

Model mreža s primjenom u bankarstvu

Kunić, Lovro

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:630115>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-18**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lovro Kunić

**Model mreža s primjenom u
bankarstvu**

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Boris Podobnik

Zagreb, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Ovaj rad nebi bio moguć bez mojih roditelja i sestre koji su tijekom cijelog školovanja bili uz mene. Posebne zahvale Maji na savjetima kada mi je to bilo najviše potrebno. Hvala mentoru na pomoći u ključnim trenucima.

Sadržaj

Popis slika	vi
Uvod	1
1 Pregled literature	2
2 Teoretska pozadina	6
2.1 Shannonova Entropija	6
2.2 Relativna entropija ili Kullback-Leiblerova divergencija	8
2.3 Slučajne mreže	8
2.4 RAS algoritam	9
3 Metodologija	11
3.1 Struktura financijskog sustava	11
3.2 Dobivanje matrica posuđivanja	12
3.2.1 Početni model	12
3.2.2 Nadogradnja modela	13
3.3 Simulacija zaraze	16
4 Podaci i rezultati	17
4.1 Podaci	17
4.2 Rezultati za slučajne mreže	17
4.3 Rezultati kod novčanih centara	31
4.3.1 3 novčana centra	31
4.3.2 4 novčana centra	34
4.3.3 5 novčanih centara	36
Zaključak	38
Bibliography	39
Sažetak	41

Summary

42

Životopis

43

Popis slika

1.1	Potpuna struktura financijskog sustava	2
1.2	Povezana struktura financijskog sustava	3
1.3	Nepotpuna struktura financijskog sustava	3
1.4	Povezana struktura s više novčanih centara	4
1.5	Nepovezana struktura više novčanih centara	5
4.1	Graf funkcije gustoće za srednje veliku banku	18
4.2	Graf funkcije gustoće za malu banku	19
4.3	Grafovi funkcija gustoće za velike banke	19
4.4	Box plot za slučaj kada je $p = 0.1$	20
4.5	Box plot za 3 slučaja: a) $p = 0.3$, $p = 0.5$, b) $p = 0.7$	21
4.6	Utjecaj broja veza na zarazu sustava	22
4.7	Utjecaj broja veza na šok prvog kruga	23
4.8	Prosječni broj propasti banaka za različiti p	24
4.9	Utjecaj entropije na dodatni stres sustava	25
4.10	Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava	26
4.11	Utjecaj originalnog stresa na broj propasti banaka u sustavu	27
4.12	Utjecaj promjene kapitala na broj propasti banaka, te na dodatni stres u sustavu	28
4.13	Utjecaj udjela međubankovnih izlaganja na broj dodatnih propasti banaka	29
4.14	Izgled financijskog sustava s različitim brojem banaka jezgri	31
4.15	Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$	32
4.16	Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: $r = 0.1$	33
4.17	Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$	33
4.18	Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$	34
4.19	Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: $r = 0.1$	35
4.20	Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$	35

4.21	Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$	36
4.22	Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$	37

Uvod

Nakon posljednje financijske krize tijekom 2008., stabilnost financijskog sustava postala je prioritet svim financijskim institucijama. Sistemski rizik kao takav nastaje kada propast jedne ili više banaka uzrokuje velike gubitke unutar financijskog sustava. Kao što se vidjelo 2008. sistemski propast uzrokuje izuzetno veliki trošak cijelom sustavu. Zbog toga su bile potrebne nove regulacijske mjere, koje su u startu trebale sustav napraviti otpornijim na šokove. Stoga se zadnjih godina detaljno proučavaju razni kanali međubankovne zaraze. Kažemo da do međubankovne zaraze dolazi kada propast jedne financijske institucije, u našem slučaju gledamo samo banke, dovodi do propasti druge financijske institucije.

Ovaj diplomski rad će se baviti kako određena struktura međubankovnih izloženosti utječe na stabilnost financijskog sustava. Vidjet ćemo kakve sve strukture mogu biti i kakva bi mogla biti približna struktura u hrvatskom bankarskom sustavu. Istražujemo koliko je financijski sustav otporan na šokove i postoji li opasnost od eventualnog širenja zaraze sustava u slučaju propasti jedne ili više banaka. Nakon idiosinkratskog šoka koji pogađa određenu banku unutar sustava, ispituje se vjerojatnost tzv. '*domino efekta*'. Kažemo da banka koja je izložena prema inicijalno pogođenoj banci propada ako je ta izloženost veća od kapitala banke. Banke su direktno povezane preko međubankovnih izlaganja koja se odvijaju na međubankovnom tržištu. Također banke mogu biti povezane indirektno, tako što imaju slične portfelje ili dijele sličnu masu depozitora. [9] Mi se bavimo direktnim izlaganjima kroz koje bi međubankovno tržište moglo biti važan kanal zaraze. Do podataka za bilateralne izloženosti je teško doći, pa koristimo dostupne podatke bilanci banaka iz njihovih godišnjih financijskih izvješća. Procijenit ćemo obrazac bilateralnih međubankovnih izlaganja. Kada govorimo o bilateralnim izloženostima banaka govorimo o kreditnoj izloženosti koja uključuje međubankovne depozite i zajmove. Veliki postotak zajmova je s ročnošću do godinu dana, pa stoga nećemo razlikovati ročnosti jer međubankovne obveze također čine mali dio ukupnih obveza.

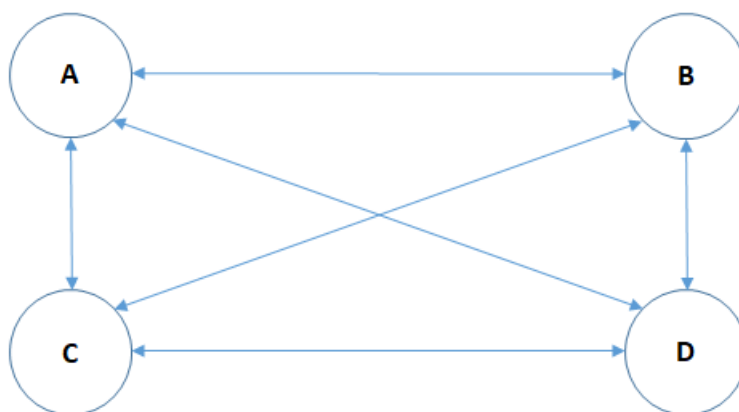
Rad je organiziran na sljedeći način. U prvom poglavlju dajemo kratak pregled literature. Drugo poglavlje daje teoretsku pozadinu. U trećem poglavlju govorimo o metodologiji koju koristimo. Četvrto poglavlje bavi se radom na podacima i u njemu donosimo rezultate. Na kraju svega donosimo zaključak.

Poglavlje 1

Pregled literature

Razna su teoretska i empirijska istraživanja rađena na temu sistemskog rizika. U kratkom pregledu literature vidjet ćemo koja su istraživanja potaknula ovaj rad na teoretskoj osnovi, te također na praktičnoj osnovi.

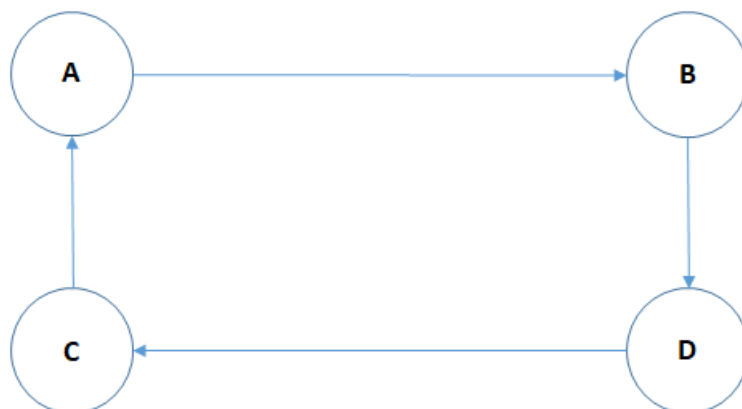
Prema Allenu i Galeu (2000) [8] rizik financijske zaraze ovisi o dvije karakteristike međubankovnog tržišta: potpunosti i međupovezanosti. Potpuno međubankovno tržište je ono u kojem je svaka banka direktno povezana sa svim drugim bankama u sustavu s određenim financijskim ugovorom.



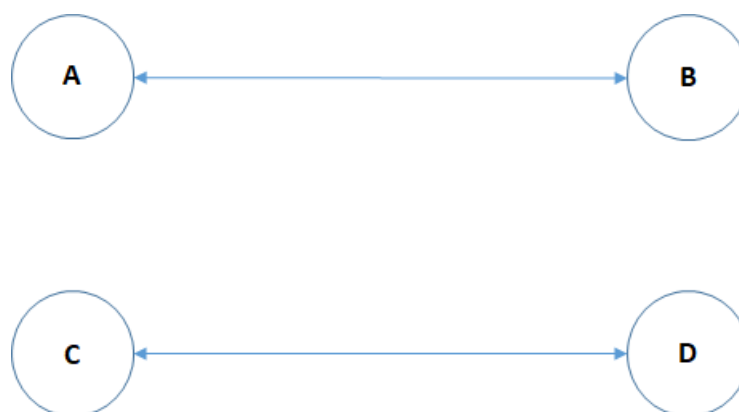
Slika 1.1: Potpuna struktura financijskog sustava

Kada tome nije tako, kažemo da su tržišta nepotpuna. Međutim, iako svaka banka nije direktno povezana s drugim bankama, svaka od njih može biti indirektno povezana sa svima ostalima s više ili manje kompleksnim kreditnim lancima. U tom slučaju, tržište je nepotpuno, ali je savršeno povezano (slika 1.2 s nepotpunim i povezanim tržištima). Ne postoji jedinstveni uzorak međubankovnih veza. Alternativna struktura tržišta opisana je na slici 1.3 gdje je tržište podijeljeno u dva savršeno izolirana podsustava.

Stoga, dok je potpuno tržište nužno savršeno povezano, nepotpuno tržište se može bitno razlikovati u smislu povezanosti.



Slika 1.2: Povezana struktura financijskog sustava

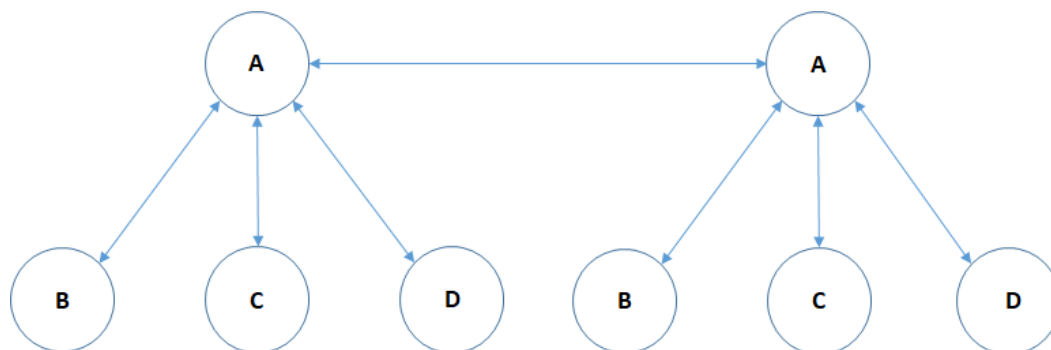


Slika 1.3: Nepotpuna struktura financijskog sustava

Glavni zaključak Allenovog i Galeovog modela je da različite strukture međubankovnog tržišta utječu na razinu rizika zaraze financijskog sustava. Po njima, rizik zaraze smanjuje se što je tržište potpunije i što je manje povezano. Kako bi to vidjeli možemo prvo uzeti u obzir savršeno povezana međubankovna tržišta koja se razlikuju samo u potpunosti (slike 1.1,1.2). Za dana bankovna međubankovna izlaganja, ako je tržište potpuno (slika 1.1), svaka banka drži manji iznos međubankovne imovine kod svake banke nego u slučaju nepotpune strukture (slika 1.2), te tako smanjuje rizik da se propast banke proširi na druge banke. To zapravo znači da potpuno tržište omogućava bankama bolju diverzifikaciju međubankovnog kreditnog rizika nego u nepotpunim ali savršeno povezanim sustavima. Što se tiče povezanosti, rizik zaraze je manji što su sustavi manje povezani jer u podjeljenim sustavima propast

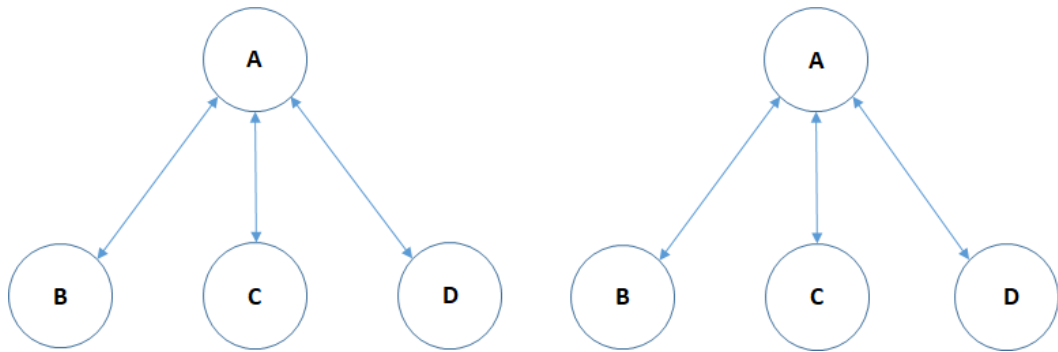
banke je ograničena na dio sustava gdje se dogodila inicijalna propast banke. Ovo se jasno može vidjeti iz usporedbe dvije strukture sustava prikazane na slici 1.2 i slici 1.3: propast na primjer banke A može se proširiti samo na banku B u nepovezanom sustavu (slika 1.3) dok se u povezanom sustavu može s vremenom proširiti i na banku C i D. Drugim riječima, povezanost se odnosi na duljinu kreditnih lanaca i služi kao mjera opsega domino efekta.

U ovom okviru moguće je analizirati utjecaj financijske integracije na financijsku zarazu. Mogući ishod bankovnih ujedinjenja je struktura više novčanih centara, tako da svaka bankovna grupa ima novčani centar koji ujedinjuje likvidnost. To je poseban slučaj nepotpunog međubankovnog sustava koji su proučavali Freixas, Parigi i Rochet(2000) [11]. Oni kažu da su neke banke povezane s novčanim centrima dok nisu povezane međusobno. Jedan razlog za to je da banke pripojene istoj banci majki bi ujedinile svoju likvidnost kako bi iskoristili razmjernu upravljaju likvidnosti ekonomija. Kao rezultat, međubankovna držanja nastoje biti koncentrirana nakon što se pojavi financijska konsolidacija i stupanj nepovezanosti se nastoji povećati (slika 1.4). Kao posljedica, rizik zaraze raste. Ali u isto vrijeme, financijska integracija bi smanjila stupanj povezanosti smanjujući rizik zaraze. To se događa, ako banke novčanih centara nastoje dizati novac pretežno izvan međubankovnog sustava(slika 1.5). Stoga, ukupni učinak financijske integracije na rizik zaraze nije točno određen.



Slika 1.4: Povezana struktura s više novčanih centara

Osim utjecaja na uzorke međubankovnih veza, financijska integracija može također imati utjecaj na veličinu međubankovnog tržišta. Prvo, kao rezultat aktivnosti spajanja neke transakcije koje su bile između banaka, sada se pretvaraju u odnose unutar banke. To znači da ako ništa drugo ne mijenjamo, međubankovni sustav posuđivanja smanjuje se kao rezultat čistog računovodstvenog efekta. Drugo, veće banke možda imaju priliku bolje diverzificirati likvidnosne rizike. To može proizvesti dva različita učinka. Na konsolidiranoj bazi, ukupna likvidnost se smanjuje i zato bi se međubankovna izlaganja trebala smanjivati. S druge strane, kako bi se dobila poboljšanja u upravljanju likvidnosti, banke pripojene istoj majki se moraju angažirati u redistribuciju likvidnosti koja daje porast većih unutarnjih kapitalnih tržišta. Sve u svemu, ova razmatranja predlažu da nije moguće točno znati kako financijska integracija utječe na rizik zaraze kroz međubankovne veze.



Slika 1.5: Nepovezana struktura više novčanih centara

Što se empirijskih radova tiče oni mogu biti podijeljeni u više grupa.

Prvi pristup pokušava izolirati zarazu od ostalih šokova koji pogađaju sustav. Gledaju se posljedice individualnog šoka, tj. propasti pojedine banke te kako promatrana ili procijenjena međubankovna izlaganja potenciraju domino efekte. Taj pristup se primjenio na bankovne sustave više država s općenito ohrabrujućim rezultatima ([13], [4], [7], [17], [2], [15], [16]). Degryse i Nguyen [10] proučavaju vremenski period od 10 godina za belgijske banke, te tako proučavaju kako i zašto se zaraza širi tijekom vremena. Oni također imaju malo drugačiji pristup odnosno nemaju fiksnu stopu gubitka po neispunjenju obveza, kao što sam i ja pretpostavio u ovom radu. Mistrulli(2005) [14] uviđa da talijansko međubankovno tržište prelazi s potpune strukture prema strukturi više novčanih centara. Zanimljivo je da zadnja dva rada imaju drugačije zaključke o prekograničnim izlaganjima. Dok se važnost takvih izlaganja po Mistrulliju u Italiji smanjuje, Degryse i Nguyen zaključuju kako izvanogranična izlaganja imaju sve veći utjecaj na stabilnost sustava jer su takva izlaganja u sve većem porastu.

Drugi pristup da bi procijenio rizik zaraze uzima u obzir razne vrste šokova kao na primjer Elsinger, Lehar i Summer(2002) [6]. Autori procijenjuju rizik insolventnosti banaka za različite scenarije makroekonomskih šokova, kao što su šok kamatne stope, kretanje tečaja i tržišta dionica, kao i šokova povezanih s poslovnim ciklusom.

Treći pristup analiziranja sistemskog rizika financijskog sustava može se gledati primjenjujući rezultate općenite teorije mreža. U tom slučaju analiza se oslanja na ideju međubankovnog tržišta koje se interpretira kao mreža gdje su banke čvorovi, te zahtjevi i obveze između banaka definiraju rubove mreže. Uzimajući različite mjere iz teorije mreža empirijska struktura mreže bankovnog sustava i sistemska važnost različitih banaka može biti istraživana. Glavno pitanje tih studija je kako struktura utječe na stabilnost mreže, odnosno stabilnost bankovnog sustava pri eliminaciji čvora iz mreže odnosno propasti pojedine banke ([3], [12]).

Poglavlje 2

Teoretska pozadina

2.1 Shannonova Entropija

Najosnovniji koncept informacijske teorije je entropija slučajne varijable ili njene distribucije, često nazivane Shannonovom entropijom kako bi se razlikovala od raznih drugih vrsta. To je mjera nesigurnosti ili varijabilnosti vezana uz slučajnu varijablu. Prvo ćemo krenuti s diskretnim slučajem:

Definicija 2.1.1. (*Shannonova entropija - Diskretan slučaj*) Shannonova entropija, ili samo entropija diskretne slučajne varijable X je

$$H[X] \equiv - \sum_x P(X = x) \log P(X = x) = -E[\log P(X)] \quad (2.1)$$

kada suma postoji. Zajednička entropija dvije slučajne varijable, $H[X, Y]$, je entropija njihove zajedničke distribucije. Uvjetna entropija od X uz uvjet Y , $H[X | Y]$ je

$$\begin{aligned} H[X | Y] &= \sum_y P(Y = y) \sum_x P(X = x | Y = y) \log P(X = x | Y = y) \\ &= -E[\log P(X | Y)] \\ &= H[X, Y] - H[Y] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Još neka važna svojstva Shannonove entropije:

1. $H[X] \geq 0$
2. $H[X] = 0$ akko $\exists x_0 : X = x_0$ g.s.
3. Ako X poprima $n < \infty$ različitih vrijednosti (s pozitivnom vjerojatnosti), onda $H[X] \leq \log(n)$. $H[X] = \log(n)$ akko X uniformno distribuiran.
4. $H[X] + H[Y] \geq H[X, Y]$, s jednakosti akko X i Y nezavisne.
5. $H[X, Y] \geq H[X]$

6. $H[X | Y] \geq 0$, s jednakosti akko X g.s. konstanta za dani Y , za skoro sve Y
7. $H[X | Y] \leq H[X]$, s jednakosti akko X nezavisna od Y
8. $H[f(X)] \leq H[X]$, za bilo koju izmjerivu funkciju f , s jednakosti akko f invertibilna

Prva tri svojstva mogu se sažeti tako da kažemo da je $H[X]$ maksimizirana uniformnom distribucijom i minimizirana s nulom. $H[X]$ možemo shvatiti kao varijabilnost od X , nešto kao logaritam efektivnog broja vrijednosti koje može poprimiti. Također možemo ga shvatiti kao razinu nesigurnosti vrijednosti od X . $H[X, Y]$ onda predstavlja kolika je varijabilnost i nesigurnost povezana s parom slučajnih varijabli X, Y i na kraju $H[Y | X]$ predstavlja koliko nesigurnosti preostaje za Y kada je X već poznat. Slične su interpretacije za ostala svojstva. Korisna nam je činjenica da je $H[f(X)] = H[X]$ ako je f invertibilna jer onda f samo preoznačuje moguće vrijednosti.

Jednostavna posljedica gornjih rezultata je:

Lema 2.1.1. (*Lančano pravilo za Shannonovu entropiju*) Neka su X_1, X_2, \dots, X_n diskretne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru. Tada

$$H[X_1, X_2, \dots, X_n] = H[X_1] + \sum_{i=2}^n H[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}] \quad (2.3)$$

Definicija 2.1.2. (*Shannonova entropija - opći slučaj*) Shannonova entropija slučajne varijable X s distribucijom μ , s obzirom na referentnu vrijednost ρ , je

$$H_\rho[X] \equiv -E_\mu \left[\log \frac{d\mu}{d\rho} \right] \quad (2.4)$$

kada $\mu \ll \rho$. Zajednička i uvjetna entropija su definirane slično. Također $H_\rho[\mu]$ ima isto značenje. Ovo nekad nazivamo diferencijalna entropija kada je ρ Lebesgueova mjera na Euklidskom prostoru, posebno na \mathbb{R} i onda se piše $h(X)$ ili $h[X]$.

Ostaje istina, da je u općem slučaju $H_\rho[X | Y] = H_\rho[X, Y] - H_\rho[Y]$, pod pretpostavkom da su sve entropije konačne. Također vrijedi lančano pravilo, uvjetovanost smanjuje entropiju i zajednička entropija je manja ili jednaka sumi marginalnih entropija, s jednakostima ako i samo ako su varijable nezavisne. Međutim, ovisno o referentnoj mjeri, $H_\rho[X]$ može biti negativna, kao na primjer ako je ρ Lebesgueova mjera i $\mathcal{L}(X) = \delta(x)$, tada je $H_\rho[X] = -\infty$.

2.2 Relativna entropija ili Kullback-Leiblerova divergencija

Neke poteškoće vezane uz Shannonovu entropiju, u općem slučaju mogu se izbjeći koristeći relativnu entropiju.

Definicija 2.2.1. (*Relativna entropija, Kullback-Leiblerova divergencija*) Za dane dvije vjerojatnosne distribucije, $\nu \ll \mu$, relativna entropija od ν s obzirom na μ , ili Kullback-Leiblerova divergencija od ν naspram μ , je

$$D(\mu \parallel \nu) = -E_{\mu}[\log \frac{d\nu}{d\mu}] \quad (2.5)$$

Ako ν nije apsolutno neprekidna s obzirom na μ , onda je $D(\mu \parallel \nu) = \infty$.

Lema 2.2.1. $D(\mu \parallel \nu) \geq 0$, gdje vrijedi jednakost akko $\nu = \mu$ g.s.

Definicija 2.2.2. *Uvjetna relativna entropija, $D(\mu(Y | X) \parallel \nu(Y | X))$ je*

$$D(\mu(Y | X) \parallel \nu(Y | X)) \equiv E_{\mu}[\log \frac{d\nu(Y | X)}{d\mu(Y | X)}] \quad (2.6)$$

Lema 2.2.2. (*Lančano pravilo za relativnu entropiju*) $D(\mu(X, Y) \parallel \nu(X, Y)) = D(\mu(X) \parallel \nu(X)) + D(\mu(Y | X) \parallel \nu(Y | X))$.

Lema 2.2.3. *Shannonova entropija diskretne slučajne varijable X s distribucijom μ , je*

$$H[X] = \log n - D(\mu \parallel \nu) \quad (2.7)$$

gdje je n broj vrijednosti koje X može poprimiti (s pozitivnom vjerojatnosti) i ν je uniformna distribucija nad tim vrijednostima. [18]

2.3 Slučajne mreže

Slučajna mreža je mreža koja se sastoji od n čvorova gdje je svaki par čvorova povezan s vjerojatnosti p . Imamo dvije definicije slučajne mreže:

- $G(N, L)$ model - N čvorova su povezani sa L slučajno postavljenih veza. [5]
- $G(N, p)$ model - Svaki par čvorova je povezan s vjerojatnosti p

Mi ćemo se baviti drugim ovdje navedenim modelom. U njemu je fiksirana vjerojatnost p da su dva čvora u mreži povezana. Taj model koristimo jer u stvarnim mrežama broj veza je rijetko fiksiran.

Definicija 2.3.1. Za konstrukciju slučajne mreže slijede se sljedeći koraci:

- 1) Krećemo sa N izoliranih čvorova.
- 2) Označi par čvorova i generiraj slučajni broj između 0 i 1. Ako broj premašuje p , spoji taj par čvorova s vezom, a u suprotnom ih ostavi nepovezane.
- 3) Ponovi korak (2) za svaki od $\frac{N(N-1)}{2}$ parova čvorova.

Mreža dobivena na ovakav način naziva se slučajni graf ili slučajna mreža. Pal Erdős i Alfred Rényi imali su ključnu ulogu u shvaćanju svojstava ovih mreža. Zato se ovakva slučajna mreža naziva Erdős-Rényi mreža.

Vjerojatnost da slučajni graf ima točno k veza je posljedica sljedeća tri termina:

- 1) Vjerojatnost da je k pokušaja od ukupno $\frac{N(N-1)}{2}$ mogućih spajanja parova čvorova rezultiralo vezom je p^k
- 2) Vjerojatnost da preostalih $\frac{N(N-1)}{2} - k$ pokušaja nisu završila vezom je $(1 - p)^{\frac{N(N-1)}{2} - k}$
- 3) $\binom{\frac{N(N-1)}{2}}{k}$ je broj različitih načina na koji možemo staviti k veza među $\frac{N(N-1)}{2}$ parova čvorova.

Zato vjerojatnost da određena realizacija slučajne mreže ima točno k veza možemo napisati kao:

$$p_k = \binom{\frac{N(N-1)}{2}}{k} p^k (1-p)^{\frac{N(N-1)}{2} - k} \quad (2.8)$$

Kako se radi o binomnoj distribuciji očekivani broj veza u slučajnom grafu je

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\frac{N(N-1)}{2}} k p_k = p \frac{N(N-1)}{2} \quad (2.9)$$

2.4 RAS algoritam

RAS algoritam je iterativni algoritam koji se koristi za balansiranje matrica. RAS algoritam je dizajniran da rješava probleme s intervalnim ograničenjima na sume redova i stupaca neke matrice A . [1]

0. korak (inicijalizacija): Stavljamo $\nu = 0$ i A_{ij}^0 za sve $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

1. korak (Skaliranje po retcima): Za $i = 1, 2, \dots, n$ definiramo

$$A_{ij}^{\nu+1} \leftarrow A_{ij}^{\nu} \rho_{ij}^{\nu}, \quad (2.10)$$

gdje je

$$\rho_{ij}^{\nu} = \frac{i_i}{\sum_{\forall j | A_{ij}^0 > 0} A_{ij}^{\nu}}$$

2. korak (skaliranje po stupcima): Za $j = 1, 2, \dots, n$ definiramo

$$A_{ij}^{\nu+1} \leftarrow A_{ij}^{\nu} \sigma_{ij}^{\nu}, \quad (2.11)$$

gdje je

$$\sigma_{ij}^{\nu} = \frac{o_j}{\sum_{\forall i | A_{ij}^0 > 0} A_{ij}^{\nu}}$$

3. korak:

$$\nu \leftarrow \nu + 1 \quad (2.12)$$

U prvom koraku, svaki element matrice množi se s omjerom željene sume retka (i_i) i stvarnom sumom retka ($\sum_{\forall j | A_{ij}^0 > 0} A_{ij}^{\nu}$).

U drugom koraku, svaki element matrice množi se s omjerom željene sume stupca (o_j) i stvarne sume stupca ($\sum_{\forall i | A_{ij}^0 > 0} A_{ij}^{\nu}$). Ponavljajući ova dva koraka dovoljno puta, dobivamo matricu s elementima koji zadovoljavaju ograničenja zadana željenim sumama redaka i stupaca.

Poglavlje 3

Metodologija

3.1 Struktura financijskog sustava

Financijski sustav je modeliran kao mreža koja se sastoji od n čvorova. Svaki od $n-1$ čvorova u našem slučaju reprezentira jednu banku, a zadnji čvor predstavlja vanjski sektor kao što su nefinancijske institucije i domaćinstva. Čvorovi su povezani direktnim vezama koje označavaju međusobna izlaganja financijskih institucija i vanjskog sektora. Za neke financijske mreže, a vidjet ćemo da je tako i u našem slučaju, pretpostavlja se da postoje dvije vrste banaka, banke jezgre i periferne banke. Distribucija imovine između ta dva tipa banaka dan je koncentracijskim koeficijentom CR (eng. *concentration ratio*), koji mjeri udio imovine banaka jezgre od ukupne imovine banaka. Bilance banke i ima sljedeću strukturu:

$$I_i^{\text{MB}} + I_i^{\text{V}} = O_i^{\text{MB}} + O_i^{\text{V}} + K_i, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (3.1)$$

Međubankovna imovina I_i^{MB} i obveze O_i^{MB} predstavljaju izlaganja između banaka. Vanjska imovina I_i^{V} su zapravo krediti prema vanjskom sektoru. Vanjske obveze O_i^{V} predstavljaju obveze banaka prema vanjskom sektoru, kao što su na primjer depoziti klijenata. Bilanca je kompletirana s kapitalom K_i koji je dan kao razlika ukupne imovine banke i , $I_i (I_i^{\text{MB}} + I_i^{\text{V}})$, te obveza banke i , $O_i (O_i^{\text{MB}} + O_i^{\text{V}})$.

Stopa adekvatnosti kapitala, koju ćemo zadati kao prosjek stopa adekvatnosti kapitala po bankama, uzet ćemo da je jednaka između svih banaka. Ona je dana na sljedeći način:

$$r = \frac{K_i}{I_i^{\text{MB}} + I_i^{\text{V}}}, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (3.2)$$

U financijskom sustavu bitan nam je ukupan iznos imovine svih banaka I^{banke} , te ukupan iznos međubankovne imovine I^{MB} . Koeficijent odnosa međubankovne i ukupne imovine u financijskom sustavu definira

se kao:

$$\phi = \frac{I^{\text{MB}}}{I^{\text{banke}}} \quad (3.3)$$

Direktna povezanost između čvorova može se ilustrirati preko matrice međubankovnih izloženosti:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A_{ij} je imovina banke i kod banke j ($\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$). Kako banke ne pozajmljuju novac same sebi, imamo da je $A_{ii}=0$, za $i \in \{1, \dots, n\}$. Dodatno, kako su banke povezane s obje strane bilanci, jednostavno je interpretirati sumu reda kao ukupnu imovinu, odnosno sumu stupca kao ukupne obveze pojedine banke. Elementi zadnjeg reda, A_{ni} ($i \in \{1, \dots, n-1\}$), jednaki su bankovnoj vanjskoj imovini I_i^V . Stoga je suma elemenata zadnjeg reda matrice jednaka ukupnoj vanjskoj imovini banaka, što je dano s $(1 - \phi) I_i^{\text{banke}}$. Elementi zadnjeg stupca matrice A_{in} ($i \in \{1, \dots, n-1\}$) jednaki su bankovnim vanjskim obvezama O_i^V . Stoga je suma zadnjeg stupca matrice jednaka ukupnim vanjskim obvezama banaka. Nadalje, pretpostavlja se da je mreža zatvorena, što znači da nema posuđivanja negdje izvan mreže. To zapravo znači da ukupna suma po retcima mora biti jednaka ukupnoj sumi po stupcima odnosno

$$i_i = \sum_j A_{ij}, o_i = \sum_i A_{ij} \quad (3.5)$$

gdje je $\sum_i i_i = \sum_j o_j$. [3]

3.2 Dobivanje matrica posuđivanja

Manjak podataka zaustavio je prijašnje empirijske radove koji su se bavili financijskom zarazom u međubankovnom tržištu od istraživanja veza između rizika zaraze i strukture tržišta ([7], [13], [4]). Obično su dostupni samo podaci koji nam daju sumu redaka i stupaca u matrici izloženosti. Ako nisu nedostupni baš svi podaci, onda barem dio podataka nedostaje.

3.2.1 Početni model

Općenito kako možemo promatrati samo međubankovne zahtjeve i obveze, da bi se procjenio A , mora postojati još restrikcija. U nedostatku dodatnih informacija, jedan

razuman pristup bi bio izabrati distribuciju koja maksimizira neizvjesnost (entropiju) izlaganja, tj. taj problem se često rješava na način da se pretpostavlja kako banke svoja izlaganja imaju raspoređena što je ujednačenije moguće. Takav način raspodjele rizika nazivamo maksimizacija entropije (normalizirane) matrice izloženosti. No upotreba matrica koje imaju takav oblik sklona je pristranosti rezultata. Izbor banaka od koje posuditi i kojim drugim bankama posuditi, se mogu tretirati kao dvije stohastički nezavisne odluke. A_{ij} se može gledati kao realizacija zajedničke distribucije $f(i,o)$ gdje su distribucije imovine i obveza između banaka ($f(i)$ i $f(o)$) marginalne distribucije. Kada normaliziramo matricu dobivamo da je $A_{ij} = i_i \cdot o_j$. Stoga, ova izlaganja reflektiraju relativnu važnost svake institucije u međubankovnom tržištu preko veličine njihovog ukupnog posuđivanja. Također prati ih specijalno svojstvo da će biti gotovo potpuna struktura jer svaka banka koja posuđuje i jako mali iznos rasporedit će ta posuđivanja na sve banke u sustavu. Stoga, ova metoda podrazumijeva da banka kod posuđivanja ne preferira neke banke u odnosu na druge. Inicijalna procjena međubankovne strukture, A^0 :

$$A_{ij}^0 = \begin{cases} 0, \forall i = j \\ i_i o_j, i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

Općenito, inicijalna matrica A^0 će kršiti restrikciju za marginalne distribucije. Zato trebamo naći novu matricu, A , koja je slična matrici A^0 , ali zadovoljava ta ograničenja. Želimo što manju relativnu entropiju između matrica A i A^0 . To se radi RAS algoritmom. [17]

3.2.2 Nadogradnja modela

U ovom dijelu ćemo generirati matrice na drugačiji način, a kasnije ćemo uspoređivati rezultate. Nama je cilj za dane sume redova i stupaca napraviti veliki broj matrica izloženosti slučajnim generatorom. To se radi u dva koraka: 1) Slučajni broj A_{ij}^{sl} , koji ne premašuje ukupnu imovinu u sustavu I^{uk} (ili ukupne obveze u sustavu O^{uk}) dodijeljen je svakom nedijagonalnom elementu. Taj slučajni broj dan je iz uniformne distribucije s $A_{ij}^{sl} \in [0, A^{uk}]$, $\forall i \neq j$. Imamo i_i kao željenu sumu reda i o_j kao željenu sumu stupca pridruženu tom elementu. Vidimo da nema pretjerane restrikcije iz kojeg intervala će slučajni broj biti biran. Smanjenje ili povećanje intervala uniformne distribucije na neku manju odnosno višu granicu ne mijenja rezultate simulacija. Kako bi matrica bila točno onakva kakva nam treba, primjenjuje se RAS algoritam. RAS algoritam pokazuje neke interesantne značajke. Prvo, restrikcije povezanosti mogu se nametnuti stavljajući određene elemente matrice na nulu. Ti elementi će ostati nula i nakon pokretanja algoritma. Drugo, imajući određene početne vrijednosti u matrici, RAS algoritam daje jedinstveno rješenje, nezavisno od pozicije određene banke unutar matrice. Algoritam je također robustan na transpoziciju matrice, što znači da će bez obzira na razmještanje matrice algoritam dobiti rješenje. Treće, slučajno generirane početne vrijednosti određuju određenu

korelaciju strukture unutar matrice. RAS algoritam određuje jedinstveno rješenje koje se podudara s danom korelacijom strukture što je bolje moguće i zadovoljava ograničenje na sume redaka i stupaca. Postoje slučajevi kada algoritam ne daje važeće rješenje. To se događa posebno kada imamo previše nula u matrici.

Nakon generiranja matrica izloženosti, one moraju biti karakterizirane. Kako je nama namjera razmatrati stabilnost financijskog sustava ovisnog o matrici međubankovnih izloženosti, fokusiramo se na karakterizaciju $(n-1 \times n-1)$ matrice koja pokriva međubankovno tržište. Nju kreiramo brišući zadnji red i zadnji stupac $(n \times n)$ matrice izloženosti A . Kao sljedeći korak, moramo normalizirati matrice jer mjera entropije mora biti primjenjiva na vjerojatnosna polja. Kao rezultat, elemente normalizirane matrice možemo tretirati kao vjerojatnosti. Nakon toga želimo karakterizirati matrice po sljedećim mjerama koje smo već spomenuli u teoretskom dijelu.

- Entropija: U teoriji informacija, entropija je mjera koja se može objasniti u kontekstu problema traženja. Preciznije, entropija je donja međa očekivane duljine puta od korijena do lišća binarnog stabla traženja. Stoga je entropija donja međa očekivanog broja da/ne pitanja potrebnih da bi saznali cjelovitu informaciju. Što je ujednačenija distribucija elemenata u prostoru pretraživanja, više pitanja u prosjeku je potrebno da se dobije željeni element te je entropija zato veća. Što je neujednačenija distribucija, entropija je manja. Najmanja entropija (jednaka nuli) može se postići kada se jedan element prostora pretraživanja pojavljuje s vjerojatnosti 1, a svi ostali elementi s vjerojatnošću 0, te je to najneujednačenija distribucija elemenata. Mjera entropije se može interpretirati tako da mjeri nejednakost distribucije potraživanja u matrici izlaganja. Koristeći normalizaciju spomenutu ranije, elementi matrice se mogu shvatiti kao realizacija distribucije elemenata unutar prostora pretraživanja. Što je veća entropija, ujednačenije su distribuirani međubankovni zahtjevi za dane sume redaka i stupaca. Koristimo definiciju entropije:

$$ENT = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^p \ln(a_{ij}^p)$$

gdje je $0 \cdot \ln(0) := 0$.

- Kullback-Leibler divergencija - Relativna entropija: To nam je zapravo mjera koja mjeri razliku između dvije vjerojatnosne distribucije. Za dane dvije normalizirane matrice izloženosti X^p (u ovom slučaju rješenje maksimalne entropije X^* , s izbrisanim zadnjim retkom i stupcom i normaliziranim totalnim iznosom međubankovnih obveza) i A^p (normalizirana matrica izloženosti generirana slučajnim generatorom), relativna entropija je dana sa:

$$RE = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^p \ln\left(\frac{a_{ij}^p}{x_{ij}^p}\right)$$

gdje je $0 \cdot \ln(0) := 0$ i $0 \cdot \ln(\frac{0}{0}) := 0$. Što je RE veća to je veća razlika između dviju distribucija. U financijskom sustavu modeliranom ovdje, veća relativna entropija označava veću udaljenost od distribucije koja je dana rješenjem maksimalne entropije, što znači da je neujednačenija distribucija međubankovnih izloženosti.

- **Povezanost:** Povezanost financijskog sustava može se opisati s vjerojatnosti da postoji direktna veza između dvije banke. Dok se konstruira matrica izloženosti slučajnog grafa, svakom nedijagonalnom elementu matrice je (nezavisno) dan određen pozitivan realan broj s vjerojatnosti p i 0 s vjerojatnosti $1 - p$. Ta vjerojatnost p je zapravo ranije definirana Erdős-Renyieva vjerojatnost. Međutim tijekom implementacije trebamo biti oprezni da za dane početne vrijednosti (uključujući nule s određenom vjerojatnosti), RAS algoritam može naći rješenje matrice ulaza. Taj problem raste sa smanjenjem povezanosti.

Kako je upitno da li slučajni graf dobro opisuje stvarnu situaciju financijskih mreža, mi ćemo promatrati i model financijskog sustava kao sustav više novčanih centara. U njemu imamo nekoliko velikih banki jezgri koje su snažno povezane i veći broj manjih (perfernih) banaka koje su povezane samo s jednom bankom jezgrom, ali ne i s drugim perifernim bankama. Matrica susjedstva na međubankovnom tržištu izgleda ovako:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} L_{1,jez} & L_{2,jez} & L_{3,jez} & & L_{4,per} & L_{5,per} & \dots & L_{24,per} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_{1,jez} \\ A_{2,jez} \\ A_{3,jez} \\ \dots \\ A_{4,per} \\ A_{5,per} \\ \vdots \\ A_{24,per} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Sustav novčanih centara mora poštovati određena pravila. Prvo, sve banke jezgre su snažno povezane jedna s drugom. Stoga svi nedijagonalni elementi u gornjem lijevom dijelu matrice su jednaki 1. Drugo, svaka periferna banka povezana je točno s jednim novčanim centrom u oba smjera. Stoga desni gornji ugao ima točno jednu jedinicu u svakom stupcu, dok je donji lijevu ugao zapravo transponirani gornji desni ugao, pa imamo po jednu jedinicu u svakom retku. Kako periferne banke nisu povezane, donji desni ugao sastoji se samo od nula. Nakon konstrukcije matrice susjedstva, rubovi grafa poprimaju težine, a to radimo na način kao i kod slučajnog grafa prilagođavajući elemente ponovo koristeći RAS algoritam.

3.3 Simulacija zaraze

Jedan dio domino efekata modeliran je zavisno o karakteristikama strukture međubankovne ovisnosti. Kao okidač širenja zaraze je propast jedne banke u sustavu. Pretpostavljajući određeni zadani gubitak, banke gube dio svojih ugovora prema propaloj banci. Ako je udio gubitka veći od bankovnog kapitala, kreditorska banka također propada. Pretpostavljamo da je inicijalna insolventnost banke iznenadna i idiosinkratska i da pogođena banka ne poduzima korektivne mjere. To nam daje najgori mogući slučaj. U stvarnosti, očekivano je da banke dožive postupno slabljenje, a ne iznenadnu propast. Ako jedna ili više banaka propadnu zbog propasti prve banke, kreće sljedeći krug gdje banke gube dodatne udjele svojih ugovora zbog propalih banaka. Stoga banka propada ako:

$$\sum \text{međubankovna izlaganja prema propalim bankama} * \phi > C$$

Stopa gubitka po neispunjenju obveze, ϕ , pretpostavlja se da je jednaka kod svih banaka. Teško je točno odrediti iznos ovog parametra iz dva razloga. Prvo, propasti banaka su rijetke što nam otežava procjenu stope koja bi točna bila u slučaju propasti kreditora. Drugo, i kada bi mogli procijeniti potpunu stopu oporavka, želimo uzeti u obzir vrijeme potrebno da se to i ostvari. To razmatramo jer iako banka može postići relativno veliku stopu oporavka tijekom dužeg perioda, neizbježno je da će biti neizvjesnost o eventualnim gubitcima. Pogođena banka s velikim udjelom kapitala pod rizikom može biti u nemogućnosti nastaviti raditi na očekivanim oporavcima koji su neizvjesni. Mi ćemo uzimati da je stopa gubitka maksimalna, tj. $\phi = 1$. Teško je procijeniti razumnu stopu gubitka po neispunjenju obveze za prvi krug propasti (inicijalna iznenadna i neočekivana propast banke mora uzrokovati neki visoko neuobičajen događaj) i zapravo očekivana stopa za daljnje širenje odnosno u drugom krugu zaraze bi trebala biti manja jer neuobičajeni događaj koji je pokrenuo inicijalnu propast nema direktni utjecaj na sve banke. Ipak zbog jednostavnosti mi ćemo ostati pri pretpostavci da je inicijalna vrijednost konstantna za sve banke. [17] Zbog toga bi rezultati mogli preuveličati potencijal zaraze.

Poglavlje 4

Podaci i rezultati

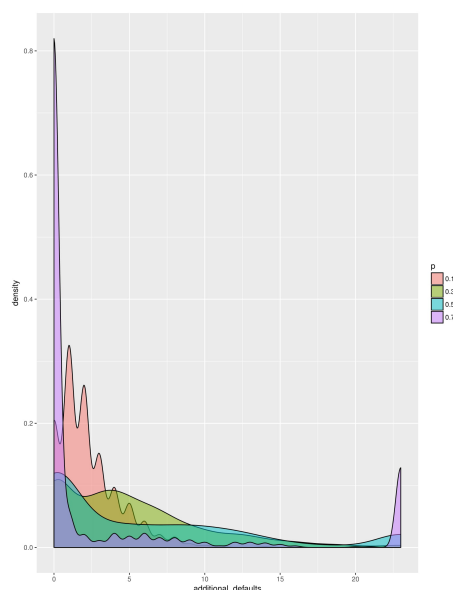
4.1 Podaci

Podatke koje promatramo uzeti su sa stranica HNB-a, te predstavljaju bilance 24 hrvatske banke u sustavu na kraju 2017. godine. Radit ćemo na tim podacima kao da se radi o zatvorenom sustavu iako to nije tako. Zbog manjka podataka morali smo uzeti tu restrikciju te smo s tim podacima radili simulacije zaraze. Vidimo da u sustavu postoje različite veličine banaka s obzirom na ukupnu imovinu i obveze. Pod male banke ubrajamo one banke koje imaju udio imovine u ukupnoj imovini sustava do 1%, srednje banke su banke koje imaju udio između 1% i 5.5%, te velike banke koje imaju udio u ukupnoj imovini veći od 5.5%. U Hrvatskoj je 2017. bilo 15 malih banaka, 4 srednje velike banke i 5 velikih banaka s tim da smo imali dvije banke koje su bile na granici između srednje velike i velike banke, s po 5.4% odnosno 6.1% ukupne imovine sustava. Njih ćemo zato nekad promatrati kao velike, a nekad kao srednje velike banke. U našoj *'benchmark'* simulaciji imamo 24 vrha, Erdős-Rényi vjerojatnost ($p = 0.3$), postotak međubankovne imovine od ukupne imovine $\phi = 0.25$ i kapitaliziranost $r = 0.05$. U razmatranjima ćemo varirati svaki od ovih parametara, dok će ostali parametri ostati nepromijenjeni.

4.2 Rezultati za slučajne mreže

Provodimo 1000 simulacija našeg algoritma za svaki $p \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$. S grafovima funkcija gustoće ćemo za različite veličine banaka vidjeti kolika je učestalost dodatne propasti banaka nakon inicijalnog šoka. Također variramo p i promatramo razlike dodatnih propasti za svaku pojedinu banku s obzirom na p .

Na slici 4.1 prikazan je graf funkcije gustoće za srednje veliku banku. Uočavamo da za različite p , vrijednosti izrazito fluktuiraju. Za $p = 0.1$ vidimo da je gustoća najveća između 0 i 5 dodatnih propasti, a to je posljedica malog broja veza u sustavu, međuobveze su velike, te će stoga banke vrlo vjerojatno propasti. Ipak, nemamo po-

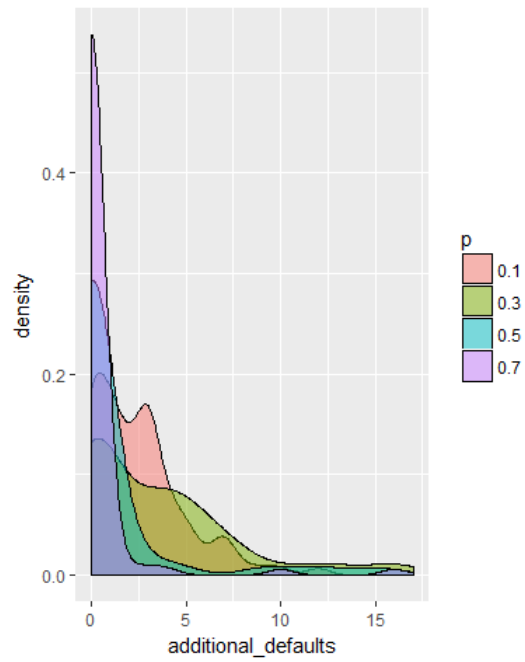


Slika 4.1: Graf funkcije gustoće za srednje veliku banku

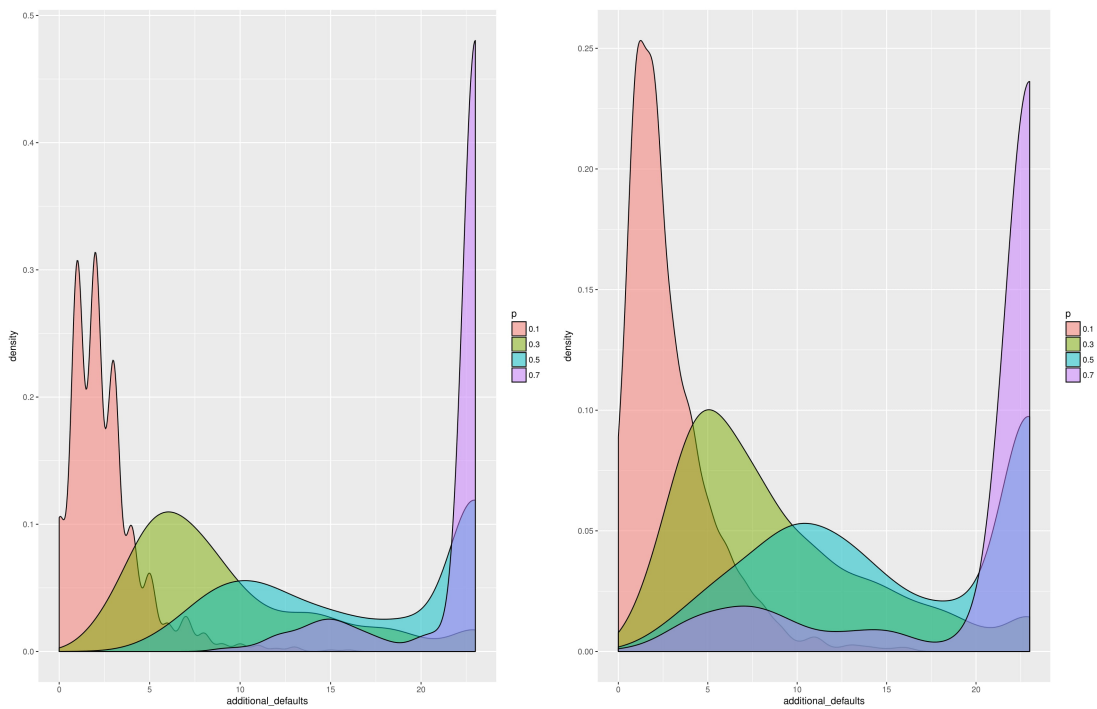
vezani sustav, što znači da dolazi samo do izoliranog šoka koji se neće širiti dalje. Za $p = 0.3$ i $p = 0.5$ vidimo da su grafovi gustoće podjednaki jer ovdje već dolazimo do veće povezanosti grafa, te su nam uravnoteženiji šokovi. Međuobveze su raspoređenije, što će dovesti do manjeg šoka u prvom krugu, ali zbog povezanosti će se dodatni šok prenijeti na više banaka u drugom i svakom idućem krugu. Za $p = 0.7$ imamo već skoro potpuno povezani sustav te vidimo da je zapravo frekvencija sličnija kao kod grafa s $p = 0.1$, ali iz različitih razloga. U prvom slučaju imali smo veliku izoliranost sustava s malim brojem veza između banaka s velikim težinama. U potonjem slučaju imamo velik broj veza i ravnomjerniju raspodjelu obveza i imovine, što zbog nedovoljne veličine banke dovodi do manjeg šoka u prvom krugu, a onda i u daljnjim krugovima. Kako je u sustavu većina malih banaka, i kod male vrijednosti p veća je vjerojatnost da će banka biti povezana s jakom težinom prema maloj banci što će opet s većom vjerojatnosti dovesti do propasti u prvom krugu, ali onda se smanjuje utjecaj u daljnjim krugovima.

Na slici 4.2 imamo graf funkcije gustoće jedne male banke u sustavu. Kod tako malog utjecaja, zapravo povezanost nema toliku važnost jer i u malo povezanom i u visoko povezanom sustavu mala banka neće imati veliki utjecaj na cjelokupni sustav. Najveća vjerojatnost da dođe do propasti barem jedne dodatne banke je za $p = 0.1$ jer ako imamo samo jednu vezu koja je povezana s malom bankom ipak može doći do dodatne propasti barem u prvom krugu zaraze.

Na slici 4.3 prikazani su grafovi gustoće za velike banke. Kod ovako velikih banaka veliki su i ekstremi. Za malu povezanost dodatne propasti su smanjene zbog izoliranosti šoka.

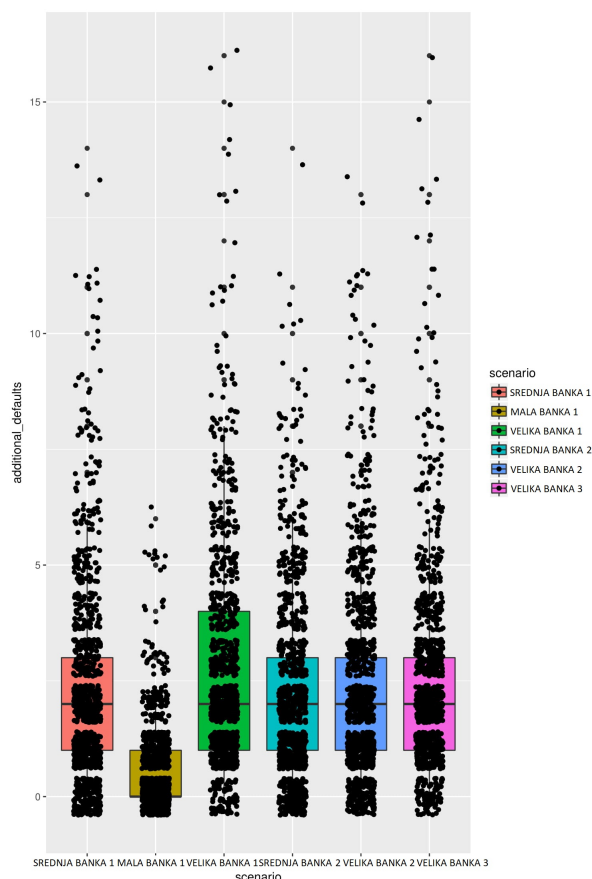


Slika 4.2: Graf funkcije gustoće za malu banku



Slika 4.3: Grafovi funkcija gustoće za velike banke

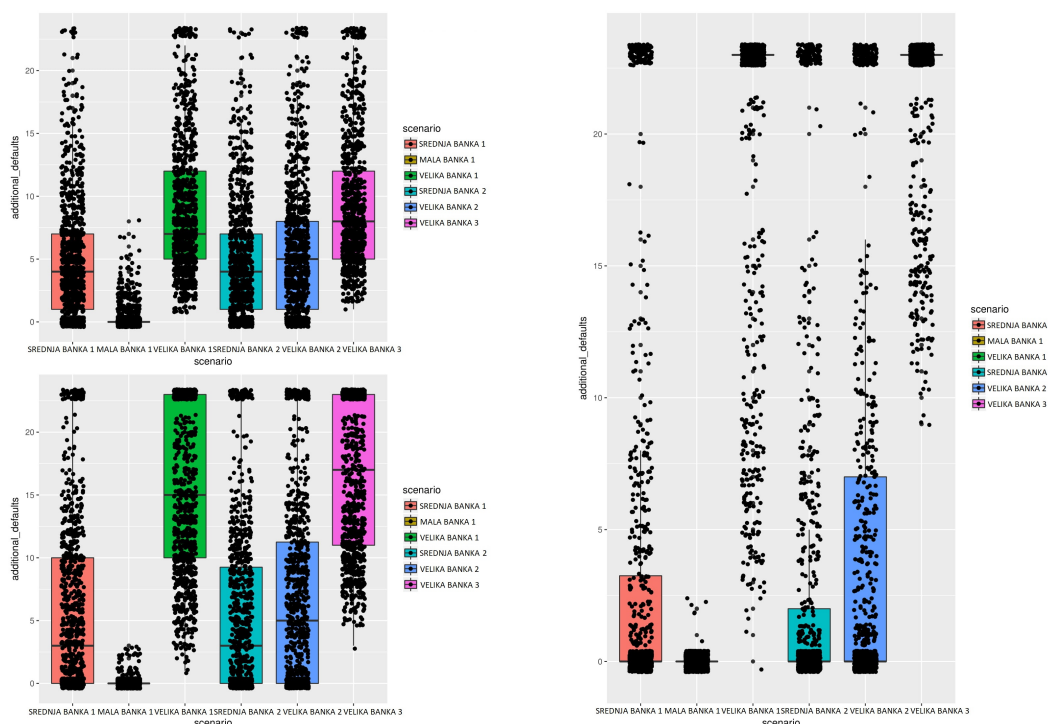
Ponovno vidimo da kod srednje povezanosti, odnosno za $p = 0.3$ i $p = 0.5$ imamo sličnu gustoću dodatnih propasti, što je posljedica ipak određene izoliranosti, a zbog svoje veličine praktički sve banke s kojima je povezana propadaju u prvom krugu i onda ovisno o veličini tih banaka zaraza se širi u daljnjim krugovima. Zanimljivo je da kod najveće povezanosti iako bi zahtjevi trebali biti uravnoteženiji, zbog svoje veličine, banka u većini slučajeva dovodi do propasti gotovo cijelog sustava. Za veliku banku koja ipak ima manji utjecaj od najveće banke vidimo da se zapravo slično ponaša, jedino što je gustoća kod velike povezanosti ipak malo manje ekstremna.



Slika 4.4: Box plot za slučaj kada je $p = 0.1$

Slika 4.4 prikazuje box plot za slučaj kada je $p = 0.1$. Jasno se vidi da srednje velike banke i velike banke imaju sličan prosjek dodatne zaraze nakon početnog šoka, što proizlazi iz toga da imamo izolirane banke u sustavu i ta veličina onda ne može doći do izražaja. Zahtjevi su i za srednje velike banke dovoljno veliki da probiju kapitalnu opremljenost banke s kojom su povezane te se zapravo ponašaju isto kao velike banke. Male banke ipak ne mogu imati takav utjecaj te imaju puno manji utjecaj na daljnju zarazu. Vidimo da se vrijednosti vrte uglavnom između 0 i 2 dodatne propasti nakon inicijalno propale male banke. Na slici 4.5 imamo slučajeve za $p = 0.3$ i $p = 0.5$. Vidimo da se sve više i više ističe veličina banaka te se vidi

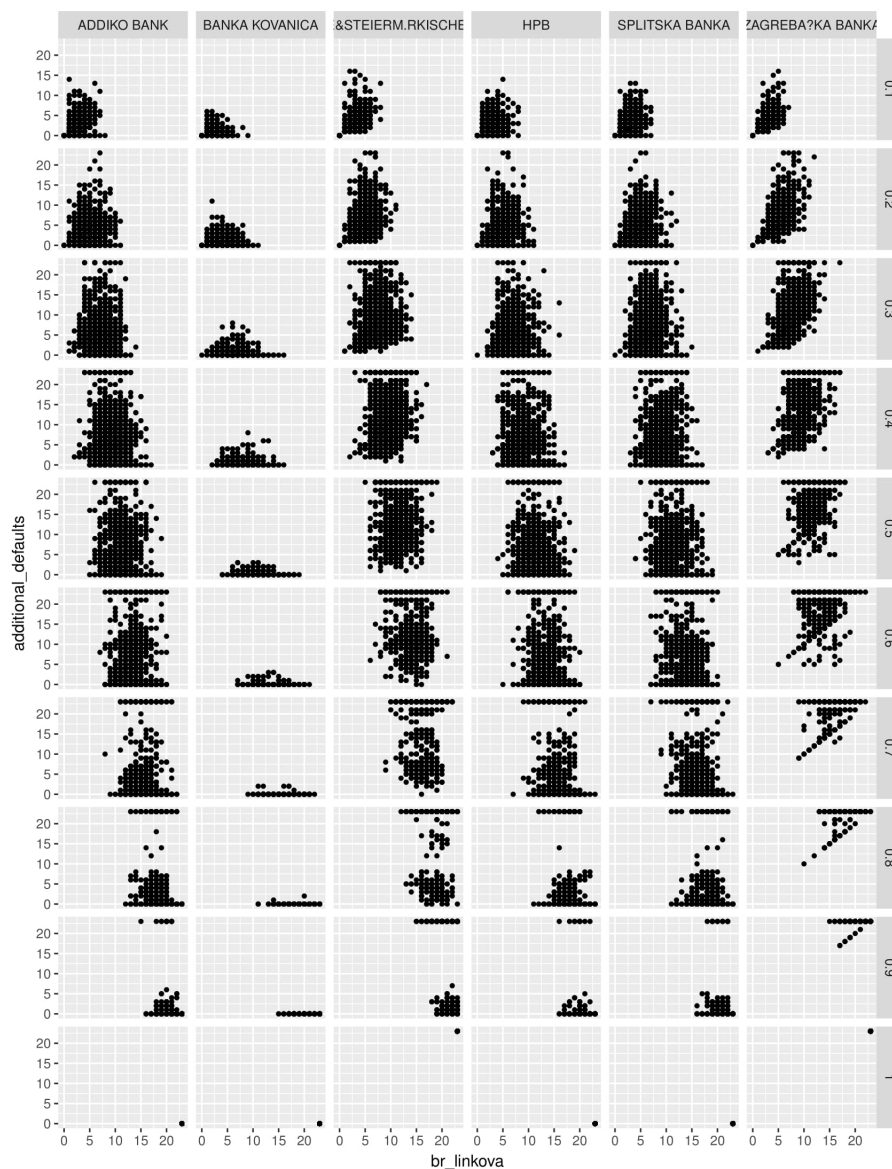
jasna razlika da pri propasti velike banke naknadno propada puno više banaka. Uz to vidimo da se one dvije banke koje su na rubu između srednje velike i velike banke ponašaju više kao srednje velike banke. Za $p = 0.7$ kada imamo već jako veliki stupanj povezanosti velike banke se skroz odmiću od srednje velikih te vidimo da u većini slučajeva s propasti velike banke propada zapravo cijeli sustav. Prikaz toga vidimo na slici 4.5b).



Slika 4.5: Box plot za 3 slučaja: a) $p = 0.3$, b) $p = 0.5$, c) $p = 0.7$

Slika 4.6 prikazuje graf kojem je x-os broj veza i y-os su naknadne propasti banaka (*additional defaults*). Za sve banke ovisno o p vidimo da broj veza za svaku banku raste te su točke sve više pozicionirane desno na grafovima. S tim povećanjem broja veza za male banke se smanjuje broj dodatno propalih banaka jer dolazi do velike disperzije međubankovnih odnosa te su ti odnosi toliko mali da nemaju utjecaj na ostale banke. Kod srednje velikih banaka za $p < 0.6$ s povećanjem broja veza prosječno raste i broj propasti banaka što znači da kako su više disperzirani međubankovni zahtjevi, to je više banaka zahvaćeno, a broj veza nije dovoljno velik da se disperzijom zahtjeva umanjuje šok, već propadaju i te dodatne banke s kojima su povezane. Veća povezanost samo širi šok, a nema utjecaj da smanji odnosno priguši zarazu. Za $p > 0.6$ za veći broj veza svake banke donekle se smanjuje broj propasti jer je disperzija zahtjeva dovoljno velika da se ublaži šok prvog kruga, a onda tako i šok daljnjih krugova. Za velike banke imamo tendenciju rasta dodatnih propasti s obzirom na broj veza za svaki p . Jednostavno one bez obzira na broj veza imaju preveliku težinu u sustavu i povlače sve više i više banaka s povećanjem međubankovnih

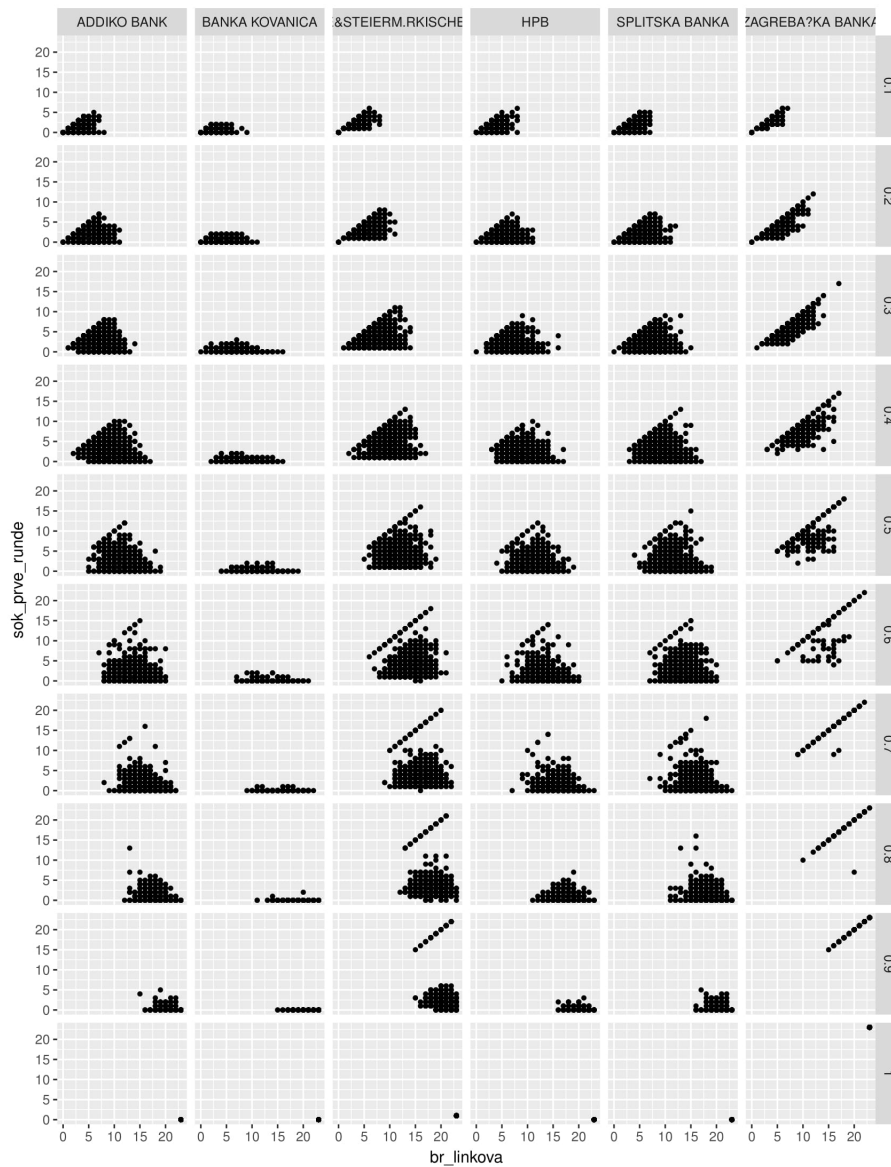
veza.



Slika 4.6: Utjecaj broja veza na zarazu sustava

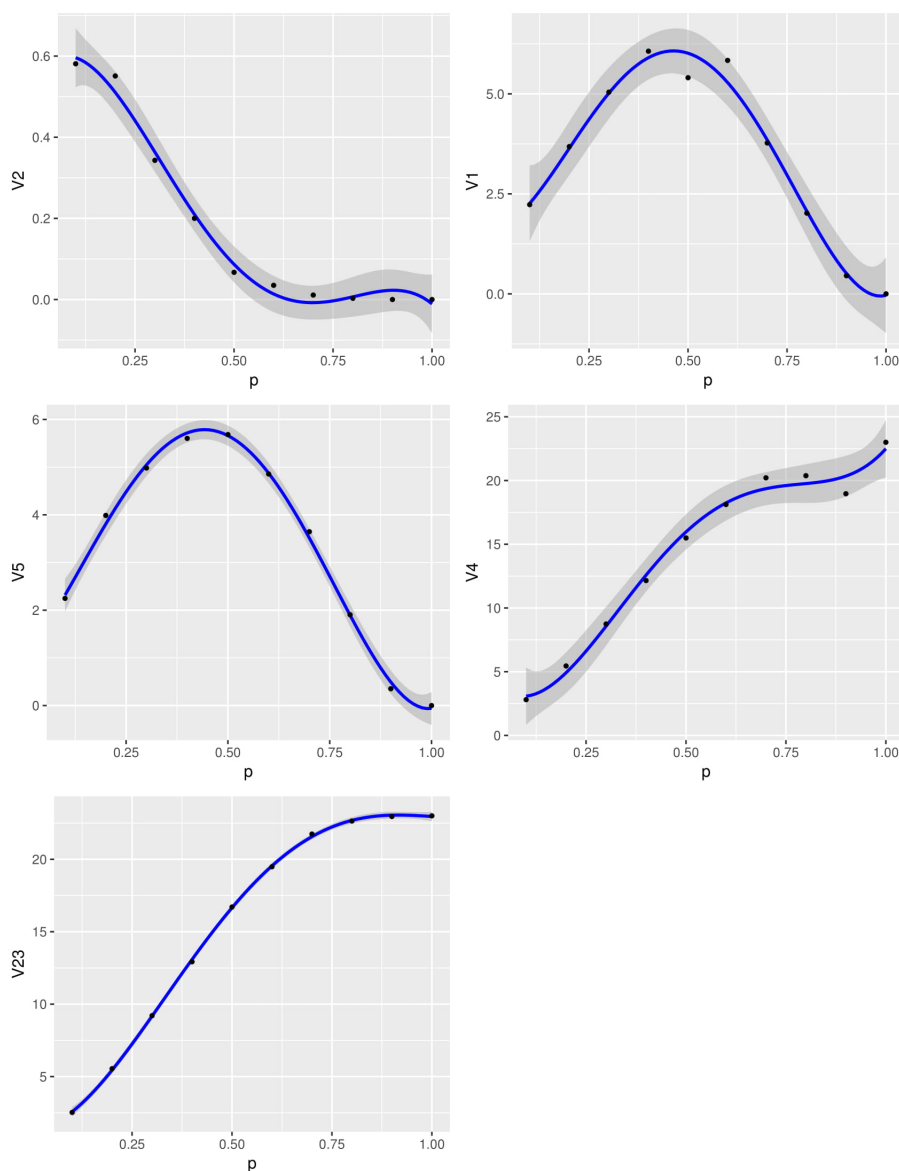
Slika 4.7 prikazuje graf ovisnosti šoka prvog kruga s obzirom na broj veza banke. Slično, kod srednje velikih banaka vidimo praktički linearnu povezanost šoka prve runde s brojem veza koje banka ima. Za $p = 0.4$ već imamo pozitivan rast šoka prvog kruga s obzirom na broj veza banke do graničnog broja veza kada je disperziranost toliko velika da se taj pozitivan rast pretvara u negativan odnos, odnosno nakon te

granice broj banaka šokiran u prvoj rundi pada s obzirom na broj veza banke. Za broj veza veže nam se i dodatni stres sustava odnosno dodatni postotak sustava koji je propao. Jasno se vidi pozitivna povezanost između broja veza i dodatnog stresa.



Slika 4.7: Utjecaj broja veza na šok prvog kruga

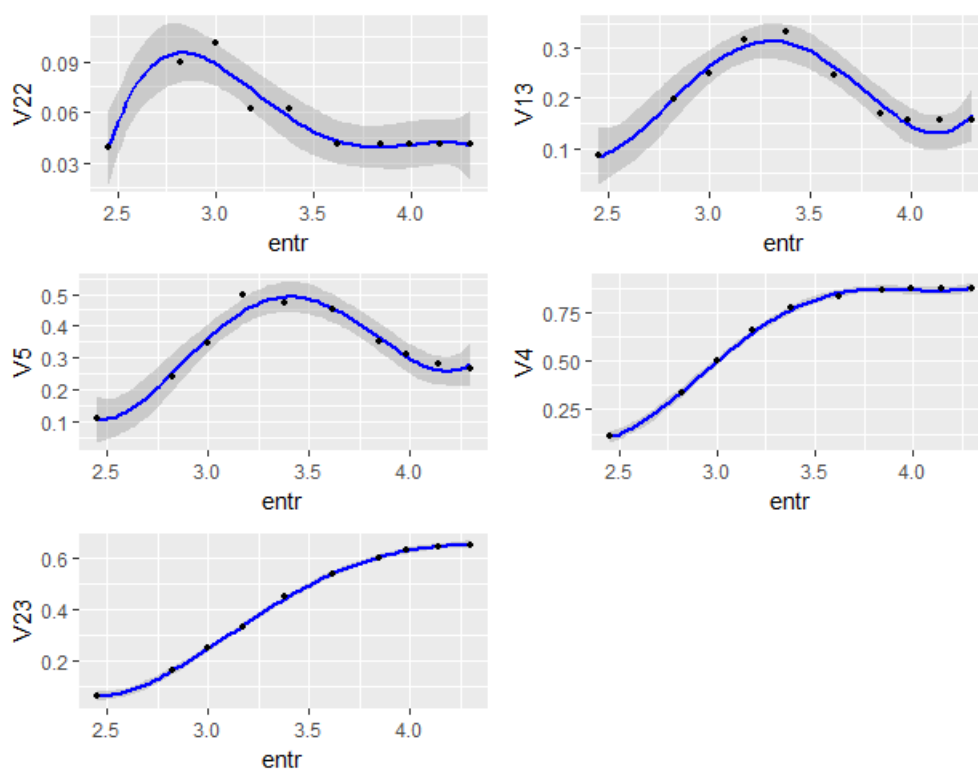
Na slici 4.8, na x-osi imamo Erdős-Rényi vjerojatnost p , gdje se p povećava i to znači da u prosjeku banke postaju povezanije. Međubankovne veze mogu imati dva suprotna učinka. Na jednoj strani mogu se ponašati kao kanali širenja šoka na cijeli sustav, odnosno kao prenositelji šoka. S druge strane, preko tih međubankovnih veza šok može biti podijeljen i apsorbiran s bankovnim kapitalom, što znači da se međubankovne veze ponašaju kao prigušitelji šoka. Na grafu se vidi koje svojstvo dominira u kojem stadiju i za koju banku. Vidimo da za svaku veličinu banke imamo različito ponašanje za određeni p . Za male banke zbog premalog utjecaja na sustav, zaraza se ublažava za sve veći p .



Slika 4.8: Prosječni broj propasti banaka za različiti p

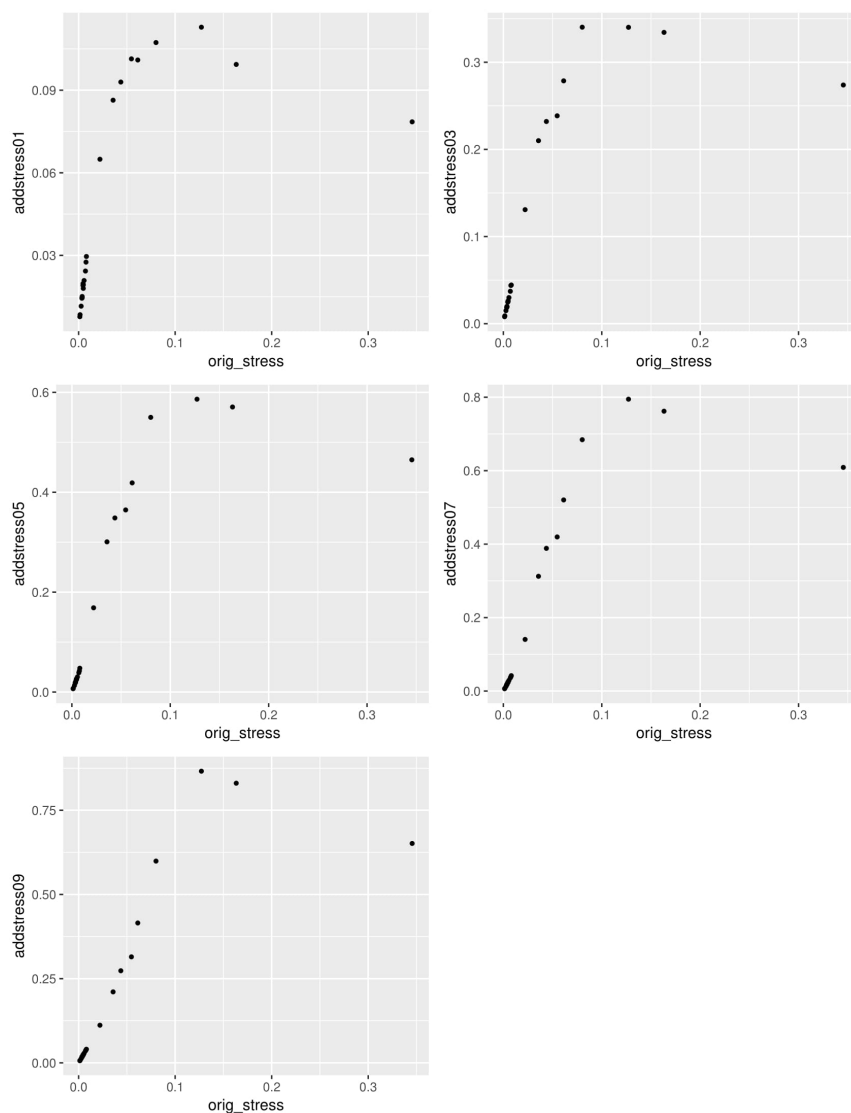
Za srednje velike banke imamo porast zaraze za p između 0.1 i 0.5, dok se nakon $p = 0.5$ zaraza smanjuje. To znači da u prvom stadiju dominira utjecaj veza kao šok prenositelja, dok se za veće vrijednosti od p zaraza smanjuje što znači da počinje dominirati utjecaj prigušivanja odnosno smanjenja šoka zbog dovoljno velike disperzije međubankovnih zahtjeva, te se sve više i više banaka uspijeva oduprijeti dobivenom šoku. Kod velikih banaka cijelo vrijeme dominira utjecaj prenositelja šoka. Za sve veću povezanost, zbog svoje veličine te bez obzira na disperziranost zahtjeva banke, one svojim rezervama ne uspijevaju apsorbirati šok, a posljedica je onda da sve više i više banaka propada.

Isto vrijedi i za entropiju jer što je veći p , veća je povezanost, pa tako i disperziranost imovine. Stoga, veća je i entropija što znači da su rezultati slični kao i za p . Rezultati su prikazani na slici 4.9.



Slika 4.9: Utjecaj entropije na dodatni stres sustava

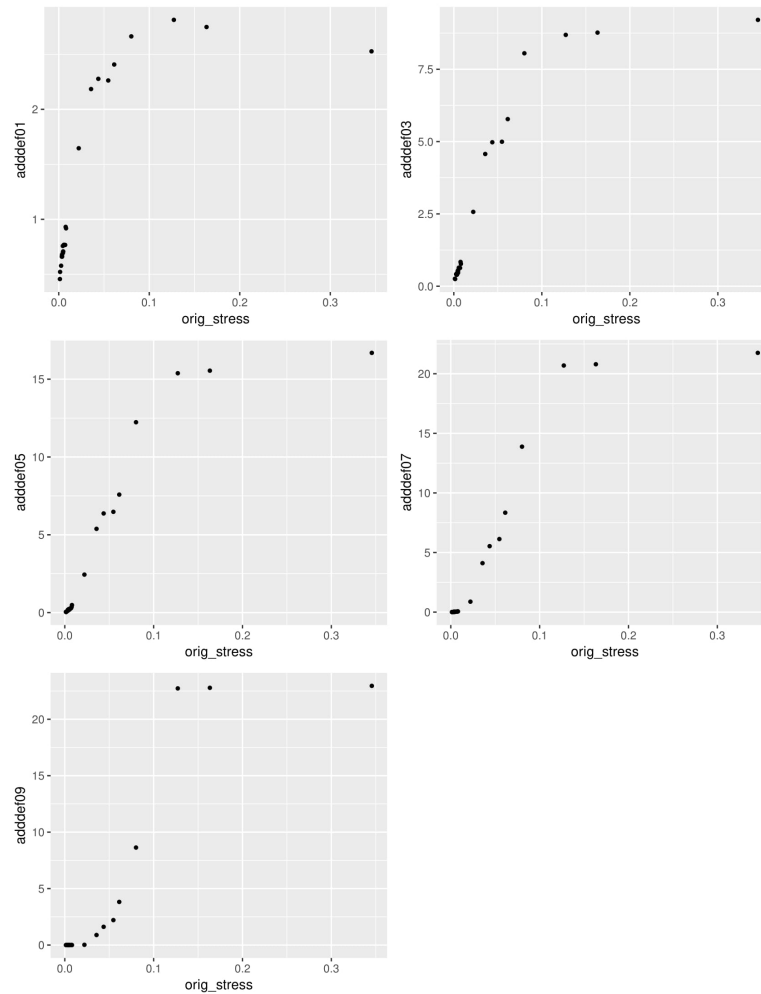
Zanimljivi su rezultati na slikama 4.10 i 4.11 koji pokazuju da za $p = 0.1$ i $p = 0.3$ dodatni stres sustava raste ovisno o originalnom stresu do određene razine. Dodatni stres počinje padati nakon što originalni stres premaši 10% ukupnog sustava. Tome je tako jer u slučajevima kada propadne manja banka i pri tome povuče najveću za sobom, velika banka ima veliku težinu i onda će više utjecati na prosjek dodatnog stresa.



Slika 4.10: Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava

Vidimo da za $p = 0.1$ dodatni stres ide do samo 12% što nije pretjerano visoki iznos. Kod originalnog stresa za $p = 0.3$ gdje imamo već malo povezaniji sustav s manje izolacija, maksimalni prosječni dodatni stres raste do iznad 30% sustava. Ponovno vidimo da za originalni stres veći od 0.1 dodatni stres počinje padati. Za veće p -ove, pa i za veću povezanost sustava rezultati su slični, ali trend nakon granice od 0.1 strmije pada. Tome je tako jer prosječno velike banke jednostavno mogu povlačiti cijeli sustav za sobom, a onda dodatni stres za banku kojoj je originalni stres 0.34 maksimalno može biti 0.66 dok za manje banke maksimalni dodatni stres može biti veći.

Stoga graf ovisnosti dodatnih propasti banaka se ipak razlikuje u odnosu na graf s originalnim stresom. Za $p = 0.1$ također dobivamo mali pad nakon granice od 10%

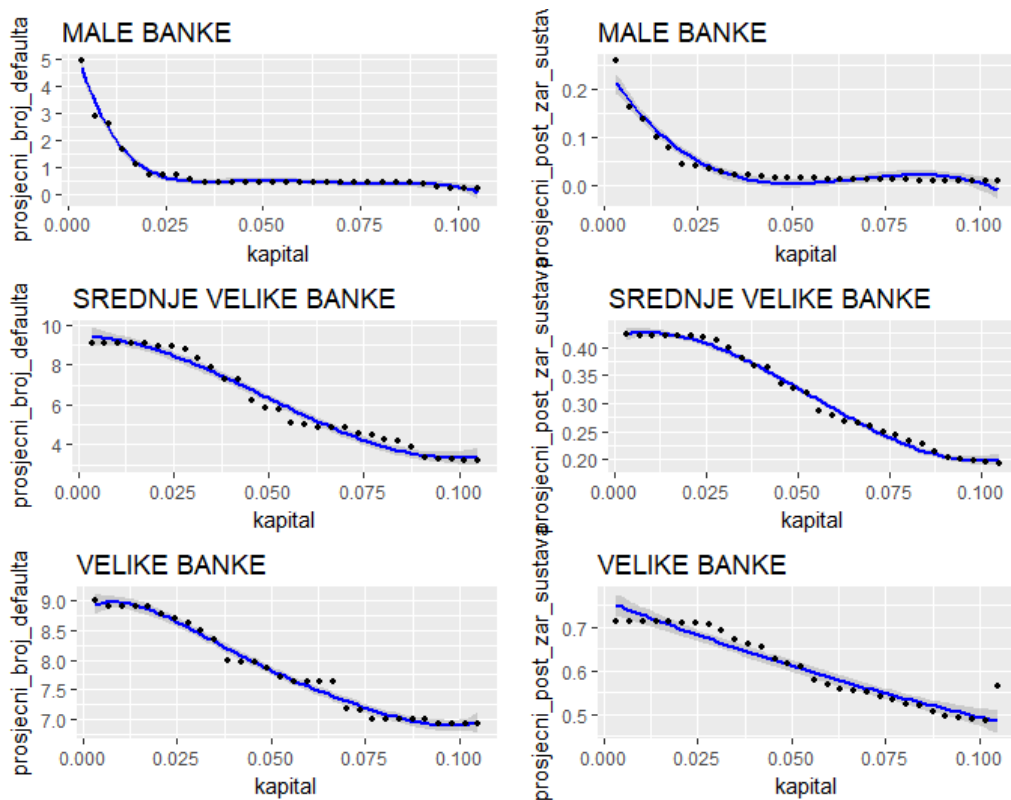


Slika 4.11: Utjecaj originalnog stresa na broj propasti banaka u sustavu

kao originalnog šoka banke. Već za $p = 0.3$, a onda i veće p vidimo da dodatne propasti rastu s obzirom na rast originalnog šoka, a tome je tako jer će veće banke povući za sobom više banaka. Do toga dolazi jer što je veća banka, veći je postotak banaka koji je manji od nje te je svaku banku lakše povući za sobom svojim početnim šokom tj. svojom propasti.

Sada ćemo promatrati utjecaj kapitaliziranosti na otpornost bankovnog sustava. Na slici 4.12 imamo rezultate za male, srednje velike i velike banke. Graf prikazuje slabu monotonu i negativnu vezu između bankovne kapitalizacije i zaraženosti sustava. Proveli smo 1000 simulacija za $p = 0.3$. Kako je $p = 0.3$ nećemo dobiti najekstremnije moguće vrijednosti. Nije realno očekivati potpunu povezanost sustava te zato stavljamo umjereni p .

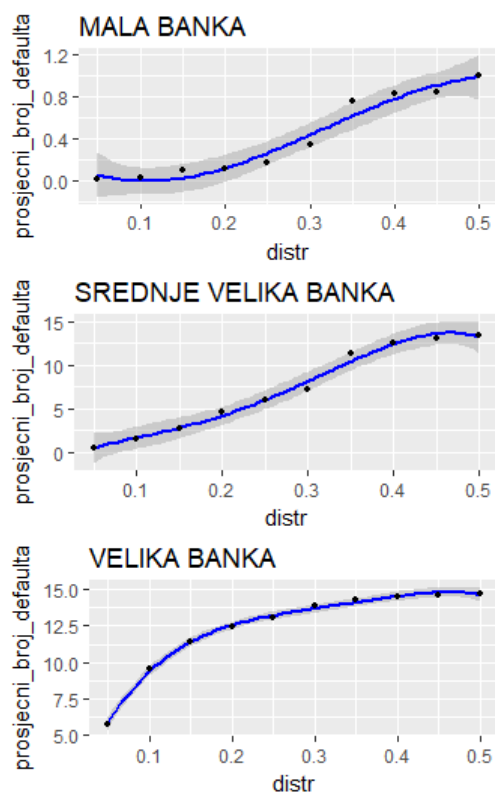
Primjećujemo kako za malu kapitaliziranost imamo veliki stupanj zaraze čak i za male banke. S rastom kapitala, broj propasti banaka i postotak zaražene imovine



Slika 4.12: Utjecaj promjene kapitala na broj propasti banaka, te na dodatni stres u sustavu

se smanjuje, te za dovoljno veliku kapitaliziranost vidimo da zapravo propada samo početna banka, te sustav uspjeva neutralizirati šok. Kod svih veličina banaka za visoke razine kapitaliziranosti propada samo prvo šokirana banka, te za male banke već pri umjerenoj kapitaliziranosti dolazi do neutraliziranja početnog šoka. Kada kapitaliziranost pada do određene vrijednosti počinju propasti drugog kruga jer su susjedne banke manje otporne na šokove. Više gubitaka se prosljeđuje te su banke lošije zaštićene, čime se povećava vjerojatnost propasti drugog kruga. Vidimo da za određene različite razine kapitaliziranosti imamo jednak postotak propasti, a to je tako jer je kapitaliziranost ipak dovoljno velika da se ne prelazi u idući krug zaraze. Vidimo razliku u veličinama banaka. Dok je kod malih banaka prisutan prvo oštri pad zaraze s obzirom na kapitaliziranost, kod srednje velikih banaka i velikih banaka imamo praktički linearnu povezanost, te nemamo početni drastični pad zaraze za inicijalno povećanje kapitaliziranosti. Mala agregatna kapitaliziranost može jednostavno biti posljedica agregatnog šoka koji oslabljuje agregatnu kapitaliziranost cjelokupnog financijskog sustava. Takav agregatni šok može drastično povećati rizik i veličinu zaraze pri propasti pojedine banke sustava.

U sljedećoj simulaciji istražujemo utjecaj veličine međubankovnog posuđivanja(ϕ) na broj propasti banaka u sustavu. Postepeno povećavamo ukupnu imovinu i obveze povećavajući postotak međubankovnih izlaganja u sustavu.



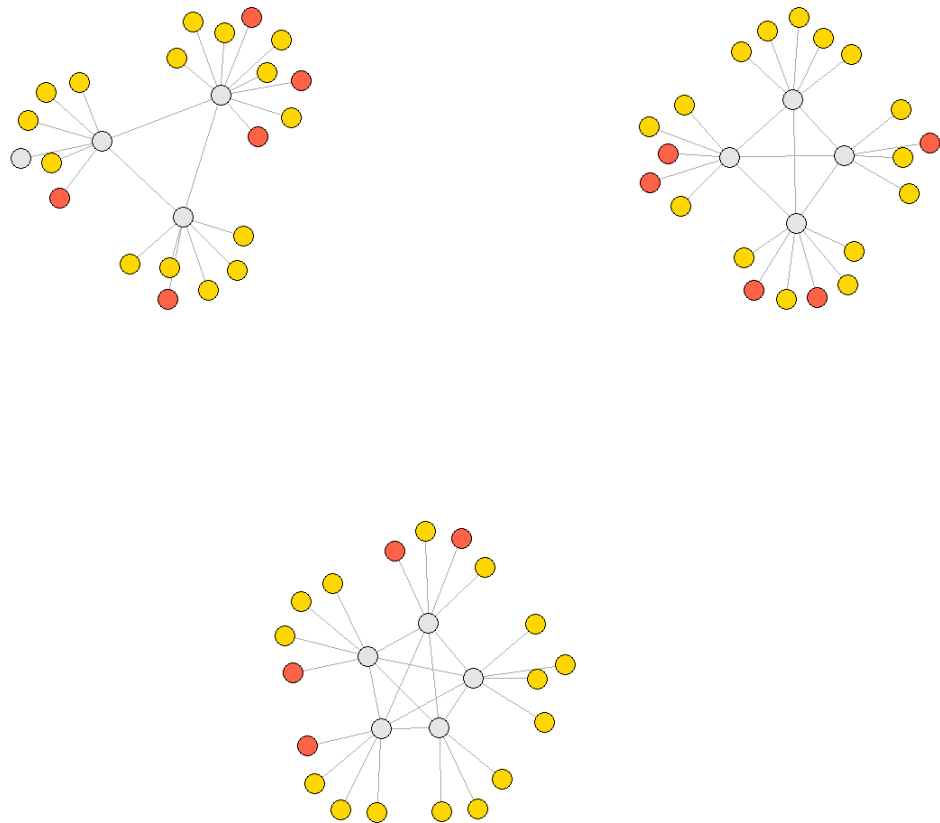
Slika 4.13: Utjecaj udjela međubankovnih izlaganja na broj dodatnih propasti banaka

Kako je broj veza fiksiran i određen Erdős-Rényijevom vjerojatnosti, povećanje međubankovne imovine podrazumijeva rast veličine svake međubankovne veze, odnosno povećava se težina svake veze. Porastom međubankovne imovine dobivamo povećanje prijenosa šoka prema međubankovnim kreditorima, ali s druge strane smanjuje se šok proizveden s korisničkim depozitima. Vidimo da za male i srednje banke, za mali ϕ dolazi do malo propadanja banaka odnosno praktički propada samo inicijalno šokirana banka. Za veći ϕ dolazi do triggeriranja šoka drugog kruga. Do toga dolazi jer je sve više šokova prenijeto na kreditorske banke te se ne može apsorbirati doneseni šok. Kako male banke nemaju pretjeranog utjecaja na rast od ϕ , vidimo minimalno postepeno povećanje zaraze. Kod srednje velike banke vidimo da je porast postepen, gotovo linearan te se vidi veliki utjecaj na sustav. Velike banke imaju puno strmiju liniju od srednje velikih bankaka, odnosno za početne ϕ broj propasti brzo raste, da bi nakon postotka od 20% međubankovne imovine u odnosu na ukupnu imovinu krenuo blagi porast broja propasti u odnosu na postotak međubankovne

imovine. Sve u svemu pokazuje se da veličina međubankovnih zahtjeva može voditi ka povećanju rizika zaraze.

4.3 Rezultati kod novčanih centara

Na grafu 4.14 prikazana su nam 3 slučaja novčanih centara koja smo promatrali. Sivom bojom označene su velike banke, crvenom su označene srednje velike banke, te žutom bojom su označene male banke u sustavu. Za svaki od 3 slučaja proveli smo tisuću simulacija s različitim povezanostima perifernih banaka s bankama novčanih centara.

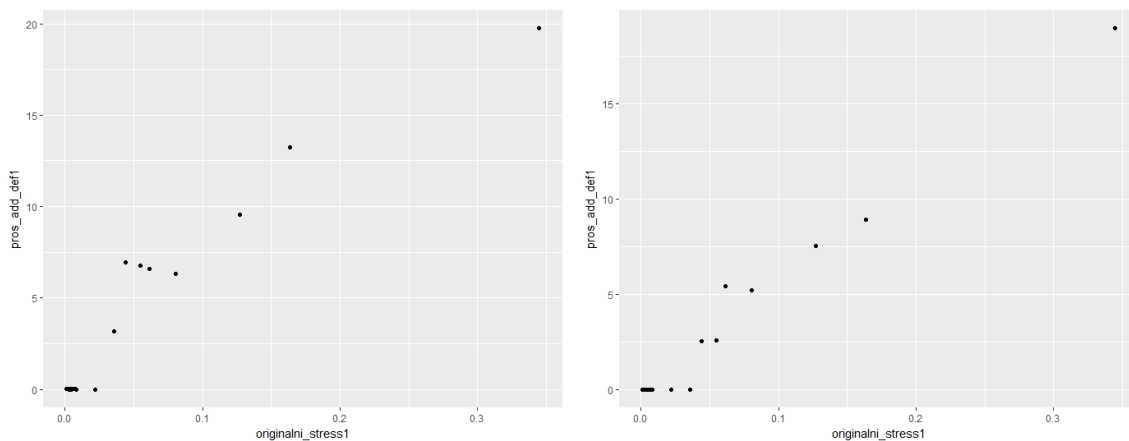


Slika 4.14: Izgled financijskog sustava s različitim brojem banaka jezgri

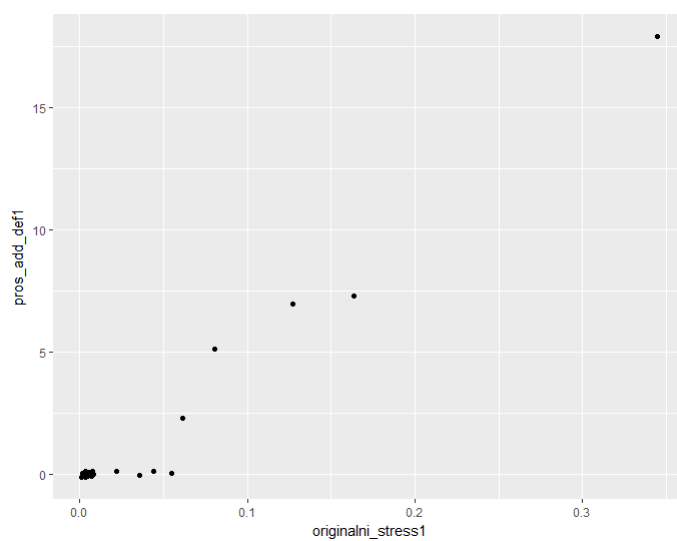
4.3.1 3 novčana centra

Promatramo kako se širi '*domino efekt*' u slučaju kada se tri najveće banke u sustavu ponašaju kao novčani centri. Novčani centri u ovom slučaju čine 64% financijskog sustava. Na slikama 4.15 i 4.16 prikazani su rezultati za različite razine kapitaliziranosti cjelokupnog sustava. U prvom slučaju $r = 0.06$, u drugom $r = 0.08$, a u trećem

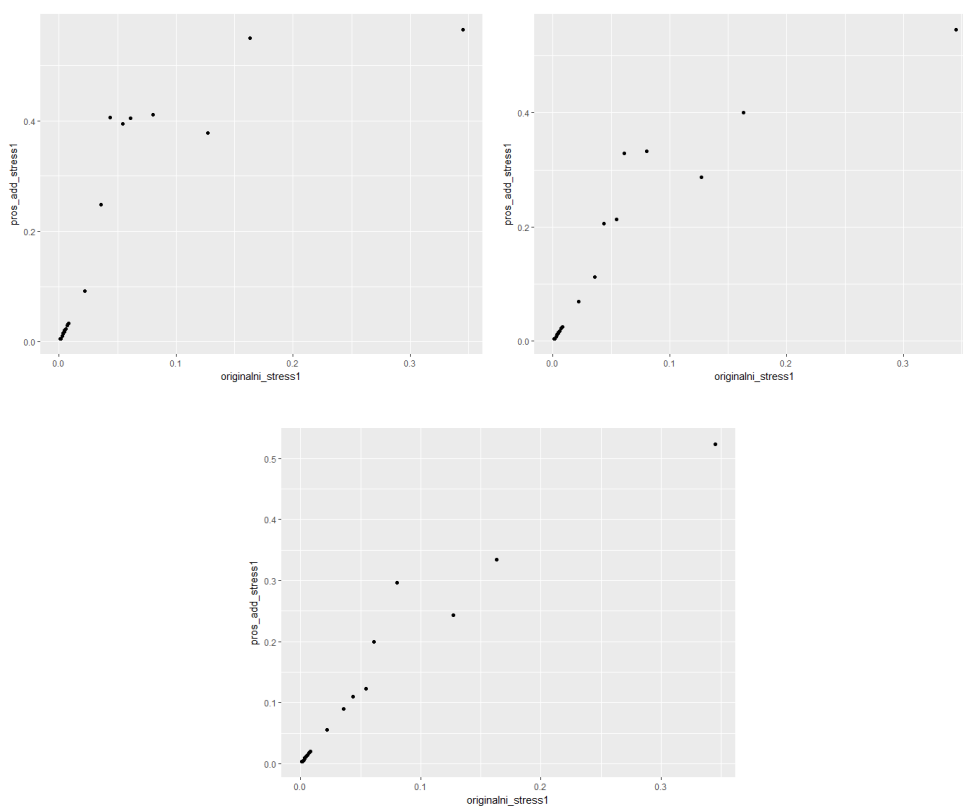
$r = 0.1$. Pretpostavili smo kao i u prijašnjim razmatranjima da sve banke imaju istu razinu kapitaliziranosti. Vidimo da za kapitaliziranost od 0.06 za novčane centre broj propalih banaka raste s obzirom na veličinu tj. originalni stres sustava. Kod srednje velikih banaka i velikih banaka koje nisu novčani centri nemamo izrazitu pozitivnu povezanost između originalnog stresa i prosječnog dodatnog stresa. Kapitaliziranost u ovom slučaju jednostavno nije dovoljno velika da bi se vidjela velika razlika između banaka koje su slične veličine, a ipak imaju prilično visoki originalni šok. Zbog male kapitaliziranosti dolazi do praktički identičnog šoka, tj. u većini slučajeva dolazi do propasti banke jezgre koju je povukla periferna banka, te se onda zaraza širi dalje svojim tokom. Za $r = 0.08$ imamo prijelazni slučaj, dok za $r = 0.1$ kapitaliziranost dolazi više do izražaja. Što su banke manje, one ipak u manje slučajeva uzrokuju propast novčanog centra s kojim su povezane, te je ukupna dodatna propast također manja. Vidimo da s kapitaliziranosti od 0.06 većina srednjih i velikih banaka koje nisu novčani centri prouzročuju između 5 i 10 dodatnih propasti banaka dok taj broj pada za kapitaliziranost od 0.1 gdje propada u najgorem slučaju samo 5 dodatnih banaka. Kod banaka koje se ponašaju kao novčani centri također se smanjuje broj dodatnih propasti. Dok u početnom slučaju 2 manja novčana centra uzrokuju između 10 i 15 dodatnih propasti, u posljednjem slučaju ta brojka pada te je prosječni broj dodatnih propasti oko 7. Gledajući Hrvatsku najrelevantniji bi bio treći slučaj, jer kapitaliziranost je rijetko niža od 10%. Naravno banke nisu povezane samo međusobno već i s inozemnim bankama ali zbog nedostatka podataka jednostavno ne možemo promatrati taj slučaj.



Slika 4.15: Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$



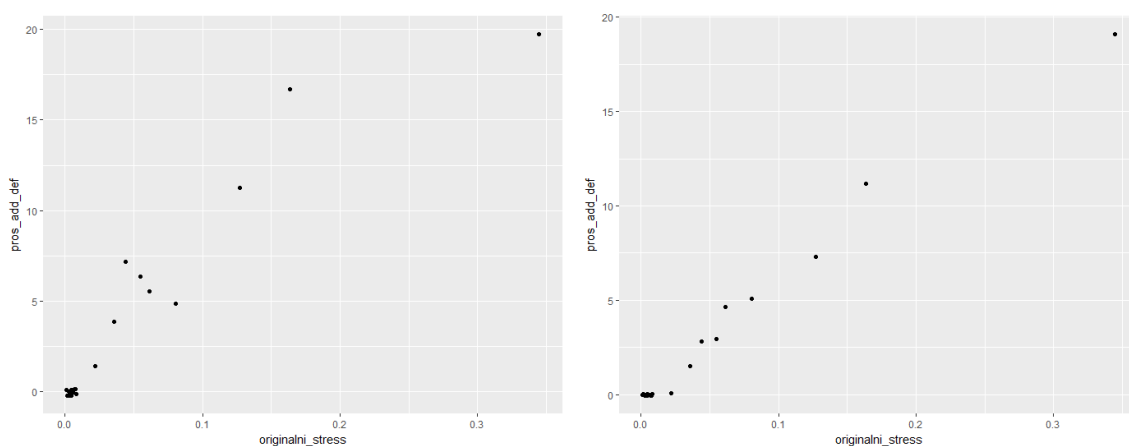
Slika 4.16: Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: $r = 0.1$



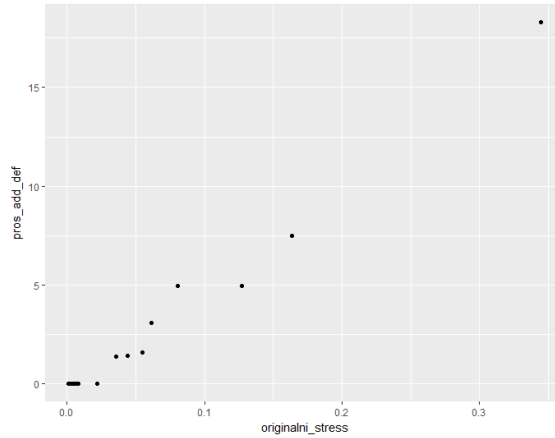
Slika 4.17: Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$

4.3.2 4 novčana centra

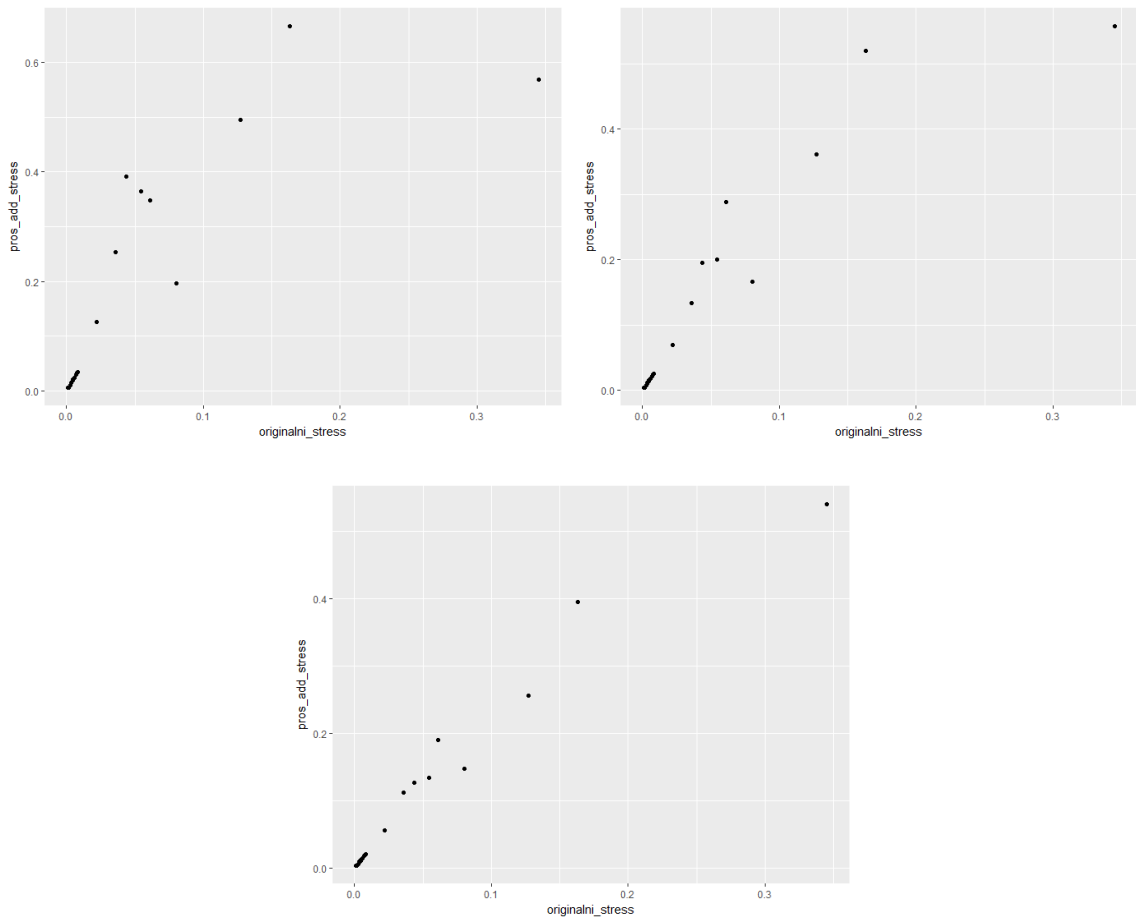
U slučaju kada su 4 najveće banke novčani centri dobivamo malo drugačije rezultate. Novčani centri u ovom slučaju čine 72% sustava. Kod male kapitaliziranosti srednje velike periferne banke imaju veći utjecaj na ukupni sustav od nekih novčanih centara jer u prvom krugu dovode do propasti svojeg novčanog centra, te onda novčani centar širi zarazu dalje. Najmanji novčani centar u ovom slučaju ima manji dodatni stres od nekih srednjih banaka jer srednje banke zapravo imaju dodatni stres veći točno za taj novčani centar koji propada zbog inicijalnog šoka. Za dvije najveće banke vidimo da je kapitaliziranost sustava premala, te one povlače za sobom gotovo cijeli sustav, a najveća banka povlači prosječno manji dio sustava samo zato što je veće veličine pa je jednostavno manji ostatak sustava. Broj dodatno propalih banaka naravno raste. Kako kapitaliziranost raste tako se smanjuje postotak zaraženog sustava nakon propasti inicijalne banke. Također srednje velike banke sve manje dovode do propasti banaka novčanih centara, pa je i prosječni dodatni stres manji što je banka manja jer srednje velike banke sada više ne dovode do propasti srednje velikih novčanih centara.



Slika 4.18: Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$



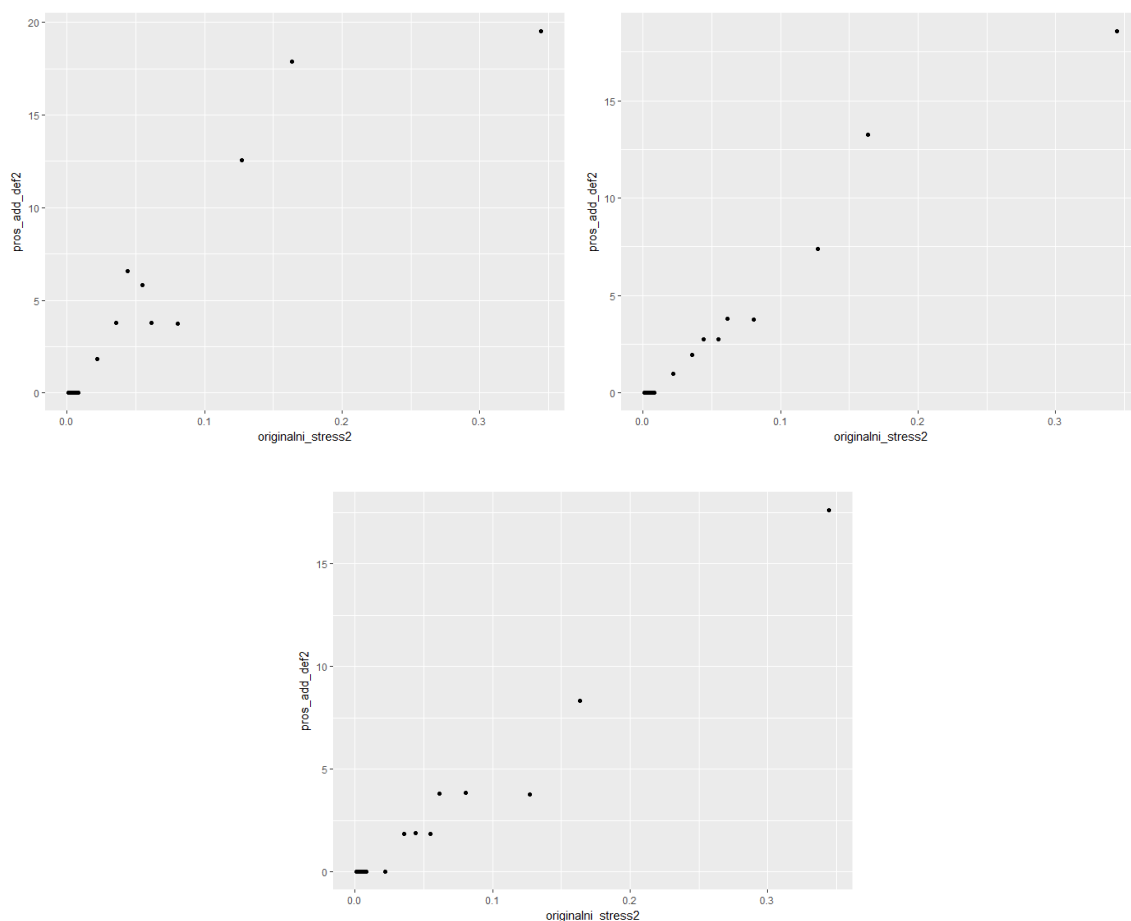
Slika 4.19: Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: $r = 0.1$



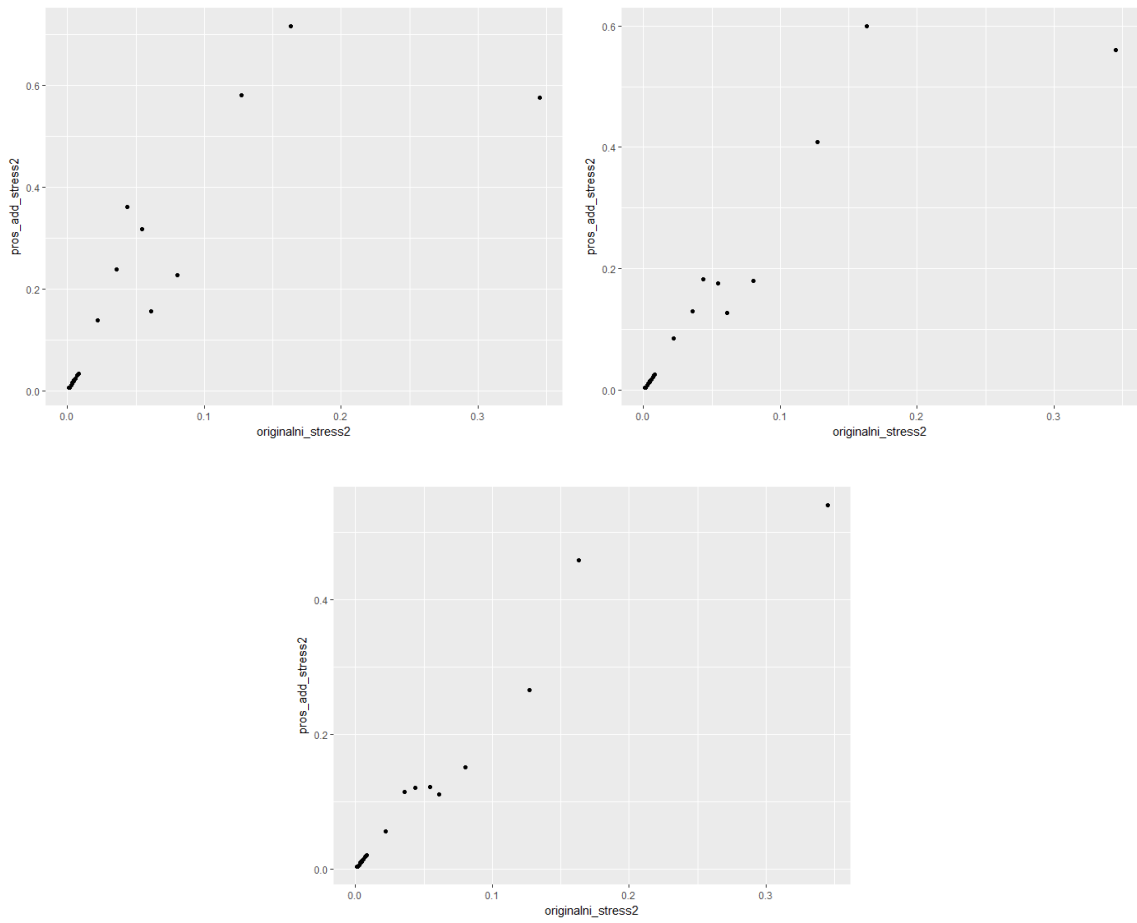
Slika 4.20: Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$

4.3.3 5 novčanih centara

U posljednjem slučaju kojeg promatramo pretpostavljamo da imamo 5 novčanih centara u sustavu. $CR = 0.78$ što znači da je skoro 80% sustava sačinjeno od banaka koje se ponašaju kao novčani centri. Kao u slučaju gdje imamo 4 novčana centra za malu kapitaliziranost dolazi do nesrazmjera u pozitivnom utjecaju originalnog stresa na broj dodatno propalih banaka, a razlog je isti kao i za slučaj sa 4 novčana centra. Vidimo da zbog veće disperziranosti između novčanih centara, broj dodatnih propasti je prosječno manji u odnosu na sustav s 4 novčana centra, što znači da se disperziranost ponaša kao ublažitelj šoka. Za veću kapitaliziranost, novčani centri sve manje propadaju zbog propasti srednje velike periferne banke, te dolazimo do toga da i najmanji novčani centar ima veći utjecaj na sustav od bilo koje srednje velike periferne banke.



Slika 4.21: Utjecaj originalnog stresa na broj dodatnog propadanja banaka: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$



Slika 4.22: Utjecaj originalnog stresa na dodatni stres sustava: a) $r = 0.06$, b) $r = 0.08$, c) $r = 0.1$

Zaključak

Predstavili smo financijski sustav na dva različita načina. U prvom dijelu kao slučajni graf, te u drugom dijelu kao sustav više novčanih centara. Zaključili smo da razina povezanosti različito utječe na sustav propadanjem banaka različite veličine. Kod velikih banaka pozitivna je koreliranost između stupnja povezanosti sustava i razine 'domino efekta'. Kod srednje velikih banaka dobivamo drugačije rezultate jer međubankovna izlaganja nisu dovoljno velika, te razina zaraze raste do određenog stupnja povezanosti do kojeg prevladava utjecaj šok prenositelja, dok nakon toga počinje prevladavati utjecaj prigušujućeg šoka zbog disperziranosti međubankovnih izlaganja. Za male banke unatoč negativnoj koreliranosti povezanosti i dodatnog stresa sustava, one ni u jednom slučaju ne dovode do velike dodatne zaraze sustava. Nakon toga pokazali smo kako stupanj kapitaliziranosti sustava utječe na broj propalih banaka nakon inicijalnog šoka. Zaključili smo da se povećanjem kapitaliziranosti smanjuje širenje inicijalnog šoka. Kod malih banaka imamo snažan početni pad te nakon toga konstantno mali broj dodatnih propasti s obzirom na promatrane kapitaliziranosti sustava. Za srednje i velike banke imamo negativnu gotovo linearnu povezanost razine kapitaliziranosti i prosječnog broja dodatnih propasti banaka. Kada smo mijenjali veličinu međubankovnih posuđivanja uz nepromijenjene ostale parametre zaključili smo da se slično ponašaju sve veličine banaka. Kod malih banaka s porastom međubankovne imovine raste broj dodatno zaraženih banaka iako su to zanemarive vrijednosti s obzirom na veličinu sustava. Kako je promatrani 'benchmark' kapitaliziranosti sustava $r = 0.05$ te $p = 0.3$, velike banke i srednje velike banke ponašaju se slično čak i u brojkama. Razlika je jedino u tome što velike banke imaju nagliji porast prosječnog broja propasti za manje razine međubankovne imovine, dok kod srednje velikih banaka taj nagli rast nastaje za veće postotke međubankovne imovine. Iako u stvarnoj situaciji nemamo jednaku kapitaliziranost za svaku banku, te su sustavi općenito puno veći, ipak dobivamo određenu ideju kako bi se sustav mogao ponašati u slučaju iznenadnih propasti banaka. Za razliku od slučajnih grafova sustav novčanih centara ponaša se malo drugačije. Povećavajući kapitaliziranost svih banaka unutar sustava za sva tri slučaja koja smo promatrali dobili smo stabilniji sustav. Zanimljivo je da sustav s više novčanih centara nije puno stabilniji od sustava s manje banki jezgri. Ne dolazi do očekivanog rezultata da je za sustav s više jezgri gdje su umjerenije raspoređena izlaganja među bankama novčanih centara značajno smanjen rizik zaraze.

Bibliografija

- [1] Censor Y.; Zenios S. A. *Parallel optimization*. Oxford University Press, 1997.
- [2] Lublóy A. Domino effect in the Hungarian interbank market. 2005.
- [3] Sachs A. Completeness, interconnectedness and distribution of interbank exposures - a parametrized analysis of the stability of financial networks. *Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies*, 08 2010.
- [4] Upper C.; Worms A. Estimating bilateral exposures in the German interbank market: Is there a danger of contagion? *BIS Working paper No. 234*, 2004.
- [5] Barabási A.-L. Random networks. *Network science*, 2014.
- [6] Elsinger H.; Lehar A.; Summer M. Risk assessment for banking systems. *Österreichische Nationalbank working paper, No. 79*, 2002.
- [7] Furfine C. Interbank exposures: quantifying the risk of contagion. *BIS Working Papers no. 70*, 1999.
- [8] Allen F.; Gale D. Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108, pages 1–33, 2000.
- [9] Allen F.; Babus A. Network in finance. *The network challenge: strategy, profit, and risk in an interlinked world*, 2009.
- [10] Degryse H.; Nguyen G. Interbank exposures: an empirical examination of contagion risk in the Belgian banking system. *International Journal of Central Banking, Vol3*, pages 71–123, 2007.
- [11] Freixas X.; Parigi B.; Rochet J.C.S. Systemic risk, Interbank relations and liquidity provision by the Central bank. *Journal of Money, Credit and Banking*, pages 611–638, 2010.
- [12] Boss M.; Elsinger H.; Thurner S.; Summer M. The network topology of the interbank market. *Financial stability review 7*, pages 84–95, 2004.
- [13] Sheldon G.; Maurer M. Interbank lending and Systemic Risk: An Empirical Analysis for Switzerland. *Swiss Journal of Economics and Statistics, Vol 134*, pages 685–704, 1998.

- [14] Mistrulli P. Interbank lending patterns and financial contagion. *Mimeo, Banca d'Italia*, 2005.
- [15] Cifuentes R. Banking concentration: Implications for systemic risk and safety-net design. *Central Bank of Chile Working Paper, No. 231*, 2003.
- [16] Gai P.; Kapadia S. Contagion in Financial Networks. *Bank of England Working paper no.383*, 2010.
- [17] Wells S. Financial interlinkages in the United Kingdoms interbank market and the risk of contagion. *Bank of England working paper, No. 230*, 2004.
- [18] Shalizi C. Shannon Entropy and Kullback-Leibler Divergence. <http://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/754/2006/notes/lecture-28.pdf>, 2006.

Sažetak

U ovom diplomskom radu analizirali smo utjecaj strukture međubankovnih izlaganja na stabilnost financijskog sustava. Primijenili smo teoriju mreža kako bi konstruirali bankovni sustav te smo analizirali otpornost financijskog sustava nakon idiosinkratskog šoka, tj. propasti pojedine banke u sustavu. Analizirali smo otpornost sustava s obzirom na veličinu banke, te glavne parametare koji opisuju sustav kao slučajni graf. To su kapitaliziranost pojedine banke u sustavu, veličina međubankovnog sustava, entropija te stupanj povezanosti. U prvom slučaju promatrali smo kako se ponaša sustav koji je konstruiran kao slučajni graf. U drugom dijelu rada pokazali smo kako se ponaša sustav konstruiran tako da se najveće banke ponašaju kao novčani centri cjelokupnog sustava. Uzeći u obzir veličine banaka unutar sustava i gledajući glavne parametre analizirali smo otpornost sustava na šokove za oba promatrana slučaja.

Summary

In this graduate thesis we analysed how the structure of interbank liabilities impacts the stability of financial system. We applied network theory to construct the banking system and we analysed the resilience of financial system after idiosyncratic shock, i.e. default of a single bank of the system. We analysed resilience of a financial system considering the size of a bank and main parameters that describe a system as a random graph. That are capitalization, the size of interbank market, entropy and the degree of connectivity. In the first part we observed the resilience of financial system that was constructed as a random graph. In the second part we showed how the system behaves when it is constructed as a multiple money centre system. Considering the size of banks inside the system and main parameters mentioned above, we analysed the resistance of financial system to shocks in this two cases.

Životopis

Rođen sam 23. studenog 1993. godine u Zagrebu. Nakon završetka Osnovne škole Silvija Strahimira Kranjčevića, upisujem XV. gimnaziju u Zagrebu. 2012. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. 2015. godine završavam preddiplomski studij te stičem akademsku titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika te ga završavam ovim radom.