Redovi brojeva i konvergencija

Kolačko, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Kolačko

REDOVI BROJEVA I KONVERGENCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu dane su osnovne definicije, svojstva i teoremi o nizovima i redovima realnih brojeva. Budući da je naglasak rada na kriterijima konvergencije redova, u prvom dijelu rada spomenuta je teorija potrebna za razumijevanje brojevnih nizova i redova, a nakon toga su obrađeni razni kriteriji pomoću kojih se može ispitati konvergencija nekog reda. Posebno su obrađeni redovi s pozitivnim, a posebno redovi s proizvoljnim članovima. Kod redova s pozitivnim članovima naveli smo neke od najvažnijih kriterija za ispitivanje konvergencije, kao što su d'Alembertov kriterij, Cauchyjev kriterij i kriterij uspoređivanja redova, koji se obično proučavaju u okviru predmeta Diferencijalni i integralni račun. Osim njih, naveli smo još nekoliko kriterija te smo na primjerima ilustrirali kako se primjenjuje svaki od njih. Kod redova s proizvoljnim članovima spomenuli smo jednu vrlo važnu klasu redova, a to su alternirajući redovi. Za ispitivanje konvergencije takvih redova koristi se Leibnizov kriterij, koji smo također naveli u radu i ilustrirali njegovu primjenu na različitim primjerima. Druga klasa redova s proizvoljnim članovima koje spominjemo, su redovi kod kojih je opći član oblika $a_n b_n$. Ovdje smo ponovno naveli dva važna kriterija za ispitivanje konvergencije, Dirichletov kriterij i Abelov kriterij te nekoliko karakterističnih primjera.

Poglavlje 1

Pojam niza i reda

U ovom poglavlju iznosimo osnovne pojmove i svojstva nizova i redova. Korištena je literatura [3]).

Funkcija a sa skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u neprazni skup S zove se **niz** u skupu S. Umjesto $a(n)$ redovito pišemo a_n te za a_n kažemo da je **opći član** niza a. Također, umjesto $a : \mathbb{N} \to S$ pišemo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće (a_n), a također i $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Definicija 1.0.1. *Za niz $(a_n, n \in \mathbb{N})$ realnih brojeva kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji realan broj a_0, sa sljedećim svojstvom: Za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da je $|a_n - a_0| < \epsilon$ za svaki prirodni broj n za koji je $n > n_0$. Taj broj a_0 zovemo granična vrijednost ili* ***limes niza*** *(a_n), a za niz (a_n) kažemo da konvergira broju a_0. Za a_0 koristimo oznaku $\lim a_n$.*

Teorem 1.0.2. *([3]) Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva. Tada vrijedi:*
(1) Niz $n \mapsto a_n + b_n$ je konvergentan i

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n;$$

(2) Niz $n \mapsto a_n - b_n$ je konvergentan i

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n;$$

(3) Za svako $c \in \mathbb{R}$ niz $n \mapsto c \cdot a_n$ je konvergentan i

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n;$$

(4) Niz $n \mapsto a_n \cdot b_n$ je konvergentan i

$$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n);$$

(5) Ako je $b_n \neq 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim b_n \neq 0$*, onda je i niz* $n \mapsto \dfrac{a_n}{b_n}$ *konvergentan i*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n};$$

(6) Niz $n \mapsto |a_n|$ *je konvergentan i*

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|;$$

(7) Svaki podniz $k \mapsto a_{p(k)}$ *niza* (a_n) *konvergira i* $\lim a_{p(k)} = \lim a_n$*;*
(8) Ako je $a_n \leq b_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*, onda je* $\lim a_n \leq \lim b_n$*.*

Teorem 1.0.3. *([3]) Ako je a kompleksan broj i* $|a| < 1$*, onda niz* (a^n) *konvergira i* $\lim a^n = 0$.

Dokaz. Ako je $a = 0$, onda je $a^n = 0$ za svaki n, pa tvrdnja slijedi. Ako je $a \neq 0$, onda je skup $A = \{|a^n| : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen odozdo, dakle $\inf A = \alpha \geq 0$. Iz $0 \leq \alpha \leq |a^n|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi $0 \leq \alpha \leq |a^{n+1}|$, što daje $\dfrac{\alpha}{|a|} \leq |a^n|$ za svaki n. Ovo pokazuje da je $\dfrac{\alpha}{|a|}$ minoranta skupa A, pa je $\dfrac{\alpha}{|a|} \leq \alpha$, tj. $\alpha(1 - |a|) \leq 0$. Budući da je $1 - |a| > 0$ i $\alpha \geq 0$ iz $\alpha(1 - |a|) \leq 0$, zaključujemo da je $\alpha = 0$. Iz $\inf A = 0$ i činjenice da niz $|a^n|$ strogo pada dobivamo $|a^n| \to 0$. □

Za zadani niz (a_n) možemo definirati takozvani niz parcijalnih suma (s_n) na sljedeći način:

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Također, poznavajući niz (s_n) možemo dobiti i niz (a_n):

$$\begin{aligned} a_1 &= s_1 \\ a_2 &= s_2 - s_1 \\ a_3 &= s_3 - s_2 \\ &\vdots \\ a_n &= s_n - s_{n-1}. \end{aligned}$$

Definicija 1.0.4. *Neka je* (a_n) *niz realnih ili kompleksnih brojeva. Red, u oznaci*

$$\sum a_n$$

ili $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ je uređen par $((a_n), (s_n))$. Za a_n kažemo da je opći član reda, za s_n da je n-ta parcijalna suma reda, dok red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

zovemo n-ti ostatak reda.

Primjer 1.0.5. *Primjeri nekih redova.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n &= 1 + 2 + 3 + ... + n + ... \text{ (aritmetički red)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \text{ (geometrijski red)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \text{ (harmonijski red)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ... \text{ (hiperharmonijski red)} \\
\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... \\
\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...
\end{aligned}$$

Definicija 1.0.6. *Kažemo da je red $\sum b_n$ **majoranta** reda $\sum a_n$ ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$.*
*Istovremeno kažemo da je red $\sum a_n$ **minoranta** reda $\sum b_n$.*

Primjer 1.0.7. *Pogledajmo sljedeće redove:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Budući da za svaki $n \geq 1$ vrijedi:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

zaključujemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, zatim red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je majoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i minoranta reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Poglavlje 2

Konvergencija reda

U ovom poglavlju definiramo konvergenciju reda i navodimo osnovna svojstva konvergentnih redova. Također definiramo apsolutno konvergentne redove te navodimo kriterij uspoređivanja redova. Korištena je literatura [3]).

2.1 Definicija konvergencije reda

Definicija 2.1.1. *Za red* $\sum a_n$ *realnih ili kompleksnih brojeva kažemo da je konvergentan ako je niz* (s_n) *parcijalnih suma tog reda konvergentan, odnosno ako postoji limes* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$*. Broj* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ *se zove suma reda i označava sa*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Red $\sum a_n$ *je divergentan ako je niz* (s_n) *divergentan. Red* $\sum a_n$ *realnih brojeva divergira k* $+\infty$*, odnosno k* $-\infty$ *ako niz* (s_n) *divergira k* $+\infty$*, odnosno k* $-\infty$ *i tada pišemo* $\sum a_n = +\infty$*, odnosno* $\sum a_n = -\infty$*.*

Nakon što smo definirali konvergenciju reda, postavlja se pitanje je li proizvoljan red $\sum a_n$ konvergentan ili nije te ako je konvergentan kako možemo odrediti njegovu sumu. Najprije ćemo pokazati kako se može ispitati konvergencija reda pomoću definicije konvergencije, tj. formiranjem niza parcijalnih suma, a zatim ćemo navesti i nužan uvjet konvergencije pomoću kojega možemo odmah odrediti divergira li zadani red.

Primjer 2.1.2. *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Primijetimo najprije da opći član zadanog reda možemo zapisati u obliku:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Koristeći se tim zapisom formirajmo sada niz pripadnih parcijalnih suma:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{1\cdot 2}\\
s_2 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}\\
s_3 &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}\\
&\vdots\\
s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}\\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Dokažimo metodom matematičke indukcije da vrijedi:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Za $n = 1$ *imamo* $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{1+1}$, *tj.* $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, *pa baza indukcije očito vrijedi.* *Pretpostavimo sada da tražena jednakost vrijedi za neki* $k \in \mathbb{N}$, *tj. da je:*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

U koraku indukcije pokazujemo da tada jednakost vrijedi i za prirodni broj $n = k+1$, *tj. da je:*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= (\textit{po pretpostavci})\\ &= 1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= 1+\frac{-k-2+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= 1-\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= 1-\frac{1}{k+2}.\end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

dakle red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ *konvergira i ima sumu* 1.

Primjer 2.1.3. *Ispitajmo konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Opći član zadanog reda možemo zapisati u obliku:

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)-\ln n.$$

Ponovno formiramo niz pripadnih parcijalnih suma:

$$\begin{aligned}s_1 &= \ln 2-\ln 1 = \ln 2\\ s_2 &= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2) = \ln 3\\ s_3 &= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3) = \ln 4\\ &\vdots\\ s_n &= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)\\ &= \ln(n+1)-\ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

Matematičkom se indukcijom dokazuje da za svaki $n\in\mathbb{N}$ *vrijedi* $s_n = \ln(n+1)$.

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Dakle, niz parcijalnih suma ne konvergira pa ne konvergira niti promatrani red, ali zbog toga što je $\lim s_n = +\infty$ *pišemo* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Teorem 2.1.4. *([3])**Nužan uvjet konvergencije reda***

Ako red $\sum a_n$ *konvergira, onda niz* (a_n) *konvergira nuli, tj.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $\sum a_n$ konvergentan red te neka je s njegova suma i (s_n) pripadni niz parcijalnih suma. Kako limes niza ne ovisi o pomicanju indeksa za konačan broj mjesta, vrijedi $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ i $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Prema definiciji parcijalnih suma znamo da vrijedi $a_n = s_n - s_{n-1}$ za $n = 2, 3, \ldots$ pa graničnim prijelazom dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Napomena 2.1.5. *Prethodni teorem govori o nužnom uvjetu konvergencije nekog reda. No, taj uvjet nije i dovoljan, dakle obrat teorema ne vrijedi. To lako možemo vidjeti promatrajući Primjer 2.1.3.. Vidimo da vrijedi* $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, *tj. da je zadovoljen nužan uvjet konvergencije, ali pokazali smo da red nije konvergentan. Pogledajmo sada još jedan primjer.*

Primjer 2.1.6. *Harmonijski red*

$$\sum_{N} \frac{1}{n}$$

također ispunjava uvjet nužnosti jer je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *no taj red je divergentan. Da bismo to pokazali, potrebno je pokazati da niz parcijalnih suma* (s_n) *divergira. U tu svrhu, dovoljno je pronaći podniz niza* (s_n) *koji divergira, pa će i sam niz* (s_n) *divergirati. Neka je taj podniz sastavljen od svih članova niza* (s_n) *s indeksima oblika* 2^n. *Sada imamo:*

$$
\begin{aligned}
s_{2^1} &= 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \\
s_{2^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{2} \\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{4}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{4}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \\
&\vdots \\
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{n+2}{2} \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Gornja nejednakost se također dokazuje matematičkom indukcijom. Dakle, pokazali smo da je $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, *odnosno da red* $\sum_N \frac{1}{n}$ *divergira.*

2.2 Osnovna svojstva konvergentnih redova

Teorem 2.2.1. *([3]) Neka su* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *bilo koja dva konvergentna reda sa sumama* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s^{'}$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s^{''}$. *Tada su redovi*

$$\sum (a_n + b_n), \quad \sum (a_n - b_n), \quad \sum \alpha a_n$$

konvergentni za svako $\alpha \in \mathbb{C}$ *i imaju sume:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s^{'} + s^{''}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s^{'} - s^{''}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha s^{'}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Stavimo:

$$s_n^{'} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, s_n^{''} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

te neka je

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{'} = s^{'}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{''} = s^{''}.$$

Ako sa s_n označimo n-tu parcijanu sumu reda $\sum(a_n + b_n)$ tada imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}((a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}(s_n^{'} + s_n^{''}) \\
&= \lim_{n\to\infty} s_n^{'} + \lim_{n\to\infty} s_n^{''} \\
&= s^{'} + s^{''}.
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i da je $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s^{'} - s^{''}$.

Neka je ponovno $s_n^{'} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\lim_{n\to\infty} s_n^{'} = s^{'}$ i neka je $S_n = \alpha a_1 + \alpha a_2 + ... + \alpha a_n$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}(\alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n) \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} s_n^{'} \\
&= \alpha s^{'}.
\end{aligned}$$

□

U prvom poglavlju smo pod primjere nekih redova nabrojali i geometrijski red. To je red

$$\sum q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$$

u kojem je kvocijent susjednih članova konstantan, tj.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Sljedeći teorem reći će nam nešto više o konvergenciji geometrijskog reda.

Teorem 2.2.2. *([3]) Ako je $q \in \mathbb{C}$ i $|q| < 1$, onda geometrijski red*

$$\sum q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$$

konvergira i ima sumu $\frac{1}{1-q}$. Ako je $|q| \geq 1$, onda red divergira.

Dokaz. Pogledajmo prvi slučaj, kada je $|q| < 1$. Iz $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$ dobivamo:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n.$$

Sada je prema Teoremu 1.0.3. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, pa dobivamo da je suma s geometrijskog reda jednaka

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Nadalje, ako je $|q| \geq 1$, tada je $|q^n| \geq 1$, dakle opći član reda $\sum q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$ ne teži k nuli, dakle nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije pa taj red divergira. $\square$

2.3 Uspoređivanje redova. Apsolutno konvergentni redovi.

Kod ispitivanja konvergencije reda $\sum a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) često promatramo red $\sum |a_n|$, tj. red s pozitivnim članovima. Zatim taj red s pozitivnim članovima uspoređujemo s nekim od redova za koje znamo konvergiraju li ili ne, kako bismo odredili konvergenciju početnog reda.

Specifičnost redova s pozitivnim članovima je u tome što je niz (s_n) parcijalnih suma tih redova rastući, tj. vrijedi

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, da bismo pokazali konvergenciju niza (s_n), dovoljno je pokazati njegovu ograničenost (jer je svaki monoton i ograničen niz konvergentan). Također, članove konvergentnog reda s pozitivnim članovima možemo po volji permutirati, a da se suma reda ne promijeni.

Definicija 2.3.1. *Za red $\sum a_n$ kažemo da je* ***red s pozitivnim članovima*** *ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 2.3.2. *Za red $\sum a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) kažemo da je* ***apsolutno konvergentan*** *ako je red $\sum |a_n|$ konvergentan. Red $\sum a_n$ je* ***uvjetno konvergentan*** *ako je red $\sum a_n$ konvergentan, ali red $\sum |a_n|$ je divergentan.*

Teorem 2.3.3. *([3]) I.) Ako je niz parcijalnih suma reda $\sum a_n$ s pozitivnim članovima ograničen, onda taj red konvergira i vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

II.) Ako red $\sum a_n$ s pozitivnim članovima konvergira, onda njegova suma ne ovisi o poretku članova. Preciznije, tada konvergira red $\sum a_{\sigma(n)}$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

za svaku bijekciju σ s $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$.

Dokaz. I.) Budući da je

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n,$$

zaključujemo da niz (s_n) raste, a jer je odozgo ograničen, on konvergira te vrijedi $s = \lim s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

II.) Niz $(s_n^{'})$ parcijalnih suma reda $\sum a_n^{'}$, $a_n^{'} = a_{\sigma(n)}$ također raste. Uzmimo sada za prirodni broj n prirodne brojeve p i q takve da je

$$\sigma(1) < p, \sigma(2) < p, \ldots, \sigma(n) < p$$

i

$$\tau(1) < q, \tau(2) < q, \ldots, \tau(n) < q,$$

gdje je $\tau = \sigma^{-1}$ bijekcija s $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Budući da su brojevi $a_1^{'}, \ldots, a_n^{'}$ među brojevima $a_1, \ldots, a_p$, to je

$$s_n^{'} = a_1^{'} + \cdots + a_n^{'} \leq a_1 + \cdots + a_p = s_p$$

i isto tako je

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = a_{\sigma\tau(1)} + \cdots + a_{\sigma\tau(n)} = a_{\tau(1)}^{'} + \cdots + a_{\tau(n)}^{'} \leq a_1^{'} + \cdots + a_q^{'} = s_q^{'}.$$

Sada iz $s_n^{'} \leq s_p \leq s$ slijedi da je niz $(s_n^{'})$ konvergentan te da za njegovu sumu $s^{'}$ vrijedi $s^{'} \leq s$. Nadalje, $s_n \leq s_q^{'} \leq s^{'}$ povlači da je $s \leq s^{'}$, dakle $s^{'} = s$. □

Teorem 2.3.4. *([3])**Kriterij uspoređivanja redova***

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji $K > 0$ takav da je

$$a_n \leq K \cdot b_n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Tada vrijedi:

(i) Ako red $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$ te vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq K \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(ii) Ako red $\sum a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum b_n$.

Dokaz. Neka je

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad s_n^{'} = b_1 + \cdots + b_n.$$

Nizovi (s_n) i $(s_n^{'})$ su rastući. Iz $a_n \leq K \cdot b_n$ slijedi $s_n \leq K \cdot s_n^{'}$. Ako niz $(s_n^{'})$ konvergira k broju $s^{'}$, onda je $s^{'} = \sup s_n^{'}$, pa nam $s_n \leq K \cdot s^{'}$ daje ograničenost niza (s_n). Sada, prema Teoremu 2.3.3. taj niz konvergira prema $\sup s_n \leq K \cdot s^{'}$.

Ako niz (s_n) divergira, onda je $\lim_n s_n = \sup_n s_n = +\infty$ pa je tim više i $\lim_n s_n^{'} = \sup_n s_n^{'} = +\infty$. □

Napomena 2.3.5. *Uvjet $a_n \leq K \cdot b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$ može se oslabiti u smislu da za konačno mnogo n taj uvjet ne mora vrijediti, tj. možemo ga zamijeniti ovim uvjetom "postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq K \cdot b_n$ za svaki $n \geq n_0$."*

Gore spomenuti teorem nam govori da ako želimo pokazati da neki red $\sum a_n$ konvergira, dovoljni je svaki član niza a_n odozgo ograničiti članom niza b_n čiji red $\sum b_n$ konvergira. S druge strane, ako želimo pokazati da neki red $\sum b_n$ divergira, dovoljno je svaki član niza b_n odozdo ograničiti članom niza a_n čiji red $\sum a_n$ divergira. Dakle, zadani red uspoređujemo s nekim drugim redom. Najčešće se za uspoređivanje koriste sljedeći redovi:

1) Harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira,

2) Hiperharmonijski red $\sum \frac{1}{n^p}$ koji konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leq 1$,

3) Geometrijski red $\sum q^n$ koji konvergira za $|q| < 1$, a divergira za $|q| \geq 1$.

Konvergenciju harmonijskog i geometrijskog reda već smo razmatrali, dok ćemo hiperharmonijski red promatrati u sljedećem dijelu teksta.

Primjer 2.3.6. *Red $\sum \frac{1}{n^2}$ je konvergentan.*

Da bismo pokazali da izrečena tvrdnja zaista vrijedi, koristit ćemo kriterij uspoređivanja redova, tj. ograničit ćemo sve članove niza $a_n = \frac{1}{n^2}$ članovima nekog niza za koji znamo da je konvergentan.

Budući da je $(n+1)^2 > n(n+1)$, slijedi:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

U Primjeru 2.1.2. smo pokazali da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, pa prema usporednom kriteriju slijedi da red $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ također konvergira.

Primjer 2.3.7. *Ispitajmo konvergentnost reda $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.*

U ovom primjeru ćemo članove niza $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *ograničiti odozdo članovima niza za koji znamo konvergira li ili divergira.*

Budući da vrijedi nejednakost $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i da smo u Primjeru 2.1.6. pokazali da je harmonijski red* $\sum \dfrac{1}{n}$ *divergentan, po usporednom kriteriju slijedi da je i red* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *divergentan.*

Primjer 2.3.8. *Ispitajmo konvergentnost reda* $\sum \dfrac{n}{(n+1)^3}$.

Znamo da vrijedi

$$\frac{n}{(n+1)^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Ovime smo zadani red usporedili s hiperharmonijskim redom u slučaju kada je $p = 2$*, za koji smo u Primjeru 2.3.6. dokazali da konvergira. Dakle, prema usporednom kriteriju zaključujemo da i zadani red konvergira.*

Teorem 2.3.9. *([3]) Neka su* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *redovi takvi da je* $a_n > 0, \quad b_n > 0$ *za svaki prirodan broj n. Ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

za svaki prirodan broj $n \geq n_0$*, onda iz konvergencije reda* $\sum b_n$ *slijedi konvergencija reda* $\sum a_n$*, a iz divergencije reda* $\sum a_n$ *slijedi divergencija reda* $\sum b_n$*.*

Dokaz. Ako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

za $n \geq n_0$ i svi brojevi su pozitivni, tada je

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n},$$

za $n \geq n_0$, tj. niz $\left(\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$ pada i odozgo je ograničen s prvim članom, tj. s $\dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = K$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ imamo:

$$\frac{a_n}{b_n} \leq K,$$

tj.

$$a_n \leq Kb_n.$$

Ako red $\sum b_n$ konvergira, onda prema kriteriju o uspoređivanju konvergira i red $\sum a_n$. Ako red $\sum a_n$ divergira, tada divergira i red $\sum b_n$. □

Teorem 2.3.10. *([3]) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.*

i) Ako red $\sum |a_n|$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$ i vrijedi

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

ii) Ako konvergira red $\sum |a_n|$ i ako je σ bijekcija sa $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, onda konvergira i red $\sum a_{\sigma(n)}$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz. I. Uzmimo najprije da je (a_n) niz realnih brojeva i definirajmo nizove

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{ako je } a_n < 0 \end{cases}$$

Sada su (a_n^+) i (a_n^-) nizovi s pozitivnim članovima i

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da po pretpostavci red $\sum |a_n|$ konvergira i da je

$$a_n^+ \leq |a_n|, \quad a_n^- \leq |a_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

to prema Teoremu 2.3.4. redovi $\sum a_n^+$ i $\sum a_n^-$ konvergiraju. Neka su s^+ i s^- njihove sume. Prema Teoremu 2.2.1. je

$$s^+ - s^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

što nam pokazuje da je red $\sum a_n$ konvergentan te da je njegova suma jednaka razlici zbroja svih pozitivnih i zbroja svih negativnih članova toga reda. Prema Teoremu 2.3.3. imamo

$$s^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+, \quad s^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-,$$

što povlači

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s^+ - s^- = \sum_{n=1}^{\infty}(a^+_{\sigma(n)} - a^-_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

II. Neka je sada (a_n) niz kompleksnih brojeva tj. neka je $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ $(\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R})$. Iz

$$|\alpha_n| \leq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n|$$

slijedi da je $\sum |\alpha_n| \leq \sum |a_n|$, dakle, red $\sum |\alpha_n|$ konvergira. Prema I. konvergencija reda $\sum |\alpha_n|$ povlači konvergenciju reda $\sum \alpha_n$. Isto tako $|\beta_n| \leq |a_n|$ povlači konvergenciju reda $\sum |\beta_n|$, a time i konvergenciju reda $\sum \beta_n$. Sada iz konvergencije redova $\sum \alpha_n$ i $\sum \beta_n$ slijedi konvergencija reda $\sum(\alpha_n + i\beta_n) = \sum a_n$.

Za svako $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

što za $k \to \infty$ daje

$$\lim \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Budući da red $\sum a_n$ konvergira, to je:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|.$$

Dakle,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Nadalje je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(n)} + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{\sigma(n)} + i\beta_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

□

Napomena 2.3.11. *Teorem 2.3.10. možemo iskazati i na sljedeći način: Apsolutno konvergentan red je konvergentan. Članove apsolutno konvergentnog reda možemo po volji permutirati, a da se suma reda ne promijeni.*

Teorem 2.3.12. *([3]) Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s članovima iz skupa $\mathbb{C}$. Neka postoji $K > 0$ takav da je:*

$$|a_n| \leq K \cdot |b_n|$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Ako red $\sum b_n$ apsolutno konvergira, onda i red $\sum a_n$ apsolutno konvergira, dakle, red $\sum a_n$ konvergira.

Dokaz. Ako red $\sum b_n$ apsolutno konvergira, tada konvergira red $\sum |b_n|$. No, za red $\sum |a_n|$ vrijedi da je $|a_n| \leq K \cdot |b_n|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa prema teoremu o uspoređivanju redova slijedi da i red $\sum |a_n|$ konvergira. To znači da red $\sum a_n$ apsolutno konvergira. $\square$

Poglavlje 3

Kriteriji za konvergenciju reda

3.1 Redovi s pozitivnim članovima

U prethodnom smo poglavlju vidjeli kako možemo ispitati konvergentnost nekog reda koristeći se kriterijem uspoređivanja. Osim tog kriterija, postoje mnogi drugi, a u ovom ćemo poglavlju navesti neke od njih. Kriterije ćemo i dokazati, a nakon svakog od njih stavili smo i primjere koji ilustriraju primjenu odgovarajućeg kriterija. Primjere smo dijelom preuzeli iz literature ([3]), ([2]), ([4]) i [6]) ili smo ih sami osmislili.

Teorem 3.1.1. *([3])**D'Alembertov kriterij** , Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.*
I.) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ takvi da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1,$$

za svaki $n \geq m$, onda red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.
II.) Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1,$$

za svaki $n \geq m$, onda red $\sum a_n$ divergira.

Dokaz. I.) Iz $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ dobivamo sljedeće:

$$|a_{m+1}| \leq q \cdot |a_m|, \quad |a_{m+2}| \leq q \cdot |a_{m+1}| \leq q^2 \cdot |a_m|, \quad |a_{m+3}| \leq q \cdot |a_{m+2}| \leq q^3 \cdot |a_m|, \ldots$$

tj.

$$|a_{m+k}| \leq q^k \cdot |a_m|, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Dakle, red $\sum |a_{m+k}|$ može se usporediti s geometrijskim redom. Budući da geometrijski red $\sum q^k$ apsolutno konvergira za $q \in [0, 1)$ slijedi da red $\sum a_{m+k}$ apsolutno konvergira, pa stoga i red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

II.) Iz $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, za svaki $n \geq m$ dobivamo:

$$0 < |a_m| \leq a_{m+1}| \leq |a_{m+2}| \leq \cdots \leq |a_{m+k}| \leq \ldots,$$

što znači da nije ispunjen nužan uvjet konvergencije (opći član reda $\sum a_n$ ne konvergira), pa prema Teoremu 2.1.4. zaključujemo da taj red divergira. □

Primjer 3.1.2. *Red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{3^n}$ *je konvergentan.*

Opći član reda je $a_n = \dfrac{n+4}{3^n}$. *Promotrimo omjer:*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+5}{3^{n+1}}}{\frac{n+4}{3^n}}\right| = \left|\frac{(n+5)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(n+4)}\right| = \frac{n+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+4} = \frac{n+5}{3} \cdot \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+5}{n+4}.$$

Razlomak $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{n+5}{n+4}$ *je strogo manji od* $\dfrac{1}{2}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *tj.*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{2} = q < 1,$$

pa red konvergira prema d'Alembertovom kriteriju.

Teorem 3.1.3. *([3])**Prvi Cauchyjev kriterij***

Neka je (a_n) *niz kompleksnih brojeva.*

I.) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ *takvi da je*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

za svaki $n \geq m$, *onda red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*

II.) Ako je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$$

za beskonačno indeksa n, *onda red* $\sum a_n$ *divergira.*

Dokaz. I.) Iz $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ dobivamo da je $|a_n| \leq q^n$ za $n \geq m$, pa je dakle

$$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^n}{1-q}.$$

Budući da je red $\sum q^n$ konvergentan (jer je $q < 1$), prema usporednom kriteriju zaključujemo da je i red $\sum a_n$ apsolutno konvergentan.

II.) Ako $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ vrijedi za beskonačno indeksa n, tada opći član reda $\sum a_n$ ne konvergira k nuli, dakle nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije, pa red $\sum a_n$ divergira. $\square$

Primjer 3.1.4. *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ *je konvergentan.*

U ovom primjeru je opći član reda $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. *Promotrimo sada:*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1}.$$

Razlomak $\frac{n}{2n+1}$ *je manji od* $\frac{1}{2}$, *dakle*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} = q < 1,$$

pa red konvergira prema Cauchyjevom kriteriju.

Teorem 3.1.5. *([1])**Drugi Cauchyjev kriterij***

Red $\sum a_n$ *konvergira ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n > n_0$ *i za svaki* $p \in \mathbb{N}$ *vrijedi:*

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je red $\sum a_n$ je konvergentan. Tada je niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan, tj. postoji s takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_1$ vrijedi

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

To znači da za $\frac{\varepsilon}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_0$ vrijedi

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sume s_{n+p} gdje je $p \in \mathbb{N}$ su isto sume za koje vrijedi ta nejednakost, pa i za njih vrijedi

$$\left|s_{n+p} - s\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Znači, za $n > n_0$ i $p \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|s_{n+p} - s + s - s_n\right| \leq \left|s_{n+p} - s\right| + |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dokažimo sada drugi smjer. Iz pretpostavke teorema slijedi da vrijedi ova činjenica: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $p \in \mathbb{N}$ je

$$\left|s_{n_0+p+1} - s_{n_0+1}\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da red $\sum a_n$ divergira, tj. da niz (s_n) nije konvergentan. To znači da za svaki realni broj L postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $n_1 \in \mathbb{N}$ možemo naći $n > n_1$ takav da je

$$|s_n - L| > \varepsilon.$$

Konkretno, za broj $L = s_{n_0+1}$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $n_1 \in \mathbb{N}$, a time i za $n_0 + 1$ možemo naći $n > n_0 + 1$ takav da je

$$\left|s_n - s_{n_0+1}\right| > \varepsilon.$$

Budući da je $n > n_0 + 1$, to znači da ga možemo pisati u obliku $n = n_0 + 1 + p$ gdje je p neki prirodni broj pa gornja nejednakost postaje

$$\left|s_{n_0+1+p} - s_{n_0+1}\right| > \varepsilon,$$

što je u kontradikciji s (3.1). Dakle, pretpostavka da je red $\sum a_n$ divergentan nije istinita, tj. red $\sum a_n$ konvergira.

□

Primjer 3.1.6. *Dokažimo da je red* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ *konvergentan.*

Odredit ćemo broj n_0 *takav da za svaki* $n > n_0$ *i svaki* $p \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\left|s_{n+p} - s_n\right| < \varepsilon$. *Imamo:*

$$\begin{aligned}
\left|s_{n+p} - s_n\right| &= \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\
&\le \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Dakle, $\left|s_{n+p} - s_n\right| < \dfrac{1}{n}$. *Pitamo se kada je* $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, *tj. kada je* $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Vidimo da je dovoljno uzeti* $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Primjer 3.1.7. *Dokažimo da je red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *divergentan.*

Ponovno ćemo iskoristiti Drugi Cauchyjev kriterij. Za broj ε *ćemo uzeti* $\frac{1}{4}$ *i pokazati da ne postoji takav* n_0 *sa svojstvom da je* $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$, *za* $n > n_0,\ p \in \mathbb{N}$. *Izračunajmo najprije razliku parcijalnih suma:*

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}. \tag{3.2}$$

Kako je $(n+k)(n+k+1) < (n+k+1)(n+k+1),\ \ k \in \mathbb{N}$, *slijedi:*

$$\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+k+1)(n+k+1)}},$$

tj.

$$\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} > \frac{1}{n+k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Iz (3.2) slijedi:

$$|s_{2n} - s_n| > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2+\frac{1}{n}} > \frac{1}{4} = \varepsilon$$

i time smo dokazali da je red divergentan.

Da bismo ispitali konvergentnost zadanog reda, možemo koristiti više različitih kriterija, no odabiremo uvijek onaj najprikladniji. Ukoliko se u općem članu reda $\sum a_n$ nalazi indeks n istovremeno u bazi i u eksponentu, tada je praktično koristiti Cauchyjev kriterij. Također, Cauchyjev kriterij je jači od d'Alemberovog tj. ako d'Alembertov kriterij daje odluku o konvergentnosti nekog reda, tada odluku daje i Cauchyjev kriterij. D'Alembertov kriterij se koristi gotovo uvijek kada se u općem članu reda $\sum a_n$ pojavljuje indeks n u obliku faktorijele.

No, često se za ispitivanje konvergentnosti redova koriste i slabije varijante d'Alembertova i Cauchyjeva kriterija, tzv. *kriteriji u formi limesa* o kojima nam govori sljedeći korolar.

Korolar 3.1.8. *([3]) Neka je* (a_n) *niz kompleksnih brojeva i neka postoji* $m \in \mathbb{N}$ *takav da je* $a_n \neq 0$ *za* $n \geq m$. *Ako bar jedan od nizova*

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right), \quad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

konvergira k $L \in \mathbb{R}$, onda red $\sum a_n$ konvergira ako je $L < 1$, odnosno divergira ako je $L > 1$.

Dokaz. Pretpostavimo da niz $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ konvergira k L. Ako je $L < 1$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $L + \varepsilon < 1$. Za taj ε postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$(n > n_0) \implies (L - \varepsilon \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq L + \varepsilon).$$

Ako sada primijenimo Cauchyjev kriterij za $q = L + \varepsilon$, zaključujemo da red $\sum a_n$ apsolutno konvergira. Analogno se dokazuje divergencija u slučaju kada je $L > 1$.

Također, analogno se provodi dokaz ako niz $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ konvergira. □

Primjer 3.1.9. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum \frac{n!}{3^n}$.

Koristit ćemo upravo opisanu varijantu d'Alembertovog kriterija.

Promotrimo omjer:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)! \cdot 3^n}{n! \cdot 3^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot 3^n}{n! \cdot 3^n \cdot 3} = \frac{n+1}{3}.$$

Sada je

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1,$$

pa prema d'Alembertovom kriteriju zaključujemo da zadani red divergira.

Primjer 3.1.10. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum \frac{3^n+1}{2^n}$.

Imamo:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+1}{2^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{3^n+1}}{2},$$

pa je

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{3^n}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} > 1,$$

dakle prema Cauchyjevom kriteriju red je divergentan.

Primijetimo da u d'Alembertovom i Cauchyjevom kriteriju u formi limesa, ako je $L = 1$, kriterij ne daje odluku. U tom slučaju se za ispitivanje konvergencije koristimo nekim drugim kriterijima.

Teorem 3.1.11. *([4])**Integralni kriterij***

Neka je f neprekidna, pozitivna i padajuća funkcija na $[a, +\infty)$ za neki $a > 0$ i neka je $a_n = f(n)$. Tada su $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ i $\sum f(n)$ ekvikonvergentni (oba su ili konvergentna ili divergentna).

Dokaz. Neka je zadan red $\sum f(n)$, gdje je f neprekidna, pozitivna i padajuća funkcija na $[a, +\infty)$. Pogledajmo bez smanjenja općenitosti slučaj kada je $a = 1$. Iz monotonosti funkcije f slijedi

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

za $x \in [k, k+1], k = 1, 2, \ldots$ Integracijom u granicama od k do $k+1$ dobivamo:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), k = 1, 2, \ldots$$

Sumiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dobivamo:

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1). \tag{3.3}$$

Ako postoji konačan $\int_1^{+\infty} f(x)dx = I$, onda iz lijeve nejednakosti u (3.3) zaključujemo da su parcijalne sume reda ograničene odozgo sa $f(1) + I$, pa red konvergira.

Ako je integral divergentan, onda je

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty,$$

pa iz desne nejednakosti u (3.3) slijedi da je red divergentan.

Napomenimo još da u slučaju konvergencije suma reda ne mora biti jednaka vrijednosti integrala. □

Primjer 3.1.12. *Primijenimo integralni kriterij na red*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Ovdje je $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. Njena derivacija je $f'(x) = -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0$ za $x \geq 2$, dakle f je padajuća na $[2, +\infty)$. Sada je

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_2^R \frac{dx}{x \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \to \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & R \to \ln R \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{dt}{t} = \lim_{R\to+\infty} \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \lim_{R\to+\infty} (\ln \ln R - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Budući da integral divergira, zaključujemo da i zadani red divergira.

Primjer 3.1.13. *Ispitajmo konvergentnost hiperharmonijskog reda* $\sum \frac{1}{n^p}$ *koristeći integralni kriterij.*

U ovom primjeru je $f(n) = \frac{1}{n^p}$*, pa imamo* $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$.
Sada računamo:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^R$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{1-p}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^{p-1}} - 1\right).$$

Za $p = 1$*, red* $\sum \frac{1}{n^p}$ *je harmonijski red* $\sum \frac{1}{n}$ *za koji znamo da divergira.*

Ako je $p > 1$ *tada je* $p - 1 > 0$ *i* $R^{p-1} \to \infty$*, pa* $\frac{1}{R^{p-1}}$ *teži k* 0*, dakle* $\frac{1}{R^{p-1}} - 1$ *teži u* -1*, tj.* $\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^{p-1}} - 1\right)$ *postoji i jednak je* -1*. Ukupni limes je sada:*

$$\frac{1}{1-p}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-p}\cdot(-1) = \frac{1}{p-1}.$$

Dakle, integral $\int_1^\infty f(x)dx$ *konvergira, pa i red* $\sum \frac{1}{n^p}$ *konvergira.*

Ako je $p < 1$ *tada je* $p - 1 < 0$ *i* $R^{p-1} \to 0$*, pa* $\frac{1}{R^{p-1}}$ *teži u beskonačno, dakle* $\frac{1}{R^{p-1}} - 1$ *teži u beskonačno. Ukupni limes je:*

$$\frac{1}{1-p}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^{p-1}} - 1\right) = \infty.$$

Dakle, integral $\int_1^\infty f(x)dx$ *divergira, pa i red* $\sum \frac{1}{n^p}$ *divergira.*

Teorem 3.1.14. *([4])**Logaritamski kriterij***

Red $\sum a_n$*,* $a_n > 0$ *konvergira ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha > 0$ *takav da je:*

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha,$$

za svaki $n \geq n_0$*, a divergira ako je:*

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$$

za svaki $n \geq n_0$.

Dokaz. Ako postoji $\alpha > 0$ imamo:

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$$

$$\ln a_n^{-1} \geq \ln n(1 + \alpha)$$

$$\ln a_n^{-1} \geq \ln n^{1+\alpha}$$

$$a_n^{-1} \geq n^{1+\alpha}$$

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

za svaki $n \geq n_0$. Ovime smo red $\sum a_n$ usporedili s hiperharmonijskim redom $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ za koji znamo da konvergira kada je $1 + \alpha > 1$, tj. $\alpha > 0$. Dakle, red $\sum a_n$ konvergira.

S druge strane, imamo:

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$$

$$\ln a_n^{-1} \leq \ln n$$

$$a_n^{-1} \leq n$$

$$a_n \geq \frac{1}{n},$$

pa smo u ovom slučaju red $\sum a_n$ usporedili s harmonijskim redom $\sum \frac{1}{n}$ za koji znamo da divergira, dakle red $\sum a_n$ također divergira. □

Primjer 3.1.15. *Neka je opći član reda $\sum a_n$ dan sa $a_n = \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}$, $n > 2$. Pokažimo da je red $\sum a_n$ konvergentan.*
Najprije računamo:

$$a_n^{-1} = [\ln(\ln n)]^{\ln n}$$

$$\ln a_n^{-1} = \ln [\ln(\ln n)]^{\ln n}$$

$$\ln a_n^{-1} = \ln n \cdot \ln [\ln(\ln n)]$$

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \ln [\ln(\ln n)] .$$

Red $\sum a_n$ *konvergira ako je* $\ln[\ln(\ln n)] \geq 1 + \alpha$. *Neka je* $\alpha = 1$, *tada imamo:*

$$\begin{aligned}\ln[\ln(\ln n)] &\geq 2\\ \ln(\ln n) &\geq e^2\\ \ln n &\geq e^{e^2}\\ n &\geq e^{\left(e^{e^2}\right)}.\end{aligned}$$

Za $n_0 = \left\lfloor e^{\left(e^{e^2}\right)} \right\rfloor + 1$ *vrijedi da za svaki* $n \geq n_0$ *je* $\dfrac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 2$, *tj. prema logaritamskom kriteriju red konvergira.*

Primjer 3.1.16. *Neka je opći član reda* $\sum a_n$ *dan sa* $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$, $n > 1$. *Pokažimo da tada red* $\sum a_n$ *divergira.*

Računamo:

$$\begin{aligned}a_n^{-1} &= (\ln n)^{\ln(\ln n)}\\ \ln a_n^{-1} &= \ln(\ln n)^{\ln(\ln n)}\\ \ln a_n^{-1} &= \ln(\ln n)\cdot\ln(\ln n)\\ \ln a_n^{-1} &= [\ln(\ln n)]^2\\ \frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} &= \frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n}.\end{aligned}$$

Tvrdimo da je

$$\frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n} \leq 1,$$

tj.

$$[\ln(\ln n)]^2 \leq \ln n.$$

Stavimo $\ln n = z$, *kada* $n \to \infty$, *onda i* $z \to \infty$. *Sada imamo* $[\ln z]^2 \leq z$. *Promatramo funkciju* $f(z) = z - (\ln z)^2$. *Sada imamo:*

$$f'(z) = 1 - 2\ln z \cdot \frac{1}{z} = 0$$

iz čega slijedi $1 = \dfrac{2\ln z}{z}$, *tj.* $\dfrac{z}{2} = \ln z$. *Pitamo se je li* $\dfrac{z}{2} > \ln z$, *za svaki* $z > 1$. *U tu svrhu, definirajmo funkciju* $k(z) = \dfrac{z}{2} - \ln z$. *Tada je* $k'(z) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{z} = 0$, *iz čega slijedi* $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{z}$, *tj.*

$z = 2$. Za $z > 2$ je $\frac{1}{z} < \frac{1}{2} \Longrightarrow k'(z) > 0$, dakle funkcija k raste i

$$k(2) = \frac{2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2 = 0.31 > 0.$$

Dakle, za $z > 2$, zbog rasta funkcije k imamo da je $k(z) > k(2)$ iz čega slijedi

$$\frac{z}{2} - \ln z > 0.31 > 0,$$

tj. $k(z) > 0$ za $z > 2$. Znači da je $\frac{z}{2} > \ln z$, tj. $f'(z) > 0$ pa f raste. Za $z = 2$ je $f(z) = 2 - (\ln 2)^2 = 1.52$. Za $z > 2$ zbog rasta od f vrijedi $f(z) > f(2)$, tj. $f(z)$ je pozitivna, odnosno:

$$z - (\ln z)^2 > 0$$

$$z > (\ln z)^2 \Longrightarrow \frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} < 1,$$

dakle promatrani red divergira.

Teorem 3.1.17. *([7])**Kummerov kriterij***

Neka je red $\sum \frac{1}{b_n}$ divergentan, $b_n > 0$. Ako postoji

$$\lim\left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = L,$$

onda red $\sum a_n$ konvergira za $L > 0$, a divergira za $L < 0$.

Za $L = 0$ kriterij ne daje odluku.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $\lim\left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = L$.

Ako je $L > 0$ onda postoji $q > 0$ (npr. $q = \frac{L}{2}$) takav da za skoro svaki n vrijedi da je $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq q$. Odavde slijedi da je

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq q a_{n+1} > 0. \tag{3.4}$$

Prema tome, niz $(a_n b_n)$ je padajući, a kako je pozitivan, slijedi da je konvergentan. Budući da je

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) + \cdots + (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) = a_1 b_1 - a_{n+1} b_{n+1},$$

zaključujemo da je red $\sum (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ konvergentan, a onda iz (3.4), prema kriteriju uspoređivanja redova, slijedi i konvergencija reda $\sum a_n$.

Neka je sada $L < 0$. To znači da za skoro svaki n vrijedi:

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0,$$

tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}.$$

Kako je prema pretpostavci red $\sum \frac{1}{b_n}$ divergentan, iz posljednje nejednakosti primjenom kriterija o uspoređivanju redova, prema Teoremu 2.3.9. slijedi da je i red $\sum a_n$ divergentan.

□

Primjer 3.1.18. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$.

U ovom primjeru ćemo iskoristiti upravo spomenuti Kummerov kriterij. Promotrimo najprije omjer:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot (2n+2)}} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Neka je $b_n = 2n + 1$. *Tada je red* $\sum \frac{1}{b_n}$ *divergentan i imamo:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left((2n+1) \cdot \frac{2n+2}{2n+1} - (2n+3) \right) = -1 < 0,$$

dakle promatrani red divergira.

Teorem 3.1.19. *([7])**Raabeov kriterij***

Ako postoji

$$\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = L,$$

tada red $\sum a_n$ *konvergira ako je* $L > 0$, *a divergira ako je* $L < 0$.

Za $L = 0$ *kriterij ne daje odluku.*

Dokaz. Budući da je red $\sum \frac{1}{n}$ divergentan, u Kummerovom kriteriju možemo staviti da je $b_n = n$. Tada red $\sum a_n$ konvergira ako niz čiji je opći član dan sa

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1$$

ima pozitivnu graničnu vrijednost, a divergira ako je granična vrijednost negativna. Kako je

$$\lim\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) > 0 \Leftrightarrow \lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$$

i

$$\lim\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

tvrdnja je dokazana. □

Primjer 3.1.20. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$.

Promotrimo omjer:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}} = \frac{n+k+1}{n}.$$

Primjenom Raabeovog kriterija imamo:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+k+1}{n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{k+1}{n} = k+1.$$

Dakle, ako je $k \geq 1$, *red je konvergentan. Za* $k = 0$ *dobiva se harmonijski red* $\sum \frac{1}{n}$ *koji je divergentan.*

Primjer 3.1.21. *Promotrimo ponovno red* $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ *iz Primjera 3.1.18. i primijenimo Raabeov kriterij.*

Imamo:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

dakle i primjenom Raabeovog kriterija možemo zaključiti da red divergira.

Teorem 3.1.22. *([5])**Bertrandov kriterij***

Ako postoji

$$\lim \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = L,$$

tada red $\sum a_n$ *konvergira ako je* $L > 1$, *a divergira ako je* $L < 1$.

Za $L = 1$ *kriterij ne daje odluku.*

Dokaz. Neka je u Kummerovom kriteriju $b_n = n \ln n$. Tada je prema Primjeru 3.1.12. red $\sum \frac{1}{b_n}$ divergentan. Imamo da je:

$$\begin{aligned}
b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} &= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \\
&= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln n - (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln n \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Kada $n \to +\infty$, tada $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to 1$, tako da je

$$\lim (\ln n) \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = L \Leftrightarrow \lim \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \right) = L - 1$$

i tvrdnja slijedi iz Kummerovog kriterija. □

Primjer 3.1.23. *Definirajmo* $\binom{\alpha}{n}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$ *formulom:*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

te ispitajmo konvergenciju reda $\sum \left| \binom{\alpha}{n} \right|$.

Budući da je

$$|a_n| = \left| \binom{\alpha}{n} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \right|$$

i
$$|a_{n+1}| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|$$
dobivamo da je omjer:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = \frac{n+1}{n-\alpha},$$
jer za jako velike n izraz $\alpha - n$ postaje negativan pa je modul $|\alpha - n|$ jednak $n - \alpha$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln n\left(n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right) &= \lim_{n\to\infty} \ln n\left(n\cdot\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \ln n\left(n\cdot\left(\frac{1+\alpha}{n-\alpha}\right)-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \ln n\cdot\frac{n\alpha+\alpha}{n-\alpha} = \infty > 1.\end{aligned}$$

Dakle, promatrani red konvergira prema Bertrandovom kriteriju.

Teorem 3.1.24. *([5])**Gaussov kriterij***
Neka se $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ može napisati u obliku:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}, \tag{3.5}$$
gdje su α i β konstante, a za γ_n vrijedi $|\gamma_n| < M$ za svaki n. Tada vrijedi:
red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako je $\alpha > 1$ ili $\alpha = 1$ i $\beta > 1$,
red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira ako je $\alpha < 1$ ili $\alpha = 1$ i $\beta \leq 1$.

Dokaz. Ako vrijedi (3.5), onda je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$, iz čega primjenom d'Alembertovog kriterija dobivamo da je red $\sum a_n$ konvergentan za $\alpha > 1$ i divergentan za $\alpha < 1$.

Ako je $\alpha = 1$, d'Alembertov kriterij ne daje odluku. Primjenom Raabeovog kriterija, iz (3.5) za $\alpha = 1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim n\left(1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2} - 1\right) \\
&= \lim n\left(\frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}\right) \\
&= \lim\left(\beta + \frac{\gamma_n}{n}\right) \\
&= \beta
\end{aligned}$$

pa je red konvergentan za $\alpha = 1$ i $\beta > 1$, a divergentan za $\alpha = 1$ i $\beta < 1$.

Ako je $\alpha = 1$ i $\beta = 1$, tada se (3.5) svodi na:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}.$$

Sada primjenom Bertrandovog kriterija imamo:

$$\begin{aligned}
\lim \ln n\left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}\right) - 1\right) &= \lim \ln n\left(1 + \frac{\gamma_n}{n} - 1\right) \\
&= \lim \ln n \cdot \frac{\gamma_n}{n}.
\end{aligned}$$

Budući da je $|\gamma_n| < M$, tj. $-M < \gamma_n < M$, slijedi da je

$$-M\frac{\ln n}{n} < \frac{\ln n}{n}\gamma_n < M\frac{\ln n}{n}$$

i $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$, pa prema teoremu o sendviču, budući da je niz $\left(\dfrac{\ln n}{n}\gamma_n\right)$ uklješten između dva niza čiji su limesi 0, slijedi da je i limes tog srednjeg niza jednak 0. Dakle, i u ovom slučaju je red $\sum a_n$ divergentan. □

Primjer 3.1.25. *Ispitajmo primjenom Gaussovog kriterija konvergenciju reda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right]^2.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1} \\
&= \left(4n^2+8n+4\right) : \left(4n^2+4n+1\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{\frac{1}{4n^2}}{4n^2+4n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2+4n+1)}\right).
\end{aligned}$$

Sada vidimo da je $\alpha = 1$, $\beta = 1$ i

$$|\gamma_n| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2+4n+1)}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2+4n+1)} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = M,$$

dakle red je divergentan.

3.2 Redovi s proizvoljnim članovima

U ovom poglavlju razmatrat ćemo redove čiji članovi nisu samo pozitivni brojevi, nego bilo kakvi realni brojevi. Prvo ćemo razmotriti red u kojem predznaci članova alterniraju.

Definicija 3.2.1. *Red $\sum c_n$ čiji članovi naizmjence mijenjaju predznak naziva se **alternirajući** (izmjenični) red. Opći oblik alternirajućeg reda je:*

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{2n-1} - c_{2n} + \ldots,$$

pri čemu je $c_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorem 3.2.2. *([3])**Leibnizov kriterij***
Ako niz (c_n) realnih pozitivnih brojeva strogo pada i ako on konvergira k nuli, onda red

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{2n-1} - c_{2n} + \ldots$$

konvergira nekom broju C za koji vrijedi $0 < C < c_1$.

Dokaz. U svrhu dokaza napisat ćemo parcijalnu sumu C_{2m} parnog indeksa za red $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{2n-1} - c_{2n} + \ldots$ na tri načina. Napišimo je najprije u obliku:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Budući da niz (c_n) strogo pada, svaka zagrada u gornjem zapisu je pozitivan broj. Dakle, C_{2m} je zbroj pozitivnih brojeva, tj. $C_{2m} > 0$, pa zaključujemo da niz C_{2m} raste. S druge strane, ako C_{2m} napišemo u obliku:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2) - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

tada vidimo da se C_{2m} dobiva na način da se od c_1 oduzme pozitivan broj, pa je očigledno $C_{2m} < c_1$. Budući da niz C_{2m} raste i da je ograničen s c_1, on konvergira i za njegov limes C vrijedi $C \leq c_1$.

Nadalje, znamo da vrijedi $C_{2m} = C_{2m-1} - c_{2m}$, što zajedno s pretpostavkom da $c_n \to 0$ povlači $\lim\limits_{m\to\infty} C_{2m-1} = C$. Znači, niz (C_n) konvergira k C.

Iz $C_{2m+1} = C_{2m-1} - (c_{2m} - c_{2m+1})$ uočavamo da je $C_{2m+1} < C_{2m-1}$, tj. da C_{2m-1} teži k C padajući. Odavde je $C_{2m} < C < C_{2m-1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ i posebno je $0 < C < C_1$. □

Primjer 3.2.3. *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *je konvergentan.*

Opći član reda je $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, *pa je* $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vidimo da je $|a_1| > |a_2| > \cdots > |a_n| > \ldots$, *tj. niz* $(|a_n|)$ *strogo pada. Ujedno je* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. *Dakle, red konvergira prema Leibnizovom kriteriju.*

Primjer 3.2.4. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

U ovom primjeru je $|a_n| = \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ *i vidimo da vrijedi:*

$$|a_1| > |a_2| > \cdots > |a_n| > \ldots,$$

tj. da niz $(|a_n|)$ *strogo pada i teži u nulu. Dakle, uvjeti Leibnizovog kriterija su zadovoljeni i promatrani red konvergira.*

Sada ćemo navesti još dva kriterija koji se koriste pri ispitivanju konvergencije redova kojima je opći član oblika $a_n b_n$. No, najprije navodimo lemu kojom ćemo se koristiti u jednom od dokaza.

Lema 3.2.5. ***Abelova lema***

Neka su (a_n) *i* (b_n) *nizovi realnih brojeva i neka je* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *parcijalna suma reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Tada za svaki* $m > n$ *vrijedi:*

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = s_m b_m - s_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} s_k \left(b_k - b_{k+1}\right).$$

Teorem 3.2.6. *([1])**Dirichletov kriterij***

Neka su (a_n) i (b_n) nizovi realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete:

1) niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je omeđen,

2) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq 0$,

3) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentan.

Dokaz. Budući da je (s_n) omeđen, postoji $M > 0$ takav da je $|s_n| < M$ za svaki n. Kako je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, za dani $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takav da je $b_n = |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ za svaki $n > n_0$. Prema Abelovoj lemi, za $m > n > n_0$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left| s_m b_m - s_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} s_k \left(b_k - b_{k+1}\right)\right| \\
&\leq |s_m| \cdot |b_m| + |s_n| \cdot |b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k|\,|b_k - b_{k+1}| \\
&\leq M \cdot b_m + M \cdot b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} M \cdot (b_k - b_{k+1}) \\
&= M \cdot [b_m + b_{n+1} + (b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+2} - b_{n+3}) + ... + (b_{m-2} - b_{m-1}) + (b_{m-1} - b_m)] \\
&= 2M \cdot b_{n+1} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, prema nužnom i dovoljnom uvjetu konvergencije, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira. □

Primjer 3.2.7. *Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ konvergira.*

Promotrimo niz (s_n) parcijalnih suma reda $\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\pi)$:

$$\begin{aligned}
s_2 &= \cos 2\pi = 1 \\
s_3 &= \cos 2\pi + \cos 3\pi = 1 - 1 = 0 \\
s_4 &= \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi = 1 - 1 + 1 = 1 \\
s_5 &= \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi + \cos 5\pi = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vidimo da je niz (s_n) ograničen. Niz $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ je padajući i teži u nulu. Dakle, promatrani red konvergira prema Dirichletovom kriteriju.

Primjer 3.2.8. *Pokažimo da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}n^2}{e^n n!} \cdot \frac{1}{\ln^2 n}$ konvergira.*

Neka je $(a_n) = \left(\frac{2^{2n}n^2}{e^n n!}\right)$ i $(b_n) = \left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)$. Neka je (A_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Tvrdimo da je (A_n) ograničen. Jedan od načina na koji možemo to pokazati je da pokažemo da je red $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergentan. Primijetimo da je:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{2n+1}\cdot(n+1)^2}{e^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{2^{2n}\cdot n^2}{e^n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)}{e\cdot n^2} = 0.$$

Dakle, red $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergira prema d'Alembertovom kriteriju, pa i niz (A_n) konvergira. Svaki konvergentni niz realnih brojeva je ograničen, pa je i (A_n) ograničen. Niz (b_n) je padajući niz i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dakle, prema Dirichletovom kriteriju red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}n^2}{e^n n!} \cdot \frac{1}{\ln^2 n}$ konvergira.

Primjer 3.2.9. *Neka je $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}}$.*

Definirajmo najprije nizove $(a_n) = (\cos n\alpha)$ i $(b_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Za ograničenost niza parcijalnih suma od (a_n) koristit ćemo se formulom

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{n\alpha}{2}$$

koja se može dokazati metodom matematičke indukcije. Budući da je

$$\left| \frac{\cos \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|},$$

slijedi da je niz parcijalnih suma niza (a_n) *ograničen. Niz* (b_n) *monotono teži nuli jer je*

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \cdots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \ldots$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. *Dakle, nizovi* (a_n) *i* (b_n) *zadovoljavaju uvjete Dirichletovog kriterija, pa slijedi da je red* $\sum a_n b_n$ *konvergentan, a taj red je upravo red zadan u zadatku.*

Teorem 3.2.10. *([1])**Abelov kriterij***

Neka je (b_n) *monoton i omeđen niz realnih brojeva i neka je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan. Onda je i red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentan.*

Dokaz. Niz (b_n) je monoton i omeđen, dakle konvergentan s nekim limesom b. Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan pa je konvergentan i red $b \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b a_n$. Ako je niz (b_n) rastući, stavimo

$$c_n = b - b_n \tag{3.6}$$

Tada je niz (c_n) padajući. Ako je niz (b_n) padajući, stavimo

$$c_n = b_n - b \tag{3.7}$$

pa je (c_n) ponovno padajući niz. Budući da je red $\sum a_n$ konvergentan, tj. niz (s_n) njegovih parcijalnih suma je konvergentan, dakle i omeđen, primjenjiv je Dirichletov kriterij na red $\sum c_n a_n$, tj. red $\sum c_n a_n$ konvergira.

U slučaju da je niz (b_n) rastući vrijedi (3.6) i možemo pisati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b a_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b - c_n)\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Budući da se konvergentni redovi mogu zbrajati i oduzimati član po član, dobiveni red je konvergentan.

U slučaju da je niz (b_n) padajući zbog (3.7) vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b a_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b + c_n)\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

i dobiveni red je konvergentan. $\square$

Primjer 3.2.11. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 n! \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{e^n (n+2)!}$ *koristeći Abelov kriterij.*

Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 n!}{e^n (n+2)!}$ *konvergira prema d'Alembertovom kriteriju jer je:*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot (n+1)!}{e^{n+1} \cdot (n+3)!} \cdot \frac{e^n \cdot (n+2)!}{n^3 \cdot n!} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^3 \cdot (n+3)} = \frac{1}{e} < 1,$$

a niz $\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ *je rastući i omeđen. Dakle, zadani red konvergira prema Abelovom kriteriju.*

Primjer 3.2.12. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Niz $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ *je rastući i ograničen, a red* $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ *konvergira na osnovu Leibnizovog kriterija (Primjer 3.2.4.). Dakle, prema Abelovom kriteriju zadani red konvergira.*

Bibliografija

[1] D.Blanuša, *Viša matematika, prvi dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.

[2] P. Javor, *Matematička analiza, zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreab, 1997.

[4] I. I. Ljaško, *Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu II*, Višča škola, Kiev, 1986.

[5] S.Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, prvi dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[6] Lj. Gajić, S. Pilipović, N. Teofanov, *Zbirka zadataka iz analize 1, drugi dio*, dostupno na `https://www.scribd.com/document/127171344/Zbirka-Zadataka-Iz-Analize-1-2-Dio?fbclid=IwAR3-kGH9_ejpa0kr0j459NSL6c2B_dy9HsQnH7aaCy_CcfhEHRqI9kX-lJ4`

[7] M. Merkle, *Matematička analiza, teorija*, dostupno na `https://www.scribd.com/doc/131556366/Milan-Merkle-Matematicka-analiza-pdf?fbclid=IwAR2MmRx9FwzaYGaSigD-uTTneMHTxg7eNQ_3u9Gs9oCllchlzVoReI1lNFE`

Sažetak

U ovom diplomskom radu iznesena je osnovna teorija o nizovima i redovima brojeva. Obrađeni su redovi brojeva, konvergencija redova te neka osnovna svojstva konvergentnih redova. Naglasak je stavljen na različite kriterije za ispitivanje konvergencije redova. Posebno su promatrani redovi s pozitivnim i posebno redovi s proizvoljnim članovima. Također, za svaki od spomenutih kriterija konvergencije dani su karakteristični primjeri zadataka.

Summary

In this thesis we analyze the basic theory of sequences and series of numbers. We have been analyzing series of numbers, their convergence and some basic properties of convergent series. The accent is on different criteria of convergence. Series with positive terms and series with arbitrary terms have been analyzed separately. Also, for each of criterion of convergence the typical examples are given.

Životopis

Zovem se Lucija Kolačko. Rođena sam 2.12.1989. u Varaždinu. Osnovnu školu pohađala sam u Varaždinu u Četvrtoj osnovnoj školi, nakon čega upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Varaždinu. Nakon završetka srednje škole, 2008./2009. akademske godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet na Matematičkom odsjeku u Zagrebu. Preddiplomski studij nastavničkog smjera matematike završavam 2012./2013. godine. Nakon toga 2015./2016. godine upisujem Diplomski studij matematike, nastavnički smjer.