Bazni okviri konačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora

Kolarek, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Kolarek

BAZNI OKVIRI KONAČNODIMENZIONALNIH HILBERTOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc Ljiljana Arambašić

Zagreb, rujan, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najprije zahvaljujem mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na uloženom trudu i iznimnoj pomoći koju mi je pružila prilikom pisanja ovog rada. Potom zahvaljujem svojim prijateljima (Ani, Antoniji, Melani, Ivani i Vanji) na ogromnoj podršci koju su mi pružili tijekom cijelog studiranja. Na kraju i najvažnije, od srca zahvaljujem svojim roditeljima, baki, djedu i bratu na potpori koju mi pružaju cijeloga života i na svemu što su napravili i žrtvovali kako bi uspjela ostvariti svoje snove.

Sadržaj

Uvod

Jedna od osnovnih činjenica vezanih uz vektorske prostore jest da se svaki vektor iz prostora na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija elemenata baze tog prostora. Kako se prilikom slanja dio informacija može izgubiti, ako koristimo bazu prostora, gubitak će rezultirati nemogućnošću rekonstrukcije primljenih podataka. Primjeri situacija u kojima može doći do gubitka dijela informacija su one u kojima se procesiraju signali i šalju podatci. U takvim prilikama korisnima se pokazuju upravo bazni okviri koje ćemo u ovom radu prezentirati.

U konačnodimenzionalnim prostorima bazni okviri su sustavi izvodnica te se svaki bazni okvir moze reducirati do baze prostora. Dakle, intuitivno bazne okvire možemo zamišljati kao baze koje sadrže "višak" elemenata. U beskonačnodimenzionalnim prostorima ideja baznih okvira je složenija.

Glavni cilj ovog rada jest dati detaljan pregled svojstava i primjere baznih okvira, kao i neke posebne klase baznih okvira.

Rad je podijeljen u četiri idejne cjeline. U prvoj ćemo navesti neke važne rezultate teorije konačnodimenzionalnih vektorskih prostora i linearnih operatora koji će nam biti od važnosti u ostatku rada.

U sljedećoj cjelini definirat ćemo temeljni pojam ovog rada, bazne okvire konačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora. Na primjerima ćemo pokazati da postoje baze koje nisu bazni okviri, kao što nisu svi bazni okviri baze. Promotrit ćemo napete bazne okvire i Parsevalove bazne okvire, koje ćemo okarakterizirati pomoću linearnih operatora koji su pridruženi baznim okvirima: operator analize, operator sinteze i operator baznog okvira. Za kraj poglavlja ćemo istražiti slične i unitarno izomorfne bazne okvire.

U trećoj cjelini geometrijski ćemo interpretirati napete bazne okvire prostora $\mathbb{R}^2$, te ćemo iz postojećih napetih baznih okvira konstruirati nove bazne okvire.

Posljednja cjelina posvećena je najvažnijem, već spomenutom, svojstvu baznih okvira-rekonstrukciji vektora prostora koristeći koeficijente vektora obzirom na bazni okvir. Stoga ćemo navesti rekonstrukcijsku formulu kao i algoritme rekonstruiranja vektora. Za kraj ćemo promotriti dualne bazne okvire i njihova svojstva.

Poglavlje 1

Vektorski prostori i linearni operatori

1.1 Konačnodimenzionalni vektorski prostor

Sekciju započinjemo definicijama temeljnih pojmova linearne algebre.

Neka je V neprazan skup, a $\mathbb{F}$ polje ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$). Kažemo da je V **vektorski prostor nad poljem** $\mathbb{F}$ ako je zadana binarna operacija $+ : V \times V \to V$ tako da je $(V, +)$ Abelova grupa i ako je zadano preslikavanje $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ koje ima sljedeća svojstva:

(i) $\alpha (\beta v) = (\alpha\beta) v$,

(ii) $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$,

(iii) $\alpha (v + w) = \alpha v + \alpha w$,

(iv) $1 \cdot v = v$,

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $v, w \in V$.

Elemente vektorskog prostora V nazivamo **vektori**, a elemente polja $\mathbb{F}$ **skalari**.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $m \in \mathbb{N}$; neka su $v_1, \ldots, v_m \in V$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$. Tada se vektor $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ naziva **linearnom kombinacijom vektora** $v_1, \ldots, v_m$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Nadalje, skup $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ je **linearno nezavisan skup** ako iz $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0_V$, gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$, nužno slijedi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Skup je **linearno zavisan**, ako nije linearno nezavisan, tj. ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$, od kojih barem jedan nije 0, takvi da vrijedi $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0_V$.

Iz prethodne definicije lako zaključujemo da je svaki podskup skupa V koji sadrži nulvektor sigurno linearno zavisan skup.

Neprazan podskup $L \subseteq V$ vektorskog prostora V naziva se **potprostor vektorskog prostora** V, u oznaci $L \leqslant V$, ako je L i sam vektorski prostor obzirom na operacije zbrajanja i množenja skalarom naslijeđenih iz prostora V.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $S \subseteq V$. **Linearna ljuska skupa** S, u oznaci $[S]$ je

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i | m \in \mathbb{N}; v_1, \ldots, v_m \in S; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F} \right\},$$

dakle, skup svih linearnih kombinacija vektora iz S. Za svaki $S \subseteq V$, skup $[S]$ je potprostor od V. Štoviše, $[S]$ je najmanji potprostor od V koji sadrži S.

Neka su L i M dva potprostora vektorskog prostora V. **Suma potprostora** L **i** M, u oznaci $L + M$, definira se kao $L + M = [L \cup M]$. Posebno, ako je $L \cap M = \{0_V\}$ suma se naziva **direktnom sumom** i označava se $L \dot{+} M$.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za podskup $S \subseteq V$ kažemo da je **sustav izvodnica vektorskog prostora** V ako je $[S] = V$. Linearno nezavisan sustav izvodnica prostora V naziva se **baza vektorskog prostora** V. Ako u vektorskom prostoru V postoji konačna baza, tada se vektorski prostor V naziva **konačnodimenzionalni vektorski prostor**, a njegova **dimenzija**, u oznaci $\dim V$, definira se kao broj elemenata bilo koje baze prostora V. Može se dokazati da svake dvije baze konačnodimenzionalnog prostora V imaju jednako mnogo elemenata, stoga prethodna definicija ima smisla.

Definicija 1.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Neka je $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ preslikavanje koje ima sljedeća svojstva:*

(i) $(v, v) \geqslant 0$,

(ii) $(v, v) = 0$ *ako i samo ako je* $v = 0_V$,

(iii) $(\alpha v, w) = \alpha\,(v, w)$,

(iv) $(v + w, u) = (v, u) + (w, u)$,

(v) $(w, v) = \overline{(v, w)}$,

*za sve $u, v, w \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $(\cdot|\cdot)$ naziva se **skalarno množenje** na prostoru V, a uređeni par $\big(V, (\cdot|\cdot)\big)$ naziva se **unitaran prostor**.*

Za vektore v i w unitarnog prostora V kažemo da su **ortogonalni** ako je $(v, w) = 0$. Nadalje, podskup S unitarnog prostora V naziva se **ortogonalnim skupom** ako su svaka dva različita elementa tog skupa ortogonalna.

Neka je S podskup unitarnog prostora V. Za vektor $v \in V$ kažemo da je **ortogonalan na podskup** S ako vrijedi da je v ortogonalan na svaki w iz S. Skup svih vektora v ortogonalnih na podskup S označavamo sa $S^{\perp}$ i nazivamo **ortogonalni komplement** od S. Lako se pokaže da je skup $S^{\perp}$ potprostor prostora V.

Neka je L potprostor unitarnog prostora V. Za potprostor $M \leqslant V$ kažemo da je **ortogonalan komplement potprostora** L ako je M direktni komplement od L ($L \dotplus M = V$) i ako je svaki vektor iz M ortogonalan na svaki vektor iz L tj. ($M = L^{\perp}$).

Definicija 1.1.2. *Neka je V vektorski prostor. Preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ naziva se **norma** na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

(i) $\|v\| \geqslant 0$,

(ii) $\|v\| = 0$ *ako i samo ako je* $v = 0_V$,

(iii) $\|\alpha v\| = \alpha \|v\|$,

(iv) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$,

*za sve $v, w \in V$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$. Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ naziva se **normiran prostor**.*

Svaki unitaran prostor V je normiran jer je formulom $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ definirana norma na V. Primjeri normi koje su također inducirane skalarnim produktom na $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{C}^m$ su:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2} \quad \text{za } v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |v_i|^2} \quad \text{za } v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^m.$$

Jedan od primjera norme koja ne potječe od skalarnog produkta je

$$\|(v_1, \ldots, v_m)\| = \max_{i=1,\ldots,m} |v_i| \text{ za } v \in \mathbb{C}^m. \tag{1.1}$$

Induciranost norme skalarnim produktom provjeravamo relacijom koja se naziva *relacija paralelograma*. Norma $\|\cdot\|$ potječe od skalarnog produkta ako i samo ako je

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

za sve $v, w \in V$.

Tako, na primjer, za normu (1.1) vidimo da ne potječe od skalarnog produkta jer za $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ i $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ imamo

$$\|e_1 + e_2\| = \|e_1 - e_2\| = \|e_1\| = \|e_2\| = 1,$$

pa ne vrijedi $\|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 = 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2$.

Teorem 1.1.3. ***(Cauchy–Schwarz-Bunyakovsky nejednakost)*** *Neka je V unitaran prostor. Tada za svaka dva vektora $v, w \in V$ vrijedi $\left|\langle v, w\rangle\right| \leq \|v\| \cdot \|w\|$. Jednakost se postiže ako i samo ako su v i w linearno zavisni.*

1.2 Linearni operatori

Definicija 1.2.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ naziva se* **linearan operator** *ako je*

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A v + \beta A w$$

za sve $v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Sljedeći teorem govori o egzistenciji linearnog operatora na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Također, iz njega vidimo da je djelovanje linearnog operatora potpuno određeno djelovanjem na bazi domene.

Teorem 1.2.2. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i W vektorski prostor nad istim poljem. Ako je $\{e_1, ..., e_m\}$ bilo koja baza prostora V te ako su $b_1, ..., b_m$ bilo koji vektori iz prostora W, tada postoji jedinstveni linearan operator $A : V \to W$ tako da vrijedi $Ae_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Za skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost operatora** A ako postoji $v \in V, v \neq 0_V$ takav da vrijedi $Av = \alpha v$. U tom slučaju vektor v nazivamo **svojstvenim vektorom** pridruženim svojstvenoj vrijednosti α.

Uz linearan operator $A : V \to W$ vežemo i sljedeće važne pojmove. **Norma operatora** A definira se kao $\|A\| = \sup\{\|Av\| : v \in V, \|v\| = 1\}$, ako supremum postoji. Ako supremum postoji, onda linearan operator A nazivamo **ograničeni operator**. Ako su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, onda supremum uvijek postoji. **Jezgra** operatora A definira se kao $\operatorname{Ker} A = \{x \in V : Ax = 0_W\}$. **Slika** operatora A definira se kao $\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in V\}$. Lako se vidi da je jezgra operatora potprostor od V, a njegovu dimenziju nazivamo **defektom** od A, u oznaci $\mathrm{d}(A)$. Nadalje, slika operatora je potprostor od W, a njezinu dimenziju označavamo s $\mathrm{r}(A)$ i nazivamo **rangom** operatora A. Također se lako pokaže da je linearan operator $A : V \to W$ injektivan ako i samo ako je $\operatorname{Ker} A = \{0_V\}$.

Teorem 1.2.3. ***(Teorem o rangu i defektu)*** *Neka je $A : V \to W$ linearan operator, pri čemu je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Tada vrijedi*

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

Posebno, ako je $\dim V = \dim W$, onda je linearan operator A injektivan ako i samo ako je surjektivan ako i samo ako je bijektivan.

Također, za linearan operator $A : V \to W$ među unitarnim prostorima V i W postoji jedinstveni linearan operator $A^* : W \to V$ takav da je $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle$ za svaki $v \in V$ i $w \in W$. Operator A^* naziva se **adjungirani operator** operatora A.

Nadalje, za linearan operator $A : V \to V$ na realnom ili kompleksnom konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V kažemo da je

a) **hermitski operator** ako je $A^* = A$,

b) **normalan operator** ako je $A^*A = AA^*$,

c) **pozitivan operator** ako je A hermitski i ako za svaki $v \in V$ vrijedi $\langle Av, v\rangle \geq 0$.

Kažemo da je pozitivan linearan operator $A^{\frac{1}{2}}$ **pozitivan drugi korijen linearnog operatora** A ako je njegov kvadrat jednak linearnom operatoru A.

Neka je $P : V \to V$ linearan operator. Kažemo da je P **ortogonalan projektor** ako je P hermitski operator i ako vrijedi $P^2 = P$.

Neka je $\mathcal{H}$ unitaran prostor i neka je $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ niz vektora u $\mathcal{H}$. Za niz kažemo da je **Cauchyjev niz** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n takav da je $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ za sve $k, l > n$. Ako postoji $x \in \mathcal{H}$ takav da $\|x_k - x\| \to 0$ kada k teži u beskonačno, onda kažemo da niz $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ **konvergira** ka x. Broj x nazivamo limes niza $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Može se pokazati da je svaki konvergentan niz Cauchyjev, ali obrat tvrdnje općenito ne vrijedi. Uočimo da je pojam Cauchyjevog niza već dobro definiran za normirane prostore.

Prostori u kojima je svaki Cauchyjev niz konvergentan nazivaju se **potpunim prostorima**, a potpun unitaran prostor nazivamo **Hilbertovim prostorom**. U slučaju konačnodimenzionalnih vektorskih prostora svi su normirani prostori potpuni. U ostatku rada $\mathcal{H}^n$ će označavati n-dimenzionalni Hilbertov prostor.

Za vektor v normiranog prostora V kažemo da je **jedinični vektor** ako je $\|v\| = 1$.

Ortonormirana baza za Hilbertov prostor $\mathcal{H}^n$ je baza čiji su elementi u parovima ortogonalni i jedinične su duljine. Očito je kanonska baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za $\mathbb{C}^n$ odnosno $\mathbb{R}^n$, gdje su $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ vektori kojima se na i-toj koordinati nalazi 1, a na svim ostalima 0, za $i = 1, \ldots, n$, ortonormirana. U slučaju ortonormirane baze koeficijenti u prikazu vektora v računaju se kao skalarni produkti s vektorima baze, dakle $v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i\rangle e_i$.

Definicija 1.2.4. *Neka je A linearan operator, $A : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$. Neka je $(e_i)_{i=1}^{n}$ neka ortonormirana baza za $\mathcal{H}^n$.* ***Trag operatora*** *A tada se definira kao* $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i\rangle$.

Propozicija 1.2.5. *Neka je $A : \mathcal{H}^n \to \mathcal{K}$ linearan operator. Tada je* $\operatorname{Ker} A = [\operatorname{Im} A^*]^{\perp}$ *pa* $\mathcal{H}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$. *Posebno,* $\dim \mathcal{H}^n = \mathrm{d}(A) + \mathrm{r}(A^*)$.

Definicija 1.2.6. *Neka je $A : \mathcal{H}^n \to \mathcal{K}$ linearan operator.*

a) A je ***izometričan operator*** *ako je $\|Av\| = \|v\|$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$.*

b) A je ***unitaran operator*** *ako je izometričan i surjektivan.*

U naredne dvije propozicije navodimo neke karakterizacije izometričnih i unitarnih operatora.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) A je izometričan operator.

(ii) A čuva skalarni produkt, tj. za sve $v, w \in \mathcal{H}$ vrijedi $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$.

(iii) $A^*A = I_{\mathcal{H}}$, gdje je $I_{\mathcal{H}}$ identični operator na $\mathcal{H}$.

Propozicija 1.2.8. *Neka je $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) T je unitaran operator.

(ii) Operator T čuva skalarni produkt i surjektivan je.

(iii) T^* je unitaran operator.

(iv) $T^*T = I_{\mathcal{H}}$ i $TT^* = I_{\mathcal{K}}$, pri čemu su $I_{\mathcal{H}}$ i $I_{\mathcal{K}}$ identični operatori na $\mathcal{H}$, odnosno $\mathcal{K}$.

Prisjetimo se još Parsevalovog identiteta.

Propozicija 1.2.9. ***(Parsevalov identitet)*** *Ako je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}^n$, tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\langle v, e_i\rangle\right|^2 .$$

Dokaz. Neka je $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ iz $\mathcal{H}^n$. Tada je

$$\langle v, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

za svaki $j = 1, \ldots, n$. Dakle, $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i\rangle e_i$. Sada je

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle \langle e_i, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle \overline{\langle v, e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \left|\langle v, e_i\rangle\right|^2 .$$

□

Poglavlje 2

Bazni okviri

2.1 Definicije, osnovna svojstva i primjeri

Definicija 2.1.1. *Za familiju vektora $(x_i)_{i=1}^m$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^n$ kažemo da je **bazni okvir** za Hilbertov prostor $\mathcal{H}^n$ ako postoje konstante $0 < A \leq B < \infty$ takve da vrijedi*

$$A\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 \leq B\|v\|^2, \quad \forall v \in \mathcal{H}^n. \tag{2.1}$$

Za bazni okvir $(x_i)_{i=1}^m$ definiramo sljedeće pojmove:

a) Konstanta A zove se **donja granica baznog okvira**, a konstanta B **gornja granica baznog okvira**. Najveća donja granica baznog okvira označava se A_{op}, a najmanja gornja B_{op} i njih nazivamo **optimalne granice baznog okvira**.

b) Brojeve $(\langle v, x_i\rangle)_{i=1}^m$ nazivamo **koeficijenti vektora** v **s obzirom na bazni okvir** $(x_i)_{i=1}^m$.

c) Ako je u (2.1) $A = B$, tada se bazni okvir $(x_i)_{i=1}^m$ zove A**-napet bazni okvir**.

Iz propozicije 1.2.9, tj. Parsevalovog identiteta, odmah zaključujemo da je svaka ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$ jedan bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s optimalnim granicama $A = B = 1$.

U sljedećem primjeru navedimo još neke bazne okvire konstruirane iz zadane ortonormirane baze.

Primjer 2.1.2. *Neka je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$.*

(1) Niz vektora $(x_i)_{i=1}^{2n} = (e_1, e_1, ..., e_1, e_2, e_3, ..., e_n,)$ je bazni okvir Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$.

Zaista, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left|\langle v, e_i \rangle\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{2n} \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 = n \cdot \left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\langle v, e_i \rangle\right|^2 \\
&= n \cdot \left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \|v\|^2 \overset{(C-S-B)}{\leq} n \cdot \|v\|^2 \cdot \|e_1\|^2 + \|v\|^2 = (n+1) \cdot \|v\|^2 .
\end{aligned}$$

Prema tome $\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^{2n} \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 \leq (n+1) \cdot \|v\|^2$, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$. Uočimo da su 1 i $n+1$ optimalne granice baznog okvira jer za $v = e_1$ imamo $\sum_{i=1}^{2n} \left|\langle v, x_i \rangle\right| = n + 1 = (n+1) \cdot \|v\|$, a za $v = e_2$ imamo $\sum_{i=1}^{2n} \left|\langle v, x_i \rangle\right| = 1 = 1 \cdot \|v\|$.

(2) Niz vektora $(x_i)_{i=1}^{2n} = (e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, ..., e_n, e_n,)$ *je* 2*-napet bazni okvir Hilbertovog prostora* $\mathcal{H}^n$*.*

Zaista, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{2n} \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left|\langle v, e_i \rangle\right|^2 = 2 \cdot \|v\|^2 .$$

(3) Unija L ortonormiranih baza, ne nužno istih, je L-napet bazni okvir za Hilbertov prostor $\mathcal{H}^n$*.*

Uočimo da svaki konačan niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ zadovoljava desnu nejednakost u (2.1). Naime, prema Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\| \right)^2 \cdot \|v\|^2$$

za svaki $v \in \mathcal{H}^n$, pa možemo uzeti $B = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$.

Propozicija 2.1.3. *Konačan niz vektora* $(x_i)_{i=1}^m$ *u* $\mathcal{H}^n$ *je bazni okvir za* $\mathcal{H}^n$ *ako i samo ako je* $(x_i)_{i=1}^m$ *sustav izvodnica za* $\mathcal{H}^n$ *.*

Dokaz. Pretpostavimo da $(x_i)_{i=1}^m$ nije sustav izvodnica za $\mathcal{H}^n$, odnosno $\left[\{x_i\}_{i=1}^m\right] \neq \mathcal{H}^n$. To znači da je dimenzija potprostora Y manja od n pa je dimenzija ortogonalnog komplementa $Y^\perp$ prema teoremu o rangu i defektu barem 1. Neka je $v \in Y^\perp$, $v \neq 0$. Budući da je v ortogonalan svakom vektoru iz Y, slijedi $\sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 = 0$. Iz ovoga slijedi da ne postoji $A > 0$ takav da lijeva strana nejednakosti u (2.1) vrijedi za sve vektore iz V. Dakle, $(x_i)_{i=1}^m$ nije bazni okvir. Dokazom po kontrapoziciji pokazali smo da je svaki bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ sustav izvodnica prostora $\mathcal{H}^n$.

Obrat ćemo također dokazati dokazom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da $(x_i)_{i=1}^m$ nije bazni okvir za $\mathcal{H}^n$. S obzirom da gornja granica baznog okvira postoji za svaki konačan niz, to znači da ne postoji $A > 0$ koji zadovoljava (2.1) za sve vektore iz V. Tada za svaki prirodan broj k postoji $a_k \in \mathcal{H}^n$ takav da je $\|a_k\| = 1$ i $\sum_{i=1}^m \left|\langle a_k, x_i\rangle\right|^2 < \frac{1}{k}$. Budući da je $(a_k)_{k=1}^\infty$ omeđen niz, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu zaključujemo da $(a_k)_{k=1}^\infty$ ima konvergentan podniz. Neka je taj podniz $\left(a_{k_j}\right)$ i neka je a limes tog podniza. Tada iz $\sum_{i=1}^m \left|\langle a_{k_j}, x_i\rangle\right|^2 < \frac{1}{k_j}$, uzimanjem limesa $j \to \infty$, dobivamo $\sum_{i=1}^m \left|\langle a, x_i\rangle\right|^2 = 0$. Iz ovoga slijedi da je a ortogonalan svim vektorima x_i, $i = 1, ..., m$. Stoga mora biti ili $a = 0$ ili $\left[\{x_i\}_{i=1}^m\right] \neq \mathcal{H}^n$. Budući da je $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ to je $\|a\| = \lim_{k\to\infty} \|a_k\| = 1$ pa prva mogućnost otpada. Slijedi da je $\left[\{x_i\}_{i=1}^m\right] \neq \mathcal{H}^n$. □

U sljedećoj propoziciji govorimo o odnosu između elemenata baznog okvira i njegovih granica.

Propozicija 2.1.4. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir Hilbertova prostora $\mathcal{H}^n$ s granicama A i B. Tada vrijedi:*

(i) $\|x_i\| \leq \sqrt{B}$ za svaki $i = 1, \dots, m$.

(ii) Ako je $\|x_i\| = \sqrt{B}$, onda je $x_i \perp \left[\{x_j\}_{j\neq i}\right]$.

(iii) Ako je $\|x_i\| < \sqrt{A}$, onda je $x_i \in \left[\{x_j\}_{j\neq i}\right]$.

Dokaz. (i) Za svaki x_i vrijedi

$$A\|x_i\|^2 \leq \sum_{j=1}^m \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 = \|x_i\|^4 + \sum_{j\neq i} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 \leq B\|x_i\|^2 .$$

Odavde je $\|x_i\|^4 \leq B\|x_i\|^2$, odakle slijedi $\|x_i\|^2 \leq B$.

(ii) Ako je $\|x_i\| = \sqrt{B}$, onda desna strana prethodne nejednakosti daje

$$\sum_{j\neq i} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 = 0, \quad \text{tj. } x_i \perp \left[\{x_j\}_{j\neq i}\right].$$

(iii) Pretpostavimo sada da je $\|x_i\| < \sqrt{A}$. Neka je P ortogonalan projektor na potprostor $\left[\{x_j\}_{j\neq i}\right]$. Uvrstimo li u definiciju baznog okvira $v = (I - P)x_i$ slijedi

$$A \left\|(I-P)x_i\right\|^2 \leq \left\|(I-P)x_i\right\|^4 + \sum_{j\neq i} \left|\langle (I-P)x_i, x_j\rangle\right|^2 = \left\|(I-P)x_i\right\|^4 + \sum_{j\neq i} \left|\langle x_i, (I-P)x_j\rangle\right|^2 .$$

Budući da je $Px_j = x_j$, to jest $(I - P)\,x_j = 0$ za $j \neq i$, slijedi $A\left\|(I-P)x_i\right\|^2 \leq \left\|(I-P)x_i\right\|^4$. Ako je $(I - P)\,x_i \neq 0$, onda je $A \leq \left\|(I-P)x_i\right\|^2 \leq \|x_i\|^2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $\|x_i\|^2 < A$. Dakle, mora biti $(I - P)\,x_i = 0$, odnosno $x_i = Px_i \in \left[\{x_j\}_{j\neq i}\right]$.

□

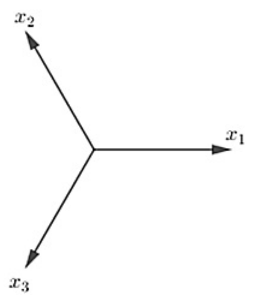
2.2 Parsevalovi bazni okviri

Definicija 2.2.1. *Niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ Hilbertova prostora $\mathcal{H}^n$ zove se* ***Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$*** *ako za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2. \tag{2.2}$$

Drugim riječima, Parsevalov bazni okvir je napeti bazni okvir s granicama $A = B = 1$.
Navedimo nekoliko primjera Parsevalovih baznih okvira.

Primjer 2.2.2. *Niz vektora* $\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} \right\}$ *je Parsevalov bazni okvir za* $\mathbb{R}^2$. Ovaj bazni okvir se naziva Mercedes-Benz baznim okvirom, a rotirajući vektore baznog okvira za 90° i crtajući ih u krugu radijusa $\sqrt{\frac{2}{3}}$, postaje jasno i zašto. Na slici 2.1 prikazani su vektori tog baznog okvira.



Slika 2.1: Mercedes-Benz bazni okvir

Slijede kratki dokazi dviju tvrdnji pomoću kojih ćemo iznijeti važnu razliku između ortonormirane baze i Parsevalovog baznog okvira.

Korolar 2.2.3. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$.*

(i) Za sve $i = 1, \dots, m$ vrijedi $\|x_i\| \leq 1$.

(ii) Ako je $x_i \neq 0$, onda je $\|x_i\| = 1$ ako i samo ako je x_i ortogonalan na svaki x_j kada je $j \neq i$.

Dokaz. (i) Dokaz tvrdnje slijedi iz propozicije 2.1.4.
(ii) Ako je $\|x_i\| = 1$, onda je prema propoziciji 2.1.4 vektor x_i ortogonalan na x_j za svaki $j = 1, \dots, m,\ j \neq i$.

Dokažimo i obrat. Neka je x_i ortogonalan na svaki x_j za $j \neq i$. Tada

$$\|x_i\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left|\langle x_i, x_j\rangle\right|^2 = \left|\langle x_i, x_i\rangle\right|^2 = \|x_i\|^4 .$$

Dakle, $\|x_i\|^2 = \|x_i\|^4$ iz čega slijedi da je $\|x_i\|$ jednaka 0 ili 1. Budući da smo pretpostavili da je $x_i \neq 0$, slijedi da je $\|x_i\| = 1$. □

Očito je svaka ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$ Parsevalov bazni okvir. Obrat općenito ne vrijedi što ćemo i vidjeti iz sljedećeg primjera.

Primjer 2.2.4. *Neka je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$.*

(1) Niz vektora $(x_i)_{i=1}^{2n} = (e_1, 0, e_2, 0, \dots, e_n, 0)$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$.

Zaista, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi $\sum_{i=1}^{2n}\left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\langle v, e_i\rangle\right|^2 = \|v\|^2$ iz čega slijedi da su konstante A i B jednake 1, odnosno niz vektora $(x_i)_{i=1}^{2n}$ je Parsevalov bazni okvir. Ovime smo pokazali da Parsevalov bazni okvir može sadržavati nulvektore.

(2) Niz vektora $(x_i)_{i=1}^{n(n+1)/2} = (e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{n}})$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$. Zaista, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 = \alpha_1^2 + \frac{\alpha_2^2}{2} + \frac{\alpha_2^2}{2} + \frac{\alpha_3^2}{3} + \frac{\alpha_3^2}{3} + \frac{\alpha_3^2}{3} + \frac{\alpha_n^2}{n} \dots + \frac{\alpha_n^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \|v\|^2 .$$

Ovime smo pokazali da Parsevalov bazni okvir može sadržavati odgovarajući broj istih vektora.

Sljedeća propozicija daje nužne i dovoljne uvjete kada je Parsevalov bazni okvir ortonormirana baza prostora.

Propozicija 2.2.5. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$. Tada je $(x_i)_{i=1}^m$ ortonormirana baza ako i samo ako je svaki x_i jedinični vektor.*

Dokaz. Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ takav da je $\|x_i\| = 1$ za svaki i. Iz korolara 2.2.3 zaključujemo da je $(x_i)_{i=1}^m$ ortogonalan skup. Posebno, $\{x_1, \ldots, x_m\}$ je linearno nezavisan skup. Budući da je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$, on je i skup izvodnica za $\mathcal{H}^n$, dakle baza za $\mathcal{H}^n$. Kako su vektori x_i, $i = 1, \ldots, m$ jedinični i međusobno ortogonalni vektori, $(x_i)_{i=1}^m$ je ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$. □

Propozicija 2.2.6. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$. Tada je $n = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2$.*

Dokaz. Neka je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}^n$. Tada

$$n = \sum_{j=1}^n \left\|e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left|\langle e_j, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left|\langle x_i, e_j\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

□

Propozicija 2.2.7. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ s granicama A i B te neka je $P : \mathcal{H}^n \to W$ ortogonalan projektor na potprostor W prostora $\mathcal{H}^n$. Tada je $(Px_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora W čije su granice A i B.*

Posebno, ako je $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ i $P : \mathcal{H}^n \to W$ ortogonalan projektor, onda je $(Px_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir za W.

Dokaz. Za svaki vektor v iz W vrijedi

$$A\|v\|^2 = A\|Pv\|^2 \le \sum_{i=1}^m \left|\langle Pv, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, Px_i\rangle\right|^2 \le B\|Pv\|^2 = B\|v\|^2 .$$

Ovime smo dokazali prvu tvrdnju; poseban slučaj slijedi direktno. □

Sljedeći korolar je direktna posljedica prethodne propozicije.

Korolar 2.2.8. *Neka je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$ i neka je $P : \mathcal{H}^n \to W$ ortogonalan projektor na potprostor W prostora $\mathcal{H}^n$. Tada je $(Pe_i)_{i=1}^n$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$.*

2.3 Bazni okviri i operatori

Dva najvažnija operatora koja vežemo uz bazne okvire su operator analize i operator sinteze.

Definicija 2.3.1. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz vektora u $\mathcal{H}^n$. Operator $T : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}^m$ definiran sa*

$$Tv = \begin{bmatrix} \langle v, x_1 \rangle \\ \langle v, x_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, x_m \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle e_i$$

nazivamo ***operatorom analize*** *baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$, pri čemu je $(e_i)_{i=1}^m$ kanonska baza za $\mathbb{C}^m$. Njegov adjungirani operator $T^* : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}^n$ zovemo* ***operatorom sinteze*** *baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$.*

Uočimo, za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ i $w \in \mathbb{C}^m$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle Tv, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle e_i \, , \sum_{j=1}^m \langle w, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle v, x_i \rangle \, \langle w, e_j \rangle \delta_{ij} = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle \, \langle e_i, w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle v, \, \langle w, e_i \rangle x_i \rangle = \left\langle v, \, \sum_{i=1}^m \langle w, e_i \rangle x_i \right\rangle = \langle v, T^* w \rangle. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $w \in \mathbb{C}^m$ je $T^* w = \sum_{i=1}^m \langle w, e_i \rangle x_i$. Posebno, $T^* e_j = x_j$ za $j = 1, \ldots, m$. Ako je $w = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{C}^m$, onda je $T^* (\alpha_i)_{i=1}^m = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$.

Sljedeća propozicija daje karakterizaciju baznih okvira pomoću pridruženog operatora analize.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz vektora Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^n$. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) $(x_i)_{i=1}^m$ *je bazni okvir za* $\mathcal{H}^n$.

(ii) $T : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}^m$ *je injektivan operator.*

(iii) $T^* : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}^n$ *je surjektivan operator.*

(iv) Operator $T^*T : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ *je invertibilan.*

Nadalje, ako je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$, tada su $\left\|T^{-1}\right\|^{-2}$ i $\|T\|^2$ optimalne granice baznog okvira, gdje je T^{-1} inverz od $T : \mathcal{H}^n \to \mathrm{Im}(T)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo suprotno, tj. da za neki $v \in \mathcal{H}^n, v \neq 0$ vrijedi $Tv = 0$. Tada je $\langle v, x_i \rangle = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Dakle, vektor v je ortogonalan svakom od vektora x_i. Stoga v nije iz linearne ljuske $\left[\{x_i\}_{i=1}^m\right]$, odnosno $\left[\{x_i\}_{i=1}^m\right] \neq \mathcal{H}^n$. Tada prema propoziciji 2.1.3 slijedi da $(x_i)_{i=1}^m$ nije bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Neka je T injektivan operator, odnosno $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Prema propoziciji 1.2.5 slijedi da je $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ako i samo ako je $\operatorname{Im} T^* = \mathcal{H}^n$, odnosno ako i samo ako je T^* surjektivan operator.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Dovoljno je pokazati da je T^*T injektivan i tada će tvrdnja slijediti iz teorema o rangu i defektu linearnog operatora. Neka je $T^*Tx = 0$. Tada je $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = 0$, odnosno $Tx = 0$. Budući da je T injektivan operator, slijedi da je $x = 0$ pa slijedi injektivnost od T^*T.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Neka je $S = T^*T$ invertibilan operator na $\mathcal{H}^n$. Iz definicije operatora T i T^* za svaki v iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi $Sv = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle x_i$. Stavimo li $S^{-1}v$ umjesto v dobivamo $v = \sum_{i=1}^m \langle S^{-1}v, x_i \rangle x_i$. Dakle, $(x_i)_{i=1}^m$ razapinje $\mathcal{H}^n$ pa je njegova linearna ljuska jednaka cijelom prostoru, odnosno $(x_i)_{i=1}^m$ je bazni okvir za $\mathcal{H}^n$.

Dokažimo dodatnu tvrdnju propozicije. Pretpostavimo da je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi $Tv = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle e_i$. Tada je

$$\sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2 = \|Tv\|^2 \leq \|T\|^2 \, \|v\|^2$$

pa je gornja granica baznog okvira upravo $\|T\|^2$. Budući da je T bijekcija na svojoj slici, tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ imamo

$$\|v\|^2 = \left\|T^{-1}Tv\right\|^2 \leq \left\|T^{-1}\right\|^2 \|Tv\|^2 = \left\|T^{-1}\right\|^2 \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2.$$

Iz prethodnog slijedi $\frac{\|v\|^2}{\|T^{-1}\|^2} \leq \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2$ pa je $\left\|T^{-1}\right\|^{-2}$ donja granica baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$. □

Operator iz prethodne propozicije $S = T^*T : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$, gdje je T pridruženi operator analize, nazivamo **operator baznog okvira** $(x_i)_{i=1}^m$.

Vidimo da za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\langle Sv, v \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i \rangle\right|^2. \tag{2.3}$$

Teorem 2.3.3. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom baznog okvira S i granicama A i B. Tada je S pozitivan, invertibilan operator i vrijedi*

$$A \cdot Id \leq S \leq B \cdot Id.$$

Dokaz. Budući da je $S^* = (T^*T)^* = T^*T = S$, slijedi da je S hermitski operator.

Nadalje, iz (2.3) slijedi da je $\langle Sv, v\rangle = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 \geq 0$ za svaki vektor v iz $\mathcal{H}^n$ pa je S pozitivan operator.

Iz $A\|v\|^2 \leq \langle Sv, v\rangle$ slijedi da ako je $Sv = 0$, onda je $v = 0$, odnosno S je injektivan. Budući da injektivnost od S implicira njegovu surjektivnost, slijedi da je S bijektivan, odnosno invertibilan. Iz definicije baznog okvira i (2.3) slijedi da za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\langle Av, v\rangle = A\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 = \langle Sv, v\rangle \leq B\|v\|^2 = \langle Bv, v\rangle,$$

iz čega slijedi da je $A \cdot Id \leq S \leq B \cdot Id$. □

Napete bazne okvire možemo opisati kao one bazne okvire kojima je operator baznog okvira jednak pozitivnom skalarnom operatoru. Sljedeća propozicija daje još neke karakterizacije napetih baznih okvira.

Propozicija 2.3.4. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom analize T. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) $(x_i)_{i=1}^m$ je A-napeti bazni okvir za $\mathcal{H}^n$, tj. za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi $A\|v\|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2$.

(ii) Operator baznog okvira jednak je skalarnom operatoru, točnije $S = A \cdot Id$.

(iii) $v = A^{-1}\sum_{i=1}^m \langle v, x_i\rangle x_i$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$.

(iv) $\frac{T}{\sqrt{A}}$ je izometrija.

Posebno, $(x_i)_{i=1}^m$ je Parsevalov bazni okvir ako i samo ako je operator baznog okvira jednak identiteti.

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Iz prethodnog teorema 2.3.3 slijedi $A \cdot Id \leq S \leq A \cdot Id$, odnosno vrijedi $S = A \cdot Id$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Očito je iz definicije operatora baznog okvira.
$(i) \Leftrightarrow (iv)$ Za operator analize T vrijedi $\|Tv\| = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2$ pa imamo da je

$$\|Tv\|^2 = A\|v\|^2 \Leftrightarrow \|Tv\| = \sqrt{A}\|v\| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{A}}\|Tv\| = \|v\| \Leftrightarrow \left\|\frac{1}{\sqrt{A}}Tv\right\| = \|v\|.$$

Iz zadnje jednakosti zaključujemo da je $\frac{T}{\sqrt{A}}$ izometrija.

Dodatna tvrdnja slijedi iz prvog dijela propozicije. □

Sljedeći teorem otkriva zanimljivu vezu između svojstvenih vrijednosti pripadnog operatora baznog okvira S i optimalnih granica baznog okvira.

Teorem 2.3.5. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ i S operator baznog okvira čije su svojstvene vrijednosti $(\alpha_j)_{j=1}^n$ poredane u rastućem poretku. Tada je $A_{op} = \alpha_1$ optimalna donja granica baznog okvira i $B_{op} = \alpha_n$ optimalna gornja granica baznog okvira.*

Dokaz. Budući da je S pozitivan i invertibilan operator baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$ sve njegove svojstvene vrijednosti su pozitivni realni brojevi.

Nadalje, neka je $(e_j)_{j=1}^n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$ sastavljena od svojstvenih vektora operatora S s odgovarajućim svojstvenim vrijednostima $(\alpha_j)_{j=1}^n$. Tada za proizvoljan vektor v iz $\mathcal{H}^n$ imamo $v = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle e_j$ pa je

$$Sv = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle Se_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v, e_j\rangle e_j. \tag{2.4}$$

Sada prema (2.3) slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 &= \langle Sv, v\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v, e_j\rangle e_j, \sum_{j=1}^n \langle v, e_j\rangle e_j \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \left|\langle v, e_j\rangle\right|^2 \le \alpha_n \sum_{j=1}^n \left|\langle v, e_j\rangle\right|^2 = \alpha_n \|v\|^2,\end{aligned}$$

pa je $B_{op} \le \alpha_n$. Jednakost slijedi iz prethodnog računa uzimajući $v = e_n$ jer je tada

$$\sum_{i=1}^m \left|\langle e_n, x_i\rangle\right|^2 = \langle Se_n, e_n\rangle = \langle \alpha_n e_n, e_n\rangle = \alpha_n.$$

Na sličan način iz jednadžbe (2.4) slijedi da je optimalna donja granica A_{op} veća ili jednaka od α_1 jer je

$$\sum_{i=1}^m \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 \ge \alpha_1 \sum_{j=1}^n \alpha_j \left|\langle v, x_i\rangle\right|^2 = \alpha_1 \|v\|^2.$$

Jednakost slijedi iz prethodnog računa uzimajući $v = e_1$, jer je tada

$$\sum_{i=1}^m \left|\langle e_1, x_i\rangle\right|^2 = \langle Se_1, e_1\rangle = \langle \alpha_1 e_1, e_1\rangle = \alpha_1.$$

□

Sljedeći teorem predstavlja odnos između vektora baznog okvira te svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti pripadnog operatora baznog okvira.

Teorem 2.3.6. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s operatorom baznog okvira S čiji su ortonormirani svojstveni vektori $(e_j)_{j=1}^n$, a $(\alpha_j)_{j=1}^n$ odgovarajuće svojstvene vrijednosti. Tada za svaki $j = 1, \dots, n$ vrijedi*

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^m \left|\langle e_j, x_i\rangle\right|^2 .$$

Posebno,

$$\operatorname{Tr} S = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 .$$

Dokaz. Dokaz prve tvrdnje slijedi iz (2.3) jer je

$$\sum_{i=1}^m \left|\langle e_j, x_i\rangle\right|^2 = \langle S e_j, e_j\rangle = \langle \alpha_j e_j, e_j\rangle = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

a drugi iz

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} S &= \sum_{j=1}^n \langle S e_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \alpha_j e_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left|\langle e_j, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left|\langle e_j, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 . \end{aligned}$$

□

2.4 Slični i unitarno izomorfni bazni okviri

U ovoj sekciji ćemo definirati slične i unitarno izomorfne bazne okvire te promotriti njhova svojstva.

Definicija 2.4.1. *Bazne okvire $(x_i)_{i=1}^m$ i $(y_i)_{i=1}^m$ iz $\mathcal{H}^n$ nazivamo* ***sličnim baznim okvirima*** *ako postoji invertibilan operator $F : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ takav da je $F x_i = y_i$ za svaki i.*

Bazne okvire nazivamo ***unitarno izomorfnim baznim okvirima*** *ako postoji unitaran operator F s ovim svojstvom.*

Uočimo, uzmemo li za operator F identični operator, dobivamo da je svaki bazni okvir sličan samom sebi.

Napomenimo da je sličnost baznih okvira relacija ekvivalencije u kojoj je poredak elemenata važan. Primjerice, ako je $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$, onda $\{0, e_1, \dots, e_n\}$ i $\{e_1, 0, e_2, \dots, e_n\}$ nisu slični bazni okviri iako sadrže iste elemente. Primjer relacije ekvivalencije koja dopušta permutacije vektora baznih okvira predstavit ćemo u idućoj podsekciji.

Sljedeća propozicija tvrdi da je svaki bazni okvir sličan odgovarajućem Parsevalovom baznom okviru. Budući da je operator baznog okvira S uvijek pozitivan i invertibilan, postoji njegov pozitivni drugi korijen $S^{\frac{1}{2}}$. Inverz operatora S je također pozitivan operator pa je stoga i njegov drugi korijen pozitivan. U dokazu najavljene propozicije ćemo upravo koristiti pozitivan drugi korijen inverza kojeg označimo sa $S^{-\frac{1}{2}}$.

Propozicija 2.4.2. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ i T pripadni operator analize. Tada je $\left(S^{-\frac{1}{2}}x_i\right)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$.*

Dokaz. Budući da je operator baznog okvira S uvijek pozitivan invertibilan operator, drugi korijen $S^{-\frac{1}{2}}$ operatora S^{-1} je dobro definiran. Iz definicije baznog okvira S i činjenice da su S i $S^{-\frac{1}{2}}$ hermitski operatori, slijedi

$$\begin{aligned} v = S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}v &= S^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^m \left\langle S^{-\frac{1}{2}}v, x_i\right\rangle x_i \\ &= S^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^m \left\langle v, S^{-\frac{1}{2}}x_i\right\rangle x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle v, S^{-\frac{1}{2}}x_i\right\rangle S^{-\frac{1}{2}}x_i. \end{aligned}$$

Dakle, $\left(S^{-\frac{1}{2}}x_i\right)_{i=1}^m$ je Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}^n$. □

Bazni okvir $\left(S^{-\frac{1}{2}}x_i\right)_{i=1}^m$ iz prethodne propozicije naziva se **kanonski Parsevalov bazni okvir** pridružen baznom okviru $(x_i)_{i=1}^m$.

Sljedeća lema će u odnos staviti sličnost i unitarnu ekvivalenciju između dva Parsevalova bazna okvira.

Lema 2.4.3. *Ako su dva Parsevalova bazna okvira slična, onda su oni unitarno ekvivalentni.*

Dokaz. Neka su $(x_i)_{i=1}^m$ i $(y_i)_{i=1}^m$ slični Parsevalovi bazni okviri prostora $\mathcal{H}^n$ i neka je T invertibilan operator na $\mathcal{H}^n$ dan sa $Tx_i = y_i$ za $i = 1, \ldots, m$. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\left\|T^*v\right\|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle T^*v, x_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, Tx_i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, y_i\rangle\right|^2 = \|v\|^2.$$

Ovo pokazuje da je operator T^* izometrija. Prema propoziciji 1.2.7 slijedi $TT^* = I$. Također znamo da je T invertibilan operator pa stoga $T^* = T^{-1}$ iz čega slijedi, po propoziciji 1.2.8, da je T unitaran operator. □

Istaknimo sljedeće: ako je bazni okvir $(x_i)_{i=1}^m$ unitarno ekvivalentan Parsevalovom baznom okviru, onda je $(x_i)_{i=1}^m$ i sam Parsevalov bazni okvir.

Propozicija 2.4.4. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz vektora u $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom analize T i neka je $F : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ linearan operator. Tada je operator analize za niz $(Fx_i)_{i=1}^m$ jednak TF^*.*

Štoviše, $(x_i)_{i=1}^m$ je bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ i F invertibilan operator ako i samo ako je $(Fx_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$.

Dokaz. Neka je $(e_i)_{i=1}^m$ ortonormirana baza prostora $\mathcal{H}^n$. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, Fx_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{m} \langle F^* v, x_i \rangle e_i = TF^* v$$

što znači da je TF^* operator analize niza $(Fx_i)_{i=1}^m$.

Ako je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ i F invertibilan linearan operator, onda su T^* i F surjektivni pa je i FT^* surjektivan. Prema propoziciji 2.3.2 slijedi da je $(Fx_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$.

Obratno, ako je $(Fx_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$, onda je njegov operator sinteze FT^* surjektivan pa je i F surjektivan. □

Sljedeći teorem daje karakterizaciju izomorfnih baznih okvira.

Teorem 2.4.5. *Neka su $(x_i)_{i=1}^m$ i $(y_i)_{i=1}^m$ bazni okviri za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorima analize T_1 i T_2. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $(x_i)_{i=1}^m$ *je izomorfan* $(y_i)_{i=1}^m$.

(ii) $\operatorname{Im} T_1 = \operatorname{Im} T_2$.

(iii) $\operatorname{Ker} T_1^* = \operatorname{Ker} T_2^*$

Ako vrijedi bilo koji od gore navedenih ekvivalentnih uvjeta, onda je operator $F : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ takav da je $Fx_i = y_i, i = 1, ..., m$, dan sa $F = T_2^* \left(T_1^*|_{\operatorname{Im}(T_1)}\right)^{-1}$.

Dokaz. (*ii*) ⇔ (*iii*) Slijedi iz ortogonalne komplementarnosti.

$$\operatorname{Ker} T_1^* = (\operatorname{Im} T_1)^\perp = (\operatorname{Im} T_2)^\perp = \operatorname{Ker} T_2^*,$$

i

$$\operatorname{Im} T_1 = (\operatorname{Ker} T_1{}^*)^\perp = (\operatorname{Ker} T_2{}^*)^\perp = \operatorname{Im} T_2.$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Neka je F invertibilan operator na $\mathcal{H}^n$ takav da je $Fx_i = y_i, i = 1, ..., m$. Tada prema propozicji 2.4.4 slijedi da je $FT_1^* = T_2^*$ pa imamo da je $T_2^*x = 0$ ako i samo ako je $FT_1^*x = 0$, a to je ako i samo ako je $T_1^*x = 0$, odnosno $x \in \operatorname{Ker} T_1^* \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} T_2^*$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $W = \operatorname{Im} T_1 = \operatorname{Im} T_2$ i neka je P ortogonalni projektor na W. Tada su $T_1^*, T_2^* : \mathcal{H}^n \to W$ bijektivni pa su im restrikcije na W također bijektivne i za njih vrijedi $x_i = T_1^*e_i = T_1^*Pe_i$ i $y_i = T_2^*e_i = T_2^*Pe_i$, pri čemu je $(e_i)_{i=1}^m$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^m$. Tada je operator $F = T_2^*\left(T_1^*|_W)\right)^{-1} : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ bijekcija za koju vrijedi

$$Fx_i = T_2^*\left(T_1^*|_W)\right)^{-1} T_1^*Pe_i = T_2^*Pe_i = y_i, \quad i = 1, ..., m$$

što dokazuje (i) i dodatnu izjavu o operatoru F. □

Za kraj sekcije slijedi propozicija koja donosi karakterizaciju unitarne izomorfnosti dva bazna okvira preko njihovih operatora analize i sinteze.

Propozicija 2.4.6. *Neka su $(x_i)_{i=1}^m$ i $(y_i)_{i=1}^m$ dva bazna okvira prostora $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorima analize T_1 i T_2, redom. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $(x_i)_{i=1}^m$ *i* $(y_i)_{i=1}^m$ *su unitarno izomorfni.*

(ii) $\left\|T_1^*v\right\| = \left\|T_2^*v\right\|$ *za svaki* $v \in \mathbb{C}^m$.

(iii) $T_1T_1^* = T_2T_2^*$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$ Neka je F unitaran operator na $\mathcal{H}^n$ takav da $Fx_i = y_i$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Tada prema propoziciji 2.4.4 imamo da je $T_2 = T_1F^*$ pa dobivamo

$$T_2T_2^* = T_1F^*FT_1^* = T_1T_1^*.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ $\left\|T_1^*v\right\|^2 = \left\|\langle T_1^*v, T_1^*v\rangle\right\| = \left\|\langle T_1T_1^*v, v\rangle\right\| = \left\|\langle T_2T_2^*v, v\rangle\right\| = \left\|\langle T_2^*v, T_2^*v\rangle\right\| = \left\|T_2^*v\right\|^2$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Budući da iz (ii) slijedi da je $\operatorname{Ker} T_1^* = \operatorname{Ker} T_2^*$ pa je prema teoremu 2.4.5 $Fx_i = y_i$, $i = 1, \ldots, m$, gdje je $F = T_2^*\left(T_1^*|_{\operatorname{Im} T_1}\right)^{-1}$. Zbog (ii) je za svaki $v \in \mathcal{H}^n$

$$\left\|T_2^*\left(T_1^*|_{\operatorname{Im} T_1}\right)^{-1} v\right\| = \left\|T_1^*\left(T_1^*|_{\operatorname{Im} T_1}\right)^{-1} v\right\| = \|v\|.$$

□

Poglavlje 3

Bazni okviri u $\mathbb{R}^2$

U ovom poglavlju ćemo razviti geometrijsku interpretaciju napetih baznih okvira u $\mathbb{R}^2$. Iako se ova karakterizacija ne može poopćiti na višedimenzionalne prostore, daje nam dobar uvid u vrste napetih baznih okvira koje postoje u $\mathbb{R}^2$.

U prvoj sekciji ćemo definirati temeljne pojmove koje koristimo u ovom poglavlju, u drugoj promotriti ekvivalentne bazne okvire, a u trećoj konstrukcije novih baznih okvira iz postojećih dodavanjem i uklanjanjem vektora baznog okvira.

3.1 Dijagram vektori

Neka je v iz $\mathbb{R}^2$ i neka je njegov prikaz u polarnim koordinatama jednak $v = \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$, gdje je θ kut kojeg vektor v zatvara sa pozitivnim dijelom x-osi.

Iz propozicije 2.3.4 znamo da je $(x_i)_{i=1}^m$, pri čemu je $x_i = \begin{bmatrix} a_i\cos\theta_i \\ a_i\sin\theta_i \end{bmatrix}$, A-napeti bazni okvir ako i samo ako je operator baznog okvira $S = A \cdot Id$. Operator baznog okvira $\left(x_i = \begin{bmatrix} a_i\cos\theta_i \\ a_i\sin\theta_i \end{bmatrix}\right)_{i=1}^m$ prostora $\mathbb{R}^2$ je tada matrica reda 2×2

$$S = T^*T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a_i^2\cos^2\theta_i & \sum_{i=1}^m a_i^2\cos\theta_i\sin\theta_i \\ \sum_{i=1}^m a_i^2\cos\theta_i\sin\theta_i & \sum_{i=1}^m a_i^2\sin^2\theta_i \end{bmatrix}.$$

Očito, S je skalarni operator ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^m a_i^2\cos^2\theta_i = \sum_{i=1}^m a_i^2\sin^2\theta_i \text{ i } \sum_{i=1}^m a_i^2\cos\theta_i\sin\theta_i = 0.$$

Primjenjujući trigonometrijske formule dvostrukog kuta slijedi da je operator S jednak skalarnom operatoru ako i samo ako je

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} a_i^2 \cos 2\theta_i \\ a_i^2 \sin 2\theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, početni niz vektora je napeti bazni okvir kada je zbroj novog niza vektora (u kojem je duljina vektora jednaka kvadratu početne duljine, a kut između vektora dvostruko veći) jednaka nulvektoru. Koristeći pravilo trokuta za zbrajanje vektora, konstrukcija napetog baznog okvira prostora $\mathbb{R}^2$ svedena je na problem geometrije ravnine.

U ovom poglavlju vektoru v iz $\mathbb{R}^2$, čiji je prikaz u polarnim koordinatama jednak $v = \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$, pridružujemo vektor $\tilde{v} = \begin{bmatrix} a^2\cos 2\theta \\ a^2 \sin 2\theta \end{bmatrix}$ kojeg nazivamo *dijagram vektor*. U nastavku ćemo upravo crtati dijagram vektore i promatrati njihov zbroj primjenjujući pravilo trokuta zbrajanja vektora. Budući da ćemo promatrati bazne okvire koji sadrže i više od dva vektora, vektore ćemo slagati tako da se kraj jednoga podudara sa početkom drugoga, a takav grafički prikaz ćemo jednostavno nazvati dijagramom. Dakle, u računu ćemo uzastopno primjenjivati pravilo trokuta za zbrajanje vektora.

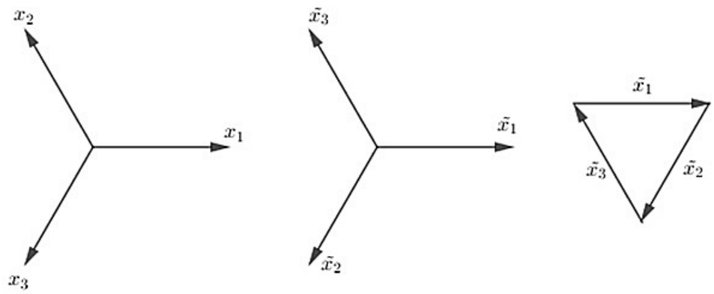
Zaključak prethodne diskusije formulirajmo u sljedećoj lemi.

Lema 3.1.1. *Niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ iz $\mathbb{R}^2$, $m \geq 2$, je napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ ako i samo ako je zbroj dijagram vektora $(\tilde{x}_i)_{i=1}^m$ jednak nulvektoru u $\mathbb{R}^2$.*

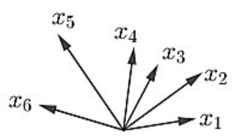
Za prvi primjer jediničnog napetog baznog okvira iz $\mathbb{R}^2$ možemo uzeti normirane vektore Mercedes-Benz baznog okvira iz primjera 2.2.2. Vektori normiranog baznog okvira tada su $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}$. Ti vektori i pripadni dijagram vektori baznog okvira su prikazani na prve dvije slike 3.1. Budući da su vektori jedinični, dijagram vektori čine jednakostraničan trokut pa su kutovi između vektora sukladni i iznose $\frac{2\pi}{3}$. Primjenjujući pravilo trokuta za zbrajanje vektora i svojstvo inverza za zbrajanje vektora slijedi da je suma dijagram vektora zaista jednaka nulvektoru, što i vidimo u trećem prikazu na slici 3.1.

Prema lemi 3.1.1 slijedi da je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}$ napeti bazni okvir.

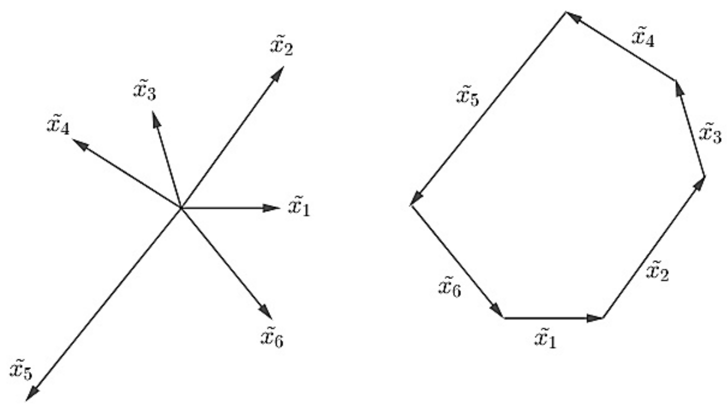
Sljedeći primjer napetog baznog okvira prostora $\mathbb{R}^2$ sastoji se od šest vektora, a njihov prikaz vidimo na slici 3.2. Na prvu nije očito da se radi o napetom baznom okviru, no pogledamo li pripadne dijagram vektore i njihovu sumu dobivamo da je ona jednaka nulvektoru. Lema 2.4.3 sada osigurava da je promatrani bazni okvir napet.



Slika 3.1: Jedinični Mercedes-Benz bazni okvir, pripadni dijagram vektori i dijagram



Slika 3.2: Primjer napetog baznog okvira za $\mathbb{R}^2$ sastavljenog od šest vektora



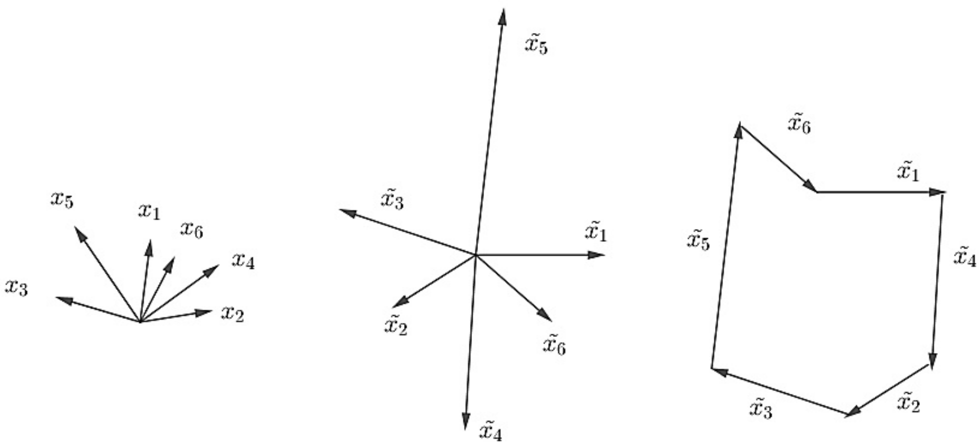
Slika 3.3: Dijagram vektori baznog okvira sa slike 3.2 i dijagram

3.2 Ekvivalentni bazni okviri u $\mathbb{R}^2$

Pretpostavimo da je niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ napeti bazni okvir. Prethodno smo pokazali da je tom baznom okviru moguće naći ekvivalentni bazni okvir te da relacija sličnosti ovisi o poretku elemenata baznog okvira. Drugim riječima, ako promijenimo poredak vektora baznog okvira dobiveni bazni okvir nije nužno sličan početnom. Budući da bismo željeli da takvi bazni okviri budu slični, opisat ćemo novu relaciju ekvivalencije u kojoj će bazni okvir koji sadrži iste vektore kao i početni, samo u drugom redoslijedu, biti ekvivalentan početnom. Kako ćemo promatrati permutaciju, rotaciju i simetriju vektora početnog baznog okrvira, za tu ekvivalenciju ćemo koristiti naziv **PRR-ekvivalencija**, *eng. permutation-rotation-reflection equivalence*.

Permutacija vektora niza može utjecati na promjenu pripadnog operatora analize baznog okvira, pa onda i operatora sinteze i operatora baznog okvira, ali ćemo u ovoj sekciji pretpostaviti da su navedeni operatori ekvivalentni. Isto ćemo pretpostaviti i za supstituciju vektora x_i njegovim aditivnim inverzom $-x_i$.

Kao primjer permutacije vektora baznog okvira promotrimo permutaciju baznog okvira sa slike 3.2.

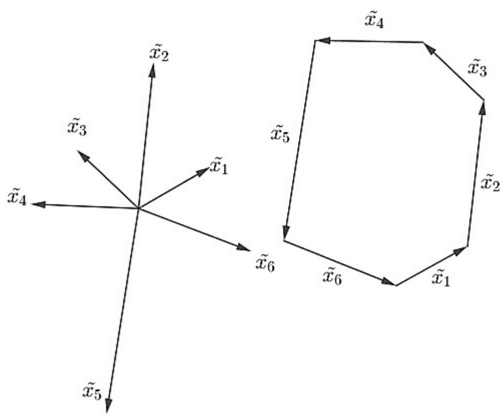


Slika 3.4: Bazni okvir koji je nastao permutacijom baznog okvira sa slike 3.2, njegovi dijagram vektori i dijagram.

Prikaz dijagram vektora prethodno definiranog baznog okvira nalazi se na slici 3.4. Uočimo da je suma dijagram vektora ostala nepromijenjena. Također, u oba prikaza dijagram vektori čine zatvorene poligone. Zaključimo, ako je početni bazni okvir bio napet, oba dijagrama će biti zatvoreni poligoni.

Sljedeća izometrija koju ćemo promotriti je rotacija. Uočimo, ako svaki vektor baznog okvira rotiramo za kut θ, dijagram vektori će biti rotirani za kut 2θ. Kao primjer navedimo bazni okvir za slike 3.2 čije vektore rotirajmo za kut θ. Prema prethodnoj napomeni dijagram, kojeg vidimo na slici 3.5, sastavljen je od istih vektora kao i na slici 3.3 samo je rotiran za kut 2θ, a rotacija nije utjecala na promjenu sume dijagram vektora.

Promotrimo još zamjenu vektora x_3 i x_5 baznog okvira sa slike 3.3 njihovim aditivnim inverzima $-x_3$ i $-x_5$. Neka je $x_3 = \begin{bmatrix} a_3 \cos\theta_3 \\ a_3 \sin\theta_3 \end{bmatrix}$. Tada je njegov aditivni inverz dan s $-x_3 =$



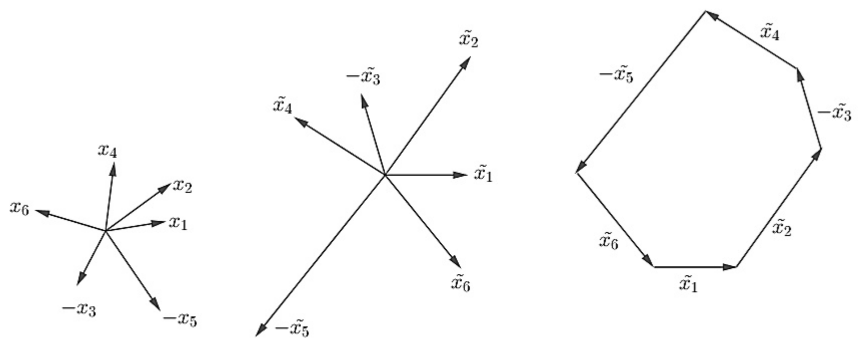
Slika 3.5: Bazni okvir koji je nastao rotacijom baznog okvira sa slike 3.2 za kut θ i njegov dijagram

$\begin{bmatrix} a_3 \cos(\pi + \theta_3) \\ a_3 \sin(\pi + \theta_3) \end{bmatrix}$. Odgovarajući dijagram vektori su:

$$\tilde{x}_3 = \begin{bmatrix} a_3^2 \cos 2\theta_3 \\ a_3^2 \sin 2\theta_3 \end{bmatrix},$$

$$-\tilde{x}_3 = \begin{bmatrix} a_3^2 \cos 2(\pi + \theta_3) \\ a_3^2 \sin 2(\pi + \theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3^2 (\cos 2\pi \cos 2\theta_3 - \sin 2\pi \sin 2\theta_3) \\ a_3^2 (\sin 2\pi \cos 2\theta_3 + \cos 2\pi \sin 2\theta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3^2 \cos 2\theta_3 \\ a_3^2 \sin 2\theta_3 \end{bmatrix} = \tilde{x}_3.$$

Dakle, usprkos simetriji, dijagrami baznih okvira će biti sukladni.



Slika 3.6: Bazni okvir koji je nastao zamijenom vektora x_3 i x_5 sa slike 3.2 njihovim aditivnim inverzima

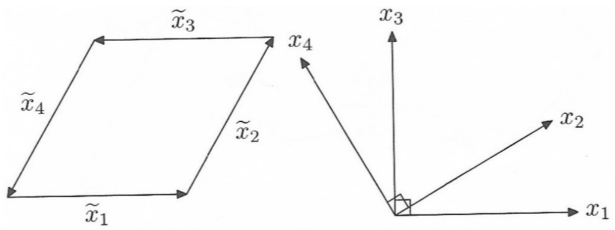
Nadalje, promotrimo bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$ koji se sastoji od četiri vektora. Ako je njegov dijagram romb ili paralelogram, odnosno ako se dijagram sastoji od dva para vektora koji su međusobno aditivni inverzi, onda se početni bazni okvir sastoji od dva para ortonormiranih vektora. Zaista, ako

$$\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} a_i^2 \cos 2\theta_i \\ a_i^2 \sin 2\theta_i \end{bmatrix} = -x_j = \begin{bmatrix} -a_j^2 \cos 2\theta_j \\ -a_j^2 \sin 2\theta_j \end{bmatrix},$$

onda je

$$a_i^2 \cos 2\theta_i = -a_j^2 \cos 2\theta_j \text{ i } a_i^2 \sin 2\theta_i = -a_j^2 \sin 2\theta_j.$$

Kvadriranjem i zbrajanjem prethodnih relacija slijedi da je $a_i = a_j$, a onda i $2\theta_i = 2\theta_j + \pi$, tj. $\theta_i = \theta_j + \frac{\pi}{2}$. Dakle, x_i je ortogonalan na x_j. Grafički se prikaz nalazi na slici 3.7.



Slika 3.7: Dijagram vektori baznog okvira koji se sastoji od 4 vektora

Prethodno razmatranje rezultira sljedećom propozicijom.

Propozicija 3.2.1. *Svaki jedinični napeti bazni okvir prostora* $\mathbb{R}^2$ *sastavljen od točno četiri vektora mora biti unija dvije ortonormirane baze prostora* $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_i)_{i=1}^4$ napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$ takav da je $\|x_i\| = 1$ za svaki $i = 1, \ldots, 4$. Sada je $\|\tilde{x}_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Kako su $\|x_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, 4$ duljine stranica četverokuta, zaključujemo da je taj četverokut nužno romb (jer ima sve stranice duljine 1). Tada je $\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_3$ i $\tilde{x}_2 = -\tilde{x}_4$. Kako smo pokazali u diskusiji koja prethodi propoziciji 3.2.1 slijedi da su x_1 i x_3 te x_2 i x_4 međusobno ortogonalni. □

Sljedeće pitanje koje se nameće jest hoće li m jediničnih vektora, $m \geq 2$, pri čemu je kut između svaka dva vektora veličine $\frac{2\pi}{m}$ također činiti napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$. U prethodnim primjerima smo vidjeli da tvrdnja vrijedi za $m = 3, 4$. Što se događa za veće m-ove otkriva sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2.2. *Niz vektora* $\left\{\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi j}{m} \\ \sin \frac{2\pi j}{m} \end{bmatrix}\right\}_{j=0}^{m-1}$, $m \geq 3$ *je napeti bazni okvir za* $\mathbb{R}^2$.

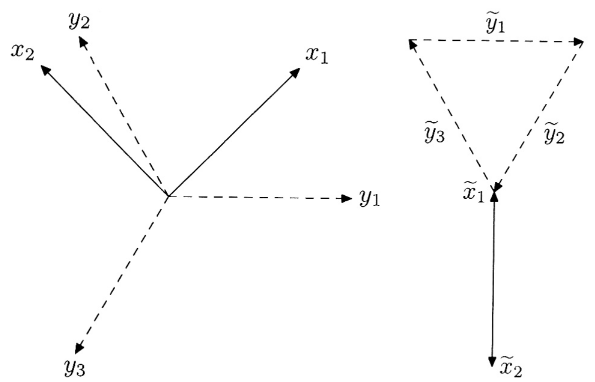
Dokaz. Odgovarajući dijagram vektori zadanog niza su $\left\{\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi j}{m}\\ \sin\frac{4\pi j}{m}\end{bmatrix}\right\}_{j=0}^{m-1}$. Budući da kompleksan broj z modula 1 možemo zapisati kao $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, slijedi

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(\cos\frac{4\pi j}{m} + i\sin\frac{4\pi j}{m}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{4\pi ij}{m}} = \frac{1-e^{\frac{4\pi im}{m}}}{1-e^{\frac{4\pi i}{m}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{4\pi i}{m}}} = 0.$$

Dakle, $\sum_{j=0}^{m-1}\begin{bmatrix}\cos\frac{4\pi j}{m}\\ \sin\frac{4\pi j}{m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ pa prema lemi 3.1.1 slijedi da je $\left\{\begin{bmatrix}\cos\frac{2\pi i}{m}\\ \sin\frac{2\pi i}{m}\end{bmatrix}\right\}_{j=0}^{m-1}$ za $m \geq 3$ napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$. □

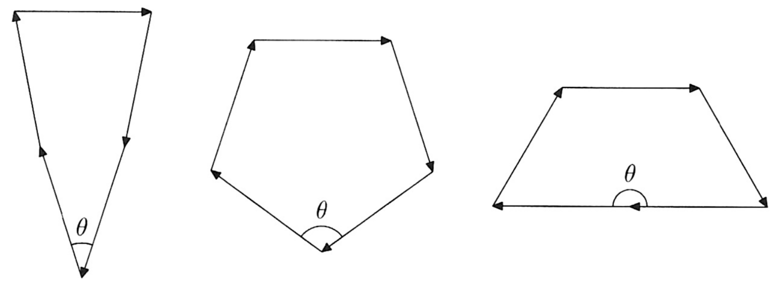
Svojstvo koje ćemo iduće istražiti jest može li se napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$ rastaviti na dva napeta bazna okvira. Već smo vidjeli da je jedinični napeti bazni okvir sastavljen od četiri vektora uvijek moguće rastaviti na uniju dvije ortonormirane baze prostora. Jasno je da jedinični napeti bazni okvir od tri vektora ne sadrži dovoljno vektora da bismo ga rastavili na dva sustava izvodnica za $\mathbb{R}^2$.

Promotrimo stoga jedinični napeti bazni okvir sastavljen od pet vektora koji je prikazan na slici 3.8. Iz dijagrama vidimo da je $\tilde{y_1}+\tilde{y_2}+\tilde{y_3} = 0$ i $\tilde{x_1}+\tilde{x_2} = 0$, što znači da su (y_1, y_2, y_3) i (x_1, x_2) dva napeta bazna okvira prostora $\mathbb{R}^2$. Uočimo da je kut θ između vektora $\tilde{x_1}$ i $\tilde{x_2}$



Slika 3.8: Dekompozicija baznog okvira koji sadrži pet vektora na ortonormiranu bazu i jedinični bazni okvir sastavljen od tri vektora

jednak 0. Povećamo li navedeni kut više ne ćemo početni jedinični napeti bazni okvir moći rastaviti na analogan način. Dijagrame koje ćemo dobiti nakon povećanja tog kuta mogu biti neki poput dijagrama na slici 3.9. Kako na tim dijagramima nemamo tri vektora (od ovih 5) koji u zbroju daju nulvektor, slijedi da nikoja 3 vektora iz ovih baznih okvira ne čine napeti bazni okvir. Dakle, ovi se bazni okviri ne mogu rastaviti na uniju dva napeta bazna okvira. Analogno zaključujemo za $m \geq 6$.



Slika 3.9: Dijagrami napetih baznih okvira prostora $\mathbb{R}^2$ koji se ne mogu napisati kao unija dva napeta bazna okvira

Obzirom na prethodno zapažanje slijedi propozicija.

Propozicija 3.2.3. *(i) Za svaki $m \geq 2$ postoji jedinični napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ koji sadrži m vektora.*

(ii) Za svaki m, $m \neq 4$ postoji jedinični napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ koji nije unija od dva ili više napeta bazna okvira prostora $\mathbb{R}^2$.

3.3 (k, l)-zamjena vektora baznog okvira

U ovoj sekciji ćemo promatrati slučajeve u kojima iz baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$ prostora $\mathbb{R}^2$ možemo ukloniti, dodati ili zamijeniti vektore tako da rezultat promjene bude bazni okvir ili napeti bazni okvir. Za početak definirajmo (k, l)-zamjenu.

(k, l)**-zamjena** je operacija na konačnom nizu vektora u kojoj je konačan broj vektora (moguće i nula) uklonjeno iz niza i konačan broj (moguće i nula) vektora je dodano u niz. Preciznije, (k, l)-zamjena iz niza vektora uklanja njih k, a dodaje ih l.

Od posebne zanimljivosti u ovoj sekciji će nam biti dvije vrste (k, l)-zamjena vektora baznog okvira: one u kojima napeti bazni okvir nakon uklanjanja vektora ostaje napet i one u kojima početni niz vektora dodavanjem vektora postaje napeti bazni okvir.

Propozicija 3.3.1. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$, $m \geq 3$, jedinični napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$. Tada je jedina $(2, 2)$-zamjena baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$ u kojoj su uklonjena dva neortogonalna vektora, a napetost baznog okvira je očuvana, je operacija identitete u kojoj su vektori zamijenjeni sa sobom uz moguću permutaciju.*

Dokaz. Pretpostavimo da su iz jediničnog napetog baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$ uklonjeni x_{m-1} i x_m. Očito je da ako su oni ortogonalni, tvorit će napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ kao i preostali vektori. U ovom slučaju bismo mogli dodati bilo koja dva ortonormirana vektora i tako dobiti novi napeti bazni okvir.

Pretpostavimo sada da uklonjeni vektori x_{m-1} i x_m nisu ortogonalni. Neka je $y = \sum_{i=1}^{m-2} \tilde{x_i}$ suma preostalih dijagram vektora. Kako uklonjeni vektori nisu ortogonalni, slijedi da $\tilde{x_{m-1}} + \tilde{x_m} \neq 0$. S druge strane, $(x_i)_{i=1}^m$ je napeti bazni okvir pa prema lemi 3.1.1 imamo $\tilde{x_{m-1}} + \tilde{x_m} + y = 0$. Iz prethodnog slijedi da je $y \neq 0$. Nadalje, dijagram vektora $\tilde{x_{m-1}}, \tilde{x_m}$ i y je trokut s duljinama stranica $1, 1$ i $\|y\|$. Budući da su poznate duljine stranica trokuta, odnosno moduli vektora koji formiraju dijagram, poznati su i kutovi među tim vektorima. Stoga je jedini način za konstruirati napeti bazni okvir u ovoj situaciji upravo dodati, tj. vratiti vektore x_{m-1} i x_m u početni niz. □

Propozicija 3.3.2. *Neka je $(x_i)_{i=1}^5$ jedinični napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$ i neka su x_m i x_n bilo koja dva vektora tog baznog okvira. Tada postoji $(3, 2)$-zamjena baznog okvira $(x_i)_{i=1}^5$ koja vektorima x_m i x_n dodaje dva jedinična vektora i s njima čini jedinični napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$.*

Nadalje, budući da novi bazni okvir sadrži točno četiri vektora, ako x_m i x_n nisu ortogonalni, ova operacija je jedinstvena za PRR-ekvivalenciju.

Dokaz. Dokaz tvrdnje je direktna posljedica propozicije 3.2.1. Zamijenimo li tri uklonjena vektora s jednim jediničnim koji je ortogonalan na x_m i jednim jediničnim koji je ortogonalan na x_n, rezultat ove zamjene će biti jedinični napeti bazni okvir sastavljen od četiri vektora. □

Za kraj sekcije promotrimo $(0, p)$-zamjenu, tj. dodavanje p vektora. Krenut ćemo od niza vektora koji može ali i ne mora biti bazni okvir i istražiti uvjete u kojima možemo dodati p vektora tako da krajnji rezultat bude napeti bazni okvir.

Propozicija 3.3.3. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz vektora u $\mathbb{R}^2$. Tada postoji vektor y iz $\mathbb{R}^2$ takav da je $(x_1, \ldots, x_m, y)$ napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$. Drugim riječima, $(0, 1)$-zamjena niz vektora uvijek pretvara u napeti bazni okvir.*

Dokaz. Ako je $(x_i)_{i=1}^m$ napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$, onda je $y = 0$.

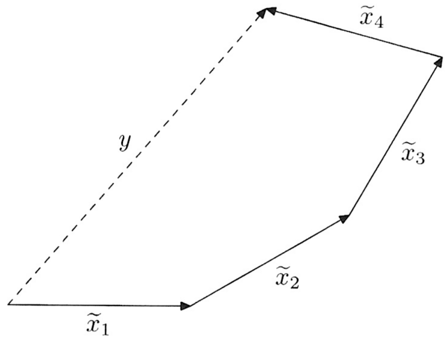
Ako $(x_i)_{i=1}^m$ nije napeti bazni okvir, onda $\sum_{i=1}^m \tilde{x_i} \neq 0$. Neka je $y \in \mathbb{R}^2$ takav da je $\tilde{y} = -\sum_{i=1}^m \tilde{x_i}$. Tada $(x_1, \ldots, x_m, y)$ čini napeti bazni okvir. □

Ograničimo li se isključivo na dodavanje jediničnih vektora, $(0, p)$-zamjena postaje malo drugačija.

Propozicija 3.3.4. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz jediničnih vektora iz $\mathbb{R}^2$. Tada postoji $l \leq m$ i $y_1, \ldots, y_l$ jediničnih vektora iz $\mathbb{R}^2$ koji s početnim nizom tvore jedinični napeti bazni okvir prostora $\mathbb{R}^2$.*

Označimo $\alpha = \left\|\sum_{i=1}^m \tilde{x_i}\right\|$. Ako je $\alpha \in \mathbb{N}$, onda je $l \leq \alpha$. Ako je $\alpha \neq 1$ i $\alpha \leq 2$, onda je $l \leq 2$. Ako je $\alpha \in \langle p-1, p\rangle$, za neki p prirodan broj, onda je $l \leq p$.

Dokaz. Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ niz jediničnih vektora i $(\tilde{x}_i)_{i=1}^m$ niz pripadnih dijagram vektora i neka je $y = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i$.



Slika 3.10: Broj jediničnih vektora koji će s nizom (x_1, x_2, x_3, x_4) tvoriti napeti bazni okvir mora biti veći ili jednak normi od y

Uočimo da bismo dodavanjem vektora $-y$, kao u propoziciji 3.3.3, skupu dijagram vektora dobili napeti bazni okvir, ali $-y$ općenito nije jedinični vektor. Stoga moramo pronaći jedinične vektore z_j, $j = 1, \dots, l$ takve da je $\sum_{i=1}^l z_j = -y$. Pri tome moramo paziti da je nejednakost trokuta zadovoljena, tj. da vrijedi $\|-y\| \leq \sum_{j=1}^l \|z_j\| = l$.

Uočimo još da je $\|y\| = \|\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i\| = \alpha$. Ako je $\alpha \in \mathbb{N}$, onda uzmemo $z_i = \frac{1}{\alpha} y$, $i = 1, \dots, l$. Ako je $\alpha \in \langle p-1, p \rangle$, onda uzmemo $z_i = \frac{1}{\alpha} y$, $i = 1, \dots, p-2$, te jedinične z_{p-1} i z_p tako da $z_{p-1} + z_p + \frac{p-2}{\alpha} y = y$, tj. $z_{p-1} + z_p = \frac{\alpha - p + 2}{\alpha} y$.

Primjenom nejednakosti trokuta na dijagram vektore $(\tilde{x}_i)_{i=1}^m$ slijedi $\|y\| \leq m$ pa moramo naći najviše m jediničnih vektora koji će u uniji s $(x_i)_{i=1}^m$ tvoriti napeti bazni okvir. Ako je $p - 1 \neq \|y\| \leq p$, onda će uvijek postojati skup od p vektora koji će zbrojeni s y dati 0. $\square$

Napomena 3.3.5. *Slike: 2.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6 su izrađene u programu GeoGebra. Slike: 3.7, 3.8, 3.9 i 3.10 su preuzete iz* (4).

Poglavlje 4

Algoritmi rekonstruiranja vektora i dualni bazni okviri

4.1 Rekonstrukcijska formula

Jedno od najvažnijih svojstava baznih okvira je mogućnost rekonstrukcije svakog vektora prostora koristeći upravo vektore baznog okvira.

Propozicija 4.1.1. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom baznog okvira S. Tada se svaki $v \in \mathcal{H}^n$ može prikazati kao*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, S^{-1} x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle S^{-1} x_i. \tag{4.1}$$

Formulu (4.1) *nazivamo* ***rekonstrukcijska formula****.*

Dokaz. Iz invertibilnosti operatora S za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ slijede sljedeće relacije:

$$v = S\left(S^{-1} v\right) = \sum_{i=1}^{m} \langle S^{-1} v, x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \langle v, S^{-1} x_i \rangle x_i,$$

$$v = S^{-1}(S v) = S^{-1} \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle S^{-1} x_i.$$

□

Propozicija 4.1.2. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir Hilbertova prostora $\mathcal{H}^n$. Tada postoji bazni okvir $(y_i)_{i=1}^m$ takav da svaki v iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, y_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle y_i. \tag{4.2}$$

Svaki takav bazni okvir $(y_i)_{i=1}^m$ *nazivamo* ***dualni bazni okvir*** *za* $(x_i)_{i=1}^m$.

Dokaz. Neka je $y_i := S^{-1}x_i$ za $i = 1, \dots, m$. Prema propoziciji 2.4.4, $(y_i)_{i=1}^m$ je bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$, a upravo smo vidjeli da zadovoljava relaciju 4.2. □

Sljedeća propozicija daje rekonstrukcijsku formulu posebne klase baznih okvira, Parsevalovih baznih okvira, koja je poseban slučaj formule iz propozicije 4.1.2.

Propozicija 4.1.3. *Niz vektora* $(x_i)_{i=1}^m$ *je Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora* $\mathcal{H}^n$ *ako i samo ako za svaki vektor* $v \in \mathcal{H}^n$ *vrijedi*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle x_i. \tag{4.3}$$

Dokaz. Neka niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ zadovoljava Parsevalovu rekonstrukcijsku formulu za $v \in \mathcal{H}^n$. Tada

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle v, x_i \rangle x_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \langle v, x_i \rangle x_i, v \rangle = \sum_{i=1}^{m} \left| \langle v, x_i \rangle \right|^2.$$

Obratno, neka je niz vektora $(x_i)_{i=1}^m$ Parsevalov bazni okvir. Tada je prema propoziciji 2.3.4 operator baznog okvira jednak identiteti, tj. $S = T^*T = I$, pa (4.3) slijedi iz (4.1). □

Sljedeća formula omogućava određivanje traga linearnog operatora koristeći Parsevalov bazni okvir.

Propozicija 4.1.4. *Neka je* $(x_i)_{i=1}^m$ *Parsevalov bazni okvir za* $\mathcal{H}^n$ *i neka je* A *linearan operator* $A : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$. *Tada za trag linearnog operatora vrijedi* $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^m \langle Ax_i, x_i \rangle$.

Dokaz. Neka je $(e_j)_{j=1}^n$ ortonormirana baza Hilbertova prostora $\mathcal{H}^n$. Prema definiciji traga linearnog operatora 1.2.4 slijedi $\operatorname{Tr} A = \sum_{j=1}^n \langle Ae_j, e_j \rangle$. Koristeći rekonstrukcijsku formulu

Parsevalovog baznog okvira (4.3) slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} A &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_j, x_i \rangle x_i, e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_j, x_i \rangle \langle x_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \langle e_j, A^* x_i \rangle \langle x_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, e_j \rangle \langle e_j, A^* x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, e_j \rangle e_j, A^* x_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle x_i, A^* x_i \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle A x_i, x_i \rangle.
\end{aligned}$$

□

4.2 Algoritmi rekonstrukcije vektora iz koeficijenata baznog okvira

Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom baznog okvira S. Prethodno smo pokazali da je svaki vektor v iz $\mathcal{H}^n$ moguće rekonstruirati pomoću koeficijenata $(\langle v, x_i \rangle)_{i=1}^m$ koristeći rekonstrukcijsku formulu $v = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle S^{-1} x_i$.

Budući da je u računalnoj primjeni inverz operatora baznog okvira S^{-1} numerički nestabilan, ova formula u praksi ponekad nije efikasna. Stoga ćemo promotriti tri iterativne metode kako bismo izveli niz aproksimacija za v pomoću koeficijenata $(\langle v, x_i \rangle)_{i=1}^m$ vektora s obzirom na bazni okvir. Slijedi prva metoda.

Propozicija 4.2.1. ***(Algoritam baznog okvira)*** *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ s granicama A i B te operatorom baznog okvira S. Za dani vektor $v \in \mathcal{H}^n$ rekurzivno zadajemo niz $(y_j)_{j=0}^\infty$ iz $\mathcal{H}^n$ takav da*

$$y_0 = 0, \qquad y_j = y_{j-1} + \frac{2}{A+B} S \left(v - y_{j-1} \right)$$

za svaki $j \geq 1$. Niz $(y_j)_{j=0}^{\infty}$ konvergira prema v iz $\mathcal{H}^n$ i vrijedi

$$\left\| v - y_j \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B} \right)^j \|v\|, \qquad j \geq 0.$$

Dokaz. Za svaki v iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\left\langle \left(Id - \frac{2}{A+B} S \right) v, v \right\rangle = \|v\|^2 - \frac{2}{A+B} \sum_{i=1}^{m} \left| \langle v, x_i \rangle \right|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{2A}{A+B} \|v\|^2 = \frac{B-A}{A+B} \|v\|^2 .$$

Slično za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ dobivamo

$$-\frac{B-A}{B+A} \|v\|^2 \leq \left\langle \left(Id - \frac{2}{A+B} S \right) v, v \right\rangle,$$

iz čega slijedi

$$\left\| Id - \frac{2}{A+B} S \right\| \leq \frac{B-A}{A+B}. \tag{4.4}$$

Prema definiciji y_j za svaki $j \geq 0$ vrijedi

$$v - y_j = v - y_{j-1} - \frac{2}{A+B} S \left(v - y_{j-1} \right) = \left(Id - \frac{2}{A+B} S \right) \left(v - y_{j-1} \right).$$

Ponavljajući ovaj račun za svaki $j \geq 0$ dobivamo

$$v - y_j = \left(Id - \frac{2}{A+B} S \right)^j (v - y_0) .$$

Stoga, prema (4.4) za svaki $j \geq 0$ imamo

$$\left\| v - y_i \right\| = \left\| \left(Id - \frac{2}{A+B} S \right)^j (v - y_0) \right\| \leq \left\| Id - \frac{2}{A+B} S \right\|^j \left\| v - y_0 \right\| \leq \left(\frac{B-A}{A+B} \right)^j \|v\| .$$

□

Uočimo da, iako iteracijska formula algoritma baznog okvira sadrži vektor v, algoritam ne ovisi o samom vektoru v već o koeficijentima vektora v s obzirom na bazni okvir $(\langle v, x_i \rangle)_{i=1}^m$, budući da je $y_j = y_{j-1} + \frac{2}{A+B} \left(\sum_{i=1}^m \langle v, x_i \rangle x_i - S y_{j-1} \right)$. Jedini nedostatak ovog algoritma je činjenica da brzina njegove konvergencije uvelike ovisi o granicama baznog okvira. Promotrimo stoga sljedeći algoritam koji vodi do brže konvergencije nego prethodni.

Propozicija 4.2.2. ***(Čebiševljev algoritam)*** *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$ sa granicama A i B, operatorom baznog okvira S i neka su $k = \frac{B-A}{B+A}$ i $l = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}$. Za dani vektor $v \in \mathcal{H}^n$ rekurzivno zadajemo niz $(y_j)_{j=0}^\infty$ s odgovarajućim skalarima $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^\infty$ na sljedeći način*

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = \frac{2}{B+A} S v, \qquad \alpha_1 = 2,$$

te

$$\alpha_j = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{4}\alpha_{j-1}} \qquad i \qquad y_j = \alpha_j \left(y_{j-1} - y_{j-2} + \frac{2}{B+A} S \left(v - y_{j-1} \right) \right) + y_{j-2}, \qquad j \geq 2.$$

Niz $(y_j)_{j=0}^\infty$ konvergira prema v iz $\mathcal{H}^n$ i vrijedi

$$\left\| v - y_j \right\| \leq \frac{2l^j}{1 + l^{2j}} \|v\| .$$

Posljednji algoritam kojeg ćemo navesti se ne oslanja na granice baznog okvira, ali kao i u prethodnim primjerima, brzina konvergencije ovisi o njima.

Propozicija 4.2.3. ***Conjugate Gradient metoda*** *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir prostora $\mathcal{H}^n$, S pripadni operator baznog okvira i neka je v vektor iz $\mathcal{H}^n$. Za dani vektor rekurzivno definiramo tri niza vektora $(y_j)_{j=0}^\infty$, $(r_j)_{j=0}^\infty$ i $(p_j)_{j=-1}^\infty$ iz $\mathcal{H}^n$ s odgovarajućim skalarima $\left(\alpha_j\right)_{j=-1}^\infty$ na sljedeći način*

$$y_0 = 0, \qquad r_0 = p_0 = S v, \qquad p_{-1} = 0,$$

te za $j \geq 0$

$$\alpha_j = \frac{\langle r_j, p_j \rangle}{\langle p_j, S p_j \rangle}, \qquad y_{j+1} = y_j + \alpha_j p_j, \qquad r_{j+1} = r_j - \alpha_j S p_j$$

i

$$p_{j+1} = S p_j - \frac{\langle S p_j, S p_j \rangle}{\langle p_j, S p_j \rangle} p_j - \frac{\langle S p_j, S p_{j-1} \rangle}{\langle p_{j-1}, S p_{j-1} \rangle} p_{j-1}.$$

Niz $(y_j)_{j=0}^\infty$ konvergira prema v iz $\mathcal{H}^n$ i vrijedi $\left\| v - y_j \right\| \leq \frac{2l^j}{1+l^{2j}} \|v\|$, pri čemu je $l = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}$, a norma $\|\cdot\|$ je u ovom slučaju dana sa $\|v\| = \langle v, S v \rangle^{\frac{1}{2}}$.

4.3 Dualni bazni okviri

Prisjetimo se, niz vektora $(y_i)_{i=1}^m$ iz $\mathcal{H}^n$ nazivamo **dualni bazni okvir okvira** $(x_i)_{i=1}^m$ ako za svaki v iz $\mathcal{H}^n$ $(y_i)_{i=1}^m$ zadovoljava rekonstrukcijsku formulu 4.2;

$$v = \sum_{i=1}^m \langle v, y_i \rangle x_i$$

.

Ako je $y_i = S^{-1}x_i$ za $i = 1, \dots, m$, tada se $(y_i)_{i=1}^m$ naziva **kanonskim dualnim baznim okvirom**. Ako $(y_i)_{i=1}^m$ nije kanonski dualni bazni okvir, onda ga nazivamo **alternativni dualni bazni okvir**.

Dakle, niz vektora $(S^{-1}x_i)_{i=1}^m$ iz propozicije 4.1.1 je kanonski dualni bazni okvir od $(x_i)_{i=1}^m$ čije su granice B^{-1} i A^{-1} i operator baznog okvira S^{-1}.

Propozicija 4.3.1. *Neka su $(x_i)_{i=1}^m$ i $(y_i)_{i=1}^m$ bazni okviri za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorima analize T_x i T_y redom. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) Za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi $v = \sum_{i=1}^m \langle v, y_i\rangle x_i$.

(ii) Za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi $v = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i\rangle y_i$.

(iii) Za sve v i w iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v, x_i\rangle\langle y_i, w\rangle$.

(iv) $T_x^*T_y = Id$ i $T_y^*T_x = Id$.

Sljedeća propozicija donosi razliku između kanonskih i alternativnih dualnih baznih okvira obzirom na zajednički bazni okvir.

Propozicija 4.3.2. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okviri za $\mathcal{H}^n$ čiji je operator baznog okvira S i neka je $v \in \mathcal{H}^n$. Ako su $(\alpha_i)_{i=1}^m$ skalari takvi da je $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, onda je*

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^m \left|\langle v, S^{-1}x_i\rangle\right|^2 + \sum_{i=1}^m \left|\alpha_i - \langle v, S^{-1}x_i\rangle\right|^2 .$$

Dokaz. Neka je T operator analize baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$. Tada

$$\left(\langle v, S^{-1}x_i\rangle\right)_{i=1}^m = \left(\langle S^{-1}v, x_i\rangle\right)_{i=1}^m \in \operatorname{Im} T.$$

Budući da je $v = \sum_{i=1}^m \langle v, S^{-1}x_i\rangle x_i$, slijedi

$$\left(\alpha_i - \langle v, S^{-1}x_i\rangle\right)_{i=1}^m \in \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp .$$

Prema tome,

$$(\alpha_i)_{i=1}^m = \left(\langle v, S^{-1}x_i\rangle\right)_{i=1}^m \oplus \left(\alpha_i - \langle v, S^{-1}x_i\rangle\right)_{i=1}^m ,$$

odatle slijedi tvrdnja. □

Korolar 4.3.3. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okviri prostora $\mathcal{H}^n$ i neka je $(y_i)_{i=1}^m$ neki njegov alternativni dualni bazni okvir. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi*

$$\left\|\left(\langle v, S^{-1}x_i\rangle\right)_{i=1}^m\right\| \leq \left\|(\langle v, y_i\rangle)_{i=1}^m\right\| .$$

Sljedeća propozicija govori o uvjetu uz koji je dualni bazni okvir jedinstven.

Propozicija 4.3.4. *Bazni okvir $(x_i)_{i=1}^m$ za $\mathcal{H}^n$ ima jedinstveni dualni bazni okvir ako i samo ako je $(x_i)_{i=1}^m$ baza prostora $\mathcal{H}^n$.*

Dokaz. Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ baza prostora $\mathcal{H}^n$. Prepostavimo da su $(y_i)_{i=1}^m$ i $(z_i)_{i=1}^m$ dva dualna bazna okvira za $(x_i)_{i=1}^m$. Pokažimo da su oni jednaki. Prema definiciji dualnog baznog okvira slijedi da za svaki v iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^m (\langle v, y_i\rangle - \langle v, z_i\rangle)\, x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, y_i\rangle x_i - \sum_{i=1}^m \langle v, z_i\rangle x_i = v - v = 0.$$

Budući da je $(x_i)_{i=1}^m$ baza prostora $\mathcal{H}^n$, dakle linearno nezavisan skup, slijedi

$$(\langle v, y_i\rangle - \langle v, z_i\rangle) = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

tj. $\langle v, yi - z_i\rangle = 0$ za svaki $i = 1, \dots, m$. To povlači ortogonalnost vektora $y_i - z_i$ i v. Budući da je v proizvoljan, to je $y_i - z_i = 0$, odnosno $y_i = z_i$ za svaki $i = 1, \dots, m$. Dakle, $(x_i)_{i=1}^m$ ima jedinstveni dualni bazni okvir.

Dokažimo i obrat. Prepostavimo suprotno, neka $(x_i)_{i=1}^m$ nije baza prostora $\mathcal{H}^n$ i neka je T pripadni operator analize baznog okvira $(x_i)_{i=1}^m$. Budući da $(x_i)_{i=1}^m$ nije baza prostora $\mathcal{H}^n$, a jest bazni okvir odnosno skup izvodnica, tada je $m > n$. Kako je $\dim T(\mathcal{H}^n) \leq \dim \mathcal{H}^n = n < m = \dim \mathbb{C}^m$, slijedi $T(\mathcal{H}^n) \neq \mathbb{C}^m$. Neka je P ortogonalan projektor na $(T\mathcal{H}^n)^\perp$ i neka je $A : T(\mathcal{H}^n)^\perp \to \mathcal{H}^n$ nenul linearan operator. Tada je $APe_i \neq 0$ za neki i, pri čemu je $(e_i)_{i=1}^m$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{C}^m$. Označimo li sa $y_i = S^{-1}x_i + APe_i$, tada je $(y_i)_{i=1}^m$ različit od $(S^{-1}x_i)_{i=1}^m$. Uočimo da za sve v i w iz $\mathcal{H}^n$ vrijedi

$$\left\langle \sum_{i=1}^m \langle v, APe_i\rangle x_i,\ w\right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle PA^*v, e_i\rangle\langle x_i, w\rangle = \left\langle PA^*v,\ \sum_{i=1}^m \langle w, x_i\rangle e_i\right\rangle = \langle PA^*v, Tw\rangle = 0.$$

Stoga je $\sum_{i=1}^m \langle v, APx_i\rangle x_i = 0$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$. Zbog toga imamo

$$\sum_{i=1}^m \langle v, y_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, S^{-1}x_i + APe_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, S^{-1}x_i\rangle x_i + \sum_{i=1}^m \langle v, APe_i\rangle x_i = v + 0 = v.$$

Prethodni račun pokazuje da je $(y_i)_{i=1}^m$ također dualni bazni okvir za $(x_i)_{i=1}^m$. Dakle, $(x_i)_{i=1}^m$ nema jedinstveni dualni bazni okvir. □

U idućem primjeru odredit ćemo kanonski dualni bazni okvir jednog baznog okvira dvodimenzionalnog prostora.

Primjer 4.3.5. *Neka je (e_1, e_2) ortonormirana baza dvodimenzionalnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^2$ i neka su $x_1 = e_1,\ x_2 = e_1 - e_2,\ x_3 = e_1 + e_2$. Tada je $(x_i)_{i=1}^3$ bazni okvir za $\mathcal{H}^2$.*

Iz definicije operatora baznog okvira $Sv = \sum_{i=1}^3 \langle v, x_i\rangle x_i$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
Se_1 &= \langle e_1, e_1\rangle e_1 + \langle e_1, e_1 - e_2\rangle (e_1 - e_2) + \langle e_1, e_1 + e_2\rangle (e_1 + e_2) \\
&= e_1 + e_1 + e_2 + e_1 - e_2 = 3e_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Se_2 &= \langle e_2, e_1\rangle e_1 + \langle e_2, e_1 - e_2\rangle (e_1 - e_2) + \langle e_2, e_1 + e_2\rangle (e_1 + e_2) \\
&= -(e_1 - e_2) + (e_1 + e_2) = 2e_2,
\end{aligned}
$$

pa je

$$
S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1, \qquad S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2.
$$

Odatle je kanonski dualni bazni okvir od $(x_i)_{i=1}^3$ upravo $(S^{-1}x_i)_{i=1}^3 = \left(\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)$. Reprezentacija od $v \in \mathcal{H}^2$ u terminima baznog okvira dana je sa

$$
v = \sum_{i=1}^3 \langle v, S^{-1}x_i\rangle x_i = \frac{1}{3}\langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2\rangle (e_1 - e_2) + \langle v, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\rangle (e_1 + e_2)\,.
$$

Još neki dualni bazni okviri od $(x_i)_{i=1}^3$ su $(e_1 + e_2, -e_2, 0)$ i $\left(0, \frac{e_1+e_2}{2}, \frac{e_1-e_2}{2}\right)$.

Slijedi karakterizacija svih dualnih baznih okvira zadanog baznog okvira pomoću pripadnog operatora analize baznog okvira.

Propozicija 4.3.6. *Neka je $(x_i)_{i=1}^m$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom analize T_x i operatorom baznog okvira S. Tada je $(y_i)_{i=1}^m$ dualni bazni okvir od $(x_i)_{i=1}^m$ ako i samo ako postoji niz $(z_i)_{i=1}^m$ takav da je $y_i = S^{-1}x_i + z_i$ i $\sum_{i=1}^m \langle v, z_i\rangle x_i = 0$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$.*

Dokaz. Neka je $(y_i)_{i=1}^m$ dualni bazni okvir od $(x_i)_{i=1}^m$ i neka je $z_i = y_i - S^{-1}x_i$. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$
\sum_{i=1}^m \langle v, z_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, y_i - S^{-1}x_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, y_i\rangle x_i - \sum_{i=1}^m \langle v, S^{-1}x_i\rangle x_i = v - v = 0.
$$

Dokažimo i obrat. Pretpostavimo da postoji niz $(z_i)_{i=1}^m$ takav da je $y_i = S^{-1}x_i + z_i$ i $\sum_{i=1}^m \langle v, z_i\rangle x_i = 0$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$. Tada za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ vrijedi

$$
\sum_{i=1}^m \langle v, y_i\rangle x_i = \sum_{i=1}^m \langle v, S^{-1}x_i\rangle x_i + \sum_{i=1}^m \langle v, z_i\rangle x_i = v + 0 = v,
$$

tj. $(y_i)_{i=1}^m$ je dualni bazni okvir od $(x_i)_{i=1}^m$. □

Uočimo da je uvjet $\sum_{i=1}^{m}\langle v, z_i\rangle x_i = 0$ za svaki $v \in \mathcal{H}^n$ ekvivalentan uvjetu $\sum_{i=1}^{m}\langle v, z_i\rangle\langle x_i, w\rangle = 0$ za sve $v, w \in \mathcal{H}^n$. To znači da su slike operatora analize nizova $(x_i)_{i=1}^{m}$ i $(z_i)_{i=1}^{m}$ međusobno ortogonalni potprostori od $\mathbb{C}^m$.

Sljedeći korolar daje općenitu formulu za sve dualne bazne okvire.

Korolar 4.3.7. *Neka je $(x_i)_{i=1}^{m}$ bazni okvir za $\mathcal{H}^n$ s pripadnim operatorom analize T i operatorom baznog okvira S čiji su normirani svojstveni vektori $(e_j)_{j=1}^{n}$ i svojstvene vrijednosti $(\alpha_j)_{j=1}^{n}$. Tada se svaki dualni bazni okvir $(y_i)_{i=1}^{m}$ od $(x_i)_{i=1}^{m}$ može prikazati kao*

$$y_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_j}\langle x_i, e_j\rangle + \overline{h_{ij}}\right)e_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

gdje su $(h_{ij})_{i=1}^{m}$, $j = 1, \ldots, n$ elementi iz $(\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$.

Dokaz. Ako je $y_i, i = 1, \ldots, m$ zadan pomoću niza $(h_{ij})_{i=1}^{m}$, $j = 1, \ldots, n$, tada $y_i = S^{-1}x_i + \tilde{x}_i$, gdje je $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n}\overline{h_{ij}}e_j$ za $i = 1, \ldots, m$. Operator analize niza $(\tilde{x}_i)_{i=1}^{m}$ je $\tilde{T}$ i zadovoljava $\tilde{T}e_j = (h_{ij})_{i=1}^{m}$. Tvrdnja slijedi iz ovog zapažanja. □

Bibliografija

(1) P. G. Casazza, *The art of frame theory*, Taiwanese journal of mathematics 4, (2000), 129-201.

(2) P. G. Casazza, G. Kutyniok i F. Philipp, *Introduction to finite frame theory. Finite frames*, Appl.Numer.Harmon.Anal., Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

(3) O. Christensen, *An introduction to frames and Reisz bases,* Appl. Numer.Harmon.Anal., Birkhäuser, Boston,2003.

(4) D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for undergraduates*, AMS, Providence, 2007.

(5) V. I. Morgenshtern, H. Bölcskei, *A short course on frame theory*, ETH Zurich, Switzerland, 2011.

Sažetak

U ovom radu smo se upoznali s baznim okvirima konačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora, proučili smo njihova osnovna svojstva te istražili neke primjere.

U prvom poglavlju navedene su definicije osnovnih pojmova linearne algebre kao i iskazi tvrdnji koje su nam potrebne za središnji dio rada. Na kraju poglavlja iskazan je i dokazan Parsevalov identitet.

Drugo poglavlje počinje definicijom temeljnog pojma ovog diplomskog rada, baznog okvira za konačnodimenzionalne prostore, nakon čega slijede razmatranja svojstava posebnih klasa baznih okvira kao što su bazni okviri konstruirani iz zadane ortonormirane baze, Parsevalovi i napeti bazni okviri. Potom su definirani linearni operatori pridruženi baznim okvirima: operator analize, sinteze i operator baznog okvira. Također su promatrana svojstva navedenih linearnih operatora i predstavljene su karakterizacije klasa baznih okvira pomoću tih operatora. Treća sekcija posvećena je sličnim i unitarno izomorfnim baznim okvirima i njihovim karakterizacijama koristeći pripadne operatore analize i sinteze.

Treće poglavlje posvećeno je baznim okvirima prostora $\mathbb{R}^2$. Nakon geometrijske interpretacije napetih baznih okvira tog prostora predstavljena je PRR-ekvivalencija te su navedene konstrukcije koje osiguravaju napetost baznog okvira u $\mathbb{R}^2$.

U posljednjem poglavlju predstavljeno je jedno od najvažnijih svojstava baznih okvira, mogućnost rekonstrukcije svakog vektora prostora koristeći vektore baznog okvira, odnosno navedena je rekonstrukcijska formula te algoritmi rekonstrukcije. Za kraj poglavlja proučavani su kanonski i alternativni dualni bazni okviri i njihova svojstva.

Summary

In this thesis, we have introduced the frames of the finite-dimensional Hilbert spaces, discussed their basic properties and explored some examples.

The first chapter contained definitions of the basic concepts of linear algebra as well as the statements which were needed for the main part of the thesis. At the end of the chapter Parseval identity was proven.

The second chapter began with the definition of the basic term of this graduate thesis, the frame for finite-dimensional spaces, followed by the consideration of the properties of the special classes of frames, such as frames constructed from given orthonormal basis, the Parseval and the tight frames. Then linear operators associated with the frames were defined: the analysis operator, the synthesis operator and the frame operator. Also, properties of these linear operators were observed and the characterizations of thr certain classes of frames in the terms of these operators were presented. The third section was devoted to similar and unitary isomorphic frames and their characterizations using related analysis and synthesis operators.

The third chapter was devoted to frames in $\mathbb{R}^2$. After the geometric interpretation of the tight frames of this space, PRR-equivalence was presented and replacements of vectors in a frame in order to get a tight frame for $\mathbb{R}^2$.

In the last chapter the most important property of frames was presented, the possibility of reconstructing each vector in the space using frame vectors, in other words the reconstruction formula and reconstruction algorithms. At the end of the chapter, canonical and alternative dual frames and their properties were observed.

Životopis

Rođena sam 13. lipnja 1993. godine u Virovitici. Nakon završetka Osnovne škole Ivane Brlić-Mažuranić upisala sam Gimnaziju Petra Preradovića u Virovitici. 2012. godine upisala sam preddiplomski studij Matematika-nastavnički smjer na Priodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2016. diplomski studij Matematika-nastavnički smjer na istom fakultetu.