme o pravokutnom sfernom trokutu.

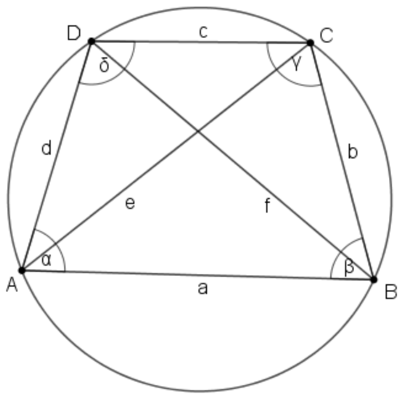
Znamenito je njegovo djelo *Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela. Sve do renesanse to je djelo bilo osnova zapadne astronomije. Nije sačuvano u originalu, nego samo u arapskom prijevodu. U njemu se također nalazi tablica tetiva s pripadnim kutovima za kutove od $0,5^\circ$ do 180° s koracima od po pola stupnja. Točnost je na otprilike pet decimala, a računi se temelje na važnom teoremu koji njemu u čast nosi ime Ptolomejev teorem. Ptolomejeva tablica tetiva bit će opisana u jednom odjeljku ovog diplomskog rada.

Dakle, Ptolomejevo najpoznatije matematičko postignuće jest Ptolomejev teorem. Ptolomejev teorem kaže da je u tetivnom četverokutu zbroj umnožaka duljina nasuprotnih stranica jednak umnošku duljina dijagonala. Ptolomejev teorem ima mnogo dokaza, primjena te posljedica, ali i poopćenja koje ćemo navesti kroz ovaj rad. Upravo je zato to Ptolomejevo otkriće obogatilo matematiku. Ptolomej je za brojeve, kao i mnogi njegovi suvremenici i prethodnici, koristio alfabetsku notaciju koja koristi grčka slova za brojeve $1, ..., 10, 20, ..., 100, 200, ..., 900$, s tim što koriste i tri arhaična slova koja su se s vremenom prestala koristiti. Da bi se brojke razlikovale od teksta, ponekad je dodavao apostrof na kraju brojke. Više o Ptolomeju može se naći u [4].

1.2 Osnovne karakterizacije tetivnog četverokuta

Definicija 1. *Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

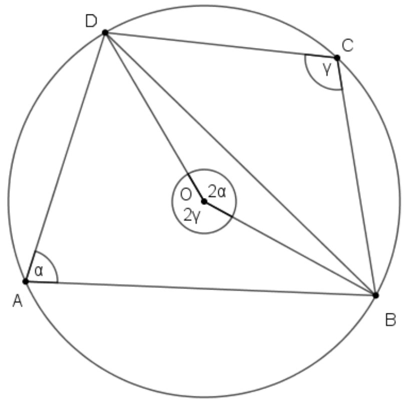
Na početku ove točke uvest ćemo oznake koje ćemo koristiti tijekom ovog rada. Duljine stranica četverokuta $ABCD$ označavat ćemo sa $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$. Nadalje, duljine dijagonala i kutove označavat ćemo sa $|AC| = e$, $|BD| = f$ i $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ i $\angle CDA = \delta$, kao na slici.



Navedimo nekoliko osnovnih karakterizacija tetivnog četverokuta koje ćemo koristiti.

Teorem 1.2.1. *Konveksan četverokut $ABCD$ je tetivni ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi suplementarni.*

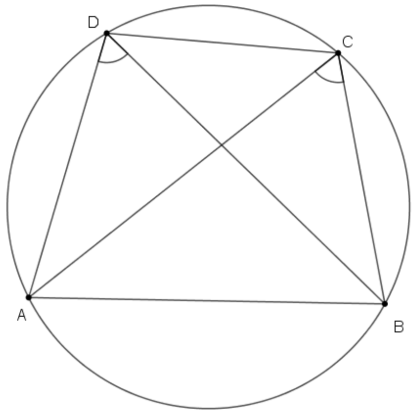
Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Opišimo mu kružnicu sa središtem u točki O, kao na slici.



Budući da je konveksan, tada su vrhovi A i C s različitih strana dijagonale $\overline{BD}$. Znamo da je kut α kod vrha A obodni kut nad tetivom $\overline{BD}$ pa njegov pripadni središnji kut iznosi 2α. Analogno, zaključujemo da je pripadni središnji kut obodnog kuta γ prvi vrhu C jednak 2γ. Zatim znamo da je $2\alpha + 2\gamma = 360°$, pa iz toga slijedi da je $\alpha + \gamma = 180°$. Analogno, dobivamo $\beta + \delta = 180°$.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da su nasuprotni kutovi četverokuta $ABCD$ suplementarni.
Opišimo kružnicu oko trokuta ABD. Tada se iz vrha C tetiva $\overline{BD}$ vidi pod kutom koji je suplementaran kutu kod vrha A pa zaključujemo da tada i točka C pripada toj kružnici. Dakle, četverokut $ABCD$ je tetivni. □

Teorem 1.2.2. *Konveksan četverokut $ABCD$ je tetivni ako i samo ako je $\angle ADB = \angle ACB$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je četverokut $ABCD$ tetivni. Tada mu se može opisati kružnica.

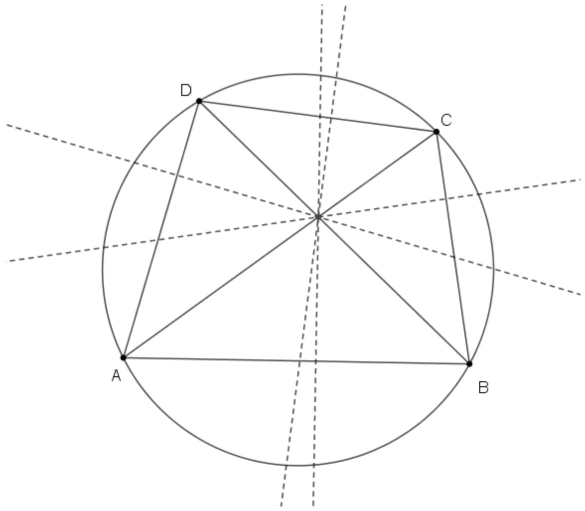


Kako su $\angle ADB$ i $\angle ACB$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AB}$, tada vrijedi $\angle ADB = \angle ACB$.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da vrijedi $\angle ADB = \angle ACB$. Opišimo kružnicu oko trokuta ABD. Tada se iz vrha C tetiva $\overline{AB}$ vidi pod kutom koji je sukladan kutu kod vrha D pa zaključujemo da tada i točka C pripada toj kružnici. Dakle, četverokut $ABCD$ je tetivan.

□

Teorem 1.2.3. *Konveksan četverokut je tetivni ako i samo ako mu se simetrale stranica sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je četverokut tetivni. Budući da je tetivni, može mu se opisati kružnica. Simetrala svake stranice prolazi središtem kružnice, što znači da se simetrale stranica tog četverokuta sijeku u jednoj točki.



⇐ Pretpostavimo da se simetrale stranica nekog četverokuta sijeku u jednoj točki. Kako je ta točka jednako udaljena od svih vrhova, sjecište simetrala stranica je zapravo središte opisane kružnice tom četverokutu. Dakle, taj četverokut ima opisanu kružnicu pa je to tetivni četverokut. □

Karakterizacije tetivnog četverokuta preuzete su iz [9], [14] i [16].

1.3 Ptolomejev teorem i njegove inačice

Najprije ćemo iskazati i dokazati Ptolomejev teorem, a zatim i Ptolomejevu nejednakost. Prikazat ćemo i kvocijentni oblik Ptolomejeva teorema, a zatim navesti i neke posljedice tog oblika.

Teorem 1.3.1. ***(Ptolomejev teorem)*** *U svakom tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.*

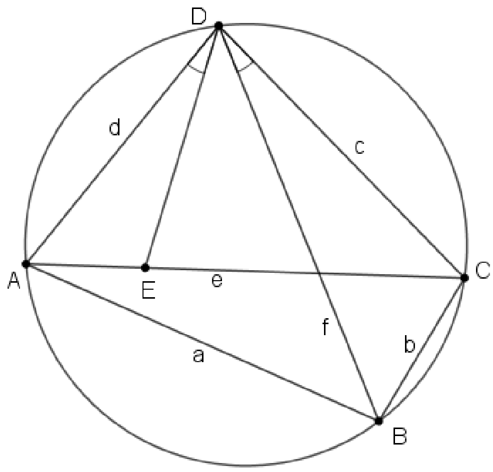
Dokaz. Koristeći uvedene oznake tvrdnja Ptolomejeva teorema zapravo glasi

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|, \tag{1.1}$$

odnosno

$$ef = ac + bd. \tag{1.2}$$

Neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\angle EDA = \angle CDB$.



Promatramo sada trokute AED i BCD na slici. Znamo da su kutovi $\angle EDA$ i $\angle CDB$ sukladni jer smo tako odabrali točku E. Također, sukladni su i kutovi $\angle DAC$ i $\angle DBC$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{CD}$. Iz toga slijedi $\triangle AED \sim \triangle BCD$ prema KKK teoremu o sličnosti te je

$$|AE| = \frac{bd}{f}. \tag{1.3}$$

Nadalje, promotrimo trokute ABD i ECD. Vrijedi da je

$$\angle CDE = \angle BDE + \angle CDB = \angle BDE + \angle EDA = \angle BDA.$$

Također su sukladni i kutovi $\angle ABD$ i $\angle ECD$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AD}$. Prema KKK teoremu o sličnosti slijedi $\triangle ABD \sim \triangle ECD$, odakle je

$$|EC| = \frac{ac}{f}. \tag{1.4}$$

Uočimo kako je

$$e = |AC| = |AE| + |EC|,$$

pa zbrajanjem jednakosti (1.3) i (1.4) te množenjem s f dobivamo

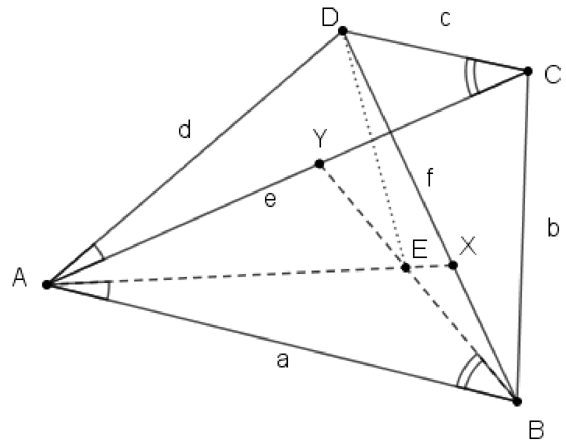
$$ef = ac + bd,$$

što je upravo tvrdnja Ptolomejeva teorema. □

Uz Ptolomejev teorem usko je povezana i Ptolomejeva nejednakost. To je zapravo poopćenje Ptolomejeva teorema.

Teorem 1.3.2. ***(Ptolomejeva nejednakost)*** *Neka su A, B, C, D bilo koje četiri točke u ravnini. Tada vrijedi nejednakost $ac + bd \geqslant ef$, gdje je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$ i $f = |BD|$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ tetivni četverokut.*

Dokaz. Odaberimo na dijagonali $\overline{BD}$ točku X takvu da je $\angle XAB = \angle DAC$, a na dijagonali $\overline{AC}$ točku Y takvu da je $\angle ABY = \angle ACD$. Neka je E presjek pravaca AX i BY.



Promatrajući trokute ABE i ACD na slici zaključujemo da vrijedi

$$\angle CAB = \angle EAB + \angle CAE = \angle DAC + \angle CAE = \angle DAE.$$

Budući da vrijedi $\angle ABE = \angle ACD$ te $\angle EAB = \angle DAC$, prema KKK teoremu o sličnosti zaključujemo
$\triangle ABE \sim \triangle ACD$, pa je

$$\frac{a}{e} = \frac{|BE|}{c},$$

odnosno

$$ac = e|BE|. \tag{1.5}$$

Također, iz ove sličnosti slijedi i

$$\frac{a}{e} = \frac{|AE|}{d}.$$

Budući da je $\angle CAB = \angle DAE$, prema SKS teoremu o sličnosti dobivamo
$\triangle AED \sim \triangle ABC$. Sada iz toga slijedi

$$\frac{d}{e} = \frac{|ED|}{b},$$

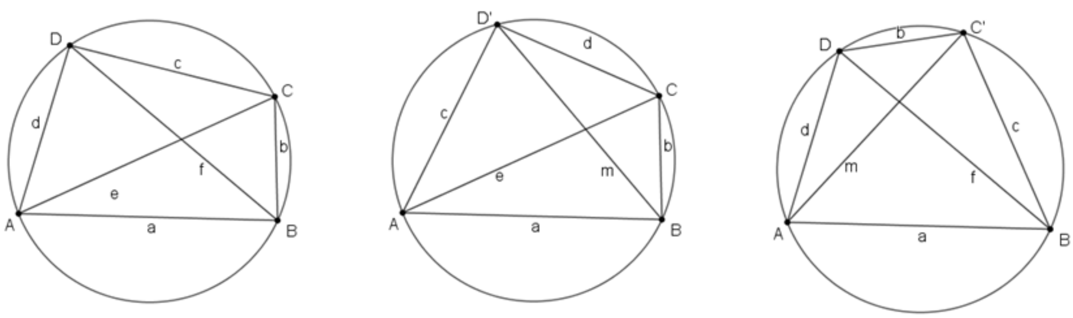
odnosno
$$bd = e|ED|. \tag{1.6}$$
Zbrajanjem jednakosti (1.5) i (1.6) te zbog nejednakosti trokuta primijenjenoj na trokut BDE dobivamo
$$ac + bd = e(|BE| + |ED|) \geqslant ef. \tag{1.7}$$
Jednakost u (1.7) vrijedi ako i samo ako točka E leži na dijagonali $\overline{BD}$ odnosno ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivni. □

Prethodna dva dokaza preuzeta su iz rada [22].

Sada ćemo formulirati i dokazati Ptolomejev teorem u kvocijentnom obliku. Kao posljedicu tog teorema dobit ćemo eksplicitne formule za duljine dijagonala i polumjer opisane kružnice tetivnog četverokuta izražene pomoću duljina stranica tog četverokuta.

Teorem 1.3.3. ***(Kvocijentni oblik Ptolomejeva teorema)*** *Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Vrijedi*
$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \tag{1.8}$$

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Zamjenom stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$, kao na slici, dobivamo vrh D', odnosno tetivni četverokut $ABCD'$. Slično, zamjenom stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ dobivamo vrh C', odnosno tetivni četverokut $ABC'D$.



Uočimo da četverokuti $ABCD'$ i $ABC'D$ imaju jednu sukladnu dijagonalu, odnosno $|BD'|=|AC'|=m$. Sada, primjenjujući Ptolomejev teorem redom na tetivne četverokute $ABCD'$ i $ABC'D$, dobivamo

$$em = ad + bc,$$
$$fm = ab + cd.$$

Podijelimo li te dvije jednakosti, dobivamo traženu tvrdnju, odnosno

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

□

Dokaz kvocijentnog oblika Ptolomejeva teorema preuzet je iz rada [20], a još jedan dokaz dat ćemo u drugom poglavlju.

Pogledajmo sada direktnu posljedicu ovog teorema. Kombinirajući kvocijentni oblik s uobičajenim oblikom Ptolomejeva teorema, odnosno množenjem relacija (1.2) i (1.8) dobivamo formule za duljine dijagonala tetivnog četverokuta.

Korolar 1.3.4. *Duljine dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$ dane su s*

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Korolar 1.3.5. *Polumjer opisane kružnice tetivnog četverokuta $ABCD$ dan je s*

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}},$$

gdje je

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Dokaz. Polumjer opisane kružnice tetivnog četverokuta $ABCD$ podudara se s polumjerom opisane kružnice trokuta ABC. Stoga, primjenom formule

$$R = \frac{abe}{4P(\triangle ABC)},$$

gdje $P(\triangle ABC)$ označava površinu trokuta ABC, prethodnog korolara i Heronove formule za površinu trokuta dobivamo traženi izraz. □

Poglavlje 2

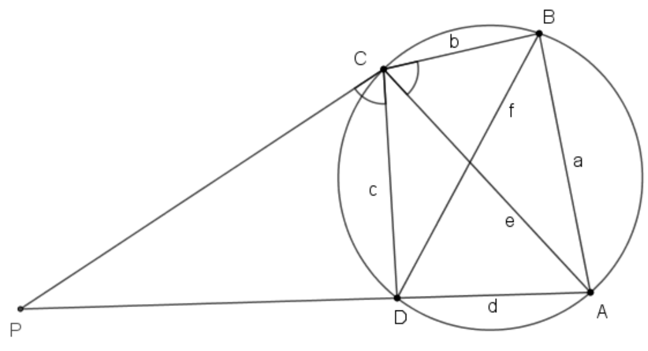
Dokazi Ptolomejeva teorema

U ovom poglavlju prikazat ćemo više različitih dokaza Ptolomejeva teorema. Na početku dajemo planimetrijske i trigonometrijske dokaze, zatim dokaz ispitivanjem tijeka funkcije te dokaze pomoću vektora i kompleksnih brojeva. Naposljetku, imamo još dokaz inverzijom te dokaz bez riječi kao jedan od najelegantnijih i najbržih dokaza Ptolomejeva teorema.

2.1 Planimetrijski dokazi

Postoji više planimetrijskih dokaza Ptolomejeva teorema, a jedan od njih je klasični dokaz pomoću sličnosti prikazan u poglavlju 1. Pomoću sličnosti, Ptolomejev teorem može se dokazati i na sljedeći način.

Dokaz 1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Produžimo dužinu $\overline{AD}$, kao na slici, i na tom produžetku odaberimo točku P tako da je $\angle DCP = \angle BCA$.



Promotrimo trokute ABC i DCP. Znamo da je su kutovi $\angle ABC$ i $\angle CDA$ suplementarni, zbog Teorema 1.2.1., te da su i kutovi $\angle CDA$ i $\angle PDC$ suplementarni jer su sukuti pa iz toga dobivamo upravo

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = 180^\circ - (180^\circ - \angle PDC) = \angle PDC.$$

Također je $\angle DCP = \angle BCA$, zbog odabira točke P pa prema KKK teoremu o sličnosti slijedi $\triangle ABC \sim \triangle DCP$.
Promotrimo sada trokute BCD i ACP. Uočimo da je $\angle BCD = \angle ACP$ jer je

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle DCP + \angle ACD = \angle ACP$$

te je zbog Teorema 1.2.2. $\angle DBC = \angle DAC$. Sada prema KKK teoremu o sličnosti slijedi $\triangle BCD \sim \triangle ACP$.
Iz $\triangle ABC \sim \triangle DCP$ imamo

$$\frac{a}{b} = \frac{|DP|}{c},$$

odnosno

$$ac = b|DP|. \tag{2.1}$$

Sada iz jednakosti (2.1) imamo da je

$$ac + bd = b|DP| + bd = b(|DP| + d) = b|AP|. \tag{2.2}$$

Iz $\triangle BCD \sim \triangle ACP$ slijedi i da je

$$\frac{b}{f} = \frac{e}{|AP|},$$

odnosno

$$ef = b|AP|. \tag{2.3}$$

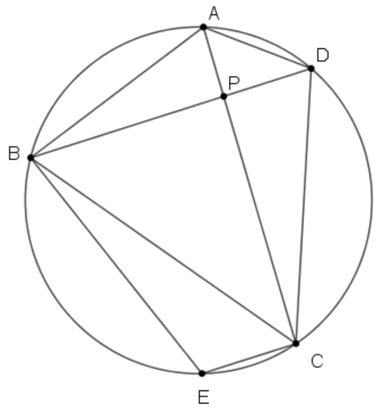
Uvrštavajući (2.3) jednakost u (2.2) dobivamo tvrdnju Ptolomejeva teorema, odnosno

$$ac + bd = ef.$$

□

Osim dokaza pomoću sličnosti, Ptolomejev teorem može se dokazati i pomoću površina, uz malu pomoć trigonometrije.

Dokaz 2. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka je točka P sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ te neka je E točka na kružnici tako da su dužine $\overline{CE}$ i $\overline{BD}$ paralelne, kao na slici.



Uočimo da je četverokut $BECD$ je jednakokračni trapez. Nadalje, kako su $\angle EDA$ i $\angle ECA$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AE}$, slijedi da je $\angle EDA = \angle ECA$. Zatim imamo i $\angle ECA = \angle DPC$ jer je $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$. Sada slijedi $\angle EDA = \angle ECA = \angle DPC$ pa je i

$$\sin\angle EDA = \sin\angle ECA = \sin\angle DPC. \tag{2.4}$$

Znamo i da su površine trokuta DBE i DBC jednake jer imaju zajedničku stranicu i istu visinu. Izračunajmo sada površinu četverokuta $ABCD$. Budući da se taj četverokut sastoji od dva trokuta ABE i EDA, imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
P(ABCD) &= \frac{1}{2}(|AB|\cdot|BE|\sin\angle ABE + |AD|\cdot|DE|\sin\angle EDA)\\
&= \frac{1}{2}(|AB|\cdot|BE|\sin\angle ABE + |AD|\cdot|DE|\sin\angle ABE)\\
&(\angle ABE \text{ i } \angle EDA \text{ su suplementarni })\\
&= \frac{1}{2}(|AB|\cdot|BE| + |AD|\cdot|DE|)\sin\angle ABE\\
&= \frac{1}{2}(|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|)\sin\angle ABE.\\
&(BECD \text{ je jednakokračni trapez })
\end{aligned}$$

Nadalje, isto tako je površina konveksnog četverokuta $ABCD$ jednaka $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\sin\angle DPC$. No, budući da vrijedi jednakost (2.4), tada je

$$|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| = |AC|\cdot|BD|,$$

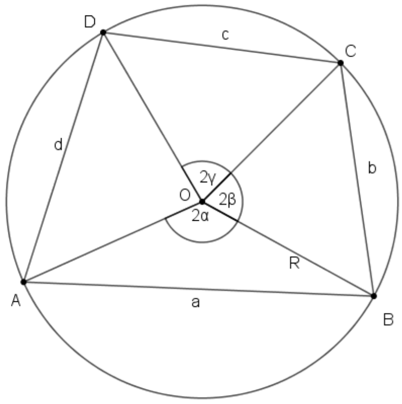
što smo i trebali dokazati. □

Dani planimetrijski dokazi preuzeti su iz [5].

2.2 Trigonometrijski dokazi

U ovoj točki dat ćemo dva trigonometrijska dokaza Ptolomejeva teorema. U prvom dokazu koristimo sinusov teorem te adicijske formule za sinus i kosinus zbroja, a u drugom koristimo kosinusov teorem.

Dokaz 3. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka su α, β i γ redom mjere obodnih kutova nad tetivama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ te neka je R polumjer opisane kružnice tom četverokutu.



Prema sinusovom teoremu je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, $d = 2R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $e = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $f = 2R\sin(\beta+\gamma)$. Sada je tvrdnja Ptolomejeva teorema ekvivalentna s trigonometrijskim identitetom

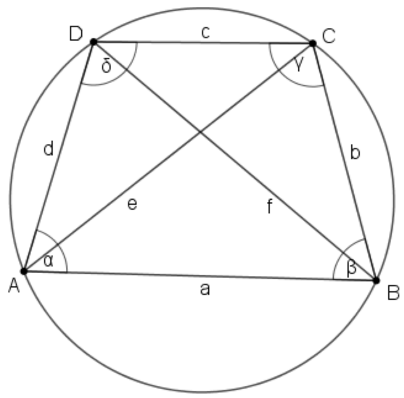
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Primjenjujući adicijske formule za sinus i kosinus zbroja te raspisujući lijevu stranu jednakosti, imamo redom

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) =& (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) \\
=& \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos^2\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin^2\beta\cos\gamma \\
& + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma \\
=& \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha(1-\sin^2\beta)\sin\gamma + \cos\alpha\sin^2\beta\cos\gamma \\
& + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma \\
=& \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \\
& + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma) \\
=& \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta(\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma) \\
=& \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Dokaz 4. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut, kao na slici.



Primjenom kosinusovog teorema na trokute ABC i CDA dobivamo

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

Budući da je $\beta+\delta=180°$, slijedi

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta,$$

odnosno

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}
e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \\
&= \frac{(a^2 + b^2)(ab + cd) - ab(a^2 + a^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd} \\
&= \frac{(a^2 + b^2)cd + ab(c^2 + d^2)}{ab + cd} \\
&= \frac{a^2cd + b^2cd + abd^2 + abc^2}{ab + cd} \\
&= \frac{ad(ac + bd) + bc(cd + ab)}{ab + cd} \\
&= \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.
\end{aligned}$$

Analogno, dobivamo

$$f^2 = \frac{(ab+cd)(bd+ac)}{bc+ad}.$$

Pomnožimo li dobivene izraze za duljine dijagonala te izvadimo korijen, dobivamo

$$ef = ac + bd,$$

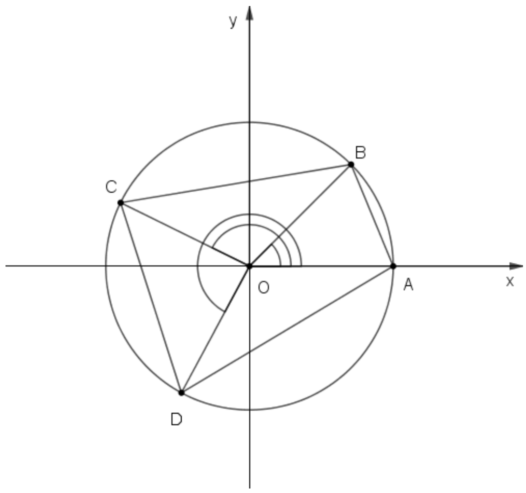
što je upravo tvrdnja Ptolomejeva teorema. Također, podijelimo li dobivene izraze za duljine dijagonala dobivamo i kvocijentni oblik Ptolomejeva teorema. □

Dani trigonometrijski dokazi preuzeti su iz radova [5] i [21].

2.3 Dokaz ispitivanjem tijeka funkcije

U ovoj točki dajemo analitički dokaz Ptolomejeva teorema. U samom dokazu ispitivat ćemo tijek odgovarajuće funkcije. Taj dokaz je preuzet iz članka [21].

Dokaz 5. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Pravokutni koordinatni sustav odaberimo tako da je ishodište sustava upravo središte kružnice opisane četverokutu, a točka A neka leži na pozitivnom dijelu osi apscisa. Dakle, točka A ima koordinate $A(r, 0)$.
Neka su β, γ i δ, $\beta < \gamma < \delta < 2\pi$, redom kutovi koje dužine $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ zatvaraju s pozitivnim dijelom osi apscisa. Tada su koordinate vrhova B, C i D redom jednake $B(r\cos\beta, r\sin\beta)$, $C(r\cos\gamma, r\sin\gamma)$ i $D(r\cos\delta, r\sin\delta)$.



Izračunajmo sada duljine stranica i dijagonala tetivnog četverokuta $ABCD$. Imamo:

$$|AB| = \sqrt{(r - r\cos\beta)^2 + (r\sin\beta)^2} = \sqrt{2r^2(1-\cos\beta)} = 2r\sin\frac{\beta}{2}.$$

Analogno, dobivamo:

$$|BC| = 2r\sin\frac{\gamma-\beta}{2},\quad |CD| = 2r\sin\frac{\delta-\gamma}{2},\quad |DA| = 2r\sin\frac{\delta}{2},$$
$$|AC| = 2r\sin\frac{\gamma}{2},\quad |BD| = 2r\sin\frac{\delta-\beta}{2}.$$

Izrazimo sada $|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| - |AC|\cdot|BD|$ pomoću gornjih formula te promotrimo funkciju

$$f(\beta,\gamma,\delta) = 4r^2\left(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2} + \sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}\right).$$

Pogledajmo sada dobivenu funkciju za fiksne γ i δ, odnosno ispitajmo tijek funkcije

$$g(\beta) = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2} + \sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}.$$

Deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
g'(\beta) =& \frac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta-\beta}{2} \\
=& \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\beta+\delta-\gamma}{2} - \sin\frac{\beta-\delta+\gamma}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\delta+\gamma-\beta}{2} + \sin\frac{\delta-\gamma+\beta}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\gamma+\delta-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma-\delta+\beta}{2}\right) \\
=& \frac{1}{4}\sin\frac{\beta+\delta-\gamma}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\beta-\delta+\gamma}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\delta+\gamma-\beta}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{\beta+\delta-\gamma}{2} \\
&+ \frac{1}{4}\sin\frac{\delta+\gamma-\beta}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{\beta-\delta+\gamma}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $g'(\beta)=0$, odnosno g je konstantna funkcija. Pogledajmo sada čemu je jednako $g(\pi)$:

$$\begin{aligned}
g(\pi) =& \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\delta-\gamma}{2} + \sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\pi}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta-\pi}{2} \\
=& \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi-\delta+\gamma}{2} - \cos\frac{\pi+\delta-\gamma}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\delta-\gamma+\pi}{2} - \cos\frac{\delta+\gamma-\pi}{2}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma-\delta+\pi}{2} - \cos\frac{\gamma+\delta-\pi}{2}\right) \\
=& \frac{1}{2}\cos\frac{\pi-\delta+\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi+\delta-\gamma}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi+\delta-\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\delta+\gamma-\pi}{2} \\
&- \frac{1}{2}\cos\frac{\pi-\delta+\gamma}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\delta+\gamma-\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Budući da je $g(\pi) = 0$, slijedi da je $g \equiv 0$ na cijelom intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Budući da su δ i γ proizvoljni, slijedi da je $f(\beta, \gamma, \delta) = 0$, odnosno

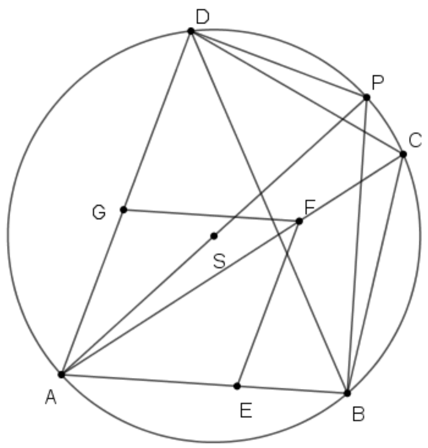
$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| - |AC| \cdot |BD| = 0,$$

čime je dokaz gotov. □

2.4 Dokazi pomoću vektora i kompleksnih brojeva

U dokazu koji slijedi koristit ćemo poznata svojstva skalarnog produkta vektora.

Dokaz 6. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka je F točka na dijagonali $\overline{AC}$ te neka su E i G točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ tako da je četverokut $AEFG$ paralelogram. Također, odaberimo točku P na kružnici opisanoj četverokutu $ABCD$ tako da je dužina $\overline{AP}$ promjer te kružnice, kao na slici.



Zaključujemo sada da su $\angle ABP$, $\angle ACP$ i $\angle PDA$ pravi kutovi nad promjerom kružnice $\overline{AP}$ ili, u slučaju da se $\overline{AP}$ podudara s nekom od tetiva $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ili $\overline{AD}$, dva od ta tri kuta su prava.
U bilo kojem od tih slučajeva vrijedi:

$$\begin{aligned}
|AF| \cdot |AC| &= \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AF} \\
&= \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) \\
&= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AG} \\
&= |AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AG|.
\end{aligned}$$

Budući da je $|AG|=|EF|$, možemo pisati

$$|AC| \cdot |BD| \cdot \frac{|AF|}{|BD|} = |AB| \cdot |CD| \cdot \frac{|AE|}{|CD|} + |AD| \cdot |BC| \cdot \frac{|EF|}{|BC|}.$$

Također, znamo da su kutovi $\angle AEF$ i $\angle FGA$ sukladni, a kutovi $\angle DAE$ i $\angle BCD$ su suplementarni. Budući da su $\angle FGA$ i $\angle DAE$ suplementarni, tada je

$$\angle AEF = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - (180^\circ - \angle BCD) = \angle BCD.$$

Također, imamo $\angle EFA=\angle DAC$ jer je $AEFG$ paralelogram te $\angle DAC=\angle DBC$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom. Zato je $\angle EFA=\angle DBC$. Dakle, $\triangle AEF \sim \triangle DBC$. Iz toga slijedi

$$\frac{|AF|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|CD|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

Sada iz dobivenih jednakosti zaključujemo da je

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|,$$

što je upravo tvrdnja Ptolomejeva teorema. □

Dani dokaz preuzet je iz rada [11], a sljedeća dva, u kojima ćemo četverokut smjestiti u kompleksnu ravninu, preuzeta su iz rada [5].

Dokaz 7. Smjestimo četverokut $ABCD$ u kompleksnu ravninu te neka vrhovi A, B, C, D odgovaraju kompleksnim brojevima a, b, c, d. Tada očito vrijedi jednakost

$$(a - b) \cdot (c - d) + (a - d) \cdot (b - c) = (a - c) \cdot (b - d).$$

Prelazeći na apsolutnu vrijednost i primjenjujući nejednakost trokuta dobivamo

$$|(a - b) \cdot (c - d)| + |(a - d) \cdot (b - c)| \geqslant |(a - c) \cdot (b - d)|,$$

što je upravo Ptolomejeva nejednakost. □

Dokaz 8. Postavimo točku D u ishodište kompleksne ravnine. Tada točke A, B, C imaju kompleksne koordinate a, b, c redom. Neka je

$$a' = \frac{a}{|a|^2}, \quad b' = \frac{b}{|b|^2}, \quad c' = \frac{c}{|c|^2}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}|a' - b'|^2 &= |\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}|^2 \\ &= \frac{|a|^2}{|a|^4} + \frac{|b|^2}{|b|^4} - 2\frac{a \cdot b}{|a|^2 \cdot |b|^2} \\ &= \frac{|b|^2 + |a|^2 - 2(a \cdot b}{|a|^2 \cdot |b|^2} \\ &= \frac{|a - b|^2}{|a|^2 \cdot |b|^2}.\end{aligned}$$

Analogno, dobivamo

$$|b' - c'| = \frac{|b - c|}{|b| \cdot |c|}, \quad |c' - a'| = \frac{|c - a|}{|c| \cdot |a|}.$$

Iz nejednakosti trokuta slijedi

$$|c' - a'| \leqslant |a' - b'| + |b' - c'|,$$

odnosno

$$\frac{|c - a|}{|c| \cdot |a|} \leqslant |b' - c'| + |a' - b'| = \frac{|a - b|}{|a| \cdot |b|} + \frac{|b - c|}{|b| \cdot |c|}.$$

Konačno, dobivamo

$$|a - b| \cdot |c| \leqslant |b - c| \cdot |a| + |c - a| \cdot |b|,$$

što je upravo Ptolomejeva nejednakost. □

2.5 Dokaz pomoću inverzije

Prije nego krenemo na dokaz Ptolomejeva teorema pomoću inverzije, prisjetit ćemo se definicije inverzije i njezinih osnovnih svojstava koje ćemo koristiti u dokazu.

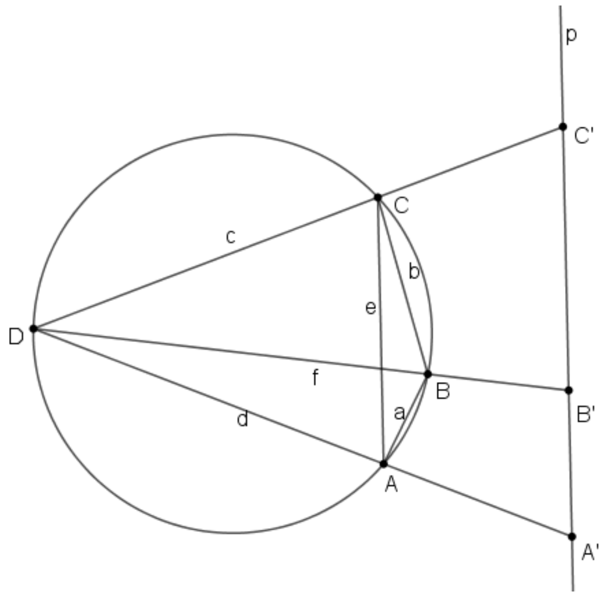
Definicija 2. *Neka je O točka ravnine i k pozitivan realan broj. Inverzija i sa središtem u točki O i koeficijentom inverzije k, $k > 0$, je preslikavanje skupa točaka ravnine na samu sebe tako da za bilo koju točku A različitu od O vrijedi $i(A) = A'$, pri čemu je točka A' na polupravcu OA takva da je $|OA| \cdot |OA'| = k$.*

Teorem 2.5.1. *Ako je O središte inverzije, kružnica koja prolazi točkom O preslikava se u pravac, a kružnica koja ne prolazi točkom O u kružnicu.*

Teorem 2.5.2. *Neka su A' i B' slike točaka A i B pri inverziji sa središtem u O i koeficijentom inverzije k. Tada vrijedi*

$$|A'B'| = \frac{|AB| \cdot k}{|OA| \cdot |OB|}.$$

Dokaz 9. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut s oznakama. Neka je i inverzija sa središtem u točki D i koeficijentom inverzije $k > 0$. Nadalje, neka je $i(A)$=A', $i(B)$=B' i $i(C)$=C'. Iz Teorema 2.5.1 znamo da se luk $\widehat{ABC}$ se inverzijom preslikava u odsječak $A'B'C'$ pravca p, kao na slici.



Budući da točka B' leži između točaka A' i C', vrijedi da je $|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|$.

Zbog Teorema 2.5.2 sada vrijedi

$$|A'C'| = k \cdot \frac{|AC|}{|DA| \cdot |DC|} = \frac{ke}{cd}. \tag{2.5}$$

Analogno, dobivamo i

$$|B'C'| = \frac{kb}{fc}, \quad |A'B'| = \frac{ka}{fd}. \tag{2.6}$$

Sada je

$$\frac{ke}{cd} = \frac{kb}{fc} + \frac{ka}{fd},$$

odakle množenjem s $\frac{cdf}{k}$ dobivamo Ptolomejev teorem. □

Dokaz inverzijom preuzet je iz rada [3]. Detaljnije o inverziji čitatelj može naći u knjizi [16]. U ovoj točki dajemo još jedan dokaz kvocijentnog oblika Ptolomejeva teorema. U njemu se također koristi inverzija, a preuzet je iz članka [3].

Dokaz 10. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Koristimo oznake s prethodne slike te inverziju i kao u prethodnom dokazu. Iz trokuta $C'DA'$ na osnovi Stewartovog teorema (vidi [8]) dobivamo:

$$|A'D|^2 \cdot |B'C'| + |C'D|^2 \cdot |A'B'| = |B'D|^2 \cdot |A'C'| + |A'B'| \cdot |A'C'| \cdot |B'C'|. \tag{2.7}$$

Kako zbog inverzije i vrijedi da je $|DA| \cdot |DA'|=k$, slijedi da je

$$|DA'| = \frac{k}{|DA|} = \frac{k}{d}. \tag{2.8}$$

Analogno je i

$$|DC'| = \frac{k}{|DC|} = \frac{k}{c}. \tag{2.9}$$

Uvrštavanjem jednakosti (2.5), (2.6), (2.8) i (2.9) u jednakost (2.7) dobivamo

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 \cdot \frac{kb}{fc} + \left(\frac{k}{c}\right)^2 \cdot \frac{ka}{fd} = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \cdot \frac{ke}{cd} + \frac{ka}{fd} \cdot \frac{ke}{cd} \cdot \frac{kb}{fc}$$

pa, nakon množenja s $\frac{(cdf)^2}{k^3}$, slijedi

$$bcf + adf = cde + aeb,$$

odnosno

$$f(bc + ad) = e(cd + ab),$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

□

2.6 Dokaz bez riječi

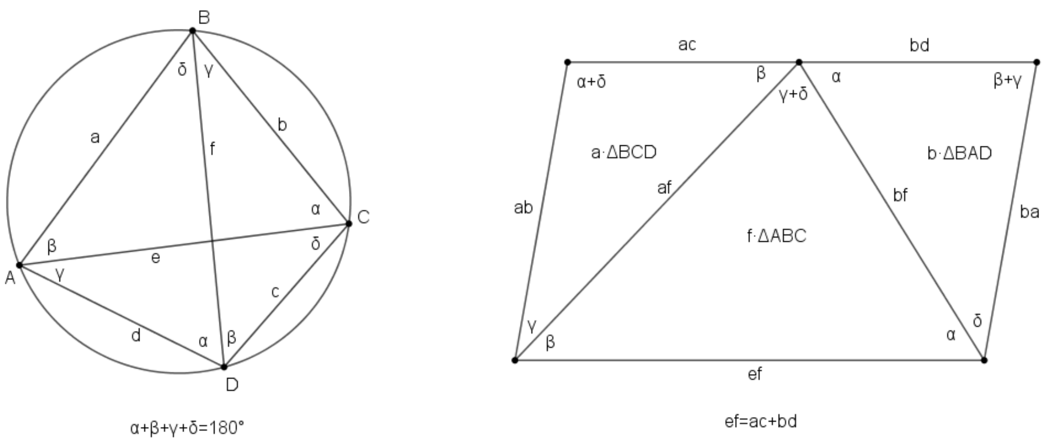
I na kraju ovog poglavlja dajemo dokaz Ptolomejeva teorema bez riječi. To je jedan od najelegantnijih dokaza tog teorema. Pomoću danog tetivnog četverokuta za koji znamo da, s oznakama kao na slici, vrijedi

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

dobivamo paralelogram za koji vrijedi relacija

$$ef = ac + bd,$$

a to je upravo tvrdnja Ptolomejeva teorema.



Dokaz bez riječi preuzet je iz [7], a još nekoliko dokaza Ptolomejeva teorema zainteresirani čitatelj može vidjeti u [5].

Poglavlje 3

Primjene Ptolomejeva teorema

Pomoću Ptolomejeva teorema možemo dokazati neke važne teoreme iz geometrije i trigonometrije. Naime, dat ćemo dokaze adicijskih formula za sinus zbroja i razlike te dokaze kosinusovog i Pitagorina teorema.

Primjenom Ptolomejeva teorema možemo izvesti neka zanimljiva svojstva pravilnih mnogokuta. Posebice, promatrat ćemo jednakostraničan trokut, kvadrat, pravilni peterokut i sedmerokut, pravilni mnogokut s neparnim brojem stranica te konveksni šesterokut.

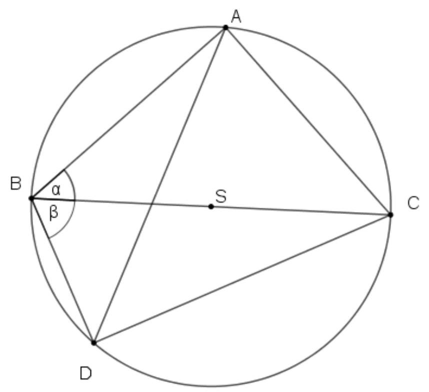
Nadalje, primjenom Ptolomejeva teorema u ovoj ćemo točki izvesti formulu za površinu tetivnog četverokuta i Carnotov teorem. Konačno, na kraju ovog poglavlja opisat ćemo i Ptolomejevu tablicu tetiva koju je on dobio služeći se istoimenim teoremom.

3.1 Primjena na klasične teoreme

Teorem 3.1.1. ***(Adicijska formula za sinus zbroja)*** *Neka su dani kutovi α, β. Tada vrijedi*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su kutovi α i β šiljasti. Neka je $ABDC$ četverokut upisan u kružnicu polumjera $\frac{1}{2}$ takav da je $\overline{BC}$ promjer te kružnice te neka je $\angle ABC{=}\alpha$ i $\angle CBD{=}\beta$, kao na slici.



Budući da je $\overline{BC}$ promjer kružnice, znamo da su trokuti ABC i BDC pravokutni, pa vrijedi

$$|BC| = 1, \quad |AB| = \cos\alpha, \quad |AC| = \sin\alpha, \quad |BD| = \cos\beta, \quad |DC| = \sin\beta.$$

Nadalje, primjenom sinusovog teorema imamo da je

$$\frac{|AD|}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R,$$

odnosno

$$|AD| = \sin(\alpha+\beta).$$

Konačno, primijenimo li Ptolomejev teorem na četverokut $ABDC$, dobivamo identitet

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

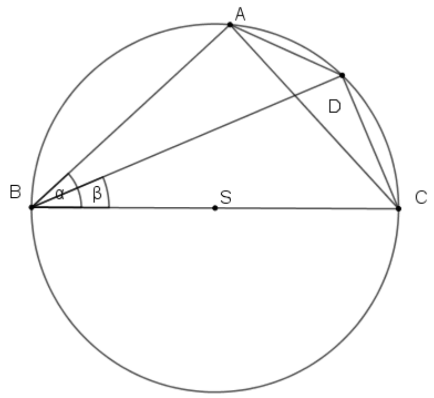
što je i trebalo dokazati. □

Dakako, adicijsku formulu za sinus razlike možemo lako dokazati pomoću navedene adicijske formule za sinus zbroja, no nama je ovdje zanimljivo pogledati dokaz pomoću Ptolomejeva teorema. Ideja dokaza odgovarajuće formule slična je prethodnom dokazu.

Teorem 3.1.2. ***(Adicijska formula za sinus razlike)*** *Neka su dani kutovi α, β. Tada vrijedi*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Dokaz. Kao i u prethodnom teoremu, pretpostavimo da su kutovi α i β šiljasti. Neka je $ABCD$ četverokut upisan u kružnicu polumjera $\frac{1}{2}$ takav da je $\overline{BC}$ promjer te kružnice te neka je $\angle ABC=\alpha$ i $\angle DBC=\beta$, kao na slici.



Budući da je $\overline{BC}$ promjer kružnice, znamo da su trokuti ABC i BCD pravokutni, pa vrijedi

$$|BC| = 1, \quad |AB| = \cos\alpha, \quad |AC| = \sin\alpha, \quad |BD| = \cos\beta, \quad |DC| = \sin\beta.$$

Također, iz sinusovog teorema imamo $|AD| = \sin(\alpha - \beta)$, pa primjenom Ptolomejeva teorema na četverokut $ABCD$, dobivamo traženi identitet.

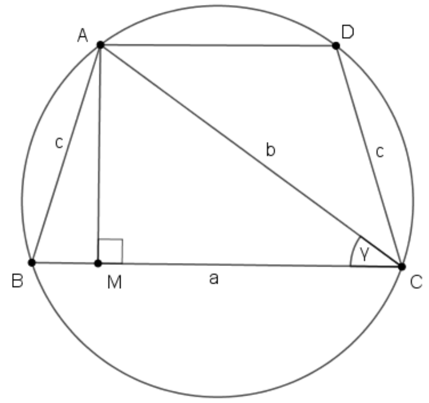
□

U nastavku dajemo dokaz kosinusovog teorema pomoću Ptolomejeva teorema.

Teorem 3.1.3. ***(Kosinusov teorem)*** *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta ABC i α, β, γ pripadni kutovi, tada vrijedi*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad i \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dokaz. Promotrimo trokut ABC u kojem je $\gamma < 90°$ te mu opišimo kružnicu. Točkom A povucimo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ te neka je točka D presjek te paralele i kružnice. Time smo dobili jednakokračan trapez $ABCD$ u kojem je $|AB|$=$|CD|$=c i $|BD|$=$|AC|$=b, kao na slici.



Sada, zaključujemo da je $|CM|=b\cos\gamma$, gdje je M nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Tada je

$$|BM| = a - |CM| = a - b\cos\gamma.$$

Budući da je $ABCD$ jednakokračan trapez, imamo $|AD|=|BC|-2|BM|$, pa uvrštavajući u tu jednakost prethodnu relaciju, dobivamo

$$|AD| = a - 2(a - b\cos\gamma) = 2b\cos\gamma - a.$$

Također, znamo da se svakom jednakokračnom trapezu može opisati kružnica. Stoga, primjenom Ptolomejeva teorema na četverokut $ABCD$ dobivamo

$$b^2 = c^2 + a(2b\cos\gamma - a),$$

odnosno

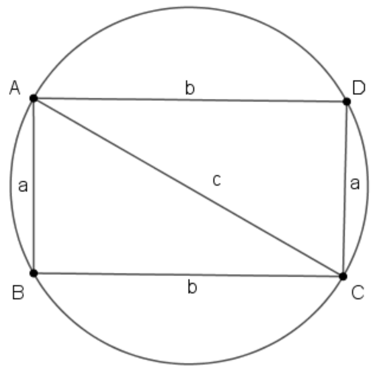
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Sličan je postupak ukoliko je $\gamma > 90°$. □

Primijetimo kako je jedan od načina dokazivanja Ptolomejeva teorema u prethodnom poglavlju bio upravo pomoću kosinusovog teorema, a sada smo kosinusov teorem dokazali pomoću Ptolomejeva. Kao specijalni slučaj kosinusovog teorema dat ćemo i dokaz Pitagorina teorema.

Teorem 3.1.4. ***(Pitagorin teorem)*** *U pravokutnom trokutu je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.*

Dokaz. U slučaju kada je četverokut $ABCD$ pravokutnik, Ptolomejev teorem nam uz oznake $|AB|=|CD|=a$, $|DA|=|BC|=b$ i $|AC|=|BD|=c$ daje Pitagorin teorem.



□

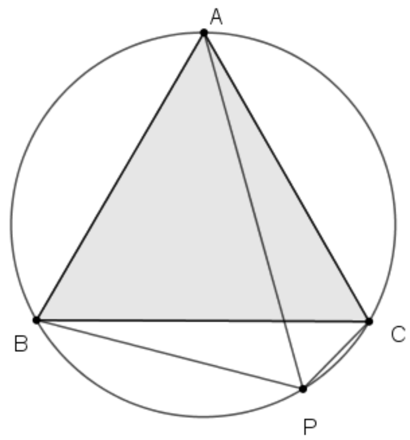
Navedeni teoremi i dokazi vezani uz primjenu na klasične teoreme preuzeti su iz članka [21].

3.2 Primjena na pravilne mnogokute

U ovoj točki dajemo neka zanimljiva svojstva pravilnih mnogokuta izvedenih pomoću Ptolomejeva teorema. U prva dva teorema promatramo jednakostraničan trokut i kvadrat te točku koja leži na njihovim opisanim kružnicama.

Teorem 3.2.1. *Neka je ABC jednakostraničan trokut i neka je P točka na opisanoj kružnici tog trokuta. Tada je najdulja od dužina $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ jednaka zbroju preostale dvije dužine.*

Dokaz. Neka se točka P se nalazi između točaka B i C, kao na slici. Tvrdimo da je $|PA| = |PB| + |PC|$.



Četverokut $ABPC$ je tetivni jer ima opisanu kružnicu. Primijenimo li na taj četverokut Ptolomejev teorem dobivamo

$$|PA| \cdot |BC| = |PB| \cdot |AC| + |PC| \cdot |AB|.$$

Budući da je ABC jednakostraničan trokut, slijedi da je $|AB|$=$|BC|$=$|AC|$. Sada, iz prethodne jednakosti imamo

$$|PA| \cdot |AB| = |PB| \cdot |AB| + |PC| \cdot |AB| \Leftrightarrow |AB| \cdot (|PA| - |PB| - |PC|) = 0 \Leftrightarrow |PA| = |PB| + |PC|,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

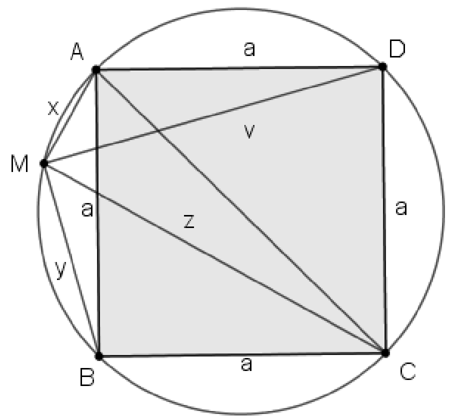
Teorem 3.2.2. *Ako točka M leži na kružnici opisanoj kvadratu $ABCD$, onda vrijedi*

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2,$$

a ako M leži na kraćem luku $\widehat{AB}$, onda vrijedi

$$\frac{|MA| + |MB|}{|MC| + |MD|} = \sqrt{2} - 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da se točka M nalazi između točaka A i B, kao na slici. Označimo $|MA|=x$, $|MB|=y$, $|MC|=z$, $|MD|=v$ te duljinu stranice kvadrata s a.



Primjenjujući Ptolomejev teorem na četverokute $MCDA$ i $MBCA$, dobivamo

$$xa + za = va\sqrt{2}, \quad xa + ya\sqrt{2} = za.$$

Podijelimo obje jednakosti s a te drugu jednakost zapišimo u obliku

$$z - x = y\sqrt{2}.$$

Kvadriranjem obje jednakosti te zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}(x+z)^2 + (z-x)^2 = 2v^2 + 2y^2 &\Leftrightarrow x^2 + 2xz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 2v^2 + 2y^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2z^2 = 2v^2 + 2y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + z^2 = v^2 + y^2,\end{aligned}$$

što je upravo jednakost koju smo željeli dokazati.

Sada preostaje dokazati i drugu jednakost iz teorema. Primjenom Ptolomejeva teorema na četverokute $MCDA$ i $MBCD$ dobivamo

$$x + z = v\sqrt{2}, \quad v + y = z\sqrt{2}.$$

Zbrajanjem tih dviju relacija slijedi

$$(x + y) + (z + v) = (z + v)\sqrt{2},$$

te dijeljenjem sa $z + v$

$$\frac{x + y}{z + v} = \sqrt{2} - 1.$$

Dakle, zaista vrijedi

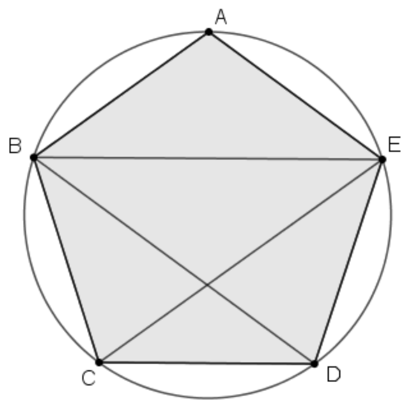
$$\frac{|MA| + |MB|}{|MC| + |MD|} = \sqrt{2} - 1.$$

□

U idućem teoremu vezanom uz pravilni peterokut izvest ćemo važnu relaciju koja povezuje duljinu stranice i dijagonale tog mnogokuta.

Teorem 3.2.3. *Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut sa stranicom duljine a i dijagonalom duljine d. Tada vrijedi*

$$a^2 + ad = d^2.$$



Dokaz. Primjenom Ptolomejeva teorema na četverokut $BCDE$ dobivamo

$$|BC| \cdot |DE| + |BE| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|,$$

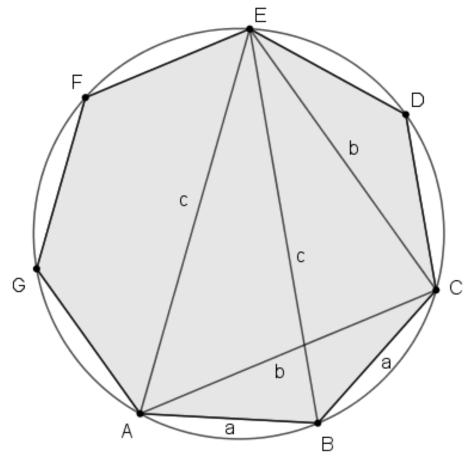
što je upravo jednakost $a^2+ad=d^2$. □

Napomena 1. *Ako omjer duljina dijagonale i stranice u pravilnom peterokutu označimo sa x, odnosno $x = \frac{d}{a}$, jednakost iz prethodnog teorema možemo zapisati kao $x^2 = x + 1$. Rješavajući tu kvadratnu jednadžbu dobivamo $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Budući da je x pozitivan realan broj, slijedi da je $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Uočimo sada da je omjer duljina dijagonale i stranice u pravilnom peterokutu jednak omjeru zlatnog reza.*

Teorem 3.2.4. *U pravilnom sedmerokutu $ABCDEFG$ vrijedi*

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$

Dokaz. Označimo s a, b i c redom duljine stranice, kraće dijagonale i dulje dijagonale pravilnog sedmerokuta, kao na slici.



Primjenom Ptolomejeva teorema na tetivni četverokut $ABCE$ dobivamo

$$ab + ac = bc \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|},$$

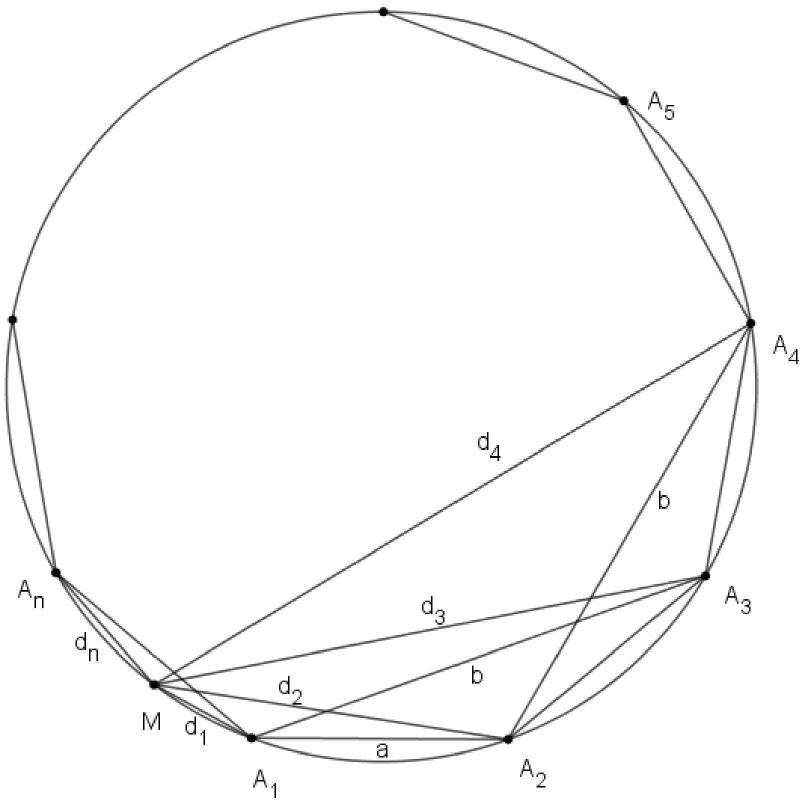
kao što se i tražilo. □

Sljedeći teorem je poopćenje Teorema 3.2.1. za jednakostraničan trokut.

Teorem 3.2.5. *Neka je $A_1A_2 \ldots A_n$ pravilni mnogokut s neparnim brojem stranica. Neka je M točka na opisanoj kružnici tog mnogokuta te neka se nalazi između točaka A_1 i A_n. Tada je zbroj udaljenosti od točke M do vrhova mnogokuta A_i, gdje je i neparan broj, jednak zbroju udaljenosti od točke M do vrhova mnogokuta A_k, gdje je k paran broj, odnosno vrijedi*

$$|MA_1| + |MA_3| + \ldots + |MA_n| = |MA_2| + |MA_4| + \ldots + |MA_{n-1}|.$$

Dokaz. Označimo duljinu stranice mnogokuta s a. Zatim, istaknimo dijagonale $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, ... , $\overline{A_nA_2}$ te njihovu duljinu označimo s b. Nadalje, istaknimo dužine $\overline{MA_1}$, $\overline{MA_2}$, ... ,$\overline{MA_n}$ te označimo njihove duljine s d_i, kao na slici.



Primjenom Ptolomejeva teorema redom na četverokute $MA_1A_2A_3$, $MA_2A_3A_4, \ldots, MA_nA_1A_2$ dobivamo

$$\begin{aligned} ad_1 + ad_3 &= bd_2, \quad bd_3 = ad_2 + ad_4, \\ ad_3 + ad_5 &= bd_4, \quad bd_5 = ad_4 + ad_6, \ldots, \\ ad_{n-2} + ad_n &= bd_{n-1}, \quad bd_n + ad_1 = ad_{n-1}, \\ ad_n + bd_1 &= ad_2. \end{aligned}$$

Sada, zbrajajući te jednakosti, imamo

$$(2a + b)(d_1 + d_3 + \ldots + d_n) = (2a + b)(d_2 + d_4 + \ldots + d_{n-1})$$

odnosno dobivamo traženu tvrdnju

$$d_1 + d_3 + \ldots + d_n = d_2 + d_4 + \ldots + d_{n-1}.$$

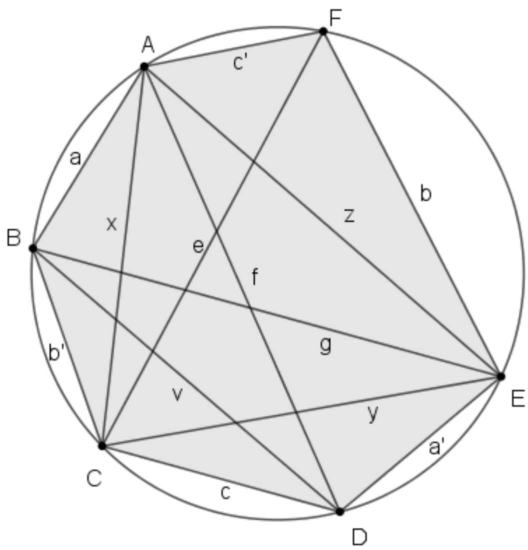
□

Na kraju ovog poglavlja dajemo analogon Ptolomejeva teorema za konveksan šesterokut kojem možemo opisati kružnicu.

Teorem 3.2.6. *Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut kojem se može opisati kružnica te neka su stranice tog šesterokuta $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FA}$ redom duljine dužina a, a', b, b', c i c'. Nadalje, neka su dijagonale $\overline{CF}$, $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ redom duljine dužina e, f i g. Tada vrijedi:*

$$efg = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'.$$

Dokaz. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut s oznakama kao na slici. Također, označimo duljine dužina $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ redom sa x, y, z, v.



Primjenom Ptolomejeva teorema na četverokute $ABCD$ i $BCDE$ dobivamo

$$b'f + ac = vx \quad i \quad cg + a'b' = vy.$$

Sada, pomnožimo prvu jednakost s b, drugu s c' te ih zbrojimo. Dobivamo,

$$\begin{aligned} bb'f + abc + cc'g + a'b'c' &= bvx + c'vy \\ &= v(bx + c'y) \\ &= vez \ \ (ACEF \text{ je tetivni četverokut }) \\ &= evz \\ &= e(fg - aa') \ \ (ABDE \text{ je tetivni četverokut }) \end{aligned}$$

Dakle, dana tvrdnja vrijedi. □

Literatura vezana uz navedene primjene Ptolomejeva teorema u ovoj točki preuzeta je iz [2], [10], [15] i [19].

3.3 Brahmaguptina formula

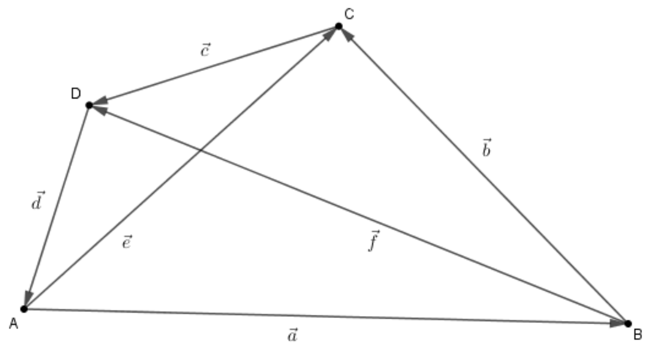
U ovom odjeljku izvest ćemo Brahmaguptinu formulu, odnosno formulu za površinu tetivnog četverokuta izraženu pomoću duljina njegovih stranica. Postoji nekoliko različitih dokaza te formule, no mi ćemo prvo pomoću vektora izvesti formulu za površinu bilo kojeg konveksnog četverokuta. Nakon toga, Brahmaguptinu formulu dobit ćemo kao posljedicu Ptolomejeva teorema.

Teorem 3.3.1. *Površina bilo kojeg konveksnog četverokuta ABCD iznosi*

$$P(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2},$$

gdje su a, b, c, d duljine stranica, a e, f duljine dijagonala.

Dokaz. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut sa stranicama duljina a, b, c, d te dijagonalama duljina e, f, kao na slici.



Neka je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e}$ i $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{f}$. Tada je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ i $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}$. Površina četverokuta $ABCD$, izražena pomoću vektorskog umnoška, jednaka je $\frac{1}{2}|\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f}|$.
Dakle, imamo

$$P^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f}) \cdot (\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f}).$$

Služeći se Lagrangeovim identitetom (vidi [13])

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{d}) \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}),$$

površinu možemo zapisati u sljedećem obliku

$$P^2 = \frac{1}{4}[(\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{e}) \cdot (\overrightarrow{f} \times \overrightarrow{f}) - (\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f}) \cdot (\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{f})] = \frac{1}{4}[|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{f})^2].$$

Prema tome, imamo

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - (\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{f})^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - (2\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{f})^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [2\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) + 2\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [-2\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}) + 2\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d} + 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d} + 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{d}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{c}|^2 + (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d})\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d})]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{d}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{c}|^2 + |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}|^2 - |\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}|^2]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{d}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{c}|^2 + |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}|^2 - |-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})|^2]^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4|\overrightarrow{e}|^2|\overrightarrow{f}|^2 - [|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{d}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{c}|^2]^2}.
\end{aligned}
$$

Kako je $|\overrightarrow{a}| = a$, $|\overrightarrow{b}| = b$, $|\overrightarrow{c}| = c$, $|\overrightarrow{d}| = d$, $|\overrightarrow{e}| = e$, $|\overrightarrow{f}| = f$, slijedi formula. □

Sada, kao posljedicu Teorema 3.3.1. dobit ćemo Brahmaguptinu formulu za površinu tetivnog četevrokuta. Dakako, u dokazu ćemo koristiti Ptolomejev teorem.

Korolar 3.3.2. ***(Brahmaguptina formula)*** *Površina tetivnog četverokuta $ABCD$ sa stranicama duljina a, b, c, d iznosi*

$$P(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \tag{3.1}$$

gdje je $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Znamo da svakom konveksnom četverokutu možemo izračunati površinu po formuli iz prethodnog teorema. Budući da je četverokut tetivan, za njega vrijedi Ptolomejev teorem. Stoga, imamo

$$
\begin{aligned}
P(ABCD) &= \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ef-(b^2+d^2-a^2-c^2))(2ef+(b^2+d^2-a^2-c^2))}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2(ac+bd)-(b^2+d^2-a^2-c^2))(2(ac+bd)+(b^2+d^2-a^2-c^2))}\\
&\text{(Ptolomejev teorem)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd-b^2-d^2+a^2+c^2)(2ac+2bd+b^2+d^2-a^2-c^2)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+c)^2-(b-d)^2)((b+d)^2-(a-c)^2)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((a+c)+(b-d))((a+c)-(b-d))((b+d)+(a-c))((b+d)-(a-c))}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(-a+b+c+d)}\\
&= \sqrt{\frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}}\\
&\left(s=\frac{a+b+c+d}{2}\right)\\
&= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.
\end{aligned}
$$

□

Dokaz formule za površinu bilo kojeg konveksnog četverokuta preuzet je iz rada [1]. Također, u radu [1] može se naći još jedan dokaz Brahmaguptine formule.

3.4 Carnotov teorem

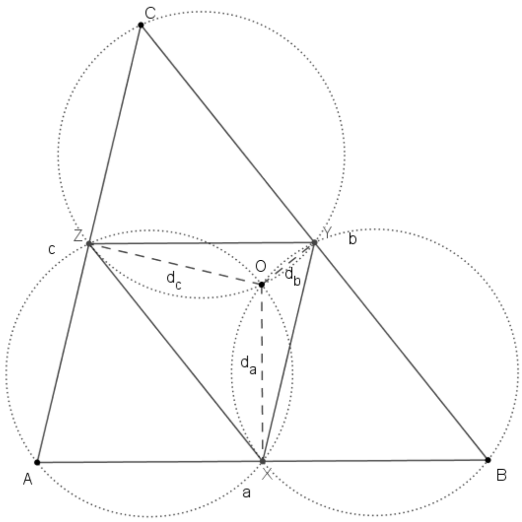
Ptolomejev teorem može biti dobar način za rješavanje složenijih geometrijskih problema, posebno onih koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima. Često nije jednostavno uočiti kada i kako primijeniti taj teorem. Sada slijedi opis jednog takvog problema poznatog kao Carnotov teorem.

Carnotovim teoremom opisan je zanimljiv identitet u trokutu koji uključuje polumjere tom trokutu opisane i upisane kružnice. Teorem ćemo elegantno dokazati pomoću Ptolomejeva teorema, a potom ćemo navesti i neke njegove primjene.

Teorem 3.4.1. ***(Carnotov teorem)*** *Neka su d_a, d_b, d_c udaljenosti od središta opisane kružnice šiljastog trokuta ABC do njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom te neka su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice tom trokutu. Tada vrijedi*

$$d_a + d_b + d_c = R + r.$$

Dokaz. Neka je ABC šiljastokutan trokut sa stranicama duljina a, b i c. Neka su X, Y, Z redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ te neka je O središte trokutu opisane kružnice, kao na slici. Kako je trokut šiljastokutan, središte opisane kružnice nalazi se u trokutu ABC.



Uočimo da je $XBYO$ tetivni četverokut jer su nasuprotni kutovi $\angle OXB$ i $\angle BYO$ pravi te u sumi daju 180°. Analogno, četverokuti $YCZO$ i $ZAXO$ su također tetivni. Budući da su X, Y, Z polovišta stranica, slijedi da je su $|XY|$, $|YZ|$, $|ZX|$ srednjice trokuta ABC. Iz toga zaključujemo da je $|XY| = \frac{1}{2}b$, $|YZ| = \frac{1}{2}c$, $|ZX| = \frac{1}{2}a$. Označimo sada $\frac{1}{2}a = a'$, $\frac{1}{2}b = b'$, $\frac{1}{2}c = c'$. Primijenimo sada Ptolomejev teorem na četverokute $XBYO$, $YCZO$ i $ZAXO$. Dobivamo redom $a'd_c + c'd_a = Rb'$, $a'd_b + b'd_a = Rc'$ i $b'd_c + c'd_b = Ra'$. Sada, zbrajajući dobivene jednakosti te dodajući $a'd_a + b'd_b + c'd_c$ s obje strane dobivamo

$$d_a + d_b + d_c = R + \frac{a'd_a + b'd_b + c'd_c}{a' + b' + c'}.$$

Uočimo sada kako je

$$\frac{a'd_a + b'd_b + c'd_c}{a' + b' + c'} = \frac{P(\triangle BCO) + P(\triangle CAO) + P(\triangle ABO)}{a' + b' + c'} = \frac{P(\triangle ABC)}{a' + b' + c'} = r,$$

čime dobivamo traženu jednakost $d_a + d_b + d_c = R + r$.

□

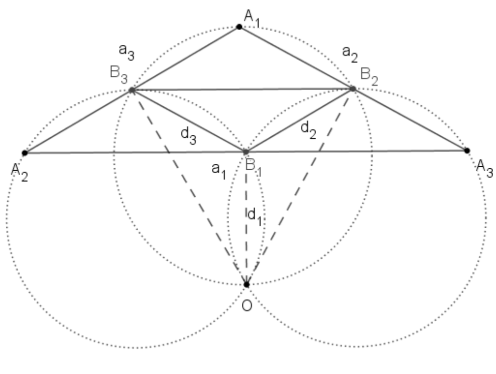
U Carnotovom teoremu promatrali smo šiljastokutan trokut. U šiljastokutnom trokutu je središte opisane kružnice unutar trokuta te smo lako primjenom Ptolomejeva teorema dokazali traženu tvrdnju. Nadalje, dajemo poopćenje tog teorema u kojem ćemo promatrati bilo kakav trokut. To povlači da ćemo promatrati tri slučaja ovisno o tome je li trokut šiljastokutan, tupokutan ili pravokutan.

Teorem 3.4.2. ***(Generalizirani Carnotov teorem)*** *Ako je O središte opisane kružnice trokuta $A_1A_2A_3$ te neka su d_1, d_2, d_3 udaljenosti točke O od stranica $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ redom. Tada je*

$$\pm d_1 \pm d_2 \pm d_3 = R + r,$$

gdje su R i r polumjeri opisane odnosno upisane kružnice trokutu ABC, dok je uz d_i predznak "+" ukoliko su točka O i vrh A_i s iste strane pravca A_jA_k, a predznak "−" u suprotnom, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Dokaz. Označimo sa B_1, B_2, B_3 polovišta stranica $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ redom te neka je $\overline{A_2A_3} = a_1$, $\overline{A_3A_1} = a_2$, $\overline{A_1A_2} = a_3$. Promotrimo najprije slučaj kada se radi o šiljastokutnom trokutu $A_1A_2A_3$. Primijetimo da je to upravo prethodni teorem koji smo dokazali.
Dalje ostaje slučaj kada je trokut $A_1A_2A_3$ tupokutan. Promotrimo tupokutan trokut $A_1A_2A_3$ s tupim kutom pri vrhu A_1, kao na slici.



Budući da su $A_3B_2B_1O$, $A_1B_3OB_2$ i $A_2OB_1B_3$ tetivni četverokuti, prema Ptolomejevom teoremu imamo

$$\left(\frac{a_2}{2}\right)d_1 + \left(\frac{a_3}{2}\right)R = \left(\frac{a_1}{2}\right)d_2,$$
$$\left(\frac{a_3}{2}\right)d_2 + \left(\frac{a_2}{2}\right)d_3 = \left(\frac{a_1}{2}\right)R,$$
$$\left(\frac{a_2}{2}\right)R + \left(\frac{a_3}{2}\right)d_1 = \left(\frac{a_1}{2}\right)d_3,$$
$$-\left(\frac{a_1}{2}\right)d_1 + \left(\frac{a_2}{2}\right)d_2 + \left(\frac{a_3}{2}\right)d_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)\,r,$$

jer je sada točka O izvan trokuta $A_1A_2A_3$ i njegova je površina jednaka zbroju površina trokuta A_1A_3O i A_1A_2O umanjenom za površinu trokuta A_2A_3O. Tako dobivamo,

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(-d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)(R + r),$$

odnosno

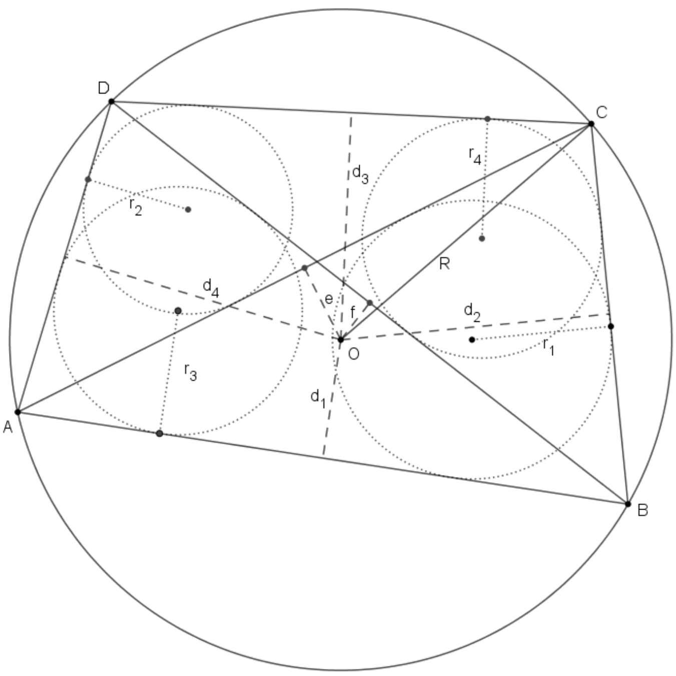
$$-d_1 + d_2 + d_3 = R + r.$$

Ako je tupi kut kod vrhova A_2 ili A_3, dobiva se formula slična prethodnoj samo što je predznak "$-$" ispred d_2, odnosno d_3. Primijetimo da najviše jedan od d_1, d_2, d_3 može biti negativan. To je upravo onaj d_i za koji je kut kod vrha A_i tup.
Slučaj pravokutnog trokuta sličan je slučaju šiljastokutnog trokuta. □

Ovaj rezultat ima lijepu posljedicu u vidu sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.4.3. *U tetivnom četverokutu $ABCD$ zbroj polumjera kružnica upisanih trokutima ABC i CDA jednak je zbroju polumjera kružnica upisanih trokutima ABD i BCD.*

Dokaz. Neka je O središte kružnice opisane četverokutu $ABCD$ te neka su d_1, d_2, d_3, d_4 udaljenosti točke O redom od stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, a e i f njene udaljenosti do dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.



Ako s r_1, r_2, r_3, r_4 označimo polumjere kružnica upisanih redom trokutima ABC, ADC, ABD, BCD te s R polumjer kružnice opisane četverokutU $ABCD$, tada po prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (d_1 + d_2 \pm e - R) + (d_3 + d_4 \mp e - R), \\ r_3 + r_4 &= (d_1 + d_4 \pm f - R) + (d_2 + d_3 \mp f - R). \end{aligned}$$

Zaista, ako su točke O i B s iste strane dijagonale $\overline{AC}$, tada su O i D s različitih strana te dijagonale i obrnuto. Prema tome, ako se dužina duljine e nalazi u trokutu ABC, odabiremo predznak "+", a ako ne, onda predznak "−" i obrnuto.
Ako pak O leži na dijagonali $\overline{AC}$, onda je e jednako nuli za oba trokuta. U svim slučajevima dobivamo da je udaljenost e u desnoj strani prve jednakosti jednaka nuli. Slično je i s f u drugoj jednakosti. Prema Teoremu 3.4.2., slijedi $r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2R$. □

Posebno je zanimljiva sljedeća tvrdnja koja je očigledno poopćenje prethodne.

Teorem 3.4.4. *Neka je dan tetivni n-terokut ($n \geq 3$) podijeljen na $n-2$ trokuta sa $n-3$ dijagonala od kojih se nikoje dvije ne sijeku unutar n-terokuta. Tada zbroj polumjera kružnica upisanih u dobivene trokute ne ovisi o izboru povučenih dijagonala.*

Dokaz. Neka je $A_1A_2 \ldots A_n$ tetivni n-terokut i O središte opisane kružnice tog n-terokuta. Neka su dalje $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ duljine dijagonala tog n-terokuta koje nemaju zajedničkih unutarnjih točaka i koje ga dijele na $n-2$ trokuta. Označimo sa $r_1, r_2, \ldots, r_{n-2}$ polumjere kružnica upisanih u tako dobivene trokute. Označimo dalje sa $d_1, d_2, \ldots, d_n$ udaljenosti točke O od stranica $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, …, $\overline{A_nA_1}$ redom i sa $e_1, e_2, \ldots, e_{n-3}$ udaljenosti točke O od dijagonala $b_1, b_2, \ldots, b_{n-3}$ redom. Ako na svaki od dobivenih trokuta primijenimo Teorem 3.4.2., dobivamo

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = (n-2)R + r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-2}.$$

Zaista, svaka stranica mnogokuta nalazi se u točno jednom trokutu, a svaka od dijagonala u točno dva trokuta. Zato se svaka od udaljenosti $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pojavljuje na lijevoj strani jednakosti točno jedanput, a svaka od udaljenosti $e_1, e_2, \ldots, e_{n-3}$ točno dva puta i to jednom s predznakom "+", a drugi put s predznakom "−" ili je nula. Zbog toga je

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-2} = d_1 + d_2 + \ldots + d_n - (n-2)R = const.$$

□

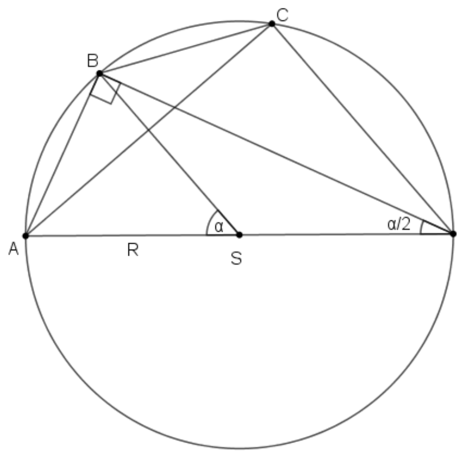
Još o Carnotovom teoremu može se naći u članku [22], a o njegovoj generalizaciji u radu [17].

3.5 Ptolomejeva tablica tetiva

Ptolomej je svoj teorem upotrijebio pri izradi tablica za duljinu tetiva kružnice. One se nalaze u Ptolomejevom najpoznatijem djelu *Almagest*. Prije njega Hipparchus i Menelaj su pokušali izraditi tablice za duljinu tetiva, no ta su djela izgubljena. Nakon njih Ptolomej je u 2. stoljeću izradio vrlo precizne tablice koje su se rabile još stotinama godina kasnije.

U Ptolomejevim tablicama dane su duljine tetiva kružnice promjera 120 kojima su odgovarajući kutovi od 0° do 180° s korakom od pola stupnja. Budući da su te tablice preteča trigonometrijskih, pokažimo gdje se u Ptolomejevim podacima kriju trigonometrijske funkcije. Ako je dana tetiva $\overline{AB}$ sa središnjim kutom α, tada vrijedi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|AB|}{2R} = \frac{|AB|}{120}.$$



Dakle, poznavajući duljinu tetive $\overline{AB}$, lako je odrediti sinus polovice središnjeg kuta. Upravo se u Ptolomejevim tablicama nalaze duljine tih tetiva. Ptolomej je najprije duljine nekih tetiva kao što su tetive nad kutovima 36°, 72°, 60°, 90° i 120° izračunao služeći se upisanim pravilnim mnogokutima (trokutom, četverokutom, peterokutom, šesterokutom i deseterokutom). Potom je pomoću svog teorema otkrio postupak za izračunavanje tetive nad zbrojem, odnosno razlikom dvaju lukova. U nastavku ćemo opisati taj postupak.

Teorem 3.5.1. *Neka su A, B i C točke dane polukružnice promjera $\overline{AD}$ takve da je točka B između točaka A i C. Tada je duljina tetive nad razlikom lukova jednaka*

$$|BC| = \frac{|AC|\sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} - |AB|\sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}}{|AD|},$$

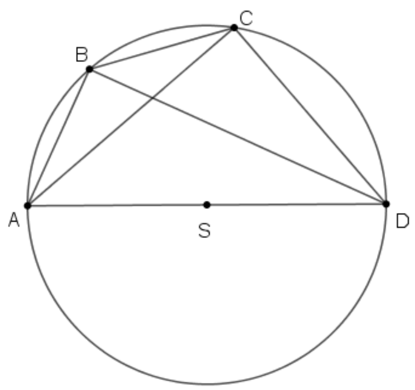
a duljina tetive nad zbrojem lukova jednaka

$$|AC| = \frac{|AB|\sqrt{|AD|^2 - |BC|^2} - |BC|\sqrt{|AD|^2 - |AB|^2}}{|AD|}.$$

Ako točka B raspolavlja luk AC, onda je duljina tetive nad polovicom luka jednaka

$$|AB|^2 = \frac{1}{2}|AD|\left(|AD| - \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}\right).$$

Dokaz. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut upisan u kružnicu, kao na slici.



Prema Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice, kutovi $\angle ABD$ i $\angle ACD$ su pravi pa zbog Pitagorina teorema vrijedi

$$|CD| = \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}, \quad |BD| = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2}.$$

Ptolomejev teorem za četverokut $ABCD$ daje

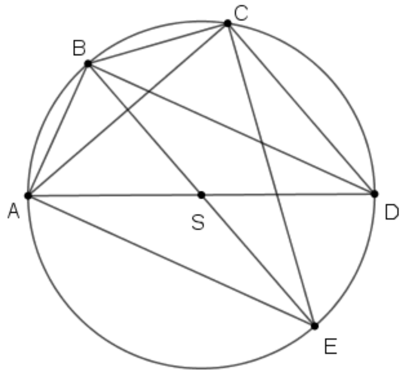
$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|,$$

odnosno

$$|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD| - |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2} - |AB| \cdot \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2},$$

odakle dijeljenjem s $|AD|$ dobivamo formulu za duljinu tetive nad razlikom lukova iz teorema.

Za dokaz druge formule iz teorema uvodimo još točku E, dijametralno suprotnu točki B. Promotrimo sada četverokut $AECB$.



Zbog Talesova teorema o kutu nad promjerom kružnice i primjene Pitagorina teorema vrijedi:

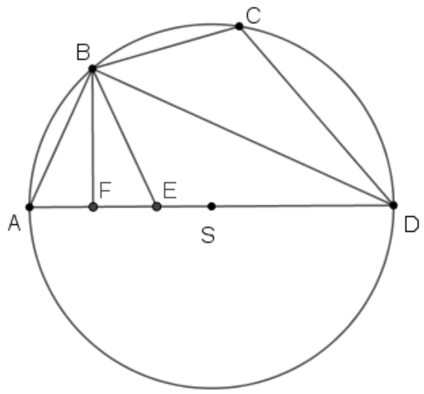
$$|AE| = \sqrt{|BE|^2 - |AB|^2} = \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2}, \quad |CE| = \sqrt{|BE|^2 - |BC|^2} = \sqrt{|AD|^2 - |BC|^2}.$$

Sada uvrštavanjem dobivenih jednakosti u Ptolomejev teorem za četverokut $AECB$ dobivamo:

$$|AC| \cdot |BE| = |AB| \cdot |CE| + |AE| \cdot |BC| = |AB| \cdot \sqrt{|AD|^2 - |BC|^2} - |BC| \cdot \sqrt{|AD|^2 - |AB|^2},$$

odakle slijedi formula za duljinu tetive nad zbrojem lukova iz teorema.

Preostaje još dokazati treću formulu iz teorema. Pri njenom dokazu ne primjenjuje se Ptolomejev teorem, nego sličnost trokuta i Pitagorin teorem. Sada nam, dakle, točka B raspolavlja luk AC. Spustimo iz B okomicu na promjer $\overline{AD}$ i označimo nožište te okomice s F, kao na slici. Tada je točka E na promjeru $\overline{AD}$ takva da je $|BC|$=$|BE|$. Stoga su trokuti BED i BCD sukladni, a trokuti AFB i ABD slični.



Iz sličnosti slijedi
$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AF|},$$
odnosno
$$|AB|^2 = |AD| \cdot |AF|.$$
Kako je
$$|AF| = \frac{1}{2}(|AD| - |ED|) = \frac{1}{2}(|AD| - |CD|) = \frac{1}{2}(|AD| - \sqrt{|AD|^2 - |AC|^2}),$$
dobivamo upravo traženu formulu za duljinu tetive nad polovicom luka.

□

Dakle, primjenjujući prvu formulu, Ptolomej je mogao izračunati duljine tetiva za kutove od $0°$ do $180°$ s korakom od $6°$, a primjenjujući treću formulu, došao je do vrijednosti za duljine tetive koje odgovaraju kutovima od $3°$, $1\frac{1}{2}^\circ$, $\frac{3}{4}^\circ$ i slično.

Tablica za te kutove izgleda ovako:

kut	duljina tetive po Ptolomeju	duljina tetive u dekadskom zapisu
$3°$	$3° \, 8' \, 28''$	3.14111111
$\frac{3}{2}^\circ$	$1° \, 34' \, 15''$	1.57083333
$\frac{3}{4}^\circ$	$0° \, 47' \, 8''$	0.78555555

Sada nam još preostaje usporediti te vrijednosti s vrijednostima funkcije sinus. Kao što je već spomenuto, Ptolomej je radio s kružnicom promjera 120 pa bismo, primjenjujući Ptolomejev rezultat i formulu (3.5), dobili da je $\sin\frac{3}{2}^\circ = 0.0261805555$ što se od prave vrijednosti za $\sin\frac{3}{2}^\circ = 0.02617694831$ dobivene pomoću kalkulatora razlikuje tek na petom decimalnom mjestu. Također, služeći se kalkulatorom dobivamo da je $\sin\frac{3}{4}^\circ = 0.01308959557$, dok primjenjujući Ptolomejev rezultat imamo da je $\sin\frac{3}{4}^\circ = 0.0130925925$. Iz navedenih primjera potpuno je jasno zašto su ove tablice bile u upotrebi stoljećima. No, ove tri formule ipak nisu omogućavale izračunavanje duljina tetiva nad lukom od $1°$, odnosno $\frac{1}{2}^\circ$. Za taj je izračun Ptolomej primjenjivao tzv. Aristarhovu nejednakost. Detaljnije o tome može se pročitati u članku [21] odakle su podaci o Ptolomejevoj tablici tetiva i preuzeti.

Poglavlje 4

Poopćenja Ptolomejeva teorema

Prisjetimo se da smo na početku, u poglavlju 1, spomenuli Ptolomejevu nejednakost kao jedno poopćenje Ptolomejeva teorema. Tamo smo promatrali bilo koje četiri točke u ravnini te dokazali da za njih vrijedi Ptolomejeva nejednakost te smo kao specijalni slučaj dobili upravo Ptolomejev teorem.

U ovom poglavlju dajemo još dva poopćenja Ptolomejeva teorema. Dajemo Bretschneiderovu formulu kao poopćenje Ptolomejeva teorema za konveksni četverokut te njen kvocijentni oblik. Uočit ćemo da lako iz Bretschneiderove formule dobivamo Ptolomejev teorem. Štoviše, iz kvocijentnog oblika Bretschneiderove formule dobiva se kvocijentni oblik Ptolomejeva teorema.

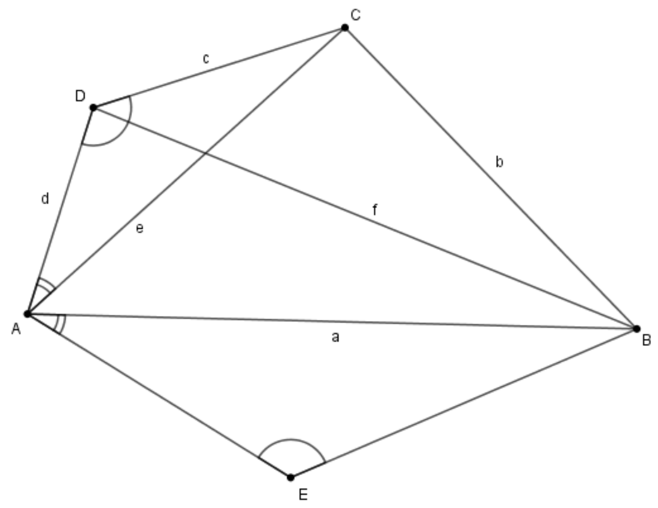
Na kraju ovog poglavlja, navest ćemo Caseyjev teorem kao još jedno zanimljivo poopćenje Ptolomejeva teorema. U Caseyjevom teoremu ulogu vrhova tetivnog četverokuta iz Ptolomejevog teorema preuzimaju kružnice. Točnije, u slučaju kada kružnice degeneriraju u točke Caseyjev se teorem pretvara u Ptolomejev.

4.1 Bretschneiderova formula

Teorem 4.1.1. ***(Bretschneiderova formula)*** *Ako je $ABCD$ konveksni četverokut, tada vrijedi*

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

Dokaz. Neka je $ABCD$ četverokut. Konstruiramo trokut AEB koji je sličan trokutu ACD tako da je $\angle EBA = \angle CDA$ te $\angle BAE = \angle DAC$, kao na slici.



Znamo da je tada

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EB|}{|DC|} \Rightarrow |EB| = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|}. \tag{4.1}$$

Zatim znamo da je $\angle CAE = \angle DAB$ i $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ pa iz toga slijedi i $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$. Prema tome, trokuti CAE i DAB su slični. Sada imamo

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|DB|},$$

odnosno

$$|EC| = \frac{|AC| \cdot |DB|}{|AD|}. \tag{4.2}$$

Prema kosinusovom teoremu u trokutu CEB imamo da je

$$|EC|^2 = |EB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |EB| \cdot |BC| \cdot \cos(\alpha + \gamma).$$

Uvrštavajući $|EB|$ i $|EC|$ iz (4.1) i (4.2) u dobivenu jednakost, dobivamo

$$\left(\frac{|AC| \cdot |DB|}{|AD|}\right)^2 = \left(\frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|}\right)^2 + |BC|^2 - 2 \cdot \frac{|AB| \cdot |DC|}{|AD|} \cdot |BC| \cdot \cos(\alpha + \gamma).$$

Pomnožimo li tu jednakost s $|AD|^2$ imamo

$$(|AC| \cdot |DB|)^2 = (|AB| \cdot |DC|)^2 + (|BC| \cdot |AD|)^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |DC| \cdot |BC| \cdot \cos(\alpha + \gamma),$$

što je upravo tvrdnja koju smo trebali dokazati. □

Napomena 2. *Lako je vidjeti da je Bretschneiderova formula poopćenje Ptolomejeva teorema. Naime, ako je $ABCD$ tetivni četverokut, onda vrijedi*

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \cos(\alpha + \gamma) = -1,$$

odnosno

$$(|AC| \cdot |DB|)^2 = (|AB| \cdot |DC|)^2 + (|BC| \cdot |AD|)^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |DC| \cdot |BC|,$$

odakle je

$$(|AC| \cdot |DB|)^2 = (|AB| \cdot |DC| + |BC| \cdot |AD|)^2\,,$$

to jest

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|,$$

što je upravo Ptolomejev teorem.

Sada ćemo dati i kvocijentni oblik Bretschneiderove formule.

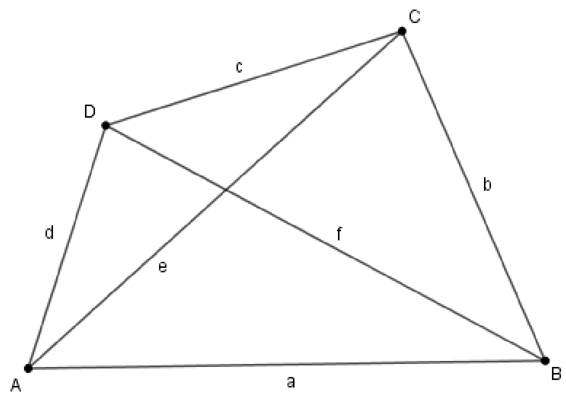
Teorem 4.1.2. ***(Kvocijentni oblik Bretschneiderove formule)*** *U konveksnom četvrokutu $ABCD$ vrijede identiteti*

$$\frac{e^2}{f^2} = \frac{(ad + bc)((ad + bc)(ac + bd) - 2abcd(\cos\beta + \cos\delta))}{(ab + cd)((ab + cd)(ac + bd) - 2abcd(\cos\alpha + \cos\gamma))} \tag{4.3}$$

i

$$\frac{e^2}{f^2} = \frac{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos(\beta + \delta))}{a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd(\cos(\alpha + \gamma))}. \tag{4.4}$$

Dokaz. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut. Primijenimo na trokute ABD i BCD kosinusov teorem.



Tada dobivamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\gamma &= \frac{a^2+d^2-f^2}{2ad}+\frac{b^2+c^2-f^2}{2bc}\\ &= \frac{(ad+bc)(ac+bd)-f^2(ab+cd)}{2abcd},\end{aligned}$$

odnosno, imamo da je

$$f^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)-2abcd(\cos\alpha+\cos\gamma)}{ab+cd}. \tag{4.5}$$

Analogno, dobivamo

$$e^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)-2abcd(\cos\beta+\cos\delta)}{ad+bc}. \tag{4.6}$$

Podijelimo li (4.6) s (4.5) dobivamo upravo jednakost (4.3) iz teorema.

Sada preostaje dokazati i drugu relaciju iz teorema. Relacija (4.4) može se lagano pokazati pomoću kompleksnih brojeva. Vrhove konveksnog četverokuta $ABCD$ označimo s z_1, z_2, z_3 i z_4. Ideja je relaciju

$$\frac{(z_2-z_1)(z_2-z_3)-(z_4-z_1)(z_4-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_4)-(z_3-z_2)(z_3-z_4)}=\frac{(z_2-z_4)}{(z_3-z_1)}$$

najprije konjugirati, a zatim te dvije relacije pomnožiti. Pri tome koristimo identitet $(z_2-z_1)\overline{(z_2-z_1)}=|BA|^2$ i slično za preostale izraze. Transformirajući tako dobivenu relaciju dolazimo do tražene relacije (4.4). □

Napomena 3. *Štoviše, lako se može pokazati i da je kvocijentni oblik Bretschneiderove formule zapravo poopćenje kvocijentnog oblika Ptolomejeva teorema. Dakle, ako je $ABCD$ tetivni četverokut, onda je $\alpha+\beta=\gamma+\delta=180°$. Tada obje relacije (4.3) i (4.4) prelaze u kvocijentni oblik Ptolomejeva teorema.*

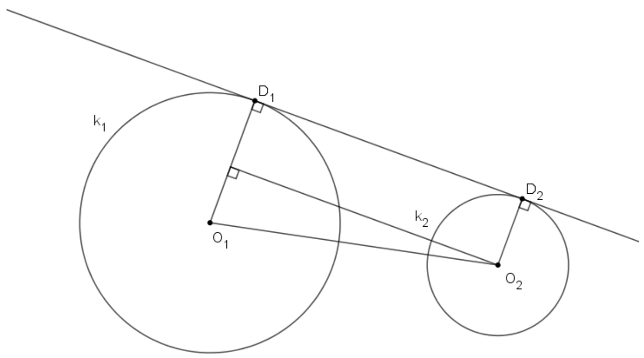
Dokaz Bretscheiderove formule preuzet je iz rada [3], a još neke tvrdnje vezane uz tu generalizaciju mogu se vidjeti u knjizi [18].

4.2 Caseyjev teorem

Caseyjev teorem je poopćenje Ptolomejeva teorema gdje ulogu točaka preuzimaju kružnice. Prije nego iskažemo i dokažemo Caseyjev teorem, navest ćemo oznake i nekoliko tvrdnji na koje se pozivamo u dokazu tog teorema.

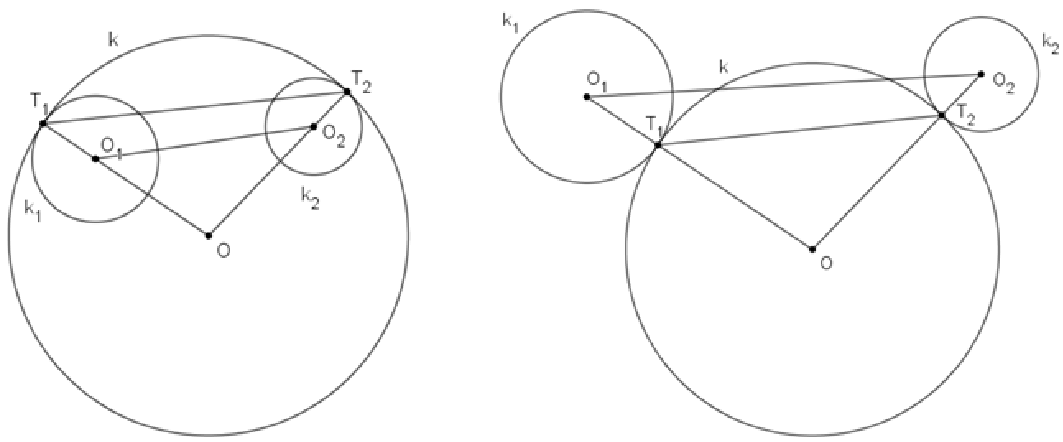
Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Ukoliko je $|r_1 - r_2| < |O_1O_2|$, tada duljinu zajedničke vanjske tangente te dvije kružnice označavamo sa t_{12} te imamo

$$t_{12} = \sqrt{|O_1O_2|^2 - (r_1 - r_2)^2}. \tag{4.7}$$



Nadalje, može se promatrati i duljina zajedničke unutarnje tangente dvije kružnice. Detaljnije o tome čitatelj može vidjeti u radu [18].

Sada, neka kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ obje iznutra ili obje izvana dodiruju kružnicu $k(O, r)$ u točkama T_1 i T_2, kao na sljedećoj slici:



Odredimo sada duljine opisanih tangenti u slučaju da one postoje. U oba slučaja, iz trokuta OT_1T_2 imamo

$$\cos\angle T_1OT_2 = \frac{2r^2 - |T_1T_2|^2}{2r^2} = 1 - \frac{|T_1T_2|^2}{2r^2}.$$

Sada, primjenom kosinusovog teorema na trokut OO_1O_2 imamo

$$\begin{aligned} |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2|OO_1|\cdot|OO_2|\cos\angle T_1OT_2 \\ &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2|OO_1|\cdot|OO_2|\left(1 - \frac{|T_1T_2|^2}{2r^2}\right) \\ &= (|OO_1| - |OO_2|)^2 + |OO_1|\cdot|OO_2|\frac{|T_1T_2|^2}{2r^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

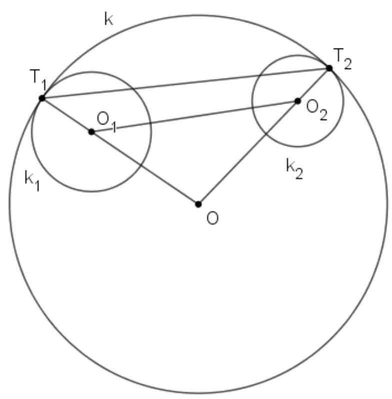
Lema 1. *Neka kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dodiruju kružnicu $k(O, r)$ u točkama T_1 i T_2. Ako kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dodiruju kružnicu $k(O, r)$ iznutra, tada je*

$$t_{12} = \frac{|T_1T_2|}{r}\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}.$$

Ako kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dodiruju kružnicu $k(O, r)$ izvana, tada je

$$t_{12} = \frac{|T_1T_2|}{r}\sqrt{(r + r_1)(r + r_2)}.$$

Dokaz. Ako kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dodiruju kružnicu $k(O, r)$ iznutra, kao na slici, onda je $|OO_1| = R - R_1$ i $|OO_2| = R - R_2$.



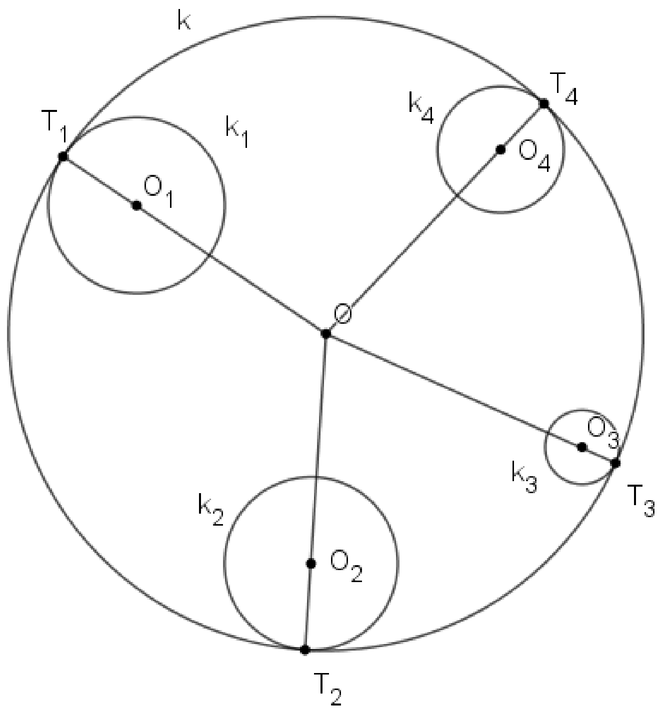
Uvrštavajući te jednakosti u (4.8) te koristeći (4.7) dobivamo traženu relaciju. Slično se pokazuje i druga relacija. □

Sada smo u stanju iskazati i dokazati Caseyjev teorem.

Teorem 4.2.1. ***(Caseyjev teorem)*** *Ako sve četiri kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ i $k_4(O_4, r_4)$ dodiruju iznutra ili izvana kružnicu $k(O, r)$, onda vrijedi*

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{41} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

Dokaz. Neka kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra te neka su T_1, T_2, T_3, T_4 dirališne točke, kao na slici.



Budući da je četverokut $T_1T_2T_3T_4$ tetivni, prema Ptolomejevom teoremu vrijedi

$$|T_1T_2| \cdot |T_3T_4| + |T_2T_3| \cdot |T_4T_1| = |T_1T_3| \cdot |T_2T_4|.$$

Sada, koristeći Lemu 1., dobivamo tvrdnju. Tvrdnja na isti način slijedi i u drugom slučaju. □

Caseyjev teorem je također jedno od poopćenja Ptolomejeva teorema. U slučaju kada kružnice degeneriraju u točke, tada se taj teorem pretvara upravo u Ptolomejev teorem. Još neke varijante Caseyjevog teorema mogu se naći u [12] i [18].

Bibliografija

[1] Art of problem solving, *Bretschneider's formula*:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Bretschneider

[2] Art of problem solving, *Ptolemy's theorem*:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Ptolemy

[3] Š. Arslanagaić, *Ptolomejev teorem, njegova generalizacija i primjena*, Poučak 42, Zagreb

[4] F. M. Brueckler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2014.

[5] Chaitanya's random pages, *A collection of proofs of Ptolemy's theorem*:
https://ckrao.wordpress.com/2015/05/24/a-collection-of-proofs-of-ptolemys-theorem/,
(rujan, 2017.)

[6] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry revisited*, Mathematical Association of America, 1967.

[7] Cut The Knot, *Ptolemy theorem - Proof without words*:
https://www.cut-the-knot.org/proofs/PtolemyTheoremPWW.shtml,
(travanj,2018.)

[8] Ž. Hanjš, *Stewartov teorem*, Matka 21, br.82., 2012./2013.

[9] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*:
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf,
(veljača, 2018.)

[10] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean geometry*, Dover publications,inc., New York, 2007.

[11] E. Just, N. Schaumberger, *A vector approach to Ptolemy's theorem*: https://www.maa.org/sites/default/files/321920501859.pdf.bannered.pdf, (travanj, 2017.)

[12] K. Y. Li, *Casey's theorem*, Mathematical excalibur, Vol. 16, No.5, 2012.

[13] Ž. Milin-Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf, (lipanj, 2018.)

[14] M. Mitrović, S. Ognjanović, M.Veljković, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija za prvi razred matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998.

[15] M. Sc. Nguyen Ngoc Giang, *Ptolemy's inequality*, Mathematical excalibur, Vol. 18, No.1, 2013.

[16] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[17] B. Petrović, *Ptolomejev teorem i neke njegove primjene*, Nastava matematike u srednjoj školi, Republički seminar o nastavi matematike i računarstva, 1993.

[18] O. T. Pop, N. Minculete, M. Bencze, *An introduction to quadrilateral geometry*, Editura Didactica Si Pedagogica, R. A., Bucuresti, 2013.

[19] S. Shirali, *How to prove it*, At right Angles, Vol.5, No.3, 2016.

[20] S. Shirali, *How to prove it*, At right Angles, Vol.6, No.1, 2017.

[21] S. Varošanec, *Ptolomejev teorem*, Poučak 21, Zagreb

[22] Q. Zhu, *An introduction to Ptolemy's theorem* , Study Math, 2016.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo Ptolomejev teorem i njegove inačice. Prvo, prikazujemo nekoliko različitih dokaza Ptolomejeva teorema. Nakon toga, pomoću Ptolomejeva teorema dokazujemo neke klasične teoreme iz elementarne geometrije, kao i nekoliko složenijih geometrijskih problema. Konačno, dajemo i nekoliko poopćenja Ptolomejeva teorema.

Summary

In this thesis we study Ptolomey's theorem and its variants. First we give several proof of Ptolomey's theorem. Then, we utilize the theorem for proving several classical theorems in elementary geometry. In addition, by virtue of Ptolomey's theorem we solve some complex geometric problems. Finally, we also study some generalizations of Ptolomey's theorem.

Životopis

Zovem se Sanja Hršak. Rođena sam 28. srpnja 1993. godine u Zaboku. Završila sam osnovnu školu u Krapinskim Toplicama te Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Godine 2012. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu te 2016. godine stječem zvanje prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na istom fakultetu.