Schurov komplement

Mifka, Dora

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dora Mifka

SCHUROV KOMPLEMENT

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, rujan, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U linearnoj se algebri često javljaju problemi u kojima je potrebno izračunati determinantu matrice, rang matrice, inverz ili riješiti sustav linearnih jednadžbi. Svaki od ovih problema ima nekoliko metoda koje vode rješenju. No, samo je jedan način rješavanja isti kod svih problema, a to je svođenje matrice na trokutasti ili dijagonalni oblik. Najčešće je upravo taj način i najbrži jer su trokutaste matrice jednostavne za računanje. Cilj ovog rada je predstaviti rješenja navedenih problema za blok-matrice. Vidjet ćemo da je opet najbrži način rješavanja problema svođenje blok-matrice na blok-trokutastu matricu. Upravo pri tom svođenju javlja se blok koji nazivamo Schurov komplement.

Rad je podijeljen u tri glavna poglavlja. U prvom poglavlju uvodimo i definiramo Schurov komplement te dajemo kratak pregled linearne algebre. U drugom poglavlju bavimo se primjenom Schurovog komplementa na kvadratne i regularne matrice, a u trećem poglavlju poopćavamo rezultate iz drugog poglavlja tako da vrijede za pravokutne i singularne matrice.

Osvrnimo se na povijest Schurovog komplementa između 1812. i 1968. godine. Naziv *Schurov komplement* i pripadajuća oznaka prvi se put pojavljuju u člancima u *Basel Mathematical Notes* i *Linear Algebra and its Applications* koje je objavila matematičarka Emilie Virginia Haynsworth. Naziv *Schurov komplement* uvela je u matematičku nomenklaturu u čast poznatog matematičara Issaija Schura (1875.-1941.) koji 1812. godine iskazuje lemu o determinanti Schurovog komplementa (čiji naziv također uvodi Haynsworth). Na temu Schurov komplement, mnogi su poznati matematičari dali svoj doprinos linearnoj algebri, a neki od njih su James Joseph Sylvester, William Jolly Duncan, Alexander Craig Aitken, već spomenuta Emilie Virginia Haynsworth i još mnogi drugi.

Schurov komplement igra važnu ulogu u analizi matrica, statistici, numeričkoj analizi, paralelnom računarstvu i brojnim drugim područjima matematike, a i izvan nje.

Poglavlje 1

Oznake i definicije

Prisjetimo se već poznatih oznaka iz linearne algebre. S $M_{m,n}$ označit ćemo matricu dimenzije $m \times n$ čiji elementi pripadaju polju $\mathbb{F}$. Polje $\mathbb{F}$ označava polje realnih ili kompleksnih brojeva. Često ćemo koristiti i oznaku I_m koja predstavlja jediničnu matricu dimenzije $m \times m$. Koristimo i jednu manje poznatu oznaku za blok-dijagonalne matrice, $A \oplus B$. Ta oznaka predstavlja blok-matricu koja ima blokove A i B na dijagonali, a nul-blokove na preostalim mjestima.

Ovaj rad bavi se proučavanjem blok-matrica, tj. konkretnije, proučavanjem determinante, inverza, ranga i inercije blok-matrice te rješavanjem jako velikih sustava linearnih jednadžbi. Prije nego što riješimo problem svođenja blok-matrice na dijagonalni oblik, prisjetimo se kako smo to radili s matricom čiji su elementi realni ili kompleksni brojevi. Radi jednostavnosti i kasnije analogije s blok-matricom, uzmimo matricu $N \in \mathbb{M}_{2,2}$ oblika

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama nad retcima i stupcima, ako je $a \neq 0$, matricu N transformiramo u dijagonalnu ovako:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix},$$

pri čemu smo u prvom koraku drugom retku dodali prvi redak pomnožen s $-\frac{c}{a}$, a u drugom koraku smo drugom stupcu dodali prvi stupac pomnožen s $-\frac{b}{a}$. Zapišimo gornji postupak u obliku umnoška

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix},$$

pri čemu su matrice kojima slijeva i zdesna množimo matricu N elementarne matrice.

Analognim postupkom možemo od blok-matrice dobiti dijagonalnu blok-matricu. Uzmimo blok-matricu $M \in \mathbb{M}_{m+p,m+n}$ oblika

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pri čemu su $A \in \mathbb{M}_{m,m}$, $B \in \mathbb{M}_{m,n}$, $C \in \mathbb{M}_{p,m}$ i $D \in \mathbb{M}_{p,n}$ matrice nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i A je regularna. Iduća skica će objasniti zašto smo uzeli baš ovakve dimenzije matrica.

$$\begin{array}{cccc} & m & n & \\ m & A & B & m \\ p & C & D & p \\ & m & n & \end{array}$$

Još je nejasno zašto smo pretpostavili da je A kvadratna i regularna. No, to će se razjasniti čim krenemo matricu M transformirati u dijagonalnu. Želimo poništiti blok na mjestu $(2, 1)$. Pitamo se kojom matricom moramo množiti prvi redak da bismo dodavanjem drugom retku na mjestu $(2, 1)$ dobili $C-C$. Kada bismo matricu A pomnožili matricom $-CA^{-1}$ slijeva, dobili bismo $-C$. Kako množenje matrica nije komutativno, pitamo se možemo li $-C$ dobiti i na drugi način: da matricu A pomnožimo zdesna matricom $-A^{-1}C$? Produkt $-CA^{-1}$ postoji jer su matrice C i A^{-1} ulančane, dok produkt $-A^{-1}C$ ne postoji jer matrice A^{-1} i C nisu ulančane. Zato matricu A množimo matricom $-CA^{-1}$ slijeva, a ne matricom $-A^{-1}C$ zdesna. Sada je jasno zašto A mora biti kvadratna i regularna.

Dakle, drugom multiretku matrice M dodajemo prvi multiredak pomnožen s $-CA^{-1}$ slijeva, a zatim drugom multistupcu dodajemo prvi multistupac pomnožen s $-A^{-1}B$ zdesna. Navedene transformacije možemo zapisati ovako:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

pri čemu su matrice kojima množimo matricu M slijeva i zdesna analogoni elementarnih matrica, tj. „elementarne blok-matrice”. Upravo se matrica na mjestu $(2, 2)$ s desne strane zadnje jednakosti naziva **Schurov komplement** M/A (čitati: M po A).

Lako se uvjerimo da vrijedi i sljedeća jednakost, tzv. blok-dijagonalizacijska forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

U svakom od prethodnih primjera, matricu smo mogli dijagonalizirati i krenuvši od elementa/bloka na mjestu $(2, 2)$ ako je element na tom mjestu različit od nule, odnosno, ako je matrica na tom mjestu regularna. Uzmimo matricu $M \in \mathbb{M}_{p+m,n+m}$ oblika

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pri čemu su $A \in \mathbb{M}_{p,n}$, $B \in \mathbb{M}_{p,m}$, $C \in \mathbb{M}_{m,n}$ i $D \in \mathbb{M}_{m,m}$ matrice nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i D je regularna. Tada elementarnim transformacijama nad retcima i stupcima matrice M možemo dobiti blok-dijagonalnu matricu na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

blok-dijagonalizacijska forma gornje matrice M kojoj je blok D regularan je

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Nadalje, lako se provjeri, ako je B regularna, da vrijedi sljedeća jednakost

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ DB^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}A & I \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Analogno, ako je C regularna, vrijedi

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & AC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B - AC^{-1}D \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C^{-1}D \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Primijetimo da prethodne dvije jednakosti ne predstavljaju blok-dijagonalizacijsku formu matrice M, no mi ih ovdje navodimo jer ćemo ih kasnije koristiti u dokazu teorema.

Definicija Schurovog komplementa može se pronaći u [1], [2] i [6].

Definicija 1.0.1. *Neka je matrica $M \in \mathbb{M}_{m+p,m+n}$ oblika*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pri čemu su $A \in \mathbb{M}_{m,m}$, $B \in \mathbb{M}_{m,n}$, $C \in \mathbb{M}_{p,m}$ i $D \in \mathbb{M}_{p,n}$ matrice nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) i A je regularna. Tada definiramo Schurov komplement M/A kao:

$$M/A = D - CA^{-1}B.$$

Ako je D kvadratna ($n = p$) i regularna, tada definiramo Schurov komplement M/D kao:

$$M/D = A - BD^{-1}C.$$

Napomena 1.0.2. *U ostatku rada podrazumijevamo da je matrica M particionirana kao u Definiciji 1.0.1 te da su njeni blokovi A, B, C, D dimenzije kao što je tamo navedeno, osim ako u teoremu ne napomenemo drukčije.*

U nastavku ćemo iskazati još jedan bitan teorem koji nam omogućava računanje Schurovog komplementa blok-matrice kojima su blokovi opet blok-matrice. No, najprije iskazujemo propoziciju koju koristimo u dokazu tog teorema.

Sljedeća propozicija i teorem mogu se naći u [1].

Propozicija 1.0.3. *Neka su dane matrice $M, L \in \mathbb{M}_{m,n}$ te neka je blok A regularan.*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Tada je $(LM)/A = M/A$.

Dokaz. Množenjem matrica L i M dobivamo

$$LM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Sada je očito $(LM)/A = M/A$. □

Teorem 1.0.4 (Kvocijentna formula)**.** *Neka su M, A, E kvadratne regularne matrice takve da je*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Tada je A/E regularni gornji lijevi blok-matrice M/E i vrijedi $M/A = (M/E)/(A/E)$.

Dokaz. Prvu tvrdnju, da je blok A/E regularan dokazat ćemo u idućem poglavlju. Za sada, uzmimo da je istinita. Izračunajmo Schurov komplement M/E kako bismo se uvjerili da je njegov gornji lijevi blok-matrica A/E. Uvrstimo blok particiju od A koji je dan u teoremu na odgovarajuće mjesto matrice M. Sada je

$$M = \begin{pmatrix} E & F & B_1 \\ G & H & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = B$, $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} = C$. Vrijedi

$$M/E = \begin{pmatrix} H & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ C_1 \end{pmatrix} E^{-1} \begin{pmatrix} F & B_1 \end{pmatrix}.$$

Množenjem i oduzimanjem matrica dobivamo da je

$$M/E = \left(\begin{array}{c|c} A/E & * \\ \hline * & * \end{array}\right).$$

Kako nas zanima samo gornji lijevi blok, ostale blokove ne moramo računati. Time smo se uvjerili da je zaista A/E gornji lijevi blok-matrice M/E. Neka je L matrica particionirana ovako

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$LM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Uvrstimo blok particiju od A iz teorema. Dobivamo sljedeću matricu

$$LM = \begin{pmatrix} E & F & B_1 \\ G & H & B_2 \\ 0 & 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Prema Propoziciji 1.0.3 vrijedi

$$M/E = (LM)/E.$$

Po definiciji Schurovog komplementa vrijedi

$$(LM)/E = \begin{pmatrix} H & B_2 \\ 0 & M/A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} E^{-1} \begin{pmatrix} F & B_1 \end{pmatrix}.$$

Množenjem i oduzimanjem matrica dobivamo

$$(LM)/E = \begin{pmatrix} A/E & B_2 - GE^{-1}B_1 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Računanjem Schurovog komplementa $((LM)/E)/(A/E)$ dobivamo $((LM)/E)/(A/E) = M/A$, tj. $M/A = (M/E)/(A/E)$. □

1.1 Pregled linearne algebre

U ovom dijelu navodimo bez dokaza standardne teoreme iz linearne algebre na koje se referiramo kroz cijeli rad. Ovi rezultati mogu se naći u [3], [4] i [5].

Jedan od najpoznatijih i nabitnijih teorema iz linearne algebre je Binet-Cauchyjev teorem koji kroz rad primjenjujemo u većini dokaza.

Teorem 1.1.1 (Binet-Cauchy)**.** *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_m$. Tada vrijedi*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Još jedan poznatiji teorem koji daje formulu za determinantu donjetrokutaste ili gornjetrokutaste matrice je sljedeći teorem.

Teorem 1.1.2. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_m$ trokutasta matrica. Tada je*

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{mm}.$$

Sljedeći teorem je analogon prethodnom teoremu za determinantu blok-trokutaste matrice.

Teorem 1.1.3. *Neka su $X, Y \in \mathbb{M}_m$, $X = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}$ blok-matrice pri čemu je $n \geq 2$, $A \in \mathbb{M}_k$, $B \in \mathbb{M}_{m-k}$, $C \in \mathbb{M}_{k,m-k}$, $D \in \mathbb{M}_{m-k,k}$, $1 \leq k < m$. Tada je*

$$\det X = \det A \det B,$$
$$\det Y = \det A \det B.$$

Sljedeća dva teorema daju formule za determinantu matrice koja je nastala zamjenom dvaju redaka/stupaca te matrice koja je nastala tako da smo nekom retku/stupcu pribrojili neki drugi redak/stupac pomnožen skalarom.

Teorem 1.1.4. *Neka matrica B nastaje međusobnom zamjenom dvaju redaka (ili stupaca) u matrici $A \in \mathbb{M}_m$. Tada je*

$$\det B = -\det A.$$

Teorem 1.1.5. *Neka matrica $B = [b_{ij}]$ nastaje iz matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_m$ tako da nekom retku/stupcu u A pribrojimo neki drugi redak (stupac) matrice A pomnožen skalarom $\lambda \neq 0$. Tada je*

$$\det B = \det A.$$

U nastavku navodimo definiciju regularne matrice.

Definicija 1.1.6. *Za matricu $A \in \mathbb{M}_m$ kažemo da je regularna ako postoji matrica $B \in \mathbb{M}_m$ takva da vrijedi $AB = BA = I$. U tom slučaju matricu B zovemo multiplikativni inverz (ili samo inverz) matrice A i označavamo je s A^{-1}.*

Slijedi i dobro poznati teorem o inverzu umnoška matrica.

Teorem 1.1.7. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_m$ regularne, tada je i njihov umnožak regularan te vrijedi*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Idući teorem daje formulu za inverz blok-trokutaste matrice. Ovaj teorem nije toliko poznat kao oni dosad navedeni, no nama će u radu biti koristan.

Teorem 1.1.8. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_m$, $A = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$ regularne blok-matrice. Tada je*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}.$$

Sljedeći teorem je također manje poznat, ali za nas je bitan.

Teorem 1.1.9. *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ regularna, $A = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix}$, pri čemu su blokovi X, Y regularni. Tada je*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & Y^{-1} \\ X^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prisjetimo se definicije ranga, a zatim i ekvivalentnih matrica.

Definicija 1.1.10. *Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice $M \in \mathbb{M}_{m,n}$ naziva se rang matrice M, u oznaci $r(M)$.*

Teorem 1.1.11. *Za matricu $M \in \mathbb{M}_{m,n}$ vrijedi $r(A) = r(A^\tau)$.*

Iz gornje definicije i teorema možemo izvesti sljedeći zaključak: broj linearno nezavisnih stupaca matrice jednak je broju linearno nezavisnih redaka matrice. Stoga, rang možemo računati i kao maksimalan broj linearno nezavisnih redaka matrice.

Definicija 1.1.12. *Kažemo da je matrica $B \in \mathbb{M}_{m,n}$ ekvivalentna matrici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.*

Sljedeći teorem povezuje elementarne transformacije redaka ili stupaca s rangom te matrice. Ovaj teorem često koristimo u radu.

Teorem 1.1.13. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$. Tada vrijedi $A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.*

U nastavku navodimo definiciju hermitski adjungirane matrice.

Definicija 1.1.14. *Za $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_m$ definira se hermitski adjungirana matrica $A^* = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_m$ s $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j$, gdje je $\overline{a_{ji}}$ kompleksno konjugiran broj broja a_{ji}.*

U radu će se spominjati hermitske i unitarne matrice pa ćemo ih ovdje definirati.

Definicija 1.1.15. *Za matricu $A \in \mathbb{M}_m$ kažemo da je hermitska ako vrijedi $A^* = A$.*

Definicija 1.1.16. *Za matricu $U \in \mathbb{M}_m$ kažemo da je unitarna ako vrijedi $U^*U = UU^* = I$.*

Idući teorem koristimo u dokazu jednog bitnog rezultata u radu.

Teorem 1.1.17. *Ako je matrica $A \in \mathbb{M}_m$ hermitska, onda postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_m$ takva da je $A = U^*DU$, pri čemu je $D \in \mathbb{M}_m$ dijagonalna matrica. Nadalje, $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, -\beta_1, \dots, -\beta_l, 0, \dots, 0)$, pri čemu je $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ skup pozitivnih svojstvenih vrijednosti matrice A, $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ skup negativnih svojstvenih vrijednosti matrice A, a broj nula na dijagonali u D odgovara kratnosti nul svojstvene vrijednosti.*

Prethodni teorem u pojednostavljenom smislu osigurava dijagonalizaciju hermitske matrice. Prisjetimo se definicija svojstvene vrijednosti i spektra.

Definicija 1.1.18. *Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je svojstvena vrijednost matrice $A \in \mathbb{M}_m$ ako postoji stupac $x \in \mathbb{M}_{m,1}$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se spektar i označava sa $\sigma(A)$.*

Sljedeći teorem opisuje spektar hermitske matrice.

Teorem 1.1.19. *Svojstvene vrijednosti hermitske matrice su realni brojevi.*

Sljedeći teorem opisuje spektar blok-trokutaste matrice.

Teorem 1.1.20 (Spektar blok-trokutaste matrice)**.** *Neka su $M, N \in \mathbb{M}_m$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}$ blok-dijagonalne matrice. Tada je*

$$\sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(B),$$
$$\sigma(N) = \sigma(A) \cup \sigma(B).$$

Definirat ćemo relaciju sličnosti između dvije matrice, a zatim iskazujemo teorem koji povezuje slične matrice i njihove svojstvene vrijednosti.

Definicija 1.1.21. *Za matrice $A, B \in \mathbb{M}_m$ kažemo da su slične ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{M}_m$ takva da vrijedi $A = S^{-1}BS$.*

Teorem 1.1.22. *Slične matrice imaju iste svojstvene vrijednosti.*

U nastavku ćemo navesti teorem u kojem spominjemo pozitivno semidefinitne matrice pa definirajmo najprije pozitivno semidefinitne matrice.

Definicija 1.1.23. *Hermitska matrica $P \in \mathbb{M}_m$ je pozitivno definitna ako za svaki stupac $x \in \mathbb{M}_{m,1}$, $x \neq 0$ vrijedi*

$$x^*Ax > 0.$$

Matrica P je pozitivno semidefinitna ako za svaki stupac $x \in \mathbb{M}_{m,1}$, $x \neq 0$ vrijedi

$$x^*Ax \geq 0.$$

Sljedeći teorem može se naći u [5].

Teorem 1.1.24 (Polarna dekompozicija matrice)**.** *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$. Tada postoje pozitivno semidefinitne matrice $P_1, P_2 \in \mathbb{M}_m$ i unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_m$ takve da je*

$$A = P_1 U = U P_2.$$

Matrice P_1 i P_2 su jedinstveno određene s A, a ako je A regularna, onda je i U jedinstveno određena s A. Umnožak $P_1 U$ nazivamo desna polarna dekompozicija, a umnožak $U P_2$ lijeva polarna dekompozicija.

Prethodni teorem nam zapravo znači da se svaka matrica može rastaviti na produkt unitarne i pozitivno semidefinitne matrice te pozitivno semidefinitne i unitarne matrice.

Poglavlje 2

Primjena Schurovog komplementa

2.1 Determinanta

Determinanta matrice ima bitnu ulogu u računanju inverza matrice te rješavanju sustava čime se dalje bavimo u sljedećim potpoglavljima. Stoga je uvijek zanimljivo za danu matricu promotriti njenu determinantu. U našem slučaju, promatrat ćemo determinantu blok-matrice, a posebno i determinantu Schurovog komplementa. Također, navest ćemo i identitet koji svoju primjenu nalazi u računanju determinante vrlo velikih matrice. Teoremi iz ovog dijela mogu se naći u [1] i [2].

Teorem 2.1.1 (Schurova formula)**.** *Neka je M kvadratna matrica particionirana kao u Definiciji 1.0.1 te neka je A regularna. Tada je determinanta Schurovog komplementa jednaka*

$$\det(M/A) = \det M / \det A.$$

Analogno, ako je D regularna, tada je determinanta Schurovog komplementa jednaka

$$\det(M/D) = \det M / \det D.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti uz pretpostavku da je A regularna. Izračunajmo determinantu obje strane jednakosti (1.2). Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na tu jednakost, dobivamo

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

Prema Teoremu 1.1.3 po kojem je determinanta blok-trokutaste matrice jednaka umnošku determinanti dijagonalnih blokova dobivamo sljedeću jednakost

$$\det M = \det A \cdot \det(M/A)$$

Kako je A regularna, to je njena determinanta različita od nule pa drugu jednakost slobodno dijelimo s $\det A$ pa vrijedi

$$\det(M/A) = \det M/\det A.$$

Analogno, kada je D regularna, iz jednakosti (1.4) se dokaže da je

$$\det(M/D) = \det M/\det D.$$

□

Primijetimo, ako je A regularna, iz Schurove formule direktno slijedi da je M regularna ako i samo ako je M/A regularna. Ovaj zaključak ćemo koristiti pri računanju inverza u sljedećem potpoglavlju. Primijetimo također da je ovim zaključkom dokazan i prvi dio Kvocijentne formule (Teorem 1.0.4).

U nastavku ćemo primjenom prethodnog teorema izvesti nekoliko važnih rezultata.

Teorem 2.1.2 (Sylvestrov identitet)**.** *Neka je $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, $B \in \mathbb{M}_{n,m}$, $I_m \in \mathbb{M}_m$ te $I_n \in \mathbb{M}_n$. Tada je*

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Dokaz. Uz dane pretpostavke teorema uzmimo još i kvadratnu matricu M dimenzije $m \times n$ oblika:

$$M = \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}.$$

Razlog uzimanja baš ovakve matrice je intuitivan; kada bi elementi ove blok-matrice bili realni brojevi, determinanta bi bila $\det M = 1 + BA = 1 + AB$.

Izračunajmo determinantu ove matrice na dva načina primjenom Schurove formule. Kako je I_m regularna i M kvadratna, imamo:

$$\det M = \det(I_m) \cdot \det(M/I_m) = \det(I_m) \cdot \det(I_n - BI_m^{-1}(-A)) = \det(I_n + BA). \tag{2.1}$$

Kako je I_n regularna, imamo:

$$\det M = \det(I_n) \cdot \det(M/I_n) = \det(I_n) \cdot \det(I_m - (-A)I_n^{-1}B) = \det(I_m + AB). \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) dobivamo traženu jednakost:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

. □

Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $m >> n$. Tada je $I_n + BA \in \mathbb{M}_n$ matrica puno manje dimenzije nego matrica $I_m + AB \in \mathbb{M}_m$ pa prema prethodnom teoremu tada možemo računati determinantu manje matrice umjesto determinante velike matrice. Ovaj teorem svoju primjenu nalazi u teoriji slučajnih matrica.

Prirodno se nameće pitanje možemo li dobiti neki rezultat ako jediničnu matricu zamijenimo bilo kakvom matricom. Odgovor na to pitanje daje sljedeća lema.

Lema 2.1.3. *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ regularna te neka su $B \in \mathbb{M}_{m,n}$ i $C \in \mathbb{M}_{n,m}$. Tada vrijedi*

$$\det(A + BC) = \det(A) \cdot \det(I_n + CA^{-1}B).$$

Dokaz. Dokaz provodimo na analogan način kao i prethodni. Uz dane pretpostavke leme, uzmimo još i matricu $M \in \mathbb{M}_{m+n}$ oblika

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & I_n \end{pmatrix}.$$

Razlog uzimanja baš ovakve matrice je intuitivan; kada bi elementi ove blok-matrice bili realni brojevi, determinanta bi bila $\det M = A + BC$.
Izračunajmo determinantu ove matrice na dva načina primjenom Schurove formule.
Kako je A regularna i M kvadratna, imamo

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(M/A) = \det(A) \cdot \det(I_n + CA^{-1}B). \tag{2.3}$$

Kako je I_n regularna, imamo

$$\det(M) = \det(I_n) \cdot \det(M/I_n) = \det(I_n) \cdot \det(A - BI_n^{-1}(-C)) = \det(A + BC). \tag{2.4}$$

Iz (2.3) i (2.4) dobivamo traženu jednakost. □

2.2 Inverz

U ovom dijelu bavimo se inverzom blok-matrica pa ćemo najprije izvesti formulu za inverz. Teoremi iz ovog dijela preuzeti su iz [1] i [2].

Teorem 2.2.1. *Neka je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ te neka su M i A regularne matrice. Tada je M/A regularna te je*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Da je M/A regularna već smo dokazali u prethodnom dijelu (iz Schurove formule).

Kako bismo izveli formulu za inverz, M ćemo zapisati kao produkt dviju regularnih matrica, blok donjetrokutaste matrice P i blok gornjetrokutaste matrice Q. Primijetimo, P je regularna jer na dijagonali ima jedinice, a Q ima regularan blok A i regularan Schurov komplement $Q/A = M/A$ pa je po Schurovoj formuli i sama regularna.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}}_{Q},$$

pri čemu su A i I_m kvadratne matrice dimenzije m, D i I_n kvadratne matrice dimenzije n, B je matrica dimenzije $m \times n$, a C je matrica dimenzije $n \times m$. Sada imamo

$$\begin{aligned} M &= PQ \\ M^{-1} &= (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zapišimo P^{-1} kao blok-matricu oblika

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}.$$

Iz $PP^{-1} = I$ računamo inverz

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Nakon množenja izjednačavanjem blokova dobivamo sustav

$$\begin{aligned} X &= I \\ Y &= 0 \\ CA^{-1}X + Z &= 0 \\ CA^{-1}Y + W &= I. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Rješavanjem sustava (2.6) dobivamo

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Zapišimo sada Q^{-1} kao blok-matricu oblika

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}.$$

Iz $QQ^{-1} = I$ računamo inverz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Nakon množenja izjednačavanjem blokova dobivamo sustav

$$\begin{aligned} AX + BZ &= I \\ AY + BW &= 0 \\ (D - CA^{-1}B)Z &= 0 \\ (D - CA^{-1}B)W &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Znamo da je $D-CA^{-1}B = M/A \neq 0$ jer je M/A regularna, pa postoji $(M/A)^{-1}$ te rješavanjem sustava (2.8) dobivamo

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Sada uvrstimo (2.7) i (2.9) u (2.5). Uvođenjem oznake $M/A = D - CA^{-1}B$ za Schurov komplement konačno imamo:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Analognim postupkom, ako je D regularna, dobivamo:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

□

Primijetimo da su posljednje dvije matrice „centralnosimetrične" ako A zamijenimo s D te B s C, i obratno. Zanimljivo je da od jednostavnih pretpostavki (da su M i A ili M i D regularne) dobivamo ovakve pravilnosti pa se prirodno nameće pitanje što dobivamo uvedemo li još neku pretpostavku. Sljedeći nam teoremi daju odgovore upravo na ta pitanja.

Teorem 2.2.2 (Duncanova formula inverzije)**.** *Neka je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ te neka su M, A i D regularne matrice. Tada je*

$$(M/D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}. \tag{2.12}$$

Dokaz. Ovaj rezultat slijedi direktno iz prethodnog teorema izjednačavanjem (2.10) i (2.11). U originalnim oznakama imamo:

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1}.$$

Izjednačavanjem dobivamo i sljedeću jednakost:

$$(M/A)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1},$$

odnosno, u originalnim oznakama:

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1}.$$

□

Specijalizirajmo prethodne teoreme tako da proučimo kako izgleda inverz regularne blok-matrice kojoj su svi blokovi regularne matrice jednakih dimenzija. No, kako bismo proučili taj slučaj, izvedimo prvo formulu za inverz uz pretpostavku da je B ili C regularna matrica.

Teorem 2.2.3. *Neka je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ te neka su M i B kvadratne i regularne matrice. Tada je M/B regularna te je*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -(M/B)^{-1}DB^{-1} & (M/B)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(M/B)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(M/B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Dokažimo najprije prvi dio teorema: ako su M i B regularne, tada je M/B regularna. Zapišimo M kao u (1.5). Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na tu jednakost dobivamo

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ DB^{-1} & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & 0 \\ B^{-1}A & I \end{vmatrix}.$$

Primjenom Teorema 1.1.3 o determinanti blok-trokutaste matrice imamo

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{vmatrix}.$$

Gornju blok-matricu možemo zamjenom redaka transormirati u blok-dijagonalnu matricu. Zamjenom dva retka matrice determinanti te matrice mijenja se predznak pa vrijedi

$$\det M = (-1)^k \begin{vmatrix} C - DB^{-1}A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix},$$

pri čemu je k broj obavljenih zamjena redaka. Opet, primjenom Teorema 1.1.3 dobivamo

$$\det M = (-1)^k \det(C - DB^{-1}A) \cdot \det(B)$$

te uvođenjem oznake $M/B = C - DB^{-1}A$ za Schurov komplement imamo

$$\det M = (-1)^k \det(B) \cdot \det(M/B).$$

Kako su $\det M$ i $\det B$ različite od nule, slijedi da je i $\det(M/B)$ različita od nule, odnosno, M/B je regularna.

Izvod formule za inverz provest ćemo na drugačiji način nego u Teoremu 2.2.1 kako bismo pokazali više različitih dokaza za analogne tvrdnje. Pretpostavimo da su M i B regularne. Koristimo opet zapis matrice M kao u (1.5). Dakle,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ DB^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}A & I \end{pmatrix}.$$

Označimo s M^{-1} inverz matrice M. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}A & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ DB^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \\ &\overset{1.1.8, 1.1.9}{=} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -DB^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (M/B)^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -DB^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (M/B)^{-1} \\ -B^{-1} & -B^{-1}A(M/B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -DB^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(M/B)^{-1}DB^{-1} & (M/B)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(M/B)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(M/B)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Analogno, ako su M i C regularne, iz zapisa (1.6) dobivamo

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -C^{-1}D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ (M/C)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -AC^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C^{-1}D(M/C)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(M/C)^{-1}AC^{-1} \\ (M/C)^{-1} & -(M/C)^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Primijetimo da smo opet dobili „centralnosimetrične” matrice ako B zamijenimo s C te D s A i obratno. □

Sljedeći teorem daje nam vrlo jednostavan inverz ako su svi blokovi matrice kvadratni, regularni i jednakih dimenzija.

Teorem 2.2.4 (Aitkenova formula). *Neka je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ te neka su M, A, B, C i D regularne matrice te neka su svi blokovi jednakih dimenzija. Tada je*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & (M/B)^{-1} \\ (M/C)^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Ako matricu M komplementiramo po A, B, C i D te izvedemo inverz M^{-1} za svaki od komplementa, dobivamo redom formule (2.10), (2.11), (2.13) i (2.14). No, kako se u sva četiri slučaja radi o istoj matrici (M^{-1}), za svaki blok možemo odabrati jedan od četiri različita zapisa. Od ta četiri zapisa po bloku, odaberemo onaj koji se javlja u (2.15). □

Napomena 2.2.5. *Primijetimo da u prethodnom teoremu stoji pretpostavka da blokovi moraju biti jednakih dimenzija. Provedimo diskusiju u kojoj ćemo objasniti zašto je ta pretpostavka potrebna. Kako bi Schurovi komplementi uopće postojali, svi blokovi moraju biti regularni, a posebno, i kvadratni. Neka je $A \in \mathbb{M}_k$. Tada je $B \in \mathbb{M}_{k,p}$ i $C \in \mathbb{M}_{r,k}$. No, kako su B i C kvadratne, mora biti $k = p = r$ pa je i $D \in \mathbb{M}_{r,p}$ zapravo $k \times k$ matrica.*

Teorem 2.2.6 (Woodburyjeva formula). *Neka su $A \in \mathbb{M}_m$, $B \in \mathbb{M}_{m,n}$, $C \in \mathbb{M}_{n,m}$, $T \in \mathbb{M}_n$ te neka su A, T i $A + BTC$ regularne. Tada je*

$$(A + BTC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BT(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1}.$$

Dokaz. Primijetimo sličnost Woodburyjeve i Duncanove formule (Teorem 2.2.2). Woodbury je 6 godina nakon Duncana došao do istog rezultata kao i Duncan, a također i do ovog teorema koji je po njemu i dobio ime. Ovaj teorem je zapravo generalizacija Duncanove formule. Već u samim pretpostavkama javlja se matrica T koju dosad nismo spominjali niti smo koristili tu oznaku. Zapravo, ako uvedemo supstituciju $T = -D^{-1}$, s lijeve strane gornje jednakosti dobivamo lijevu stranu jednakosti Duncanove formule, a desne strane jednakosti u Woodburyjevoj i Duncanovoj formuli naizgled nisu jednake. U nastavku dokazujemo da su i desne strane jednake uz supstituciju $T = -D^{-1}$. Raspišimo desnu stranu jednakosti Woodburyjeve formule ovako:

$$\begin{aligned} A^{-1} - A^{-1}BT(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}BT(T(I + CA^{-1}BT))^{-1}TCA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BT(I + CA^{-1}BT)^{-1}(T^{-1})TCA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BT(I + CA^{-1}BT)^{-1}CA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BT((T^{-1} + CA^{-1}B)T)^{-1}CA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BT(T^{-1})(T^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}B(T^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju $T = -D^{-1}$ (koristimo i oblik $T^{-1} = -D$) kojom dobivamo:

$$A^{-1} - A^{-1}B(-D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

Desna strana gornje jednakosti je upravo desna strana Duncanove formule. Dakle, dokazali smo da su desne strane Woodburyjeve i Duncanove formule jednake (uz supstituciju), a kako smo već dokazali da su i lijeve strane tih formula jednake, time smo dokazali naš teorem.

Dokaz možemo provesti i na drugi način; tako da ustanovimo da je desna strana jednakosti Woodburyjeve formule inverz izraza $A+BTC$. U dokazu će se pojaviti donji izraz koji nećemo na prvu znati pretvoriti u nama koristan izraz, pa ga zato izdvajamo prije dokaza i pretvaramo u oblik koji će nam u dokazu biti pogodan za pojednostavljivanje.

$$(A + BTC)A^{-1}BT = BT + BTCA^{-1}BT = B(T + TCA^{-1}BT) \tag{2.16}$$

Kako znamo da je

$$(A + BTC)(A + BTC)^{-1} = I, \tag{2.17}$$

ako dokažemo da je

$$(A + BTC)(A^{-1} - A^{-1}BT(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1}) = I, \tag{2.18}$$

tada smo dokazali teorem. Računanjem gornjeg umnoška dobivamo:

$$\begin{aligned}
& (A + BTC)(A^{-1} - A^{-1}BT(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1}) \\
= \; & (A + BTC)A^{-1} - (A + BTC)(A^{-1}BT)(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1} \\
\overset{(2.16)}{=} \; & (A + BTC)A^{-1} - B(T + TCA^{-1}BT)(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1} \\
= \; & I + BTCA^{-1} - BTCA^{-1} \\
= \; & I.
\end{aligned}$$

Sada iz (2.17) i (2.18) slijedi tvrdnja teorema:

$$(A + BTC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BT(T + TCA^{-1}BT)^{-1}TCA^{-1}.$$

□

Primijetimo da je razlika između ove dvije formule u načinu primjene; dok je Duncanova formula povezana sa Schurovim komplementom i matricom M čiji su elementi blokovi A, B, C i D, Woodbury daje formulu pomoću koje računamo inverz izraza $A + BTC$ u kojem su A, B, C i T nezavisne matrice (ne moraju biti blokovi neke druge matrice).

Ovaj teorem nam zapravo daje formulu pomoću koje računamo inverz $(A+BTC)^{-1}$. Na prvu nam se čini teže izračunati desnu stranu gornje jednakosti, no, u numeričkoj analizi gdje ova formula nalazi svoju primjenu, često je dan A^{-1} te je lakše izačunati inverz izraza $T + TCA^{-1}BT$ (nego traženi inverz), a samim time i cijelu desnu stranu jednakosti.

Woodburyjeva formula ima nekoliko zanimljivih posljedica, a mi ovdje navodimo jednu od njih.

Teorem 2.2.7 (Sherman-Morrison)**.** *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ regularna i neka su b, $c \in \mathbb{M}_{m,1}$ stupčasti vektori. Tada je $A + bc^\tau$ regularna ako i samo ako je $1 + c^\tau A^{-1} b \neq 0$. Ako je $A + bc^\tau$ regularna, onda je*

$$(A + bc^\tau)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bc^\tau A^{-1}}{1 + c^\tau A^{-1} b}.$$

Dokaz. Napomenimo prvo zašto za matricu $1 + c^\tau A^{-1} b$ pišemo da je različita od nule umjesto regularna, a tada će biti jasno i zašto tu matricu pišemo u nazivniku gornje jednakosti. Kako su b i c stupčasti vektori, to je produkt $c^\tau A^{-1} b$ matrica dimenzije 1×1 koju onda poistovjećujemo s njenim jedinim elementom. To opravdava i postojanje sume $1 + c^\tau A^{-1} b$.

Dokažimo prvi dio teorema: $A + bc^\tau$ je regularna ako i samo ako je $1 + c^\tau A^{-1} b \neq 0$. Iskoristimo sada lemu (2.1.3). Kako je A regularna, vrijedi:

$$\det(A + bc^\tau) = \det(A) \cdot \det(I_1 + c^\tau A^{-1} b).$$

Kako je $I_1 = 1$, imamo:

$$\det(A + bc^\tau) = \det(A) \cdot \det(1 + c^\tau A^{-1} b).$$

Pretpostavili smo da je A regularna pa vrijedi $\det A \neq 0$. Stoga je $\det(A+bc^\tau) \neq 0$ ako i samo ako je $\det(1 + c^\tau A^{-1} b) \neq 0$, odnosno $A + bc^\tau$ je regularna ako i samo ako je $1 + c^\tau A^{-1} b \neq 0$.

Dokažimo sada i drugi dio teorema, tj. formulu:

$$(A + bc^\tau)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bc^\tau A^{-1}}{1 + c^\tau A^{-1} b}.$$

Ova formula je zapravo specijalan slučaj Woodburyjeve formule (2.2.6) u kojoj je $T = I_1$. Raspišimo sada izraz $(A + bc^\tau)^{-1}$ po Woodburyjevoj formuli:

$$(A + bc^\tau)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} b (1 + c^\tau A^{-1} b)^{-1} c^\tau A^{-1}.$$

Već smo konstatirali da je $1 + c^\tau A^{-1} b$ skalar, pa gornju jednakost možemo pisati i ovako:

$$(A + bc^\tau)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bc^\tau A^{-1}}{1 + c^\tau A^{-1} b}.$$

Primijetimo da smo dobili upravo jednakost koju je i trebalo dokazati. □

2.3 Sustavi linearnih jednadžbi

Znamo da matrice imaju bitnu primjenu u rješavanju sustava linearnih jednadžbi pa je zato ovaj dio posvećen upravo sustavima linearnih jednadžbi. Znamo iz vlastitog iskustva koliko matrični zapis sustava linearnih jednadžbi može olakšati i ubrzati račun, no, zamislimo jako velik sustav linearnih jednadžbi te njegov matrični prikaz. Svjesni smo toga da nam u takvoj situaciji ni matrični prikaz ne bi puno olakšao posao. Kako matematičari vole u kompleksnim situacijama kao što je ova tražiti nove metode koje pružaju jednostavnije rješavanje problema, tako su i za ovaj problem našli rješenje.

Kada u matematici naiđemo na problem, često mu pristupamo tako da ga pokušamo razložiti na manje probleme te riješiti njih. Tako ćemo i dani sustav razložiti na manje sustave.

Kroz sljedeći primjer demonstrirat ćemo dva načina rješavanja sustava jednadžbi te predstaviti teorem koji ćemo zatim primijeniti kao drugi način rješavanja primjera. Za demonstraciju koristimo manji sustav linearnih jednadžbi umjesto jako velikog jer je u prvom planu ovog rada primjena Schurovog komplementa i predstavljanje bitnih teorema, no, trebamo imati na umu da se teorem kojeg navodimo primjenjuje kod velikih sustava.

Primjer 2.3.1. *Riješimo sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Gaussovom metodom eliminacije dobivamo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & -2 & -4 & | & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, rješenje sustava je $(1, -1, 1)$.
Sada se pitamo kako bismo mogli ovaj sustav riješiti na drukčiji način. Matrični prikaz sustava možemo zapisati ovako: $MX = N$*, pri čemu je* M *matrica koeficijenata sustava,* X *je matrica nepoznanica, a* N *matrica slobodnih članova sustava. Uvrstimo* M*,* X *i* N *i dobivamo:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Već smo spominjali razlaganje problema na manje probleme pa se pitamo što to u našem slučaju znači. Na primjer, matricu možemo razložiti na manje matrice tako da je raščlanimo na blokove. Već nas sam spomen blok-matrice asocira na prijašnja razmatranja pa možemo pretpostaviti da će nas ova metoda voditi u pravom smjeru. Matricu M možemo raščlaniti na blokove na više načina, a mi ćemo odabrati sljedeći:

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Pritom moramo biti pažljivi pri raščlanjivanju X i N na blokove jer su sada blokovi tih matrica jedinstveno određeni matricom M.

$$X = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right), N = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Prije nego što nastavimo sa rješavanjem primjera, trebat će nam sljedeći teorem preuzet iz [1].

Teorem 2.3.2. *Neka je dan sustav linearnih jednadžbi $MX = N$, pri čemu je M matrica koeficijenata sustava oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\tau$ je matrica nepoznanica, $N = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^\tau$ je matrica slobodnih članova sustava. Ako su M i D regularne, tada je*

$$x = (M/D)^{-1}(p - BD^{-1}q).$$

Analogno, ako su M i A regularne, tada je

$$y = (M/A)^{-1}(q - CA^{-1}p).$$

Dokaz. Izrazimo X iz jednadžbe $MX = N$ i to tako da jednadžbu pomnožimo s M^{-1} slijeva. Iz pretpostavke da je M regularna, znamo da postoji M^{-1}. Pretpostavimo još da je i D regularna pa je onda M^{-1} prema (2.11) jednak

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sada u $X = M^{-1}N$ uvrstimo X, M^{-1} i N te dobivamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Nakon množenja matrica, izjednačavanjem blokova dobivamo $x = (M/D)^{-1}(p - BD^{-1}q)$. Osim x možemo izraziti i y, no y ima jednostavniji prikaz ako pretpostavimo da je A regularna te gornji postupak provedemo za M^{-1} oblika (2.10), tj.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Opet, u $X = M^{-1}N$ uvrstimo X, M^{-1} i N te dobivamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Nakon množenja matrica izjednačavanjem blokova dobivamo $y = (M/A)^{-1}(q - CA^{-1}p)$. □

Još ćemo kratko prokomentirati ovaj teorem. U pretpostavci teorema je već dan sustav u obliku $MX = N$, pa raspišimo sustav u obliku jednadžbi:

$$\begin{aligned} Ax + By &= p \\ Cx + Dy &= q. \end{aligned}$$

Kada bismo ovaj sustav riješili, dobili bismo upravo x i y iz teorema. Znamo da sustav jednadžbi može imati nula rješenja, jedinstveno rješenje ili beskonačno mnogo rješenja. Kako se ovaj teorem može primijeniti za M, A i D regularne, odnosno, teorem ne vrijedi za bilo kakav sustav jednadžbi, istražimo sada odnos rješenja jednadžbe i regularnosti matrica M, A i D. Primijetimo najprije da ovaj teorem možemo primijeniti jedino na kvadratne sustave (one koji imaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica) jer po pretpostavci teorema matrica M mora biti regularna, što znači da je kvadratna.

Opet, iz pretpostavke da je M regularna i kvadratna po definiciji je sustav $MX = N$ Cramerov. Nadalje, Cramerov sustav je rješiv te mu je rješenje jedinstveno pa zaključujemo da će nas ovaj teorem sigurno dovesti do rješenja koje će biti jedinstveno. Još jedan zaključak vrijedi napomenuti: ovaj teorem ne možemo primijeniti na sustave koji imaju beskonačno mnogo rješenja ili na one koji nemaju rješenje.

Prirodno se nameće pitanje postoji li slična metoda rješavanja sustava koji nisu Cramerovi, tj. hoće li nam i tada Schurov komplement poslužiti. Kada sustav nije Cramerov možemo primijeniti poopćenje Schurovog komplementa, no o tome ćemo više u sljedećem poglavlju.

Primijetimo da u dosadašnjoj raspravi nismo spominjali regularnost matrica A i D što znači da postojanje rješenja sustava ne ovisi o regularnosti matrica A i D. No, da bi inverz (2.10) i (2.11) matrice M postojao moramo pretpostaviti da su A i D regularne.

Kako bi za jako velike sustave bilo nespretno provjeravati regularnost matrice M, umjesto toga možemo provjeriti regularnost matrica A i M/A jer regularnost matrice A ionako moramo provjeriti, a Schurova formula (2.1.1) nam govori da ako su A i M/A regularne, tada je i M regularna. Analogno vrijedi za D i M/D.

Konačno se možemo vratiti našem primjeru i riješiti ga primjenom gornjeg teorema.

Primjer. *Matricu M smo rastavili na blokove ovako:*

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Računanjem determinanti matrica A, D, M/A i M/D zaključujemo da su regularne.

Uvrstimo originalne oznake za Schurov komplement $M/A = D - CA^{-1}B$ i $M/D = A - BD^{-1}C$. Elementarnim transformacijama matrice A dobivamo da je njen inverz jednak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Inverz matrice D jednak je

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Množenjem i zbrajanjem matrica lako dobivamo

$$M/A = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}, \quad M/D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinante ovih matrica su različite od nula, tj. M/A i M/D su regularne. Kako su A, D, M/A i M/D regularne, to je i M regularna i time su sve pretpostavke našeg teorema zadovoljene te ga možemo primijeniti. Kako bismo izračunali x i y, potrebni su nam inverzi Schurovih komplementa M/A i M/D. Vrijedi

$$(M/A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (M/D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Konačno, u formulu

$$x = (M/D)^{-1}(p - BD^{-1}q)$$

uvrstimo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Množenjem i oduzimanjem matrica dobivamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analogno, uvrštavanjem y, p i q u formulu

$$y = (M/A)^{-1}(q - CA^{-1}p)$$

dobivamo

$$\begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Dakle, rješenje sustava je $(1, -1, 1)$ *što odgovara rješenju dobivenom Gaussovom metodom eliminacije.*

Ova metoda rješavanja velikih sustava nalazi primjenu u paralelnom računarstvu. Promotrimo rješenje x, y iz Teorema 2.3.2. Zaključujemo da x i y ne ovise jedan o drugome. Dakle, moguće je x i y računati paralelno. Primijetimo još da umjesto matrice M koristimo samo njene blokove (i Schurov komplement) kako bismo izračunali x i y. Na jako velikom sustavu linearnih jednadžbi time smo uvelike olakšali i ubrzali postupak rješavanja tog sustava. Kada se takav sustav rješava na procesoru s više jezgri koje paralelno izvršavaju dijelove problema tada je učinkovitost ove metode u usporedbi s metodama koje poznajemo otprije i više nego očita.

Osim navedenih razloga primjene ove metode, postoji još jedna prednost ove metode u usporedbi s Gaussovom eliminacijom. Primijetimo da smo problem invertiranja matrice dimenzije $(p+q) \times (p+q)$ sveli na problem invertiranja matrica $p \times p$ i $q \times q$, a iz vlastitog iskustva znamo da je lakše i brže invertirati dvije manje matrice nego jednu veliku matricu.

2.4 Rang

Rang je, slično kao i determinanta, učestali pojam u linearnoj algebri. Takve elementarne pojmove uvijek je korisno razmotriti u kontekstu onoga što proučavamo jer baš zbog svoje jednostavnosti primjenu nalaze u mnogim područjima linearne algebre. Analogno kao kod determinante, istražit ćemo poveznicu ranga blok matrice i ranga Schurovog komplementa. Teorem koji navodimo nalazi se u [1] i [2].

Teorem 2.4.1. *Neka je M matrica oblika $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ i neka je A regularna. Tada vrijedi*

$$r(M) = r(A) + r(M/A). \tag{2.20}$$

Analogno, ako je D regularna, vrijedi

$$r(M) = r(D) + r(M/D).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je A regularna i označimo s A^{-1} njen inverz. Kada na matricu primijenimo elementarne transformacije, rang joj se ne mijenja. Drugom multiretku matrice M dodajmo prvi multiredak pomnožen s $-CA^{-1}$ pa dobivamo:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

No, elementarne transformacije možemo primjenjivati i nad multistupcima matrice, pa drugom multistupcu matrice M dodajmo prvi multistupac pomnožen s $-BA^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & M/A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo sada rang posljednje dobivene matrice.

Rang matrice je broj linearno nezavisnih redaka matrice. Nul matrice na sporednoj dijagonali ne utječu na rang cijele matrice jer ako su retci (stupci) matrice linearno nezavisni, ostat će linearno nezavisni i ako joj dopišemo nul retke (stupce) te ako su retci (stupci) matrice linearno zavisni, ostat će linearno zavisni i ako joj dopišemo nul retke (stupce). Zato zaključujemo da je broj linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice M jednak sumi broja linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice A i broja linearno nezavisnih redaka (stupaca) matrice M/A. Tu tvrdnju zapisujemo ovako:

$$r(M) = r(A) + r(M/A).$$

Analogno bismo dokazali tvrdnju kada je D regularna. □

Formula (2.20) vrijedi i za nešto blaže pretpostavke od regularnosti od A, ali o tome ćemo više reći kada uvedemo poopćeni Schurov komplement. Napomenimo još da formula (2.20) ne vrijedi općenito.

2.5 Inercija

U ovom dijelu predstavit ćemo bitan rezultat ovog rada koji povezuje inerciju i Schurov komplement. No, najprije definirajmo inerciju. Definicije i teoremi iz ovog dijela preuzeti su iz [1].

Definicija 2.5.1. *Neka je $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ kvadratna hermitska matrica. Definiramo inerciju matrice A, u oznaci* $\mathrm{In}(A)$*, kao uređenu trojku*

$$\mathrm{In}(A) = (p(A), q(A), z(A)),$$

pri čemu je $p(A)$ broj pozitivnih svojstvenih vrijednosti matrice A, $q(A)$ broj negativnih svojstvenih vrijednosti matrice A te $z(A)$ broj nul svojstvenih vrijednosti matrice A (računajući njihove kratnosti).

Prisjetimo se da su svojstvene vrijednosti hermitske matrice realni brojevi pa zato ima smisla promatrati inerciju baš za hermitske matrice.

U nastavku navodimo još jednu bitnu definiciju.

Definicija 2.5.2. *Za matrice $A, B \in \mathbb{M}_m$ kažemo da su *-kongruentne ako postoji regularna matrica $G \in \mathbb{M}_m$ takva da je $A = G^*BG$.*

Teorem 2.5.3. *Relacija *-kongruencija je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Neka su $A, B, C \in \mathbb{M}_m$ te neka su $G, H \in \mathbb{M}_m$ regularne.

Uzmimo $G = I$. Tada vrijedi $A = I^*AI$, tj. A je *-kongruentna sama sa sobom. Dakle, vrijedi refleksivnost.

Neka je A *-kongruentna s B, tj. vrijedi $A = G^*BG$. Kako je G regularna, postoje G^{-1} i $(G^*)^{-1}$ takve da je

$$B = (G^*)^{-1}AG^{-1}.$$

Kako vrijedi $(G^*)^{-1} = (G^{-1})^*$, zaključujemo da je *-kongruencija simetrična.

Neka je A *-kongruentna s B, tj. vrijedi $A = G^*BG$ i neka je B *-kongruentna s C, tj. vrijedi $B = H^*CH$. U prvu jednakost uvrstimo B iz druge jednakosti pa imamo

$$A = G^*(H^*CH)G.$$

Zbog asocijativnosti množenja matrica vrijedi

$$A = (G^*H^*)C(HG) = (HG)^*C(HG).$$

Kako je umnožak dviju regularnih matrica regularna matrica, po definiciji *-kongruencije je A *-kongruentna s C pa vrijedi tranzitivnost.

Dakle, *-kongruencija je refleksivna, simetrična i tranzitivna pa je relacija ekvivalencije. □

Iskazat ćemo još jedan teorem koji koristimo u dokazu sljedećeg teorema.

Propozicija 2.5.4. *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ hermitska. Tada je $r(A) = p(A) + q(A)$, pri čemu je $r(A)$ rang matrice A, a $p(A)$ i $q(A)$ broj pozitivnih i broj negativnih svojstvenih vrijednosti matrice A.*

Dokaz. Kako je A hermitska, prema Teoremu 1.1.17 postoji unitarna matrica U takva da je $A = U^*DU$, pri čemu je D dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima matrice A na dijagonali (uključujući kratnosti). Prema Teoremu 1.1.13 matrice A i D su ekvivalentne (jer je U regularna) pa imaju isti rang. No, rang matrice D je suma broja pozitivnih $p(A)$ i broja negativnih $q(A)$ svojstvenih vrijednosti matrice A. Time je tvrdnja dokazana. □

Teorem 2.5.5 (Sylvestrov zakon inercije)**.** *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_m$ hermitske. Tada je* $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(B)$ *ako i samo ako su A i B *-kongruentne.*

Dokaz. Dokažimo prvo da vrijedi: ako je $\text{In}(A) = \text{In}(B)$, tada su A i B *-kongruentne. Prema teoremu 1.1.17 (o dijagonalizaciji hermitskih matrica) matrice A i B možemo dijagonalizirati. Dakle, postoji unitarna matrica U takva da vrijedi

$$A = U^*(E \oplus (-F) \oplus 0_{z(a)})U,$$

pri čemu je $E \oplus (-F) \oplus 0_{z(a)}$ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima matrice A na dijagonali i to tako da je E blok koji na dijagonali ima pozitivne svojstvene vrijednosti matrice A, $-F$ blok koji na dijagonali ima negativne svojstvene vrijednosti matrice A te $0_{z(a)}$ blok koji na dijagonali ima nul svojstvene vrijednosti matrice A (s kratnostima). Kako je U unitarna matrica, posebno je i regularna pa je po definiciji *-kongruencije A *-kongruentna s $E \oplus (-F) \oplus 0_{z(a)}$. Analogno, postoji unitarna matrica V takva da vrijedi

$$B = V^*(E' \oplus (-F') \oplus 0_{z(B)})V,$$

pri čemu je $E' \oplus (-F') \oplus 0_{z(B)}$ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima matrice B na dijagonali. Analogno kao gore zaključujemo da je B *-kongruentna s $E' \oplus (-F') \oplus 0_{z(B)}$. Kako bismo zaključili da su A i B *-kongruentne, uspostavit ćemo neku vezu između njihovih dijagonalnih matrica svojstvenih vrijednosti.

Uzmimo sada matricu $G := E^{-1/2} \oplus F^{-1/2} \oplus I_{z(A)}$ u kojoj blok $E^{-1/2}$ predstavlja dijagonalnu matricu s elementima na dijagonali oblika $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, pri čemu je λ pozitivna svojstvena vrijednost. Analogno, blok $F^{-1/2}$ je dijagonalna matrica s elementima na dijagonali oblika $-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, pri čemu je λ apsolutna vrijednost negativne svojstvene vrijednosti. Očito je da je takva matrica G regularna. Lako se provjeri da vrijedi sljedeća jednakost

$$G^*(E \oplus (-F) \oplus 0_{z(B)})G = I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right) \oplus 0_{z(A)}.$$

Po definiciji su matrice $(E \oplus (-F) \oplus 0_{z(A)})$ i $I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right) \oplus 0_{z(A)}$ *-kongruentne pa su zbog tranzitivnosti i matrice A i $I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right) \oplus 0_{z(A)}$ *-kongruentne.

Uzmimo sada matricu $H := (E')^{-1/2} \oplus (F')^{-1/2} \oplus I_{z(B)}$ kojoj su pojedini blokovi kao gore opisani za matricu G. Matrica H je regularna. Vrijedi sljedeća jednakost, analogna jednakosti za matricu G

$$H^*(E' \oplus (-F') \oplus 0_{z(B)})H = I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right) \oplus 0_{z(B)}.$$

Po definiciji su matrice $(E' \oplus (-F') \oplus 0_{z(B)})$ i $I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right) \oplus 0_{z(B)}$ *-kongruentne pa su zbog tranzitivnosti i matrice B i $I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right) \oplus 0_{z(B)}$ *-kongruentne.

Kako je po pretpostavci $\text{In}(A) = \text{In}(B)$ matrice $I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right) \oplus 0_{z(A)}$ i $I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right) \oplus 0_{z(B)}$ su jednake. Time smo uspostavili, kao što je najavljeno, relaciju *-kongruencija između dijagonalnih matrica svojstvenih vrijednosti matrica A i B. Kako je *-kongruencija simetrična i tranzitivna zaključujemo da su A i B *-kongruentne.

Sada dokažimo obrat teorema. Ako su $A, B \in \mathbb{M}_m$ hermitske i *-kongruentne, tada je $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(B)$. Dokaz ćemo rastaviti na slučajeve kada su A i B regularne te kada su A i B singularne. Valja napomenuti i zašto slučajeve u kojima je jedna od matrica regularna, a druga singularna ne promatramo. Pretpostavili smo da su A i B *-kongruentne, pa postoji regularna matrica U takva da vrijedi $A = U^*BU$. No, tada je A regularna ako i samo ako je B regularna. Dakle, ne može biti A regularna, a B singularna, i obratno.

Promatrajmo slučaj kada su A i B regularne. U gornjem dokazu dobili smo da su A i $I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right)$ *-kongruentne. Neka je $I_{p(A)} \oplus \left(-I_{q(A)}\right) := V$ Lako se vidi da je V unitarna. Također smo u gornjem dokazu utvrdili da su B i $I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right)$ *-kongruentne. Neka je $I_{p(B)} \oplus \left(-I_{q(B)}\right) := W$. Opet, lako se vidi da je W unitarna. Kako su po pretpostavci A i B *-kongruentne, zbog tranzitivnosti su V i W *-kongruentne. Dakle, postoji regularna matrica G takva da je $V = G^*WG$. Prema teoremu o polarnoj dekompoziciji matrice (Teorem 1.1.24) postoje unitarna matrica U i pozitivno semidefinitna matrica P takve da je $G = PU$. Takvu matricu G uvrstimo u $V = G^*WG$ i dobivamo

$$
\begin{aligned}
V &= (PU)^*W(PU).\\
V &= U^*P^*WPU = U^*PWPU.
\end{aligned}
$$

Gornja jednakost može se zapisati kao

$$P^{-1}(UVU^*) = WP.$$

Izraz s lijeve strane je desna polarna dekompozicija, a s desne strane je lijeva polarna dekompozicija. Prema Teoremu 1.1.24 vrijedi $UVU^* = W$. Kako su V i W unitarno ekvivalentne, prema Teoremu 1.1.22 V i W imaju iste svojstvene vrijednosti. No, primijetimo da V i A te W i B imaju iste svojstvene vrijednosti pa vrijedi $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(B)$.

Neka su A i B singularne. Kako su A i B *-kongruentne, postoji regularna matrica H takva da je $A = H^*BH$. Kako je H regularna, matrice A i B su ekvivalentne. Prema Teoremu 1.1.13 ekvivalentne matrice imaju isti rang pa vrijedi $r(A) = r(B)$. No, tada je prema Propoziciji 2.5.4 $z(A) = z(B)$. Uzmimo matrice $A_1 = I_{p(A)} \oplus (-I_{q(A)})$ i $B_1 = I_{p(B)} \oplus (-I_{q(B)})$. Tada su matrice $A_1 \oplus 0_{z(A)}$ i A te $B_1 \oplus 0_{z(A)}$ i B *-kongruentne jer su $A_1 \oplus 0_{z(A)}$ i $B_1 \oplus 0_{z(A)}$ unitarne dijagonalizacije matrica A i B. Kako su A i B *-kongruentne, zbog tranzitivnosti su $A_1 \oplus 0_{z(A)}$ i $B_1 \oplus 0_{z(A)}$ *-kongruentne. Dakle, postoji regularna matrica G takva da vrijedi

$$A_1 \oplus 0_{z(A)} = G^*(B_1 \oplus 0_{z(A)})G. \tag{2.21}$$

Matricu G particioniramo usklađeno s blokovima od $B_1 \oplus 0_{z(A)}$ da ih možemo ulančati, dakle

$$G = \left(\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right).$$

Jednakost (2.21) sada možemo zapisati ovako

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0_{z(A)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} G_{11}^* & G_{21}^* \\ \hline G_{12}^* & G_{22}^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 0_{z(A)} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\right).$$

Množenjem i izjednačavanjem blokova dobivamo

$$A_1 = G_{11}^* B_1 G_{11}.$$

Kako je G_{11} regularna (jer je G regularna), A_1 i B_1 su *-kongruentne. No, A_1 i B_1 su regularne, a za regularne matrice koje su *-kongruentne smo već u prvom slučaju dokazali da vrijedi $\mathrm{In}(A_1) = \mathrm{In}(B_1)$. K tome vrijedi još i $z(A) = z(B)$ pa je $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(B)$.

□

Konačno, možemo otkriti vezu između inercije i Schurovog komplementa. Tu vezu prva je uspostavila Emilie Virginia Haynsworth te teorem nosi njeno ime. Haynsworth je ujedno uvela i naziv Schurov komplement u matematičku nomenklaturu.

U teoremu koristimo izraz *glavna podmatrica* blok-matrice za blok na mjestu $(1, 1)$ blok-matrice.

Teorem 2.5.6. *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ hermitska te neka je A_{11} glavna regularna podmatrica od A. Tada vrijedi*

$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(A_{11}) + \mathrm{In}(A/A_{11}).$$

Dokaz. Neka je matrica A particionirana na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Neka je G particionirana na blokove iste veličine kao kod A definirana ovako

$$G := \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$G^* A G = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A/A_{11} \end{pmatrix}.$$

Matrica G je očito regularna pa zaključujemo da su A i G^*AG *-kongruentne. Prema Teoremu 2.5.5 vrijedi $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(G^*AG)$ te po teoremu o spektru blok-trokutaste matrice (Teorem 1.1.20) vrijedi $\sigma(G^*AG) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A/A_{11})$. Onda posebno vrijedi i $\mathrm{In}(G^*AG) = \mathrm{In}(A_{11}) + \mathrm{In}(A/A_{11})$ pa je konačno $\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(A_{11}) + \mathrm{In}(A/A_{11})$. □

Poglavlje 3

Poopćeni Schurov komplement

U prethodnom poglavlju bavili smo se kvadratnim i regularnim blok-matricama, no u praksi se često susrećemo sa singularnim i pravokutnim matricama pa se prirodno nameće pitanje proučavamo li Schurov komplement samo u okviru kvadratnih i regularnih matrica ili je moguće razmišljati izvan tog okvira. Kod definiranja Schurovog komplementa zahtijevali smo da jedan od blokova matrice bude regularan kako bi postojao inverz tog bloka. Znamo da singularna matrica nema inverz, ali možemo definirati tzv. poopćene inverze. U nastavku slijedi definicija takvih inverza. Definicije i teoremi iz ovog dijela mogu se pronaći u [1] i [2].

Definicija 3.0.1. *Neka je matrica $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ te neka je matrica $A^g \in \mathbb{M}_{n,m}$ takva da zadovoljava neka od sljedećih svojstava:*

1. $AA^gA = A$
2. $A^gAA^g = A^g$
3. $(AA^g)^* = AA^g$
4. $(A^gA)^* = A^gA.$

*Kažemo da je matrica A^g **poopćeni inverz** ako zadovoljava prvo svojstvo. Ako zadovoljava prva dva svojstva, nazivamo je **refleksivni poopćeni inverz**, a ako zadovoljava sva navedena svojstva nazivamo je pseudoinverz ili, češće, **Moore-Penroseov inverz**.*

Primijetimo, ako je A regularna matrica, tada je $A^g = A^{-1}$ pa je A^g jedinstven. Za singularnu matricu postoji beskonačno mnogo njenih poopćenih inverza, no Moore-Penroseov inverz je jedinstven za svaku matricu. Ove tvrdnje nećemo dokazivati jer nam je cilj istražiti vezu Moore-Penroseovog inverza i Schurovog komplementa. No, najprije uvodimo još neke oznake i definicije koje ćemo koristiti.

Definicija 3.0.2. *Neka je $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ te neka je $\alpha \subseteq \{1,\ldots,m\}$ neprazan podskup skupa indeksa redaka i $\beta \subseteq \{1,\ldots,n\}$ neprazan podskup skupa indeksa stupaca. Tada definiramo podmatricu matrice A u oznaci $A[\alpha,\beta]$ kao matricu dimenzije $card(\alpha) \times card(\beta)$ čiji elementi odgovaraju elementima matrice $[a_{i,j}]$ pri čemu je $i \in \alpha$ i $j \in \beta$. Matricu $A[\alpha,\alpha]$ kraće označavamo s $A[\alpha]$.*

Napomena 3.0.3. *Neka je $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ te neka je $\alpha \subseteq \{1,\ldots,m\}$ neprazan podskup skupa redaka i $\beta \subseteq \{1,\ldots,n\}$ neprazan podskup skupa stupaca. Često nam je potrebna podmatrica $A[\alpha^c,\beta^c]$, pri čemu je α^c komplement skupa α te β^c komplement skupa β. Također, koristit ćemo i oznake $A[\alpha^c,\beta]$ i $A[\alpha,\beta^c]$.*

Na sljedećem primjeru objasnit ćemo gornje oznake.

Primjer 3.0.4. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\alpha = \{1,3\}$ i $\beta = \{1,2,4\}$. Tada je matrica $A[\alpha,\beta]$ nastala „prepisivanjem" redaka iz skupa α i stupaca iz skupa β matrice A, tj.

$$A[\alpha,\beta] = A[\{1,3\},\{1,2,4\}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrica $A[\alpha]$ nastala je „prepisivanjem" redaka iz skupa α i stupaca iz skupa α matrice A, tj.

$$A[\alpha] = A[\{1,3\},\{1,3\}] = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrica $A[\alpha^c,\beta^c]$ nastala je „prepisivanjem" redaka iz skupa $\alpha^c = \{2\}$ i stupaca iz skupa $\beta^c = \{3,5\}$ matrice A, tj.

$$A[\alpha^c,\beta^c] = A[\{2\},\{3,5\}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica $A[\alpha^c,\beta]$ nastala je „prepisivanjem" redaka iz skupa α^c i stupaca iz skupa β matrice A, tj.

$$A[\alpha^c,\beta] = A[\{2\},\{1,2,4\}] = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Recimo da matricu A želimo particionirati na blokove na sljedeći način:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 7 & 4 & 5 & -7 \end{array}\right).$$

Primijetimo da sljedećim zapisom za $\alpha = \{1, 2\}$ i $\beta = \{1\}$ dobivamo upravo gornju blok-matricu

$$A = \begin{pmatrix} A[\alpha,\beta] & A[\alpha,\beta^c] \\ A[\alpha^c,\beta] & A[\alpha^c,\beta^c] \end{pmatrix}.$$

Dakle, matricu možemo proizvoljno particionirati na blokove koristeći određene podmatrice. Matricu je moguće na analogan način particionirati i na više blokova, pa se tada koriste dodatne oznake $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ i $\beta_1, \ldots, \beta_n$, no nama su za potrebe ovog rada dovoljna četiri bloka kao gore.

Primijetimo da smo u gornjem primjeru particionirali matricu na pravokutne i singularne blokove te da je i sama matrica pravokutna i singularna. Konačno, definirajmo poopćeni Schurov komplement za takve matrice.

Definicija 3.0.5. *Neka je matrica $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ te neka je $\alpha \subseteq \{1, \ldots, m\}$ i $\beta \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Tada je poopćeni Schurov komplement, u oznaci $A/A[\alpha,\beta]$, jednak*

$$A/A[\alpha,\beta] = A[\alpha^c,\beta^c] - A[\alpha^c,\beta](A[\alpha,\beta])^g A[\alpha,\beta^c],$$

pri čemu je $(A[\alpha,\beta])^g$ Moore-Penroseov inverz matrice $A[\alpha,\beta]$.

Primijetimo da za kvadratnu matricu A i regularan blok $A[\alpha,\beta]$ dobivamo upravo definiciju Schurovog komplementa jer je tada Moore-Penroseov inverz zapravo standardni inverz. U literaturi se često Schurov komplement definira pomoću podmatrica, baš kao u gornjoj definiciji, ali u kontekstu regularnih matrica (pa i regularnog inverza). U usporedbi s definicijom Schurovog komplementa, prednost ove definicije je sažetost. Naime, primijetimo da u ovoj definiciji nigdje nismo implicitno odredili particiju matrice A niti smo spominjali dimenzije blok-matrica. Razlog tome su nove oznake koje smo uveli. Primijetimo također da odabirom skupova α i β jedinstveno određujemo blokove matrice.

U prethodnom poglavlju povezali smo Schurov komplement s determinantom, inverzom, rješavanjem sustava linearnih jednadžbi te rangom. Ovdje ćemo provesti diskusiju o tome kako povezati poopćeni Schurov komplement s gore navedenim područjima linearne algebre. Primijetimo prvo da o determinanti nema smisla diskutirati kada se radi o singularnim matricama. poopćeni inverz smo već definirali te ni o njemu nećemo provoditi dodatnu diskusiju, no trebamo imati na umu da se proučavanjem poopćenih inverza može doći do raznih bitnih rezultata. Nadalje, u prethodnom poglavlju iskazali smo teorem o rješenju kvadratnog sustava koji daje jedinstveno rješenje sustava te smo već tamo proveli diskusiju o tome kako se u praksi često javljaju i pravokutni sustavi s beskonačno mnogo rješenja. Upravo je primjenom poopćenog Schurovog komplementa moguće izraziti rješenja pravokutnog sustava. Možemo samo zamisliti koliko je bitna primjena teorema koji daje rješenja takvog sustava u paralelnom računarstvu.

U nastavku, diskusiju o rangu provodimo malo detaljnije. Prisjetimo se teorema o rangu (Teorem 2.4.1). Ako je M kvadratna i regularna matrica te je A glavna podmatrica matrice M također kvadratna i regularna, onda je $r(M) = r(A) + r(M/A)$. Prirodno se nameće pitanje kakva je veza ranga i poopćenog Schurovog komplementa, tj. postoji li formula za rang i kada M i/ili A nisu regularne. Krenimo od jednostavnog primjera koji će odgovoriti na jedno od tih pitanja.

Primjer 3.0.6. *Neka je*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$M/A = 0 - B^* A^g B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Očito je $r(M) = 4$, dok je $r(A) + r(M/A) = 1 + 1 = 2$. Kako je $r(M) > r(A) + r(M/A)$, zaključujemo da jednakost $r(M) = r(A) + r(M/A)$ ne vrijedi općenito.

Dakle, za regularnu matricu M i njen singularni blok A ne vrijedi teorem 2.4.1. Očito je nemoguće da za matricu M i njen glavni blok A vrijedi $r(M) < r(A) + r(M/A)$. Zato zaključujemo da za proizvoljnu matricu M i njen glavni blok A vrijedi $r(M) \geq r(A) + r(M/A)$.

No, znači li to da jednakost vrijedi samo za regularne M i A? Kako bismo odgovorili na to pitanje, navodimo sljedeći teorem bez dokaza.

Teorem 3.0.7. *Neka je matrica $M \in \mathbb{M}_{m,n}$ i $N \in \mathbb{M}_{m,p}$. Tada matrica MM^g djeluje na matricu N kao jedinična matrica, tj. vrijedi*

$$MM^g N = N$$

ako i samo ako je vektorski prostor koji razapinju stupci matrice N sadržan u vektorskom prostoru koji razapinju stupci matrice N, što označavamo sa $C(N) \subseteq C(M)$. Ovdje M^g označava bilo koji od tri moguća pseudoinverza. Analogno, ako je $C(N^*) \subseteq C(M^*)$, tada je

$$NM^g M = N.$$

Konačno, navodimo teorem koji povezuje rang matrice s poopćenim Schurovim komplementom.

Teorem 3.0.8. *Neka je $M \in \mathbb{M}_{m,n}$ matrica oblika*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

te neka vrijedi $C(B) \subseteq C(A)$ i $C(C^*) \subseteq C(A^*)$. Tada je

$$r(M) = r(A) + r(M/A),$$

pri čemu je $M/A = D - CA^g B$ poopćeni Schurov komplement.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti jednakost (1.1), pri čemu umjesto A^{-1} podrazumijevamo A^g. Dokažimo najprije da ta jednakost vrijedi za A^g. Množenjem matrica s lijeve strane jednakosti (1.1) dobivamo

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^g & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^g B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -AA^g B + B \\ -CA^g A + C & (-CA^g A + C)(-A^g B) - CA^g B + D \end{pmatrix}.$$

Kako je $C(B) \subseteq C(A)$ i $C(C^*) \subseteq C(A^*)$ prema Teoremu 3.0.7 vrijedi

$$AA^g B = B, \quad CA^g A = C.$$

Dakle, vrijedi sljedeća jednakost

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^g & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^g B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix}.$$

Matrice s kojima množimo M slijeva i zdesna su regularne, a to znači da se mogu zapisati kao produkt konačno mnogo elementarnih matrica. No, onda su M i matrica s desne strane jednakosti ekvivalentne pa imaju isti rang. Rang matrice s desne strane jednakosti jednak je $r(A) + r(M/A)$ (dokaz te tvrdnje je u dokazu Teorema 2.4.1). Konačno, zaključujemo da je

$$r(M) = r(A) + r(M/A).$$

□

3.1 Jacobijev identitet

U ovom dijelu vratit ćemo se proučavanju kvadratnih i regularnih matrica, no koristimo novouvedene oznake. Idući teorem povezuje determinante blokova matrice, slično kao i Schurova formula, no u usporedbi sa Schurovom formulom, Jacobijev identitet je općenitiji.

Teorem 3.1.1. *Neka je $A \in \mathbb{M}_m$ regularna te neka su $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\}$ i $\beta \subseteq \{1, \dots, m\}$ takvi da vrijedi $|\alpha| = |\beta|$. Tada vrijedi*

$$\left|\det A^{-1}[\alpha^c, \beta^c]\right| = \left|\frac{\det A[\beta, \alpha]}{\det A}\right|.$$

Dokaz. Ovaj teorem najčešće se koristi za $\alpha = \beta = \{1, \dots, k\}, k \leq m$ pa ćemo prvo dokazati tvrdnju teorema za taj slučaj kako bismo stekli osnovnu ideju dokaza.

Neka vrijede pretpostavke teorema i neka je $\alpha = \beta = \{1, \dots, k\}, k \leq m$. Obratimo pažnju na matricu $A^{-1}[\alpha^c, \beta^c] = A^{-1}[\alpha^c]$ u tvrdnji teorema. Ta matrica označava inverz bloka na mjestu $(2, 2)$ matrice A. Po teoremu 2.2.1 inverz tog bloka jednak je inverzu Schurovog komplementa $A/A[\alpha]$. Dakle, kako vrijedi

$$A^{-1}[\alpha^c] = (A/A[\alpha])^{-1},$$

računanjem determinante navedene jednakosti dobivamo

$$\det(A^{-1}[\alpha^c]) = \det(A/A[\alpha])^{-1}.$$

Primjenom teorema o determinanti inverza gornju jednakost možemo zapisati ovako

$$\det(A^{-1}[\alpha^c]) = \frac{\det A[\alpha]}{\det A}. \tag{3.1}$$

Zadnja jednakost odgovara tvrdnji teorema za $\alpha = \beta = \{1, \dots, k\}, k \leq m$. Primijetimo da u tom slučaju lijeva i desna strana imaju isti predznak.

Promotrimo sada slučaj kada su α i β proizvoljni podskupovi od $\{1, \dots, m\}$ takvi da je $|\alpha| = |\beta| = k$. Prethodni slučaj nam je bio jednostavan za dokazivanje jer je podmatrica koju smo promatrali zapravo bila prvi blok-matrice A. I u ovom slučaju možemo retke iz α dovesti na prvih k mjesta permutacijskom matricom P te stupce iz β dovesti na prvih k mjesta permutacijskom matricom Q. Za takve matrice P i Q vrijedi

$$A[\alpha, \beta] = (PAQ)[K],$$

pri čemu je $K = \{1, \dots, k\}$. Kako su P i Q produkti elementarnih matrica koje mijenjaju poredak redaka/stupaca, vrijedi $P = P^{-1}$ i $Q = Q^{-1}$. Analogno, za matricu A^{-1} vrijedi

$$A^{-1}[\alpha, \beta] = (PA^{-1}Q)[K].$$

Retci i stupci matrice A^{-1} koji nisu u α i β nisu ni u prvih k redaka i stupaca matrice $PA^{-1}Q$ pa tu tvrdnju zapišimo ovako

$$A^{-1}[\alpha^c, \beta^c] = (PA^{-1}Q)[K^c].$$

Računanjem determinante s obje strane jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}[\alpha^c,\beta^c]) &= \det(PA^{-1}Q)[K^c]\\ &= \det(QAP)^{-1}[K^c]\\ &\overset{(3.1)}{=} \frac{\det(QAP)[K]}{\det(QAP)}\\ &= \frac{\det A[\beta,\alpha]}{(-1)^l \det A}.\end{aligned}$$

Primijetimo da se javlja predznak $(-1)^l$ ovisno o tome koliko redaka i stupaca smo zamijenili. Kada umjesto predznaka stavimo apsolutne vrijednosti s obje strane jednakosti, dobivamo upravo tvrdnju teorema.

Također, primijetimo da se na kraju javlja matrica $A[\beta,\alpha]$ sa zamijenjenim poretkom skupova indeksa u odnosu na početak gdje smo imali $A^{-1}[\alpha^c,\beta^c]$. To je zbog toga što su kod invertiranja $PA^{-1}Q$, permutacijske matrice P i Q zamijenile mjesta (kada množimo s lijeve strane permutacijskom matricom, mijenjamo poredak redaka, a kad množimo s desne mijenjamo poredak stupaca). □

Napomenimo još da Jacobijev identitet ima više različitih verzija. U tim verzijama su ispermutirane oznake α^c i β^c ili su dane neke slabije tvrdnje od ove ili pak jače. Jača verzija ovog teorema umjesto apsolutnih vrijednosti ima točan predznak (koji smo i mi u dokazu spominjali).

Bibliografija

[1] S. Puntanen, G. P. H. Styan, F. Zhang, *The Schur complement and its applications*, Springer US, New York, 2005.

[2] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, CRC Press, Boca Raton, 2014.

[3] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2013.

[4] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[5] G. Muić, M. Primc, *Vektorski prostori*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/vp.pdf` (rujan 2018.).

[6] *Schur complement — Wikipedia*, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_complement` (rujan 2018.).

Sažetak

U ovom radu predstavili smo Schurov komplement kvadratne blok-matrice i njegove primjene kod determinante, inverza, sustava linearnih jednadžbi, ranga i inercije. Također smo i poopćili Schurov komplement na singularne i pravokutne blok-matrice te opet proučavali primjenu poopćenog Schurovog komplementa na gore navedena područja linearne algebre. Time smo dali pregled elementarnih pojmova linearne algebre u kontekstu Schurovog komplementa. Primjena Schurovog komplementa moguća je u područjima unutar i izvan okvira matematike pa je i danas aktualna i zanimljiva tema za istraživanje i primjene.

Summary

In this thesis we have presented Schur complement of a square matrix and its applications to determinants, inverse, system of linear equations, rank and inertia. Moreover, we have defined generalized Shur complement for singular and rectangular matrix and once again discussed its application on the above mentioned areas of Linear Algebra. In this way we gave an overview of elementary concepts of Linear algebra within the context of Schur complements. Schur complement can be used both within and outside of mathematics and they are still a popular and interesting area od research.

Životopis

Dora Mifka rođena je 14. studenog 1993. godine u Zagrebu. Osnovnu školu upisuje 2000. godine te je završava 2008. godine. U međuvremenu završava i osnovnu baletnu školu u Zagrebu. Po završetku osnovne škole upisuje IX. gimnaziju u Zagrebu koju završava 2012. Iste godine upisuje Prirodoslovno-matematički fakultet, integrirani nastavnički studij matematike i fizike. Nakon prve godine mijenja smjer u preddiplomski nastavnički studij matematike. Godine 2016. završava preddiplomski studij i upisuje diplomski studij matematike i informatike, smjer nastavnički. Po polaganju posljednjeg ispita zapošljava se u Gimnaziji Tituša Brezovačkog u Zagrebu.