SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Ivanković

HOSSZÚOVA FUNKCIJSKA JEDNADŽBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. U ovom radu proučava se Hosszúova funkcijska jednadžba

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y),$$

gdje je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija. Rješenje koje je prikazano u ovom radu dao je Zoltán Daróczy 1971. godine. Osim toga, promotrit ćemo odnos Hosszúove i Jensenove funkcijske jednadžbe

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Točnije, dat ćemo dokaz ekvivalentnosti ovih dviju funkcijskih jednadžbi, što je 1970. godine dokazao istaknuti hrvatski matematičar Danilo Blanuša (1903.–1987.). Uz to, dano je i rješenje poopćene Hosszúove funkcijske jednadžbe, odnosno funkcijske jednadžbe oblika

$$f(x + y - \alpha xy) + g(xy) = h(x) + k(y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

kao i jedne funkcijske jednadžbe srodne Hosszúovoj, tzv. Pompeiuove funkcijske jednadžbe.

Kod proučavanja funkcijskih jednadžbi obično se promatra i problem njihove stabilnosti. Tako ćemo se osim funkcijskim jednadžbama baviti i odgovarajućim funkcijskim nejednadžbama u kojima se zapravo pitamo kada je rješenje odgovarajuće nejednadžbe dovoljno blizu rješenja promatrane jednadžbe. U svrhu dokazivanja stabilnosti Hosszúove funkcijske jednadžbe dan je i dokaz stabilnosti jedne od najpoznatijih funkcijskih jednadžbi, aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe. Glavni rezultati ovog poglavlja tiču se stabilnosti Hosszúove funkcijske jednadžbe i stabilnosti njezina poopćenja, kao i stabilnosti tzv. Hosszú-Jensenove funkcijske jednadžbe, pomoću koje dolazimo do zaključka o njezinoj ekvivalentnosti s Hosszúovom funkcijskom jednadžbom.

Poglavlje 1

Hosszúova funkcijska jednadžba

1.1 Hosszúova funkcijska jednadžba

Teorem 1.1.1. *Neka funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava Hosszúovu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y) \tag{HE}$$

za sve x,y $\in \mathbb{R}$. Tada postoje aditivna funkcija $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i konstanta $a \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x) = A(x) + a.$$

Dokaz. Definiramo li funkciju $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$G(x, y) = f(x) + f(y) - f(xy), \tag{1.1}$$

vidimo da G zadovoljava

$$G(uv, w) + G(u, v) = G(u, vw) + G(v, w) \tag{1.2}$$

za sve $u, v, w \in \mathbb{R}$. Promotrimo li (HE) i (1.1), vidimo da vrijedi i

$$G(x, y) = f(x + y - xy). \tag{1.3}$$

Uvrštavanjem (1.3) u (1.2) dobivamo

$$f(uv + w - uvw) + f(u + v - uv) = f(u + vw - uvw) + f(v + w - vw)$$

za sve $u, v, w \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $w = \frac{1}{v}$ u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$f\left(uv + \frac{1}{v} - u\right) + f(u + v - uv) = f(1) + f\left(v + \frac{1}{v} - 1\right) \tag{1.4}$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Uzmimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi $x + y > 0$. Tražimo takve $u, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$, koji su rješenja sustava

$$uv + \frac{1}{v} - u = x + 1, \qquad u + v - uv = y + 1. \tag{1.5}$$

Zbrojimo li jednadžbe tog sustava, vidimo da vrijedi

$$v + \frac{1}{v} = x + y + 2 \tag{1.6}$$

iz čega množenjem sa v dobivamo

$$v^2 - (x + y + 2)v + 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja koja su različita od nule jer je slobodni koeficijent 1, a diskriminanta

$$(x + y + 2)^2 - 4 = (x + y)(x + y + 4) > 0.$$

Uzmimo da je v_0 jedno od tih dvaju rješenja. Zbog (1.6) i $x + y > 0$ imamo

$$v_0 + \frac{1}{v_0} = x + y + 2 \neq 2,$$

pa je $v_0 \neq 1$. Dakle, ako vrijedi

$$u_0 = \frac{y + 1 - v_0}{1 - v_0},$$

tada je (u_0, v_0) rješenje sustava jednadžbi (1.5). Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je $x + y > 0$, uvrstimo (1.5) u (1.4) iz čega dobivamo

$$f(x + 1) + f(y + 1) = f(1) + f(x + y + 1). \tag{1.7}$$

Definirajmo funkciju

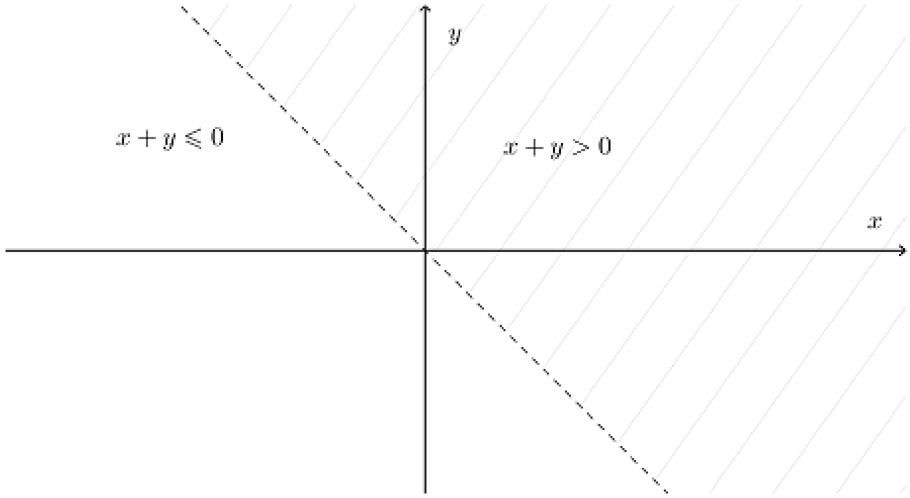
$$A(x) = f(x + 1) - f(1). \tag{1.8}$$

Tada iz (1.7) slijedi

$$A(x) + A(y) = A(x + y) \tag{1.9}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$.

Sada proširimo (1.9) na $\mathbb{R}^2$ (vidite sliku 1.1)



Slika 1.1: Ilustracija domene funkcije iz (1.9).

Ako vrijedi $x + y \leq 0$, možemo pronaći $t \in \mathbb{R}$ takav da je $t + x > 0$ i $t + x + y > 0$. Uzastopnom primjenom (1.9) zaključujemo da za takav t vrijedi

$$\begin{aligned} A(t) + A(x+y) &= A(t+x+y) \\ &= A(t+x) + A(y) \\ &= A(t) + A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Dakle,

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, odnosno, A je aditivna na $\mathbb{R}$. Iz definicije (1.8) funkcije A imamo

$$f(x+1) = A(x) + f(1),$$

pa je

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x-1) + f(1) \\ &= A(x) - A(1) + f(1) \\ &= A(x) + a. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen.

$\square$

1.2 Odnos Hosszuove i Jensenove funkcijske jednadžbe

Jensenova funkcijska jednadžba je jednadžba oblika

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Teorem 1.2.1. *Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{JE}$$

ako i samo ako vrijedi

$$f(x) = A(x) + a, \tag{1.10}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija i a proizvoljna konstanta.

Dokaz. Lako provjerimo da (1.10) zadovoljava (JE).

Stavimo li $y = 0$ u (JE), dobivamo

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2}, \tag{1.11}$$

pri čemu je $a = f(0)$. Slijedi

$$\frac{f(x+y)+a}{2} = \frac{f(x+y)+f(0)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

odnosno

$$f(x+y) + a = f(x) + f(y). \tag{1.12}$$

Uvedimo funkciju $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$A(x) = f(x) - a. \tag{1.13}$$

Tada iz (1.12) slijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Dakle, rješenje funkcijske jednadžbe (JE) je oblika

$$f(x) = A(x) + a,$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. □

Teorem 1.2.2. *Jednadžba*

$$f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y), \quad x,y\in\mathbb{R} \tag{HE}$$

ekvivalentna je Jensenovoj jednadžbi

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{JE}$$

Isto vrijedi i za $x, y \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Najprije dokažimo da iz (JE) slijedi (HE).

Stavimo li u (JE) da je $y = 0$, dobit ćemo

$$f(x)+f(0)=2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Zatim u prethodnoj nejednakosti zamijenimo x sa $x + y$ da bismo dobili

$$f(x+y)+f(0)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

iz čega, zbog (JE), slijedi

$$f(x+y)+f(0)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y), \tag{1.14}$$

a za $y = -x$ vrijedi

$$2f(0)=f(x)+f(-x). \tag{1.15}$$

Zbog (1.14) i (1.15) imamo

$$\begin{aligned} f(x-y) &= f(x+(-y)) = -f(0)+f(x)+f(-y) \\ &= -f(0)+f(x)+2f(0)-f(y) \\ &= f(x)-f(y)+f(0). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Sada iz (1.16) i (1.14) slijedi

$$\begin{aligned} f(x+y-xy)+f(xy) &= f(x+y)-f(xy)+f(0)+f(xy) \\ &= f(x+y)+f(0) \\ &= f(x)+f(y). \end{aligned}$$

Dakle, (JE) povlači (HE).

Dokažimo obrat. Stavimo da je

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{x}{4}[\varphi(-2) - \varphi(2)] - \frac{1}{2}[\varphi(-2) + \varphi(2)].$$

Tada je

$$f(-2) = f(2) = 0. \tag{1.17}$$

Ako φ zadovoljava (HE), tada i f zadovoljava (HE) i obrnuto. Također, ako φ zadovoljava (JE), tada i f zadovoljava (JE) i obrnuto. Preostaje još pokazati da svako rješenje f jednadžbe (HE), uz uvjet (1.17), zadovoljava (JE).

Promotrit ćemo različite oblike jednadžbe (HE) koji su dobiveni uvođenjem određenih supstitucija. Uvedimo simbol $[X, Y]$ koji će predstavljati supstituciju u kojoj smo x, y iz (HE) zamijenili sa X, Y. Uzimajući i jednakost (1.17) u obzir, supstitucijama

$$[-x,-y],\ [x,2],\ [-x,2],\ [x,-2],\ [-x,-2],\ [x+2,y+2],$$
$$[-x+2,-y+2],\ \left[\frac{x}{2}+1,2\right],\ \left[-\frac{x}{2}+1,2\right],\ \left[\frac{x}{2},-1\right],\ \left[-\frac{x}{2},-1\right]$$

odgovaraju sljedeće jednadžbe:

$$f(-x-y-xy) + f(xy) = f(-x) + f(-y), \tag{1.18}$$
$$f(-x+2) + f(2x) = f(x), \tag{1.19}$$
$$f(x+2) + f(-2x) = f(-x), \tag{1.20}$$
$$f(3x-2) + f(-2x) = f(x), \tag{1.21}$$
$$f(-3x-2) + f(2x) = f(-x), \tag{1.22}$$
$$f(-x-y-xy) + f(2x+2y+xy+4) = f(x+2) + f(y+2), \tag{1.23}$$
$$f(x+y-xy) + f(-2x-2y+xy+4) = f(-x+2) + f(-y+2), \tag{1.24}$$
$$f\left(-\frac{x}{2}+1\right) + f(x+2) = f\left(\frac{x}{2}+1\right), \tag{1.25}$$
$$f\left(\frac{x}{2}+1\right) + f(-x+2) = f\left(-\frac{x}{2}+1\right), \tag{1.26}$$
$$f(x-1) + f\left(-\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f(-1), \tag{1.27}$$
$$f(-x-1) + f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(-\frac{x}{2}\right) + f(-1). \tag{1.28}$$

Zbrojimo li (1.25) i (1.26), dobit ćemo

$$f(x+2) + f(-x+2) = 0. \tag{1.29}$$

Zbrajanjem (1.19) i (1.20) te korištenjem (1.29) dobivamo

$$f(2x) + f(-2x) = f(x) + f(-x). \tag{1.30}$$

Zbrajanje jednadžbi (1.21) i (1.22), uzimajući (1.30) u obzir, daje

$$f(3x-2) + f(-3x-2) = 0,$$

odnosno, uz zamjenu x sa $3x$,

$$f(x-2) + f(-x-2) = 0. \tag{1.31}$$

Zamijenimo sada x sa $x+6$ u (1.29) i x sa $x+2$ u (1.31). Time dobivamo sljedeće izraze:

$$\begin{aligned} f(x+8) + f(-x-4) &= 0, \\ f(x) + f(-x-4) &= 0. \end{aligned}$$

Primjećujemo da ćemo oduzimanjem gornjih izraza dobiti

$$f(x+8) - f(x) = 0, \tag{1.32}$$

odnosno, funkcija f je periodična s periodom 8. Zbrojimo li sada (1.23) i (1.24), te iskoristimo (1.29), dobivamo

$$f(-x-y-xy) + f(x+y-xy) \tag{1.33}$$
$$+ f(-2x-2y+xy+4) + f(2x+2y+xy+4) = 0. \tag{1.34}$$

Prema (1.29) vrijedi

$$\begin{aligned} f(-x-y-xy) &= f(-x-y-xy-2+2) \\ &= -f(x+y+xy+2+2) \\ &= -f(x+y+xy+4) \end{aligned}$$

i, analogno,

$$\begin{aligned} f(x+y-xy) &= f(x+y-xy-2+2) \\ &= -f(-x-y+xy+2+2) \\ &= -f(-x-y+xy+4). \end{aligned}$$

Supstitucijom

$$xy+4 = a, \quad x+y = b$$

dobivamo

$$f(a+b)+f(a-b)=f(a+2b)+f(a-2b), \tag{1.35}$$

pri čemu za a i b mora vrijediti nejednakost

$$a \leqslant \frac{b^2}{4}+4 \tag{1.36}$$

ukoliko su x i y realni. Kako bismo se riješili gornjeg uvjeta, promatramo supstituciju

$$xy=-a, \quad x+y=b,$$

koja povlači

$$f(-a+b+4)+f(-a-b+4)=f(-a+2b+4)+f(-a-2b+4), \tag{1.37}$$

uz uvjet

$$a \geqslant -\frac{b^2}{4}. \tag{1.38}$$

No, zbog (1.29) imamo

$$f(-a+b+4)=f(-a+b+2+2)=-f(a-b-2+2)=-f(a-b)$$

i, analogno,

$$f(-a-b+4)=-f(a+b),$$
$$f(-a+2b+4)=-f(a-2b),$$
$$f(-a-2b+4)=-f(a+2b),$$

tako da (1.37) povlači (1.35). Očito je ispunjena barem jedna od nejednakosti (1.36) i (1.38), pa (1.35) vrijedi za bilo koji uređeni par realnih brojeva (a,b). Zamjenom b sa $2b$ u (1.35) dobiva se

$$f(a+2b)+f(a-2b)=f(a+4b)+f(a-4b),$$

što uz (1.35) daje

$$f(a+b)+f(a-b)=f(a+4b)+f(a-4b). \tag{1.39}$$

Ponavljanjem prethodnog postupka zamjene dobivamo

$$f(a+b)+f(a-b)=f(a+2^n b)+f(a-2^n b). \tag{1.40}$$

Uvrstimo li $a=0, b=2$, u (1.39), dobit ćemo jednakost

$$f(2)+f(-2)=f(8)+f(-8),$$

koja, uz (1.17) i (1.32), pokazuje da je

$$f(0) = 0. \tag{1.41}$$

Iz (1.40) ćemo pak za $a = -1, b = 1, n = 3$ dobiti

$$f(-1) = 0, \tag{1.42}$$

uzimajući u obzir (1.17), (1.32) i (1.41). Zbrajanjem (1.27) i (1.28), uvažavajući i (1.42), dobivamo

$$f(x-1) + f(-x-1) = 0. \tag{1.43}$$

Zamijenimo u (1.31) x sa $x + 2$:

$$f(x) + f(-x-4) = 0 \tag{1.44}$$

i u (1.43) x sa $x + 3$:

$$f(x+2) + f(-x-4) = 0. \tag{1.45}$$

Iz (1.44) i (1.45) proizlazi da je f periodična s periodom 2, odnosno

$$f(x) = f(x+2).$$

Kako je sada i 4 period funkcije f, iz (1.44) slijedi

$$f(x) + f(-x) = 0, \tag{1.46}$$

odnosno, funkcija f je neparna. Sada zbrojimo (HE) i (1.18), uvažavajući (1.46), da bismo dobili

$$f(x+y-xy) + f(-x-y-xy) + 2f(xy) = 0.$$

Supstitucija

$$x + y - xy = a, \quad -x - y - xy = b,$$

uz ponovno korištenje (1.46), daje

$$f(a) + f(b) = -2f\left(-\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{1.47}$$

Pritom za realne x, y mora vrijediti uvjet

$$(a-b)^2 + 8(a+b) \geqslant 0. \tag{1.48}$$

Uvedimo sada supstituciju

$$x + y - xy = -a, \quad -x - y - xy = -b.$$

Sada imamo
$$f(-a) + f(-b) = -2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
uz uvjet
$$(a-b)^2 - 8(a+b) \geqslant 0. \tag{1.49}$$
Primijetimo da je gornja jednadžba, uz (1.46), ekvivalentna Jensenovoj jednadžbi (1.47). Očito je barem jedan od uvjeta (1.48) i (1.49) zadovoljen, čime je teorem dokazan.

Dokaz je valjan i za $x, y \in \mathbb{C}$, s tim da su u tom slučaju uvjeti (1.36), (1.38), (1.48) i (1.49) suvišni. □

1.3 Poopćenje Hosszúove funkcijske jednadžbe

U ovom odjeljku promatrat ćemo jedno poopćenje Hosszúove funkcijske jednadžbe. Prije toga ćemo dokazati neke pomoćne rezultate.

Teorem 1.3.1. *Neka funkcije f, g, h, k*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*
$$f(x+y) - g(x) - h(y) = k(xy) \tag{1.50}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$. *Tada je opće rješenje navedene jednadžbe dano sa*
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= A_1(x^2) + A(x) + a,\\ g(x) &= A_1(x^2) + A(x) + a - b_1,\\ h(x) &= A_1(x^2) + A(x) + a - b_2,\\ k(x) &= 2A_1(x) + b_1 + b_2 - a, \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$
gdje su A, $A_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *aditivne funkcije te* a, b_1, b_2 *proizvoljne realne konstante.*

Dokaz. Uvrstimo li najprije $x = 0$, a zatim $y = 0$ u jednadžbu (1.50), dobit ćemo sljedeće jednakosti
$$h(y) = f(y) - g(0) - k(0), \quad g(x) = f(x) - h(0) - k(0). \tag{1.52}$$
Umetanjem (1.52) ponovno u (1.50) imamo
$$f(x+y) - [f(x) - h(0) - k(0)] - [f(y) - g(0) - k(0)] = k(xy),$$
odnosno
$$f(x+y) - f(x) - f(y) = l(xy), \tag{1.53}$$

gdje je, za svaki $x \in \mathbb{R}$,

$$l(x) = k(x) - g(0) - h(0) - 2k(0). \tag{1.54}$$

Stavimo li $y = 1$ u (1.53), dobivamo

$$f(x+1) - f(x) - f(1) = l(x). \tag{1.55}$$

Uzevši taj izraz u obzir, (1.53) se može raspisati i na sljedeći način:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = f(xy+1) - f(xy) - f(1),$$

odnosno

$$f(x+y) + f(xy) = f(xy+1) + f(x) + f(y) - f(1). \tag{1.56}$$

Definirajmo sada funkciju

$$F(x) := f(x) - f(1). \tag{1.57}$$

Pomoću nje se jednakost (1.56) može napisati i u obliku

$$F(x+y) + F(xy) = F(xy+1) + F(x) + F(y) \tag{1.58}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako u tom izrazu y zamijenimo sa $-y$, dobivamo

$$F(x-y) + F(-xy) = F(1-xy) + F(x) + F(-y). \tag{1.59}$$

Zbrajanjem posljednjih dvaju izraza dobivamo

$$F(x+y)+F(xy)+F(x-y)+F(-xy) = F(1+xy)+2F(x)+F(y)+F(-y)+F(1-xy) \tag{1.60}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamijenimo li mjesta x i y, imamo

$$F(x+y)+F(xy)+F(y-x)+F(-xy) = F(1+xy)+2F(y)+F(x)+F(-x)+F(1-xy). \tag{1.61}$$

Jednadžbu (1.61) oduzmimo od (1.60), iz čega proizlazi

$$F(x-y) - F(y-x) = F(x) - F(y) + F(-y) - F(-x).$$

Uvođenjem funkcije

$$A(x) := F(x) - F(-x), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.62}$$

prethodna jednadžba se reducira do

$$A(x-y) = A(x) - A(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je aditivna te imamo

$$F(x) - F(-x) = A(x). \tag{1.63}$$

Sada oduzmimo (1.59) od (1.58) da bismo dobili

$$F(x+y) - F(x-y) + F(xy) - F(-xy) = F(1+xy) - F(1-xy) + F(y) - F(-y). \quad (1.64)$$

Uvrstimo li (1.63) u dobivenu jednakost imamo

$$F(x+y) - F(x-y) + A(xy) = F(1+xy) - F(1-xy) + A(y),$$

koju pak možemo reducirati do

$$w(x+y) + w(1-xy) = w(x-y) + w(1+xy), \quad (1.65)$$

gdje smo funkciju w definirali sa

$$w(x) := F(x) - \frac{1}{2}A(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \quad (1.66)$$

Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $x \geqslant y$. Uzmimo da je

$$2x = \sqrt{t+s} + \sqrt{t}, \quad 2y = \sqrt{t+s} - \sqrt{t}, \quad t \geqslant 0,\ t+s \geqslant 0. \quad (1.67)$$

Tada je

$$\sqrt{t} = x - y, \quad s = 4xy. \quad (1.68)$$

Uvrstimo li (1.67) u (1.65), dobivamo

$$w\left(\sqrt{s+t}\right) + w\left(1 - \frac{s}{4}\right) = w\left(\sqrt{t}\right) + w\left(1 + \frac{s}{4}\right) \quad (1.69)$$

za sve $(s,t) \in D$, gdje je

$$D := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geqslant 0,\ s+t \geqslant 0\}.$$

Za $t \geqslant 0$ definirajmo

$$G(t) := w\left(\sqrt{t}\right), \quad H(t) := w\left(1 + \frac{t}{4}\right) - w\left(1 - \frac{t}{4}\right).$$

Uočavamo da se (1.69) može napisati ovako:

$$G(s+t) = G(t) + H(s), \qquad (s,t) \in D. \quad (1.70)$$

Zamijenimo li varijable s i t, imamo

$$G(t+s) = G(s) + H(t).$$

Izjednačimo li dobiveno sa (1.70), dobivamo

$$H(s) - G(s) = H(t) - G(t), \quad s, t \geq 0,$$

pa je

$$H(s) = G(s) - \beta, \qquad s \geq 0,$$

pri čemu je β konstanta. Sada (1.70) postaje

$$G(t+s) = G(t) + G(s) - \beta \qquad s, t \geq 0.$$

Za svaki $t \geq 0$ stavimo

$$A_1(t) = G(t) - \beta.$$

Tada je $A_1\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija. Uzmemo li u obzir i definiciju od G, vidimo da je

$$w(s) = A_1(s^2) + \beta \tag{1.71}$$

za svaki $s \geq 0$. Supstitucijom $x = 0$ u (1.65) dobivamo $w(y) = w(-y)$ pa gornji izraz vrijedi i za $s < 0$, dakle za svaki $s \in \mathbb{R}$. Iz (1.71) te iz definicija funkcija w i F dobivamo

$$f(x) = A_1(x^2) + \frac{1}{2}A(x) + \beta + f(1), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.72}$$

Iz (1.52) i (1.72) dobivamo

$$h(x) = A_1(x^2) + \frac{1}{2}A(x) + \beta + f(1) - g(0) - k(0), \tag{1.73}$$

$$g(x) = A_1(x^2) + \frac{1}{2}A(x) + \beta + f(1) - h(0) - k(0). \tag{1.74}$$

Konačno, (1.54), (1.55) i (1.72), uz oznaku $b = g(0) + h(0) + 2k(0)$, daju

$$\begin{aligned}
k(x) &= l(x) + b \\
&= f(x+1) - f(x) + b - f(1) \\
&= A_1(1 + x^2 + 2x) - A_1(x)^2 + \frac{1}{2}A(1+x) - \frac{1}{2}A(x) + b - f(1) \\
&= 2A_1(x) + A_1(1) + \frac{1}{2}A(1) + b - f(1).
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Zbrajanjem jednakosti u (1.52) za $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = g(0) + h(0) + k(0)$, pa je $b = f(0) + k(0)$. Za $x = 1$ iz (1.72) slijedi

$$A_1(1) + \frac{1}{2}A(1) = -\beta. \tag{1.76}$$

Uvrštavanjem (1.76) u (1.34) dobivamo

$$k(x) = 2A_1(x) - \beta + b - f(1). \tag{1.77}$$

Odaberemo li konstante a, b_1, b_2 i b na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a &= f(1) + \beta, \\ b_1 &= h(0) + k(0), \\ b_2 &= g(0) + k(0), \\ b &= b_1 + b_2 \end{aligned}$$

i uvrstimo ih redom u (1.72), (1.74), (1.73) i (1.77), te zamijenimo li $\frac{1}{2}A(x)$ sa $A(x)$, dobivamo rješenje jednadžbe upravo u željenom obliku (1.51). □

Korolar 1.3.2. *Pretpostavimo da je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da Cauchyjeva razlika $f(x+y) - f(x) - f(y)$ ovisi samo o umnošku xy za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je f oblika*

$$f(x) = A_1(x^2) + A(x) + a,$$

gdje su $A_1, A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije i a je proizvoljna konstanta. Posebno,

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 2A_1(xy) - a,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorem 1.3.3. *Neka je α realna konstanta. Neka funkcije $f, g, h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y + \alpha xy) + g(xy) = h(x) + k(y) \tag{GHE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je opće rješenje jednadžbe (GHE) *dano sa*

$$f(x) = \begin{cases} A_1(x^2) + A(x) + a & \text{ako je } \alpha = 0, \\ A(\alpha x) + a & \text{ako je } \alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2A_1(x) + a + b_1 + b_2 & \text{ako je } \alpha = 0, \\ A(-\alpha^2 x) + a + b_1 + b_2 & \text{ako je } \alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} A_1(x^2) + A(x) + a + b_1 & \text{ako je } \alpha = 0, \\ A(\alpha x) + a + b_1 & \text{ako je } \alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} A_1(x^2) + A(x) + a + b_2 & \text{ako je } \alpha = 0, \\ A(\alpha x) + a + b_2 & \text{ako je } \alpha \neq 0, \end{cases}$$

gdje su $A, A_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivne funkcije i a, b_1, b_2 su proizvoljne konstante.

Dokaz. Najprije ćemo razmatrati slučaj kada je $\alpha = 0$. Primjećujemo da tada (GHE) postaje

$$f(x+y) + g(xy) = h(x) + k(y) \tag{1.78}$$

pa tvrdnja slijedi iz teorema 1.3.1. Sada promatrajmo slučaj kada je $\alpha \neq 0$. Stavimo li prvo da je $y = 0$ u (GHE), a zatim $x = 0$, dobivamo jednakosti

$$h(x) = f(x) + g(0) - k(0), \tag{1.79}$$

$$k(y) = f(y) + g(0) - h(0). \tag{1.80}$$

Ubacimo li ih u (GHE), imamo

$$f(x+y+\alpha xy) + g(xy) = f(x) + f(y) + b_1 + b_2, \tag{1.81}$$

gdje je

$$b_1 = g(0) - k(0), \quad b_2 = g(0) - h(0). \tag{1.82}$$

Zamijenimo li u (1.81) y sa $-\frac{1}{\alpha}$, dobit ćemo

$$g(x) = f(-\alpha x) + b_1 + b_2. \tag{1.83}$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u (1.81) konstante se oduzmu i dobivamo

$$f(x+y+\alpha xy) + f(-\alpha xy) = f(x) + f(y) \tag{1.84}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako bismo odredili opće rješenje gornje jednadžbe, uvedimo funkciju $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$G(x,y) := f(x) + f(y) - f(-\alpha xy). \tag{1.85}$$

Uočavamo da G zadovoljava

$$G\left(\alpha u, -\frac{v}{\alpha}\right) + G(\alpha uv, w) = G(\alpha u, vw) + G\left(-\frac{v}{\alpha}, w\right) \tag{1.86}$$

za sve $u, v, w \in \mathbb{R}$. Prema (1.84) je $G(x,y) = f(x+y+\alpha xy)$ pa se (1.86) se može napisati u obliku

$$f\left(\alpha u - \frac{v}{\alpha} - \alpha uv\right) + f(\alpha uv + w + \alpha^2 uvw) = f(\alpha u + vw + \alpha^2 uvw) + f\left(-\frac{v}{\alpha} + w - vw\right),$$

odakle pak za $w = -\frac{1}{\alpha v}$ dobivamo

$$f\left(\alpha u - \frac{v}{\alpha} - \alpha uv\right) + f(\alpha uv - \frac{1}{\alpha v} - \alpha u) = f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + f\left(-\frac{v}{\alpha} - \frac{1}{\alpha v} + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{1.87}$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$ i $v \neq 0$. Odaberimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi $x + y > 0$. Tražimo $u \in \mathbb{R}$ i $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ koji zadovoljavaju sustav

$$\alpha u - \frac{v}{\alpha} - \alpha uv = \frac{y+1}{\alpha}, \qquad \alpha uv - \frac{1}{\alpha v} - \alpha u = \frac{x+1}{\alpha}. \tag{1.88}$$

Zbrojimo li jednadžbe sustava, vidimo da vrijedi

$$-v - \frac{1}{v} = x + y + 2 \tag{1.89}$$

odakle se množenjem sa v dobiva kvadratna jednadžba

$$v^2 + (x + y + 2)v + 1 = 0. \tag{1.90}$$

Njezini korijeni su međusobno različiti te su različiti od nule jer je slobodni koeficijent jednak 1, a diskriminanta

$$(x + y + 2)^2 - 4 = (x + y)(x + y + 4) > 0. \tag{1.91}$$

Označimo sa v_0 jedno od rješenja. Jasno se vidi da je $v_0 \neq 1$, jer bi u suprotnom bilo $1 + (x + y + 2) + 1 = 0$, što je u kontradikciji sa $x + y > 0$. Dakle, ako je

$$u_0 = \frac{y + 1 + v_0}{\alpha^2(1 - v_0)},$$

onda u_0 i v_0 zadovoljavaju sustav jednadžbi (1.88). Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ za koje je $x + y > 0$, možemo uvrstiti jednadžbe sustava (1.88) u (1.87) iz čega dobivamo

$$f\left(\frac{x+1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{y+1}{\alpha}\right) = f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{x+y+3}{\alpha}\right). \tag{1.92}$$

Definirajmo funkciju

$$B(x) := f\left(\frac{x+1}{\alpha}\right) - f\left(-\frac{1}{\alpha}\right). \tag{1.93}$$

Napišemo li (1.93) u obliku

$$f\left(\frac{x+y+3}{\alpha}\right) - f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{x+1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{y+1}{\alpha}\right) - 2f\left(-\frac{1}{\alpha}\right),$$

uočavamo da je prema (1.93) možemo reducirati do

$$B(x + y + 2) = B(x) + B(y) \tag{1.94}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ za koje je $x + y > 0$. Zamijenimo li x sa 0, a y sa $x + y$, dobivamo

$$B(x + y + 2) = B(0) + B(x + y). \tag{1.95}$$

Iz (1.94) i (1.95) sada slijedi

$$B(x) + B(y) = B(0) + B(x + y)$$

za $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$. Uvođenjem funkcije

$$A(x) := B(x) - B(0), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dobivamo

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \tag{1.96}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y > 0$. Sada proširimo (1.96) na $\mathbb{R}^2$. Ako vrijedi $x + y \leq 0$, možemo naći $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $t + x > 0$ i $t + x + y > 0$. Prema (1.96) imamo

$$\begin{aligned} A(t) + A(x + y) &= A(t + x + y) \\ &= A(t + x) + A(y) \\ &= A(t) + A(x) + A(y). \end{aligned}$$

Dakle, (1.96) vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i A je aditivna funkcija na $\mathbb{R}$. Prema (1.93) i (1.96) imamo

$$f(x) = A(\alpha x) + A(-1) + f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + B(0). \tag{1.97}$$

Iz (1.83) i (1.97) dobivamo

$$g(x) = A(-\alpha^2 x) + A(-1) + f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + B(0) + b_1 + b_2, \tag{1.98}$$

te iz (1.79), (1.80), (1.82) i (1.97) slijedi

$$h(x) = A(\alpha x) + A(-1) + f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + B(0) + b_1, \tag{1.99}$$

$$k(x) = A(\alpha x) + A(-1) + f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + B(0) + b_2. \tag{1.100}$$

Stavimo li da je $a = A(-1) + f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + B(0)$ u (1.97), (1.98), (1.99) i (1.100). dobit ćemo funkcije h i k, odnosno drugi dio rješenja jednadžbe (GHE) iz teorema 1.3.3. Lako provjerimo da spomenute funkcije zadovoljavaju (GHE). Time je dokaz završen. $\square$

1.4 Pompeiuova funkcijska jednadžba i njezino poopćenje

Iz poopćene Hosszúove funkcijske jednadžbe slijedi funkcijska jednadžba poznata kao Pompeiuova funkcijska jednadžba. Podsjetimo se još jednom kako izgleda jednadžba (GHE):

$$f(x + y + \alpha xy) + g(xy) = h(x) + k(y), \quad x, y \in \mathbb{F}.$$

Ako stavimo $\alpha = 1$ te $h = k = -g = f$, (GHE) postaje

$$f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.101}$$

Neka je $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tada je $(G, \circ)$ Abelova grupa, pri čemu je operacija $\circ$ definirana sa

$$x \circ y = x + y + xy, \quad x, y \in G.$$

Razlika $f(x \circ y) - f(x) - f(y)$ je funkcija od x, y, nazovimo ju α. Ako je $\alpha(x, y) = f(x)f(y)$, dobivamo funkcijsku jednadžbu

$$f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{PE}$$

Dobivena funkcijska jednadžba naziva se Pompeiuova funkcijska jednadžba.

Definicija 1.4.1. *Multiplikativna Cauchyjeva funkcijska jednadžba je jednadžba oblika*

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Svako rješenje multiplikativne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe zvat ćemo multiplikativnom funkcijom.

Definicija 1.4.2. *Logaritamskom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom zovemo jednadžbu oblika*

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_+$. Svako rješenje logaritamske Cauchyjeve funkcijske jednadžbe nazivamo logaritamskom funkcijom.

Teorem 1.4.3. *Ako $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava* (PE)*, tada je*

$$f(x) = M(x + 1) - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativna funkcija.

Dokaz. Dodajmo 1 na obje strane jednakosti u (PE) i stavimo

$$F(x) = 1 + f(x).$$

Tada se (PE) reducira do

$$F(x + y + xy) = F(x)F(y).$$

Sada zamjenom x sa $x - 1$ i y sa $y - 1$, dobivamo

$$M(xy) = M(x)M(y),$$

gdje je $M(x) = F(x - 1)$. Dakle, M je multiplikativna i vrijedi

$$f(x) = F(x) - 1 = M(x + 1) - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Odredit ćemo opće rješenje $f, g, p, q, h \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe

$$f(x + y + xy) = p(x) + q(y) + g(x)h(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1.102}$$

i opće rješenje $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe

$$f(ax + by + cxy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1.103}$$

Jednadžbe (1.102) i (1.103) su poopćenja Pompeiuove funkcijske jednadžbe (PE).

Za dokaz ćemo trebati sljedeće dvije leme.

Lema 1.4.4. *Neka funkcije $g, h \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$g(xy) = g(y) + g(x)h(y) \tag{1.104}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada vrijedi jedna od sljedećih mogućnosti:

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ h(x) = proizvoljno, \end{cases}$$
$$\begin{cases} g(x) = L(x), \qquad L \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ logaritamska funkcija, } L \not\equiv 0, \\ h(x) = 1, \end{cases} \tag{1.105}$$
$$\begin{cases} g(x) = \alpha[M(x) - 1], \quad M \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ multiplikativna, } M \neq id;\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, \\ h(x) = M(x). \end{cases}$$

Dokaz. Ako je $g \equiv 0$, tada je h proizvoljna pa dobivamo trivijalno rješenje. Pretpostavimo da g nije nul funkcija. Višestrukom primjenom (1.104) dobivamo

$$\begin{aligned} g(xyz) &= g(xy \cdot z) \\ &= g(z) + g(xy)h(z) \\ &= g(z) + [g(y) + g(x)h(y)]h(z), \end{aligned}$$

a također i

$$\begin{aligned} g(xyz) &= g(x \cdot yz) \\ &= g(yz) + g(x)h(yz) \\ &= g(z) + g(y)h(z) + g(x)h(yz). \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$g(x)h(y)h(z) = g(x)h(yz), \quad x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Kako g nije nul funkcija, zaključujemo

$$h(yz) = h(y)h(z), \quad y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pa je

$$h(x) = M(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

gdje je M multiplikativna.

Ako je $h = M \equiv 1$, tada (1.104) pokazuje da je $g = L$ logaritamska. Pretpostavimo da je $h = M \not\equiv 1$. Tada zamjenom x i y u (1.104) i usporedbom dobivene jednadžbe sa (1.104), dobivamo

$$g(y)[h(x) - 1] = g(x)[h(y) - 1].$$

Kako postoji y_0 takav da je $h(y_0) \neq 1$, to gornja jednadžba daje

$$g(x) = \frac{g(y_0)}{h(y_0) - 1}[h(x) - 1],$$

odnosno

$$g(x) = \alpha[h(x) - 1] = \alpha(M(x) - 1),$$

gdje je α konstanta različita od nule, zbog $g \not\equiv 0$. Time je lema dokazana. □

Lema 1.4.5. *Opća rješenja $f, g, h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcijske jednadžbe*

$$f(xy) = f(x) + f(y) + \alpha g(x) + \beta h(y) + g(x)h(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1.106}$$

gdje su α i β unaprijed zadane konstante, dana su sa

$$\begin{cases} f(x) = L(x) + \alpha\beta, \\ g(x) = proizvoljno, \\ h(x) = -\alpha; \end{cases} \tag{1.107}$$

$$\begin{cases} f(x) = L(x) + \alpha\beta, \\ g(x) = -\beta, \\ h(x) = proizvoljno; \end{cases} \tag{1.108}$$

$$\begin{cases} f(x) = L_0(x) + \dfrac{1}{2}cL_1^2(x) + \alpha\beta, \\ g(x) = cL_1(x) - \beta, \\ h(x) = L_1(x) - \alpha; \end{cases} \tag{1.109}$$

$$\begin{cases} f(x) = L(x) + \gamma\delta[M(x) - 1] + \alpha\beta \\ g(x) = \gamma[M(x) - 1] - \beta \\ h(x) = \delta[M(x) - 1] - \alpha, \end{cases} \tag{1.110}$$

pri čemu vrijedi sljedeće: $M\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je multiplikativno preslikavanje različito od identitete, $L_0, L_1, L\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ su logaritamske funkcije i L_1 nije identički jednaka nuli, te c, δ, γ su proizvoljne konstante različite od nule.

Dokaz. Zamjenom x i y u (1.106) i uspoređivanjem s (1.106), dobivamo

$$[\alpha + h(y)][\beta + g(x)] = [\alpha + h(x)][\beta + g(y)]. \tag{1.111}$$

Sada promatramo nekoliko slučajeva.

1. slučaj. Pretpostavimo da vrijedi $h(y) = -\alpha$ za sve $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada iz (1.106) slijedi

$$f(xy) = f(x) + f(y) - \alpha\beta, \tag{1.112}$$

pa je

$$f(x) = L(x) + \alpha\beta, \tag{1.113}$$

gdje je $L\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ logaritamska funkcija. Odatle dobivamo tvrdnju (1.107).

2. slučaj. Pretpostavimo da je $g(x) = -\beta$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada iz (1.106) ponovno slijede (1.112) i (1.113). Odatle dobivamo rješenje (1.108).

3. slučaj. Sada pretpostavimo da je $h(x) \neq -\alpha$ za neki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $g(x) \neq -\beta$ za neki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Korištenjem (1.106) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x(yz)) &= f(x) + f(yz) + \alpha g(x) + \beta h(yz) + g(x)h(yz) \\ &= f(x) + f(y) + f(z) + \alpha g(y) + \beta h(z) \\ &\quad + g(y)h(z) + \alpha g(x) + \beta h(yz) + g(x)h(yz). \end{aligned} \tag{1.114}$$

Ponovnim korištenjem (1.106) dobivamo

$$\begin{aligned} f((xy)z) &= f(xy) + f(z) + \alpha g(xy) + \beta h(z) + g(xy)h(z) \\ &= f(x) + f(y) + f(z) + \alpha g(x) + \beta h(y) \\ &\quad + g(x)h(y) + \alpha g(xy) + \beta h(z) + g(xy)h(z). \end{aligned} \tag{1.115}$$

Iz (1.114) i (1.115) slijedi

$$[\alpha + h(z)][g(y) - g(xy)] = [\beta + g(x)][h(y) - h(yz)] \tag{1.116}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kako je $g(x) \neq -\beta$ za neki $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, to postoji $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ takav da vrijedi $g(x_0)+\beta \neq 0$. Zamjenom $x = x_0$ u (1.116) dobivamo

$$h(yz) = h(y) + [\alpha + h(z)]k(y), \tag{1.117}$$

gdje je

$$k(y) = \frac{g(x_0 y) - g(y)}{g(x_0) + \beta}. \tag{1.118}$$

Stavimo li

$$H(x) = h(x) + \alpha,$$

tada (1.117) postaje

$$H(yz) = H(y) + H(z)k(y).$$

Sada primijenimo lemu 1.4.4. Kako je $h(x) \neq -\alpha$ za neki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to H nije nul funkcija. Preostaju sljedeće dvije mogućnosti:

$$\begin{cases} H(x) = L(x), & L\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ logaritamska funkcija, } L \not\equiv 0, \\ k(x) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(x) = \delta[M(x) - 1], & M\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ multiplikativna, } M \neq id; \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0, \\ k(x) = M(x). \end{cases}$$

Podslučaj 3.1. Ako je H logaritamska, a $k \equiv 1$, tada je

$$h(x) = L_1(x) - \alpha, \tag{1.119}$$

gdje je L_1 logaritamska funkcija koja nije identički jednaka nuli, a

$$g(xy) = g(x) + g(y) + \beta,$$

pa je

$$g(x) = L_2(x) - \beta,$$

gdje je L_2 logaritamska funkcija koja nije identički jednaka nuli. Uvrštenje u (1.111) daje

$$L_1(y)L_2(x) = L_1(x)L_2(y).$$

Kako L_1 nije nul funkcija, to postoji $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $L_1(y_0) \neq 0$. Slijedi

$$L_2(x) = \frac{L_2(y_0)}{L_1(y_0)} L_1(x),$$

pa je $L_2 = cL_1$, gdje je c konstanta različita od nule (zbog $L_2 \not\equiv 0$), odnosno

$$g(x) = cL_1(x) - \beta. \tag{1.120}$$

Primjenom (1.119) i (1.120) na (1.106) dobivamo

$$f(xy) = f(x) + f(y) + cL_1(x)L_1(y) - \alpha\beta. \tag{1.121}$$

Uvođenjem funkcije

$$L_0(x) := f(x) - \frac{1}{2}cL_1^2(x) - \alpha\beta, \tag{1.122}$$

uočavamo da se (1.121) reducira do

$$L_0(xy) = L_0(x) + L_0(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj. L_0 je logaritamska funkcija, te zbog (1.122) vrijedi

$$f(x) = L_0(x) + \frac{1}{2}cL_1^2(x) + \alpha\beta. \tag{1.123}$$

Dakle, iz (1.123), (1.120) i (1.119) proizlazi tvrdnja (1.109).

Podslučaj 3.2. Ako je

$$h(x) = \delta[M(x) - 1] - \alpha, \quad k(x) = M(x), \tag{1.124}$$

gdje je $M\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ multiplikativna, $M \neq id$; $\delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0$, tada uvrštenje u (1.111) daje

$$[M(y) - 1][\beta + g(x)] = [M(x) - 1][\beta + g(y)].$$

S obzirom da postoji $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $M(y_0) \neq 1$, odatle slijedi

$$\beta + g(x) = \frac{\beta + g(y_0)}{M(y_0) - 1}[M(x) - 1],$$

odnosno

$$g(x) = \gamma[M(x) - 1] - \beta, \tag{1.125}$$

gdje je γ konstanta različita od nule. Uvrštenje (1.124) i (1.125) u (1.106) daje

$$f(xy) = f(x) + f(y) - \alpha\beta + \gamma\delta[M(x) - 1][M(y) - 1]. \tag{1.126}$$

Uvođenjem funkcije

$$L(x) := f(x) - \gamma\delta[M(x) - 1] - \alpha\beta, \tag{1.127}$$

uočavamo da se (1.126) reducira do

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj. L je logaritamska funkcija. Korištenjem (1.127) dobivamo

$$f(x) = L(x) + \gamma\delta[M(x) - 1] + \alpha\beta. \tag{1.128}$$

Dakle, (1.128), (1.124) i (1.125) povlače tvrdnju (1.110). Time je lema dokazana. □

Teorem 1.4.6. *Funkcije $f, p, q, g, h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x + y + xy) = p(x) + q(y) + g(x)h(y) \tag{1.129}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih mogućnosti:

$$\begin{cases} f(x) &= L(x+1) + \alpha\beta + a + b, \\ p(x) &= L(x+1) + \alpha\beta + b + \alpha g(x), \\ q(x) &= L(x+1) + a, \\ g(x) &= proizvoljno, \\ h(x) &= -\alpha; \end{cases} \tag{1.130}$$

$$\begin{cases} f(x) &= L(x+1) + \alpha\beta + a + b, \\ p(x) &= L(x+1) + b, \\ q(x) &= L(x+1) + \alpha\beta + a + \beta h(x), \\ g(x) &= -\beta, \\ h(y) &= proizvoljno; \end{cases} \tag{1.131}$$

$$\begin{cases} f(x) &= L_0(x+1) + \frac{1}{2}cL_1^2(x+1) + \alpha\beta + a + b, \\ p(x) &= L_0(x+1) + \frac{1}{2}cL_1^2(x+1) + \alpha cL(x+1) + b, \\ q(x) &= L_0(x+1) + \frac{1}{2}cL_1^2(x+1) + \beta L_1(x+1) + a, \\ g(x) &= cL(x+1) - \beta, \\ h(x) &= L_1(x+1) - \alpha, \end{cases} \tag{1.132}$$

$$\begin{cases} f(x) &= L(x+1) + \gamma\delta[M(x+1) - 1] + \alpha\beta + a + b, \\ p(x) &= L(x+1) + (\delta + \alpha)\gamma[M(x+1) - 1] + b, \\ q(x) &= L(x+1) + (\gamma + \beta)\delta[M(x+1) - 1] + a, \\ g(x) &= \gamma[M(x+1) - 1] - \beta, \\ h(x) &= \delta[M(x+1) - 1] - \alpha; \end{cases} \tag{1.133}$$

gdje su $M\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ multiplikativno preslikavanje različito od identitete, $L_0, L_1, L\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ logaritamske funkcije pri čemu L_1 nije identički jednaka nuli, te $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c$ proizvoljne realne konstante.

Dokaz. Najprije u (1.129) stavimo $y = 0$, a potom i $x = 0$, da bismo dobili

$$p(x) = f(x) - a + \alpha g(x) \tag{1.134}$$

i

$$q(y) = f(y) - b + \beta h(y), \tag{1.135}$$

gdje su $a := q(0), b := p(0), \alpha := -h(0), \beta := -g(0)$. Primjenom (1.134) i (1.135) na (1.129) dobivamo

$$f(x + y + xy) = f(x) + f(y) - a - b + \alpha g(x) + \beta h(y) + g(x)h(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, odakle zamjena x sa $u - 1$ i y sa $v - 1$ te uvođenje funkcija

$$F(u) := f(u-1) - a - b, \quad G(u) := g(u-1), \quad H(u) := h(u-1)$$

za svaki $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ povlače

$$F(uv) = F(u) + F(v) + \alpha G(u) + \beta H(v) + G(u)H(v)$$

za sve $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Opće rješenje se sada dobiva iz leme 1.4.5. □

Sljedeći teorem odnosi se na rješenje funkcijske jednadžbe (1.103). Jedina konstantna rješenja od (1.103) su $f \equiv 0$ i $f \equiv -1$.

Teorem 1.4.7. *Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rješenje funkcijske jednadžbe* (1.103) *ako i samo ako je f dana sa*

$$f(x) = \begin{cases} M(cx) - 1 & \textit{ako je } a = b = 0, c \neq 0, \\ E(x) - 1 & \textit{ako je } a = b = 1, c = 0, \\ M(cx + 1) - 1 & \textit{ako je } a = b = 1, c \neq 0, \\ k & \textit{inače}, \end{cases}$$

gdje je $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativna, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eksponencijalna funkcija i k konstanta koja zadovoljava jednakost $k(k + 1) = 0$.

Dokaz. Zamjenom $x = 0 = y$ u (1.103) dobivamo

$$f(0)[f(0) + 1] = 0.$$

Dakle, ili je $f(0) = 0$ ili $f(0) = -1$. Promotrimo dva slučaja.

1. slučaj. Pretpostavimo da je $f(0) = -1$. Tada uvrštavanjem $x = 0$ u (1.103) dobivamo

$$f(by) = -1.$$

Ako je $b \neq 0$, tada je $f \equiv -1$. Neka je sada $b = c$. Stavimo li u (1.103) da je $y = 0$, ponovno dobivamo $f \equiv -1$ za $a \neq 0$.

Pretpostavimo da vrijedi $a = b = 0$. Ako je c također nula, tada se (1.107) reducira do

$$(1 + f(x))(1 + f(y)) = 0$$

jer je $f(0) = -1$, pa je $f \equiv -1$ konstantna funkcija. Prema tome, pretpostavimo da je $c \neq 0$. Tada zamjenom x sa $\frac{x}{c}$ i y sa $\frac{y}{c}$ u (1.103) dobivamo

$$M(xy) = M(x)M(y), \tag{1.136}$$

gdje je

$$M(x) = 1 + f\left(\frac{x}{c}\right). \tag{1.137}$$

Stoga vrijedi

$$f(x) = M(cx) - 1, \tag{1.138}$$

gdje je $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativna. Dakle, (1.138) je rješenje od (1.103) uz $a = b = 0$ i $c \neq 0$.

2. slučaj. Pretpostavimo da je $f(0) = 0$. Stavimo da je $a = 0$. Tada umetanjem $y = 0$ u (1.103) dobivamo $f \equiv 0$. Sada pretpostavimo da je $a \neq 0$. Slično, $b = 0$ vodi do $f \equiv 0$. Neka je $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Stavimo li prvo $x = 0$, a potom $y = 0$, u (1.103), dobit ćemo

$$f(by) = f(y) \tag{1.139}$$

i

$$f(ax) = f(x) \tag{1.140}$$

zbog čega (1.103) postaje

$$f(ax + by + cxy) = f(ax) + f(by) + f(ax)f(by) \tag{1.141}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da je $c = 0$. Tada zamjenom x sa $\frac{x}{a}$ i y sa $\frac{y}{b}$ u (1.141) dobivamo

$$E(x + y) = E(x)E(y), \tag{1.142}$$

gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dano sa

$$E(x) = 1 + f(x), \tag{1.143}$$

eksponencijalno preslikavanje. Uvrštenje u (1.103) daje

$$E(ax + by) = E(x)E(y),$$

odnosno, zbog (1.142),

$$E(ax + by) = E(x + y). \tag{1.144}$$

Posebno, za $y = -x$ dobivamo

$$E((a - b)x) = 1.$$

Ako je $a \neq b$, tada je E konstantno preslikavanje, pa je i f konstantna (nul) funkcija. Neka je sada $a = b$. Iz (1.144) slijedi

$$E(a(x + y)) = E(x + y),$$

odnosno

$$E(ax) = E(x).$$

Sada iz (1.142) slijedi

$$E((a - 1)x) = E(ax - x) = E(ax)E(-x) = E(x)E(-x) = E(x - x) = E(0) = 1.$$

Ako je $a \neq 1$, tada je E konstantna funkcija, pa je i f konstantna funkcija i to nul funkcija. Za $a = b = 1$ i $c = 0$ je $f(x) = E(x) - 1$. Na kraju, neka je $a \neq 0, b \neq 0$ i $c \neq 0$. Neka je $\alpha = \frac{c}{ab}$. Zamijenimo li x sa $\frac{x}{a\alpha}$ i y sa $\frac{y}{b\alpha}$ u (1.141), dobit ćemo

$$F(x + y + xy) = F(x)F(y), \tag{1.145}$$

gdje je

$$F(x) = 1 + f\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{1.146}$$

Zamjena x sa $x - 1$ i y sa $y - 1$ u (1.145) povlači

$$M(xy) = M(x)M(y),$$

gdje je M multiplikativna te

$$M(x) = F(x - 1). \tag{1.147}$$

Stoga, prema (1.146) vrijedi

$$f(x) = F(\alpha x) - 1,$$

a iz (1.147) slijedi

$$f(x) = M(1 + \alpha x) - 1. \tag{1.148}$$

Uvrštenje u (1.103) daje

$$M(1 + a\alpha x + b\alpha y + c\alpha xy) = M(1 + \alpha x)M(a + \alpha y).$$

Zamijenimo li x sa $\frac{x}{\alpha}$ i y sa $\frac{y}{\alpha}$ te uzmemo li u obzir da je $\frac{c}{\alpha} = ab$, dobivamo

$$M(1 + ax)M(1 + by) = M(1 + x)M(1 + y).$$

Uvrstimo li $x = 0$, odnosno $y = 0$, zaključujemo

$$M(1 + x) = M(1 + \alpha x) = M(1 + bx). \tag{1.149}$$

Primijetimo da je $M(1) \neq 0$ jer bi inače M bila nul funkcija i $f \equiv -1$. Zamjenom x sa $x - 1$ u (1.149) dobivamo

$$M(x) = M(1 + a(x - 1))$$

odakle slijedi

$$M\left(\frac{1 - a + ax}{x}\right) = 1$$

kada je $x \neq 0$.

Pretpostavimo da je $a \neq 1$. Zamijenimo li x sa $\frac{a-1}{a-x}$, dobit ćemo

$$M(x) = 1$$

za $x \neq a$. Isto tako, ako je $b \neq 0$, dobivamo

$$M(x) = 1$$

za $x \neq b$. Dakle, $M(x) = 1$ za svaki x, odakle slijedi da je f konstantna. Inače je $a = b = 1$. Tada iz (1.149) dobivamo

$$f(x) = M(1 + cx) - 1, \tag{1.150}$$

gdje je $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ multiplikativna. Time je teorem dokazan. $\square$

Poglavlje 2

Stabilnost Hosszúove funkcijske jednadžbe

2.1 Stabilnost Cauchyjeve funkcijske jednadžbe

U ovom poglavlju dokazat ćemo stabilnost Hosszúove funkcijske jednadžbe (HE) i njezinog poopćenja (GHE). No, prije toga ćemo dokazati stabilnost aditivne Cauchyjeve funkcijske jednadžbe.

Definicija 2.1.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava jednadžbu*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ovu jednadžbu nazivamo aditivnom Cauchyjevom funkcijskom jednadžbom, a svako njezino rješenje aditivnom funkcijom.

Teorem 2.1.2. *Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija koja zadovoljava*

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta$$

za neki $\delta \geqslant 0$ i za sve $x, y \in \mathbb{R}$, onda postoji jedinstvena aditivna funkcija $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - A(x)| \leqslant \delta$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija za koju vrijedi

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta \tag{2.1}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i neki $\delta > 0$. Da bismo dokazali ovaj teorem treba dokazati:

1. $\left(\dfrac{f(2^n x)}{2^n}\right)_n$ je Cauchyjev niz za svaki fiksni $x \in \mathbb{R}$;

2. ako vrijedi
$$A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n},$$
tada je A aditivna na R;

3. A zadovoljava $|f(x) - A(x)| \leqslant \delta$ za $x \in \mathbb{R}$;

4. A je jedinstvena.

Stavimo li $y = x$ u (2.1), imamo
$$|f(2x) - 2f(x)| \leqslant \delta \tag{2.2}$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamijenimo li x sa $2^{k-1}x,\ k \in \mathbb{N}$, dobivamo
$$\left|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right| \leqslant \delta$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\delta, \tag{2.3}$$
odnosno
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right| \leqslant \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{2.4}$$
Zbog nejednakosti trokuta (2.4) povlači
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left[f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\right]\right| \leqslant \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$
odnosno
$$\left|\frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x)\right| \leqslant \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \tag{2.5}$$
za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $n > m > 0$, tada je $n - m \in \mathbb{N}$, pa u (2.5) možemo n zamijeniti sa $n - m$ kako bismo dobili

$$\left|\frac{f(2^{n-m}x)}{2^{n-m}} - f(x)\right| \leqslant \delta\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right).$$

Množenjem ove nejednakosti sa $\frac{1}{2^m}$ dobivamo

$$\left|\frac{f(2^{n-m}x)}{2^n} - \frac{f(x)}{2^m}\right| \leqslant \delta\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Sada zamjena x sa $2^m x$ daje

$$\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right| \leqslant \delta\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right).$$

Pustimo li da $m \to \infty$, tada

$$\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) \to 0$$

iz čega proizlazi

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m}\right| = 0.$$

Dakle,

$$\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)_n$$

je Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa je i konvergentan. Definirajmo funkciju $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$A(x) := \lim_{n\to\infty}\frac{f(2^n x)}{2^n}. \tag{2.6}$$

Sada dokažimo da je A aditivna. Promotrimo

$$\begin{aligned}
|A(x+y) - A(x) - A(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n}\right)\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(f(2^n(x+y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\right)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\right| \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\delta}{2^n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Preostaje dokazati

$$|A(x) - f(x)| \leqslant \delta.$$

Zbog (2.5) vrijedi

$$\begin{aligned} |A(x) - f(x)| &= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Odatle dobivamo

$$|A(x) - f(x)| \leqslant \delta$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Konačno, dokažimo da je takvo preslikavanje A jedinstveno. Pretpostavimo li suprotno, tada postoji aditivna funkcija $B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa istim svojstvom. Točnije, vrijedi

$$|B(x) - f(x)| \leqslant \delta$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Primijetimo da je tada

$$\begin{aligned} |B(x) - A(x)| &= |B(x) - f(x) + f(x) - A(x)| \\ &\leqslant |B(x) - f(x)| + |f(x) - A(x)| \\ &= \delta + \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Nadalje, kako su A i B aditivna preslikavanja, imamo

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= \left| \frac{nA(x)}{n} - \frac{nB(x)}{n} \right| \\ &= \left| \frac{A(nx)}{n} - \frac{B(nx)}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} |A(nx) - B(nx)| \\ &\leqslant \frac{2\,\delta}{n}, \end{aligned}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$|A(x) - B(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2\,\delta}{n} = 0,$$

i konačno,

$$A(x) = B(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zaključujemo da je A aditivno preslikavanje čime je teorem dokazan. □

2.2 Stabilnost funkcijskih jednadžbi (HE) i (GHE)

Teorem 2.2.1. *Pretpostavimo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost*

$$|f(x + y - xy) + f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta \tag{2.7}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ te $\delta \geqslant 0$. Tada postoji jedinstvena aditivna funkcija $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - A(x) + A(1) - f(1)| \leqslant 9\,\delta \tag{2.8}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uzmimo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ te uvedimo supstituciju $y = \dfrac{1}{x}$ u (2.7) da bismo dobili sljedeće:

$$\left| f\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) + f(1) - f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant \delta. \tag{2.9}$$

Nadalje, zamijenimo li x sa xy i y sa $\dfrac{1}{x}$ u (2.7), dobivamo

$$\left| f(y) - f(xy) - f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(xy + \frac{1}{x} - y\right) \right| \leqslant \delta. \tag{2.10}$$

Iz (2.7), (2.9) i (2.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left| f(x + y - xy) + f\left(xy + \frac{1}{x} - y\right) - f\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) - f(1) \right| \\
&\leqslant |f(x + y - xy) - f(x) - f(y) + f(xy)| + \left| f(y) + f\left(xy + \frac{1}{x} - y\right) - f(xy) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) - f(1) - f\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \right| \\
&\leqslant 3\,\delta.
\end{aligned}$$

Ako stavimo

$$z = x + y - xy, \qquad t = xy + \frac{1}{x} - y,$$

tada je

$$x + \frac{1}{x} = z + t.$$

Dakle, za $z + t > 2$ postoje x i y takvi da vrijedi

$$x > 1 \quad \text{i} \quad y = \frac{z - x}{1 - x}.$$

Stoga vrijedi

$$|f(z) + f(t) - f(z + t - 1) - f(1)| \leqslant 3\,\delta \tag{2.11}$$

za $z + t > 2$. Uzmimo da je $g(z) = f(z + 1) - f(1)$ za svaki $z \in \mathbb{R}$. Ako u (2.11) zamijenimo z sa $z + 1$ i t sa $t + 1$, dobivamo

$$|g(z) + g(t) - g(z + t)| \leqslant 3\,\delta \tag{2.12}$$

za sve $z, t \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $z + t > 0$. U slučaju kada je $z + t \leqslant 0$, možemo odabrati s takav da vrijedi

$$z + t + s > 0 \qquad \text{i} \qquad t + s > 0.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} |g(z + t) + g(s) - g(z + t + s)| &\leqslant 3\,\delta, \\ |g(t + s) - g(t) - g(s)| &\leqslant 3\,\delta, \\ |g(z + t + s) - g(z) - g(t + s)| &\leqslant 3\,\delta. \end{aligned}$$

Odnosno, vrijedi

$$|g(z + t) - g(z) - g(t)| \leqslant 9\,\delta$$

za sve $z, t \in \mathbb{R}$. Zbog teorema 2.1.2 zaključujemo da postoji jedinstveno aditivno preslikavanje $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvo da vrijedi

$$|g(x) - A(x)| \leqslant 9\,\delta$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Kako je $g(x) = f(x + 1) - f(1)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi

$$|f(x + 1) - f(1) - A(x)| \leqslant 9\delta,$$

pa je

$$|f(x) - f(1) - A(x - 1)| \leqslant 9\delta$$

i konačno, zbog aditivnosti funkcije A,

$$|f(x) - f(1) - A(x) + A(1)| \leqslant 9\delta$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time je teorem dokazan. □

Teorem 2.2.2. *Ako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost*

$$|f(xy) + f(x+y) - f(xy+x) - f(y)| \leqslant \delta \tag{2.13}$$

za neki $\delta \geqslant 0$ i sve $x, y \in \mathbb{R}$, tada postoji jedinstvena aditivna funkcija $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i realna konstanta $b := f(0)$ takva da vrijedi

$$|f(x) - A(x) - b| \leqslant 12\,\delta \tag{2.14}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Zamijenimo li u (2.14) y sa $y+1$, imamo

$$|f(xy+x) + f(x+y+1) - f(xy+2x) - f(y+1)| \leqslant \delta \tag{2.15}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.13) i (2.15) dobivamo

$$\begin{aligned}
&|f(xy) + f(x+y) + f(x+y+1) - f(y) - f(xy+2x) - f(y+1)| \\
&\leqslant |f(xy) + f(x+y) - f(xy+x) - f(y)| \\
&\quad + |f(xy+x) + f(x+y+1) - f(xy+2x) - f(y+1)| \\
&\leqslant 2\delta
\end{aligned} \tag{2.16}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamjena x sa $\frac{x}{2}$ i y sa $2y$ u (2.17) potom daje

$$|f(xy) + f\left(\frac{x}{2} + 2y\right) + f\left(\frac{x}{2} + 2y + 1\right) - f(2y) - f(xy+x) - f(2y+1)| \leqslant 2\delta.$$

Iz (2.13) i posljednje nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{x}{2} + 2y\right) + f\left(\frac{x}{2} + 2y + 1\right) - f(x+y) - f(2y) - f(2y+1) + f(y) \right| \\
&= \Big| f(xy) + f\left(\frac{x}{2} + 2y\right) + f\left(\frac{x}{2} + 2y + 1\right) - f(2y) - f(xy+x) - f(2y+1) \\
&\quad - [f(xy) + f(x+y) - f(xy+x) - f(y)] \Big| \\
&\leqslant 3\delta
\end{aligned} \tag{2.17}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako u (2.18) zamijenimo x sa $x - y$, dobit ćemo

$$\left| f\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{2} + 1\right) - f(x) - f(2y) - f(2y+1) + f(y) \right| \leqslant 3\delta \tag{2.18}$$

Nadalje, ako u zadnjoj nejednakosti umjesto y stavimo $\frac{y}{3}$, imamo

$$\left| f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1\right) - f(x) - f\left(\frac{2y}{3}\right) - f\left(\frac{2y}{3} + 1\right) + f\left(\frac{y}{3}\right) \right| \leqslant 3\delta. \tag{2.19}$$

Definirajmo funkcije $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) = f\left(\frac{2x}{3}\right) + f\left(\frac{2x}{3} + 1\right) - f\left(\frac{x}{3}\right), \quad h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} + 1\right) \tag{2.20}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.19) i (2.20) slijedi

$$|h(x + y) - f(x) - g(y)| \leqslant 3\delta \tag{2.21}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Stavimo li $y = 0$ u (2.21), dobivamo

$$|h(x) - f(x) - g(0)| \leqslant 3\delta \tag{2.22}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Stavimo li pak $x = 0$ u (2.21), dobit ćemo

$$|h(y) - f(0) - g(y)| \leqslant 3\delta \tag{2.23}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Definirajmo sada funkcije

$$F(x) = f(x) - f(0), \quad G(x) = g(x) - g(0), \quad H(x) = h(x) - f(0) - g(0) \tag{2.24}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz (2.21), (2.22), (2.23) i (2.24) proizlazi

$$\begin{aligned} |H(x + y) - H(x) - H(y)| &= |h(x + y) - h(x) - h(y) + f(0) + g(0)| \\ &\leqslant |h(x + y) - f(x) - g(y)| + |f(x) - h(x) + g(0)| + |g(y) - h(y) + f(0)| \\ &\leqslant 9\delta \end{aligned} \tag{2.25}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uzmemo li u obzir teorem 2.1.2, vrijedi

$$|H(x) - A(x)| \leqslant 9\delta, \tag{2.26}$$

gdje je $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstvena aditivna funkcija. Iz (2.22), (2.24) i (2.25) slijedi nejednakost

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0) - A(x)| &\leqslant |f(x) + g(0) - h(x)| + |h(x) - f(0) - g(0) - A(x)| \\ &= |f(x) + g(0) - h(x)| + |H(x) - A(x)| \\ &\leqslant 12\delta \end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Umetanje $b = f(0)$ u prethodnu nejednakost sada daje (2.14). $\square$

U sljedećem teoremu dokazat ćemo stabilnost funkcijske jednadžbe $f(x+y-\alpha x) - g(xy) = h(x) + k(y)$ u slučaju kada je $\alpha = 0$.

Teorem 2.2.3. *Ako funkcije $f, g, h, k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku nejednadžbu*

$$|f(x+y) - g(xy) - h(x) - k(y)| \leqslant \delta \tag{2.27}$$

za neki $\delta \geqslant 0$ i za sve $x, y \in \mathbb{R}$, tada postoje jedinstvene aditivne funkcije $A_1, A_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|g(x) - 2A_1(x) - \delta_2| &\leqslant 108\,\delta, \\
\left|f(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_1\right| &\leqslant \frac{117}{2}\,\delta, \\
\left|h(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_3\right| &\leqslant \frac{119}{2}\,\delta, \\
\left|k(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_4\right| &\leqslant \frac{119}{2}\,\delta,
\end{aligned}$$

gdje su $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ realne konstante za koje vrijedi nejednakost $|\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4| \leqslant \dfrac{\delta}{2}$.

Dokaz. Stavimo li da je $x = 0$ u (2.27), dobivamo

$$|f(y) - k(y) - b_1| \leqslant \delta \tag{2.28}$$

gdje je $b_1 = g(0) + h(0)$. Umetanjem $y = 0$ u (2.27), dobit ćemo

$$|f(x) - h(x) - b_2| \leqslant \delta, \tag{2.29}$$

gdje je $b_2 = g(0) + k(0)$. Konačno, stavimo li da vrijedi $x = 0$ i $y = 0$ u (2.27), dobivamo

$$|f(0) - g(0) - h(0) - k(0)| \leqslant \delta. \tag{2.30}$$

Korištenjem (2.27), (2.28) i (2.29), vidimo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
&|f(x+y) - g(xy) - f(x) - f(y) + b_1 + b_2| \\
&= |f(x+y) - g(xy) - h(x) - k(y) + h(x) - f(x) + b_2 + k(y) - f(y) + b_1| \\
&\leqslant |f(x+y) - g(xy) - h(x) - k(y)| + |h(x) - f(x) + b_2| + |k(y) - f(y) + b_1| \\
&\leqslant 3\,\delta.
\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$|f(x+y) - g(xy) - f(x) - f(y) + b_1 + b_2| \leqslant 3\,\delta \tag{2.31}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Definirajmo

$$\phi(x) = f(x) - b_1 - b_2. \tag{2.32}$$

Umetnemo li (2.32) u nejednakost (2.31), imamo

$$|\phi(x+y) - g(xy) - \phi(x) - \phi(y)| \leqslant 3\,\delta \tag{2.33}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.33) uočavamo da vrijedi

$$|\phi(x+y+z) - g(xz+yz) - \phi(x+y) - \phi(z)| \leqslant 3\,\delta, \tag{2.34}$$

$$|\phi(x+y+z) - g(xy+xz) - \phi(x) - \phi(y+z)| \leqslant 3\,\delta, \tag{2.35}$$

$$|\phi(y+z) - g(yz) - \phi(y) - \phi(z)| \leqslant 3\,\delta. \tag{2.36}$$

Sada korištenjem (2.33), (2.34), (2.35) i (2.36), dobivamo

$$\begin{aligned} &|g(xy+xz) + g(yz) - g(xy) - g(xz+yz)| \\ = &|\phi(x+y) - g(xy) - \phi(x) - \phi(y)| + |\phi(x+y+z) - g(xz+yz) - \phi(x+y) - \phi(z)| \\ &+ |\phi(x) + \phi(y+z) + g(xy+xz) - \phi(x+y+z)| + |\phi(y) + \phi(z) + g(yz) - \phi(y+z)| \\ \leqslant &\ 12\,\delta \end{aligned}$$

odnosno

$$|g(xy+xz) + g(yz) - g(xy) - g(xz+yz)| \leqslant 12\,\delta \tag{2.37}$$

za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$. Stavimo li $z = 1$ u (2.37), dobivamo

$$|g(xy+x) + g(y) - g(xy) - g(x+y)| \leqslant 12\,\delta$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zbog teorema 2.2.2 možemo pisati

$$|g(x) - A(x) - \delta_2| \leqslant 108\,\delta, \tag{2.38}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstveno aditivno preslikavanje i $\delta_2 = g(0)$. Sada zamjenom $A = 2A_1$ u (2.38), pri čemu je A_1 jedinstveno aditivno preslikavanje jedinstveno određeno sa A, dobivamo

$$|g(x) - 2A_1(x) - \delta_2| \leqslant 108\,\delta \tag{2.39}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Umetanjem $y = -x$ u (2.33), dobit ćemo

$$\left|\phi(0) - g(-x)^2 - \phi(x) - \phi(-x)\right| \leqslant 3\,\delta \tag{2.40}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zatim iz (2.39) i (2.40) slijedi

$$\begin{aligned} &\left|\phi(x) + \phi(-x) - 2A_1(x^2) + g(0) - \phi(0)\right| \\ \leqslant &\left|\phi(x) + \phi(-x) + g(-x^2) - \phi(0)\right| + \left|g(-x^2) - 2A_1(-x^2) - g(0)\right| \\ \leqslant &\ 111\,\delta. \end{aligned}$$

Stoga, vrijedi

$$\left|\phi(x) + \phi(-x) - 2A_1(x^2) + g(0) - \phi(0)\right| \leqslant 111\,\delta \tag{2.41}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamijenimo li x sa $-x$ i y sa $-y$ u (2.33), dobit ćemo

$$|\phi(-(x + y)) - g(xy) - \phi(-x) - \phi(-y)| \leqslant 3\,\delta \tag{2.42}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.33) i (2.41) uočavamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
&|\phi(x + y) - \phi(-(x + y)) - \phi(x) + \phi(-x) - \phi(y) + \phi(-y)| \\
&\leqslant |\phi(x + y) - g(xy) - \phi(x) - \phi(y)| + |\phi(-x) + \phi(-y) + g(xy) - \phi(-(x + y))| \\
&\leqslant 6\,\delta.
\end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$F(x) = \phi(x) - \phi(-x) \tag{2.43}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i primijenimo je u posljednjoj nejednakosti da bismo dobili

$$|F(x + y) - F(x) - F(y)| \leqslant 6\,\delta$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 2.1.2 postoji jedinstvena aditivna funkcija $A_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$|F(x) - A_0(x)| \leqslant 6\,\delta \tag{2.44}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uzmemo li u (2.44) da vrijedi $A_0 = 2A_2$, pri čemu je $A_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivno preslikavanje, a potom iskoristimo i (2.43), dobit ćemo

$$|\phi(x) - \phi(-x) - 2A_2(x)| \leqslant 6\,\delta \tag{2.45}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uočimo da iz (2.41) i (2.45) slijedi

$$\begin{aligned}
&\left|2\phi(x) - 2A_1(x^2) - 2A_2(x) + g(0) - \phi(0)\right| \\
&\leqslant \left|\phi(x) + \phi(-x) - 2A_1(x^2) + g(0) - \phi(0)\right| + |\phi(x) - \phi(-x) - 2A_2(x)| \\
&\leqslant 117\,\delta
\end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Odatle dobivamo

$$\left|\phi(x) - A_1(x^2) - A_2(x) + \frac{1}{2}\left[g(0) - \phi(0)\right]\right| \leqslant \frac{117}{2}\,\delta. \tag{2.46}$$

Kako je $\phi(x) = f(x) - b_1 - b_2 = f(x) - 2g(0) - h(0) - k(0)$, iz nejednakosti (2.46) slijedi

$$\left|f(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_1\right| \leqslant \frac{117}{2}\,\delta, \tag{2.47}$$

gdje je $\delta_1 = \dfrac{1}{2}\left[f(0) + g(0) + h(0) + k(0)\right]$. Jedinstvenost preslikavanja A_2, koje zadovoljava nejednakost (2.47), lako se dokaže.

Potom, iz (2.28) i (2.47) primjećujemo da slijedi

$$\begin{aligned}
&\left|k(x) - A_1(x^2) - A_2(x) + b_1 - \delta_1\right| \\
&\leqslant |k(x) - f(x) + b_1| + \left|f(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_1\right| \\
&\leqslant \frac{119}{2}\,\delta
\end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Stoga vrijedi

$$\left|k(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_4\right| \leqslant \frac{119}{2}\,\delta,$$

gdje je $\delta_4 = b_1 - \delta_1 = \dfrac{1}{2}\left[f(0) - g(0) - h(0) + k(0)\right]$. Konačno, korištenjem (2.29) i (2.47), uočavamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
&\left|h(x) - A_1(x^2) - A_2(x) + b_2 - \delta_1\right| \\
&\leqslant |h(x) - f(x) + b_2| + \left|f(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_1\right| \\
&\leqslant \frac{119}{2}\,\delta
\end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, slijedi

$$\left|h(x) - A_1(x^2) - A_2(x) - \delta_3\right| \leqslant \frac{119}{2}\,\delta,$$

gdje je $\delta_3 = b_2 - \delta_1 = \dfrac{1}{2}\left[f(0) - g(0) + h(0) - k(0)\right]$. Pogledamo li nejednakost (2.30), uočavamo da konstante $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ i δ_4 zadovoljavaju

$$|\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4| = \frac{1}{2}\,|f(0) - g(0) - h(0) - k(0)| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Ovime smo dokazali teorem. □

U sljedećem teoremu ćemo promotriti stabilnost funkcijske jednadžbe (GHE) za $\alpha \neq 0$.

Teorem 2.2.4. *Ako funkcije $f, g, h, k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku nejednadžbu*

$$|f(x + y - \alpha xy) + g(xy) - h(x) - k(y)| \leqslant \delta \tag{2.48}$$

za neki $\delta \geqslant 0$ *i za sve* $x, y \in \mathbb{R}$, *tada postoji jedinstvena aditivna funkcija* $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} |f(x) - A(\alpha x) - a| &\leqslant 54\,\delta, \\ |h(x) - A(\alpha x) - a - b_1| &\leqslant 55\,\delta, \\ |k(x) - A(\alpha x) - a - b_2| &\leqslant 55\,\delta, \\ \left|g(x) - A(\alpha^2 x) - a - b_1 - b_2\right| &\leqslant 57\,\delta, \end{aligned}$$

gdje su $a = f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) - A(1)$, $b_1 = g(0) - k(0)$ *i* $b_2 = g(0) - h(0)$.

Dokaz. Stavimo li da je $y = 0$ u (2.48), dobivamo

$$|f(x) - h(x) + b_1| \leqslant \delta \tag{2.49}$$

gdje je $b_1 = g(0) - k(0)$. Potom stavimo $x = 0$ u (2.48) da bismo dobili

$$|f(y) - k(y) + b_2| \leqslant \delta \tag{2.50}$$

gdje je $b_2 = g(0) - h(0)$. Sada korištenjem (2.48), (2.49) i (2.50) dobivamo

$$\begin{aligned} &|f(x + y - \alpha xy) + g(xy) - f(x) - f(y) - b_1 - b_2| \\ &= |f(x + y - \alpha xy) + g(xy) - h(x) - k(y) + h(x) - f(x) - b_1 + k(y) - f(y) - b_2| \\ &\leqslant |f(x + y - \alpha xy) + g(xy) - h(x) - k(y)| + |h(x) - f(x) - b_1| + |k(y) - f(y) - b_2| \\ &\leqslant 3\,\delta. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$|f(x + y - \alpha xy) + g(xy) - f(x) - f(y) - b_1 - b_2| \leqslant 3\,\delta. \tag{2.51}$$

Kako je $\alpha \neq 0$, možemo uvesti supstituciju $y = \dfrac{1}{\alpha}$ u (2.51) kojom dobivamo

$$\left|g\left(\frac{x}{\alpha}\right) - f(x) - b_1 - b_2\right| \leqslant 3\,\delta \tag{2.52}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamjena x sa αx u (2.52) potom daje

$$|g(x) - f(\alpha x) - b_1 - b_2| \leqslant 3\,\delta \tag{2.53}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz (2.52) i (2.53) dobivamo

$$\begin{aligned}
&|f(x+y-\alpha xy)+f(\alpha xy)-f(x)-f(y)| \\
&= |f(x+y-\alpha xy)+g(xy)-f(x)-f(y)-b_1-b_2+f(\alpha xy)-g(xy)+b_1+b_2| \\
&\leqslant |f(x+y-\alpha xy)+g(xy)-f(x)-f(y)-b_1-b_2| \\
&\quad + |f(\alpha xy)-g(xy)+b_1+b_2| \\
&\leqslant 6\,\delta.
\end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi

$$|f(x+y-\alpha xy)+f(\alpha xy)-f(x)-f(y)| \leqslant 6\,\delta \tag{2.54}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Umetanjem $\dfrac{x}{\alpha}$ umjesto x i $\dfrac{y}{\alpha}$ umjesto y u (2.54), dobivamo

$$\left| f\left(\frac{x+y-xy}{\alpha}\right) + f\left(\frac{xy}{\alpha}\right) - f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right| \leqslant 6\,\delta. \tag{2.55}$$

Uvedemo li funkciju $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$\psi(x) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.56}$$

i primijenimo je na (2.55), uočit ćemo da vrijedi

$$|\psi(x+y-xy)+\psi(xy)-\psi(x)-\psi(y)| \leqslant 6\,\delta$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dakle, prema teoremu 2.2.1 postoji jedinstveno aditivno preslikavanje $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvo da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|\psi(x)-A(x)-a| \leqslant 54\,\delta, \tag{2.57}$$

gdje je $a = \psi(1) - A(1)$. Potom iz (2.56) i (2.57) primjećujemo da slijedi

$$|f(x)-A(\alpha x)-a| \leqslant 54\,\delta, \tag{2.58}$$

gdje je $a = f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) - A(1)$. Iz (2.49) i (2.58) zatim dobivamo

$$\begin{aligned}
&|h(x)-A(\alpha x)-a-b_1| \\
&\leqslant |h(x)-f(x)-b_1| + |f(x)-A(\alpha x)-a| \\
&\leqslant 55\,\delta
\end{aligned}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slično, iz (2.50) i (2.58) slijedi

$$\begin{aligned}
&|k(x) - A(\alpha x) - a - b_2| \\
&\leqslant |k(x) - f(x) - b_2| + |f(x) - A(\alpha x) - a| \\
&\leqslant 55\,\delta.
\end{aligned}$$

Konačno, zbog (2.53) i (2.58) vrijedi

$$\begin{aligned}
&\left|g(x) - A(\alpha^2 x) - a - b_1 - b_2\right| \\
&\leqslant |g(x) - f(\alpha x) - b_1 - b_2| + \left|f(\alpha x) - A(\alpha^2 x) - a\right| \\
&\leqslant 57\,\delta.
\end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. □

2.3 O Hosszú-Jensenovoj funkcijskoj jednadžbi

Na kraju ćemo promotriti još jedan zanimljiv rezultat u kojemu se u vezu dovode lijeva strana jednadžbe (HE) i desna strana jednadžbe (JE), odnosno promotrit ćemo sljedeću funkcijsku jednadžbu:

$$f(x + y - xy) + f(xy) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{HJ}$$

Teorem 2.3.1. *Neka su zadane realna konstanta $\delta \geqslant 0$ i realna funkcija realne varijable g koje zadovoljavaju nejednakost*

$$\left|g(x + y - xy) + g(xy) - 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant \delta$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada postoji aditivna funkcija $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|g(x) - a(x) - g(0)| \leqslant \frac{17}{2}\delta.$$

Dokaz. Neka su zadane fiksna konstanta $\delta \geqslant 0$ i funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Promotrimo nejednakost

$$\left|g(x + y - xy) + g(xy) - 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant \delta, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.59}$$

Najprije pretpostavimo da je $g(0) = 0$. Označimo sa g^+ i g^- parni i neparni dio od g, odnosno

$$g^+(x) := \frac{g(x) + g(-x)}{2}, \quad g^-(x) := \frac{g(x) - g(-x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zamjenom $y = -x$ u (2.59) dobivamo

$$\left| g(x^2) + g(-x^2) \right| \leqslant \delta, \quad x \in \mathbb{R},$$

odakle slijedi da je g^+ omeđena funkcija:

$$\left| g^+(x) \right| \leqslant \frac{1}{2}\delta, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.60}$$

Zbog (2.59) i (2.60) te jednakosti $g^-(x) = 2g(x) - g^+(x)$, $x \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$\left| g^-(x + y - xy) + g^-(xy) - 2g^-\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leqslant 4\,\delta, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.61}$$

Tada za sve $u \in \mathbb{R}$ i $v \leqslant 0$ kvadratna jednadžba

$$x^2 - (u + v)x + v = 0$$

ima točno dva realna rješenja x i y koja zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$x + y = u + v \quad i \quad xy = v.$$

Stoga vrijedi

$$\left| g^-(u) + g^-(v) - 2g^-\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| \leqslant 4\,\delta, \quad u \in \mathbb{R}, v \leqslant 0. \tag{2.62}$$

Uzmimo proizvoljne $u \in \mathbb{R}$ i $v > 0$. Zbog (2.62) i neparnosti od g^- dobivamo

$$\left| g^-(u) + g^-(v) - 2g^-\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| = \left| 2g^-\left(\frac{-u-v}{2}\right) - g^-(-u) - g^-(-v) \right| \leqslant 4\,\delta. \tag{2.63}$$

Slijedi da nejednakost (2.62) vrijedi za sve $u, v \in \mathbb{R}$. Umetanje $v = 0$ i $u = 2x$ daje

$$\left| \frac{g^-(2x)}{2} - g^-(x) \right| \leqslant 2\,\delta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stavimo li $\frac{x}{2}$ umjesto x, imamo

$$\left| g^-(x) - 2g^-\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leqslant 4\,\delta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gornja nejednakost, zajedno sa (2.63), daje

$$\begin{aligned} \left| g^-(u+v) - g^-(u) - g^-(v) \right| &\leqslant \left| g^-(u+v) - 2g^-\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| + \left| g^-(u) + g^-(v) - 2g^-\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| \\ &\leqslant 4\,\delta + 4\,\delta \\ &= 8\,\delta. \end{aligned}$$

Prema teoremu 2.1.2 postoji jedinstvena aditivna funkcija $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom

$$\left|g^-(x) - a(x)\right| \leqslant 8\,\delta, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} |g(x) - a(x)| &= \left|g^+(x) + g^-(x) - a(x)\right| \\ &\leqslant \left|g^+(x)\right| + \left|g^-(x) - a(x)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,\delta + 8\,\delta \\ &= \frac{17}{2}\,\delta. \end{aligned}$$

Ako je $g(0) \neq 0$, gledamo funkciju $x \mapsto g(x) - g(0)$ umjesto g. □

Korolar 2.3.2. *Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeću jednadžbu*

$$g(x + y - xy) + g(xy) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada postoji aditivna funkcija $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$g(x) = a(x) + g(0).$$

Kako smo dokazali da je rješenje funkcijske jednadžbe (HJ), kao i u slučajevima (HE) i (JE), također funkcija oblika $f(x) = A(x) + a$, pri čemu je A aditivna funkcija i a realna konstanta, zaključujemo da su sve tri spomenute funkcijske jednadžbe međusobno ekvivalentne.

Bibliografija

[1] D. Blanuša, *The functional equation* $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$, Aequationes Math. 5 (1970), 63 – 67.

[2] P. Kannapan, *Functional equations and inequalities with applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[3] Z. Kominek, *On a Jensen-Hosszú equation I*, Ann. Math. Sil. 23 (2009), 57–60.

[4] P. K. Sahoo, P. Kannappan, *Introduction to functional equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

Sažetak

Hosszúova funkcijska jednadžba je jednadžba oblika

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Glavninu ovog rada predstavlja rješenje Hosszúove funkcijske jednadžbe i dokaz njezine stabilnosti, te rješenje i stabilnost njezine poopćene varijante

$$f(x + y - \alpha xy) + g(xy) = h(x) + k(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokazano je da je svako rješenje Hosszúove funkcijske jednadžbe oblika

$$f(x) = A(x) + a,$$

pri čemu je A aditivno preslikavanje i a realna konstanta. Pored toga prikazana je i veza Hosszúove funkcijske jednadžbe s nekim drugim poznatim funkcijskim jednadžbama. Konkretno, dan je dokaz ekvivalentnosti Hosszúove i Jensenove funkcijske jednadžbe te Hosszúove i tzv. Hosszú-Jensenove funkcijske jednadžbe.

Summary

Hosszú functional equation is an equation of the form

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

The main goal of this thesis is to present the solution of the Hosszú functional equation and the proof of its stability, as well as the solution and stability of its generalization, the functional equation

$$f(x + y - \alpha xy) + g(xy) = h(x) + k(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

It is proved that every solution of the Hosszú functional equation is of the form

$$f(x) = A(x) + a,$$

where A is an additive function and a is an arbitrary constant. Furthermore, relations to some other well-known functional equations have also been mentioned. Specifically, a proof of the equivalency of the Hosszú and the Jensen functional equation is also presented, as well as the equivalency of the Hosszú and the so-called Hosszú-Jensen functional equation.

Životopis

Rođena sam 1. kolovoza 1994. godine u Čapljini, malom gradu na jugu Bosne i Hercegovine. Prvih deset godina života provela sam u Stocu, gdje sam završila prva dva razreda osnovne škole. Selidbom u Čapljinu promijenila sam i školu, pa tako ostatak osnovnoškolskog obrazovanja završavam u Osnovnoj školi Vladimira Pavlovića u Čapljini. Potom 2009. godine upisujem opću gimnaziju u Metkoviću u Hrvatskoj, nedaleko od Čapljine u kojoj sam tada živjela.

Osnovnu i srednju školu završila sam odličnim uspjehom, tijekom kojih sam se u slobodno vrijeme bavila različitim izvannastavnim aktivnostima. Dugi niz godina rekreativno sam trenirala odbojku, uz koju sam odmalena razvila predanost fizički aktivnom životu. Velike afinitete imam i prema glazbi (amaterski sviram klavijature i gitaru učeći pomoću interneta i pohađajući tečajeve), jezicima, psihologiji i učenju općenito. U osnovnoj i srednjoj školi zadovoljstvo mi je bilo sudjelovati na natjecanjima, naročito iz matematike i hrvatskog jezika.

Osjetivši nastavnički poziv, obrazovanje nastavljam na Matematičkom odsjeku (nastavnički smjer) u sklopu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Pričljiva sam i vesela osoba, znatiželjnog karaktera i natjecateljskog duha. Volim čitati o inspirativnim temama i ljudima te provoditi vrijeme u prirodi.