Matrice udaljenosti u grafovima

Maltar, Mihael

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihael Maltar

MATRICE UDALJENOSTI U GRAFOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Tomislav Došlić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Tema ovog diplomskog rada su *Matrice udaljenosti u grafovima*. Cilj nam je proučiti determinante matrica udaljenosti nekih klasa uniformnih i neuniformnih kaktusa.

Grafovi su jedna od osnovnih matematičkih struktura te se koriste za modeliranje pojava u raznim znanostima. Udaljenosti između vrhova u grafu mogu se mjeriti na različite načine, od najednostavnije, definirane kao duljina puta između dva vrha pa do nekih kompliciranijih, prilagođenih pojedinom području primjene. Već same matrice udaljenosti sadrže informacije o grafovima, no zbog mogućih različitih poredaka vrhova tek nam njihove determinante otkrivaju zajedničke karakteristike pojedinih grafova.

U prvom poglavlju ćemo dati pregled najosnovnijih definicija iz teorije grafova. Uvest ćemo pojam udaljenosti u grafu te definirati matricu udaljenosti. Nakon toga dat ćemo definiciju stabla i iskazati neke tvrdnje o stablima koje ćemo koristiti u nastavku. Također ćemo uvesti pojam kaktusa i definirati neke posebne vrste kaktusa.

U drugom poglavlju počet ćemo se baviti determinantama matrica udaljenosti. Dokazat ćemo značajan rezultat da matrice udaljenosti svih stabala s istim brojem vrhova imaju istu determinantu te ćemo dati formulu za njezino računanje. Osim toga dokazat ćemo da determinanta matrice udaljenosti grafa ovisi samo o njegovim blokovima, a ne o načinu kako su oni međusobno povezani. Zatim ćemo se baviti bicikličnim grafovima te dati formulu za determinantu matrice udaljenosti bicikličnog grafa u ovisnosti o parnosti odnosno neparnosti ciklusa.

U trećem poglavlju iskoristit ćemo prethodno spomenute rezultate kako bismo dali formule za determinante matrica udaljenosti nekih klasa kaktusa te ćemo dati konkretne primjere u kojima ćemo korištenjem tih formula uvelike olakšati računanje determinante.

Poglavlje 1

Uvod u teoriju grafova

1.1 Osnovne definicije

Teorija grafova je grana matematike koja se bavi proučavanjem grafova. U nastavku ćemo definirati osnovne pojmove teorije grafova počevši od grafa.

Definicija 1.1.1. *Graf je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $\emptyset \neq V = V(G)$ skup vrhova i $E = E(G)$ skup bridova pri čemu svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$. Kažemo da su tada vrhovi u i v susjedni i incidentni s e i pišemo $e = \{u, v\}$.*

Ako su skup bridova E i skup vrhova V grafa G konačni skupovi kažemo da je on konačan, a inače da je beskonačan.
Za konačne grafove možemo definirati sljedeće parametre:
$v(G) = |V(G)| =$ red od $G =$ broj vrhova od G
$e(G) = |E(G)| =$ veličina od $G =$ broj bridova od G

U nastavku ćemo podrazumijevati da promatramo konačne grafove.
Brid čiji se krajevi podudaraju zovemo petlja. Dva ili više bridova s istim parom krajeva zovemo višestruki bridovi. Za graf kažemo da je jednostavan ako nema petlja ni višestrukih bridova, a graf sa samo jednim vrhom smatramo trivijalnim. Graf G je prazan ako je $E(G) = \emptyset$.
Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom zovemo potpun graf.

Definicija 1.1.2. *Neka su G i H grafovi. Ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$ i svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao i u G, kažemo da je H podgraf od G i pišemo $H \subseteq G$. Ako je $H \subseteq G$ i $H \neq G$, pišemo $H \subset G$ i kažemo da je H pravi podgraf od G. Za podgraf $H \subseteq G$ za koji je $V(H) = V(G)$ kažemo da je razapinjući podgraf od G, a podgraf $H \subseteq G$ koji je potpun zovemo klika u G.*

Uniju dvaju podgrafova definiramo kao podgraf čiji je skup vrhova unija njihovih skupovih vrhova, a skup bridova unija njihovih skupova bridova. Na analogan način definiramo i presjek dvaju podgrafova.

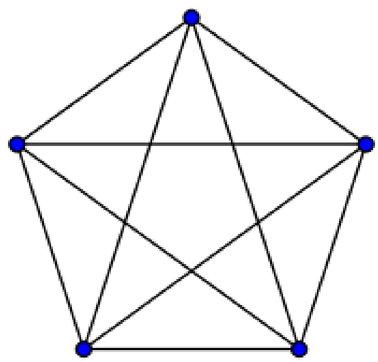
Neka je $G = (V, E)$, a $V' \subseteq V$. Graf dobiven iz G dodavanjem skupa bridova E' označavamo s $G + E'$. Ako je $E = \{e\}$ kraće pišemo $G + e$. Podgraf od G čiji je skup vrhova $V \setminus V'$, a skup bridova se sastoji od bridova iz G čija su oba kraja u $V \setminus V'$ označavamo s $G - V'$. Ako je $V' = \{v\}$, kraće pišemo $G - v$. Analogno, za $E' \subseteq E$ sa $G - E$ označujemo podgraf od G čiji je skup vrhova V, a skup bridova $E \setminus E'$. Kažemo da smo odstranili V', odnosno E'.
Još jedna značajna operacija na bridovima grafa zove se kontrakcija. Kažemo da je da je brid $e \in E(G)$ kontrahiran ako je odstranjen, a njegovi vrhovi identificirani.

Definicija 1.1.3. *Grafovi G i H su izomorfni, u oznaci $G \approx H$, ako postoje bijekcije $\theta : V(G) \to V(H)$ i $\varphi : E(G) \to E(H)$ tako da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $\theta(v)$ incidentan s bridom $\varphi(e)$ u H. Uređeni par $f = (\theta, \varphi) : G \to H$ zovemo izomorfizam iz G u H.*

Definicija 1.1.4. *Neka je $G = (V, E)$ i $\emptyset \neq V' \subseteq V$. Podgraf od G čiji je skup vrhova V', a skup bridova podskup od E čija su oba kraja u V' zovemo podgraf induciran s V' i označavamo s $G[V']$. Za $\emptyset \neq E' \subseteq E$, podgraf od G čiji je skup bridova E', a skup vrhova skup njihovih krajeva zovemo podgraf induciran bridovima E' i označavamo s $G[E']$.*

Napomena 1.1.5. *Uočimo da je $G - V' = G[V \setminus V']$.*

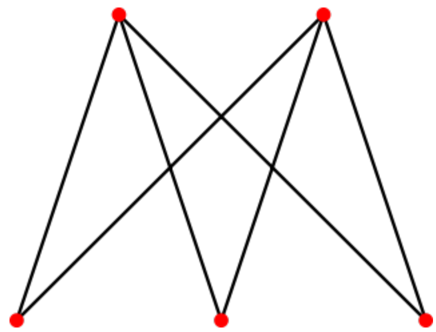
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji do na izomorfizam jedinstven potpun graf s n vrhova koji označavamo s K_n. Uočimo da će takav graf imati $\binom{n}{2}$ bridova.



Slika 1.1: Primjer potpunog grafa - K_5

Definicija 1.1.6. *Kažemo da je graf G bipartitan ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particiju (X, Y) tada zovemo biparticija grafa, a bipartitni graf s biparticijom (X, Y) označavamo s $G(X, Y)$. Ako je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y kažemo da je G potpun bipartitni graf.*

Neka je $G(X, Y)$ potpun bipartitan graf t.d. je $|X| = m$ i $|Y| = n$. Tada je G jedinstven do na izomorfizam i označava se s $K_{m,n}$. Vrijedi $v(K_{m,n}) = m + n$ i $e(K_{m,n}) = mn$.



Slika 1.2: Primjer potpunog bipartitnog grafa - $K_{3,2}$

Definicija 1.1.7. *Neka je G graf i $v \in V(G)$. Stupanj od v definiramo kao broj bridova incidentnih s v, pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida i označavamo ga s $d_G(v)$.*

Ako je jasno o kojem grafu se radi stupanj vrha v možemo kraće označavati s $d(v)$. Intuitivno, stupanj vrha je broj sjecišta male kružnice oko vrha s linijama koje izlaze iz tog vrha. Ako je graf jednostavan onda je stupanj vrha jednak broju njegovih susjeda. Skup susjeda vrha $v \in V(G)$ u grafu G označavamo s $N_G(v)$. Vrh stupnja 1 zovemo list.

Za graf G kažemo da je d-regularan ako je $d(v) = d, \forall v \in V(G)$, a regularan ako je d-regularan za neki $d \geqslant 0$. Vrh v je izoliran ako je $d(v) = 0$, a list ako je $d(v) = 1$.

Definicija 1.1.8. *Šetnja u grafu G je niz $W := v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$, čiji članovi su naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i $v_i, 1 \leq i \leq k$. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj šetnje W i njezinu duljinu označavamo s k. Za vrhove $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ kažemo da su unutarnji vrhovi šetnje.*

Ako su $W = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ i $W' = v_ke_{k+1}v_{k+1}e_{k+2}...e_lv_l$ dvije šetnje, onda kažemo da je šetnja $W = v_0e_1v_1e_2...e_kv_ke_{k+1}...e_lv_l$ dobivena nadovezivanjem W i W' kod vrha v_k i označavamo ju s WW'. Za šetnju $v_ke_kv_{k-1}...e_1v_0$ kažemo da je inverzna od W i označavamo ju s W^{-1}. Šetnja W je zatvorena ako je $v_0 = v_k$. Kažemo da vrh v_i prethodi vrhu v_j ako je $i < j$ i pišemo $v_i \prec v_j$.

Sada ćemo uvesti nazive nekih posebnih vrsta šetnja koje ćemo češće koristiti. To su staza, put i ciklus.

Definicija 1.1.9. *Neka je $W := v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ šetnja u grafu G. Ako su svi bridovi $e_1e_2...e_k$ šetnje W međusobno različiti kažemo da je W staza. Ako su i svi vrhovi $v_1v_2...v_k$ međusobno različiti kažemo da je W put.*

Definicija 1.1.10. *Ciklus je zatvorena staza pozitivne duljine sa različitim svim vrhovima osim krajeva. Kažemo da je ciklus paran ako je parne duljine, a inače je neparan.*

Za dva ciklusa u grafu kažemo da su dijsunktni ako nemaju zajedničkih bridova.

Definicija 1.1.11. *Neka je $G = (V, E)$ graf i $u, v \in V(G)$. Kažemo da su u i v povezani ako postoji put od u do v u G. Udaljenost $d_G(u, v)$ vrhova u i v u grafu G je duljina nakraćeg puta od u do v u G.*

Smatrat ćemo da uvijek postoji trivijalan put od vrha do samog sebe, a ako ne postoji put između neka dva vrha u i v stavljat ćemo $d_G(u, v) = \infty$. Naziv put ćemo koristiti i kao sinonim za podgraf čiji su vrhovi i bridovi članovi puta.

Primijetimo da koristimo istu oznaku za stupanj i udaljenost. No, to nam ne predstavlja problem jer stupanj kao argument prima jedan vrh, a udaljenost dva.

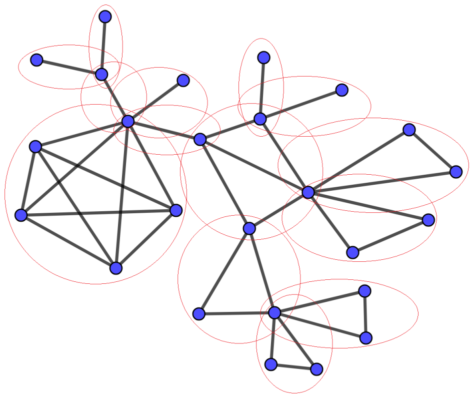
Definicija 1.1.12. *Kažemo da je graf povezan ako između svaka dva njegova vrha postoji put. Komponenta povezanosti grafa je svaki njegov maksimalni povezani podgraf. Broj komponenti povezanosti u grafu G označavamo s $c(G)$.*

Definicija 1.1.13. *Kažemo da je vrh v rezni vrh grafa G ako se skup bridova E može particionirati u dva skupa E_1 i E_2 tako da je $G[E_1] \cap G[E_2] = v$. Ako je G netrivijalan i bez petlji onda je v rezni vrh od G ako i samo ako je $c(G - v) > c(G)$.*

Definicija 1.1.14. *Blok u grafu G je maksimalan povezan podgraf od G bez reznog vrha.*

Napomena 1.1.15. *Kada kažemo da je blok podgraf bez reznog vrha, mislimo da nijedan vrh nije rezni unutar tog podgrafa, unutar samog grafa neki od vrhova iz bloka naravno može biti rezni vrh.*

Definicija 1.1.16. *Blok graf je graf u kojem je svaki blok klika.*



Slika 1.3: Primjer grafa s 14 blokova

Definicija 1.1.17. *Matrica susjedstva grafa G je $n \times n$ matrica $A = A(G) = [a_{ij}]$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spajaju v_i i v_j.*

Uočimo da je matrica susjedstva simetrična i da su njezini članovi nenegativni cijeli brojevi. Posebno, ako je graf jednostavan onda su elementi njegove matrice susjedstva samo 0 i 1 i pritom su na glavnoj dijagonali nule. Svaka matrica susjedstva reprezentira neki graf.

Definicija 1.1.18. *Matrica udaljenosti grafa G je $n \times n$ matrica $D = D(G) = [d_{ij}]$, gdje je d_{ij} udaljenost između vrhova v_i i v_j.*

I ovdje je očito riječ o simetričnoj matrici s nulama na glavnoj dijagonali. U nastavku rada ćemo se intenzivnije baviti matricama udaljenosti.

1.2 Stabla i kaktusi

Sada ćemo uvesti pojam stabla. Stabla i ciklusi su najjednostavniji grafovi, ali moglo bi se reći i najvažniji za proučavanje jer od njih gradimo ostale grafove.

Definicija 1.2.1. *Stablo je povezan graf bez ciklusa.*

Alternativno, mogli bismo definirati da je stablo graf u kojem između svaka dva vrha postoji jedinstven put. Sada slijede neki osnovni rezultati o stablima koje ćemo koristiti u nastavku.

Korolar 1.2.2. *Netrivijalno stablo T ima barem dva lista.*

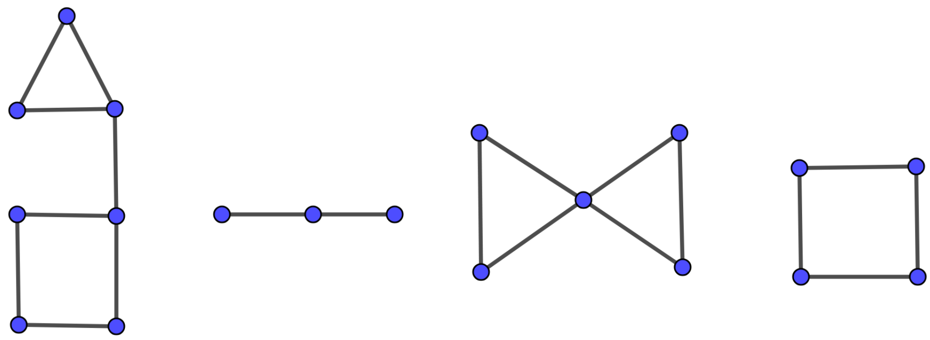
Dokaz. Neka je $P = v_0e_1v_1...e_nv_n$ put u stablu T maksimalne duljine. Kako je T netrivijalno stablo, duljina puta P je barem 1 pa je $v_0 \neq v_n$. Tvrdimo da su v_0 i v_n listovi. Pretpostavimo suprotno, npr. v_0 nije list. Tada postoji brid $e = v_0v \neq e_1$, gdje je $v \in V(T)$. Ako $v \notin \{v_0e_1v_1...e_nv_n\}$, onda se put P može produžiti bridom e, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je P maksimalne duljine. Ako je pak $v = v_i$ za neki $i \geq 2$, onda smo dobili ciklus, a to je kontradikcija s definicijom stabla. □

Korolar 1.2.3. *Neka je G jednostavan graf, a $v \in V$ list. Tada vrijedi: G je stablo $\Leftrightarrow G - v$ je stablo.*

Dokaz se nalazi u [4].
U nastavku rada ćemo se baviti i kaktusima. Stabla su zapravo specijalni slučajevi kaktusa.

Definicija 1.2.4. *Povezani graf je kaktus ako mu je svaki blok brid ili ciklus.*

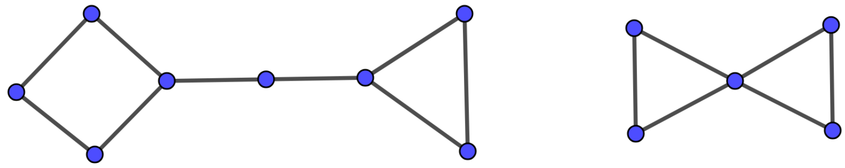
Možemo reči da je kaktus povezan graf u kojem nijedna dva ciklusa nemaju zajednički brid. Također je ekvivalentno definirati kaktus kao povezan graf u kojem svaka dva ciklusa imaju najviše jedan zajednički vrh.



Slika 1.4: Primjeri kaktusa

Definicija 1.2.5. *Neka su C_p i C_q dva disjunktna ciklusa i neka su $v_1 \in C_p$ i $v_k \in C_q$. Tada sa $\infty(p,k,q)$ označavamo graf dobiven povezivanjem v_1 i v_k putem $v_1v_2...v_k$ duljine $k-1$ gdje je $k \geq 1$ pri čemu $k = 1$ znači identificiranje v_1 s v_k.*

Ovaj graf ćemo intenzivno koristiti kasnije kada budemo istraživali biciklične grafove.



Slika 1.5: Primjeri $\infty(4, 3, 3)$ i $\infty(3, 1, 3)$ grafova

Iz prethodne definicije je očito da je svaki $\infty(p, k, q)$ graf kaktus. Uočimo i da svaki graf s dva ciklusa koji sadrži ∞-graf kao induciran podgraf možemo promatrati kao graf dobiven iz ∞-grafa dodavanjem stabala.

Poglavlje 2

Determinante matrica udaljenosti

2.1 Stabla

U nastavku rada bavit ćemo se determinantama matrica udaljenosti nekih klasa kaktusa. U tu svrhu prvi cilj nam je dokazati osnovni rezultat o determinantama matrica udaljenosti stabala, teorem Grahama i Pollaka. Taj teorem govori nam da matrice udaljenosti svih stabala s istim brojem vrhova imaju istu determinantu.

Lema 2.1.1. *(Dodgsonovo pravilo)*
Neka je A matrica reda $n > 2$, A_{ij} minora od A nastala izbacivanjem i-tog reda i j-tog stupca i A_2 minora od A nastala izbacivanje i-tih i n-tih redova i stupaca.
Tada vrijedi:

$$\det A \det A_2 = \det A_{11} \det A_{nn} - \det A_{1n} \det A_{n1}.$$

Elegantan dokaz ove leme nalazi se u [6].

Teorem 2.1.2. *(Graham - Pollak)*
Neka je T stablo sa skupom vrhova $V(T) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i D matrica udaljenosti od T. Tada vrijedi:

$$\det D = -(n-1)(-2)^{n-2}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po broju vrhova n. Uočimo prvo da za $n \leq 3$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo zatim da je T stablo sa $n \geq 4$ vrha. Iz korolara 1.2.2. slijedi da T ima barem dva lista. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su to v_1 i v_n. Označimo s v_p susjedni vrh od v_1 i s v_q susjedni vrh od v_n. S d_i ćemo označiti i-ti stupac od matrice udaljenosti D. Zbog odabira susjednih vrhova vrijedi
$(d_1 - d_p)^\intercal = (-1, 1, 1, ..., 1)$ i $(d_n - d_q)^\intercal = (1, 1, 1, ..., -1)$.
Primjetimo da je $(d_1 - d_p + d_q - d_n)^\intercal = (-2, 0, 0, ..., 0, 2)$.

Korištenjem svojstva determinante (determinanta se ne mijenja ako retku/stupcu dodamo drugi redak/stupac pomnožen skalarom) dobivamo:

$$\det D = \det(d_1 - d_p + d_q - d_n, d_2, ..., d_{n-1}, d_n).$$

Laplaceovim razvojom po prvom stupcu dobivamo

$$\det D = -2 \det D_{11} + 2(-1)^{n+1} \det D_{n1}. \tag{2.2}$$

S druge strane, po Dodgsonovom pravilu imamo

$$\det D \det D_2 = \det D_{11} \det D_{nn} - \det D_{1n} \det D_{n1}. \tag{2.3}$$

Zbog simetričnosti matrice udaljenosti vrijedi $\det D_{1n} = \det D_{n1}$.
Uočimo da je D_2 zapravo matrica udaljenosti stabla $T - v_1 - v_n$, D_{11} od $T - v_1$, a D_{nn} od $T - v_n$. Primjenjujući pretpostavku indukcije na (2.2) i (2.3) dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} \det D = -2[-(n-2)(-2)^{n-3}] + 2(-1)^{n+1} \det D_{n1} \\ \det D[-(n-3)(-2)^{n-4}] = [-(n-2)(-2)^{n-3}]^2 - [\det D_{n1}]^2 \end{cases}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $\det D_{1n} = 2^{n-2}$ i $\det D = -(n-1)(-2)^{n-2}$ čime je teorem dokazan. □

2.2 Graf s reznim vrhovima

Za kvadratnu matricu A označimo s s cof A sumu svih kofaktora od A. Definiramo matricu A' kao matricu dobivenu iz A oduzimanjem prvo prvog reda, a zatim prvog stupca od preostalih. Sa A'_{11} označimo kofaktor od A' na poziciji $(1, 1)$.

Lema 2.2.1. *Vrijedi* $\operatorname{cof} A = A'_{11}$.

Dokaz se nalazi u [3].

Teorem 2.2.2. *Neka je G povezan graf s blokovima $G_1, G_2, ..., G_r$. Tada vrijedi:*

$$\operatorname{cof} D(G) = \prod_{i=1}^{r} \operatorname{cof} D(G_i), \tag{2.4}$$

$$\det D(G) = \sum_{i=1}^{r} \det D(G_i) \prod_{j \neq i} \operatorname{cof} D(G_j). \tag{2.5}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je G_1 jedan krajnji blok u grafu G, odnosno blok koji sadrži samo jedan rezni vrh kojeg označimo s 0. Definiramo podgraf od G bez tog bloka (ali s uključenim vrhom 0):

$$G_1' = G - (G_1 - \{0\})$$

Prvo ćemo provjeriti dekompoziciju u traženom obliku za matrice G_1 i G_1'. Pretpostavimo $V(G_1) = 0, 1, ..., m$ i $V(G_1') = 0, m+1, ..., m+n$. Označimo matrice udaljenosti od G_1 i G_1' na sljedeći način:

$$D(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_m \\ a_1 & & & \\ \vdots & & \mathbf{E} & \\ a_m & & & \end{pmatrix}, D(G_1') = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_m \\ f_1 & & & \\ \vdots & & \mathbf{H} & \\ f_m & & & \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$D(G) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & a & f \\ \hline a & E & a_i + f_j \\ \hline f & f_i + a_j & H \end{array}\right).$$

Kako je $\det A = \det A'$ slijedi

$$\begin{aligned} \det D(G) &= \det \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & a & f \\ \hline b & E - ai - aj & 0 \\ \hline f & 0 & H - fi - fj \end{array}\right) \\ &= \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & a \\ \hline b & E - a_i - a_j \end{array}\right) \det(H - f_i - f_j) \\ &+ \det \left(\begin{array}{c|c} 0 & f \\ \hline g & H - f_i - f_j \end{array}\right) \det(E - a_i - a_j) \\ &= \det D(G_1) \operatorname{cof} D(G_1') + \det D(G_1') \operatorname{cof} D(G_1), \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti koristili Lemu 2.2.1. Time smo dokazali (2.5).
Iz leme 2.2.1 također slijedi:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cof} D(G) &= \det\left(\begin{array}{c|c} E - a_i - a_j & 0 \\ \hline 0 & H - fi - fj \end{array}\right) \\
&= \det(E - a_i - a_j)\det(H - f_i - f_j) \\
&= D'(G_1)_{11} D'(G_1')_{11} \\
&= \operatorname{cof} D(G_1) \operatorname{cof} D(G_1')
\end{aligned}
$$

Time smo dokazali (2.4).

□

Iz ovoga teorema možemo uočiti da determinanta matrice udaljenosti grafa ovisi samo o njegovim blokovima, a ne o tome kako su oni međusobno povezani. Taj rezultat opravdava formulu (2.1) iz Graham-Pollakovog teorema što možemo i dokazati.

U slučaju da $\forall i = 1, ..., r$ vrijedi $\operatorname{cof} D(G_i) \neq 0$, tada iz teorema dobivamo sljedeću jednakost:

$$
\frac{\det D(G)}{\operatorname{cof} D(G)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\det D(G_i)}{\operatorname{cof} D(G_i)}. \tag{2.6}
$$

Za graf, odnosno blok G_0 koji se sastoji od brida duljine 1 imamo $D(G_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{cof} D(G_0) = -2, \det D(G_0) = -1$. Dakle za stablo T_n sa n vrhova i $n-1$ takvih bridova vrijedi:

$$
\operatorname{cof} D(T_n) = \operatorname{cof} D(G_0))^{n-1} = (-2)^{n-1},
$$

$$
\det D(T_n) = \operatorname{cof} D(T_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\det D(G_0)}{\operatorname{cof} D(G_0)} = (-2)^{n-1}(n-1)\frac{1}{2}.
$$

To je upravo rezultat iz Graham-Pollakovog teorema.

2.3 Determinanta matrice udaljenosti bicikličnog grafa

Sada ćemo proučavati bicikličan graf i doći do formule za determinantu njegove matrice udaljenosti.

Lema 2.3.1. *Neka je* $C_k = \frac{1}{2}B_kB_k^\intercal - 2I$*,* $k \times k$ *matrica i* $F_k = \frac{1}{2}\mathbf{1}B_k^\intercal + \mathbf{1}$ *vektor-redak dimenzije* k*, gdje je*

$$Bk = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Tada vrijedi

$$\det C_k = \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^k}$$

i

$$F_kC_k^{-1}F_k^\intercal = -\frac{k}{2(2k+1)}.$$

Lema 2.3.2. *Pretpostavimo da niz* $f(0), f(1), ..., f(n)$ *zadovoljava linearnu rekurziju*

$$f(n) = -4f(n-1) - 4f(n-2)$$

s početnim uvjetima

$$f(0) = f_0,$$

$$f(1) = f_1.$$

Tada vrijedi

$$f(n) = \left[f_0 - \frac{n}{2}(f_1 + 2f_0)\right](-2)^n.$$

Dokazi ove dvije tehničke leme nalaze se u [1].

Lema 2.3.3. *Neka je* G_1 *bicikličan graf. Neka je* G *graf dobiven iz* G_1 *dodavanjem lista susjednog proizvoljnom vrhu* v*. Tada je determinanta matrice udaljenosti grafa* G *neovisna o izboru vrha* v*.*

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ skup vrhova grafa G. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je v_1 list grafa G, a v_2 njemu susjedni vrh. Tada G_1 možemo promatrati kao podgraf od G induciran vrhovima $\{v_2, ..., v_n\}$. Označimo s $(0\ d_2)$ vektor-redak matrice udaljenosti grafa G_1 koji odgovara vektoru v_2 i s D^* matricu udaljenosti podgrafa od G

induciranog vrhovima $\{v_3, ..., v_n\}$. Tada matricu udaljenosti grafa G možemo zapisati na sljedeći način:

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & d_2 + \mathbf{1} \\ 1 & 0 & d_2 \\ d_2^\intercal + \mathbf{1}^\intercal & d_2^\intercal & D^* \end{pmatrix}.$$

Sada računamo

$$\det D(G) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & d_2 + \mathbf{1} \\ 1 & 0 & d_2 \\ d_2^\intercal + \mathbf{1}^\intercal & d_2^\intercal & D^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & d_2 \\ d_2^\intercal + \mathbf{1}^\intercal & d_2^\intercal & D^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & d_2 \\ \mathbf{1}^\intercal & d_2^\intercal & D^* \end{vmatrix}.$$

Iz zadnje jednakosti doista slijedi da je $\det D(G)$ neovisna o izboru vrha v_2. □

Primijetimo da ovu lemu možemo koristiti i unatrag, promatrajući uklanjanje listova. Ona nam, zapravo, govori da se determinanta matrice udaljenosti grafa neće promijeniti ako ”premjestimo” neki njegov list i to je način na koji ćemo ju kasnije koristiti.

Lema 2.3.4. *Neka su G_1 i G_2 dva grafa sa skupovima vrhova $\{1, 2, ..., k\}$ i $\{k+1, k+2, ..., n\}$. Neka je G graf dobiven iz G_1 i G_2 dodavanjem brida između vrhova 1 i n, a G' graf dobiven identificiranjem vrhova 1 i n te dodavanjem lista iz vrha 1 (ili n). Ako su D i D' matrice udaljenosti od G i G', onda vrijedi:*

$$\det D = \det D'.$$

Dokaz. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da su matrice udaljenosti od G_1 i G_2 zadane na sljedeći način:

$$D(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_1^\intercal & D^* \end{pmatrix}, D(G_2) = \begin{pmatrix} D^{**} & d_n^\intercal \\ d_n & 0 \end{pmatrix},$$

gdje su D^* i D^{**} matrice udaljenosti podgrafova induciranih vrhovima $\{2, ..., k\}$ i $\{k + 1, k + 2, ..., n - 1\}$, a $(0\ d_1)$ vektor-redak od $D(G_1)$ koji odgovara vrhu 1 i $(d_n\ 0)$ vektor-redak od $D(G_2)$ koji odgovara vrhu n. Nadalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vrh n list u grafu G', a 1 njemu susjedni vrh. Za matrice $D = (d_{ij})$ i $D' = (d'_{ij})$ definiramo redove i stupce tako da odgovaraju redom vrhovima iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$. Tada imamo:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_{G_1}(i, j), & 1 \leq i, j \leq k \\ d_{G_2}(i, j), & k + 1 \leq i, j \leq n \\ d_{G_1}(1, i) + d_{G_2}(j, n) + 1, & 1 \leq i \leq k \text{ i } k + 1 \leq j \leq n \end{cases},$$

$$d'_{ij} = \begin{cases} d_{G_1}(i,j), & 1 \leq i,j \leq k \\ d_{G_2}(i,j), & k+1 \leq i,j \leq n-1 \\ d_{G_1}(1,j)+1, & i = n \text{ i } 1 \leq j \leq k \\ d_{G_2}(n,j)+1, & i = n \text{ i } k+1 \leq j \leq n-1 \\ d_{G_1}(1,i)+d_{G_2}(j,n)+1, & 1 \leq i \leq k \text{ i } k+1 \leq j \leq n-1 \end{cases}.$$

Dakle,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_n + \mathbf{1} & 1 \\ d_1^\top & D^* & d_n\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}d_1^\top & d_1^\top + \mathbf{1}^\top \\ d_n^\top & \mathbf{1}d_n^\top + d_1\mathbf{1}^\top + D^{**} & d_n^\top + \mathbf{1}^\top & \\ 1 & d_1 + \mathbf{1} & d_n + \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_n & 1 \\ d_1^\top & D^* & d_n\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}d_1^\top + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top & d_1^\top + \mathbf{1}^\top \\ d_n^\top + \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}d_n^\top + d_1\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top & D^{**} & d_n^\top + \mathbf{1}^\top \\ 1 & d_1 + \mathbf{1} & d_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada računamo

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 0 & d_1 & d_n + \mathbf{1} & 1 \\ d_1^\top & D^* & d_n\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}d_1^\top + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top & d_1^\top + \mathbf{1}^\top \\ d_n^\top + \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}d_n^\top + d_1\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}\mathbf{1}^\top & D^{**} & d_n^\top \\ 1 & d_1 + \mathbf{1} & d_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & d_1 & d_n & 1 \\ d_1^\top & D^* - \mathbf{1}d_1^\top - d_1\mathbf{1}^\top & 0 & d_1^\top \\ d_n^\top & 0 & D^{**} - \mathbf{1}d_n^\top - d_n\mathbf{1}^\top & d_n^\top \\ 1 & d_1 & d_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & d_1 & d_n & 1 \\ d_1^\top & D^* & d_n\mathbf{1}^\top + \mathbf{1}d_1^\top & d_1^\top + \mathbf{1}^\top \\ d_n^\top & \mathbf{1}d_n^\top + d_1\mathbf{1}^\top & D^{**} & d_n^\top + \mathbf{1}^\top \\ 1 & d_1 + \mathbf{1} & d_n + \mathbf{1} & 0 \end{vmatrix} = \det D'. \end{aligned}$$

U računu smo koristili sljedeće manipulacije determinante:
U prvoj jednakosti smo oduzeli smo zadnji red od predzadnjeg, zatim oduzeli prvi stupac od drugog, zatim prvi redak od drugog i na kraju zadnji stupac od predzadnjeg.
U drugoj jednakosti prvo smo dodali prvi stupac drugom i trećem i zatim prvi redak drugom i trećem.

□

Sada ćemo iskoristiti prethodne leme i dokazati sljedeći rezultat. Ako je graf dobiven iz induciranog podgrafa dodavanjem stabala, tada je determinanta njegove matrice udaljenosti neovisna o strukturi tih stabala.
Primijetimo prvo da ako je G bicikličan graf s disjunktnim ciklusima, tada on sadrži graf $\infty(p, k, q)$ kao induciran podgraf za p, q i k prirodne brojeve. Zapravo, G možemo promatrati kao graf dobiven iz $\infty(p, k, q)$ dodavanjem stabala. U sljedećem teoremu posebno ćemo koristiti $\infty(p, 1, q)$, te ćemo njegov vrh stupnja 4 zvati centralni vrh. Sa $G(p, q; n)$ ćemo pak označavati graf dobiven iz $\infty(p, 1, q)$ dodavanjem puta P_n na njegov centralni vrh. Uočimo da će graf $G(p, q; n)$ biti reda $n + p + q - 1$, te da je $G(p, q; 0)$ zapravo oznaka za $\infty(p, 1, q)$.

Teorem 2.3.5. *Neka je G bicikličan graf reda $n + p + q - 1$ koji sadrži $\infty(p, k, q)$ kao induciran podgraf za p, q i k prirodne brojeve. Neka su D i D' matrice udaljenosti od G i $G(p, q; n)$. Tada vrijedi*

$$\det D = \det D'.$$

Dokaz. Koristeći lemu 2.3.4 više puta dobivamo da matrice udaljenosti grafova $\infty(p, k, q)$ i $G(p, q; k - 1)$ imaju istu determinantu. Ostaje pokazati da matrica udaljenosti bicikličnog grafa koji sadrži $\infty(p, 1, q)$ (označimo ga opet s G) ima istu determinantu kao i matrica udaljenosti grafa $G(p, q; n)$. Označimo vrhove od G s $\{1, 2, ..., p + q + n - 1\}$ tako da je graf dobiven iz G odstranjivanjem vrhova $\{n, n - 1, ..., 1\}$ i dalje povezan. Sada primjenjujemo lemu 2.3.3 odstranjujući prvo vrh n i dodajući ga da postane list susjedan centralnom vrhu. Zatim odstranjujemo vrh $n - 1$ i dodajemo ga da postane list susjedan vrhu n. Ponavljamo postupak dok ne dobijemo graf $G(p, q; n)$. Kako smo u svakom koraku koristili lemu 2.3.3 slijedi da grafovi imaju jednaku determinantu. □

Iz ovog teorema slijedi da ako želimo računati determinantu matrice udaljenosti bicikličnog grafa reda $n + p + q - 1$ koji sadrži $\infty(p, k, q)$ kao induciran podgraf, tada nam je dovoljno izračunati determinantu matrice udaljenosti grafa $G(p, q; n)$.

Teorem 2.3.6. *Neka je D_n matrica udaljenosti grafa $G(p, q; n)$ i $n \geq 2$. Tada vrijedi:*

$$\det D_n = -4 \det D_{n-1} - 4 \det D_{n-2}.$$

Dokaz. Neka je $\{1, 2, ..., p + q + n - 1\}$ skup vrhova grafa $G(p, q; n)$. Tada $G(p, q; n - 1)$ možemo promatrati kao induciran podgraf od $G(p, q; n)$ dobiven odstranjivanjem lista $p + q + n - 1$, a $G(p, q, n - 2)$ kao induciran podgraf od $G(p, q; n)$ dobiven odstranjivanjem istog lista i njemu susjednog vrha $p+q+n-2$. Dakle D_n možemo zapisati na sljedeći način:

$$D_n = \begin{pmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & d^\intercal + \mathbf{1}^\intercal & d^\intercal + 2\mathbf{1}^\intercal \\ d & 0 & 1 & 2 \\ d + \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ d + 2\mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu $(d\ 0)$ označava vektor-redak matrice D_{n-1} koji odgovara vrhu $p + q + n - 3$. Sada računamo

$$\begin{aligned}
\det D_n &= \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & d^\intercal + \mathbf{1}^\intercal & d^\intercal + 2\mathbf{1}^\intercal \\ d & 0 & 1 & 2 \\ d + \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ d + 2\mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & \mathbf{1}^\intercal & \mathbf{1}^\intercal \\ d & 0 & 1 & 1 \\ d + \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ d + 2\mathbf{1} & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & \mathbf{1}^\intercal & \mathbf{1}^\intercal \\ d & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & \mathbf{1}^\intercal & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & \mathbf{1}^\intercal \\ d & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & 0 \\ d & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -4 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & \mathbf{1} \\ d & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal \\ d & 0 \end{vmatrix} \\
&= -4 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal & d^\intercal + \mathbf{1} \\ d & 0 & 1 \\ d + \mathbf{1} & 1 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} D_{n-3} & d^\intercal \\ d & 0 \end{vmatrix} \\
&= -4 \det D_{n-1} - 4 \det D_{n-2}.
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.7. *Ako je barem jedan od p ili q paran vrijedi*

$$\det D_0 = \det D_1 = 0,$$

a inače

$$\begin{aligned}
\det D_0 &= \frac{(pq-1)(p+q)}{4}, \\
\det D_1 &= -\frac{1}{2}(p+q)(pq-1) - pq.
\end{aligned}$$

Dokaz ovog teorema nalazi se u [2].

Sada slijedi glavni teorem ove sekcije. On nam govori da će u bicikličnom grafu koji sadrži parni ciklus determinanta matrice udaljenosti biti 0 te nam daje formulu u slučaju kada su oba ciklusa neparna.

Teorem 2.3.8. *Neka je G bicikličan graf reda $p + q - 1 + n$ koji sadrži $\infty(p, k, q)$ kao inducirani podgraf, gdje je $n \geq k - 1$. Označimo s D matricu udaljenosti od G. Tada je* $\det D = 0$*, ako je bar jedan od p ili q paran, a*

$$\det D = \left[\frac{(pq-1)(p+q)}{4} + \frac{n}{2}pq\right](-2)^n \tag{2.7}$$

inače.

Dokaz. Uvrstimo formule za determinante matrica D_0 i D_1 iz prethodnog teorema i D_n iz teorema 2.3.6 u Lemu 2.3.2. □

Ovaj teorem opet možemo promatrati kao generalizaciju Graham-Pollakovog teorema o determinantama stabala kojeg smo dokazali ranije. Svaki vrh u grafu možemo promatrati kao ciklus duljine 1, pa i kao $\infty(1, 1, 1)$ graf. Iz toga pak slijedi da svako stablo sadrži $\infty(1, 1, 1)$ kao induciran podgraf. Posljedica je da matrice udaljenosti svakog stabla reda n imaju istu determinantu kao i graf $G(1, 1; n - 1)$. Tada iz (2.7) slijedi:

$$\det D = \det D(G(1, 1; n-1)) = \frac{n-1}{2}(-2)^{n-1} = -(n-1)(-2)^{n-2}.$$

To opet potvrđuje već dokazani rezultat iz Graham-Pollakovog teorema.

Poglavlje 3

Primjene

Sada ćemo iskoristiti rezultate iz prethodnog poglavlja kako bismo došli do formula za računanje determinanti matrica udaljenosti nekih konkretnih klasa kaktusa. Osim toga, dat ćemo primjere računanja determinanti pojedinih kaktusa koristeći dokazane rezultate.

Teorem 3.0.1. *Neka je G kaktus koji se sastoji od n blokova K_3. Tada vrijedi*

$$\det D(G) = 2n3^{n-1}.$$

Dokaz. Označimo s D matricu udaljenosti grafa K_3. Očito vrijedi

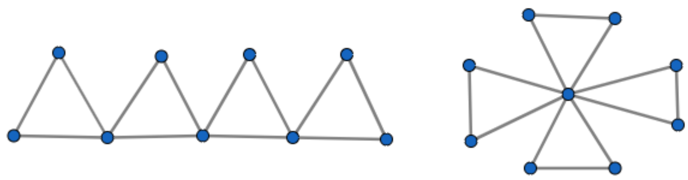
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.f$$

Jednostavnim izračunom dobivamo $\det D = 2$ i $cof(D) = 3$. Uvrstivši te vrijednosti u jednakost (2.5) iz teorema 2.2.2 dobivamo upravo

$$\det D(G) = 2n3^{n-1}.$$

□

Primjer 3.0.2. *Prema prethodnom teoremu determinante matrica udaljenosti ova dva kaktusa su jednake i iznose* $2 \cdot 4 \cdot 3^3 = 216$.



Slika 3.1: Dva kaktusa koji se sastoje od po 4 bloka K_3

Teorem 3.0.3. *Za svaki potpun graf* K_n *s matricom udaljenosti* D *vrijedi*

$$\det D = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Dokaz. Matrica udaljenosti D potpunog grafa K_n je matrica s nulama na dijagonali i jedinicama na svim ostalim pozicijama. Računamo determinantu

$$\det D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Redom smo koristili sljedeće transformacije determinante:
1. Zadnjem retku smo dodali sve preostale.
2. Izlučili smo $n-1$ iz zadnjeg retka.
3. Oduzeli smo zadnji redak od svih preostalih.
4. Zadnjem retku smo dodali sve preostale. □

Napomena 3.0.4. *Uočimo da ova formula potvrđuje prethodno dobivenu za graf koji se sastoji od blokova K_3. Uvrštavajući $n = 3$ dobivamo* $\det D = 2$ *što je isti rezultat kao kada uvrstimo $n = 1$ u formulu iz teorema 3.0.1.*

Lema 3.0.5. *Determinanta matrice udaljenosti ciklusa parne duljine je* 0.

Dokaz. Neka je C_{2k} ciklus duljine $2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Označimo sa D matricu udaljenosti od C_{2k}. Uočimo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k-1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & k-2 & k-1 & k & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & \dots & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ k-1 & k-2 & k-3 & \dots & 0 & & & \dots & k-1 & k \\ k & k-1 & k-2 & \dots & & 0 & & \dots & k-2 & k-1 \\ k-1 & k & k-1 & \dots & & & 0 & \dots & k-3 & k-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k-1 & k-2 & k-3 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & k-1 & k-2 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada dodajući prvi redak $(k+1)$-om i drugi redak $(k+2)$-om dobivamo dva ista retka iz čega slijedi da je determinanta 0. □

Lema 3.0.6. *Neka je C_{2k} ciklus duljine $2k$ za $k \in \mathbb{N}$. Neka je D matrica udaljenosti od C_{2k}. Tada vrijedi* $\operatorname{cof} D = 0$.

Dokaz. Označimo s D' matricu dobivenu iz D oduzimanjem prvo prvog retka, a zatim prvog stupca od preostalih. Vrijedi

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k-1 & k-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & \dots & -4 & -4 & -2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ k-1 & -2 & -4 & \dots & -2k+2 & -2k+2 & -2k+4 & -2k+6 & \dots & -2 & 0 \\ k & -2 & -4 & \dots & -2k+2 & -2k & -2k+2 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ k-1 & 0 & -2 & \dots & -2k+4 & -2k+2 & -2k+2 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ k-2 & 0 & 1 & \dots & -2k+6 & -2k+4 & -2k+4 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & -2 & -4 & -4 & -4 & \dots & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sada računamo kofaktor na poziciji $(1, 1)$. Prema Lemi 2.2.1 on će upravo biti jednak $\operatorname{cof} D$. Dakle,

$$\operatorname{cof} D = \begin{vmatrix} -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & -4 & \dots & -4 & -4 & -2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ -2 & -4 & \dots & -2k+2 & -2k+2 & -2k+4 & -2k+6 & \dots & -2 & 0 \\ -2 & -4 & \dots & -2k+2 & -2k & -2k+2 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ 0 & -2 & \dots & -2k+4 & -2k+2 & -2k+2 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ 0 & 1 & \dots & -2k+6 & -2k+4 & -2k+4 & -2k+4 & \dots & -4 & -2 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & -4 & -4 & -4 & \dots & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Sada dodajući prvi redak $(k + 1)$-om dobivamo dva ista retka iz čega slijedi $\operatorname{cof} D = 0$. □

Teorem 3.0.7. *Determinanta matrice udaljenosti kaktusa koji sadrži paran ciklus je 0.*

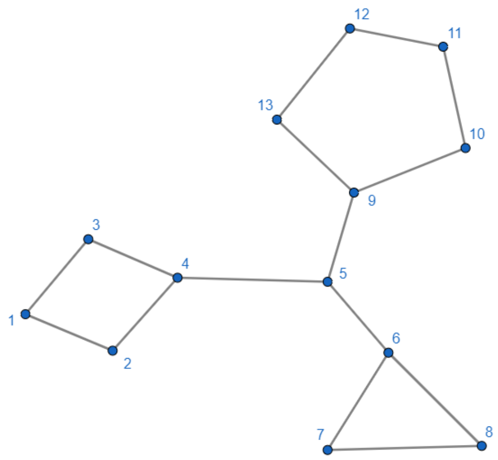
Dokaz. Označimo naš graf s G. Neka su $G_1, G_2, ..., G_r$ njegovi blokovi. Kako je G kaktus koji sadrži paran ciklus, slijedi da postoji $n < r$ t.d. je G_n paran ciklus. Prisjetimo se jednakosti (2.5) iz teorema 2.2.2:

$$\det D(G) = \sum_{i=1}^{r} \det D(G_i) \prod_{j \neq i} \operatorname{cof} D(G_j).$$

Prema lemi 3.0.6, svaki od pribrojnika gdje je $i \neq n$ je 0 jer je tada $\operatorname{cof} D(G_n)$ sadržan u produktu. U slučaju kada je $i = n$, pribrojnik je pak 0 zbog leme 3.0.5 koja kaže da je $\det D(G_n) = 0$. Dakle, $\det D(G) = 0$. □

Sada ćemo navesti nekoliko konkretnih primjera izračunavanja determinanti matrica udaljenosti pojedinih grafova. Radi jednostavnosti umjesto $\det D(G)$ ćemo pisati $\det G$, misleći naravno na determinantu matrice udaljenosti grafa G.

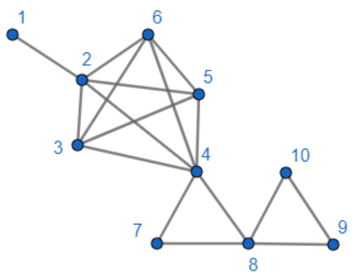
Primjer 3.0.8. *Izračunajmo determinantu matrice udaljenosti ovakvog grafa.*



Slika 3.2: Graf G

Riječ je o kaktusu koji sadrži paran ciklus (duljine 4) pa je prema teoremu 3.0.7 njegova determinanta 0.

Primjer 3.0.9. *Izračunajmo sada determinantu matrice udaljenosti sljedećeg grafa.*



Slika 3.3: Graf G

Graf G se sastoji od 4 *bloka, označimo ih redom s lijeva na desno sa* G_1, G_2, G_3, G_4. *Primijetimo da blokove* G_3 *i* G_4 *možemo promatrati kao jedan graf koji se sastoji od* 2 *bloka* K_3, *označimo ga s* H. *Po teoremu 3.0.1 dobivamo da je njegova determinanta* 12. *Po teoremu 2.2.2 vrijedi da je* $\operatorname{cof} H = \operatorname{cof} G_3 \cdot \operatorname{cof} G_4$, *što je lako izračunati da iznosi* 9. *Također, po istom teoremu vrijedi:*

$$\det G = \det G_1 \operatorname{cof} G_2 \operatorname{cof} H + \det G_2 \operatorname{cof} G_1 \operatorname{cof} H + \det H \operatorname{cof} G_1 \operatorname{cof} G_2$$

G_1 *i* G_2 *možemo promatrati kao potpune grafove* K_2 *i* K_5 *te iskorištavajući teorem 3.0.3 dobivamo* $\det G_1 = -1$ *i* $\det G_2 = 4$. *Jednostavno je izračunati* $\operatorname{cof} G_1 = -2$. *Ostaje nam samo izračunati* $\operatorname{cof} G_2$.

$$D(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za lakše izračunavanje koristit ćemo lemu 2.2.1. Dakle,

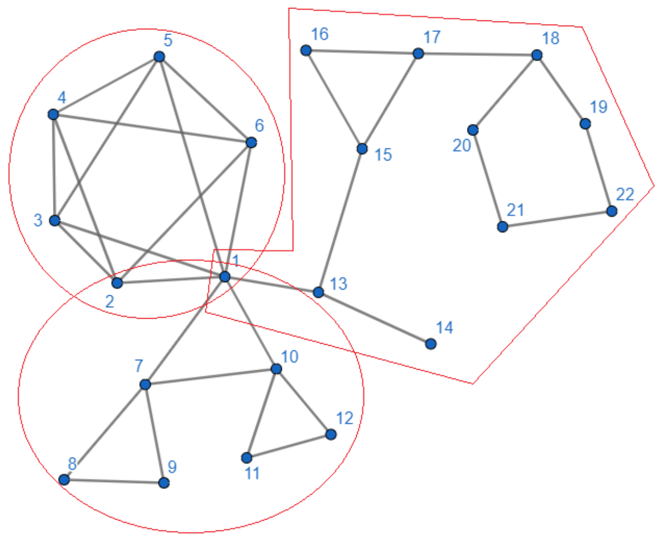
$$\operatorname{cof} G_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

Sada imamo $\det G = (-1) \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-2) \cdot 9 + 12 \cdot (-2) \cdot 5 = -45 - 72 - 120 = -237$.

Možda nam se čini da na ovom primjeru nismo puno uštedjeli koristeći ovakav pristup računanju determinante, odnosno da smo mogli odmah izračunati determinantu matrice reda 10. No, sljedeći primjer će nas uvjeriti da je za veće kaktuse pristup računanja determinante pomoću rastava na blokove puno jednostavniji.

Primjer 3.0.10. *Izračunajmo determinantu matrice udaljenosti grafa G prikazanog na slici 3.4.*

Graf smo podijelili na 3 *podgrafa. Označimo s* G_1 *potpun graf* K_6, *s* G_2 *podfgraf koji se sastoji od* 3 *bloka* K_3 *te s* G_3 *ostatak grafa.*
Prema teoremu 3.0.3 dobivamo $\det G_1 = -5$. *Koristeći lemu 2.2.1, lako je pak izračunati* $\operatorname{cof} G_1 = -6$. *Graf* G_2 *je graf koji se sastoji od* 3 *bloka* K_3 *te je po formuli iz teorema 3.0.1* $\det G_2 = 54$. *Prema teoremu 2.2.2,* $\operatorname{cof} G_2$ *možemo računati kao produkt kofaktora njegovih blokova, u ovom slučaju grafova* K_3. *Dobivamo* $\operatorname{cof} G_2 = 3^3 = 27$.
Kako je graf G_3 *bicikličan graf reda* 11 *koji sadrži* $\infty(3,2,5)$ *kao induciran podgraf, da bismo izračunali njegovu determinantu koristimo formulu* (2.7) *iz teorema 2.3.8. Dobivamo*



Slika 3.4: Graf G

$\det G_3 = 928$. *Da bismo izračunali* $\operatorname{cof} G_3$, *podijelit ćemo graf na blokove te izračunati njihove kofaktore.* G_3 *se sastoji od četiri bloka* K_2, *jednog bloka* K_3, *te jednog ciklusa duljine* 5. *Opet koristeći lemu 2.2.1, lako je izračunati* $\operatorname{cof} K_2 = -2$ *i* $\operatorname{cof} K_3 = 3$.
Ostaje izračunati kofaktor ciklusa duljine 5, *što se uz pomoć leme svodi svodi na računanje determinante matrice četvrtog reda. Dobivamo* $\operatorname{cof} C_5 = 5$. *Dakle* $\operatorname{cof} G_3 = (-2)^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.
Sada, kada smo izračunali sve potrebno, računamo determinantu cijelog grafa po teoremu 2.2.2. Dakle,

$$\begin{aligned}
\det G &= \det G_1 \operatorname{cof} G_2 \operatorname{cof} G_3 + \det G_2 \operatorname{cof} G_1 \operatorname{cof} G_3 + \det G_3 \operatorname{cof} G_1 \operatorname{cof} G_2 \\
&= -5 \cdot 27 \cdot 240 + 54 \cdot (-6) \cdot 240 + 928 \cdot (-6) \cdot 27 \\
&= -32400 - 77760 - 150336 \\
&= -260496.
\end{aligned}$$

Koristeći teoreme iz prethodne sekcija u ovom primjeru smo izbjegli mukotrpan posao zapisivanja i računanja determinante matrice reda 22 i sveli ga na uvrštavanje u formule te računanje nekoliko manjih determinanta od kojih je najveća bila reda 4.

Bibliografija

[1] R. Bapat, S.J. Kirkland i M. Neumann, *On distance matrices and Laplacians*, Linear Algebra and its Applications **401** (2005), 193 – 209, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379504002599.

[2] S. C. Gong, J. L. Zhang i G. H. Xu, *On the determinant of the distance matrix of a bicyclic graph*, ArXiv e-prints (2013), https://arxiv.org/pdf/1308.2281.pdf.

[3] R. L. Graham, A. J. Hoffman i H. Hosoya, *On the distance matrix of a directed graph*, Journal of Graph Theory **1** (1977), 85–88, http://www.math.ucsd.edu/~ronspubs/77_01_distance_matrix.pdf.

[4] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[5] Weigen Yan i Yeong Nan Yeh, *A simple proof of Graham and Pollak's theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **113** (2006), 892 – 893, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316505001299.

[6] D. Zeilberger, *Dodgson's Determinant-Evaluation Rule proved by Two-Timing Men and Women*, Electronic Journal of Combinatorics **4** (1997), http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v4i2r22/pdf.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavili smo se računanjem determinanti matrica udaljenosti pojedinih klasa kaktusa. Na početku smo obradili najosnovnije pojmove teorije grafova te završili s definicijama stabla, kaktusa i matrice udaljenosti. Zatim smo spomenuli neke osnovne rezultate o stablima te pomoću njih došli do formule za determinantu matrice udaljenosti stabla. Proučavali smo kako determinanta matrice udaljenosti grafa ovisi o njegovim blokovima. Osim toga, detaljno smo proučili biciklične grafove i došli do formule za determinante njihovih matrica udaljenosti. Nakon toga smo krenuli proučavati pojedine klase kaktusa te došli do formula za računanje determinanti njihovih matrica udaljenosti ovisno o njihovoj građi. Na samom kraju smo na konkretnim primjerima kaktusa pokazali kako pomoću naših rezultata lakše računati determinante matrica udaljenosti.

Summary

In this graduate thesis we have engaged in calculating the determinants of distance matrices of certain classes of cacti. At the beginning we introduced the most basic concepts related to graph theory and ended with definitions of a tree, cactus and distance matrix. After that, we mentioned some basic results about trees and used them to come up with formula for determinant of distance matrix of a tree. We studied how the determinants of distance matrices of graphs depend on their blocks. Besides that, we thoroughly studied bicyclic graphs and came up with the formula for determinants of their distance matrices. After that, we started studying certain classes of cacti and came up with formulas for calculating determinants of their distance matrices depending on their structure. At the very end, we showed on concrete examples of cacti how our results can help us calculate determinants of distance matrices.

Životopis

Rođen sam 30. kolovoza 1993. godine u Varaždinu. Pohađao sam Osnovnu školu Novi Marof nakon koje sam upisao opći smjer gimnazije u Drugoj Gimnaziji Varaždin. Maturirao sam 2012. te iste godine upisao Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon preddiplomskog studija, 2016. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu.