Trigonometrija u GeoGebri i njena primjena u nastavi matematike

Marasović, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Marasović

TRIGONOMETRIJA U GEOGEBRI I NJENA PRIMJENA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:

dr. sc. Goran Igaly

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ________________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _______________________________, predsjednik
2. ________________________________, član
3. ________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom __________________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________________
2. ________________________________
3. ________________________________

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Goranu Igalyu na svim prijedlozima, sugestijama, utrošenom vremenu i podršci tijekom pisanja ovog rada.

Također se zahvaljujem prof. Šimi Šuljiću na udijeljenim materijalima, pomoći i smjernicama, a najviše svojim najbližima što su me ohrabrivali i dodatno motivirali kako bi mi fakultetsko obrazovanje učinili što lakšim.

SADRŽAJ

UVOD

U današnje vrijeme s modernizacijom tehnologije dolazi do promjena poželjnih vještina na tržištu rada. Tako se prema *World Economic Forum 2016 reports, The Future of Jobs*[1] kao najpoželjnije vještine ističu kompleksno rješavanje problema, kritičko mišljenje i kreativnost koje će biti od velike važnosti u budućnosti. U tome važnu ulogu imaju škole koje trebaju učenike pripremiti za takvo tržište. Zato se u modernom školstvu učenik stavlja u prvi plan koji kao aktivan sudionik u nastavi otkriva, samostalno uči te istražuje kako bi postao sposoban za rješavanje problema i donošenje odluka u svakodnevnom životu.

U nastavi matematike između brojnih materijala pogodnih nastavnicima kako bi pripremili kvalitetan nastavni sat u kojem će učenici do novih znanja dolaziti otkrivanjem i istraživanjem, ističe se program *GeoGebra*. Razvio ju je Markus Hohenwarter na Sveučilištu u Salzburgu za poučavanje matematike u školama, a GeoGebra kao besplatni računalni program dobitnik je mnogih europskih nagrada kao FASA 2002, Learnie Award 2003, Digita 2005, Comenius 2004, Learnie Award 2005, Trophées du Libre 2005. U nastavku rada bit će opisano kako se GeoGebra koristi, koje su njene prednosti, što je e – udžbenik, GeoGebra grupa te kako ih primijeniti prilikom proučavanja matematičkih sadržaja u školi i izvan nje. Također će biti prikazan primjer nastavnog sata uz korištenje e – udžbenika izrađenog posebno za taj sat.

U ovom radu bit će naglasak na proučavanju trigonometrije pomoću GeoGebre. S trigonometrijom se učenici susreću u drugom razredu srednjih škola kada uče trigonometrijske omjere šiljastog kuta, a u trećem razredu proširuju znanje o trigonometriji tako da ih definiraju kao realne funkcije. Tada proučavaju njena svojstva, trigonometrijske identitete, crtaju grafove trigonometrijskih funkcija te je koriste u modeliranju situacija i rješavanju problema iz matematike i svakodnevnog života. Stoga je u radu stavljen fokus na obradu trigonometrije trećeg razreda tako što je za potrebe ovog rada izrađen e – udžbenik s raznim animacijama i interaktivnim aktivnostima koje služe nastavnicima za lakše poučavanje, a učenicima za samostalno učenje te bolju predodžbu trigonometrije koja inače slovi kao problematično gradivo brojnim učenicima srednjih škola. Pri kraju rada je dodan e – udžbenik *Trigonometrijske funkcije* kako bi se dobio okvirni pregled izrađenog.

[1] Dostupno na stranici http://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs.pdf (Pristupljeno: kolovoz, 2018.)

1 TRIGONOMETRIJA I GEOGEBRA U ŠKOLAMA

1.1 Kurikulum – postojeći i predstojeći

Trigonometrija je sastavni dio gradiva svih srednjih škola, osim trgovačkih škola i onih koje imaju po dva sata matematike tjedno. Tako se prema postojećem nastavnom planu i programu trigonometrija pojavljuje u 2. razredu srednje škole u cjelini *Trigonometrija pravokutnog trokuta.* Tada se obrađuju definicije trigonometrijskih funkcija šiljastoga kuta, vrijednosti funkcija kutova 30°, 45°, 60°, tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija, osnovne relacije među trigonometrijskim funkcijama te primjena trigonometrije na pravokutni trokut i u planimetriji.

Više o trigonometriji se radi u 3. razredu srednjih škola. Tako u gimnazijama u cjelini *Trigonometrijske funkcije* učenici definiraju trigonometrijske funkcije kao realne funkcije koristeći brojevnu kružnicu, svojstva tih funkcija (periodičnost, parnost i neparnost) proučavaju na grafu te ih kasnije primjenjuju u rješavanju trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi. Također se ovdje od učenika očekuje da dokazuju trigonometrijske identitete te ovladaju sposobnošću rješavanja planimetrijskih i stereometrijskih zadataka primjenjujući svojstva trigonometrijskih funkcija kuta te sinusova i kosinusova teorema. [2]

U *Prijedlogu kurikuluma* bi se trigonometrija pravokutnog trokuta obrađivala u 1. razredu srednje škole, u 2. razredu poučak o sinusu i kosinusu uz primjenu dosad naučenog u planimetriji, stereometriji i problemskim zadacima, a u 3. razredu bi se obradio preostali dio trigonometrije. Uz svaku od cjelina je preporučeno korištenje programa dinamičke geometrije. [8]

1.2 Trigonometrija kroz povijest

Trigonometrija je nastala još u antičko doba, u vrijeme značajnog razvoja geografije i astronomije kada su tadašnji znanstvenici između ostalog htjeli odrediti položaj zvijezda i planeta, izračunati njihov razmak i kutove. Primjerice, željeli su odrediti udaljenost od Zemlje do nekog planeta metodama nalaženja veza između stranica i kutova trokuta čija se dva vrha nalaze na Zemlji, a treći vrh predstavlja planet ili zvijezdu. Takvi se međuodnosi mogu izvesti proučavanjem različitih trokuta i njihovih svojstava te se iz toga javila potreba za trigonometrijom. Riječ trigonometrija (grč. *trigonon* – trokut, *metreo* – mjerim) tako se odnosi na mjerenje trokuta.

Stari Grci su nastojali riješiti zadatak pravokutnog trokuta u kojem je bilo potrebno odrediti njegove elemente ako su poznata dva elementa. Za rješavanje takvog zadatka prvo su sastavili trigonometrijske tablice dužina tetiva koje odgovaraju različitim središnjim kutovima kruga konstantnog polumjera. Njih je sastavio astronom i matematičar Hiparh, a njegove ideje su ostale zapisane u Ptolomejevu djelu *Almagest*, klasičnom djelu koji sadrži elemente ravninske i sferne trigonometrije, tablicu tetiva sastavljenu u šezdesetičnom sustavu izračunavanja s polustupnjevima za kutove od 0° do 180° koja je imala ulogu tablice sinusa ili polutetiva, jer je sinus polovica tetive.

Trigonometrijom su se također bavili indijski i arapski znanstvenici pa se tako već u 4. i 5. stoljeću u indijskim radovima navode pojmovi sinusa i kosinusa, dok su znanstvenici islamskih zemalja uveli nove trigonometrijske veličine: tangens i kotangens, sekans i kosekans. Njihovi radovi su uvelike utjecali na europske matematičare, Regiomontanusa, Kopernika, Viètea, Keplera i druge. Regiomontanusovo djelo *Pet knjiga o trokutima svih oblika* imalo je veliki utjecaj na daljnji razvoj trigonometrije. U njemu je bilo zapisano sve dotad poznato o trigonometriji, a zasnivalo se na djelima pisanim na arapskom jeziku te je u njemu trigonometrija bila razmatrana kao samostalna grana matematike, odvojena od astronomije.

Euler je u svojim radovima trigonometriji dao oblik kakav ima i danas. Razvio ju je kao znanost o trigonometrijskim funkcijama shvaćenim kao omjer odgovarajućih trigonometrijskih linija i polumjera. Neke od njegovih zasluga su:

1. Izložio je pitanje o predznacima u svakom kvadrantu, ustanovio je formule pretvorbe trigonometrijskih funkcija, istražio domene tih funkcija te ih označio sljedećim simbolima: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ itd. Uveo je oznake za stranice trokuta malim slovima te oznake za nasuprotne vrhove pisane velikim slovima. Istih se oznaka pridržavao i u trigonometriji.

2. Za razliku od njegovih prethodnika koji su u formulama uzimali polumjer kružnice *R – cijeli sinus*, Euler je pojednostavio zapis i računanje tako što je uzeo da je *R=1*.

3. U djelu *Uvod u analizu beskonačnosti* (1748.), Euler je prikazao sinus, kosinus i ostale funkcije ne kao trigonometrijske *linije* koje su obavezno povezane sa

trigonometrijskom kružnicom, već kao trigonometrijske *funkcije* koje on promatra kao omjer stranica pravokutnog trokuta, tj. kao brojevne veličine.

4. Promatrajući argument trigonometrijskih funkcija kao svaku drugu brojevnu veličinu (ne samo kao kut ili luk), Euler je prvi počeo sustavno izlagati trigonometriju analitičkim putem. Eulerovi prethodnici su svaki trigonometrijski poučak dokazivali pojedinačno na osnovi odgovarajućeg geometrijskog crteža za svaki slučaj, dok je Euler poučke izvodio polazeći od malog broja osnovnih relacija.

5. Do Eulera su se rijetko razmatrale trigonometrijske funkcije lukova koje su premašivale π. Tek u svojim radovima Euler počinje razrađivati učenje o trigonometrijskim funkcijama svakog argumenta. [6]

1.3 Poučavanje trigonometrije dosad

Još donedavno u srednjim školama prilikom proučavanja trigonometrijskih funkcija i njihovih primjena, vrijednosti trigonometrijskih funkcija su se čitale iz tablica[2] na slici 1.3.1. Radilo se o standardnim tablicama prirodnih vrijednosti koje su sadržavale vrijednosti trigonometrijskih funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens s najviše pet decimala te za kutove koji su bili zadani u stupnjevima i minutama.

[2] Slika tablice preuzeta iz B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola,* Element, Zagreb, 1998.

°	′	sin	D.1′	tan	D.1′	ctg	D.1′	cos	D.1′	′	°
30	0	0,50 000	25,2	0,57 735	38,9	1,7321	11,6	0,86 603	14,6	0	60
	10	0,50 252	25,1	0,58 124	39,0	1,7205	11,5	0,86 457	14,7	50	
	20	0,50 503	25,1	0,58 513	39,1	1,7090	11,3	0,86 310	14,7	40	
	30	0,50 754	25,0	0,58 905	39,2	1,6977	11,2	0,86 163	14,8	30	
	40	0,51 004	25,0	0,59 297	39,4	1,6864	11,1	0,86 015	14,9	20	
	50	0,51 254	25,0	0,59 691	39,5	1,6753	11,0	0,85 866	14,9	10	
31	0	0,51 504	24,9	0,60 086	39,7	1,6643	10,9	0,85 717	15,0	0	59
	10	0,51 753	24,9	0,60 483	39,8	1,6534	10,8	0,85 567	15,1	50	
	20	0,52 002	24,8	0,60 881	39,9	1,6426	10,7	0,85 416	15,2	40	
	30	0,52 250	24,8	0,61 280	40,1	1,6319	10,6	0,85 264	15,2	30	
	40	0,52 498	24,7	0,61 681	40,2	1,6212	10,5	0,85 112	15,3	20	
	50	0,52 745	24,7	0,62 083	40,4	1,6107	10,4	0,84 959	15,4	10	
32	0	0,52 992	24,6	0,62 487	40,5	1,6003	10,3	0,84 805	15,5	0	58
	10	0,53 238	24,6	0,62 892	40,7	1,5900	10,2	0,84 650	15,5	50	
	20	0,53 484	24,6	0,63 299	40,8	1,5798	10,1	0,84 495	15,6	40	
	30	0,53 730	24,5	0,63 707	41,0	1,5697	10,0	0,84 339	15,7	30	
	40	0,53 975	24,5	0,64 117	41,1	1,5597	9,9	0,84 182	15,7	20	
	50	0,54 220	24,4	0,64 528	41,3	1,5497	9,9	0,84 025	15,8	10	
33	0	0,54 464	24.4	0,64 941	41,4	1,5399	9,8	0,83 867	15,9	0	57
	10	0,54 708	24,3	0,65 355	41,6	1,5301	9,7	0,83 708	15,9	50	
	20	0,54 951	24,3	0,65 771	41,8	1,5204	9,6	0,83 549	16,0	40	
	30	0,55 194	24,2	0,66 189	41,9	1,5108	9,5	0,83 389	16,1	30	
	40	0,55 436	24,2	0,66 608	42,1	1,5013	9,4	0,83 228	16,2	20	
	50	0,55 678	24,1	0,67 028	42,2	1,4919	9,3	0,83 066	16,2	10	
34	0	0,55 919	24,1	0,67 451	42,4	1,4826	9,3	0,82 904	16,3	0	56
	10	0,56 160	24,0	0,67 875	42,6	1,4733	9,2	0,82 741	16,4	50	
	20	0,56 401	24,0	0,68 301	42,7	1,4641	9,1	0,82 577	16,4	40	
	30	0,56 641	23,9	0,68 728	42,9	1,4550	9,0	0,82 413	16,5	30	
	40	0,56 880	23,9	0,69 157	43,1	1,4460	9,0	0,82 248	16,6	20	
	50	0,57 119	23,9	0,69 588	43,3	1,4370	8,9	0,82 082	16,6	10	
°	′	cos	D.1′	ctg	D.1′	tan	D.1′	sin	D.1′	′	°

1.3.1 Primjer trigonometrijske tablice

Danas se vrijednosti trigonometrijskih funkcija za dani realni broj određuju puno brže upotrebom džepnog računala te kalkulatorima koji su danas neizostavan dio svakog mobilnog uređaja, osobnih i prijenosnih računala. Upravo iz razloga što postoje različiti kalkulatori, dobro je pripaziti u kojem se načinu rada (*modu)* nalazi kalkulator. Kut kojim se određuje vrijednost može biti zadan u stupnjevima, radijanima i sve rjeđe u gradima. Također je dobro obratiti pozornost da se prilikom određivanja tangensa broja rabi tipka na kojoj piše *tan,* a ne tg. Kada želimo odrediti kotangens broja, uočit ćemo da na većini kalkulatora tipka za kotangens broja ne postoji već se prvo izračuna vrijednost funkcije tangens, a zatim se pritisne tipka $\frac{1}{x}$.

Osim džepnih računala, danas se u školama nude razne aplikacije te programi koji bi olakšali učenje, potiče se na učenje otkrivanjem te na istraživanje. Jedan od takvih programa koji se u školama najviše istaknuo i čija je upotreba sve veća jest *GeoGebra*.

1.4 O GeoGebri

Tehnologija je danas neizostavan dio naše svakodnevnice te kako bi se zadovoljile potrebe tržišta rada, neophodno je bilo tehnologiju uvesti u školstvo. Tako se danas upotreba tehnologije u nastavi matematike bazira na edukativnom korištenju računala sa specijaliziranom softverskom podrškom koja se odnosi na programe koje podržavaju grafičke, tabelarne i simboličke matematičke prikaze poput tabličnih kalkulatora, grafičkih alata, sustava računalne algebre (engl. *Computer Algebra System*, kratica CAS) te programa dinamičke geometrije (engl. *Dynamic Geometry Software*, kratica DGS). [10]

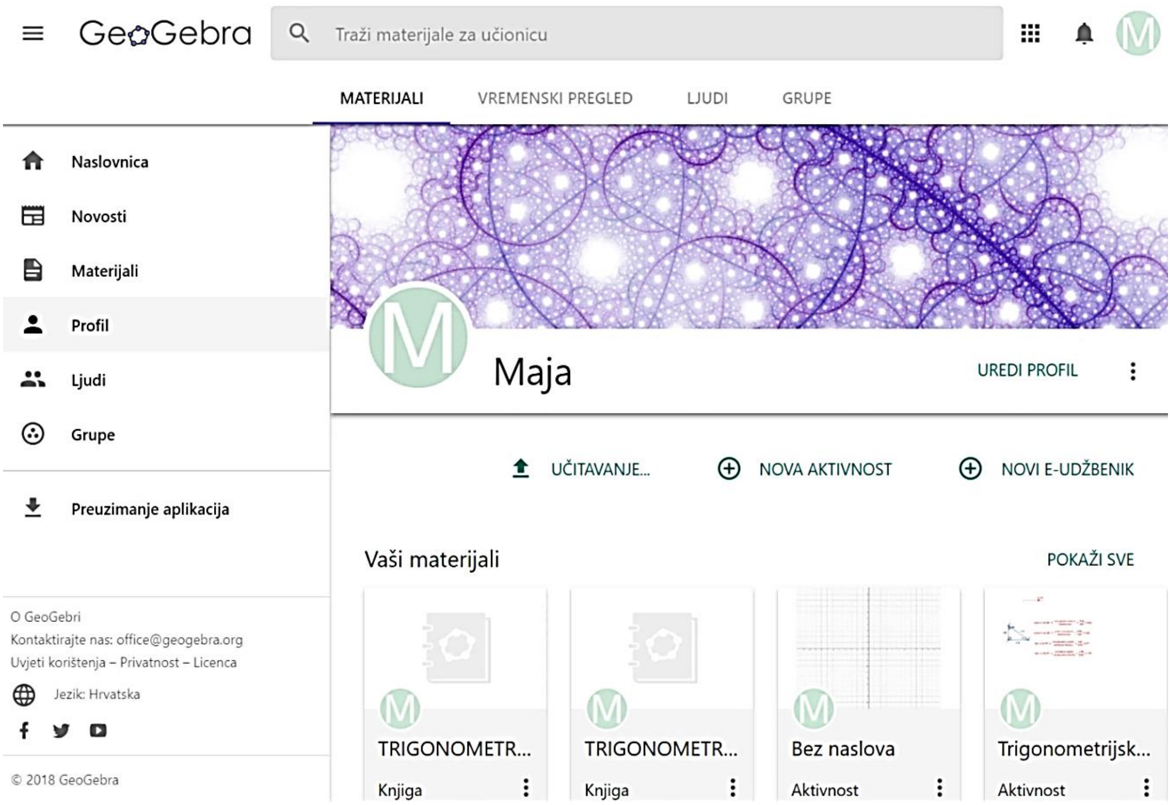
Dok sustavi računalne algebre (CAS) omogućavaju rješavanje jednadžbi, sređivanje i faktorizaciju algebarskih izraza te analitičku obradu geometrije, u programima dinamičke geometrije (DGS) mogu se konstruirati geometrijski objekti te mijenjati njihovi položaji bez da se matematički odnosi među tim objektima promijene. Program koji sadrži elemente CAS-a i DGS-a je GeoGebra. [10]

GeoGebra je besplatni računalni program dinamičke matematike, naziva nastalog spajanjem pojmova *geometrija* i *algebra*, koji osim što povezuje algebru i geometriju, omogućuje tri različita matematička prikaza - grafički, tabelarni i simbolički. Primarno se koristi u osnovnom i srednjoškolskom obrazovanju, međutim zbog svoje jednostavne upotrebe je postao široko primjenjiv na svim razinama obrazovanja. Danas GeoGebra nudi interaktivnu obradu analize, algebre, vjerojatnosti, statistike, proračunskih tablica te 3D geometrije. Prevedena je na mnoge jezike uključujući i hrvatski, a sam program je podržan na više uređaja i operacijskih sustava što omogućava njegovu široku primjenu. Osim što ga se može koristiti kao mrežnu aplikaciju, može se preuzeti sa interneta (https://www.geogebra.org/download) na osobna računala, tablete te na pametne telefone u obliku samostalnih aplikacija na uređajima. Tako su za operacijske sustave iOS, Android, Windowse, MacOS, Chromebook i Linux dostupne izvanmrežne GeoGebrine aplikacije poput aplikacija Grafički kalkulator, 3D grafovi, Geometrija, Proširena stvarnost, Klasična GeoGebra 5 i 6.

Za korištenje programa GeoGebra potreban je uređaj s instaliranom aplikacijom GeoGebre koji ima pristup internetu te mrežni preglednik koji je ažuriran na posljednju verziju. U ovom radu koristit će se mrežna aplikacija GeoGebre[3] kojoj je moguće pristupiti i bez prijave, ali otvaranjem vlastitog profila moguć je uvid u materijale koji postavljaju drugi registrirani korisnici GeoGebre (na stranicama GeoGebraTube[4]), izrada e – udžbenika i raznih radnih materijala koje je moguće dijeliti javno, pristup omogućiti samo korisnicima koji imaju poveznicu na određeni radni materijal ili vidljivost postaviti na razinu privatno gdje jedino autor može vidjeti materijal. Isto tako, prijava korisniku daje mogućnost komunikacije, postavljanja eventualnih upita te razmjenu ideja s postojećim korisnicima. [9]

Stoga, preporučeni prvi korak rada na GeoGebri jest otvaranje korisničkog računa za koje je potrebno navesti adresu e-pošte, korisničko ime i lozinku, a kasnije se moguće prijaviti putem Google, Facebook, Twitter i ostalih za korisnika pogodnih računa.

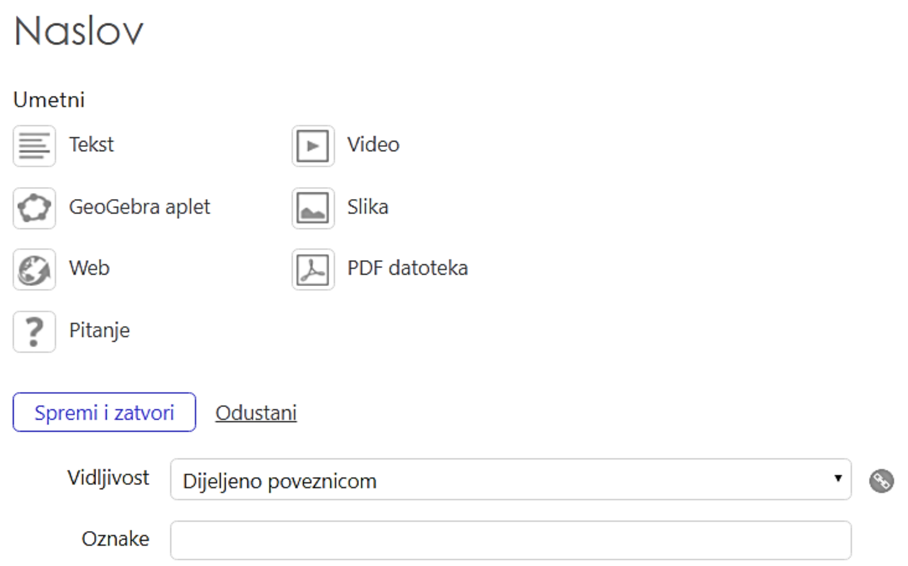
Nakon prijave, korisnik može otvoriti karticu *Profil* čiji je prozor prikazan na slici 1.4.1 te su u njemu ponuđene ikone *Učitavanje* (omogućuje postavljanje već izrađene datoteke sa računala), *Nova aktivnost* te *Novi e – udžbenik.*



1.4.1 Profil korisnika

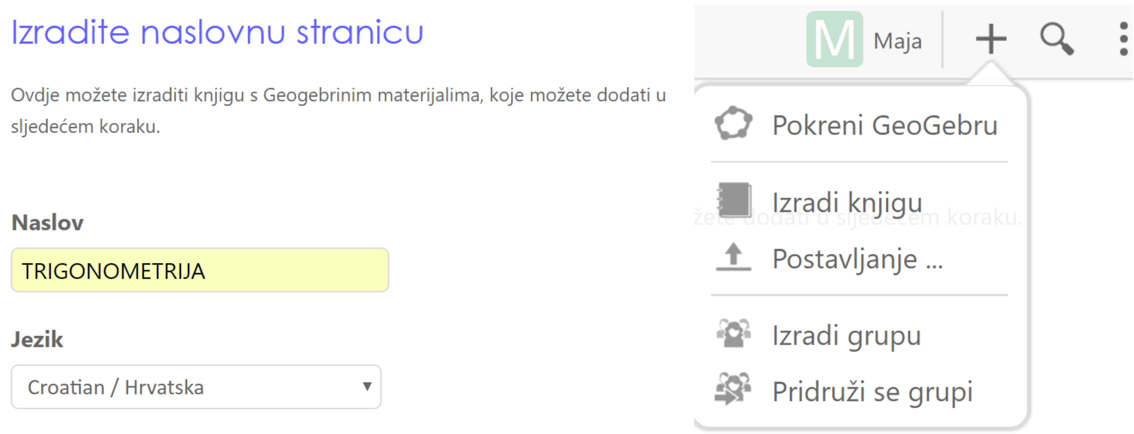
[3] GeoGebra, dostupna na stranici https://www.geogebra.org/ (Pristupljeno: kolovoz 2018.)
[4] GeoGebraTube, dostupna na stranici https://www.geogebra.org/materials (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

Ikona *Nova aktivnost* nudi umetanje naslova aktivnosti, teksta, GeoGebra apleta (zadatka), weba, pitanja, videa, slika te PDF datoteka kao što se može vidjeti na slici 1.4.2, gdje su također ponuđene *Postavke aplikacije* koje omogućuju prilagodbu slike, dob ciljane skupine te jezika.



1.4.2 Nova aktivnost

Klikom na *Novi e – udžbenik* korisnik uređuje naslovnu stranicu kao na slici 1.4.3 u kojoj upisuje naslov i opis te određuje jezik, ciljanu skupinu, vidljivost i oznake koje olakšavaju pretragu. Kao na slici 1.4.3, pod opcijom *Izradi novo* nude se mogućnosti kreiranja aktivnosti, izrade radnog lista, knjige, postavljanje materijala sa računala te izrade ili pridruživanja grupi (GeoGebra grupa) o kojoj će u nastavku rada biti više riječi.

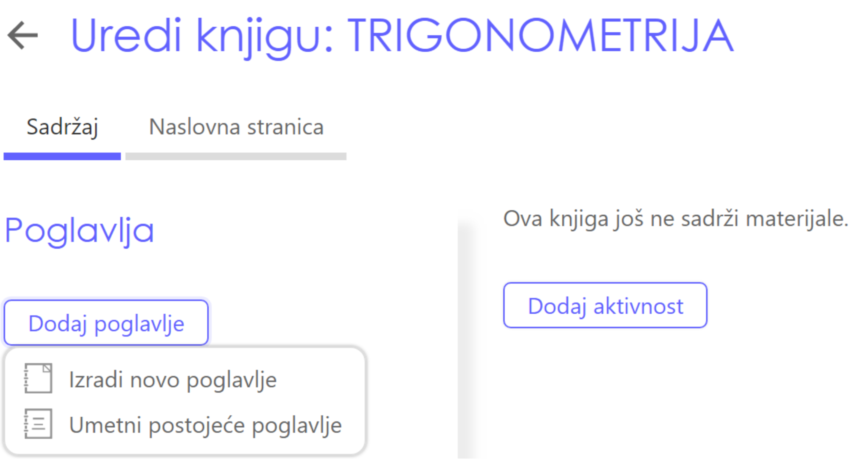


1.4.3. Novi e - udžbenik

1.4.1 E – udžbenik

Odabirom novog e – udžbenika, nakon što je naslovna stranica uređena i spremljena, automatski se otvara sljedeća stranica prikazana slikom 1.4.4 u kojoj se nude kartice *Sadržaj* te *Naslovna stranica* kako bi se vratili na dodatno uređenje naslovnice.

U kartici *Sadržaj* je potrebno dodati poglavlje na kartici *Dodaj poglavlje*. Moguće je izraditi novo poglavlje ili umetnuti postojeće. Pri izradi novog poglavlja, nudi se unos naslova poglavlja te po izboru opis kojeg je moguće uređivati pomoću alata za formatiranje teksta kao i dodavanja poveznica i LaTeX – a . Nakon dodavanja željenih poglavlja, u svako poglavlje je moguće dodati aktivnosti klikom na *Dodaj aktivnost*, gdje se također nudi mogućnost dodavanja već izrađenih aktivnosti kao i izrada potpuno novih prikazanih na slici 1.4.2.



1.4.4 Uređivanje e - udžbenika

Kao što je navedeno, kada se želi dodati nova aktivnosti, ponude se brojne opcije, poput opcije *Pitanje* ili *GeoGebra aplet.* Prva opcija nudi mogućnost da učenik odgovori svojim riječima na pitanja koja su tekstualna, višestrukog izbora ili esejskog tipa. Druga opcija, *GeoGebra aplet,* traži konstrukciju ili izračun. Primjerice, ako nastavnik u e – udžbenik doda GeoGebra aplet, on neće moći vidjeti kako je učenik riješio pojedini zadatak. Rješenja i rezultate učenika moguće je vidjeti tek kad se izradi GeoGebra grupa odnosno virtualni razred.

1.4.2 GeoGebra grupa

GeoGebra grupa (razred) je osmišljena kako bi olakšala međusobnu komunikaciju korisnika, najčešće između nastavnika i učenika ili kolega nastavnika. Povezivanjem članova grupa omogućuje:

- dijeljenje obrazovnih sadržaja (npr. dinamički radni listovi, e – udžbenici)
- pisanje objava i komentara
- zajedničku izradu i uređivanje GeoGebrinih materijala
- postavljanje i upravljanje zadacima za druge članove (npr. učenike)
- vrednovanje izvršenih zadataka i davanje povratne informacije
- praćenje rada učenika (npr. domaće zadaće)

GeoGebra grupa se može koristiti u dva različita smjera:

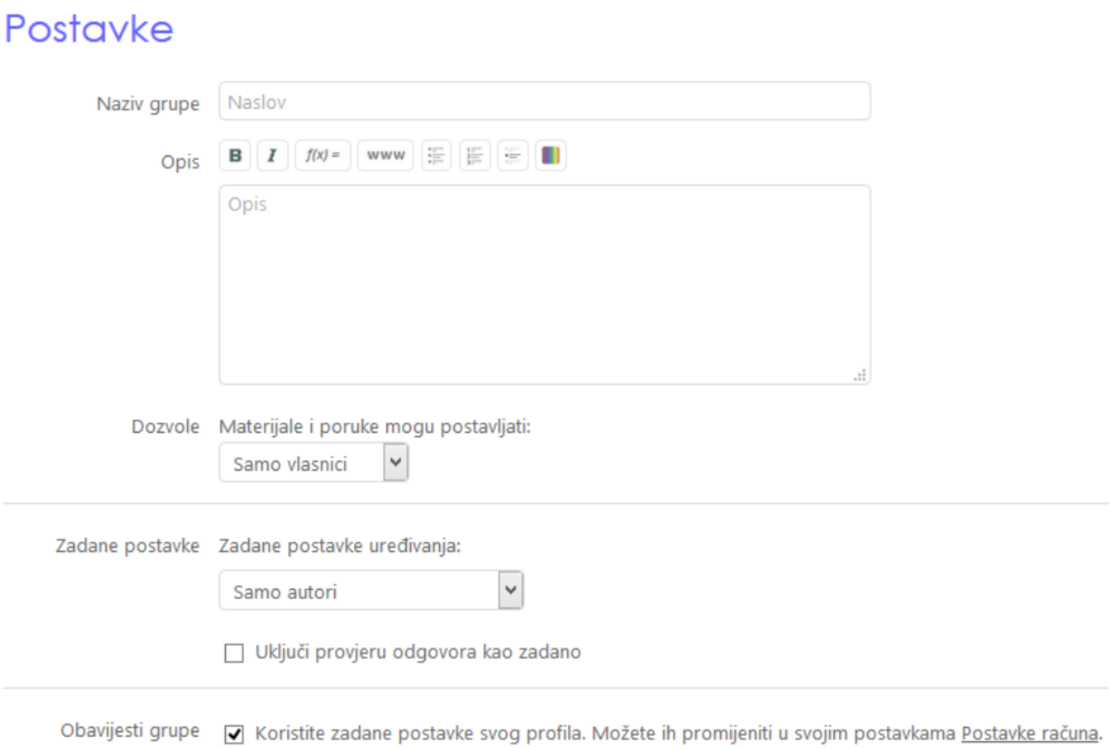
- suradnja – osmišljena kao grupa za kolege koji zajednički rade na stvaranju, prikupljanju ili dijeljenju digitalnih obrazovnih sadržaja
- virtualni razred – formiranje razreda s nastavnikom i učenicima kako bi se ostvarila što bolja suradnja, podijelile ideje, potaknula rasprava o njima te vrednovali učenički radovi da se dobije povratna informacija za daljnji napredak učenika, ali i nastavnika

Pridruživanje GeoGebra grupi moguće je na mrežnim stranicama https://www.geogebra.org/groups ili ulaskom na GeoGebraTube u izborniku *Grupe.* Korisnik može izraditi vlastitu grupu čiji je onda on *vlasnik* ili se može pridružiti postojećoj grupi upisivanjem *zaporke grupe* kao na slici 1.4.5 te tako postati njen *član.*

1.4.5 Pridruživanje GeoGebra grupi

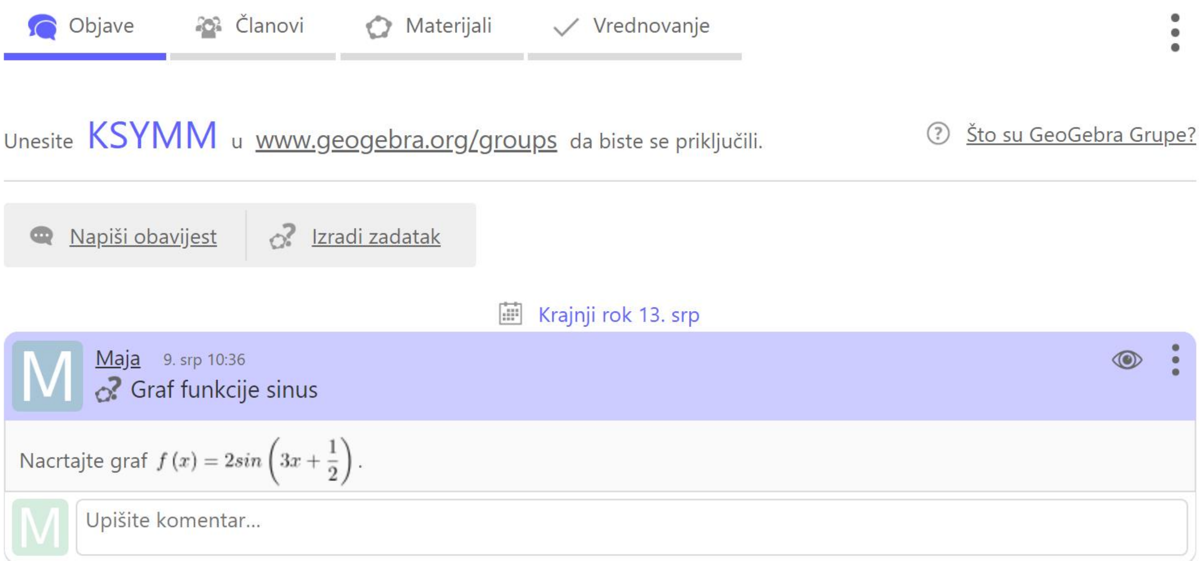
Na slici 1.4.6 su prikazane *Postavke* u kojima vlasnik grupe može odrediti:

- naziv i opis grupe
- dozvole članovima o mogućnosti postavljanja materijala i objava u grupi
- dozvole članovima o uređivanju materijala – ovdje je moguće uključiti provjeru odgovora kako bi učenik odmah mogao provjeriti točnost svojih odgovora
- želi li primati obavijesti na adresu e-pošte te koliko često ih želi primati



1.4.6 Postavke grupe

Grupe su organizirane u četiri kartice naziva *Objave, Članovi, Materijali* i *Vrednovanje / Zadaci* kao na slici 1.4.7 koje skupljaju sav sadržaj i objave vezane uz pojedinu grupu.



1.4.7 Objave - glavna stranica GeoGebra grupe

Kartica *Objave* je glavna stranica grupe koja služi za komunikaciju među članovima grupe. Ovdje je vlasniku grupe omogućeno postavljanje zadataka za članove grupe u obliku pitanja ili GeoGebra apleta kojem je moguće odrediti krajnji rok izvršenja. Nakon što se zadatak objavi, on se članovima prikazuje u kartici *Zadaci* (koju vlasnik vidi pod karticom *Vrednovanje*) u rubrici *Zaduženja.* Svaki od članova grupe samostalno radi na postavljenom zadatku kojeg može spremiti. Ovisno o razini riješenosti, članu se kraj svakog zadatka pojavi poruka *nezapočeto, u izradi* ili *završeno.* Vlasnik može svakom članu grupe poslati poruku koju će on vidjeti u obliku ikone pisma uz odgovarajući zadatak. U kartici *Članovi* naveden je popis članova grupe kao i njihova uloga u grupi (*vlasnik, član*) dok u kartici *Materijali* članovi mogu vidjeti te uređivati podijeljene materijale ovisno o dozvolama koje je postavio vlasnik grupe.

Karticu *Vrednovanje* vidi samo vlasnik te u njoj u retcima ima popis članova grupe, a u stupcima su navedeni zadaci. U svakoj ćeliji ispod zadatka se nalaze ikone uz pojedinog člana grupe te njegov status izvršenja zadatka: *nije započeto, u tijeku, izrađeno* i *završeno.*

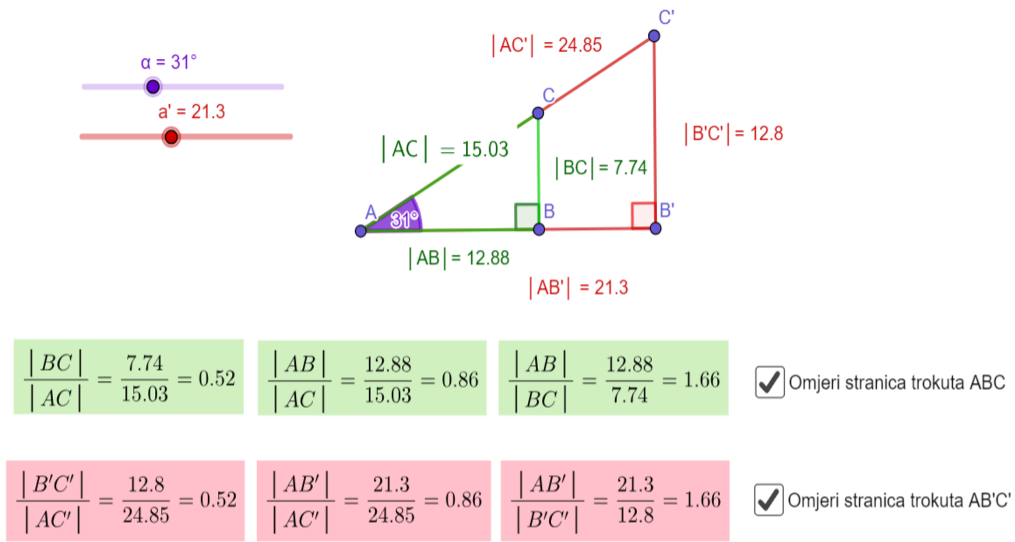
Kod prvog susreta s GeoGebra grupom dobro bi bilo njene članove upoznati s radom GeoGebre na pametnim uređajima, tabletima ili osobnim računalima, no njeno korištenje je vrlo jednostavno jer prilikom rada na GeoGebra apletu se kraj svakog alata pokaže tekst pomoći koji objašnjava čemu koji alat služi. Isto tako, članovima grupe nije potreban instalirani program GeoGebra kako bi se pridružili grupi i rješavali zadatke, već je dovoljno na uređajima imati pristup internetu što znatno olakšava korištenje GeoGebre.

2 TRIGONOMETRIJA U GEOGEBRI

2.1 Trigonometrija pravokutnog trokuta

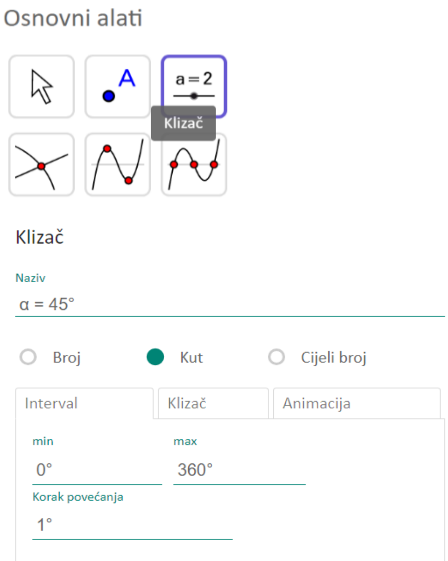
Kao što je još u početku navedeno, učenici se tek u drugom razredu srednjih škola prvi puta susreću sa pojmom trigonometrijskih funkcija. Tada trigonometriju upoznaju preko pravokutnog trokuta kojeg povezuju s Pitagorinim poučkom naučenim u osmom razredu osnovne škole. Prvo se prisjećaju karakteristika pravokutnog trokuta, da ima jedan pravi kut i dva šiljasta kuta te da mu je najdulja stranica ona nasuprot pravog kuta koja se naziva hipotenuza, a preostale dvije su katete. Same trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu dobro je uvesti motivacijskim primjerom. Za to nam moć poslužiti proučavanje nagiba ceste, računanje nagiba ljestava prislonjenih o zid, nagiba školskih stepenica itd. [3]

Ovdje je GeoGebra od velike koristi jer primjerice korištenjem klizača možemo obuhvatiti puno više slučajeva nego prilikom crtanja na ploči. U programu GeoGebra grafički kalkulator prikazani su slični trokuti s klizačima, tekstom i potvrdnim okvirima te je cilj pokazati da su omjeri stranica sličnih pravokutnih trokuta jednaki te ovise jedino o šiljastom kutu. Napravljena je sljedeća animacija dana slikom 2.1.1:



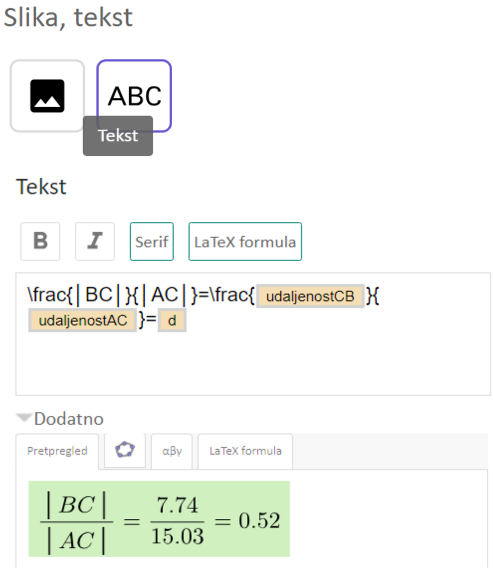
2.1.1 Omjeri stranica sličnih trokuta

Konstruirani su pravokutni trokuti ABC i $AB'C'$ tako da je prvo upotrijebljen alat *Klizač* sa slike 2.1.2 za kut alfa (α), a zatim klizač za stranicu a', gdje je $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC'$ s minimalnom vrijednošću 0°, maksimalnom vrijednošću 89° te korakom povećanja od 1° i $a' = |AB'|$ s proizvoljnom minimalnom vrijednošću 0, maksimalnom vrijednošću 50 te korakom povećanja 0.1.



2.1.2 Alat klizač

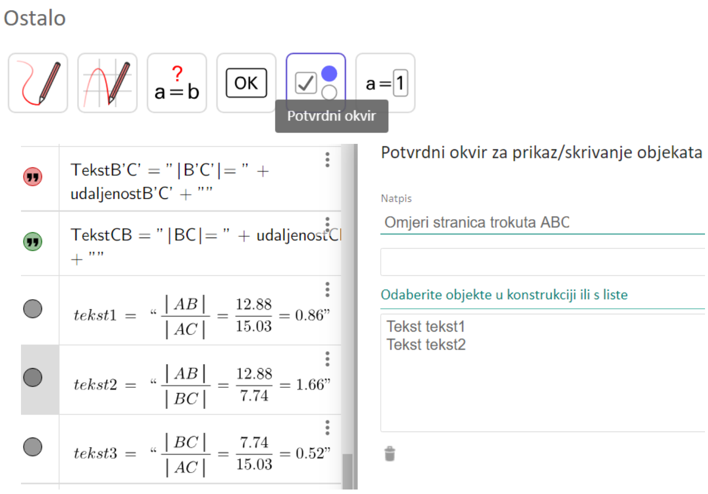
S učenicima možemo provesti diskusiju zašto su prikazana dva trokuta slična (svi pravokutni trokuti sa sukladnim kutovima su slični jer primjenjujemo K – K poučak o sličnosti trokuta). Iz toga slijedi da su i odgovarajući omjeri stranica sličnih trokuta jednaki, u što se možemo uvjeriti pomičući klizač za stranicu a' te da će se omjeri duljina stranica pravokutnog trokuta promijeniti jedino kada mijenjamo veličinu šiljastog kuta, opet pomičući klizač kuta α. Kod klizača možemo unijeti broj, kut ili cijeli broj, odrediti interval s korakom povećanja, klizač postaviti horizontalno ili vertikalno te kod animacije odrediti njegovu brzinu te ponavljanje. Omjeri duljina stranica su prikazani tako što je odabran alat *Tekst* sa slike 2.1.3 u kojem je pomoću teksta, simbola i LaTeX formule upisan razlomak sa oznakama duljina stranica te povezan sa njihovim duljinama preko ikone također u dijaloškom okviru Tekst. Tekst i njegovu pozadinu možemo uređivati te mijenjati njegov položaj na zaslonu.



2.1.3 Alat tekst

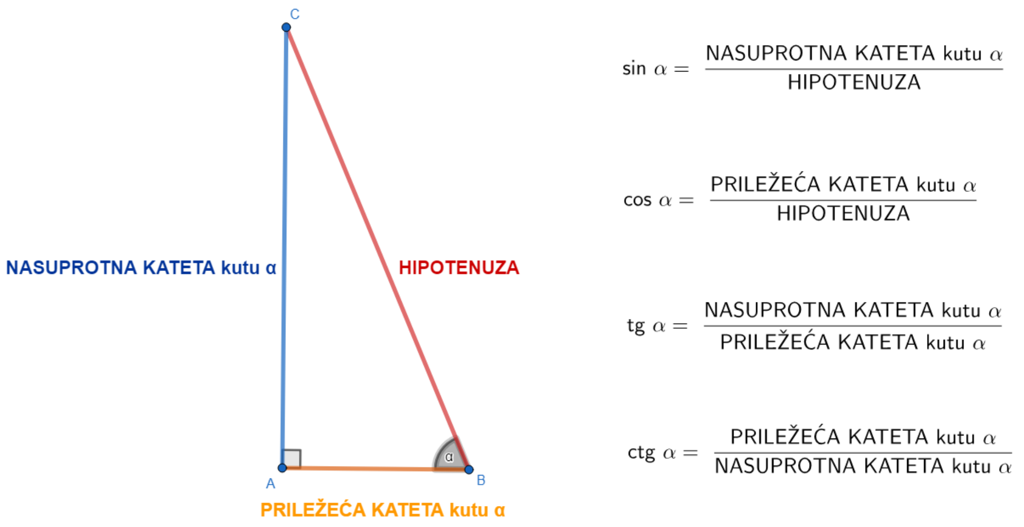
Ono što je dobro koristiti tijekom nastavnog sata je alat *Potvrdni okvir* sa slike 2.1.4 kako bi prilikom analize slike učenike postupno navodili na zaključke. U dijaloškom okviru alata *Potvrdni okvir* ponuđeno je mjesto u kojem upisujemo željeni natpis te mogućnost odabira objekata koje želimo prikazati, odnosno sakriti. Te objekte možemo upisivati sami u dano polje ili klikom na objekte iz grafičkog ili algebarskog prikaza.

Na slici 2.1.1 potvrdni okvir je imenovan s „ Omjeri stranica trokuta ABC " i „ Omjeri stranica trokuta AB'C' " te klikom na okvir s lijeve strane natpisa biramo želimo li prikazati ili sakriti odabrane objekte iz dijaloškog okvira.



2.1.4 Potvrdni okvir

Nakon toga se imenuju hipotenuza te prileževa i nasuprotna kateta s obzirom na šiljasti kut koji se promatra te se definiraju omjeri stranica pravokutnog trokuta u ovisnosti o promatranom kutu. Na slici 2.1.5 su u GeoGebri prikazani trigonometrijski omjeri šiljastog kuta α.



2.1.5 Omjeri stranica pravokutnog trokuta

Također se trigonometrijski omjeri pokažu i za drugi šiljasti kut β u pravokutnom trokutu te vrijedi $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Pomoću alata *Klizač* može se mijenjati šiljasti kut u pravokutnom trokutu te doći do zaključka da je pravokutnom trokutu hipotenuza najdulja stranica pa za svaki šiljasti kut α vrijedi: $0 < \sin\alpha < 1, 0 < \cos\alpha < 1$. Stoga kažemo da su funkcije sinus i kosinus omeđene, dok tangens i kotangens nisu omeđene jer su one omjeri kateta, a ti omjeri mogu postići svaku pozitivnu vrijednost. [3]

2.2 Trigonometrijske funkcije

U drugom razreda srednjih škola učenici su proučavali trigonometrijske funkcije šiljastog kuta kao omjere duljina stranica pravokutnog trokuta te su ih primjenjivali za rješavanje problema u planimetriji i u svakodnevnom životu, ali nisu bili ni približno upoznati sa svim mogućnostima trigonometrije. Zato se u trećem razredu u prvom polugodištu susreću s trigonometrijskim funkcijama kao realnim funkcijama te nadograđuju znanje iz drugog razreda.

U GeoGebri je u sklopu diplomskog rada napravljen e – udžbenik *Trigonometrijske funkcije*[5]. Ono što je korisno kod GeoGebrinog e – udžbenika jest da se u njega mogu uklopiti vlastiti materijali odnosno apleti, ali i doraditi materijali drugih korisnika koji su omogućili njihovo slobodno korištenje. U ovom e – udžbeniku je gradivo trećeg razreda je podijeljeno u pet poglavlja: *Kut i brojevna kružnica*, *Trigonometrijske funkcije*, *Trigonometrijski identiteti*, *Grafovi trigonometrijskih funkcija* te *Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe* unutar kojih se nalaze razne aktivnosti. Radi lakšeg snalaženja u svakoj od aktivnosti su na početku dane upute za korištenje GeoGebra apleta. Pojedine aktivnosti ispod apleta sadrže i kviz sa pitanjima višestrukog izbora ili otvorenog tipa koji usmjerava na proučavanje danog apleta kako bi se uspješno odgovorilo na postavljena pitanja. Ovaj e – udžbenik osmišljen je s ciljem da raznim animacijama pomogne nastavnicima prilikom ili nakon obrade gradiva, a učenicima da samostalno istražuju, provjeravaju rješenja te odgovaraju na pitanja kako bi dobili povratnu informaciju o tome koliko su dobro savladali određeno gradivo. U nastavku rada detaljnije će biti opisano svako od poglavlja.

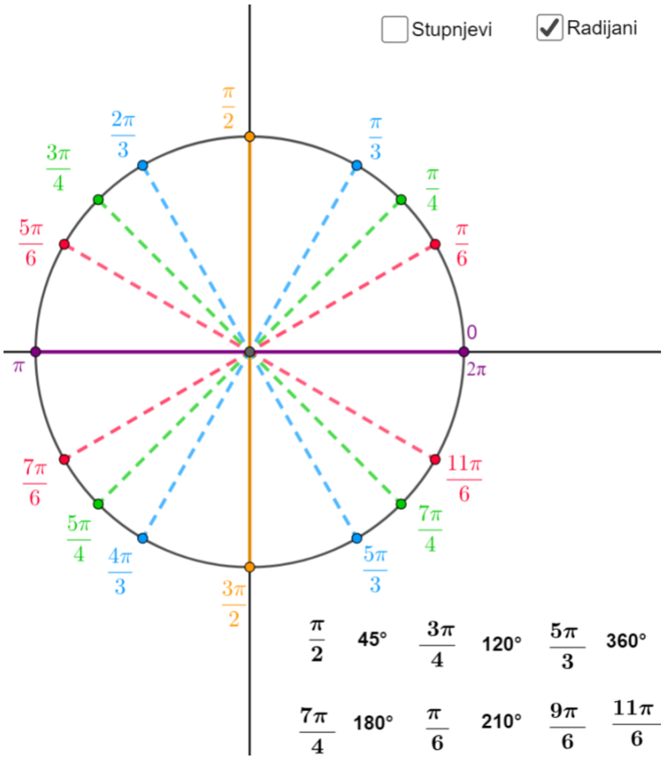
2.2.1 Kut i brojevna kružnica

U poglavlju *Kut i brojevna kružnica* nalaze se tri aktivnosti: *Stupnjevi i radijani*, *Glavna mjera kuta* te *Namatanje brojevnog pravca na brojevnu kružnicu.*

Prva aktivnost prikazana na slici 2.2.1 osmišljena je kako bi se dobio pregled stupnjeva i radijana na intervalu $[0,2\pi]$, s tim da je za interakciju s učenicima dodano da prvo sami moraju odrediti gdje se nalaze zadane mjere kuta u stupnjevima i radijanima prikazane u donjem desnom kutu apleta tako da ih povlače do željene pozicije na kružnici.

[5] E – udžbenik *Trigonometrijske funkcije* dostupan na https://www.geogebra.org/m/tj3m7npe (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

Za provjeru rješenja, dovoljno je kliknuti na *Stupnjevi* ili *Radijani*.

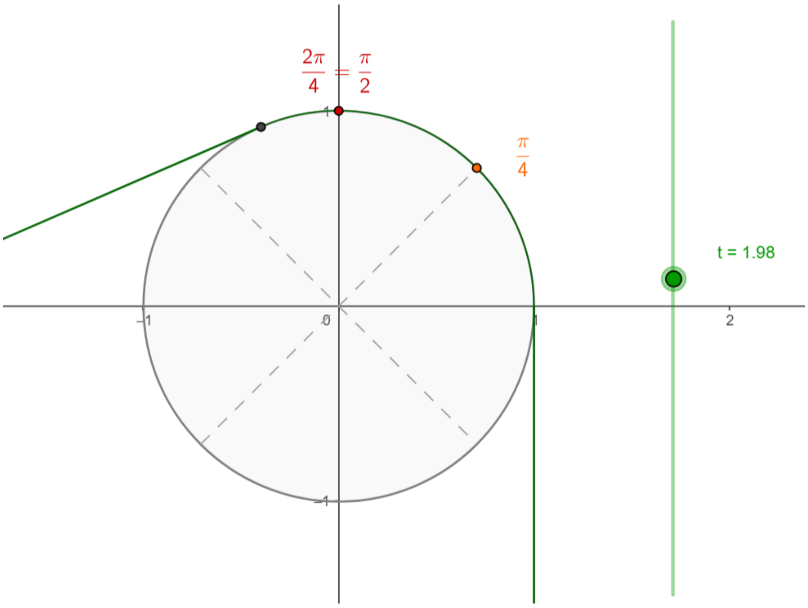


2.2.1 Stupnjevi i radijani

U sljedećoj aktivnosti *Glavna mjera kuta* napravljen je aplet[6] u kojem učenik u prazno tekstualno polje upisuje proizvoljan broj u radijanima, a program mu automatski izbacuje gdje će se taj broj nalaziti na kružnici na intervalu $[0,2\pi]$. Na početku aktivnosti se učeniku ukazuje kako ovdje može provjeriti vlastita rješenja prilikom određivanja glavne mjere kuta, a ispod apleta je ponuđena i formula za određivanje glavne mjere kuta.

[6] GeoGebra aplet dostupan na https://www.geogebra.org/m/SgHuXMGD#material/a3s2fJ4M autora Šime Šuljića (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

Aktivnost *Namatanje brojevnog pravca na brojevnu kružnicu* korisno je prikazati učenicima kada se obrađuje eksponencijalno preslikavanje jer im tada postaje vizualno jasno što zapravo namatanje pravca na kružnicu jest. Ovdje je iskorišten aplet[7] u kojem je prikazana brojevna kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava polumjera duljine 1 što se može vidjeti na slici 2.2.2. Prikazan je i brojevni pravac okomit na x – os koji prolazi točkom s koordinatama $(1,0)$, a do njega je napravljen klizač t koji predstavlja realne brojeve s brojevnog pravca. Pokretanjem animacije ili pomicanjem klizača t, pozitivni dio brojevnog pravca se na kružnicu namotava u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu, dok negativni u smjeru kazaljke na satu.



2.2.2 Namatanje pravca na kružnicu

Prilikom namatanja prikazano je kako se svaki realni broj t s brojevnog pravca preslikava u jednu točku na kružnici. Tu kružnicu nazivamo *brojevna* ili *trigonometrijska kružnica,* a preslikavanje E *eksponencijalno preslikavanje*. Piše se $E\ (t) = T$, gdje je t realni broj, a T točka na brojevnoj kružnici. Nastavnik može navesti učenike da primijete kako jednoj točki kružnice odgovara beskonačno mnogo brojeva na pravcu. Kako je opseg jedinične kružnice jednak 2π slijedi da će svaki sljedeći broj s brojevnog pravca koji bude pridružen istoj točki na kružnici biti udaljen za 2π. Tako se primjerice svi brojevi oblika

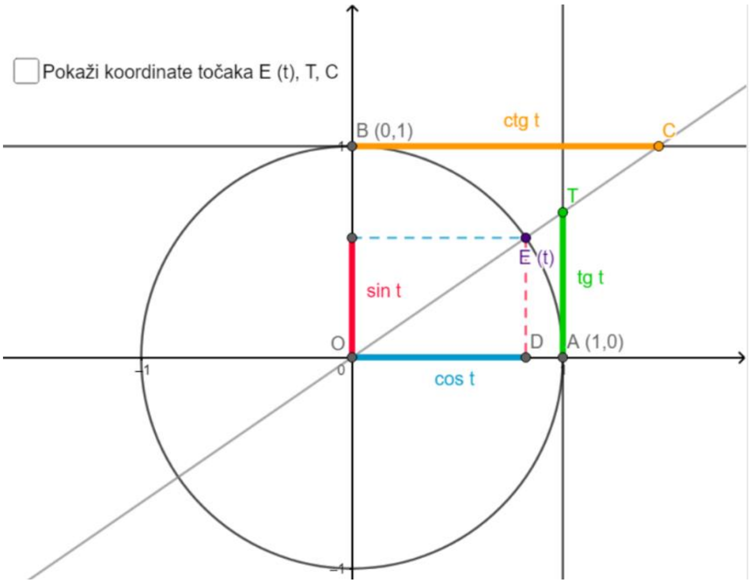
[7] GeoGebra aplet dostupan na https://www.geogebra.org/m/SgHuXMGD#material/R3AhFww2 autora Šime Šuljića (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, za k cijeli broj preslikavaju u istu točku na brojevnoj kružnici. Ispod apleta je postavljeno pitanje što vrijedi za svaki realan broj t s brojevnog pravca, pri čemu je $E\ (t)$ odgovarajuća točka na kružnici. Odgovor je $E\ (t) = E\ (t + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije se prvo definiraju kao realne funkcije odnosno proširuje se njihova definicija iz drugog razreda što se može vidjeti već u prvoj aktivnosti *Definicija trigonometrijskih funkcija* iz ovog poglavlja. Ona je pogodna za korištenje na satu prilikom definiranja trigonometrijskih funkcija. Nastavnik može pokazati prvi aplet prikazan na slici 2.2.3 na kojem je dana jedinična brojevna kružnica smještena u ishodištu koordinatnog sustava i tangente na kružnicu koje prolaze točkama $A(1,0)$ i $B(0,1)$. Učenici trebaju odrediti koordinate točaka $E\ (t), T, C$ koje nastavnik kasnije prikazuje klikom na *Pokaži koordinate točaka E (t), T, C*. Zatim definira trigonometrijske funkcije na ovaj način:

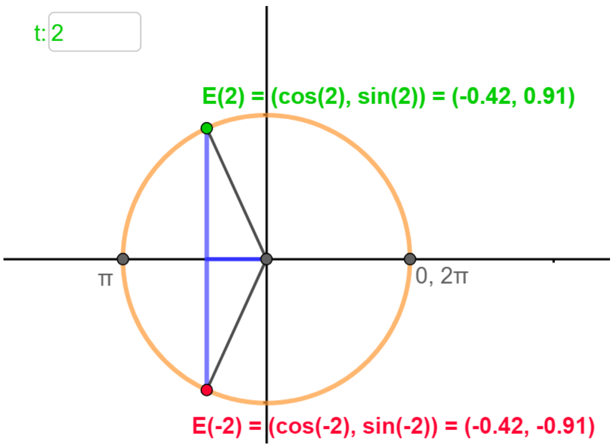
- Ordinata točke $E\ (t)$ naziva se *sinus broja* t i označava se $\sin\ (t)$, na taj je način definirana funkcija $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto \sin t$.
- Apscisa točke $E\ (t)$ naziva se ko*sinus broja* t i označava se $\cos\ (t)$, na taj je način definirana funkcija $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto \cos t$.
- Ordinata točke T naziva se *tangens broja* t i označava se $\text{tg}\ (t)$.
- Apscisa točke C naziva se *kotangens broja* t i označava se $\text{ctg}\ (t)$.



2.2.3 Definiranje trigonometrijskih funkcija

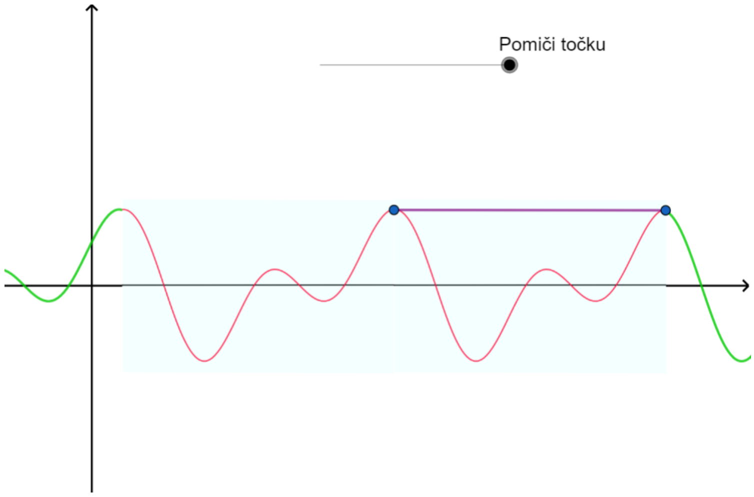
Iako učenici uviđaju drugačiju definiciju trigonometrijskih funkcija od onih koje su naučili u drugom razredu, nastavnik može lako opravdati nove definicije. Naime, ako se pogleda pravokutni trokut $ODE(t)$, njegova je hipotenuza duljine 1, a kut kod vrha O je t. Prema definiciji trigonometrijskih funkcija iz drugog razreda slijedi da je $\sin t = \frac{|DE(t)|}{1} = |DE(t)| = \sin t$. Analogno bi se pokazalo za ostale trigonometrijske funkcije.
Učenici mogu samostalno na tabletima, mobitelima ili osobnim računalima proučiti drugi aplet sličan prethodnom u kojem su naznačene i vrijednosti pojedinih trigonometrijskih funkcija. Pomicanjem točke $E(t)$ po brojevnoj kružnici trebaju odrediti predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima. Rješenja mogu provjeriti klikom na *Pokaži predznake*, gdje se onda pokaže tablica predznaka.

Prije obrade grafova funkcija, dobro je učenike upoznati sa nekim od brojnih svojstava trigonometrijskih funkcija. U aktivnosti *Svojstva trigonometrijskih funkcija* proučit će se parnost i neparnost te periodičnost funkcija. U apletu kojeg se može vidjeti na slici 2.2.4 učenici mogu u tekstualni okvir za *t* upisivati proizvoljan realan broj i tako mijenjati položaj točke $E(t) = (\cos t, \sin t)$ na kružnici te njoj simetrične točke $E(-t) = (\cos(-t), \sin(-t))$ obzirom na *x* os. Dobro je prikazivati vrijednosti s većim brojem decimala kako učenici ne bi dobili pogrešan dojam o vrijednostima pojedinih brojeva, primjerice broja π. Trebaju uočiti da se apscise navedenih točaka podudaraju, dok su im ordinate suprotnih predznaka, a iz toga slijedi da je sinus neparna, a kosinus parna funkcija. Zatim im je postavljeno pitanje koje ih navodi da iz definicije tangensa i kotangensa kao omjera funkcija sinus i kosinus te kosinus i sinus odgovore da su tangens i kotangens neparne funkcije.



2.2.4 Parnost i neparnost

Svojstvo periodičnosti funkcije učenike može asocirati na pojave koje se vide i u svakodnevnom životu poput vrtnje Zemlje oko Sunca ili titranje tijela na elastičnoj opruzi s kojim se susreću i u fizici. Tako se u aktivnosti prvo može naći interaktivan aplet prikazan na slici 2.2.5 kojeg učenici mogu proučiti pomicanjem klizača.



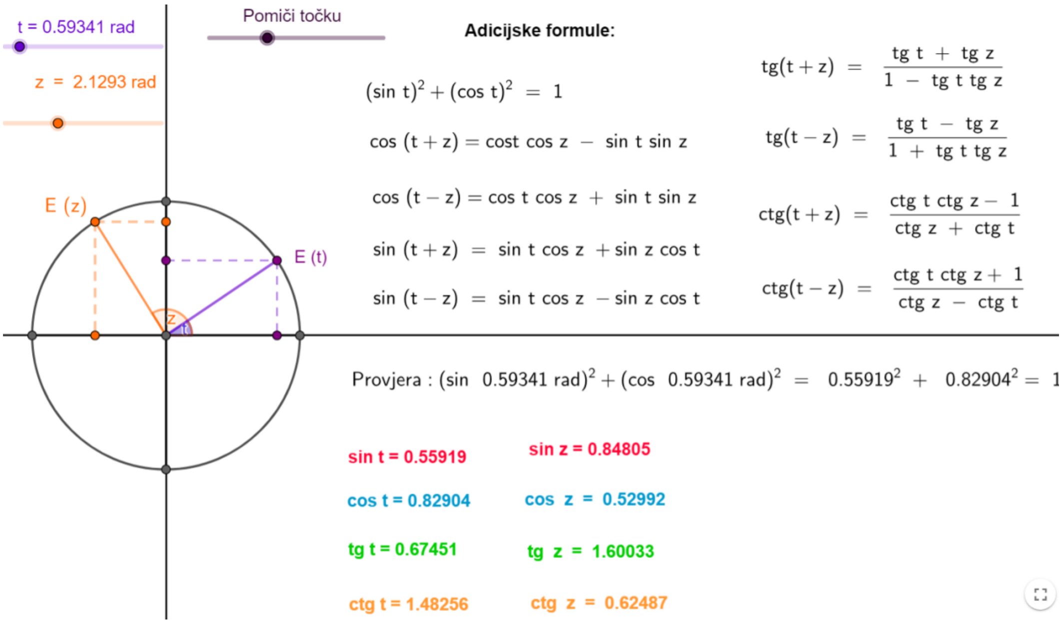
2.2.5 Periodičnost funkcije

Korisno je uputiti učenike na promatranje pomicanja segmenta jer to znači da se promatra vrijednost funkcije u točki i vrijednost funkcije u pomaknutoj točki. Ispod apleta nalazi se kratak video koji prikazuje Zemljinu rotaciju i revoluciju te učenici mogu odgovoriti na pitanje koliki bi bio njihov temeljni period ako znaju da je to najmanji pozitivan period. Nakon toga u novom apletu mogu pronaći razne grafove kojima treba odrediti temeljne periode, a pri samom kraju aktivnosti, navedeno da su temeljni periodi funkcija sinus i kosinus 2π, a za tangens i kotangens π što se može vidjeti iz apleta.

U poglavlju *Trigonometrijske funkcije* dodana je i tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija u prvom kvadrantu.

2.2.3 Trigonometrijski identiteti

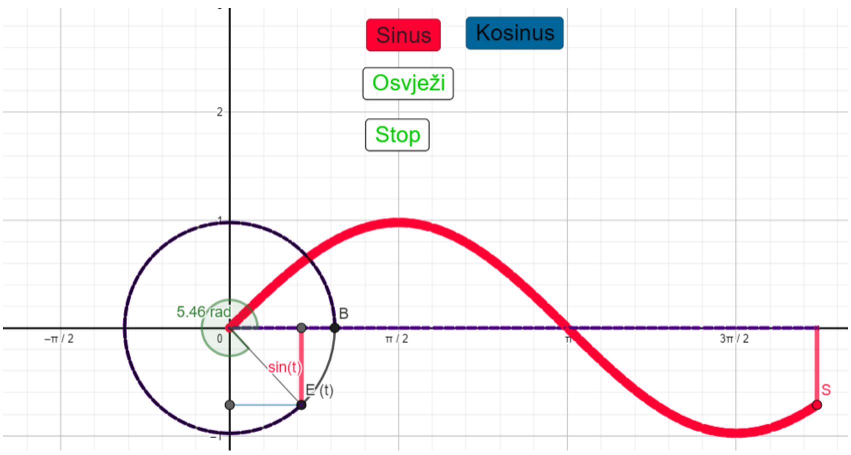
U ovom poglavlju je napravljena aktivnost u čijem apletu prikazanom na slici 2.2.6 učenik može pomičući klizače vidjeti adicijske formule, formule redukcije te formule dvostrukog kuta. Istaknuti su kutovi t i z te se mijenjanjem mjera tih kutova pokazuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Kako bi se učenik uvjerio u ispravnost danih jednakosti, u formule može uvrstiti dane vrijednosti.



2.2.6 Trigonometrijski identiteti

2.2.4 Grafovi trigonometrijskih funkcija

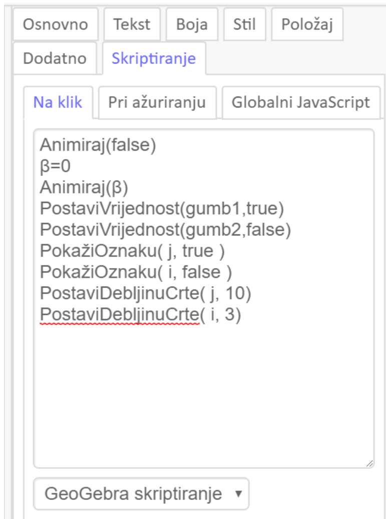
Kod obrade grafova trigonometrijskih funkcija GeoGebra najviše dolazi do izražaja. U ovom poglavlju napravljene su tri aktivnosti: *Nastajanje sinusoide i kosinusoide*, *Nastajanje tangensoide i kotangensoide* te *Grafovi trigonometrijskih funkcija*. U prvoj je postavljen aplet prikazan na slici 2.2.7 u kojem učenik klikom na gumb *Sinus* ili *Kosinus*, pokreće „odmatanje“ jedinične brojevne kružnice kako bi dobio sinusoidu ili kosinusoidu, tj. graf funkcije sinus i kosinus oblika $f(x) = \sin x$ odnosno $f(x) = \cos x$, a na kraju animacije se prikazuje i preostali dio grafova.



2.2.7 Nastajanje grafa funkcije sinus

Pritiskom na gumb *Osvježi*, aplet se vraća u početno stanje, dok gumb *Stop* služi kako bi zaustavili animaciju te bolje proučili što se događa s grafom. Za provođenje animacije, korišteni su tragovi objekata, alati *Klizač, Potvrdni okvir* te *Gumb* dan na slici 2.2.8. Kod alata *Gumb* korišteno je GeoGebra skriptiranje[8]. Primjer jednog skriptiranja može se vidjeti na slici 2.2.9 za gumb *Sinus*.

2.2.8 Alat Gumb



2.2.9 GeoGebra skriptiranje

U ovoj aktivnosti ispod apleta napravljen je kviz s ponuđenim pitanjima otvorenog tipa i višestrukog izbora u kojem učenici proučavajući grafove trebaju odrediti koordinate točke $E\ (x)$ sa brojevne kružnice, a zatim koordinate točaka S i K čijim tragovima se dobivaju sinusoida i kosinusoida. Također odgovaraju na pitanja o omeđenosti sinusa i kosinusa, temeljnom periodu te parnosti i neparnosti. Ova aktivnost može se provesti na satu uz pomoć nastavnika, frontalnom ili diferenciranom nastavom, a pogodna je i za istraživanje te vježbu izvan škole. Tako je u GeoGebra grupi ova aktivnost postavljena za domaću zadaću što je prikazano slikom 2.2.10. Članovi grupe su trebali proučiti materijal *Definicije trigonometrijskih funkcija* iz drugog poglavlja, a zatim odgovoriti na pitanja iz domaće zadaće. Nakon isteka roka predaje, zadatke se vrednovalo uz povratnu informaciju o uspjehu.

[8] GeoGebra skriptiranje, dostupno na https://wiki.geogebra.org/hr/Skriptiranje i https://www.geogebra.org/m/eehF54nU#chapter/109689 (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

2.2.10 Domaća zadaća u GeoGebra grupi

Na sljedećem nastavnom satu, nastavnik može s učenicima ponovno proći kroz zadaću i pritom diskutirati o rješenjima. U ovoj aktivnosti se mogu uočiti sljedeća svojstva trigonometrijskih funkcija. U tablici 2.2.4.1 dana su svojstva za funkciju $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$.

Funkcija sinus	**Funkcija kosinus**
Nultočke su $k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.	Nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.
Poprima vrijednosti na intervalu $[-1, 1]$.	Poprima vrijednosti na intervalu $[-1, 1]$.
Funkcija je neparna pa joj je graf centralno simetričan obzirom na ishodište.	Funkcija je parna pa joj je graf osno simetričan obzirom na $y-$os.
Maksimum funkcije je 1, a postiže se za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.	Maksimum funkcije je 1, a postiže se za $x = 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.
Minimum funkcije je -1, a postiže se za $x = \pi + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.	Minimum funkcije je -1, a postiže se za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.
Funkcija je periodična s periodom 2π.	Funkcija je periodična s periodom 2π.

2.2.4.1 Svojstva funkcija sinus i kosinus

U drugoj aktivnosti *Nastajanje tangensoide i kotangensoide* u apletu je korišten alat *Gumb* imenovan s *Tangens, Kotangens, Osvježi* i *Stop*. Pritiskom na gumb *Tangens* ili *Kotangens* prikazuje se odmotavanje jedinične brojevne kružnice pomoću tragova točaka tako da se prvo dobije graf funkcije tangens ili kotangens na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, pri čemu treba istaknuti da funkcija tangens na tom intervalu nije definirana u $\frac{\pi}{2}$, a kotangens u 0 i π . Zatim se crta ostatak grafa. Graf funkcije tangens naziva se tangensoida, a graf funkcije kotangens kotangensoida. Ispod apleta nalazi se kviz u kojem se ispituje koliki je temeljni period funkcije, monotonost, točke u kojima funkcija nije definirana te se pita kako se nazivaju pravci paralelni s *y* – osi koji prolaze točkama u kojima funkcija nije definirana. Riječ je o *asimptotama* s kojima se učenici susreću još u drugom razredu srednjih škola prilikom obrade eksponencijalne i logaritamske funkcije, tako da im ovaj pojam ne bi trebao biti nepoznat. Tijekom rješavanja kviza učenici nakon svakog odgovorenog pitanja mogu provjeriti točnost svojih rješenja čime automatski dobivaju povratnu informaciju jesu li određeno gradivo savladali. Za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $f(x) = \operatorname{ctg} x$ uočavaju se svojstva iz tablice 2.2.4.2.

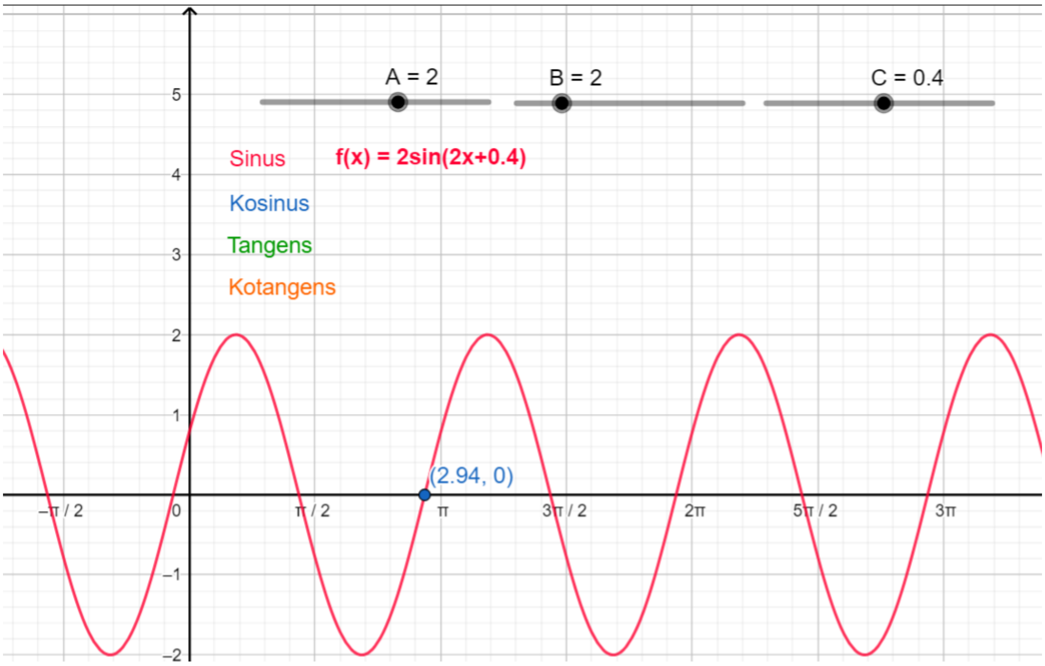
Funkcija tangens	**Funkcija kotangens**
Nultočke su $k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.	Nultočke su $\frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.
Asimptote funkcije su pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.	Asimptote funkcije su pravci $x = k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}$.
Funkcija je neparna pa joj je graf simetričan obzirom na ishodište.	Funkcija je neparna pa joj je graf simetričan obzirom na ishodište.
Funkcija je periodična s periodom π.	Funkcija je periodična s periodom π.

2.2.4.2 Svojstva funkcija tangensa i kotangensa

Nakon što se obrade svojstva trigonometrijskih funkcija proučavanjem sinusoide, kosinusoide, tangensoide i kotangensoide, u trećoj se aktivnosti *Grafovi trigonometrijskih funkcija* promatraju grafovi općenitog oblika, na primjer $f(x) = A\sin(Bx + C)$, gdje je A *amplituda,* B *kružna frekvencija*, a C *fazni pomak*, što se vidi sa slike 2.2.11.

Kliknite na gumb odgovarajuće trigonometrijske funkcije.
Primjerice, crveni graf predstavlja funkciju sinus oblika f(x) =Asin(Bx+C), pri čemu je A ***amplituda***, B ***kružna frekvencija***, C ***fazni pomak***. Plavi graf predstavlja funkciju kosinus, zeleni funkciju tangens, a narančasti funkciju kotangens.

Pomicanjem klizača A, B i C promotrite što se događa sa pojedinim grafom. Istaknuta točka na grafu može pomoći kod pronalaska nultočaka te minimuma i maksimuma funkcije.



2.2.11 Grafovi trigonometrijskih funkcija

U ovom apletu pritiskom na odgovarajuću trigonometrijsku funkciju prikazuje se njen graf, a mijenjajući vrijednosti na klizačima A, B i C mijenja se izgled grafa.

Nakon što nastavnik s učenicima obradi crtanje grafova, prilikom uvježbavanja ove nastavne jedinice crteže može pokazati i u ovom apletu. Nakon toga se u razredu provodi diskusija tako što nastavnik mijenja vrijednosti A, B i C, a učenici uočavaju što se događa sa grafovima kada se određeni brojevi smanjuju odnosno povećavaju. Kada se A mijenja, mijenjaju se i minimalne i maksimalne vrijednosti funkcija sinus i kosinus, kada se B mijenja, graf se širi ili sužava po x – osi jer se tada mijenja period funkcije, kada C povećavamo, graf se translatira za C ulijevo, a kada ga smanjujemo, graf se translatira udesno za C.

2.2.5 Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

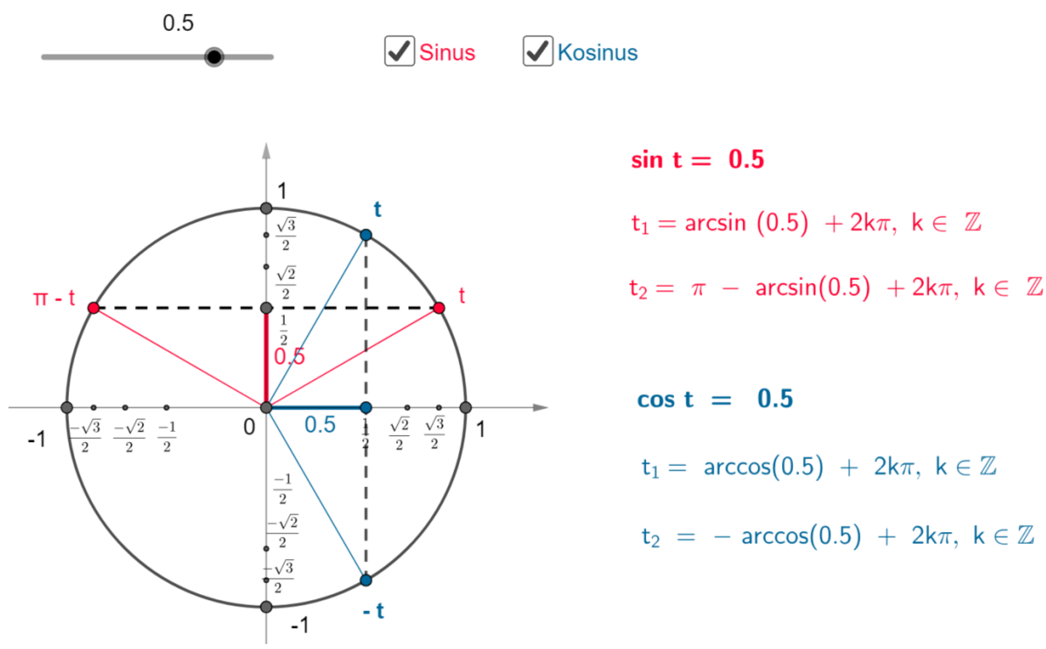
Trigonometrijske jednadžbe su jednadžbe u kojima je nepoznanica argument trigonometrijske funkcije. Širok je spektar tipova trigonometrijskih jednadžbi pa tako i način njihovog rješavanja. Neke od podjela su na osnovne jednadžbe, jednadžbe koje se svode na kvadratne jednadžbe, homogene jednadžbe, linearne trigonometrijske jednadžbe i ostale. Uglavnom se rješavaju putem brojevne kružnice ili pomoću grafa trigonometrijskih funkcija.

Ono što je bitno napomenuti jest da je za rješavanje jednadžbi kao što je na primjer $\cos t = -\frac{1}{2}$ u kojima se za zadanu vrijednost funkcije mora naći odgovarajući broj, važno znati i inverze trigonometrijskih funkcija. Pošto su sinus, kosinus, tangens i kotangens periodične funkcije, one nisu bijekcije pa uzimamo restrikcije funkcija na određenim intervalima na kojima bijekcija postoji. Tu se dolazi do pojmova *arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens i arkus kotangens*. Pri tome $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}$.

U ovom poglavlju u aktivnosti *Trigonometrijske jednadžbe* prikazani su apleti koji učenicima mogu poslužiti za provjeru rješenja trigonometrijskih jednadžbi te ukazati na jednako bitnu geometrijsku interpretaciju rješenja. U prvom apletu danom na slici 2.2.12 za zadanu jednadžbu je dovoljno upisati njenu lijevu i desnu stranu u odgovarajući tekstualni okvir te kliknuti na *Prikaži rješenja*. Pokazat će se grafovi i njihova sjecišta na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$.

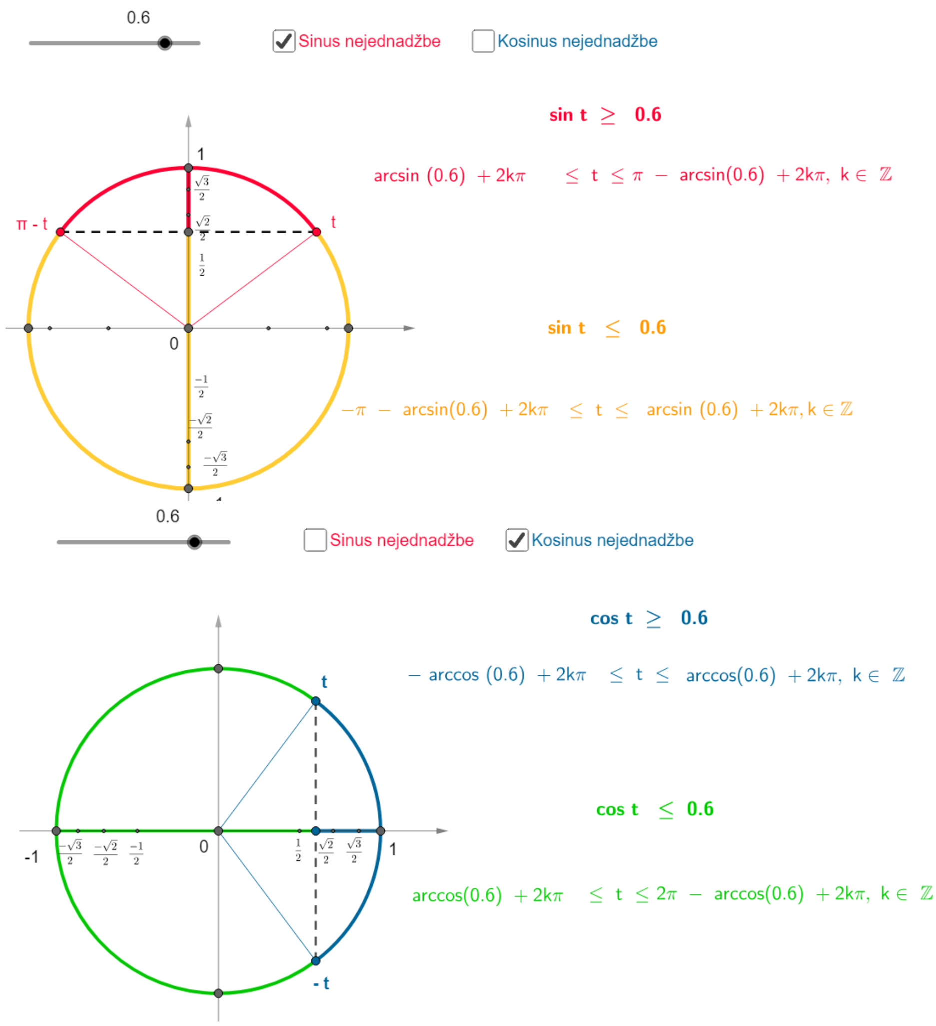
2.2.12 Grafičko rješavanje trigonometrijske jednadžbe

Drugi aplet sa slike 2.2.13 služi za rješavanje osnovnih trigonometrijskih jednadžbi oblika $\sin t = a, \cos t = a$. Klikom na potvrdni okvir *Sinus* ili *Kosinus* prikazuju se rješenja jednadžbi te odgovarajuća animacija na brojevnoj kružnici koja se mijenja pomičući klizač.



2.2.13 Trigonometrijske jednadžbe na brojevnoj kružnici

Trigonometrijske nejednadžbe se rješavaju na sličan način kao i jednadžbe. U aktivnosti *Trigonometrijske nejednadžbe* u apletu sa slike 2.2.14 su prikazani osnovni oblici nejednadžbi tipa $\sin t \geq a$, $\sin t \leq a$, $\cos t \geq b$ i $\cos t \leq b$. Pomičući klizač, na brojevnoj kružnici se prikazuju svi brojevi veći i jednaki ili manji i jednaki od danog broja. Na ovaj način učenicima može postati vizualno jasno što zapravo tražimo kada rješavamo trigonometrijske nejednadžbe.



2.2.14 Trigonometrijske nejednadžbe na brojevnoj kružnici

2.3 Nastavni sat : Grafovi funkcija sinus i kosinus

Ova nastavna jedinica je osmišljena tako da se upotrebom e – udžbenika[9] uvedu grafovi funkcija sinus i kosinus. Ukoliko je razred opremljen tabletima ili osobnim računalima, učenici mogu u paru proučavati dani e – udžbenik uz nastavnikovo navođenje.

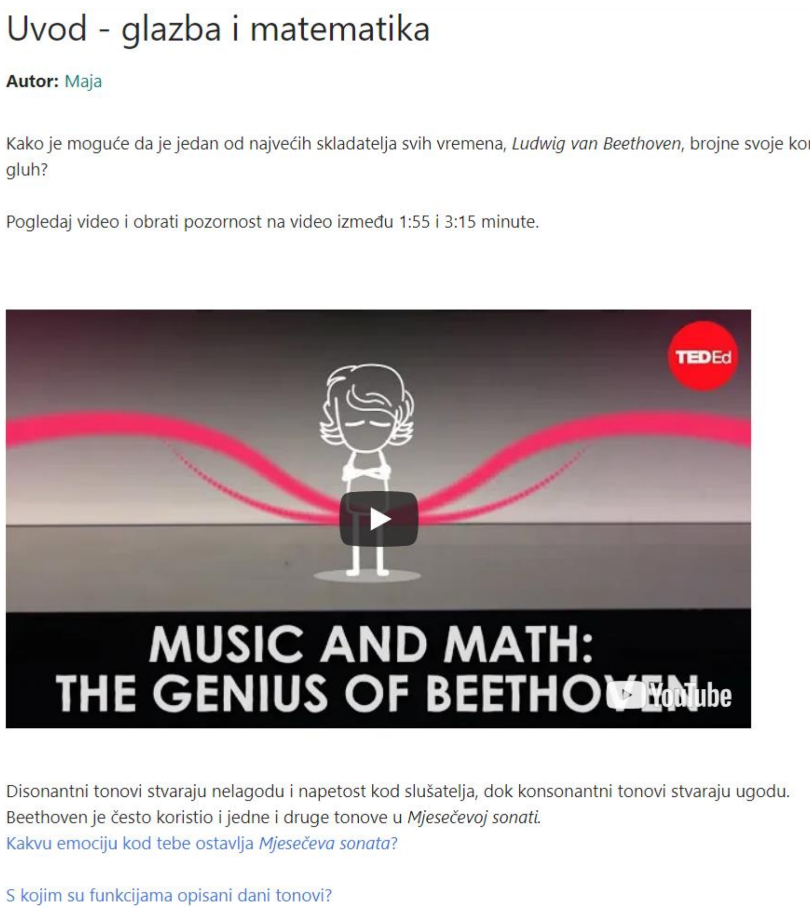
Glavni cilj ovog nastavnog sata jest crtanje grafova funkcija sinus i kosinus. Učenici će primjenjivati definiciju trigonometrijskih funkcija prilikom prikaza odmatanja brojevne kružnice u GeoGebri. Primjenjivat će parnost i neparnost te periodičnost funkcija prilikom određivanja nultočaka i ekstrema funkcija sinus i kosinus te prilikom crtanja grafova tih funkcija. Razvijat će vještinu proučavanja promjene grafa kada se mijenjaju amplituda, kružna frekvencija te fazni pomak. Koristeći korake konstrukcije, crtat će grafove funkcije sinus. Učenici će također razvijati sustavnost u radu, stvoriti pozitivan stav prema matematici te će usvajati estetske vrijednosti.

Korišteni su kombinirani nastavni oblici i diferencirani u obliku individualnog rada te vizualne, verbalne metode, metode crtanja, analogije i heuristička nastavna metode. Nastavnik na satu otvara e – udžbenik *Grafovi funkcija sinus i kosinus* koji je podijeljen u četiri poglavlja koji čine logičku cjelinu od uvoda, metode otkrivanja crtanja grafa pa sve do učeničkog individualnog uvježbavanja te domaće zadaće.

U motivacijskom primjeru u uvodu prikazanom na slici 2.3.1 je napravljena korelacija s predmetom *Glazbene umjetnosti* preko videa[10] s hrvatskim prijevodom u kojem je zvuk prikazan grafom funkcije sinus koji učenike navodi na razmišljanje kako zapravo funkcija sinus izgleda te kako je nacrtati.

[9] E – udžbenik *Grafovi funkcija sinus i kosinus* dostupni na https://www.geogebra.org/m/sxfzur4p (Pristupljeno: kolovoz 2018.)

[10] Video dostupan na https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY (Pristupljeno: kolovoz 2018.)



2.3.1 Uvodni dio sata

U glavnom djelu sata su predviđene sljedeće aktivnosti iz e – udžbenika:

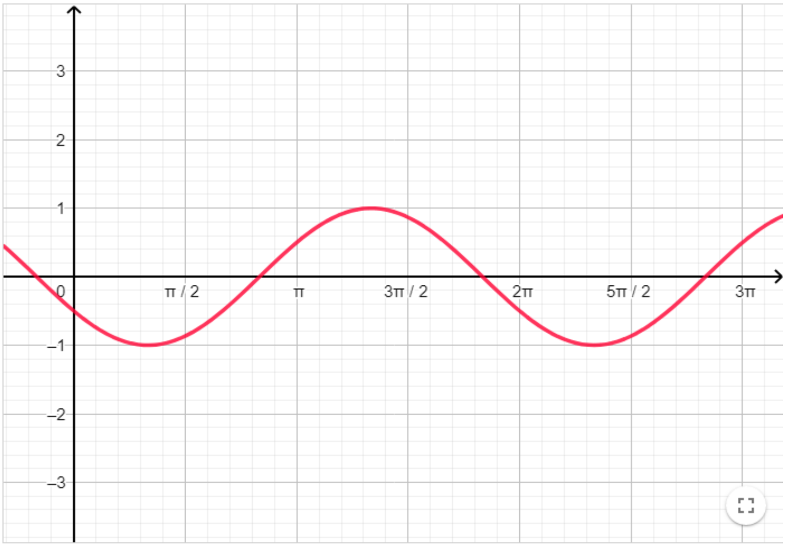
- *Odmatanje sinusoide i kosinusoide* u kojima se učenici prisjećaju svojstava trigonometrijskih funkcija kao i njihovih definicija prilikom nastajanja sinusoide i kosinusoide
- *Proučavanje grafova sinusoide i kosinusoide* kada se mijenjaju amplituda, kružna frekvencija te fazni pomak, uočavanje nultočaka funkcija te veze između grafa funkcije sinus i kosinus
- *Koraci konstrukcije grafa funkcije sinus* nakon čega nastavnik na ploči crta ponuđeni graf, a učenici isto crtaju u svoje bilježnice.

U fazi uvježbavanja, nastavnik u e – udžbeniku zadaje grafove koje učenici redom crtaju u bilježnice, a zatim crteže prikazuje na apletu. Prilikom samog crtanja, nastavnik obilazi učenike te u slučaju učeničkih nedoumica, nastavnik može graf nacrtati na ploči, a inače ih prikazuje u e – udžbeniku što znatno štedi vrijeme koje nastavnik koristi kako bi svakom učeniku stigao prići i pogledati njegov napredak.

U završnom dijelu sata nastavnik na ploču zapisuje lozinku s kojom učenici mogu pristupiti razrednoj GeoGebra grupi. U njoj je objavljen e – udžbenik sa sata te domaća zadaća dana na slici 2.3.2 koju moraju riješiti do idućeg puta. Riječ je o pridruživanju ponuđenih funkcija odgovarajućim grafovima. Ukoliko ostane vremena, nastavnik prikazuje domaću zadaću koju učenici mogu početi rješavati do kraja sata.

Grafovima prikazanim na slikama pridruži odgovarajuće funkcije:

$f(x) = \sin 2x$
$g(x) = -\cos(-x + \frac{\pi}{3})$
$h(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$
$p(x) = -\cos(3x)$.



Označite svoj odgovor

- ☐ f(x)
- ☐ g(x)
- ☐ h(x)
- ☐ p(x)

2.3.2 Domaća zadaća u GeoGebra grupi

LITERATURA

1. http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/strukovne/matematika-2.pdf (srpanj 2018.)
2. http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf (srpanj 2018.)
3. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred tehničkih škola,* Element, Zagreb, 1998.
4. S. Varošanec, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred tehničkih škola,* Element, Zagreb, 1998.
5. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, 1. dio, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno – matematičke gimnazije*, Element, Zagreb, 2014.
6. G. Isakovič Gleizer, *Povijest matematike za školu,* Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.
7. N. Antončić, E. Špalj, V. Volenec, *Matematika 3*, Školska knjiga, Zagreb, 2006.
8. http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf (srpanj 2018.)
9. https://www.geogebra.org/m/WmZeN8vW (srpanj 2018.)
10. https://pogledkrozprozor.wordpress.com/2009/03/31/mathlet-interaktivni-digitalni-materijal-namijenjen-samostalnom-ucenju/ (srpanj 2018.)
11. http://mis.element.hr/fajli/348/19-04.pdf (srpanj 2018.)
12. http://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs.pdf (kolovoz 2018.)

SAŽETAK

U ovom diplomskom radu dan je prikaz trigonometrije u GeoGebri u drugom i trećem razredu srednje škole. Kako većini učenika trigonometrijske funkcije koje se poučavaju u trećem razredu predstavljaju veliki problem, upravo je na to gradivo u radu stavljen fokus.

U prvom dijelu rada kroz postojeći i predstojeći kurikulum se trigonometriju smješta u razrede ovisno o fondu sati u pojedinim srednjim školama. Predstavlja se trigonometrija kroz povijest, daje se kratak uvid u poučavanje trigonometrije nekad i danas, a zatim se ističu GeoGebrine karakteristike, e – udžbenik i GeoGebra grupa.

U drugom dijelu rada se uz pomoć GeoGebre obrađuju trigonometrijski omjeri iz drugog razreda te su opisani neki od glavnih GeoGebrinih alata poput klizača, potvrdnog okvira i teksta koji su se u radu najčešće upotrebljavali. Nakon toga se daje opis e – udžbenika *Trigonometrijske funkcije* u kojem se obradio veći dio trigonometrije trećeg razreda. U radu je opisano kako se pojedini apleti u e – udžbeniku koriste, koja je njegova svrha u nastavi te kako se njime mogu služiti nastavnici i učenici u školi i izvan nje. Na kraju poglavlja je opisan primjer nastavnog sata *Grafovi funkcija sinus i kosinus* obrađenog u GeoGebri putem e – udžbenika izrađenog za taj sat.

Ovaj rad je primjeren nastavnicima koji žele poučavanje trigonometrije predstaviti na drugačiji način. Raznim animacijama, videima i kvizovima može potaknuti učenikovo zanimanje za predmet, navesti učenika na samostalno učenje i istraživanje, stvoriti pozitivniji stav učenika prema matematici te pokazati kako matematika ne mora biti teška i da može biti izrazito zanimljiva.

SUMMARY

This graduate thesis gives a presentation of trigonometry in GeoGebra in the second and the third grade of secondary school. Since the trigonometric functions taught in the third grade represent a problem for most students, they are put in the focus of this thesis.

In the first part of the thesis, the trigonometry is dealt with within the context of the existing and forthcoming curriculum in classes depending on the classroom timetable in some secondary schools. It also presents trigonometry through history, gives a brief insight into the teaching of trigonometry today and in the end it points out GeoGebra's characteristics, GeoGebraBook and GeoGebra Groups.

In the second part the trigonometric ratios of the second grade are dealt with through GeoGebra. It also describes some of the most important GeoGebra tools such as sliders, checkboxes and texts which were most frequently used in the thesis. This is followed by a description of the GeoGebraBook *Trigonometrijske funkcije* in which most of the trigonometry of the third grade is processed. The thesis describes how some applets are used in GeoGebraBook, the purpose of GeoGebra in teaching and how it can be used by teachers and students, in and outside the school. At the end of the chapter, there is an example of a teaching lesson *Sine and Cosine Graphs* processed in GeoGebraBook created specifically for that lesson.

The thesis is suitable for lecturers who want to approach teaching trigonometry in a different way. Various animations, videos, and quizzes can inspire students' interest in the subject, encourage students to study and research independently, create a positive attitude towards maths and show it doesn’t have to be difficult and it can even be extremely interesting.

ŽIVOTOPIS

Zovem se Maja Marasović. Rođena sam 23.2.1993. u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje sam stekla u OŠ Ivana Granđe, a paralelno sam završila i Osnovnu glazbenu školu Zlatka Grgoševića, smjer violina. Pohađala sam i maturirala u II. općoj gimnaziji u Zagrebu. Zatim sam upisala Prirodoslovno – matematički fakultet. 2016. godine sam upisala Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički.

U slobodno vrijeme radila sam različite studentske poslove, davala instrukcije iz matematike te sudjelovala u projektima vezanim uz Dan otvorenih vrata PMF-a na Matematičkom odsjeku. Sudjelovala sam na Znanstvenom pikniku na Velesajmu 2014. godine te na Večeri matematike gdje je u mojoj radionici naglasak bio na Micro:bit-ovima, u tzv. Escape room-u kod profesorice Tanje Soucie. Također sam izvodila nastavu matematike u centrima poduke za maturu.

PRILOG

Prilog 1

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Maja
1. kol 2018.

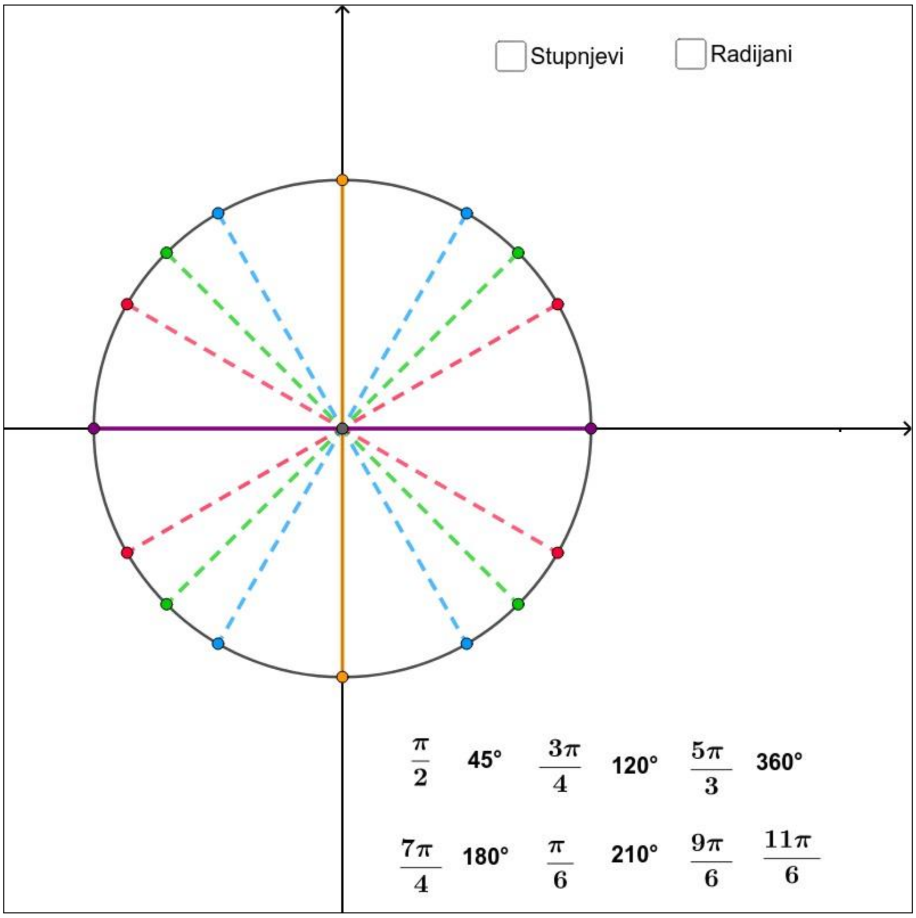
U ovom e – udžbeniku ćete pronaći materijale vezane uz *brojevnu kružnicu, trigonometrijske funkcije*, *trigonometrijske identitete*, *grafove* te *trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.*

Sadržaj

1 Kut i brojevna kružnica

1.1 Stupnjevi i radijani

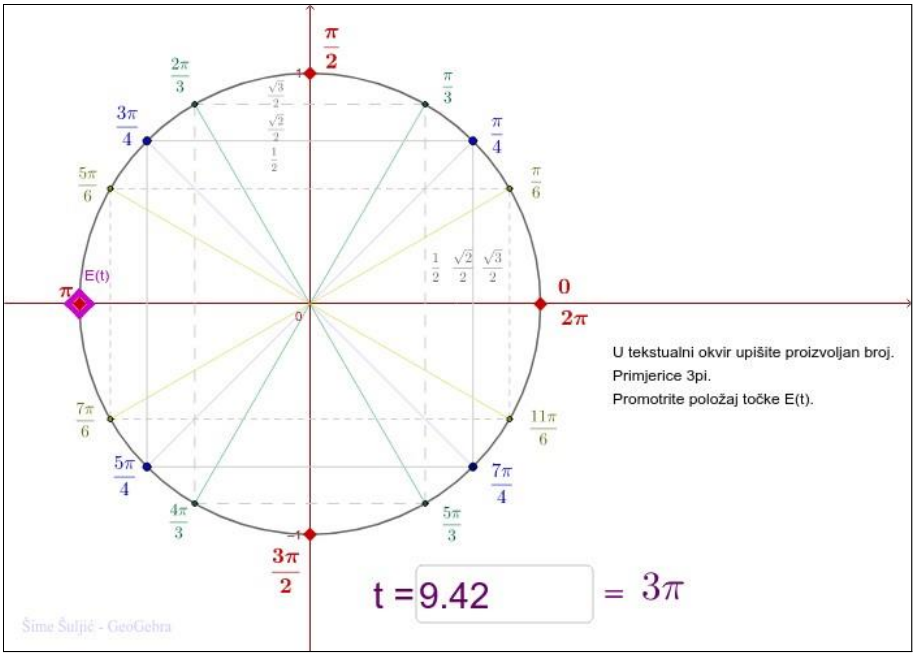
Prikazana je kružnica čija je prva zraka kuta pozitivni dio osi apscisa, a drugi se krak vrti u pozitivnom smjeru. U donjem desnom kutu ponuđene su mjere kutova u stupnjevima i radijanima. Povuci ih do željene pozicije na kružnici. Odgovore provjeri klikom na *Stupnjevi* ili *Radijani*.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/b8fr6ajs

1.2 Glavna mjera kuta

Ovaj aplet služi za provjeru vaših rješenja prilikom određivanja glavne mjere kuta u radijanima. Prikazana je brojevna kružnica na kojoj je istaknuta točka E (t). U tekstualno polje *t* =_______ U apletu upišite proizvoljan broj i promotrite položaj točke E (t).



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/k4tdwcmd

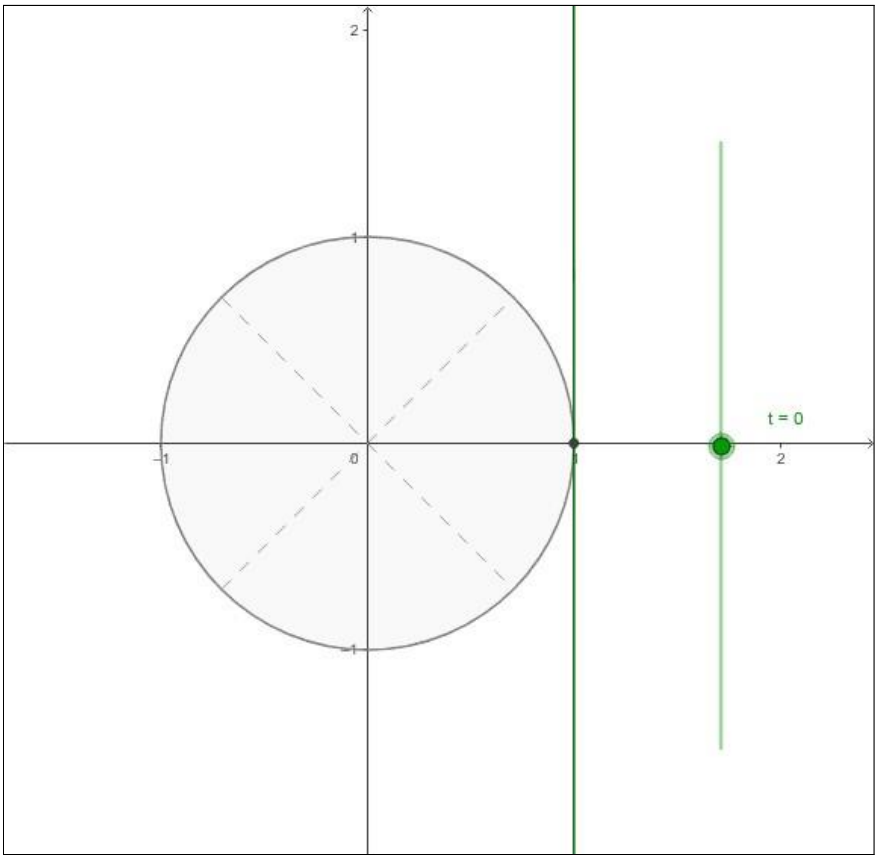
Za određivanje glavne mjere t' kuta t u radijanima koristimo formulu:

$t' = t - \left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi$.

1.3 Namatanje brojevnog pravca na brojevnu kružnicu

Brojevni pravac okomit na *x* - os koji prolazi točkom (1, 0) namatamo na kružnicu. Svakom realnom broju **t** sa brojevnog pravca tako je pridružena točka na brojevnoj kružnici. To preslikavanje se naziva **eksponencijalno** preslikavanje.

Kliknite na gumb za pokretanje animacije u donjem lijevom kutu apletu ili povlačite klizač **t**. Na kružnici će se istaknuti neke od točaka. Koja je veza među brojevima koji se nalaze u istoj točki? Uoči da prilikom namatanja **pozitivnog** dijela brojevnog pravca na kružnicu, smjer namatanja je **suprotan gibanju kazaljke na satu.**



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/nrnxqqfj

2 Trigonometrijske funkcije

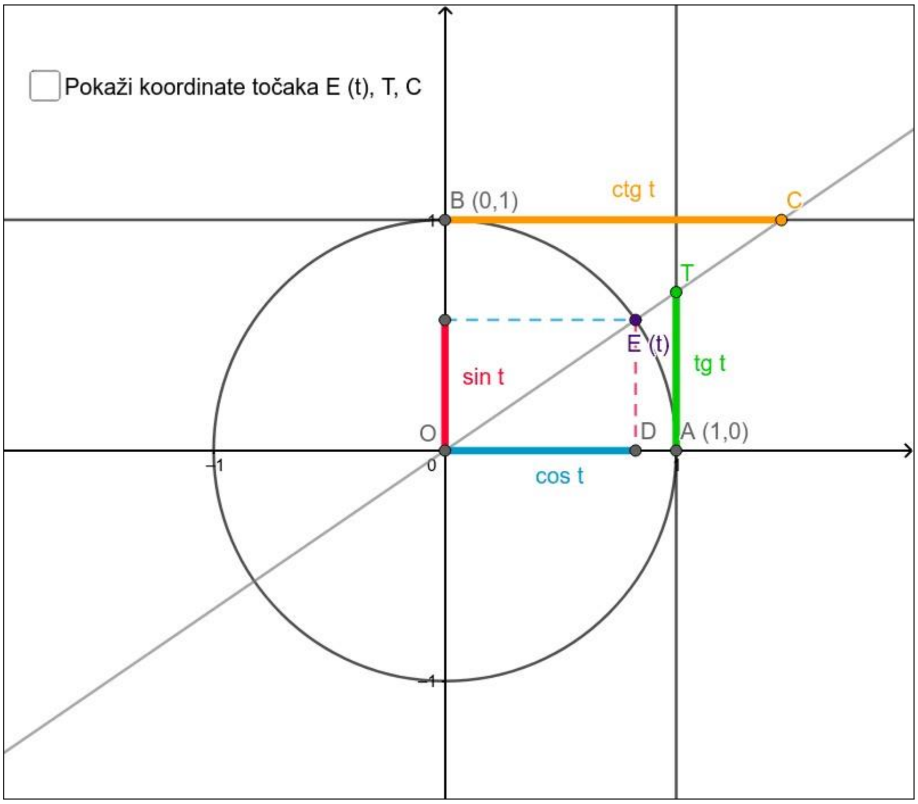
2.1 Definicija trigonometrijskih funkcija

Prvi nazivi za sinus i kosinus su *jiva* i *konjiva* te potječu još od starih Indijaca. *Jiva* na sanskrtu znači tetiva, a Arapi je prevode kao *džiba* (čitaj: džaib) te znači zaljev, pazuh.

Tangens u 16. stoljeću uvodi Thomas Finck što na latinskom znači odsječak tangente. Promotri sliku i odgovori:

Koje su koordinate točaka E (t), T, C?

Odgovor provjeri klikom na *Pokaži koordinate točaka E (t), T i C.* Nakon toga pročitaj tekst ispod apleta.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/apdfpkdq

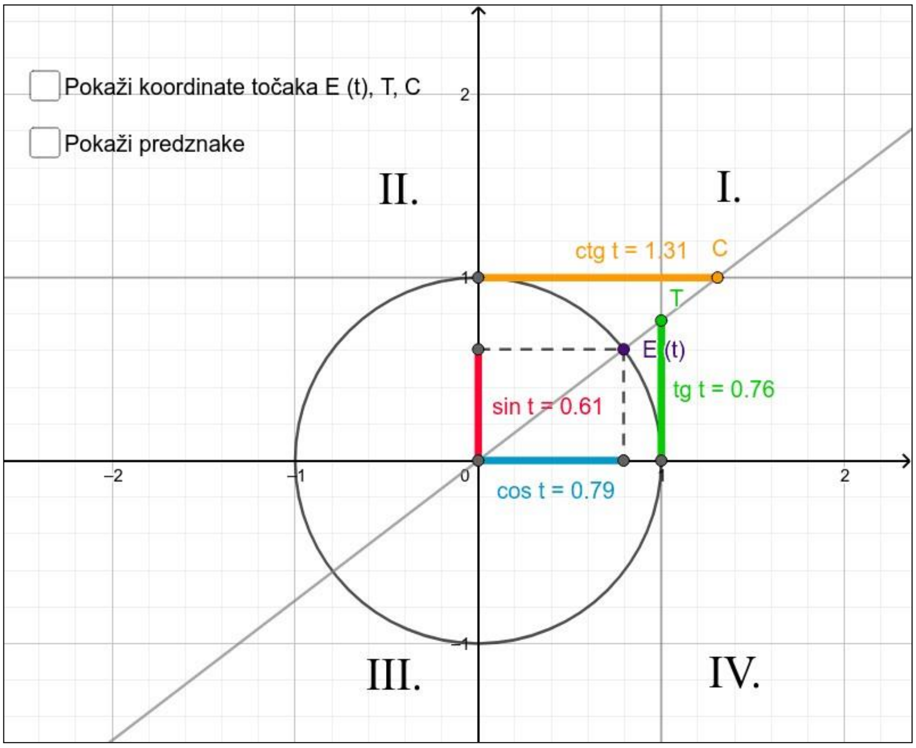
Ordinata točke E (t) zove se sinus broja t i označava se sin t.
Apscisa točke E (t) zove se kosinus broja t   i označava se cos t.
Ordinata točke T zove se tangens broja t i označava se tg t.
Apscisa točke C zove se kotangens broja t i označava se ctg t.

Za funkcije tangens i kotangens vrijedi također vrijedi:

$$tg\ t\ =\frac{sin\ t}{cos\ t},\ ctg\ t\ =\frac{cos\ t}{sin\ t}.$$

Predznaci trigonometrijskih funkcija

Pomiči točku **E (t)** i promotri vrijednost koordinate točke **E (t)** pa odredi predznake funkcije sinus i kosinus u I., II., III. i IV. kvadrantu. Isto napravi za funkciju tangens i kotangens promatrajući točke **T** i **C**. Odgovore provjeri klikom na Pokaži predznake.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/cku5rfs

2.2 Svojstva trigonometrijskih funkcija

Parnost i neparnost

Za funkciju kažemo da je **parna** ako vrijedi $f(-t) = f(t)$ dok je funkcija neparna ako vrijedi $f(-t) = f(t)$, za svaki t na kojem je f definirana.

Pr.1

$f(t) = t^2$

$f(-t) = (-t)^2 = t^2 = f(t)$; f je parna funkcija.

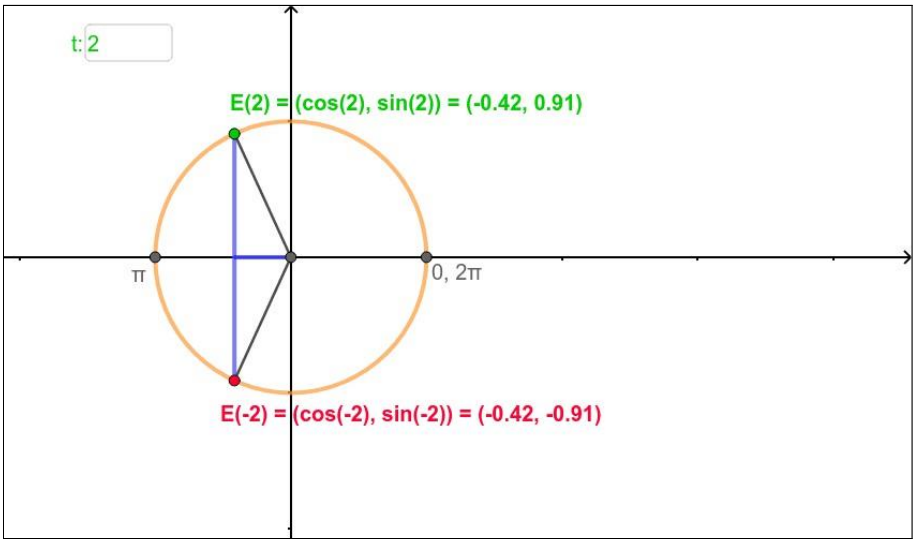
Pr. 2

$g(t) = t^3$ $g(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -g(t)$; g je neparna funkcija.

U apletu je prikazana brojevna kružnica na kojoj su istaknute točke **E (t) = (cos t, sin t)** i točka **E(-t) = (cos (-t), sin (-t))**, njoj simetrična točka obzirom na x os. U apletu je dan primjer za **t = 2**, gdje je prikazana točka **E (2) = (-0.42, 0,91)** i točka **E (-2) = (-0.42, -0.91)**.

Što je u koordinatnom zapisu ovih dviju točaka različito?

U tekstualni okvir **t:____** upiši proizvoljan broj te promotri kakve su vrijednosti apscise i ordinate točke **E (t)** i točke **E (-t)**. Što uočavaš?

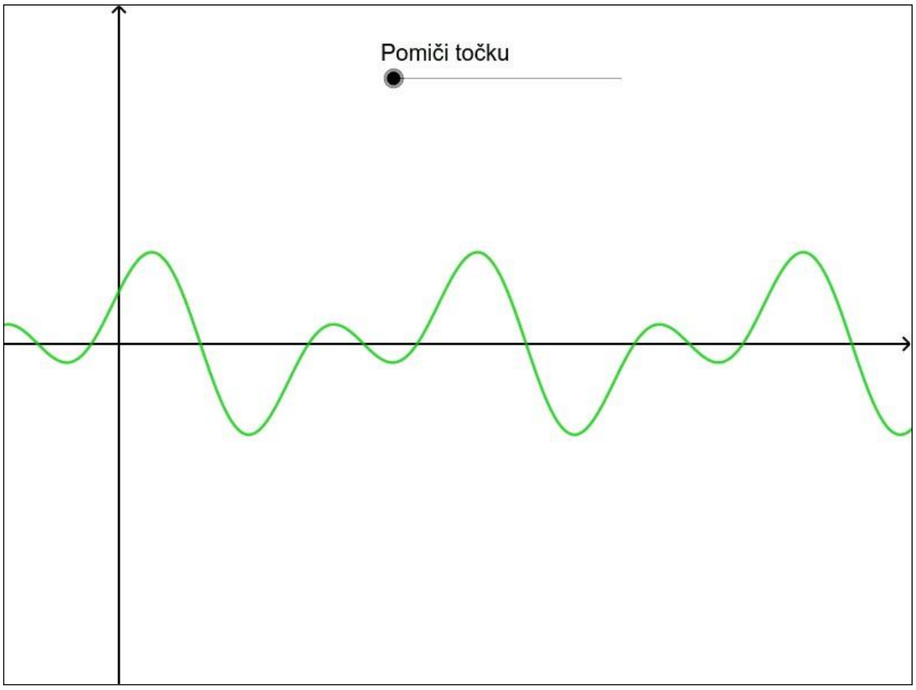


GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/g8xr4mfr

Apscise točaka *E (t)* i *E (-t)* se podudaraju, dok su im ordinate suprotnog predznaka. Stoga vrijedi: *sin (-t)* = **-** *sin t, cos (-t)* = *cos t* pa je **sinus neparna** funkcija, a **kosinus parna** funkcija.

Periodičnost

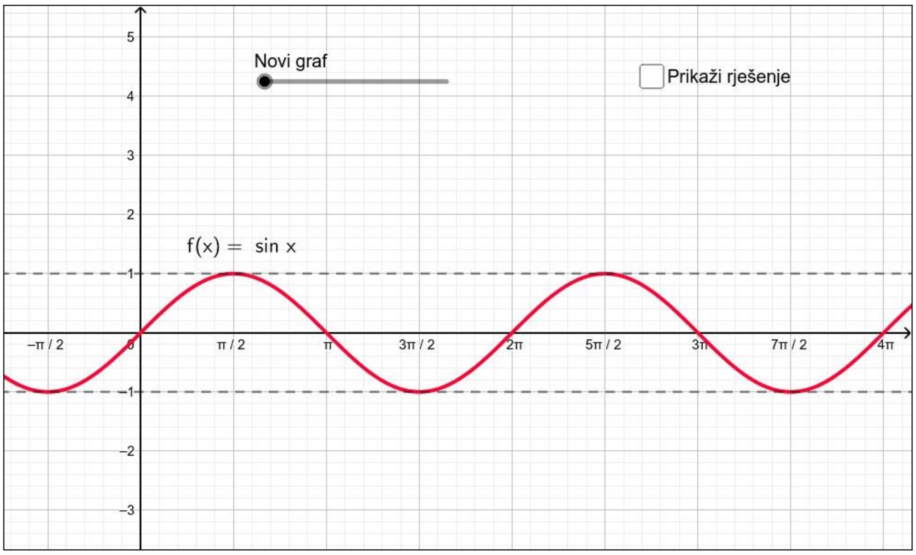
Pomiči točku i pogledaj sljedeći graf. Što bi za tebe bila *periodičnost*?



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/qs38gzeb

Periodičnost vrlo često možemo susresti u prirodi, primjerice kod plime i oseke, vrtnje Zemlje oko Sunca, promjena godišnjih doba, titranja tijela na elastičnoj opruzi itd. Takve pojave koje se pojavljuju u određenim vremenskim razmacima nazivamo oscilirajućima, cikličkima tj. *periodičnima*.

Najmanji pozitivan period naziva se *temeljni period.*
Funkcije čije se vrijednosti ponavljaju u određenim vremenskim razmacima su *periodične* funkcije.
Odredi temeljne periode sljedećih funkcija tako da pomičeš klizač *Novi graf.*
Rješenja provjeri klikom na *Prikaži rješenje.*



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/xjkqfr5g

U aktivnosti *Namatanje brojevnog pravca na brojevnu kružnicu* vidjeli smo da vrijedi $E\ (t) = E\ (t + 2k)$, za k cijeli broj. To povlači i da je $sin\ (t) = sin\ (t + 2k)$ i $cos\ (t) = cos\ (t + 2k)$.

Funkcije sinus i kosinus su periodične s temeljnim periodom $2\ \pi$, a funkcije oblika $f(t) = \sin\ (Bt + C)$ i $f(t) = cos\ (Bt + C)$ su također periodične s temeljnim periodom $\frac{2\ \pi}{B}$. Iz apleta možemo vidjeti da funkcija tangens (graf označen zelenom bojom) i kotangens (graf označen narančastom bojom) periodične s temeljnim periodom π. Funkcije oblika $f(t) = tg\ (Bt + C)$ i $f(t) = ctg\ (Bt + C)$ su periodične s temeljnim periodom $\frac{\pi}{B}$.

2.3 Tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija

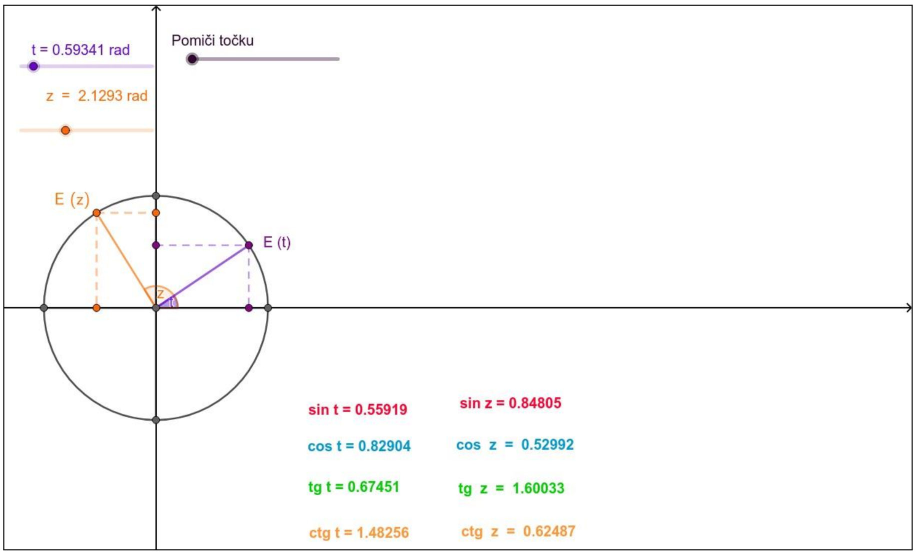
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\, t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/
$\mathrm{ctg}\, t$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/xkfru55 g

3 Trigonometrijski identiteti

3.1 Trigonometrijski identiteti

Pomičući točku pogledaj najvažnije identitete trigonometrijskih funkcija. Mijenjaj kutove *t* i *z* te se uvjeri u ispravnost identiteta tako da u formule uvrstiš odgovarajuće vrijednosti funkcija pri dnu apleta.



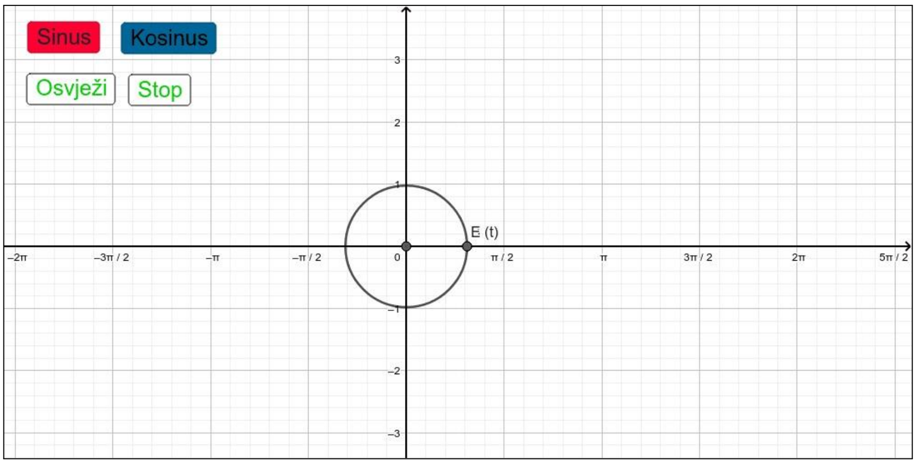
GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/xpgpdyq5

4 Grafovi trigonometrijskih funkcija

4.1 Nastajanje sinusoide i kosinusoide

Za crtanje grafa funkcije sinus, kliknite na gumb **Sinus**. Za crtanje grafa funkcije kosinus, kliknite na gumb **Kosinus**.

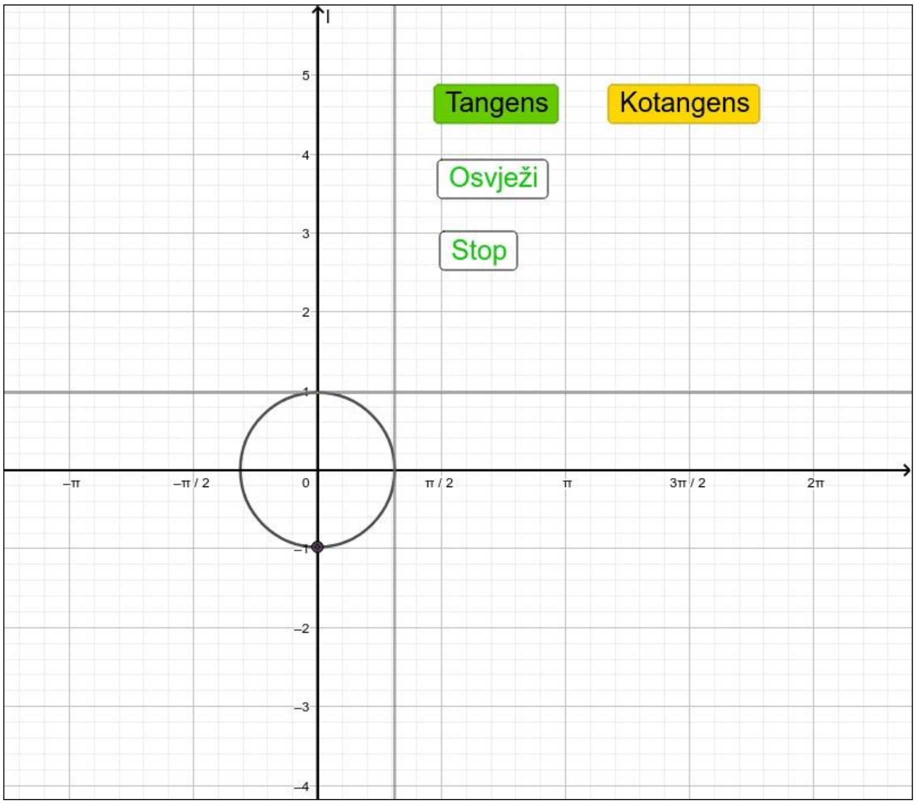
Kako biste zaustavili animaciju, kliknite na gumb **Stop**, a klikom na gumb **Osvježi**, vraćate se u početno stanje. Uz pomoć dobivenih grafova odgovorite na pitanja ispod apleta.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/gnchduzu

4.2 Nastajanje tangensoide i kotangensoide

Za crtanje grafa funkcije tangens, kliknite na gumb Tangens, pri čemu će graf biti obojan zelenom bojom, a za crtanje grafa funkcije kotangens, kliknite na gumb **Kotangens**, koji će biti obojan žutom bojom. Kako bi zaustavili animaciju, kliknite na gumb **Stop**, a klikom na gumb **Osvježi**, vraćate se u početno stanje. Uz pomoć dobivenih grafova odgovori na pitanja ispod apleta.



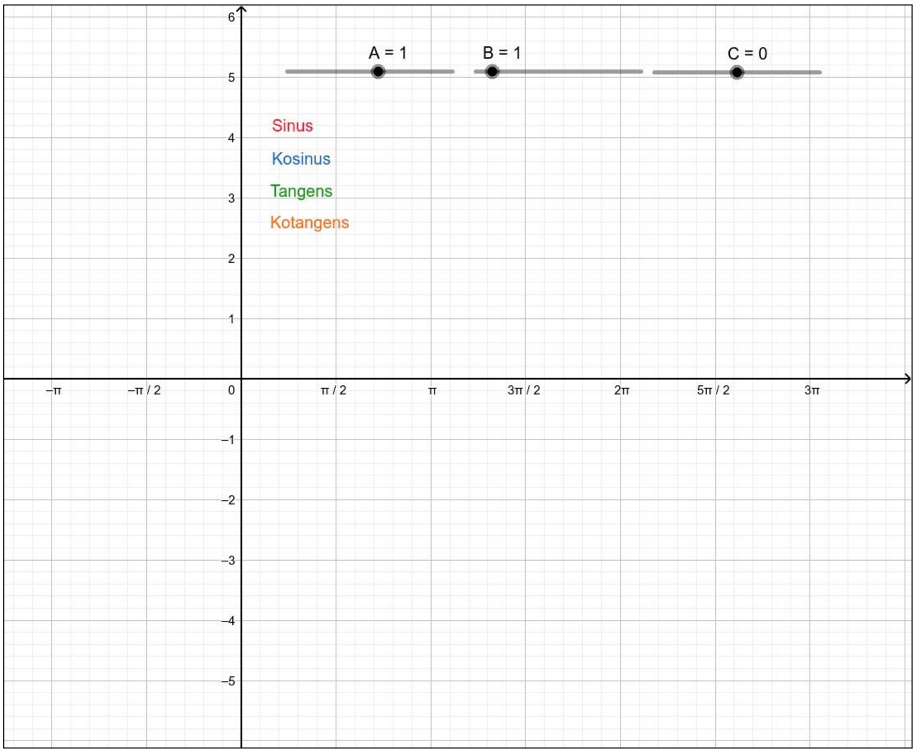
GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/vd28mnma

4.3 Grafovi trigonometrijskih funkcija

Kliknite na gumb odgovarajuće trigonometrijske funkcije.

Primjerice, crveni graf predstavlja funkciju sinus oblika $f(x) = A \sin (B x + C)$, pri čemu je A **amplituda**, B **kružna frekvencija**, C **fazni pomak**. Plavi graf predstavlja funkciju kosinus, zeleni funkciju tangens, a narančasti funkciju kotangens.

Pomicanjem klizača A, B i C promotrite što se događa sa pojedinim grafom. Istaknuta točka na grafu može pomoći kod pronalaska nultočaka te minimuma i maksimuma funkcije.



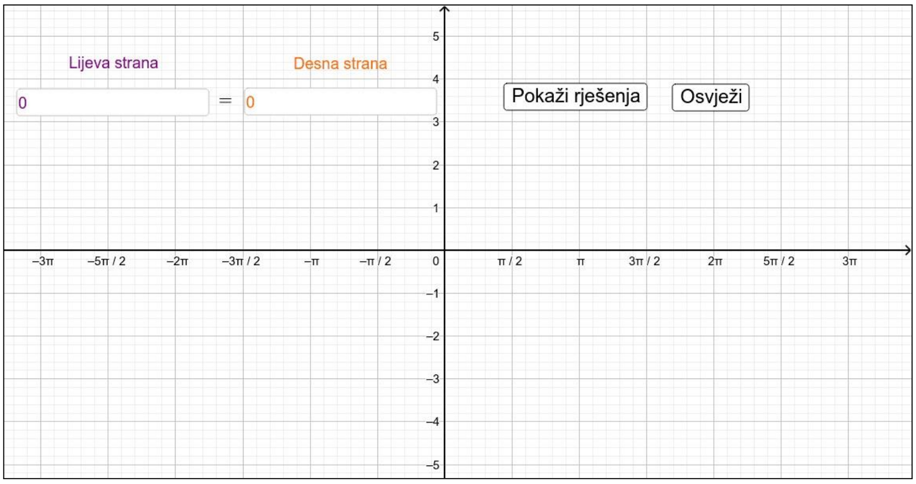
GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/bukdc3cx

5 Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

5.1 Trigonometrijske jednadžbe

Ovdje možete upisati trigonometrijsku jednadžbu i pogledati kako izgledaju njena rješenja određena grafičkim − putem na intervalu [3π, 3π] . Lijevu stranu trigonometrijske jednadžbe upišite u tekstualni okvir Lijeva strana, a desnu stranu jednakosti u Desna strana te kliknite na *Pokaži rješenja.*

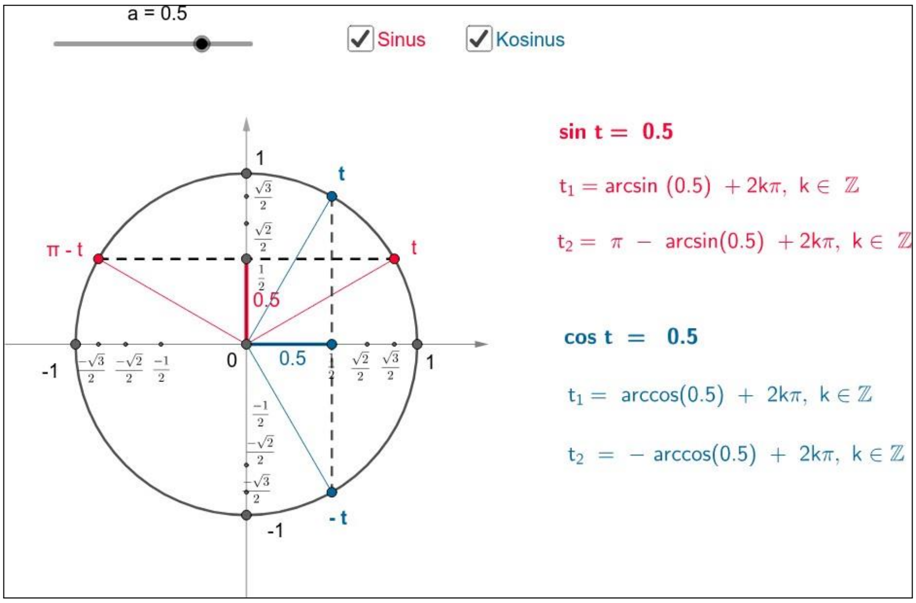
Za novu jednadžbu kliknite na *Osvježi*.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/nbkmqvez

Ovdje su prikazane osnovne trigonometrijske jednadžbe oblika sin t = a, cos t = a.

Klikom na Sinus ili Kosinus prikazuju se njihova rješenja. Uoči kako ta rješenja izgledaju na brojevnoj kružnici mijenjajući vrijednosti na klizaču.

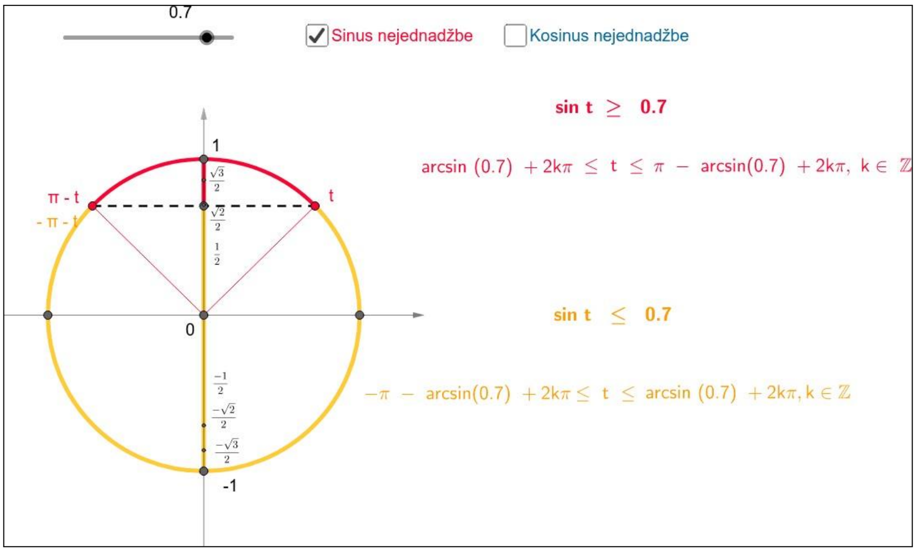


GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/c4jysy5y

5.2 Trigonometrijske nejednadžbe

Ovdje su prikazane osnovne trigonometrijske nejednadžbe oblika sin t ≥ a, sin t ≤ a, cos t ≥ b i cos t ≤ b. Klikom na Sinus nejednadžbe ili Kosinus nejednadžbe prikazuju se njihova rješenja.

Uoči kako ta rješenja izgledaju na brojevnoj kružnici mijenjajući vrijednosti na klizaču.



GeoGebra aplet, http://www.geogebra.org/m/t7t6nf9m

Reference

[1] https://www.geogebra.org/m/tj3m7npe