Problematika ekvipotentnosti skupova u školskoj matematici

Marijić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:032086

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Marijić

PROBLEMATIKA EKVIPOTENTNOSTI SKUPOVA U ŠKOLSKOJ MATEMATICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Dora Pokaz

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem se mentorici doc.dr.sc. Dori Pokaz i suvoditeljici prof.dr.sc. Sanji Varošanec na vodstvu i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.
Najveće hvala mojoj obitelji na neizmjernoj podršci tijekom studiranja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Ekvipotentnost u školi **3**
1.1 Skupovi kroz školovanje 3
1.2 Uvođenje ekvipotentnosti u srednjoj školi 5

2 Pregled osnovnih pojmova, relacija i metoda teorije skupova **18**
2.1 Ekvipotentni skupovi 20
2.2 Konačni i beskonačni skupovi 24
2.3 Prebrojivi i neprebrojivi skupovi 25
2.4 Kardinalnost skupova 28

3 Prebrojivost racionalnih brojeva **32**
3.1 Dijagonalni postupak 33
3.2 Calkin-Wilfovo stablo 34
3.3 Stern-Brocotovo stablo 37

4 Primjeri ekvipotentnih skupova **42**

Bibliografija **52**

Uvod

Još od antičkog doba matematičari su se bavili skupovima i idejom beskonačnosti. No, teorija skupova svoj procvat doživljava tek u drugoj polovici 19. stoljeća. Temelje teorije skupova postavio je njemački matematičar Georg Cantor (1845. - 1918.) te se smatra ocem teorije skupova. Cantor je radove o teoriji skupova objavljivao od 1871. do 1883., u kojima je definirao ekvipotentnost skupova i prebrojiv skup, dokazao ekvipotentnost skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$, uveo naziv i oznaku $\aleph_0$ (alef - nula), dokazao i prebrojivost skupa $\mathbb{Q}$ te prebrojivost algebarskih brojeva, uveo je oznaku $\sim$, dokazao da su prebrojivi skupovi najmanji beskonačni skupovi. Mnogi rođenjem teorije skupova smatraju 1873. godinu, kada je Cantor dokazao da je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv, odnosno da postoje beskonačni skupovi koji nemaju jednako mnogo elemenata. Tijekom razvoja teorije skupova javljali su se paradoksi, stoga se teorija skupova kao i svaka druga matematička teorija morala izgraditi zadavanjem aksioma. Za aksiomatizaciju teorije skupova zaslužni su E. Zermelo[1] i A. Fraenkel[2]. Kako je teorija skupova "mlada" grana matematike, pojedini dijelovi se još uvijek nadograđuju.

Tema ovog rada je problematika uvođenja ekvipotentnosti u školama. Prema članku [6] prošlo je oko 44 godine otkako je u 5. razred osnovne škole krenula generacija učenika koji su tada po prvi puta učili o skupovima, relacijama i funkcijama. Tadašnja reforma nastavnog programa matematike slijedila je stav da je suvremena nastava matematike zasnovana na pojmovima teorije skupova. Nakon dvadesetak godina dolazi do obrnutog procesa. Rasterećenjem nastavnog programa izbačeni su skupovi i funkcije iz gradiva matematike u osnovnim školama, što je 2006. godine formalizirano u HNOS-u. Promjene su se donosile i 2011. godine u Nacionalnom okvirnom kurikulumu te kurikularnoj reformi koja će eksperimentalni dio doživjeti u školskoj godini 2018./2019.

U prvom poglavlju istražit će se koliko se danas uči o skupovima kroz osnovnu i srednju školu te dati prikaz uvođenja pojma ekvipotentnosti skupova u udžbeniku

[1]Ernst Zermelo, (1871. - 1953.), njemački matematičar.
[2]Adolf Abraham Halevi Fraenkel, (1891. - 1965.), njemački matematičar.

za četvrti razred prirodoslovno-matematičke gimnazije. Nakon toga u drugom poglavlju proučit će se osnovni pojmovi, relacije i metode teorije skupova poput konačnih i beskonačnih skupova, prebrojivih i neprebrojivih skupova te kardinalnost skupova. Potom će se u sljedećem poglavlju, prebrojivost skupa racionalnih brojeva dokazati pomoću dijagonalnog postupka, Calkin-Wilfova stabla i Stern-Brocotova stabla. U zadnjem poglavlju prikazat će se i nekoliko primjera ekvipotentnih skupova.

Poglavlje 1

Ekvipotentnost u školi

1.1 Skupovi kroz školovanje

Članak Milane Vuković i Mladena Vukovića naslova "U potrazi za skupovima", potaknuo nas je na razmišljanje koliko su učenici uopće upoznati s pojmom skupa i skupovnih operacija prije nego se susretnu s pojmom ekvipotentnosti skupova. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu na Matematičkom odsjeku u Zagrebu u okviru Stručno-metodičkih večeri, profesor Vuković održao je 4. veljače 2009. predavanje istog naslova. Tada su postojali prijemni ispiti na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Autori navode kako su potaknuti lošom rješenosti zadataka sa skupovima odlučili istražiti gdje se u nastavnim programima iz matematike spominju skupovi. Autori su se osvrnuli i na stručnu literaturu na hrvatskom jeziku iz matematike poput udžbenika, časopisa, biltena za nastavnike i slično. Obzirom da je predavanje održano 2009. godine autori članka su koristili udžbenike i ostale materijale tiskane do 2009. godine. U nastavku teksta dana je usporedba rezultata navedenog članka sa sadržajima najnovijih udžbenika određenih od Ministarstva znanosti i obrazovanja. Na kraju je dan pregled koliko će se o skupovima učiti u novoj kurikularnoj reformi.

Za razdoblje od prvog do četvrtog razreda osnovne škole proučeni su sadržaji udžbenika *Nove matematičke priče 1, 2, 3 i 4*, raznih autora, nakladnika Profil, 5. izdanje, Zagreb, 2018. godine. Niti u jednom sadržaju navedenih udžbenika nije upotrebljena riječ "skup". Na primjer u članku "U potrazi za skupovima" autori navode kako se već u prvom razredu pojavljuje nastavna cjelina naslova: "Oduzimati i uspoređivati u skupu brojeva do 10". Dok se u navedenom udžbeniku za prvi razred nalazi naslov: "Zbrajanje i oduzimanje brojeva do 10".

U udžbeniku [2] za peti razred u nastavnoj cjelini "Prirodni brojevi" nalazi se podnaslov ”Skup prirodnih brojeva”. U nastavku se nalaze podnaslovi u kojima se obrađuju operacije te svojstva tih operacija u skupu prirodnih brojeva. Unutar ove nastavne cjeline skup predstavlja ”bilo koju kolekciju različitih objekata koja se smatra nekom cjelinom”. Objašnjeno je kako se označavaju skupovi, na koje sve načine se mogu opisati te što je prazan skup $\emptyset$. Uvedena je oznaka $\in$ i kaže se da je skup konačan jer mu elemente možemo prebrojati. U drugom dijelu udžbenika [3] nalazi se naslov: ”Skupovi točaka u ravnini” u kojem se riječ ”skup” koristi pri definiranju pojmova dužine, pravca, polupravca i ravnine. U šestom razredu u udžbeniku [4] nalazi se nastavna cjelina ”Cijeli brojevi”. Unutar te cjeline riječ skup koristi se u definiciji cijelih brojeva. Nadalje, tek se u osmom razredu u udžbeniku [5] u nastavnoj cjelini ”Realni brojevi” spominje riječ skup. Opet se riječ skup koristi pri definiranju iracionalnih brojeva i realnih brojeva.

Za srednju školu proučeni su udžbenici za prirodoslovno-matematičku gimnaziju autora B. Dakić i N. Elezović, nakladnika Element. U sadržaju udžbenika [12] za prvi razred, u prvoj nastavnoj cjelini ”Brojevi”, nalazi se nastavna jedinica ”Operacije sa skupovima”. Prije te nastavne jedinice ponavljaju se definicije svih skupova brojeva naučenih u osnovnoj školi. U nastavnoj jedinici ”Operacije sa skupovima” objašnjava se kako se pojam ”skup” ne definira, nego ga autori udžbenika opisuju kao: ”skup je određen ako je dobro definiran zakon prema kojem određujemo njegove elemente”. Zatim se ponavlja označavanje skupova te uvode pojmovi podskupa nekog skupa, presjeka skupova te unije skupova. Također, unija i presjek skupova koriste se pri zapisivanju rješenja nejednadžbi. U prvom razredu nalazi se još nastavna cjelina naslova: ”Uređaj na skupu cijelih brojeva”. U udžbeniku [13] za drugi razred, nalazi se nastavna cjelina ”Skup kompleksnih brojeva” u kojoj se riječ ”skup” koristi samo pri definiranju skupa kompleksnih brojeva. Zatim udžbenik [14] za četvrti razred u prvoj nastavnoj cjelini ”Brojevi”, sadrži nastavne jedinice ”Prirodni, cijeli i racionalni brojevi” i ”Realni brojevi” u kojima se sustavno nadograđuju skupovi brojeva. Nadalje, objašnjeni su pojmovi poput omeđenih i neomeđenih skupova, minimuma, maksimuma, supremuma i infimuma skupa te neka svojstva poput gustoće skupa racionalnih brojeva.

U udžbeniku [14], ne nalazi se pojam prebrojivosti skupova. Stoga je proučen udžbenik S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2007. te je u sljedećoj točki opisano na koji način autori udžbenika uvode pojam prebrojivosti, odnosno ekvipotentnosti.

Proučeni sadržaji udžbenika od petog do osmog razreda osnovne škole te od prvog do četvrtog razreda srednje škole ne razlikuju se puno od sadržaja koji su autori naveli u članku "U potrazi za skupovima". Dakle, nakon pregleda udžbenika možemo vidjeti kako učenici steknu osnovno znanje o skupovima. Autori članka [25] smatraju kako je u osnovnoj školi ta razina dovoljna. No, smatraju kako bi se više pažnje kroz srednju školu trebalo posvetiti uvođenju skupovnih operacija. Navode kako je dokazivanje skupovnih identiteta prvi susret s dokazima za većinu studenata na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu.

Možemo uočiti kako se učenici prvi puta upoznaju sa skupovima u petom razredu osnovne škole. Zatim u prvom razredu srednje škole proširuju znanje stečeno u petom razredu. U školskoj godini 2018./2019. u nekim školama u Hrvatskoj eksperimentalno se uvodi novi program "Škola za život". Stoga su objavljeni i novi predmetni kurikulumi. U novom kurikulumu matematike [20] u petom razredu osnovne škole skupovi se obrađuju pet nastavnih sati u nastavnoj cjelini "Skupovi". Nakon obrade te cjeline učenik: "oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup), određuje broj elemenata skupa, prepoznaje prazan skup, koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa, skupovnim zapisom prikazuje rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom". Uz navedene ishode kao prošireni sadržaj učenik: "ispisuje i prebrojava elemente skupa u kombinatornim zadatcima". Dakle, učenici će u novom programu već u petom razredu određivati uniju i presjek skupova te skupovnim zapisom prikazivati rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom.
U prvom razredu srednje škole u novom predmetnom kurikulumu matematike učenik: "prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi pomoću intervala". Dakle, možemo vidjeti kako u novom programu nije došlo do znatnijih promjena u ishodima učenja koji se odnose na skupove.

1.2 Uvođenje ekvipotentnosti u srednjoj školi

Promotrimo na koji način je uveden pojam ekvipotentnosti u udžbeniku [1].
Unutar nastavne jedinice "Skupovi brojeva: prirodni, cijeli, racionalni i realni brojevi" nalazi se podnaslov "Jednakobrojni skupovi". Prvo se promatraju dva konačna skupa. Prikazani su skupovi A i B:

A: 1, 2, 3, 4, 5

B: a, b, c, d, e

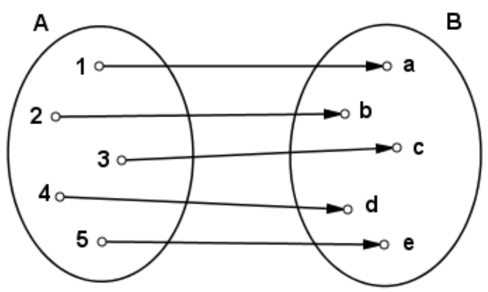
te je postavljeno pitanje: "Imaju li ta dva skupa jednak broj elemenata?". Na ovo pitanje učenicima nije teško odgovoriti jer jednostavno mogu prebrojati elemente skupova A i B. Lako im je vidjeti kako u skupu A ima 5 elemenata, u skupu B ima također 5 elemenata te zaključuju kako ova dva skupa imaju jednak broj elemenata.

Zatim se promatraju skupovi prirodnih i cijelih brojeva te se postavlja pitanje imaju li skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednak broj elemenata. Kako su oba skupa beskonačna elemente im ne možemo prebrojati kao u prethodnom primjeru. Učenici znaju da je skup prirodnih brojeva pravi podskup skupa cijelih brojeva. To ih intuitivno navodi na zaključak kako cijelih brojeva ima više nego prirodnih. No, što znači da jedan skup ima više elemenata nego drugi skup ako oba imaju beskonačno elemenata? Na ovo pitanje nije lako odgovoriti, stoga se autorice u udžbeniku vraćaju na konačne skupove.

U konačnim skupovima A i B prebrojavanjem njihovih elemenata ustanovili smo kako su oni jednakobrojni. Tada se postavlja pitanje: "Što znači da smo nešto prebrojili?". Tada je u udžbeniku ispričana priča:

"I primitivni je čovjek ponekad morao ustanoviti jesu li mu svi predmeti na broju, iako još nisu postojali nazivi ili znakovi za brojeve. Kako je to činio? O tome svjedoče takozvani *rovaši* - drveni štapovi ili kosti na koje su urezani zarezi. Svakom zarezu odgovara jedan predmet i svakom predmetu odgovara jedan zarez. Na taj način je bilo moguće ustanoviti da predmeta ima koliko i zareza. Skup predmeta i skup zareza su jednakobrojni."

Tada se povezivanje u kojem svakom zarezu odgovara jedan predmet i svakom predmetu jedan zarez izriče matematičkim jezikom. Zapravo je na taj način definirana funkcija sa skupa zareza u skup predmeta koja se naziva bijekcija. U udžbeniku je bijekcija definirana kao: "funkcija jedan na jedan, odnosno svakom elementu jednog skupa pridružen je samo jedan element i obrnuto". Tada se autorice vraćaju na prvi primjer sa skupovima A i B te se pita učenike mogu li definirati neku bijekciju sa skupa A u skup B. Učenicima se obično uspostavljanje bijekcije između dva skupa prikazuje grafički:



Međutim, ovo pitanje je zapravo motivacija za primjere koji slijede.

Primjer 1.2.1. Promotrite skupove C i D.

C: 1, 2, 3

D: a, b

Jesu li jednakobrojni? Možete li definirati bijekciju sa C u D?

Prebrojavanjem je očito da u skupu C ima više elemenata te se ne može definirati bijekcija sa skupa C u skup D.

Primjer 1.2.2. Što možete reći o skupovima E i F?

E: 1, 2

F: a, b, c

Slično kao u prethodnom primjeru, prebrojavanjem je očito da u skupu F ima više elemenata te se ne može definirati bijekcija sa skupa E u skup F.

Nakon primjera dolazi se do zaključka za konačne skupove:

"Konačni skupovi X i Y jednakobrojni su ako možemo definirati bijekciju sa X u Y. Ako skupovi nisu jednakobrojni ne možemo definirati bijekciju."

Prethodni zaključak koji se odnosi na konačne skupove navodi na definiciju koja će se primjenjivati i na beskonačne skupove. Tada je u udžbeniku dana definicija:

Definicija 1.2.3. *Skupovi A i B su jednakobrojni ili ekvipotentni ako postoji bijekcija sa skupa A u skup B.*

Zatim se vraća na pitanje imaju li skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednak broj elemenata kroz sljedeći primjer koji je udžbeniku riješen ovako.

Primjer 1.2.4. *Odgovorimo sada na pitanje jesu li jednakobrojni skupovi* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$.

Rješenje: Treba vidjeti možemo li definirati bijekciju sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\
\mathbb{Z} & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & \dots
\end{array}$$

Uočimo da je dovoljno skup cijelih brojeva zapisati kao niz, jer ćemo u tom slučaju prirodnom broju n pridružiti cijeli broj koji se nalazi na n-tom mjestu u nizu. Ako počnemo nizati pozitivne cijele brojeve, nikada nećemo stići do negativnih! Zato nizanje započinjemo nulom, a zatim naizmjenično nižemo pozitivne i negativne brojeve.

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ \mathbb{Z} & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots \end{array}$$

Ovako definirana funkcija je bijekcija pa su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednakobrojni.

U prethodnom primjeru je na slikovit način prikazano učenicima kako uspostaviti bijekciju između skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. U sljedećem se zadatku od učenika traži da formalno zapišu funkciju definiranu u prethodnom primjeru. U udžbeniku su autorice dale ovakav zapis funkcije

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n = 1 \\ k, & \text{ako je } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ -k, & \text{ako je } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

No, funkciju formalno možemo zapisati i ovako:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \dfrac{1-n}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Autorice slijede uobičajenu analizu među skupovima pa u sljedećem primjeru uspoređuju skupove $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$.

Primjer 1.2.5. *Jesu li jednakobrojni skupovi* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Q}$*?*

Rješenje: Treba vidjeti možemo li skup racionalnih brojeva zapisati kao niz. Ograničimo se za početak samo na pozitivne racionalne brojeve, jer ćemo negativne lako ubaciti kao u prethodnom primjeru. Poteškoća je u tome što za razliku od cijelih brojeva, svaki je racionalan broj određen s dva broja, brojnikom i nazivnikom i kako ne bismo izostavili niti jedan treba pronaći način da određenim redoslijedom mijenjamo i brojnik i nazivnik razlomka. Ispišimo najprije sve pozitivne racionalne brojeve s nazivnikom 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

zatim one s nazivnikom 2, ali ispuštajući one koji nisu do kraja skraćeni:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

Nastavljajući ovaj postupak sve pozitivne racionalne brojeve možemo zapisati u obliku beskonačne tablice:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{13}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Kako sada ovu tablicu zapisati u obliku niza? Ako krenemo po prvom redu, nećemo nikada stići do drugog. Isto će se dogoditi ako krenemo po prvom stupcu. Jedino preostaje mogućnost dijagonalnog kretanja.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & \longrightarrow & 2 & & 3 & \longrightarrow & 4 & & 5 & \longrightarrow & 6 & & 7\cdots & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{7}{2} & & \frac{9}{2} & & \frac{11}{2} & & \frac{13}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{7}{3} & & \frac{8}{3} & & \frac{10}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{7}{4} & & \frac{9}{4} & & \frac{11}{4} & & \frac{13}{4} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

pa tako dolazimo do niza:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ 3,\ 4,\ \frac{5}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{2},\ 5,\ldots$$

i konačno do bijekcije sa skupa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\
\mathbb{Q} & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2}, & 3, & \ldots
\end{array}
$$

pa zaključujemo da su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ jednakobrojni.

Tada se na temelju prethodna dva primjera dolazi do tvrdnje:
Za skup A kažemo da je prebrojiv ako je jednakobrojan skupu prirodnih brojeva.

U udžbeniku je tada zapisan sljedeći teorem, koji je dokazan u prethodna dva primjera.

Teorem 1.2.6. *Skupovi cijelih i racionalnih brojeva su prebrojivi.*

Sada nam se nameće pitanje jesu li svi beskonačni skupovi prebrojivi. U sljedećem primjeru proučava se skup realnih brojeva.

Primjer 1.2.7. *Jesu li svi beskonačni skupovi prebrojivi? Promotrimo skup realnih brojeva. Je li skup* $\mathbb{R}$ *prebrojiv?*

Rješenje: Pretpostavimo da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv. To znači da smo sve realne brojeve napisali u niz. Svaki realni broj u tom nizu zapišemo u obliku decimalnog broja.

$$\begin{gathered} c_1.c_{11}c_{12}c_{13}\dots \\ c_2.c_{21}c_{22}c_{23}\dots \\ c_3.c_{31}c_{32}c_{33}\dots \\ \vdots \end{gathered}$$

Definiramo realni broj $d = 0.d_1d_2d_3\dots$ na sljedeći način: neka je d_1 bilo koja znamenka različita od c_{11} i od 9, d_2 bilo koja znamenka različita od c_{22} i od 9, d_3 bilo koja znamenka različita od c_{33} i od 9, i tako dalje. Broj d različit je od svih brojeva u nizu, jer se od prvog razlikuje u prvoj znamenci iza decimalnog zareza, od drugog broja u drugoj znamenci itd.
Tako smo došli do kontradikcije, što znači da skup $\mathbb{R}$ ne možemo poredati u niz.

Teorem 1.2.8. *Skup realnih brojeva nije prebrojiv.*

Poglavlje se nastavlja riješenim primjerima te zadatkom za samostalni rad učenika.

Primjer 1.2.9. Dokažimo da su jednakobrojni skupovi:
a) Skup prirodnih brojeva i skup parnih prirodnih brojeva,
b) Segmenti $[1, 2]$ i $[3, 5]$
c) $\mathbb{R}$ i $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Rješenje:
a) Skup parnih prirodnih brojeva možemo lako nanizati: 2, 4, 6, 8, 10, ...
Tražena bijekcija je

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ \mathbb{Z} & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & \dots \end{array}$$

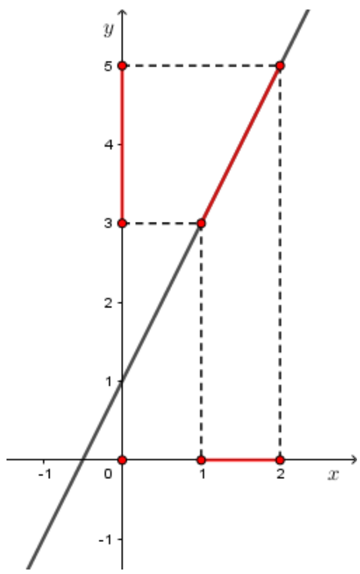
Ovu funkciju možemo zapisati formulom $f(n) = 2n$.

b) Treba konstruirati bijekciju koja preslikava segment $[1, 2]$ na $[3, 5]$. Možemo definirati linearnu funkciju $f : [1, 2] \to [3, 5]$. Graf prolazi točkama $(1, 3)$ i $(2, 5)$ pa je formula dana s

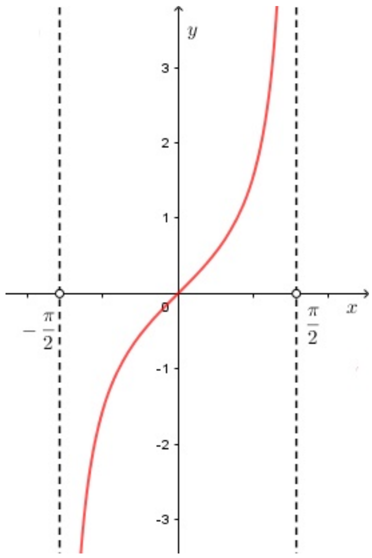
$$f(x) - 3 = \frac{5-3}{2-1}(x-1),$$

odnosno

$$f(x) = 2x + 1.$$



c) Funkcija koja bijektivno preslikava interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ na skup $\mathbb{R}$ je tangens $f(x) = \text{tg}x$.



Slijedi još i zadatak za samostalan rad učenika.

Zadatak. Dokažite jednakobrojnost skupova:
a) prirodnih brojeva i neparnih prirodnih brojeva,
b) intervala $\langle -2, 1\rangle$ i $\langle -4, 5\rangle$.

Zadnji pojam koji se spominje u ovom dijelu o jednakobrojnim skupovima je kardinalni broj te kako se zapisuju kardinalni brojevi beskonačnih skupova:

”Za jednakobrojne skupove kažemo da imaju iste kardinalne brojeve. Kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ bilježi se simbolom $\aleph_0$ i čita alef nula (alef je prvo slovo hebrejskog alfabeta). Pokazali smo da su skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ prebrojivi pa im je kardinalni broj također $\aleph_0$. Kardinalni broj skupa realnih brojeva bilježi se simbolom c i budući da skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv, njegovih elemenata ima bitno više od racionalnih što simbolički zapisujemo $c > \aleph_0$. Skup realnih brojeva je jednakobrojan sa bilo kojim intervalom, odnosno kardinalni broj bilo kojeg intervala je c.”

Sada ćemo prikazati zadatke koji se nalaze na kraju nastavne jedinice među zadacima za vježbu.

Zadatak 1.2.1. Jesu li jednakobrojni skupovi:
a) $\mathbb{N}$ i $\{n \in \mathbb{N} : \text{n je djeljiv s } 3\}$;
b) $\mathbb{N}$ i $\{n \in \mathbb{N} : \text{n je djeljiv s } 5\}$;
c) $[3, 7]$ i $[-2, 2]$;
d) $\langle 1, 4\rangle$ i $\langle -4, 1\rangle$;

e) $\mathbb{Q}$ i $\langle 0, 1\rangle$;
f) $\mathbb{Z}$ i $\langle 0, 10^{-5}\rangle$;
g) $\langle 0, \infty\rangle$ i $\mathbb{R}$;
h) $\langle -1, 1\rangle$ i $\mathbb{R}$?

Rješenje:
a) Skup svih prirodnih brojeva djeljivih s 3 možemo lako nanizati: 3, 6, 9, 12, ...
Tražena bijekcija je

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 3\mathbb{N} & 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & \dots \end{array}$$

Ovu funkciju možemo zapisati formulom $f(n) = 3n$.

b) Skup svih prirodnih brojeva djeljivih s 5 možemo lako nanizati: 5, 10, 15, 20, 25, ...
Tražena bijekcija je

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 5\mathbb{N} & 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & \dots \end{array}$$

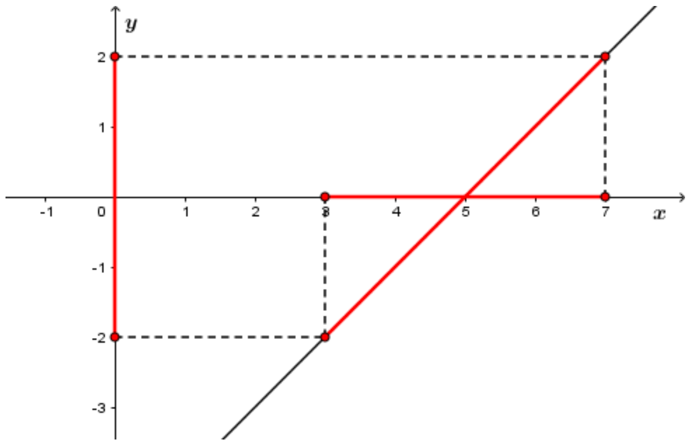
Ovu funkciju možemo zapisati formulom $f(n) = 5n$.

c) Treba konstruirati bijekciju koja preslikava segment $[3, 7]$ na $[-2, 2]$. Možemo definirati linearnu funkciju $f : [3, 7] \to [-2, 2]$. Graf funkcije prolazi točkama $(3, -2)$ i $(7, 2)$ pa je formula dana s

$$f(x) + 2 = \frac{2 - (-2)}{7 - 3}(x - 3),$$

odnosno

$$f(x) = x - 5.$$



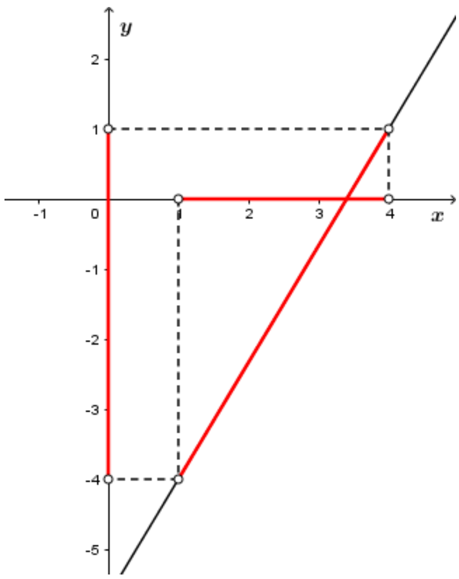
d) Treba konstruirati bijekciju koja preslikava interval $\langle 1,4\rangle$ na $\langle -4,1\rangle$. Možemo definirati linearnu funkciju $f:\langle 1,4\rangle \to \langle -4,1\rangle$. Formula je dana s

$$f(x)-(-4)=\frac{1-(-4)}{4-1}(x-1),$$

$$f(x)+4=\frac{5}{3}(x-1),$$

odnosno

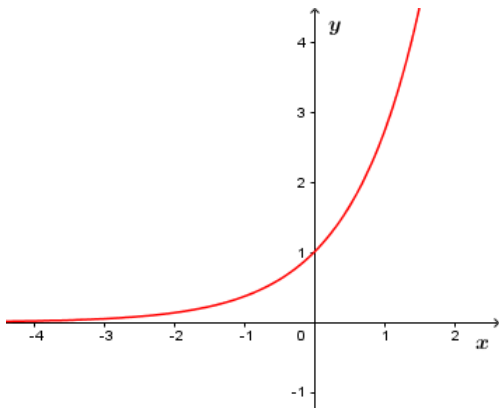
$$f(x)=\frac{5}{3}x-\frac{17}{3}.$$



e) Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, a interval $\langle 0,1\rangle$ nije prebrojiv. Naime, interval $\langle 0,1\rangle$ jednakobrojan je skupu $\mathbb{R}$. Povežimo bijekcijom intervale $\langle 0,1\rangle$ i $\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Radi se o linearnoj funkciji $f_1(x)=\pi(x-\frac{1}{2})$. Znamo da je funkcija $f_2:\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=\operatorname{tg} x$ bijekcija. Komponiranjem te dvije funkcije dobivamo bijekciju $f:\langle 0,1\rangle\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})$. Kako skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv slijedi da niti interval $\langle 0,1\rangle$ nije prebrojiv. Dakle, $\mathbb{Q}$ i $\langle 0,1\rangle$ nisu jednakobrojni.

f) Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv, a interval $\langle 0,10^{-5}\rangle$ nije prebrojiv. Naime, možemo uspostaviti bijekciju između intervala $\langle 0,10^{-5}\rangle$ i skupa $\mathbb{R}$. Tu bijekciju najlakše nam je konstruirati kompozicijom dviju funkcija:
1) Prvo trebamo odrediti bijekciju $f_1:\langle 0,10^{-5}\rangle\to\langle 0,1\rangle$. Pomoću formule za pravac kroz dvije točke slijedi $f_1(x)=10^5x$.
2) Druga bijekcija je funkcija $f_2:\langle 0,1\rangle\to\mathbb{R}$ zadana s $f_2(x)=\operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})$ (vidi podzadatak e)).
Tražena funkcija je $f:\langle 0,10^{-5}\rangle\to\mathbb{R}$, $f=f_2\circ f_1$. Dakle, kako skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv slijedi da niti interval $\langle 0,10^{-5}\rangle$ nije prebrojiv, pa $\mathbb{Z}$ i $\langle 0,10^{-5}\rangle$ nisu jednakobrojni.

g) Funkcija koja bijektivno preslikava skup $\mathbb{R}$ na interval $\langle 0,\infty\rangle$ je eksponencijalna funkcija s bazom e, $f(x)=e^x$.



h) Treba konstruirati bijekciju s intervala $\langle -1,1\rangle$ na skup $\mathbb{R}$. Tu bijekciju najlakše je konstruirati kompozicijom dviju funkcija:
1) Prvo trebamo konstruirati bijekciju $f_1:\langle -1,1\rangle\to\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Pomoću formule za pravac kroz dvije točke slijedi $f_1(x)=\frac{\pi x}{2}$.

2) Druga bijekcija je funkcija $f_2 : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \operatorname{tg} x$.
Komponiranjem te dvije funkcije dobivamo bijekciju $f : \langle -1, 1 \rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})$. Dakle, kako skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv slijedi da niti interval $\langle -1, 1 \rangle$ nije prebrojiv, pa su $\langle -1, 1 \rangle$ i $\mathbb{R}$ jednakobrojni.

Zadatak 1.2.2. Postoji li bijekcija:
a) $\mathbb{Q} \to [0, 1]$;
b) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q} \backslash [0, 1]$;
c) $\mathbb{R} \to [0, 1]$;
d) $\mathbb{N} \to [0, 1]$?

Rješenje:
a) Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, a interval $[0, 1]$ nije prebrojiv jer možemo uspostaviti bijekciju sa skupom R. Bijekciju nam je najlakše uspostaviti preko kompozicije više funkcija koje su bijekcije:
1) $f_1 : [0, 1] \to [0, 1\rangle$
2) $f_2 : [0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$
3) $f_3 : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$
U zadnjem poglavlju u primjerima 4.0.4 i 4.0.5 prikazano je kako konstruirati pravilo funkcija f_1 i f_2 te je u zadatku 1.2.1 prikazano kako uspostaviti bijekciju između $\langle 0, 1\rangle$ i $\mathbb{R}$. Slijedi da je funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ bijekcija, odnosno interval $[0, 1]$ jednakobrojan je s $\mathbb{R}$, pa interval $[0, 1]$ nije prebrojiv.
Dakle, ne postoji bijekcija s $\mathbb{Q}$ na $[0, 1]$.

b) Treba vidjeti možemo li skup $\mathbb{Q} \backslash [0, 1]$ zapisati kao niz.
Ograničimo se za početak samo na pozitivne racionalne brojeve iz skupa $\mathbb{Q} \backslash [0, 1]$. Ispišemo najprije sve pozitivne racionalne brojeve s nazivnikom 1, počevši od 2. Zatim ispisujemo skraćene razlomke s nazivnikom 2 veće od 1. Nadalje, u treći red ispisujemo skraćene razlomke s nazivnikom 3 veće od 1. Nastavljajući ovaj postupak sve racionalne brojeve iz skupa $\mathbb{Q}^+ \backslash [0, 1]$ možemo zapisati u obliku beskonačne tablice:

$$
\begin{array}{cccccc}
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\[1em]
\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \cdots \\[1em]
\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \cdots \\[1em]
\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \frac{13}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Dijagonalnim kretanjem kao u primjeru 1.2.5 dobivamo niz:

$$2, 3, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 4, 5, \frac{7}{2}, \ldots$$

Zaključujemo kako je skup $\mathbb{Q}^+\backslash[0,1]$ prebrojiv, jer smo mu elemente zapisali kao niz.
Uobičajenim dijagonalnim postupkom opisanim u primjeru 1.2.5 možemo elemente skupa $\mathbb{Q}^-$ zapisati u niz:

$$-1, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -3, -4, -\frac{5}{2}, \ldots$$

Stoga je i skup $\mathbb{Q}^-$ prebrojiv.
Konačno, bijekciju između skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}\backslash[0,1]$ dobijemo na ovaj način:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{N} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\
\mathbb{Q} & 2, & -1, & 3, & -2, & \frac{3}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{4}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{5}{2}, & -\frac{3}{2}, & 4, & -3, & \ldots
\end{array}$$

c) U podzadatku a) smo pokazali da je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bijekcija, pa slijedi da je inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R} \to [0,1]$ također bijekcija. Dakle, postoji bijekcija s $\mathbb{R}$ na interval $[0,1]$.

d) Pokazali smo u podzadatku a) da interval $[0,1]$ nije prebrojiv, pa ne postoji bijekcija s $\mathbb{N}$ na $[0,1]$.

Zadatak 1.2.3. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva nije prebrojiv.

Rješenje: Zapišimo skup realnih brojeva kao uniju skupa racionalnih i iracionalnih brojeva: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Dokazali smo kako je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv te kako skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. Znamo ako je neki skup ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, odnosno ako je prebrojiv, tada njegove elemente možemo zapisati u niz. Tada imamo $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Kada bi i skup iracionalnih brojeva bio prebrojiv tada bi imali $\mathbb{I} = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$. No, kako je skup realnih brojeva unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva, slijedi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \{q_1, i_1, q_2, i_2, q_3, i_3, \ldots\}$. Elemente skupa $\mathbb{R}$ smo napisali u niz što znači da je skup $\mathbb{R}$ prebrojiv, što je kontradikcija. Dakle, skup iracionalnih brojeva nije prebrojiv.

Poglavlje 2

Pregled osnovnih pojmova, relacija i metoda teorije skupova

U ovom poglavlju prikazat ćemo osnovne pojmove i teoreme teorije skupova te njihove dokaze.

Za početak iznesimo priču o Hilbertovom hotelu, koja na zanimljiv način dočarava beskonačnost skupova:

Primjer 2.0.1. Hilbertov hotel
Zamislimo da negdje daleko u Svemiru postoji hotel s beskonačno mnogo soba. Sobe su numerirane brojevima $1, 2, 3, \ldots$ *No, zamislimo da su sve sobe zauzete gostima, i dolazi još jedan putnik koji želi sobu. Kako će recepcioner smjestiti novopridošlog gosta u hotel zadržavajući u njemu i sve već prisutne goste? Jednostavno, zamolit će gosta iz sobe 1 da se premjesti u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 3, itd. Novopridošlog gosta će tada smjestiti u sobu 1.*
Promotrimo još jedan problem s kojim bi se mogao susresti recepcioner hotela s beskonačno mnogo soba, i čije su sve sobe pune. Zamislimo da u Svemiru postoji još jedan hotel s beskonačno mnogo soba čije su sve sobe popunjene gostima. Jednog dana glavna komisija za graditeljstvo u svemirskim prostranstvima otkrila je da taj drugi hotel nema građevinsku dozvolu. Istog trena taj drugi hotel je morao biti zatvoren i svi gosti (beskonačno mnogo njih!) stali su pred vrata prvog hotela (čije su sve sobe pune). No, recepcioner se brzo snašao. Gosta iz sobe 1 svojeg hotela premjestio je u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 4, gosta iz sobe 3 u sobu 6, itd. Tako je ispraznio sve sobe s neparnim brojevima, te je u njih smjestio goste iz zatvorenog hotela.
Sada kada se već dobro snalazimo s hotelima s beskonačno mnogo soba promotrimo još jedan problem koji bi recepcioneru mogao zadati mnogo glavobolja. Zamislimo da u Svemiru postoji beskonačno mnogo hotela s beskonačno mnogo soba, i sve

su sobe popunjene gostima. Svemirska građevinska komisija iz raznih je razloga zatvorila sve hotele osim jednog. Tada su svi gosti (po beskonačno mnogo njih iz svakog od beskonačno mnogo hotela) došli pred vrata tog jednog hotela koji je još imao dozvolu za rad. Snalažljivi recepcioner sada nije znao rješenje ove na prvi pogled bezizlazne situacije. Trebao je pomoć matematičara. Može li se uopće ova ogromna grupa novopridošlih gostiju smjestiti u (puni!) hotel? Možete li pomoći recepcionaru?

Novopridošle goste možemo smjestiti u puni hotel. Napravimo tablicu u kojoj su retci numerirani brojevima hotela, a stupci brojevima soba. Prikažimo tu tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \dots & (1,n) & \dots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \dots & (2,n) & \dots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \dots & (3,n) & \dots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \dots & (4,n) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
(m,1) & (m,2) & (m,3) & (m,4) & \dots & (m,n) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Na primjer, na presjeku trećeg retka i četvrtog stupca nalazi se četvrta soba trećeg hotela. Sada možemo smještati goste po kvadratima: na broj 1 smjestimo gosta iz (1,1), tj. iz sobe 1 prvog hotela, na broj 2 gosta iz (1,2), na broj 3 gosta iz (2,2) i na broj 4 gosta iz (2,1). Na taj način razmjestili smo goste iz gornjeg lijevog kvadrata stranice 2. Nakon toga na broj 5 poslat ćemo gosta iz (1,3), na 6 gosta iz (2,3), na 7 gosta iz (3,3), na 8 gosta iz (3,2) i na 9 gosta iz (3,1). Ti brojevi tvore kvadrat stranice 3. Prikažimo prethodno opisani razmještaj u tablici:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & \dots & & (1,n) & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & \dots & & (2,n) & \dots \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & \dots & & (3,n) & \dots \\
& & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & \dots & & (4,n) & \dots \\
& & & & & & & & & & \downarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
& & & & & & & & & & \downarrow & \\
(n,1) & \leftarrow & (n,2) & \leftarrow & (n,3) & \leftarrow & (n,4) & \leftarrow & \dots & \leftarrow & (n,n) & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots &
\end{array}$$

Ovim načinom razmještanja svi gosti će biti smješteni u hotel. Naime, na prvih n^2 soba smjestili smo goste iz prvih n soba prvih n hotela. Zato će svaki gost prije

ili kasnije dobiti sobu u hotelu. Na primjer, gost iz sobe 136 hotela broj 217, dobit će sobu na 217. koraku. Možemo čak i izračunati broj te sobe: $217^2 - 136 + 1$. Općenito, ako gost zauzima sobu n u m-tom hotelu vrijedi: za $n \geqslant m$ zauzet će sobu $(n-1)^2 + m$, a za $n < m$ sobu $m^2 - n + 1$.
Priča preuzeta iz [24], a rješenje zadnjeg problema iz [23].

2.1 Ekvipotentni skupovi

Matematičke definicije lakše nam je shvatiti na temelju raznih primjera. Prema [22] pojam bijekcije može se slikovito dočarati pomoću ovih primjera:
"Priče koje se prenose od davnina govore o tome da su pastiri prebrojavali svoje ovce tako da su za svaku ovcu koja je izašla na ispašu ubacili po jedan kamenčić u vreću. Pri povratku ovaca s ispaše, kamenčiće su izbacivali iz vreće i ukoliko bi u vreći ostalo kamenčića tada bi znali da nisu sve ovce na okupu. Na taj način oni su zapravo uspostavljali bijekciju između skupa ovaca i skupa kamenčića u vreći. Također, svako dijete uči brojati pomoću prstiju ruke, odnosno povezuje brojnost predmeta s prstima."

Počinjemo s osnovnim pojmovima matematičke analize. Prema [16] injekcija, surjekcija i bijekcija definirane su ovako:

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je funkcija $f : A \to B$* ***injekcija*** *ako vrijedi*

$$\forall x_1, x_2 \in A, ((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))).$$

Kontrapozicija gornje izjave je

$$\forall x_1, x_2 \in A, ((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)),$$

a budući da su tvrdnja i njezina kontrapozicija logički ekvivalentne slijedi da se injektivnost funkcije može provjeravati i ispitivanjem istinitosti kontrapozicije.

Definicija 2.1.2. *Kažemo da je funkcija $f : A \to B$* ***surjekcija*** *ako je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije, tj. $\mathcal{R}(f) = B$, odnosno ako vrijedi $\forall y \in B, \exists x \in A, (y = f(x))$.*

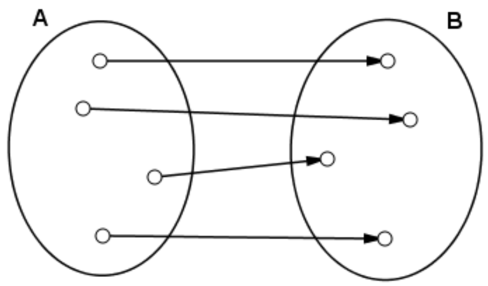
Definicija 2.1.3. *Kažemo da je funkcija $f : A \to B$* ***bijekcija*** *ili* ***1-1*** *ako je ona injekcija i surjekcija, tj.*

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A)(y = f(x)).$$

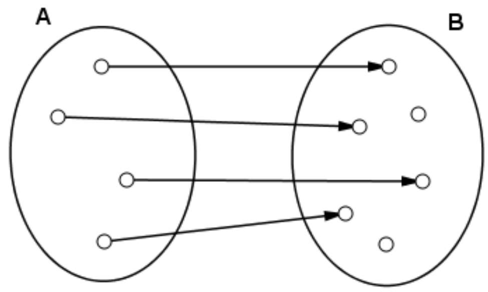
Dakle, za svaki element kodomene postoji i jedinstven njegov original.

Promotrimo prvo na koji način po brojnosti uspoređujemo konačne skupove A i B. Koliki je broj elemenata nekog konačnog skupa ustanovit ćemo brojanjem, stoga je brojniji onaj skup kojem pripada veći rezultat. No, uspoređivanje dva konačna skupa zapravo provodimo pomoću pridruživanja. Elemente skupova A i B spojimo u parove, tako da jednom elementu skupa A pridružimo točno jedan element skupa B. Mora vrijediti i obrnuto, da je svakom elementu skupa B pridružen točno jedan element skupa A.
Pri uspoređivanju dvaju konačnih skupova može se pojaviti jedan od ova tri slučaja:

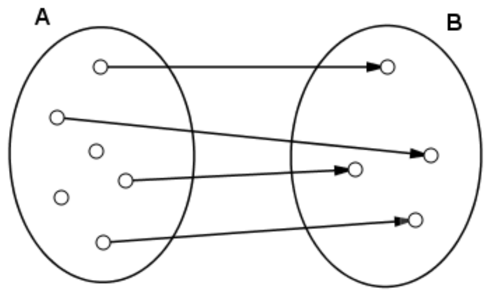
1. Pridruživanje je bijektivno, svakom elementu skupa A pridružili smo točno jedan element skupa B, i time iscrpili sve elemente iz oba skupa. Odnosno, broj elemenata skupa A jednak je broju elemenata skupa B, što zapisujemo $|A| = |B|$.



2. Nakon pridruživanja kojim svakom elementu skupa A pridružimo točno jedan element skupa B, u skupu B ostane slobodnih elemenata. Reći ćemo da je skup B brojniji od skupa A, što zapisujemo kao $|A| < |B|$.



3. Nakon pridruživanja kojim bismo svakom elementu skupa A pridružili točno jedan element skupa B, u skupu A ostane slobodnih elemenata. Reći ćemo da je skup A brojniji od skupa B, što zapisujemo kao $|A| > |B|$.



Na temelju prvog slučaja zaključujemo kako će dva konačna skupa imati jednak broj elemenata onda i samo onda ako postoji bijekcija koja će skup A preslikati na skup B. Time smo postavili kriterij za jednakobrojnost između dvaju konačnih skupova. Nakon konačnih skupova pitamo se kako usporediti beskonačne skupove. Kada se radi o beskonačnim skupovima nije nam intuitivno jasno koliki je broj elemenata takvih skupova. No, isti kriterij može se proširiti i za beskonačne skupove. Sada možemo definirati ekvipotentnost ili jednakobrojnost skupova A i B.

Definicija 2.1.4. *Za dva skupa A i B kažemo da su ekvipotentni ili jednakobrojni ako postoji bijekcija sa skupa A u skup B. Oznaka za ekvipotentnost skupova A i B jest $A \sim B$.*

U sljedećem primjeru prikazani su ekvipotentni konačni skupovi.

Primjer 2.1.5. *a)* $\{5, 14, 29\} \sim \{70, 406, 10^8\}$
b) $\{\{1, 2\}, 12, 64\} \sim \{15, 100, \{13, 24, 55\}\}$

Sljedeći teorem daje bitno svojstvo ekvipotentnosti.

Teorem 2.1.6. *Ekvipotentnost među skupovima je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija, to jest relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Za svaki skup X je $X \sim X$, jer je identiteta bijekcija, pa je relacija refleksivna. Ako vrijedi $X \sim Y$, po definiciji ekvipotentnosti, postoji funkcija sa skupa X na skup Y koja je bijekcija. Njoj inverzna funkcija je također bijekcija i djeluje sa skupa Y na skup X. Dakle, $Y \sim X$, pa vrijedi i simetričnost. Konačno, kompozicija dviju bijekcija je bijekcija pa ako je $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, onda je i $X \sim Z$, odnosno ekvipotentnost je tranzitivna. $\square$

Teorija skupova izgrađena je pomoću aksioma Zermelo-Fraenkelove teorije skupova. Za dokaze nekih temeljnih svojstava prebrojivih skupova, potreban nam je aksiom izbora.

Aksiom izbora. Za svaki skup A elementi kojeg su međusobno disjunktni skupovi

A_α, postoji barem jedan skup B koji sadrži jedan i samo jedan element svakog od skupova A_α.

Lako je prihvatiti mogućnost da se izvrši jedan proizvoljan izbor ili postupno konačno mnogo izbora, no intuitivno je teže prihvatiti mogućnost beskonačnog broja takvih izbora. P. Papić u svojoj knjizi [21] navodi kako u tome i je specifičnost ovog aksioma, što on omogućuje da se izvrši beskonačno mnogo izbora. Naime, skup A može sadržavati beskonačno mnogo skupova A_α kao svoje elemente, a iz svakog tog skupa A_α može se prema tom teoremu odabrati po jedan element, čak i u slučaju kad nema mogućnosti izvršiti konkretan izbor. Dakle, aksiom izbora osigurava postojanje skupa B, ali ne daje mogućnost za njegovu konstrukciju.

Aksiom izbora može se zapisati i u drugom obliku.

Definicija 2.1.7. *Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neprazan sustav nepraznih skupova i neka je $A = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$; funkcija $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \to A$ sa svojstvom da je za svaki $\alpha \in S$, $f(A_\alpha) \in A_\alpha$ naziva se funkcija izbora.*

Iz aksioma izbora slijedi teorem:

Teorem 2.1.8. *Postoji funkcija izbora za svaki neprazan sustav nepraznih skupova.*

Dokaz. Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neprazan sustav nepraznih skupova. Za svaki $\alpha \in S$ neka je $A'_\alpha = A_\alpha \times \{\alpha\} = \{(x, \alpha) \mid x \in A_\alpha\}$. Sustav $\{A'_\alpha \mid \alpha \in S\}$ sastoji se od skupova koji su međusobno disjunktni. Naime, ako je $\alpha \neq \beta$, onda je $A'_\alpha \cap A'_\beta = \emptyset$, jer su $(x, \alpha) \in A'_\alpha$ i $(x, \beta) \in A'_\beta$ međusobno različiti.
Prema aksiomu izbora postoji B' koji sadrži jedan i samo jedan element iz skupa A'_α, tj. $B' \cap A'_\alpha = \{(a_\alpha, \alpha)\}$. Očito je $a_\alpha \in A_\alpha$, a funkcija $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \to \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ definirana s $f(A_\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha$, je funkcija izbora. □

Pokažimo sada da iz teorema 2.1.8 slijedi aksiom izbora. Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neprazan sustav nepraznih međusobno disjunktnih skupova, a $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \to \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neka je funkcija izbora za koju je $f(A_\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha$ za svaki $\alpha \in S$. Skup $B = \{a_\alpha \mid \alpha \in S\}$ skup je koji sa svakim A_α ima točno po jedan zajednički element, što se i tvrdi aksiomom izbora. Dakle, aksiom izbora i egzistencija funkcije izbora ekvivalentni su.

Dokazi preuzeti iz [21].

U sljedeće dvije točke dane su definicije konačnih, beskonačnih, prebrojivih i neprebrojivih skupova te njihova svojstva.

2.2 Konačni i beskonačni skupovi

Skup $\{1, 2, \ldots, k\}$ označimo s $\mathbb{N}_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Teorem 2.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija tada je f i surjekcija.*

Dokaz. Indukcijom po k dokazujemo da je svaka injekcija $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ ujedno i surjekcija. Ako je $k = 0$ tvrdnja je trivijalno istinita. Ako je $k = 1$ tada je očito funkcija $f : 1 \to 1$ surjekcija. Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ prirodan broj koji ima svojstvo da je svaka injekcija $g : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ ujedno i surjekcija. Neka je $f : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$ proizvoljna injekcija. Tada je restrikcija $f|_{\mathbb{N}_k} : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_{k+1}$ injekcija. Sada razlikujemo dva slučaja:
a) $f(k+1) = k+1$
To znači da je slika restrikcije $f|_{\mathbb{N}_k}$ sadržana u skupu $\mathbb{N}_k$. Time imamo da je funkcija $f|_{\mathbb{N}_k} : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je ta funkcija surjekcija. Sada je očito da je funkcija f surjekcija.

b) $f(k+1) = i_0 \in \mathbb{N}_k$
Primijetimo prvo da postoji $j_0 \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(j_0) = k+1$ (Pretpostavimo da takav $j_0 \in \mathbb{N}_k$ ne postoji. Tada je restrikcija $f|_{\mathbb{N}_k} : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ dobro definirana, te je injekcija. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je ta restrikcija i surjekcija. No, tada postoji neki $i_1 \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(i_1) = i_0$. Time imamo $f(k+1) = f(i_1)$, te $k+1 \neq i_1$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je funkcija $f : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$ injekcija). Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ ovako:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \neq j_0 \\ i_0, & \text{ako je } x = j_0. \end{cases}$$

Očito je funkcija $F : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je ta funkcija i surjekcija. Sada je lako vidjeti da iz toga slijedi da je i funkcija f surjekcija. Neka je $y \in \mathbb{N}_{k+1}$ proizvoljan. Razlikujemo tri slučaja. Ako je $y \in \mathbb{N}_k \backslash i_0$ tada iz surjektivnosti funkcije F i njene definicije slijedi da postoji $x \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(x) = y$. Ako je $y = i_0$ tada imamo $f(k+1) = i_0$. Ako je $y = k+1$ tada imamo $f(j_0) = k+1$. $\square$

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je neprazan skup A konačan ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je skup A ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}_k$. Prazan skup je po definiciji konačan.*

Teorem 2.2.1 nam omogućava da za svaki konačan skup A definiramo broj elemenata, u oznaci $k(A)$, stavljajući $k(A) = n$, pri čemu vrijedi $A \sim \mathbb{N}_n$. Također, $k(\emptyset) = 0$.

Teorem 2.2.3. *Za svaki neprazan $A \subseteq \mathbb{N}_m$ postoji prirodan broj k takav da vrijedi $k \leqslant m$ i $k(A) = k$.*

Dokaz. Indukcijom po m. Ako je $m = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da za svaki podskup B od $\mathbb{N}_m$ postoji $k \leqslant m$ takav da je $k(B) = k$. Neka je A proizvoljan neprazan podskup od $\mathbb{N}_{m+1}$. Ako je $A \subseteq \mathbb{N}_m$ tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije. Promotrimo slučaj kada je $m+1 \in A$. Tada je $A \backslash \{m+1\} \subseteq \mathbb{N}_m$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k(A \backslash \{m+1\}) = k$. Tada je očito $k(A) = k + 1$. □

Posljedica prethodnog teorema je sljedeći korolar.

Korolar 2.2.4. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan.*

Teorem 2.2.5. *Neprazan skup X je konačan ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ i surjekcija $f : \mathbb{N}_k \to X$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je skup X konačan. Tada iz definicije slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ i bijekcija $f : X \to \mathbb{N}_k$. Tada je f^{-1} jedna tražena bijekcija.
Pretpostavimo sada da postoji $k \in \mathbb{N}$ i surjekcija $f : \mathbb{N}_k \to X$. Tada očito za svaki $x \in X$ imamo $f^{-1}[\{x\}] \neq \emptyset$. Primjenom aksioma izbora slijedi da za svaki $x \in X$ možemo odabrati po jedan $a_x \in f^{-1}[\{x\}]$. Označimo $A = \{a_x : x \in X\}$. Očito je $A \subseteq \mathbb{N}_k$, te je funkcija $g : A \to X$, koja je definirana sa $g(a_x) = x$, bijekcija. Tada je $k(A) = k(X)$. Iz $A \subseteq \mathbb{N}_k$ i teorema 2.2.3 slijedi da postoji $m \leqslant k$ takav da je $k(A) = m$. Tada je $k(X) = m$, te je skup X konačan. □

Dokazi preuzeti iz [24].

Definicija 2.2.6. *Za skup X kažemo da je beskonačan ako nije konačan.*

2.3 Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Definicija 2.3.1. *Kaže se da je skup A prebrojiv ako je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva.*

Iz definicije slijedi da je skup A prebrojiv onda i samo onda ako možemo uspostaviti bijekciju između skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skupa A. Zapravo ako postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to A$ koja je bijekcija. Ako svakom prirodnom broju pridružimo element skupa A, odnosno ako stavimo

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n, \ldots,$$

zaključujemo da je skup A prebrojiv ako se može napisati u obliku niza. U skupu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ elementi se ne ponavljaju pa su svi članovi niza međusobno različiti.

Definicija 2.3.2. *Za beskonačan skup koji nije prebrojiv kaže se da je neprebrojiv.*

Teorem 2.3.3. *Svaki podskup prebrojiva skupa konačan je ili prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je A zadan prebrojiv skup, a B neka je podskup skupa A. Ako je B konačan, ne treba ništa dokazivati. Pretpostavimo da je B beskonačan; kako je A prebrojiv, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to B$ ovako: neka je $g(1) = f(i_1)$, gdje je i_1 najmanji prirodni broj za koji je $f(i_1) \in B$. Pretpostavimo da smo već definirali $g(1), \ldots, g(n-1)$; stavimo $g(n) = f(i_n)$, gdje je i_n najmanji prirodan takav da je $i_n > i_{n-1}$ i $f(i_n) \in B$. Na taj je način $g(n)$ definiran za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz definicije funkcije g slijedi da je g bijekcija s $\mathbb{N}$ na B, pa je B prebrojiv. □

Korolar 2.3.4. *Ako je skup A prebrojiv, a $B \subseteq A$ konačan, onda je $A \backslash B$ prebrojiv.*

Dokaz. Kako je $A = (A\backslash B) \cup B$, $A\backslash B$ ne može biti konačan jer bi u tom slučaju unija dvaju konačnh skupova bila prebrojiv skup, što je nemoguće. □

Teorem 2.3.5. *Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.*

Dokaz. Neka je A beskonačan. Kako A nije prazan, postoji element $a_1 \in A$. Pretpostavimo da smo već odabrali elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ iz skupa A; skup $A\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ nije prazan, pa se u tom skupu može izabrati element a_{n+1}. Na taj se način dolazi do prebrojivog podskupa $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ iz A. □

Teorem 2.3.6. *Ako je A beskonačan skup, a B konačan ili prebrojiv skup onda su skupovi A i $A \cup B$ ekvipotentni.*

Dokaz. Kako je $A \cup B = A \cup (B\backslash A)$, a $B\backslash A$ je prema teoremu 2.3.3 konačan ili prebrojiv, skup B može se zamijeniti s $B\backslash A$ koji je disjunktan s A, pa se može pretpostaviti da su A i B disjunktni. Pretpostavimo da je B prebrojiv i $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$. Kako je A beskonačan, prema teoremu 2.3.5 A sadrži prebrojiv podskup $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Skupovi su A_0 i $B \cup A_0 = \{b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_n, a_n, \ldots\}$ ekvipotentni. Bijekcija $g : A_0 \to B \cup A_0$ može se definirati ovako: $g(x) = a_n$, za $x = 2n$ i $g(x) = b_n$, za $x = 2n - 1$.
Vratimo se sada skupovima A i $A \cup B$; očito je $A = (A\backslash A_0) \cup A_0$ i $A \cup B = (A\backslash A_0) \cup (A_0 \cup B)$. Definirajmo sada funkciju $f : A \to A \cup B$, odnosno $f : (A\backslash A_0) \cup A_0 \to (A\backslash A_0) \cup (A_0 \cup B)$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \in A\backslash A_0 \\ g(x), & \text{za } x \in A_0 \end{cases}$$

Preslikavanje f je bijekcija, pa su A i $A \cup B$ ekvipotentni.
Ako je B konačan, recimo $B = \{b_1, b_2 \ldots, b_p\}$, onda je $A_0 \cup B = \{b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots,$

$b_p, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} \ldots\}$, pa su opet A_0 i $A_0 \cup B$ ekvipotentni jer se mogu napisati u obliku niza. Slijedi da i u ovom slučaju postoji bijekcija između A i $A \cup B$, tj. A i $A \cup B$ su ekvipotentni. □

Teorem 2.3.7. *Unija prebrojivog skupa i konačnog skupa je prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je A proizvoljan konačan skup, a B proizvoljan prebrojiv skup. Neka je $A' := A \backslash B$. Kako je $A' \in A$ slijedi da je i skup A' konačan skup. Stoga postoji jedinstven $n \in \mathbb{N}$ tako da je $A' \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je f neka bijekcija između ta dva skupa. Definirali smo A' kako bi izbjegli probleme koji bi se javili ako A i B imaju zajedničkih elemenata. Vrijedi $A \cup B = A' \cup B$ pa je dovoljno pokazati da je $A' \cup B$ prebrojiv, a lakše je jer su A' i B disjunktni. Nadalje, jer je B prebrojiv, postoji bijekcija $g : B \to \mathbb{N}$.
Definirajmo sada funkciju $h : A' \cup B \to \mathbb{N}$ tako da je

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A' \\ g(x) + n, & x \in B. \end{cases}$$

Tako definirana funkcija h će elementima n-članog skupa A' pridružiti prirodne brojeve od 1 do n (kao funkcija f), a elementima iz B kojima je g pridruživala $1, 2, 3, \ldots$ će pridruživati $n+1, n+2, n+3, \ldots$. Kako su A' i B disjunktni, a $h\mid_{A'} = f$ i $h\mid_B = g + n$ bijekcije, lako je vidjeti da je i h bijekcija. Jer je $A \cup B = A' \cup B$, slijedi tvrdnja. □

Teorem 2.3.8. *Unija konačnog broja konačnih ili prebrojivih skupova konačan je ili prebrojiv skup.*

Dokaz. Promatrajmo najprije uniju dvaju takvih skupova A_1 i A_2; ako su oba konačna, onda je i njihova unija konačna; ako je barem jedan, npr. A_1, prebrojiv, onda je prema teoremu 2.3.6, A_1 ekvipotentan s $A_1 \cup A_2$; kako je A_1 prebrojiv, bit će $A_1 \cup A_2$ također prebrojiv skup.
Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da je teorem istinit za svakih n konačnih ili prebrojivih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj. da je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ konačan ili prebrojiv skup (konačan je očito samo ako su svi skupovi konačni), i dokažimo da je teorem istinit i za svaki $n + 1$ konačnih ili prebrojivih skupova $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Međutim, $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}$ je unija dvaju konačnih ili prebrojivih skupova od kojih je prvi konačan ili prebrojiv prema pretpostavci indukcije, pa je njihova unija konačan ili prebrojiv skup. □

Teorem 2.3.9. *Unija prebrojivo mnogo konačnih ili prebrojivih skupova konačan je ili prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\} \tag{2.1}$$

skup prebrojivo mnogo konačnih ili prebrojivih skupova. Može se dogoditi da za neke $n > 1$ skup A_n bude sadržan u uniji svih svojih prethodnika u nizu (2.1), $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Izostavljajući sve takve skupove, neće se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ promijeniti, pa možemo od početka pretpostaviti da u (2.1) nema takvih skupova. Ako niz (2.1) ima konačno elemenata $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ će biti prebrojiv skup ako je barem jedan od skupova A_i prebrojiv, a konačan ako su svi A_i konačni. Ostaje slučaj kad niz (2.1) ima beskonačno mnogo elemenata. Neka je $B_1 = A_1$ i za svaki $n > 1$ neka je $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$; za svaki n bit će $B_n \neq \emptyset$ i, kako se lako vidi, za $i \neq j$ bit će $B_i \cap B_j = \emptyset$, tj. skupovi B_n međusobno su disjunktni. Osim toga je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{2.2}$$

Da je lijeva strana u (2.2) sadržana u desnoj, jasno je, jer je $B_n \subseteq A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Treba još dokazati da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Neka je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tada je x sadržan u barem jednom A_n. Označimo sa s najmanji prirodni broj (indeks) za koji je $X \in A_s$. Tada je $x \in B_s = A_s \setminus \bigcup_{i=1}^{s-1} A_i$, čime je jednakost (2.2) dokazana. Svaki je skup B_n kao podskup konačnog ili prebrojivog skupa A_n i sam konačan ili prebrojiv prema teoremu 2.3.3. Dakle, $B_n = \{b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm}\}$ ili $B_n = \{b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm}, \dots\}$. Neka je $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ preslikavanje definirano s $f(b_{nm}) = (n, m)$; f je injekcija. Zaista, neka su $a, b \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, a \neq b$; ako su a i b u istom skupu B_n, onda je $a = b_{n,s}$, $b = b_{n,t}$ i $s \neq t$, pa je $f(a) = (n, s) \neq (n, t) = f(b)$. Ako je pak $a \in B_n$ i $b \in B_m$, $m \neq n$, onda je $f(a) = (n, s) \neq (m, t) = f(b)$. Prema tome, f preslikava injektivno skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ u podskup prebrojivog skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pa je i sam prebrojiv. □

Dokazi preuzeti iz [10] i [21].

2.4 Kardinalnost skupova

Još iz osnovne škole znamo kako svaki prirodni broj ima dvije uloge: određuje koliko čega ima te koji je po redu. Dakle, svaki prirodan broj je kardinalni (glavni) i redni. Kao što smo vidjeli kardinalni broj konačnog skupa lako smo definirali. Htjeli bismo definirati beskonačne kardinalne brojeve koji će mjeriti veličinu beskonačnih skupova te beskonačne redne brojeve koji će mjeriti poredak beskonačnih skupova. No, pojam kardinalnog broja nije lako definirati. Stoga se u ovom radu neće detaljno doći do pojma kardinalnog broja, nego će se definirati kardinalnost skupova te neka njihova svojstva.

Relacija ekvivalencije dijeli skup u međusobno disjunktne klase, tj. u podskupove u kojima su svaka dva elementa u zadanoj relaciji. Prema teoremu 2.1.6 znamo kako je ekvipotentnost relacija ekvivalencije. Prema tome ekvipotentnost svrstava skupove u međusobno disjunktne klase tako da se svaki skup iz bilo koje klase može bijektivno preslikati na bilo koji skup iste klase. Pomoću ove činjenice pojam broja elemenata konačnih skupova možemo poopćiti na beskonačne skupove.

Definicija 2.4.1. *Ako su A i B ekvipotentni skupovi tada kažemo još da imaju istu kardinalnost te pišemo $k(A) = k(B)$.*

Uvedimo neke oznake za kardinalnost:
$k(\emptyset) = 0$,
$k(\{0, \ldots, n-1\}) = n$,
$k(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (čita se: alef nula),
$k(\mathbb{R}) = c$ ("*continuum*").

Dokažimo dva osnovna svojstva kardinalnosti skupova.

Teorem 2.4.2. (Osnovni Cantorov teorem) *Za sve skupove A vrijedi $k(A) < k(\mathcal{P}(A))$.*

Dokaz. Iz definicije relacije $<$ slijedi da treba dokazati: $k(A) \leqslant k(\mathcal{P}(A))$ i $k(A) \neq k(\mathcal{P}(A))$. Ako je $A \neq \emptyset$ tada je $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. To znači da je u ovom slučaju $k(A) < k(\mathcal{P}(A))$. Neka je sada $A \neq \emptyset$. Primijetimo prvo da je $k(A) \leqslant k(\mathcal{P}(A))$, jer je funkcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$, koja je definirana sa $f(x) = \{x\}$, injekcija.
Dokažimo sada još $k(A) \neq k(\mathcal{P}(A))$. Pretpostavimo suprotno tj. da je $k(A) = k(\mathcal{P}(A))$, odnosno da vrijedi $A \sim \mathcal{P}(A)$. Neka je $f : A \to \mathcal{P}(A)$ neka bijekcija. Definiramo skup $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Primijetimo da je $B \neq \emptyset$, jer je $f : A \to \mathcal{P}(A)$ bijekcija pa i surjekcija, a budući da je $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ tada postoji $x \in A$ takav da $f(x) = \emptyset$. No, onda za taj x vrijedi $x \notin f(x)$ tj. $x \in B$. Neka je $b \in A$ takav da vrijedi $f(b) = B$. Ako bi vrijedilo $b \in B$, tada iz $B = f(b)$ i definicije skupa B slijedi $b \notin f(b)$. Dakle, mora biti $b \notin B = f(b)$. Tada iz definicije skupa B slijedi $b \in B$. Time je dobivena kontradikcija. To znači da ne postoji bijekcija između A i $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Teorem 2.4.3. (Cantor, Schröder[1], Bernsteinov[2] teorem) *Ako postoji injekcija $f : A \to B$ i injekcija $g : B \to A$ tada postoji bijekcija između A i B. Odnosno, ako je $k(A) \leqslant k(B)$ i $k(B) \leqslant k(A)$ tada je $k(A) = k(B)$.*

Prije dokaza prethodnog teorema navodimo Kaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki i Banachovu lemu, koje u ovom radu nećemo dokazivati. Dokazi su preuzeti iz [24].

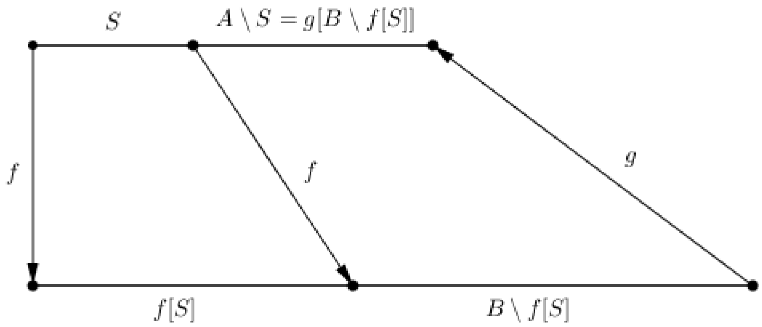
Teorem 2.4.4. (Knaster[3], Tarskijev[4] teorem o fiksnoj točki)
Neka je $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ monotona funkcija, tj. za sve $x, y \subseteq A$ takve da je $x \subseteq y$ vrijedi $F(x) \subseteq F(y)$. Tada postoji $x_0 \subseteq A$ tako da vrijedi $F(x_0) = x_0$.

Lema 2.4.5. (Banachova lema)
Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to A$ proizvoljne funkcije. Tada postoji $S \subseteq A$ tako da vrijedi

$$g[B \backslash f[S]] = A \backslash S.$$

Dokažimo sada teorem 2.4.3.

Dokaz. Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to A$ injekcije. Neka je $S \subseteq A$ koji ima svojstvo iz Banachove leme, tj. $g[B \backslash f[S]] = A \backslash S$. Dana situacija je prikazana na sljedećoj slici.



Pošto je funkcija g injekcija tada je za svaki $x \in A \backslash S$ skup $g^{-1}[\{x\}]$ jednočlan. Za svaki $x \in A \backslash S$ označimo s b_x element iz $B \backslash f[S]$ za kojeg vrijedi $g^{-1}[\{x\}] = \{b_x\}$. Definiramo funkciju $h : A \to B$ ovako:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ b_x, & x \in A \backslash S. \end{cases}$$

[1]Ernst Schröder, (1841. - 1902.), njemački matematičar.
[2]Felix Bernstein, (1878. - 1956.), njemački matematičar.
[3]Bronsław Knaster, (1893. - 1980.), poljski matematičar.
[4]Alfred Tarski, (1901. - 1983.), poljsko-američki logičar i matematičar.

Svojstvo skupa S povlači da je h injekcija te još vrijedi

$$h[A] = h[S] \cup h[A \backslash S] = f[S] \cup g^{-1}[A \backslash S] = f[S] \cup (B \backslash f[S]) = B.$$

To znači da je funkcija h i surjekcija. Dakle, postoji bijekcija između A i B. $\square$

Poglavlje 3

Prebrojivost racionalnih brojeva

Najbliži beskonačni skup nam je skup prirodnih brojeva. Imamo osjećaj kako o skupu prirodnih brojeva znamo sve. Prirodnim je brojevima lako računati, jednostavno ih je uspoređivati... No, skup prirodnih brojeva zbog svoje beskonačnosti ima zanimljivih osobina. Naime, za svaki njegov beskonačni podskup možemo uspostaviti bijekciju s čitavim skupom $\mathbb{N}$ (teorem 2.3.5). Primjeri takvih skupova su skup svih parnih prirodnih brojeva, skup svih neparnih prirodnih brojeva, skup kvadrata prirodnih brojeva, skup višekratnika bilo kojeg prirodnog broja.

Skup prirodnih brojeva možemo uspoređivati i sa skupovima $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Promotrimo prvo odnos skupa prirodnih i cijelih brojeva. Intuicija nas navodi na zaključak kako je skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ brojniji od skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, zbog toga što ima cijelih brojeva koji nisu prirodni, svi negativni cijeli brojevi i nula. Iako se nama ovakvo razmišljanje čini prihvatljivim navodi nas na krivi zaključak. U prvom poglavlju u primjeru 1.2.4 razmotrili smo kako uspostaviti bijekciju između skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

Ako želimo usporediti skup cijelih brojeva sa skupom racionalnih brojeva, možemo primijeniti isti način razmišljanja kao za skupove prirodnih i cijelih brojeva. Intuitivno zaključujemo kako racionalnih brojeva ima više nego cijelih brojeva, a onda očito više i od prirodnih brojeva. Dakle, skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ bogatiji je od skupova prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. To vrijedi zbog gustoće skupa $\mathbb{Q}$:

Teorem 3.0.1. *Skup $\mathbb{Q}$ je gust.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da se između svaka dva različita racionalna broja nalazi barem jedan racionalan broj. Neka je $q_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $q_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$ i $q_1 < q_2$, odnosno tada vrijedi $m_1 n_2 < n_1 m_2$. Promotrimo aritmetičku sredinu brojeva q_1 i q_2. Neka je $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2} = \dfrac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{2 n_1 n_2}$. Budući da su m_1, n_1, m_2, n_2 cijeli brojevi takvi da je $n_1, n_2 \neq 0$, slijedi da su i $m_1n_2 + n_1m_2$ i $2n_1n_2$ cijeli brojevi i $2n_1n_2 \neq 0$, pa je q racionalan broj. Tada transformacijama nejednakosti $q_1 < q$, odnosno $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1n_2 + n_1m_2}{2n_1n_2}$ dolazimo do istinite nejednakosti $m_1n_2 < n_1m_2$. Dakle, $q_1 < q$. Analogno vrijedi i za nejednakost $q < q_2$. Time smo dokazali teorem. $\square$

Stoga u skupu $\mathbb{Q}$ moramo pripaziti na nizanje elemenata, jer u tom skupu ne postoje susjedni elementi. Georg Cantor dokazao je da je i skup racionalnih brojeva prebrojiv. U sljedećoj točki opisat ćemo njegov dokaz. Varijantu tog dokaza već smo naveli u primjeru 1.2.5. Također, kroz sljedeće točke dokazat ćemo da je skup racionalnih brojeva prebrojiv pomoću Calkin-Wilfova i Stern-Brocotova stabla.

3.1 Dijagonalni postupak

Postupak započinjemo ispisivanjem pozitivnih racionalnih brojeva u tablicu tako da se u prvom retku nalaze ispisani svi prirodni brojevi, odnosno razlomci s nazivnikom 1. U redak ispod ispisat ćemo sve pozitivne razlomke s nazivnikom 2, u treći redak ispisujemo pozitivne razlomke s nazivnikom 3 i tako dalje. Takvim nizanjem svaki će pozitivan racionalni broj naći svoje mjesto u tablici. Na primjer, broj $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ nalazi se u m-tom stupcu i n-tom retku, onom što počinje brojem $\frac{1}{n}$.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Sada želimo popisati sve pozitivne racionalne brojeve. Kada bismo krenuli redom ispisivati razlomke iz prvog retka, zatim iz drugog retka i tako dalje, javio bi se problem. Prvi redak je beskonačno dug i zato nikada ne bismo prešli u drugi redak.

U ovom trenutku primjenjujemo dijagonalni postupak prikazan na slici.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \longrightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Uočimo kako neki razlomci predstavljaju isti racionalni broj, na primjer $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$. Stoga svaki broj pri prvoj pojavi ispišemo, a zatim svaki idući koji se ponavlja propustimo. Tako dolazimo do niza:

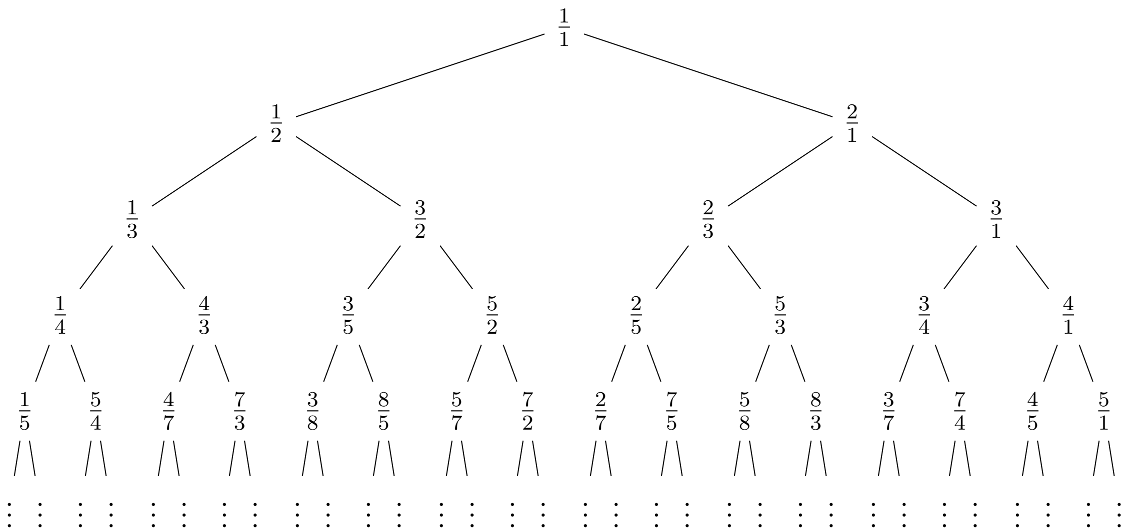
$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \ldots$$

U tom nizu svaki pozitivan racionalan broj nalazi svoje mjesto. Dakle, pozitivne racionalne brojeve posložili smo u niz i time dokazali da je skup svih pozitivnih racionalnih brojeva prebrojiv. Na isti način može se dokazati kako je skup negativnih racionalnih brojeva prebrojiv. Skup racionalnih brojeva sastoji se od skupa pozitivnih racionalnih brojeva, skupa negativnih racionalnih brojeva te nule. Tada prema teoremima 2.3.7 i 2.3.8 slijedi da je skup racionalnih brojeva prebrojiv.

3.2 Calkin-Wilfovo stablo

Calkin-Wilfovo stablo definirali su Neil Calkin, profesor matematike na Sveučilištu Clemson, SAD i Herbert Saul Wilf, 1931. - 2012., američki matematičar. Pomoću Calkin-Wilfova stabla možemo pokazati prebrojivost skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, jer se sastoji od pozitivnih neskrativih racionalnih brojeva.

U korjen stabla upisujemo $\frac{1}{1}$. Svaki čvor u stablu ima točno dva djeteta, odnosno stablo je binarno. Na isti način konstruiramo svako dijete u stablu. Ako je čvoru pridružen razlomak oblika $\frac{a}{b}$ tada ćemo lijevom djetetu pridružiti razlomak oblika $\dfrac{a}{a+b}$, a desnom djetetu razlomak oblika $\dfrac{a+b}{b}$. Tada Calkin-Wilfovo stablo izgleda ovako:



Neka je stablo označeno sa S.

Teorem 3.2.1. *Svaki element stabla je neskrativ pozitivan racionalan broj.*

Dokaz. $\frac{1}{1}$ je neskrativ pozitivan racionalan broj. Pretpostavmo da je neki $\dfrac{a}{b} \in S$ neskrativ pozitivan racionalan broj. Tada su $\dfrac{a}{a+b}$ i $\dfrac{a+b}{b}$ pozitivni racionalni brojevi jer su brojnik i nazivnik dobiveni zbrajanjem prirodnih brojeva. Neskrativi su jer $M(a,b) = M(a+b,b) = M(a,a+b)$. □

Naravno, ovo nije dovoljno da dokažemo da je $S \sim Q^+$ jer nije nužno da S sadrži sve pozitivne neskrative racionalne brojeve. Stoga dokazujemo i sljedeću tvrdnju:

Teorem 3.2.2. *Svaki neskrativ pozitivan racionalan broj se nalazi u S.*

Prije dokaza sljedećeg teorema prisjetimo se Euklidovog algoritma:

Teorem 3.2.3. (Teorem o djeljenju s ostatkom). *Za proizvoljan prirodan broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je b=qa+r,* $0 \leqslant r < a$.

Teorem 3.2.4. (Euklidov algoritam). *Neka su b i $c > 0$ cijeli brojevi. Pretpostavimo da je uzastopnom primjenom teorema* 3.2.3 *dobiven niz jednakosti*

$$\begin{aligned}
b &= cq_1 + r_1, 0 < r_1 < c, \\
c &= r_1 q_2 + r_2, 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, 0 < r_3 < r_2, \\
&\dots \\
r_{j-2} &= r_{j-1} q_j + r_j, 0 < r_j < r_{j-1}, \\
r_{j-1} &= r_j q_{j+1}.
\end{aligned}$$

Tada je (b, c) jednak r_j, posljednjem ostatku različitom od nule.

Dokažimo sada teorem 3.2.2.

Analiza. Neka je $\frac{a}{b}$ proizvoljan neskrativ pozitivan racionalan broj. Želimo pokazati da je u stablu. Kada bi bio u stablu, imao bi roditelja, odnosno bio bi lijevo ili desno dijete nekog čvora.
Lijevo dijete čvora $\frac{m}{n}$ je $\frac{m}{m+n}$. Očito za lijevo dijete vrijedi da mu je nazivnik veći od brojnika. Analogno se pokaže da je u desnom djetetu brojnik veći od nazivnika. Dakle, ako je u razlomku $\frac{a}{b}$ brojnik veći od nazivnika, nazivnik je ostao nepromijenjen, tj. nazivnik od $\frac{a}{b}$ je jednak nazivniku roditelja. Stoga je $\frac{a}{b}$ desno dijete. Analogno, ako je $b > a$, razlomak je lijevo dijete nekog čvora.

Dokaz. $\frac{1}{1}$ je očito u stablu. Neka je $\frac{a}{b}$ proizvoljan neskrativ pozitivan racionalan broj takav da $a \neq b$. Konstruirajmo niz racionalnih brojeva $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots$ takav da je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ i

$$\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \begin{cases} \frac{a_i - b_i}{b_i}, & a_i > b_i \\ \frac{a_i}{b_i - a_i}, & a_i < b_i \end{cases}$$

Niz prekidamo kada je $a_i = b_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$.
Svi $\frac{a_i}{b_i}$ su neskrativi pozitivni racionalni brojevi jer Euklidov algoritam čuva najveću zajedničku mjeru. Pozivamo se na konačnost Euklidovog algoritma da pokažemo da je niz $\frac{a_i}{b_i}$ konačan i da je zadnji član niza upravo $\frac{1}{1}$.
Pretpostavimo sada da $\frac{a}{b}$ nije u stablu. Tada ni sljedeći racionalan broj u nizu nije u stablu (kada bi bio, tada bi $\frac{a}{b}$ bio njegovo dijete pa samim time i čvor stabla).

Indukcijom slijedi da nijedan član niza $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ nije u stablu. No, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1}$ je u stablu, što je kontradikcija. Dakle, $\frac{a}{b}$ je u stablu. Zbog proizvoljnosti $\frac{a}{b}$ tvrdnja slijedi. $\square$

Primjetimo da nam je ovaj dokaz također dao i jedinstven put od traženog racionalnog broja do korjena. Pogledajmo na primjer gdje se u stablu nalazi $\frac{3}{4}$ primjenjujući varijantu Euklidovog algoritma: $(3,4) \to (3,1) \to (2,1) \to (1,1)$. Put od danog racionalnog broja do korjena je jedinstven i svaki se pozitivan racionalan broj pojavljuje kao neskrativi razlomak, tada slijedi da se niti jedan broj ne pojavljuje više od jednom. Sada kada smo pokazali da su čvorovi stabla u bijekciji s pozitivnim racionalnim brojevima, dovoljno je prebrojati čvorove stabla. To možemo učiniti razinu po razinu, s lijeve na desnu stranu. Možemo primjetiti da je skup brojeva na svakoj razini stabla konačan te da razina ima prebrojivo mnogo. Tada prema teoremu 2.3.9 slijedi da je skup $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv.

Dokazi preuzeti iz [10] i [15].

Izgradnjom Calkin-Wilfovog stabla pronašli smo način kako poredati sve pozitivne racionalne brojeve, odnosno imamo niz:

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, \ldots$$

U ovom nizu nalazi se svaki pozitivan racionalan broj. Zatim konstruiramo niz racionalnih brojeva. Na početak niza dodajemo nulu, a zatim kako ispišemo neki pozitivan racionalan broj tako uz njega dopisujemo njemu suprotan broj. Tako dobivamo novi niz:

$$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$$

Svakom elementu dobivenog niza možemo pridružiti jedan prirodan broj na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots \\ 0, & 1, & -1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 2, & -2, & \ldots \end{array}$$

Opisano pridruživanje je bijektivno.

3.3 Stern-Brocotovo stablo

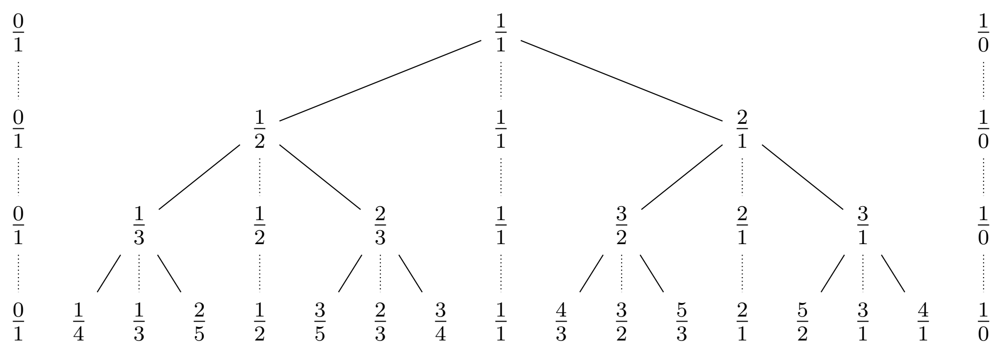
Stern-Brocotovo stablo otkrili su, neovisno jedan o drugome, njemački matematičar Moritz Stern 1858. godine i francuski urar i amaterski matematičar Achille

Brocot 1861. godine. Pomoću Stern-Brocotova stabla također možemo pokazati prebrojivost skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Da bismo konstruirali Stern-Brocotovo stablo, prvo definiramo medijant za dva racionalna broja $\dfrac{a}{b}$ i $\dfrac{c}{d}$ kao

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}.$$

U korijen stabla upisujemo $\frac{1}{1}$. Svaki čvor u stablu ima točno dva djeteta, odnosno stablo će biti binarno. Ako je čvoru pridružen razlomak oblika $\dfrac{a}{b}$ sljedeća dva čvora dobijemo kao medijant razlomka $\dfrac{a}{b}$ i najbližeg racionalnog broja s lijeve strane, odnosno najbližeg racionalnog broja s desne strane.
Kao pomoć u konstrukciji stabla lijevo i desno od razlomka $\dfrac{1}{1}$, koji se nalazi na nultoj razini, upišemo razlomke $\dfrac{0}{1}$ i $\dfrac{1}{0}$ te njih ne brojimo. Sada razlomke na prvoj razini dobijemo kao medijante susjednih razlomaka nulte razine. Na primjer, medijant razlomaka $\dfrac{0}{1}$ i $\dfrac{1}{1}$ s nulte razine je $\dfrac{1}{2}$ na prvoj razini. Iz svakog čvora (uključujući i pomoćne) spuštamo pomoćne čvorove za sljedeću razinu.

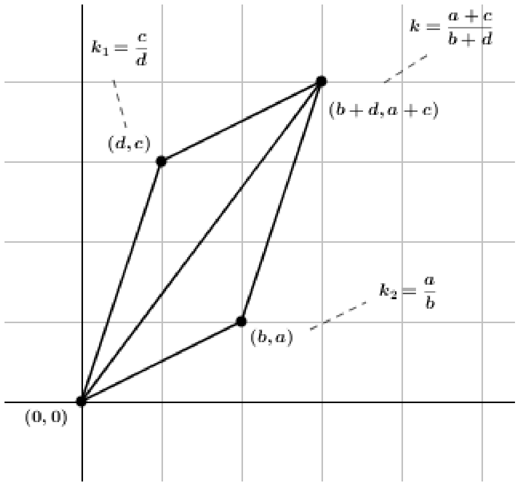


Stern-Brocotovo stablo također sadrži sve neskrative pozitivne racionalne brojeve kao i Calkin-Wilfovo stablo. Prije dokaza te tvrdnje dokažimo neka zanimljiva svojstva Stern-Brocotova stabla:

(1) Ako su $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ dva susjedna razlomka na istoj razini Stern-Brocotova stabla, onda iduća nejednakost vrijedi za medijant na idućoj razini

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} < \frac{c}{d}.$$

Dokaz. Kako bismo dokazali ovu nejednakost, interpretirat ćemo razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ kao nagibe pravaca koji prolaze kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava. Primijetimo kako medijant brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ možemo poistovjetiti sa zbrajanjem neka dva vektora u ravnini (b, a) i (d, c). Prikažemo li to grafički, vidimo da će pravac s nagibom $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ uvijek biti između pravaca s nagibom $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.



Slika 3.1: Grafički prikaz svojstva (1)

□

(2) Ako su $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dva susjedna razlomka na istoj razini Stern-Brocotova stabla, onda vrijedi $bc - ad = 1$.

Dokaz. Dokažimo to matematičkom indukcijom po razinama Stern-Brocotova stabla.
(i) Promotrimo li prvu razinu stabla, tvrdnja je očito istinita.
(ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n-tu razinu stabla, $n \in \mathbb{N}$, za susjedne razlomke $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
(iii) Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ razinu stabla.
Na $n+1$ razini stabla imamo susjedne razlomke za koje prema prethodnom svojstvu vrijedi: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Slijedi:

$$b(a + c) - a(b + d) = bc - ad = 1$$

$$(b + d)c - (a + c)d = bc - ad = 1$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja (2) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

(3) Na n-toj razini Stern-Brocotova stabla, suma brojnika i nazivnika bilo kojeg elementa je barem $n+1$.

Dokaz. Dokažimo to matematičkom indukcijom po razinama Stern-Brocotova stabla.
(i) Na razini $n=1$ imamo $\frac{1}{1}$ pa je tvrdnja očito istinita.
(ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n-tu razinu stabla, suma brojnika i nazivnika bilo kojeg proizvoljnog elementa $\frac{a}{b}$ je $n+1$, $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za $n+1$ razinu stabla.
Neka je $\frac{a}{b}$ proizvoljni element iz stabla na $n+1$ razini. Tada je taj element medijant elementa s razine n, $(\frac{p}{q}, p+q \geqslant n+1)$ i $(\frac{p'}{q'}, p'+q' \geqslant 1)$. Slijedi da suma brojnika i nazivnika elementa $\frac{a}{b}$ iznosi $(n+1)+1$.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja (3) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Teorem 3.3.1. *U Stern-Brocotovu stablu pojavljuje se svaki pozitivan racionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji racionalan broj $\frac{p}{q}$, $M(p,q)=1$ koji se ne nalazi u stablu. Tada na bilo kojoj razini stabla, postoje dva susjedna razlomka takva da

$$\frac{n}{m} < \frac{p}{q} < \frac{n'}{m'}. \tag{3.1}$$

Te razlomke možemo naći na $p+q$ razini. Podijelimo (3.1) s $\frac{p}{q}$. Tada imamo:

$$\frac{nq}{mp} < 1 < \frac{n'p}{m'q},$$

$$mp - nq > 0 \Rightarrow mp - np \geqslant 1,$$

$$n'p - m'q > 0 \Rightarrow n'p - m'q \geqslant 1,$$

što možemo zapisati kao

$$(n'+m')(mp-nq) \geqslant n'+m' \quad i \quad (n+m)(n'q-m'p) \geqslant n+m$$

$$n'mp + m'mp - n'nq - m'nq \geqslant n'+m' \quad i \quad nn'q + mn'q - nm'p - mm'p \geqslant n+m$$

Zbrojimo li ta dva izraza te nakon sređivanja dobivamo:

$$p(n'm - nm') + q(mn' - m'n) \geqslant n' + m' + n + m.$$

Kako su $\frac{n}{m}$ i $\frac{n^{'}}{m^{'}}$ susjedni razlomci prema (2) vrijedi $mn^{'} - nm^{'} = 1$.
Slijedi $p + q \geqslant n^{'} + m^{'} + n + m$.
Također, kako su $\frac{n}{m}$ i $\frac{n^{'}}{m^{'}}$ susjedni razlomci prema (3) vrijedi da je suma brojnika i nazivnika bar jednog od njih $p + q + 1$.
Slijedi $p+q > p+q+1$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da se $\frac{p}{q}$ ne pojavljuje u prvih $p + q$ razina stabla. Dakle, $\frac{p}{q}$ se nalazi u Stern-Brocotovom stablu.
Ovime smo pokazali da su razlomci koji se pojavljuju u Stern-Brocotovom stablu neskrativi pozitivni racionalni brojevi, odnosno za svaki element stabla brojnik i nazivnik su relativno prosti. Također, pokazali smo da se u stablu pojavljuje svaki pozitivan racionalan broj. $\square$

Dokazi preuzeti iz [15] i [19].

Poglavlje 4

Primjeri ekvipotentnih skupova

U ovoj točki prikazat ćemo primjere ekvipotentnih skupova iz [11], [22] i [24].

Primjer 4.0.1. *Skupovi* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Već smo u primjeru 1.2.4 prikazali na koji način uspostaviti bijekciju između skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$, odnosno rekli smo kako je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

bijekcija. Dokažimo to.

Injektivnost:
Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ i neka je $a \neq b$. Razlikujemo četiri slučaja:
1) Ako su a i b parni različiti prirodni brojevi, tada je $f(a) = \frac{a}{2}$ i $f(b) = \frac{b}{2}$. Budući da su a i b različiti, slijedi da su i $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ različiti, tj. $f(a) \neq f(b)$.

2) Ako su a i b neparni različiti prirodni brojevi, tada je $f(a) = \frac{1-a}{2}$ i $f(b) = \frac{1-b}{2}$. Kad bi $f(a)$ i $f(b)$ bili jednaki, tada bi vrijedilo $\frac{1-a}{2} = \frac{1-b}{2}$ što je ekvivalentno s $1-a = 1-b$, tj. $a = b$. Time smo došli u kontradikciju s pretpostavkom da su a i b različiti. Dakle, i u ovom slučaju vrijedi $f(a) \neq f(b)$.

3) Ako je a paran i b neparan, tada je $f(a) = \frac{a}{2}$ i $f(b) = \frac{1-b}{2}$. Kad bi pretpostavili da vrijedi $f(a) = f(b)$ dobili bi ovaj niz jednakosti:

$$\frac{a}{2} = \frac{1-b}{2} \Rightarrow a = 1 - b.$$

Budući da je b prirodan slijedi da je $b \geqslant 1$. Tada je $-b \leqslant -1$ te je $1-b \leqslant 1-1 = 0$, tj. $a \leqslant 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je a prirodan broj. Dakle, i u ovom slučaju vrijedi $f(a) \neq f(b)$.

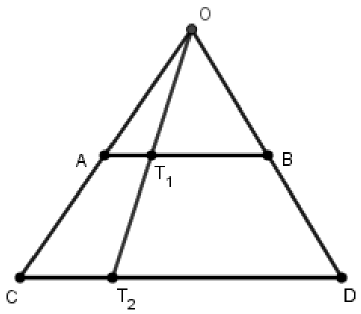
4) Slučaj kad je a neparan i b paran dokazuje se analogno trećem slučaju.

Dakle, u sva četiri slučaja smo dobili da je $f(a) \neq f(b)$. Time smo dokazali da je f injekcija.

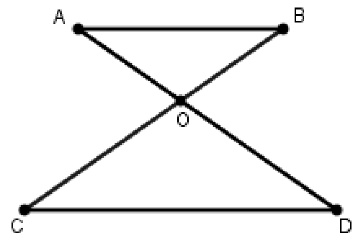
Surjektivnost:
Neka je $y \in \mathbb{Z}$ pozitivan cijeli broj. Tada postoji $x \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $x = 2y$. Također, vrijedi $f(x) = \dfrac{x}{2} = y$, tj. x je praslika (original) broja y.
Neka je $z \in \mathbb{Z}$ negativan cijeli broj. Tada definiramo w ovako: $w = 1 - 2z$. Budući da je $z \in \mathbb{Z}$ i $z < 0$ slijedi da je $-2z \in \mathbb{Z}$ i $-2z > 0$ pa je $1 - 2z > 1$, tj. w je cijeli pozitivan broj, tj. $w \in \mathbb{N}$. Također, vrijedi $f(w) = \dfrac{1-w}{2} = z$, tj. w je praslika (original) broja z.
Za broj 0 original je broj 1.
Dakle, f je surjekcija.
Zaključujemo, f je bijekcija. □

Primjer 4.0.2. *Na dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ različitih duljina koje leže na paralelnim različitim pravcima ima jednako mnogo točaka.*

Dokaz. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ dvije dužine različitih duljina koje leže na različitim paralelnim pravcima. Spojimo točke A i C i točke B i D i neka je točka O sjecište tih spojnica. Promatramo homotetiju sa središtem u točki O kojom se dužina $\overline{AB}$ preslikava na dužinu $\overline{CD}$ (mogli bismo spojiti točke A i D te B i C i tamo gdje se one sijeku dobiti novi centar homotetije kao na slici 4.2). Svakoj točki $T_1 \in \overline{AB}$ tim preslikavanjem pridružujemo jedinstvenu točku $T_2 \in \overline{CD}$. Kako različitim točkama jedne dužine pridružujemo različite točke druge dužine, to je zadano preslikavanje injekcija te kako je svakoj točki jedne dužine pridružena jedna točka druge dužine, dano preslikavanje je i surjekcija. Zaključujemo, dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju jednako mnogo točaka.

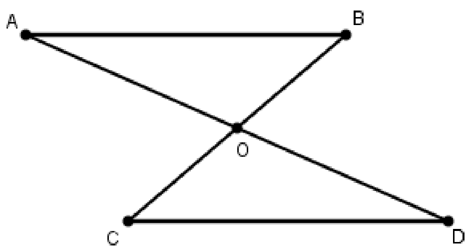


Slika 4.1



Slika 4.2

Napomenimo, u slučaju da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednakih duljina kao na slici 4.3, postupkom kao i za dvije dužine različitih duljina, prikazanih na slici 4.2, dobili bismo točku O kao središte homotetije s koeficijentom homotetije $k = -1$. Odnosno, svaka se točka $T_1 \in \overline{AB}$ centralnom simetrijom obzirom na točku O preslika u jedinstvenu točku $T_2 \in \overline{CD}$. Zatim, analogno kao i u prethodnom slučaju s dužinama različitih duljina zaključujemo da je to preslikavanje bijekcija, odnosno da dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju jednako mnogo točaka.



Slika 4.3

$\square$

Primjer 4.0.3. *Intervali $[a, b]$ i $[c, d]$ su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju koja svakom broju iz intervala $[a, b]$ pridružuje točno jedan broj iz intervala $[c, d]$, odnosno trebamo odrediti bijekciju $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Pritom podrazumijevamo da se radi o pravim intervalima, tj. da je $a < b$ i $c < d$. Najjednostavnije je tražiti linearnu funkciju čiji graf je pravac koji prolazi točkama (a, c) i (b, d). Neka je $f(x) = \alpha x + \beta$ za koju vrijedi $f(a) = c$ i $f(b) = d$. Tada imamo sustav:

$$\alpha \cdot a + \beta = c$$

$$\alpha \cdot b + \beta = d.$$

Iz čega slijedi $\beta = \dfrac{bc-ad}{b-a}$, $\alpha = \dfrac{d-c}{b-a}$. Konačno, $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}x + \dfrac{bc-ad}{b-a}$.
Dokažimo bijektivnost.
Injektivnost: Neka su $p, q \in [a,b]$ i neka je $f(p) = f(q)$. Tada je:

$$\frac{d-c}{b-a}p + \frac{bc-ad}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}q + \frac{bc-ad}{b-a}$$

$$\frac{d-c}{b-a}p = \frac{d-c}{b-a}q$$

$$p = q.$$

Prema definiciji injektivnosti, slijedi f je injekcija.
Surjektivnost: Treba pokazati da za svaki $y \in [c,d]$, postoji $x \in [a,b]$ tako da je $y = f(x)$. Neka je $y \in [a,b]$. Broj x definiramo na ovaj način: $x = \left(y - \dfrac{bc-ad}{b-a}\right) \cdot \dfrac{b-a}{d-c}$, odnosno $x = \dfrac{b-a}{d-c} \cdot y - \dfrac{bc-ad}{d-c}$. Trebamo dokazati da za svaki $y \in [c,d]$ taj broj $x = \dfrac{b-a}{d-c} \cdot y - \dfrac{bc-ad}{d-c}$ pripada intervalu $[a,b]$. Nejednakosti $c \leqslant y \leqslant d$ pomnožimo s pozitivnim brojem $\dfrac{b-a}{d-c}$ i dobivamo

$$\frac{bc-ac}{d-c} \leqslant \frac{b-a}{d-c} \cdot y \leqslant \frac{bd-ad}{d-c}.$$

Uvrstimo li $x + \dfrac{bc-ad}{d-c}$ umjesto $\dfrac{b-a}{d-c} \cdot y$ dobivamo

$$\frac{bc-ac}{d-c} \leqslant x + \frac{bc-ad}{d-c} \leqslant \frac{bd-ad}{d-c}$$

$$\frac{bc-ac-bc+ad}{d-c} \leqslant x \leqslant \frac{bd-ad-bc+ad}{d-c}$$

$$\frac{a(d-c)}{d-c} \leqslant x \leqslant \frac{b(d-c)}{d-c}$$

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

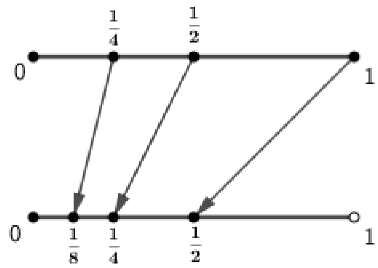
što je trebalo dokazati.
Provjerimo još da je $y = f(x)$. Imamo

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot \left(\frac{b-a}{d-c} \cdot y - \frac{bc-ad}{d-c}\right) + \frac{bc-ad}{b-a} = y - \frac{bc-ad}{b-a} + \frac{bc-ad}{b-a} = y.$$

Prema definiciji surjektivnosti, slijedi f je surjekcija pa je i bijekcija. Zaključujemo da su zadani intervali ekvipotentni. □

Primjer 4.0.4. *Intervali* $[0,1]$ *i* $[0,1\rangle$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju koja svakom broju iz intervala $[0,1]$ pridružuje točno jedan broj iz intervala $[0,1\rangle$, odnosno trebamo odrediti bijekciju $f:[0,1]\to[0,1\rangle$. Uočimo kako je desni rub domene $[0,1]$ zatvoren, dok je kod kodomene $[0,1\rangle$ desni rub otvoren. Zbog toga ne možemo jednostavno upotrijebiti linearnu funkciju kao u prethodnom zadatku. Prikažimo grafički način pridruživanja elemenata ta dva zadana intervala:



Možemo broj 1 iz domene preslikati u broj $\frac{1}{2}$ iz kodomene, tj. $1\longmapsto\frac{1}{2}$, a zatim svaki sljedeći broj preslikamo u dvostruko manji, odnosno $\frac{1}{2}\longmapsto\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\longmapsto\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}\longmapsto\frac{1}{16}$ itd. Označimo sa S skup $S=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\}=\{x\mid x=\frac{1}{2^{n-1}},n\in\mathbb{N}\}$. Tada funkciju $f:[0,1]\to[0,1\rangle$ definiramo ovako:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1]\backslash S\\ \frac{x}{2}, & x\in S.\end{cases}$$

Dokažimo sada da je tako zadana funkcija bijekcija.
Injektivnost: Neka je $x_1\neq x_2$. Razlikujemo četiri slučaja:

1) Ako su $x_1,x_2\in S$, tada zbog $x_1\neq x_2$ vrijedi i $\frac{x_1}{2}\neq\frac{x_2}{2}$, tj. $f(x_1)\neq f(x_2)$.

2) Ako su $x_1,x_2\in[0,1]\backslash S$, tada zbog $x_1\neq x_2$ vrijedi $f(x_1)\neq f(x_2)$.

3) Ako je $x_1\in S$ i $x_2\in[0,1]\backslash S$, tada postoji prirodni broj n takav da je x_1 oblika

$$x=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tada je $f(x_1)=\frac{x_1}{2}=\frac{1}{2^n}$, tj. $f(x_1)\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\}=S\backslash\{1\}$. Budući da je $x_2\in[0,1]\backslash S$ slijedi da ne postoji prirodni broj m takav da je $x_2=\frac{1}{2^{m-1}}$ ni za koji

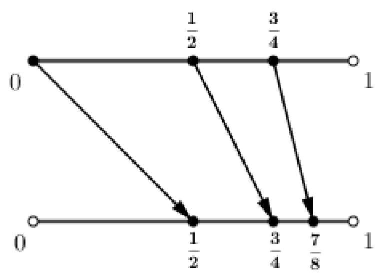
$m \in \mathbb{N}$, tj. $f(x_2) \notin S$. Sad smo dobili da je $f(x_2) \in S$ i $f(x_2) \notin S$, a to znači da su $f(x_1)$ i $f(x_2)$ različiti.

4) Slučaj kad je $x_1 \in [0,1]\backslash S$ i $x_2 \in S$ se radi analogno trećem slučaju.

Dakle, u svakom slučaju smo dobili $f(x_1) \neq f(x_2)$ pa zaključujemo da je f injekcija.
Surjektivnost: Neka je $y \in [0,1\rangle$ i neka y nije oblika $y = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$. Tada je original za y upravo taj isti broj. S druge strane, ako y jest oblika $y = \frac{1}{2^k}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada uzmemo $x = \frac{1}{2^{k-1}}$. Budući da je $k \in \mathbb{N}$, slijedi da je $k-1 \in \mathbb{N}_0$ pa je $x \in S \subseteq [0,1]$. Vrijedi sljedeće: $f(x) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2^{k-1+1}} = \frac{1}{2^k} = y$, tj. x je original od y. Slijedi da je f surjekcija.
Funkcija f je injekcija i surjekcija pa slijedi da je i bijekcija. Zaključujemo kako su zadani intervali ekvipotentni. □

Primjer 4.0.5. *Intervali $[0,1\rangle$ i $\langle 0,1\rangle$ su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju koja svakom broju iz intervala $[0,1\rangle$ pridružuje točno jedan broj iz intervala $\langle 0,1\rangle$, odnosno trebamo odrediti bijekciju $f : [0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$. Uočimo kako je lijevi rub domene $[0,1\rangle$ zatvoren, dok je kod kodomene $\langle 0,1\rangle$ lijevi rub otvoren. Zbog toga ne možemo jednostavno upotrijebiti linearnu funkciju kao u primjeru 4.0.3. Prikažimo grafički način pridruživanja elemenata ta dva zadana intervala:



Dakle, imamo pridruživanje $0 \longmapsto \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \longmapsto \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \longmapsto \frac{7}{8}$, itd. Definirajmo skup S ovako: $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\} = \{x \mid x = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}\}$. Tada funkciju $f : [0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ definiramo ovako:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1\rangle\backslash S \\ \frac{x+1}{2}, & x \in S. \end{cases}$$

Drugim riječima, ako je $x \in S$, tj. ako je x oblika $x = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, tada je $f(x) = 1 - \frac{1}{2^n}$. Dokažimo sada da je tako zadana funkcija bijekcija.

Injektivnost: Neka je $x_1 \neq x_2$. Razlikujemo četiri slučaja:

1) Ako su $x_1, x_2 \in S$, tada zbog $x_1 \neq x_2$ vrijedi i $\frac{x_1+1}{2} \neq \frac{x_2+1}{2}$, tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Ako su $x_1, x_2 \in [0,1\rangle \backslash S$, tada zbog $x_1 \neq x_2$ vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3) Ako je $x_1 \in S$ i $x_2 \in [0,1] \backslash S$, tada postoji prirodni broj n takav da je x_1 oblika

$$x = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tada je $f(x_1) = \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$, tj. $f(x_1) \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\} = S \backslash \{0\}$. Budući da je $x_2 \in [0,1\rangle \backslash S$ slijedi da ne postoji prirodni broj m takav da je $x_2 = 1 - \frac{1}{2^{m-1}}$ ni za koji $m \in \mathbb{N}$, tj. $f(x_2) \notin S$. Sad smo dobili da je $f(x_2) \in S$ i $f(x_2) \notin S$, a to znači da su $f(x_1)$ i $f(x_2)$ različiti.

4) Slučaj kad je $x_1 \in [0,1\rangle \backslash S$ i $x_2 \in S$ se radi analogno trećem slučaju.

Dakle, u svakom slučaju smo dobili $f(x_1) \neq f(x_2)$ pa zaključujemo da je f injekcija.
Surjektivnost: Neka je $y \in \langle 0,1\rangle$ i neka y nije oblika $y = 1 - \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$. Tada je original za y upravo taj isti broj. S druge strane, ako y jest oblika $y = 1 - \frac{1}{2^k}$, za neki $k \in \mathbb{N}$, tada uzmemo $x = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$. Budući da je $k \in \mathbb{N}$, slijedi da je $k-1 \in \mathbb{N}_0$ pa je $x \in S \subseteq [0,1\rangle$. Također, vrijedi:

$$f(x) = \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k-1+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} = y,$$

tj. x je original od y. Slijedi da je f surjekcija.
Funkcija f je injekcija i surjekcija pa slijedi da je i bijekcija. Zaključujemo kako su zadani intervali ekvipotentni. □

Primjer 4.0.6. *Intervali* $[2,5]$ *i* $[30,47\rangle$ *su ekvipotentni.*

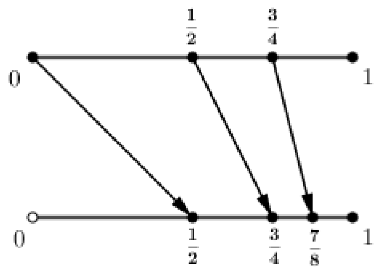
Dokaz. U ovom primjeru najlakše je konstruirati bijekciju između dva dana intervala kompozicijom više funkcija. Konstruirajmo funkcije:

1) Prvo definiramo bijekciju s intervala $[2,5]$ na interval $[0,1]$, odnosno funkciju $f_1 : [2,5] \to [0,1]$. Primjenom linearne funkcije kao u primjeru 4.0.3 slijedi $f_1(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$. Funkcija f_1 je bijekcija, dokaz bijektivnosti provodi se analogno kao u primjeru 4.0.3.
2) Sljedeća bijekcija je s intervala $[0,1]$ na interval $[0,1\rangle$, odnosno funkcija $f_2 : [0,1] \to [0,1\rangle$. Način konstrukcije pravila te funkcije i dokaz bijektivnosti proveli smo u primjeru 4.0.4.
3) Na kraju definiramo bijekciju s intervala $[0,1\rangle$ na interval $[30,47\rangle$, odnosno funkciju $f_3 : [0,1\rangle \to [30,47\rangle$.Primjenom linearne funkcije kao u primjeru 4.0.3 slijedi $f_3(x) = 17x + 30$. Funkcija f_3 je bijekcija, dokaz bijektivnosti provodi se analogno kao u primjeru 4.0.3.

Nakon konstrukcije funkcija f_1, f_2 i f_3 tražena funkcija je $h : [2,5] \to [30,47\rangle$, $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Kako je funkcija h kompozicija triju bijekcija slijedi da je i funkcija h bijekcija. Dakle, zadani intervali su ekvipotentni. □

Primjer 4.0.7. *Intervali* $[0,1]$ *i* $\langle 0,1]$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju koja svakom broju iz intervala $[0,1]$ pridružuje točno jedan broj iz intervala $\langle 0,1]$, odnosno trebamo odrediti bijekciju $f : [0,1] \to \langle 0,1]$. Uočimo kako je lijevi rub intervala domene $[0,1]$ zatvoren, dok je kod intervala kodomene $\langle 0,1]$ lijevi rub otvoren. Zbog toga ne možemo jednostavno upotrijebiti linearnu funkciju kao u primjeru 4.0.3. Prikažimo grafički način pridruživanja elemenata ta dva zadana intervala:



Dakle, imamo pridruživanje $0 \longmapsto \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \longmapsto \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \longmapsto \frac{7}{8}$, itd. Definirajmo skup S ovako: $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\} = \{x \mid x = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}\}$. Tada funkciju $f : [0,] \to \langle 0,1]$ definiramo ovako:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \backslash S \\ \frac{x+1}{2}, & x \in S. \end{cases}$$

Dokaz da je funkcija f bijekcija ide analogno kao u primjeru 4.0.5. Dakle, zadani intervali su ekvipotentni. $\square$

Primjer 4.0.8. *Intervali* $[0,1]$ *i* $\langle 0,1\rangle$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju koja svakom broju iz intervala $[0,1]$ pridružuje točno jedan broj iz intervala $\langle 0,1\rangle$, odnosno trebamo odrediti funkciju $f:[0,1]\to\langle 0,1\rangle$. Traženu funkciju najlakše nam je odrediti uz pomoć kompozicije dviju funkcija:
1) Prvo odredimo bijekciju $f_1:[0,1]\to[0,1\rangle$. U primjeru 4.0.4 pokazali smo kako odrediti pravilo funkcije f_1 te dokazali da je funkcija bijekcija.
2) Druga bijekcija je $f_2:[0,1\rangle\to\langle 0,1\rangle$. U primjeru 4.0.5 pokazali smo kako odrediti pravilo funkcije f_2 te dokazali da je funkcija bijekcija.
Dakle, funkcija $f:[0,1]\to\langle 0,1\rangle$, $f=f_2\circ f_1$ je bijekcija. Zaključujemo kako su zadani intervali ekvipotentni. $\square$

Primjer 4.0.9. *Skup* $\mathbb{R}$ *i interval* $\langle -2\pi,2\pi\rangle$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju $f:\langle -2\pi,2\pi\rangle\to\mathbb{R}$. Prvo definirajmo bijekciju $f_1:\langle -2\pi,2\pi\rangle\to\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Primjenom linearne funkcije kao u primjeru 4.0.3 slijedi $f_1(x)=\frac{x}{4}$. Znamo da je funkcija $f_2:\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=\operatorname{tg}x$ bijekcija. Kompozicijom tih dviju bijekcija slijedi da je funkcija $f:\langle -2\pi,2\pi\rangle\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ bijekcija. Dakle, zadani intervali su ekvipotentni. $\square$

Primjer 4.0.10. *Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$. Dokažimo da je funkcija* $f:\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *bijekcija.*

Dokaz. Injektivnost: Neka je $f(x_1)=f(x_2)$. Ako su $x_1,x_2\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ tada zbog $f(x_1)=f(x_2)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{ax_1+b}{cx_1+d}&=\frac{ax_2+b}{cx_2+d}\\(ax_1+b)(cx_2+d)&=(ax_2+b)(cx_1+d)\\adx_1+bcx_2&=adx_2-bcx_1\\(ad-bc)x_1&=(ad-bc)x_2\\x_1&=x_2.\end{aligned}$$

Funkcija f je injekcija.

Surjektivnost: Neka je $y\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{a}{c}\right\}$. Definiramo broj x ovako: $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$.

Dokažimo da je $x \neq -\frac{d}{c}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\frac{b-dy}{cy-a} = -\frac{d}{c}$.
Množenjem sa zajedničkim nazivnikom dobivamo

$$-dcy + ad = bc - dcy$$

$$ad - bc = 0,$$

a to nije istinito. Dakle, dokazali smo da je $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Također, vrijedi

$$f(x) = \frac{a \cdot \frac{b-dy}{cy-a} + b}{c \cdot \frac{b-dy}{cy-a} + d} = \frac{a(b-dy) + b(cy-a)}{c(b-dy) + d(cy-a)} = \frac{(bc-ad)y}{bc-ad} = y.$$

Funkcija f je surjekcija. Dakle, funkcija f je bijekcija. $\square$

Primjer 4.0.11. *Skupovi* $\mathbb{R}$ *i* $[0, \infty\rangle$ *su ekvipotentni.*

Dokaz. Trebamo definirati bijekciju $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$. Traženu funkciju najlakše je odrediti kao kompoziciju ove četiri bijekcije:
1) Prva bijekcija je $f_1 : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$.

2) Druga bijekcija je $f_2 : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$. Primjenom linearne funkcije kao u primjeru 4.0.3 slijedi $f_2(x) = \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}$.

3) Treću bijekciju $f_3 : \langle 0, 1 \rangle \to [0, 1\rangle$ dobijemo kao inverz funkcije iz primjera 4.0.5.

4) Četvrta bijekcija je $f_4 : [0, 1\rangle \to [0, \infty\rangle$, $f_4(x) = \frac{x}{1-x}$. Funkcija f_4 je bijekcija prema primjeru 4.0.10.
Dakle, funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$, $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ je bijekcija, odnosno skupovi $\mathbb{R}$ i $[0, \infty\rangle$ su ekvipotentni. $\square$

Bibliografija

[1] S. Antoliš, A. Copić, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf, *Matematika 5*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[3] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf, *Matematika 5*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u petom razredu osnovne škole, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[4] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo, N. Zvelf, *Matematika 6*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u šestom razredu osnovne škole, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[5] B. Antunović Piton, T. Djaković, L. Havranek Bijuković, I. Matić, T. Rodiger, *Matematika 8*, udžbenik sa zbirkom zadataka za matematiku u osmom razredu osnovne škole, 2. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[6] I. Baras, R. Kožul Blaževski, J. Mardešić, *O skupovima i ljudima (jedna zaboravljena godišnjica)*, dostupno na: https://hrcak.srce.hr/169558 (rujan, 2018.)

[7] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, web-izdanje, PMF-MO, Zagreb, 2009.
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-zbirka-2009-a.pdf

[8] D. Cindrić, S. Polak, *Nove matematičke priče 1*, udžbenik matematike za prvi razred osnovne škole, Profil, 5. izdanje, Zagreb, 2018.

[9] D. Cindrić, S. Polak, S. Duvnjak, *Nove matematičke priče 2*, udžbenik matematike za drugi razred osnovne škole, Profil, 5. izdanje, Zagreb, 2018.

[10] D. Čulo, *Ekvipotentnost skupova* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Q}$,
dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/sem1617/3as-ekvipotent.pdf (svibanj 2018.)

[11] B. Dakić, *O prebrojivosti i neprebrojivosti*, Matematički panoptikum, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[12] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1*, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[13] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2*, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[14] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, 1. dio, Element, Zagreb, 2014.

[15] P. Dević, *Ekvipotentnost skupova* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Q}$, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/sem1617/3a%20-%20Devic%20-%20Ekvipotentnost%20skupova%20N%20i%20Q.pdf (svibanj 2018.)

[16] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, predavanja, web-izdanje, PMF-MO, Zagreb, 29.9.2017. https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf

[17] D. Jandra Abbaci, K. Ćosić, N. Hižak, F. Sudar, *Nove matematičke priče 3*, udžbenik matematike za treći razred osnovne škole, Profil, 5. izdanje, Zagreb, 2018.

[18] D. Jandra Abbaci, K. Ćosić, N. Hižak, *Nove matematičke priče 4*, udžbenik matematike za četvrti razred osnovne škole, Profil, 5. izdanje, Zagreb, 2018.

[19] J. Kramer, A. M. von Pippich, *Snapshots of Modern Mathematics from Oberwalfach: Special Values of Zeta Functions and Areas of Triangles*, Notices Amer, Math. Soc., 63(8), (2016), 917-922.

[20] Nacionalni dokument nastavnog predmeta matematika, Matematika nakon recenzije, ožujak 2018., dostupno na https://mzo.hr/hr/rubrike/predmetni-kurikulumi (kolovoz 2018.)

[21] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb, 2000.

[22] M. Rašić, A. Rogar, V. Tisanić, *Ekvipotentni skupovi*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/sem1617/3bs-ekvipotentnost.pdf (svibanj 2018.)

[23] N. J. Vilenkin, *Priče o skupovima*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[24] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, web-izdanje, PMF-MO, Zagreb, 2015.
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf

[25] M. Vuković, M. Vuković, *U potrazi za skupovima*,
dostupno na https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/u-potrazi-za-skupovima.pdf (lipanj 2018.)

Sažetak

U ovom radu proučavamo problematiku ekvipotentnosti skupova u srednjoškolskoj matematici. Prvo prikazujemo koliko se o skupovima uči kroz osnovnu i srednju školu te dajemo prikaz kako se ekvipotentnost skupova uvodi u udžbeniku za četvrti razred prirodoslovno-matematičke gimnazije. Nakon toga slijedi pregled osnovnih pojmova, relacija i metoda teorije skupova te prebrojivost racionalnih brojeva dokazujemo pomoću dijagonalnog postupka, Calkin-Wilfova stabla i Stern-Brocotova stabla. Konačno, dajemo i nekoliko primjera ekvipotentnih skupova.

Summary

In this paper we study the issue of equipotent sets in high school mathematics. Firstly, we show what are students learning about sets in primary school and high school and how equipotent sets are introduced in the last grade of mathematical gymnasium. Further, we give the basic terms, properties and methods of set theory. We give proof that rational numbers are countable using diagonal argument, Calkin - Wilf tree and Stern - Brocot tree. Lastly, we give several examples of equipotent sets.

Životopis

Rođena sam 24. veljače 1993. godine u Rijeci. Završila sam Osnovnu školu Julija Benešića u Iloku te opću gimnaziju u Srednjoj školi Ilok. Godine 2012. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te 2016. godine stječem zvanje prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na istom fakultetu.