Simetrični i alternirajući polinomi

Mihaljek, Tomislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tomislav Mihaljek

SIMETRIČNI I ALTERNIRAJUĆI POLINOMI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Polinom je jedan od najčešće korištenih pojmova u matematici. S pojedinim vrstama polinoma učenici se upoznaju već u osnovnoj školi. Polinomi prvog stupnja su tema sedmog razreda dok se u osmom razredu obrađuje osnovna kvadratna funkcija. Tek u drugom razredu srednje škole definira se što je to polinom i koja su njegova svojstva i primjene. Učenici se upoznaju s operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja polinoma te se rješavaju kvadratne jednadžbe. Nakon što se učenike upozna s derivacijama počinje se govoriti o polinomima stupnja većeg od 2, pa se pomoću diferencijalnog računa crtaju grafovi polinoma različitih stupnjeva.

Tema ovog diplomskog rada su simetrični i alternirajući polinomi s kojima se učenici implicitno susreću u srednjoj školi iako ih se ne uči tom pojmu. Rješavaju se simetrične jednadžbe, simetrični se polinomi rastavljaju na faktore, a sustave jednadžbi povezuju s Vièteovim formulama. U ovom ćemo radu sustavno obraditi simetrične polinome s dvije i više varijabli, Newtonove polinome te alternirajuće polinome.

Poglavlje 1

Simetrični polinomi dvije varijable

U ovom poglavlju iznosimo osnovna svojstva o polinomima jedne i dvije varijable. Upoznajemo se sa simetričnim polinomom. Korištena je literatura ([4]) i ([3]).

1.1 Prsten polinoma

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ili

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ neki zadani brojevi, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ zove se **polinom** n-tog stupnja. Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zovu se **koeficijenti** polinoma f, a broj n je **stupanj polinoma** f. Stupanj polinoma zapisujemo $deg f = n$. Polinom f je **normirani polinom** ako je $a_n = 1$. Nadalje ako je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ polinom f zovemo **nulpolinom**, a polinom f zadan formulom $f(x) = a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nazivamo **konstantan polinom**. Konstantan polinom je stupnja 0.

Skup svih polinoma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označavamo s $\mathbb{R}[x]$ i zovemo **prsten polinoma s jedinicom** u varijabli x nad $\mathbb{R}$. Na skupu R[x] prirodno se definiraju operacije zbrajanja i množenja polinoma ovako: Ako su $f, g \in \mathbb{R}[x]$, definiramo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, $n \geq m$. Tada je

$$(f + g)(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0,$$

$$(f \cdot g)(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \cdots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0.$$

U načelu to znači da se dva polinoma zbrajuju tako da im zbrojimo članove istog stupnja, a množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugog te dobivene produkte zbrojimo. Imajući ovo na umu lako možemo zaključiti da vrijede asocijativnost i komutativnost zbrajanja te asocijativnost množenja. Također lako se provjeri da vrijedi i distributivnost slijeva i zdesna. Ulogu jedinice ima polinom $e(x) \in \mathbb{R}[x]$, $e(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Dakle, skup R[x] zajedno s operacijama zbrajanja i množenja polinoma je komutativni prsten s jedinicom.

1.2 Prsten polinoma dviju varijabli

Svako preslikavanje $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadano s:

$$f(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots + f_n(x)y^n, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

gdje su $f_0, f_1, \ldots, f_n$ polinomi jedne varijable, nazivamo **polinom dviju varijabli** nad $\mathbb{R}$. Polinom ovog oblika možemo zapisati i u obliku

$$f(x, y) = g_0(y) + g_1(y)x + g_2(y)x^2 + \cdots + g_m(y)x^m, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Primjer 1.2.1. *Preslikavanje zadano formulom*

$$f(x, y) = x^4 y - x^3 y^2 + 2xy^3 + 2y^5 - y^3 + y^2 + 4$$

je polinom dvije varijabli. Pokažite.

Rješenje. *Napišimo $f(x, y)$ po rastućim potencijama od y:*

$$f(x, y) = 4 - x^4 y + y^2(1 - x^3) + y^3(2x - 1) + 2y^5.$$

Slijedi

$$f_0(x) = 4, \; f_1(x) = -x^4, \; f_2(x) = 1 - x^3,$$
$$f_3(x) = 2x - 1, \; f_4(x) = 0, \; f_5(x) = 2,$$

pa zaključujemo da je polinom f polinom dviju varijabli. Napišimo sada polinom f po rastućim potencijama od x:

$$f(x, y) = 4 + y^2 - y^3 + 2y^5 + 2xy^3 - x^3 y^2 + x^4 y.$$

Slijedi

$$g_0(y) = 4 + y^2 - y^3 + 2y^5, \; g_1(y) = 2y^3, \; g_2(y) = 0,$$
$$g_3(y) = -y^2, \; g_4(y) = y.$$

Preslikavanje $f(x, y) = ax^m y^n$ je također polinom dviju varijabli koji se zove **monom**, a broj $a \in \mathbb{R}$ zovemo njegovim **koeficijentom**. Svaki je polinom dviju varijabli jednak zbroju svojih monoma. Monom $ax^m y^n$ ima stupanj m u varijabli x i stupanj n u varijabli y. **Stupanj polinoma dviju varijabli** je zbroj maksimalnih stupnjeva njegovih ne-nul monoma, tj. $m + n$.

Primjer 1.2.2. *Odredite stupanj polinoma*

$$f(x, y) = x^4 y^4 - x^2 y^5 + 3y^7 x + 1.$$

Rješenje. *Uočimo kako polinom f ima najveći stupanj 4 u varijabli x, a stupanj 7 je najveći u varijabli y. Stupanj polinoma je* $4 + 4 = 7 + 1 = 8$.

Kao i kod polinoma u jednoj varijabli **konstantan polinom** je polinom oblika $f(x, y) = a$ gdje je a neki realan broj, a polinom oblika $f(x, y) = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ zovemo **nulpolinomom**. Skup svih polinoma dviju varijabli s realnim koeficijentima označavamo s $\mathbb{R}[x, y]$. Slično, kao i kod polinoma u jednoj varijabli, možemo uvesti operacije zbrajanja i množenja. Polinomi dviju varijabli se zbrajaju tako da se zbroje njihovi istoimeni monomi, pa je zbroj dvaju polinoma opet polinom. Funkciju $f + g$ definiranu s:

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}$$

zovemo **zbroj polinoma** f i g.

Primjer 1.2.3. *Neka su*

$$f(x, y) = x^4 + x^3 y^3 + x^2 y^3 - 2$$

i

$$g(x, y) = -2x^4 - x^3 y^3 - x^2 y^3 + 3.$$

Odredite $(f + g)(x, y)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y)\\ &= x^4 + x^3 y^3 + x^2 y^3 - 2 + -2x^4 - x^3 y^3 - x^2 y^3 + 3\\ &= -x^4 + 1\end{aligned}$$

Umnožak (produkt) polinoma f i g je funkcija $f \cdot g$ određena formulom:

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Polinomi dviju varijabli se množe tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži sa svakim članom drugoga, a dobiveni umnošci zatim zbroje. Tako dobiveni zbroj je ponovno polinom.

Primjer 1.2.4. *Neka su*

$$f(x,y) = x - y + xy$$

i

$$g(x,y) = x + y - xy.$$

Odredite $(f \cdot g)(x,y)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y) &= (x - y + xy)(x + y - xy) \\ &= x^2 + xy - x^2y - xy - y^2 + xy^2 + x^2y + xy^2 - x^2y^2 \\ &= x^2 + 2xy^2 - x^2y^2 - y^2\end{aligned}$$

Lagano se pokaže, kao i kod polinoma jedne varijable, da je $\mathbb{R}[x,y]$ s obzirom na operacije zbrajanja i množenja, prsten s jedinicom. Jedinica u prstenu je konstantni polinom $f(x,y) = 1$ za svaki $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3 Simetrični polinomi dvije varijable

Simetrični polinom je posebna vrsta polinoma dviju ili više varijabli. Polinom $f \in \mathbb{R}[x,y]$ je simetričan ako ostaje nepromijenjen nakon što promijenimo x sa y i y sa x, odnosno:

$$f(x,y) = f(y,x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Na primjer polinom $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$ je simetričan polinom jer je

$$f(y,x) = y^3x^4 + y^4x^3 = f(x,y).$$

Pogledajmo sada ova dva polinoma:

$$f(x,y) = x + y, g(x) = xy.$$

Oni se zovu **osnovni (elementarni) simetrični polinomi** i označavaju se s $\sigma_1(x,y)$ i $\sigma_2(x,y)$, pri čemu je:

$$\sigma_1(x,y) = x + y, \sigma_2(x,y) = xy.$$

Osim elementarnih, u teoriji simetričnih polinoma, susrećemo se i s **Newtonovim polinomima** oblika $s_k(x,y) = x^k + y^k$. Kraće ih označavamo s $s_1, s_2, s_3, ..., s_k$ gdje je npr. $s_4(x,y) = x^4 + y^4$. Ti se polinomi zovu još i *zbrojevi* ili *sume potencija*.

Na jednostavan način možemo dobiti simetrični polinom od bilo kojeg nesimetričnog polinoma. Uzmimo neki ne simetričan polinom u varijablama σ_1 i σ_2. Na primjer:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2.$$

i izrazimo σ_1 i σ_2 pomoću x i y:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (x + y)xy + (x + y)^2 \\ &= (x + y)(xy + x + y) \\ &= x^2 + xy + x^2y + xy^2 + xy + y^2 \\ &= x^2 + x^2y + 2xy + xy^2 + y^2. \end{aligned}$$

uočimo kako je dobiveni polionom zaista simetričan:

$$g(y, x) = y^2 + y^2x + 2yx + yx^2 + x^2 = g(x, y).$$

Postavlja se pitanje možemo li svaki simetrični polinom $f(x, y)$ prikazati u obliku polinoma $g(\sigma_1, \sigma_2)$. Pokušajmo Newtonove polinome s_1, s_2 i s_3 napisati preko elementarnih polinoma.

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= x + y \\ &= \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(x, y) &= x^2 + y^2 \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(x, y) &= x^3 + y^3 \\ &= (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da je to moguće. Svaki se simetričan polinom može prikazati u obliku elementarnih polinoma.

Lema 1.3.1. *Za sve prirodne brojeve $k > 2$ vrijedi Newtonova formula:*

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

Dokaz. Za svaki $k > 2$ vrijedi:
$$s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}.$$

Pomnožimo li jednakost sa $\sigma_1 = x + y$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} &= (x^{k-1} + y^{k-1})(x + y)\\ &= x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k\\ &= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2})\\ &= s_k + \sigma_2 s_{k-2},\end{aligned}$$

što je upravo *Newtonova formula*. □

Lema 1.3.2. *Za svaki Newtonov polinom s_k postoji polinom $f \in \mathbb{R}[x, y]$ takav da je $s_k(x, y) = f(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y))$, odnosno $s_k(x, y) = f(x + y, xy)$.*

Dokaz. Lemu dokazujemo indukcijom. Budući da smo već pokazali kako je $s_1 = \sigma_1$ i $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ tvrdnja je istinita za $k = 1$ i $k = 2$.

Pretpostavimo da postoje polinomi $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ takvi da je:

$$s_{k-2} = f_1(\sigma_1, \sigma_2), s_{k-1} = f_2(\sigma_1, \sigma_2).$$

Iz Newtonove formule slijedi:

$$s_k = \sigma_1 f_2(\sigma_1, \sigma_2) - \sigma_2 f_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Time smo pokazali kako se polinom s_k može napisati u obliku polinoma s varijablama σ_1 i σ_2.

□

Sada iskazujemo i dokazujemo osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable ([4]).

Teorem 1.3.3. ***Osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable.*** *Za svaki simetrični polinom postoji jedinstveni polinom $h \in \mathbb{R}[x, y]$, takav da je*

$$f(x, y) = h(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y))$$

ili
$$f(x, y) = h(x + y, xy).$$

Dokaz. Svaki je polinom dviju varijabli zbroj monoma oblika ax^my^n. Pojavljuju se samo monomi oblika ax^my^n, $m \neq n$ i bx^my^m. Ako u zadanom simetričnom polinomu f postoji monom bx^my^m. Njega možemo zapisati na sljedeći način:

$$bx^my^m = b(xy)^m = b\sigma_2^m.$$

Ako u f postoji član oblika ax^my^n, $m \neq n$, tada postoji i član oblika ax^ny^m, $m \neq n$ jer inače polinom f ne bi bio simetričan polinom. Prema tome polinom f kao pribrojnik sadrži polinom

$$h(x,y) = a(x^my^n + x^ny^m).$$

Sada nam preostaje pokazati da se polinom $h(x,y)$ može prikazati u varijablama σ_1 i σ_2. Pretpostavimo da je $m < n$ i imamo:

$$h(x,y) = ax^my^m(x^{m-n} + y^{m-n}) = a(xy)^m s_{m-n} = a\sigma_2^m s_{m-n}.$$

Prema Lemi 1.0.2. s_{m-n} se može prikazati u obliku polinoma u varijablama σ_1 i σ_2 čime je teorem dokazan. □

Ovim smo dokazom dobili postupak kojim zadani simetrični polinom možemo izraziti pomoću σ_1 i σ_2.

Primjer 1.3.4. *Izrazite polinom*

$$f(x,y) = x^3 + 3x^3y^2 + 6x^2y + 3x^2y^3 + 6xy^2 + y^3$$

pomoću σ_1 i σ_2.

Rješenje. *Članove simetričnog polinom f grupirajmo na sljedeći način:*

$$f(x,y) = (x^3 + y^3) + (3x^3y^2 + 3x^2y^3) + (6x^2y + 6xy^2).$$

Nadalje imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= ((x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2) + (3x^2y^2(x+y)) + (6xy(x+y)) \\ &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (3x^2y^2(x+y)) + (6xy(x+y)) \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_2 \\ &= \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_2). \end{aligned}$$

1.4 Rastavljanje simetričnih polinoma na faktore

U sljedećim ćemo primjerima, koristeći osnovni teorem o simetričnim polinomima, pokazati kako se simetrični polinomi rastavljaju na faktore.

Primjer 1.4.1. *Rastavite simetrični polinom*

$$f(x,y) = x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

na faktore.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x_4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4 = (x^4 + y^4) + xy(x^2 + y^2) + 2(xy)^2 = \\ &= s_4 + \sigma_2 s_2 + 2\sigma_2^2 = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 2\sigma_2^2 = \\ &= 2\sigma_2^2 - 3\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + \sigma_1^4. \end{aligned}$$

Uočimo da smo dobili kvadratnu funkciju u varijabi σ_2, pa tražimo njezina rješenja kako bi ju faktorizirali:

$$\sigma_{2_{1,2}} = \frac{3\sigma_1^2 \pm \sqrt{9\sigma_1^4 - 8\sigma_1^4}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sigma_1^2 \pm \sigma_1^2}{4} \longrightarrow \sigma_{2_1} = \sigma_1^2 \;\; i \;\; \sigma_{2_2} = \frac{1}{2}\sigma_1^2.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\sigma_2^2 - 3\sigma_1^2 \cdot \sigma_2 + \sigma_1^4 = \\ &= 2(\sigma_2 - \sigma_1^2)\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) = \\ &= 2(xy - (x+y)^2)\left(xy - \frac{1}{2}(x+y)^2\right) = \\ &= 2(xy - x^2 - 2xy - y^2)\left(xy - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2\right) = \\ &= -(x^2 + xy + y^2)(-(x^2 + y^2)) = \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Rješavajući ovakve zadatke može nam se dogoditi da kada neki simetrični polinom svedemo na kvadratnu funkciju po σ_2 kvadratna jednadžba nema realna rješenja.

Primjer 1.4.2. *Rastavite simetrični polinom*

$$f(x,y) = 3x^4 + 8x^3y + 14x^2y^2 + 8xy^3 + 3y^4$$

na faktore.

Rješenje. *Kao u prethodnom primjeru polinom $f(x, y)$ prikažemo pomoću σ_1 i σ_2 i dobivamo da je:*

$$f(x, y) = 4\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1^4.$$

Rješavamo kvadratnu jednadžbu $4\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1^4 = 0$ po varijabli σ_2 i dobivamo sljedeće:

$$\sigma_{2_{1,2}} = \frac{4\sigma_1^2 \pm \sqrt{16\sigma_1^4 - 48\sigma_1^4}}{2 \cdot 3}.$$

Ova jednadžba nema realna rješenja.
Budući da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x, y) = (ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2),$$

pokušajmo naći rastav takvog oblika za naš $f(x, y)$ za neke proizvoljne x i y.
Za $x = 1$ i $y = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2) &= f(x, y)\\ (a + b + c)(c + b + a) &= f(1, 1)\\ (a + b + c)^2 &= 36\\ a + b + c &= \pm 6.\end{aligned}$$

Za $x = 1$ i $y = -1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2) &= f(x, y)\\ (a - b + c)(c - b + a) &= f(1, -1)\\ (a - b + c)^2 &= 4\\ a - b + c &= \pm 2.\end{aligned}$$

Za $x = 0$ i $y = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(ax^2 + bxy + cy^2)(cx^2 + bxy + ay^2) &= f(x, y)\\ (c)(a) &= f(0, 1)\\ ac &= 3.\end{aligned}$$

Sada smo dobili sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice a, b i c. Zbog $a + b + c = \pm 6$ i $a - b + c = \pm 2$ imamo četiri zasebna različita sustava. Dobijemo li valjano rješenje i u *jednom od njih, ostale ne moramo rješavati, budući da rješenjem sustava možemo provesti faktorizaciju zadanog polioma $f(x, y)$. Riješimo sustav:*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ a - b + c &= 2 \\ ac &= 3. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prve dvije jednadžbe dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} a + c &= 4 \\ ac &= 3, \end{aligned}$$

čijim rješavanjem dobivamo koeficijente:

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ c &= 3 \end{aligned}$$

i naposlijetku uvrštavanjem u prvi sustav dobivamo da je

$$\begin{aligned} b &= 6 - a - c = 6 - 1 - 3, \\ b &= 2. \end{aligned}$$

Dakle polinom $f(x, y)$ faktoriziramo kao:

$$f(x, y) = (x^2 + 2xy + 3y^2)(3x^2 + 2xy + y^2).$$

1.5 Simetrične jednadžbe

U ovom ćemo odjeljku promatrati polinome jedne varijable koji imaju ovo svojstvo da su im koeficijenti koji su simetrični u odnosu na srednji monom međusobno jednaki. Preciznije, neka je $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Takav ćemo polinom nazivati simetričnim polinomom jedne varijable ako je $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, i općenito $a_{n-k} = a_k$ za $k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$.

Simetrične jednadžbe parnog stupnja

Teorem 1.5.1. *([4]) Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$ simetrični polinom parnog stupnja dan formulom*

$$f(x) = a_{2k} x^{2k} + a_{2k-1} x^{2k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

onda vrijedi:

$$f(x) = x^k p(t),$$

gdje je p polinom stupnja k u varijabli $t = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Dokaz. Dani simetrični polinom $f(x)$ zapišimo na sljedeći način:

$$f(x) = x^k\left(a_{2k}x^k + a_{2k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right).$$

Kako je $f(x)$ simetričan polinom, vrijedi $a_0 = a_{2k}$, $a_1 = a_{2k-1}$, $\ldots$,$a_{k+1} = a_{k-1}$, dobivamo:

$$f(x) = x^k\left[a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_2\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \cdots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k\right].$$

Sada moramo pokazati da se izrazi $x^k + \frac{1}{x^k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ mogu zapisati pomoću t, odnosno da je izraz u uglatoj zagradi polinom u varijabli $t = x + \frac{1}{x}$. Uvedemo supstituciju $y = \frac{1}{x}$ i dobivamo Newtonove simetrične polinome $s_k = x^k + y^k$ za koje znamo da se mogu napisati pomoću elementarnih. U ovom slučaju je

$$\sigma_1 = x + y = x + \frac{1}{x},$$

a

$$\sigma_2 = xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Budući da se svaki Newtonov simetričan polinom može prikazati pomoću elementarnih simetričnih polinoma σ_1 i σ_2 teorem je dokazan. □

Primjer 1.5.2. *Riješite jednadžbu*

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0.$$

Rješenje. *Izlučimo iz jednadžbe x^2 i dobivamo:*

$$x^2\left(2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0.$$

Budući da $x = 0$ nije rješenje početne jednadžbe rješavamo jednadžbu:

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = \\ &= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14, \end{aligned}$$

uvodimo supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$ i dobivamo jednadžbu:

$$2t^2 - 9t + 10 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 2$ i $t_2 = \frac{5}{2}$. Sada vraćamo supstituciju i dobivamo dvije jednadžbe koje moramo riješiti. Prvu jednadžbu:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 2 \\ x^2 + 1 &= 2x \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

u kojoj dobivamo za rješenje $x_{1,2} = 1$ i drugu jednadžbu:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \frac{5}{2} \\ 2x^2 + 2 &= 5x \\ 2x^2 - 5x + 2 &= 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

čija su rješenja $x_3 = \frac{1}{2}$ i $x_4 = 2$. Konačna rješenja početne jednadžbe su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i $x_3 = \frac{1}{2}$.

Simetrične jednadžbe neparnog stupnja.

Teorem 1.5.3. *Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$ simetrični polinom neparnog stupnja dan formulom*

$$f(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

onda vrijedi:

$$f(x) = (x+1)g(x),$$

gdje je g simetričan polinom parnog stupnja.

Dokaz. Budući da je f simetričan polinom, možemo ga zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(x^{2k+1} + 1) + a_1(x^{2k} + x) + \cdots + a_k(x^{k+1} + x^k) = \\ &= a_0(x^{2k+1} + 1) + a_1 x(x^{2k-1} + 1) + \cdots + a_k x^k(x^k + 1). \end{aligned}$$

On je djeljiv polinomom $(x+1)$ jer su mu i svi članovi djeljivi s $(x+1)$, znači f možemo zapisati u obliku:

$$f(x) = (x+1)g(x). \tag{1}$$

Moramo još pokazati da je polinom g simetričan i parnog stupnja. Jer je f simetričan, vrijedi:

$$f(x) = x^{2k+1} f\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2}$$

U (1) sada zamjenjujemo x sa $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) g\left(\frac{1}{x}\right)$$

i množimo ju s x^{2k+1} te dobivamo:

$$x^{2k+1} f\left(\frac{1}{x}\right) = (1+x)x^{2k} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Zbog (2) slijedi jednadžba:

$$f(x) = (1+x)x^{2k} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

koja podijeljena s $(x+1)$, $x \neq -1$ daje:

$$g(x) = x^{2k} g\left(\frac{1}{x}\right),$$

pa je g simetričan polinom parnog stupnja. $\square$

Primjer 1.5.4. *Riješite jednadžbu*

$$3x^5 - 7x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Rješenje. *Grupirajmo simetrične članove:*

$$3x^5 + 3 - 7x^4 - 7x - 4x^3 - 4x^2 = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} 3(x^5+1) - 7x(x^3+1) - 4x^2(x+1) &= 0 \\ (x+1)\left[3(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 7x(x^2 - x + 1) - 4x^2\right] &= 0. \end{aligned}$$

Jedno je rješenje $x_1 = -1$. Za odrediti ostala rješenja početne jednadžbe moramo riješiti:

$$3(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 7x(x^2 - x + 1) - 4x^2 = 0$$
$$3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0,$$

a to je simetrična jednadžba parnog stupnja koju smo naučili rješavati u prethodnim primjerima. Dijelimo ju s x^2, pri čemu je $x \neq 0$, uvodimo supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$ i dobivamo jednadžbu:

$$3t^2 - 10t = 0$$

i njena rješenja $t_1 = 0$ i $t_2 = \frac{10}{3}$. Sada vraćamo supstituciju, dobivamo dvije jednadžbe:

$$x^2 + 1 = 0$$

koja nema realnih rješenja i jednadžbu:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

čija su rješenja $x_2 = \frac{1}{3}$ i $x_3 = 3$. Rješenja početne jednadžbe su $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$ i $x_3 = 3$.

1.6 Sustav simetričnih jednadžbi

Sustav jednadžbi $p(x, y) = m$ i $q(x, y) = n$ gdje su $m, n \in \mathbb{R}$, a p i q simetrični polinomi zove se *sustav simetričnih jednadžbi*. *Rješenje* tog sustava je uređeni par (x_1, y_1) ako vrijedi:

$$p(x_1, y_1) = m, q(x_1, y_1) = n.$$

U srednjoškolskom obrazovanju rješavaju se sustavi linearne i kvadratne jednadžbe ([1]). Napominje se da je sustav dviju kvadratnih jednadžbi moguće rješiti, ali je algoritam vrlo složen za trenutno učeničko znanje. Među zadatcima za naprednije učenike postoje i zadatci u kojima se pojavljuju polinomi stupnja većeg od II. Svima je zajedničko to da se sustav namjesti kako bi se pojavili izrazi $x + y$ i xy, te se onda primjeni metoda supstitucije. Time se sustav kvadratne i linearne jednadžbe svodi na jednostavniji sustav koji se potom rješava normalno ili pomoću Vièteovih formula.

Izravnom primjenom Vièteovih formula vrijedi:

Definicija 1.6.1. *Ako vrijedi $x_1 + x_2 = m$, $x_1x_2 = n$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe:*

$$x^2 - mx + n = 0.$$

Poznavajući lemu o Newtonovim polinomima i osnovni teorem o simetričnim polinomima za dvije varijable, vrlo je lako sastaviti nove sustave simetričnih jednadžbi pogodne za učeničko uvježbavanje.

Primjer 1.6.2. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = -6, \\ xy + x + y = -1. \end{cases}$$

Rješenje. *Prvu jednadžbu napišemo u obliku*

$$xy(x + y) = -6.$$

Uočimo da se sada u obje jednadžbe pojavljuju samo izrazi xy *i* $x + y$. *Stavimo:* $a = xy$, $b = x + y$. *Dobili smo jednostavniji sustav:*

$$ab = -6,$$

$$a + b = -1.$$

Primjenom Vièteovih formula a *i* b *su rješenja kvadratne jednadžbe*

$$m^2 + m - 6 = 0,$$

pa je $a_1 = 2$, $b_1 = -3$ *i* $a_2 = -3$, $b_2 = 2$. *Da bismo odredili rješenje početnog sustava, sada rješavamo dva slična sustava:*

$$\begin{cases} xy = -3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Rješenje prvog sustava su uređeni parovi oblika (x, y), *a to su* $(3, -1)$ *i* $(-1, 3)$. *Rješenja drugog sustava su* $(-2, -1)$ *i* $(-1, -2)$. *Dakle, početni sustav ima četiri rješenja.*

Primjer 1.6.3. *Riješite sustav jednadžbi*

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Rješenje. *Izrazimo obje jednadžbe pomoću* $a = x + y$ *i* $b = xy$:

$$x + y = 5 \longrightarrow a = 5,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \longrightarrow a^3 - 3ab = 35.$$

Uvrštavanjem $a = 5$ *u drugu jednadžbu, dobivamo:*

$$125 - 15b = 35 \longrightarrow b = 6.$$

Uočavamo da je naš sustav ekvivalentan sustavu:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Primjenom Vièteovih formula slijedi da su x i y rješenja jednadžbe

$$m^2 - 5m + 6 = 0,$$

pa su uređeni parovi $(2, 3)$ *i* $(3, 2)$ *rješenja početnog sustava.*

Poglavlje 2

Simetrični polinomi s n varijabli

U ovom poglavlju podsjećamo čitatelja na definiciju i osnovna svojstva polinoma s n varijabli i upoznajemo ga sa simetričnim polinomom n varijabli. Korištena je literatura ([4]) i ([3]).

Kad poznajemo pojam polinoma jedne i dviju varijabli, polinomi više varijabli definiraju se induktivno ovako: funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazivamo polinomom s n varijabli ako je prikaziva u obliku

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(x_1, \ldots x_{n-1}) + f_1(x_1, \ldots x_{n-1})x_n + f_2(x_1, \ldots x_{n-1})x_n^2 + \ldots + f_m(x_1, \ldots x_{n-1})x_n^m,$$

pri čemu su $f_0(x_1, \ldots x_{n-1})$, $f_1(x_1, \ldots x_{n-1}), \ldots f_m(x_1, \ldots x_{n-1})$ polinomi s $n - 1$ varijablom. Skup svih polinoma s n varijabli označava se s $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ i to je komutativni prsten s jedinicom s obzirom na prirodno zbrajanje i množenje polinoma kao funkcija.

Simetrični polinom više varijabli definiramo analogno kao i onaj dvije varijable. Za polinom triju varijabli kažemo da je simetričan ako vrijedi

$$f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$$

za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Polinom $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je **simetričan** ako vrijedi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}),$$

za svaku **permutaciju** $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponovno vrlo važnu ulogu imaju **elementarni simetrični polinomi**:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

kao i **Newtonovi polinomi**:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k. \end{aligned}$$

Dogovorno uzimamo da je $s_0 = x_1^0 + \cdots + x_n^0 = n$.
Također je korisno uočiti da je:

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad 1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n.$$

Definicija 2.0.1. *Neka su $ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ i $bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$ dva monoma. Za prvi monom kažemo da je* ***stariji*** *od drugoga ako postoji $i \in 1, 2, \ldots, n$ takav da je:*

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \;\; \alpha_i > \beta_i.$$

Na taj način u skup monoma n varijabli uveden je uređaj koji nazivamo **leksikografski uređaj** jer su po istom uređaju svrstane riječi u rječniku i leksikonu. Najstariji član polinoma je onaj monom koji je u leksikografskom uređaju posljednji u zbroju.

Lema 2.0.2. *([4])Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Najstariji član produkta polinoma $f \cdot g$ jednak je produktu najstarijih članova polinoma f i g.*

Dokaz. Neka je

$$ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

najstariji član polinoma f, a

$$bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} \tag{2}$$

bilo koji drugi član tog polinoma. Neka je

$$cx_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} \tag{3}$$

najstariji član od g, a

$$dx_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n} \tag{4}$$

bilo koji drugi član polinoma g.
Moramo pokazati da je umnožak članova (1) i (3) stariji od umnoška članova (1) i (4), (2) i (4) i (2) i (3). Pokažimo da je umnožak (1) i (3) stariji od umoška (2) i (4).

Budući da je (1) stariji od (2), postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da vrijedi:

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i, \tag{5}$$

a kako je (3) stariji od (4), postoji $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da vrijedi:

$$\gamma_1 = \delta_1, \gamma_2 = \delta_2, \ldots, \gamma_{j-1} = \delta_{j-1}, \gamma_j > \delta_j. \tag{6}$$

Ako je $i \leq j$, zbrajanjem jednakosti (5) i (6) dobivamo:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 + \delta_1, \alpha_2 + \gamma_2 = \beta_2 + \delta_2, \ldots, \alpha_{i-1} + \gamma_{i-1} = \beta_{i-1} + \delta_{i-1}, \alpha_i + \gamma_i > \beta_i + \delta_i,$$

pa je tvrdnja dokazana. Ako je $i > j$, zbrajanjem jednakosti (5) i (6) dobivamo

$$\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 + \delta_1, \alpha_2 + \gamma_2 = \beta_2 + \delta_2, \ldots, \alpha_{j-1} + \gamma_{j-1} = \beta_{j-1} + \delta_{j-1}, \alpha_j + \gamma_j > \beta_j + \delta_j.$$

Iz tih jednakosti slijedi da je umnožak članova (1) i (3) stariji od umnoška članova (2) i (4). Tvrdnje da je umnožak članova (1) i (3) stariji od umnoška članova (1) i (4) odnosno (2) i (3) se dokazuju analogno. □

I za polinome triju ili više varijabli također vrijedi spomenuta **Newtonova formula**.

Teorem 2.0.3. *([3])Neka su $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Newtonovi polinomi n varijabli. Vrijedi:*

- *$k \leq n$,*
$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k \cdot k \cdot \sigma_k = 0$$
- *$k \geq n$,*
$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n \cdot s_{k-n} \cdot \sigma_n = 0,$$

pri čemu su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ osnovni simetrični polinomi.

Dokaz. $s_1 = \sigma_1$. Neka je $ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ neki monom. Polinom koji dobijemo zbrajanjem svih monoma, koji se od zadanoga dobiju svim permutacijama varijabli, označavamo sa

$$S(ax_1^{k_1} \ldots ax_n^{k_n}).$$

$S(x_1) = \sigma_1, S(x_1 x_2) = 2\sigma_2, S(x_1^k) = s_k$ i tako dalje.

Za $k \leq n$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2),\\
&sk - 2\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3),\\
&\vdots\\
&s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}),\ i = 3,\dots,k-2\\
&\vdots\\
&s_1\sigma_{k-1} = S(x_1^2x_2\dots x_{k-1}) + k\sigma_k.
\end{aligned}$$

Pomnožimo sada prvu od tih jednadžbi s 1, drugu s -1, treću s 1 itd. te ih sve tako pomnožene zbrojimo i dobijemo:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0,$$

a to je prva Newtonova formula. Za $k > n$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
&s_{k-1}\sigma_1 = s_k + S(x_1^{k-1}x_2),\\
&sk - 2\sigma_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3),\\
&\vdots\\
&s_{k-i}\sigma_i = S(x_1^{k-i+1}x_2\dots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2\dots x_ix_{i+1}),\ i = 3,\dots,n-1\\
&\vdots\\
&s_{k-n}\sigma_n = S(x_{k-n+1}x_2\cdots x_n).
\end{aligned}$$

Primjenimo metodu množenja s 1 i -1 i zbrajanja jednadžbi te dobivamo

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n,$$

a to je druga Newtonova formula. □

U većini zadataka, pogotovo u srednjoškolskom obrazovanju, pojavljuju se polinomimi s tri nepoznanice do stupnja 6 tako da je sljedeće Newtonove polinome za $n = 3$ i $k \geq 3$

korisno upamtiti, a i lako se izvode direktnom primjenom teorema 2.0.3:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 3,\\
s_1 &= \sigma_1,\\
s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2,\\
s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,\\
s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3,\\
s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3,\\
s_6 &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2.
\end{aligned}$$

Izvedimo sada prvih šest Newtonovih polinoma za $n = 4$ i $k \geq 4$.
Za s_1, $k = 1$, pa primjenjujemo formulu za $k \leq n$ jer je $n = 4$:

$$\begin{aligned}
s_1 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot \sigma_1 &= 0,\\
s_1 &= \sigma_1.
\end{aligned}$$

s_2; $k = 2$, $2 \leq 4$:

$$\begin{aligned}
s_2 - s_{2-1}\sigma_1 + (-1)^2 \cdot 2 \cdot \sigma_2 &= 0,\\
s_2 = s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 &=\\
&= \sigma_1^2 - 2\sigma_2.
\end{aligned}$$

s_3; $k = 3$, $3 \leq 4$:

$$\begin{aligned}
s_3 - s_{3-1}\sigma_1 + s_{3-2}\sigma_2 + 3\sigma_3 &= 0,\\
s_3 = s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 &=\\
&= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 =\\
&= \sigma_1^3 - 2\sigma_2\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 =\\
&= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.
\end{aligned}$$

s_4; $k = 4$, $4 \leq 4$:

$$\begin{aligned}
s_4 - s_{4-1}\sigma_1 + s_{4-2}\sigma_2 - s_{4-3}\sigma_3 + 4\sigma_4 &= 0,\\
s_4 = s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 - 4\sigma_4 &=\\
&= (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 =\\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.
\end{aligned}$$

s_5; $k = 5$, $5 \geq 4$, pa koristimo drugu formulu kada je $k > n$:

$$\begin{aligned}
&s_5 - s_{5-1}\sigma_1 + s_{5-2}\sigma_2 - s_{5-3}\sigma_3 + s_{5-4}\sigma_4 = 0,\\
&s_5 = s_4\sigma_1 - s_3\sigma_2 + s_2\sigma_3 - s_1\sigma_4 =\\
&\quad = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4)\sigma_1 -\\
&\quad - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_2 + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 =\\
&\quad = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4.
\end{aligned}$$

s_6; $k = 6$, $6 \geq 4$:

$$\begin{aligned}
&s_6 - s_{6-1}\sigma_1 + s_{6-2}\sigma_2 - s_{6-3}\sigma_3 + s_{6-4}\sigma_4 = 0,\\
&s_6 = s_5\sigma_1 - s_4\sigma_2 + s_3\sigma_3 - s_2\sigma_4 =\\
&\quad = (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4)\sigma_1 -\\
&\quad - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4)\sigma_2 +\\
&\quad + (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_3 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_4 =\\
&\quad = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4 + 6\sigma_2\sigma_4 - 10\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2.
\end{aligned}$$

Uočimo kako su Newtonove formule kada je $n = 4$ i $n = 3$ vrlo slične za različite k. Sada imamo sve potrebno da iskažemo i dokažemo najbitniji teorem u ovom diplomskom radu.

Teorem 2.0.4. ***Osnovni teorem o simetričnim polinomima.*** *([4] [3])Za svaki simetrični polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ postoji jedinstveni polinom $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takav da je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, gdje su $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elementarni simetrični polinomi.*

Dokaz. Egzistencija.
Neka je $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ najstariji član polinoma $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.
Tvrdimo da je

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n.$$

Budući da je f simetričan polinom on zajedno s najstarijim članom polinoma sadrži i član koji se dobije tako da se permutiraju x_1 i x_2. f dakle sadrži i član oblika $ax_1^{k_2}x_2^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$, a kako je $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ najstariji član, mora vrijediti

$$k_1 \geq k_2.$$

Na isti način dokazujemo i sve ostale nejednakosti.

Sada dokazujemo da postoji polinom oblika

$$a\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdots\sigma_n^{\alpha_n}$$

takvog da je njegov najstariji član jednak najstarijem članu polinoma f. $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ su elementarni simetrični polinomi.

$$\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\cdots\sigma_n^{\alpha_n} = (x_1+\cdots+x_n)^{\alpha_1}\cdot(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)^{\alpha_2}\cdots(x_1\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2\cdots x_n)^{\alpha_{n-1}}\cdot(x_1\cdots x_n)^{\alpha_n}.$$

Prema lemi 2.0.1. najstariji član ovog polinoma je:

$$x_1^{\alpha_1}\cdot x_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_2}\cdot x_1^{\alpha_3}x_2^{\alpha_3}x_3^{\alpha_3}\cdot\ \ldots\ \cdot x_1^{\alpha_{n-1}}x_2^{\alpha_{n-1}}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\cdot x_1^{\alpha_n}x_2^{\alpha_n}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Zapišimo ga ljepše ovako:

$$x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}x_2^{\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n}x_3^{\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_n}\cdot\ \ldots\ \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}\cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Taj će član biti jednak najstarijem članu polinoma f ako možemo odrediti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ takve da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n &= k_1\\
\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n &= k_2\\
\alpha_3 + \cdots + \alpha_n &= k_3\\
&\vdots\\
\alpha_{n-1} + \alpha_n &= k_{n-1}\\
\alpha_n &= k_n.
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo:

$$\alpha_1 = k_1 - k_2,\ \ \alpha_2 = k_2 - k_3,\ \cdots, \alpha_{n-1} = k_{n-1} - k_n,\ \ \alpha_n = k_n.$$

Kako smo tvrdili da je

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n,$$

zaključujemo da je $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$ i zaista, najstariji član polinoma

$$a\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\ \ldots\ \cdot\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\cdot\sigma_n^{k_n}$$

jednak je najstarijem članu polinoma f.

Sada formiramo polinom

$$f_1 = f - a\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\ \ldots\ \cdot\sigma_n^{k_n}.$$

Očigledno je f_1 strogo mlađi od f. Ako f_1 nije nulpolinom postupak nastavljamo. Neka je $a_1x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}$ najstariji član od f_1 formiramo polinom f_2:

$$f_2 = f_1 - a_1\sigma_1^{l_1-l_2}\cdot\sigma_2^{l_2-l_3}\cdot\ \ldots\ \cdot\sigma_n^{l_n}.$$

Ako f_2 nije nulpolinom, postupak nastavljamo i formiramo f_3. Nakon konačno mnogo koraka, jer polinomi postaju sve mlađi, sigurno dolazimo do nulpolinoma. Recimo da je to nakon k koraka odnosno $f_k = 0$. Označimo najstariji član od f_{k-1} s $a_{k-1}x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ i imamo:

$$0 = f_k = f_{k-1} - a_{k-1}\sigma_1^{m_1-m_2}\sigma_2^{m_2-m_3} \cdot \ \dots \ \cdot \sigma_n^{m_n}$$

Zbrajanjem f_1, f_2, f_k dobivamo:

$$f = a\sigma_1^{k_1-k_2} \dots \sigma_n^{k_n} + a_1\sigma_1^{l_1-l_2} \dots \sigma_n^{l_n} + \dots + a_{k-1}\sigma_1^{m_1-m_2} \dots \sigma_n^{m_n}$$

i time je dokazana egzistencija. Sada dokazujemo *jedinstvenost*.
Neka su g_1 i g_2 dva polinoma, $g_1 \neq g_2$, takva da je

$$f = g_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = g_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Promotrimo nenul polinom od n varijabli

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1 - g_2$$

za koji je $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \neq 0$.
Ovo bi značilo da su $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ algebarski zavisni nad $\mathbb{R}$, a to nije istina što pokazujemo indukcijom po n.
Pretpostavimo suprotno

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0.$$

Gledajmo g kao polinom nad $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ u varijabli x_n i zapisujemo ga u obliku:

$$g(x_1, \dots, x_n) = g_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + \dots + g_k(x_1, \dots, x_{n-1n})x_n^k, \ \ k = deg_{x_n}(g).$$

Ako je $g_0 = 0$ onda je $g = x_n h$, $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Iz pretpostavke

$$\sigma_n h(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) = 0$$

slijedi

$$h(\sigma_1, \dots, \sigma_n) =, 0$$

a to je nemoguće jer je onda $deg(h) = deg(g) - 1$. Znači $g_0 \neq 0$.

Stavimo li $x_n = 0$ u jednakost

$$0 = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = g_0(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) + \dots + g_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})\sigma_n^k$$

dobivamo da je $\sigma_n = 0$ i svi su članovi, osim prvog, jednaki 0. Nadalje ako označimo sa $\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*$ elementarne simetrične polinome od $x_1, \dots, x_{n-1}$ dobivamo

$$g(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*) = 0,$$

no to je kontradikcija s pretpostavkom indukcije da su $\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*$ linearno nezavisni i da je $g_0 \neq 0$, pa je time teorem dokazan. □

Primjer 2.0.5. *Simetrični polinom f*

$$f(x,y,z) = x^2yz^2 + xy^2z^2 + x^2y^2z$$

prikažite pomoću elementarnih simetričnih polinoma σ_1, σ_2 i σ_3.
Rješenje. *Izlučivanjem xyz dobivamo:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2yz^2 + xy^2z^2 + x^2y^2z = \\ &= xyz(xz + yz + xy) = \\ &= \sigma_3 \cdot \sigma_2 \end{aligned}$$

Pomoću elementarnih i Newtonovih simetričnih polinoma možemo rješavati i sustave simetričnih jednadžbi s tri ili više nepoznanica. Rješavaju se analogno kao i sustavi s dvije nepoznanice te su nam potrebne Vièteove formule.

Vièteove formule za polinom n-tog stupnja

Neka je

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

polinom n-tog stupnja gdje je $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Možemo ga faktorizirati ovako:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njegove nultočke. Izjednačavanjem

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

i primjenom teorema o jednakosti polinoma dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

To su Vièteove formule koje koristimo za svaki polinom n-tog stupnja za $n \geq 1$. Izrazimo ih preko elementarnih simetričnih polinoma:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
\sigma_2 &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
\sigma_3 &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\
&\vdots \\
\sigma_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

Primjer 2.0.6. *([2])Riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 6 \\
xy + yz + xz &= 11 \\
xyz &= 6
\end{aligned}$$

Rješenje. *Uočimo kako su jednadžbe u našem sustavu upravo elementarni simetrični polinomi σ_1, σ_2 i σ_3.*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 6 \\
\sigma_2 &= 11 \\
\sigma_3 &= 6
\end{aligned}$$

Prema Vièteovim formulama, ako je (x_1, x_2, x_3) rješenje našeg sustava, onda su x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Prema teoremu o racionalnim nultočkama polinoma kandidati za rješenja jednadžbe su:

$$\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1.$$

Uvrštavanjem npr. $x = 2$ zaključujemo da je $x = 2$ jedno od rješenja jednadžbe, pa polinom $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ dijelimo polinomom $g(x) = x - 2$ i kao rješenje dobivamo polinom $m(x) = x^2 - 4x + 3$ koji se može faktorizirati;

$$m(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Dakle naš polinom $p(x)$ kojim tražimo rješenje zadanog sustava, izjednačavajući ga s 0, faktoriziran izgleda ovako:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 4x + 3)(x - 2) = (x - 1)(x - 3)(x - 2).$$

Lako je zaključiti kako su rješenja jednadžbe $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ *upravo* $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. *Budući da je naš početni sustav simetričan u odnosu na* (x, y, z) *imamo šest rješenja:*

$$(x, y, z) \in \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Primjer 2.0.7. *Riješite sustav:*

$$\begin{aligned} x + y + z &= -5 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 13 \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 97 \end{aligned}$$

Rješenje. *Uočavamo da su polinomi na lijevim stranama jednadžbi Newtonovi. Izrazimo ih preko simetričnih elementarnih polinoma.*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -5 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 13 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 &= 97 \end{aligned}$$

Uvrstimo $\sigma_1 = -5$ *u* $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 13$ *i dobivamo da je* $\sigma_2 = 6$. *Preostaje nam odrediti* σ_3 *tako da uvrstimo* σ_1 *i* σ_2 *u* $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 = 97$, *pa dobivamo:*

$$\begin{aligned} 625 - 600 + 2 \cdot 36 - 20\sigma_3 &= 97 \\ 97 - 20\sigma_3 &= 97 \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Prema Vièteovim formulama, ako je (x_1, x_2, x_3) *rješenje našeg sustava, onda su* x_1, x_2 *i* x_3 *rješenja jednadžbe:*

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0.$$

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} x(x^2 + 5x + 6) &= 0, \\ x(x + 2)(x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da su rješenja jednadžbe $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -3$. *Budući da je naš početni sustav simetričan u odnosu na* (x, y, z) *imamo šest rješenja:*

$$(x, y, z) \in \{(0, -2, -3), (0, -3, -2), (-2, 0, -3), (-2, -3, 0), (-3, 0, -2), (-3, -2, 0)\}.$$

Primjer 2.0.8. *Dokažite da ako je:*

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \end{aligned}$$

onda je $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

Rješenje. *Uočimo sljedeće:*

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c = \sigma_1, \\ s_2 &= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 0 - 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Slijedi da je $\sigma_1 = a + b + c = 0$, *a* $\sigma_2 = ab + ac + bc = \frac{-1}{2}$.
Sada želimo dobiti $a^4 + b^4 + c^4$ *preko* σ_1 *i* σ_2.

$$\begin{aligned} (a + b + c)^4 &= (a + b + c)^2(a + b + c)^2 \\ &= [a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)][a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)] = \\ &= a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 2a^2(ab + ac + bc) + \\ &+ a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 + 2b^2(ab + ac + bc) + \\ &+ a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 + 2c^2(ab + ac + bc) + \\ &+ 2a^2(ab + ac + bc) + 2b^2(ab + ac + bc) + 2c^2(ab + ac + bc) + \\ &+ 4(ab + ac + bc)^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 4(ab + ac + bc)[a^2 + b^2 + c^2 + (ab + ac + bc)] + \\ &+ 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \end{aligned}$$

Znači

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a + b + c)^4 - 4(ab + ac + bc)[a^2 + b^2 + c^2 + (ab + ac + bc)] - \\ &- 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_2(-2\sigma_2 + \sigma_2) - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= 0^4 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= 1 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2). \end{aligned}$$

Preostaje nam sada izraz $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ *prikazati pomoću* σ_1 *i* σ_2.
Iz

$$\begin{aligned} (ab + ac + bc)^2 &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(abac + abbc + acbc) = \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= (ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c) = \\ &= \sigma_2^2 - 2abc\sigma_1 = \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

I stvarno pokazali smo da je

$$a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Primjer 2.0.9. *Ako je $a + b + c = 0$ dokažite da je:*

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Rješenje. *Uočavamo da je prvi Newtonov polinom uvijek jednak nuli; $s_1 = a + b + c = 0$. Sada raspisujemo $(a + b + c)^3$ kako bi izrazili $a^3 + b^3 + c^3$:*

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b + c)^2(a + b + c) = \\ &= [a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)](a + b + c) = \\ &= a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a(ab + ac + bc) + \\ &+ a^2b + b^3 + bc^2 + 2b(ab + ac + bc) + \\ &+ a^2c + b^2c + c^3 + 2c(ab + ac + bc) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 + \\ &+ 2(ab + ac + bc)(a + b + c). \end{aligned}$$

Dakle:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - ab(a + b) - ac(a + c) - bc(b + c) - 2(ab + ac + bc)(a + b + c).$$

Iz $s_1 = 0$ slijedi:

$$a + b = -c, \quad a + c = -b, \quad b + c = -a$$

i redom uvrštavamo i dobivamo:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 + abc + abc + abc = 3abc$$

što smo trebali i pokazati.

Homogene simetrične funkcije

Jedna od važnih familija simetričnih funkcija su **homogene simetrične funkcije**.

Definicija 2.0.10. *Homogeni simetrični polinom stupnja k u n varijabli je suma monoma ukupnog stupnja k.*

$$h_k = h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

Primjer 2.0.11. *Napišimo prvih nekoliko homogenih simetričnih polinoma u n varijabli.*

$$\begin{aligned} h_0(x_1, \ldots, x_n) &= 1, \\ h_1(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i \le n} x_i, \\ h_2(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j, \\ h_3(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} x_i x_j x_k. \end{aligned}$$

Primjer 2.0.12. *Napišimo homogene simetrične polinome u jednoj, dvije i tri varijable. Za $n = 1$:*

$$h_1(x_1) = x_1.$$

Za $n = 2$:

$$h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$h_2(x_1, x_2) = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Za $n = 3$:

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\begin{aligned} h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_3 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3(x_1, x_2, x_3) = {} & x_1 x_1 x_1 + x_1 x_1 x_2 + x_1 x_1 x_3 + x_1 x_2 x_2 + x_1 x_3 x_3 + \\ & + x_1 x_2 x_3 + x_2 x_2 x_2 + x_2 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_3 + x_3 x_3 x_3 = \\ & = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Alternirajući polinomi

Alternirajući polinom je polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takav da ako mu se zamjene bilo koje dvije varijable on mijenja predznak:

$$f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Ekvivalentno ako polinomu permutiramo varijable, polinom mijenja predznak:

$$(x_{\pi_{(1)}}, \ldots, x_{\pi_{(n)}}) = sgn(\pi) f(x_1, \ldots, x_n).$$

Primjer 3.0.1. *Alternirajući polinomi s dvije varijable, $f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$:*

1. $f(x, y) = x - y$. *Jer je:*

$$f(y, x) = y - x = -(x - y) = -f(x, y)$$

2. $f(x, y) = x^3 - y^3$. *Jer je:*

$$f(y, x) = y^3 - x^3 = -(x^3 - y^3) = -f(x, y)$$

3. $f(x, y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. *Jer je:*

$$f(y, x) = (y - x)(y^2 + yx + x^2) = -(x - y)(x^2 + xy + y^2) = -f(x, y)$$

Za umnožak simetričnih i alternirajućih polinoma, u istom broju varijabli, vrijede sljedeća svojstva:

1. Umnožak dva simetrična polinoma je simetričan polinom

Dokaz. Neka su $P(x_1, \dots, x_n)$ i $Q(x_1, \dots, x_n)$ simetrični polinomi. Promatramo njihov umnožak $P \cdot Q$. Trebamo dokazati da je simetričan. Neka je π permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$. Tada:

$$\begin{aligned} P \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) &= P(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) = \\ &= \text{(jer su P i Q simetrični)} = P(x_1, x_2, \dots, x_n)Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= PQ(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

i dokazali smo traženo.

□

2. Umnožak simetričnog i alternirajućeg polinoma je alternirajući polinom

   Dokaz. Neka je $P(x_1, \dots, x_n)$ simetričan, a $Q(x_1, \dots, x_n)$ alternirajući polinom. Trebamo dokazati da je njihov umnožak $P \cdot Q$ alternirajući polinom. Ponovno neka je π permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$. Tada:

$$\begin{aligned} P \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) &= P(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) = \\ &= P(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot sgn(\pi)Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= sgn(\pi)PQ(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

   Uočimo kako je $PQ = sgn(\pi)PQ$ i time je ovo svojstvo dokazano. □

3. Umnožak dva alternirajuća polinoma je simetričan polinom

   Dokaz. Analogno kao u dokazu prva dva svojstva uzmemo dva alternirajuća polinoma P i Q i gledamo njihov umnožak:

$$\begin{aligned} P \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) &= P(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) \cdot Q(x_{\pi_{(1)}}, x_{\pi_{(2)}} \dots, x_{\pi_{(n)}}) = \\ &= sgn(\pi)P(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot sgn(\pi)Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= sgn^2(\pi)PQ(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

   Kako je $sgn^2(\pi) > 0$ svojstvo je dokazano. □

3.1 Vandermondeova matrica

Vandermondeova matrica je matrica čiji su članovi u svakom redu elementi geometrijskog niza. Prikažimo npr. Vandermondeovu $m \times n$ matricu:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_3^2 & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^2 & \dots & x_m^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Kvadratna ($m = n$) Vandermondeova matrica nam je zanimljiva za ovo poglavlje, točnije njezina determinanta. Glavno svojstvo Vandermondeove matrice je da njezina determinanta ima vrlo jednostavan oblik tj. da se može prikazati na sljedeći način:

$$detV = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ova se determinanta zove **Vandermondeova determinanta** ili **Vandermondeov polinom**. Ako su svi brojevi x_i različiti tada je $detV$ nenul polinomu.

Teorem 3.1.1. *Determinanta kvadratne Vandermondeove matrice je:*

$$detV = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_3^2 & \dots & x_n^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom. Temelji se na činjenici da ako nekom retku (ili stupcu) matrice dodamo neki drugi redak (ili stupac) pomnožen skalarom, vrijednost determinante te matrice ostaje nepromijenjena.
Baza indukcije:

Za $n = 2$:

$$detV(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Za $n = 3$:

$$detV(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \text{pomnožimo prvi redak s } -1 \text{ i dodajemo ga drugom i trećem} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \text{razvijemo determinantu po prvom stupcu} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_1^2) - (x_3 - x_1)(x_2^2 - x_1^2) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n - 1$ tj:

$$detV(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i).$$

Korak indukcije:

Elementima n-tog stupca dodajemo elemente $n-1$-vog stupca pomnožene s $-x_1$, potom elementima $n-1$-vog stupca dodajemo elemente $n-2$-gog stupca pomnožene s $-x_1$. Proces nastavljamo do posljednjeg stupca. Dobivamo:

$$detV(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_1 & x_1^2 - x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

odnosno:

$$detV(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Razvijemo detarminantu po prvom retku i izlučimo dobiveni prvi stupac. Dobivamo:

$$detV(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \ldots & x_3^{n-2} \\ 1 & x_4 & \ldots & x_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Uočimo da smo opet dobili Vandermondeovu determinantu za $n-1$ brojeva $x_2,\dots,x_n$, $detV(x_2,x_3,\dots,x_n)$. Primjenimo pretpostavku indukcije na $detV(x_2,x_3,\dots,x_n)$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} detV(x_1,x_2,\dots,x_n) &= \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot detV(x_2,x_3,\dots,x_n) = \\ &= \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot \prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i). \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja teorema vrijedi. □

Zamjenimo li mjesta bilo kojim dva x_i determinanta mijenja predznak, a ako permutiramo x_i parnim permutacijama vrijednost determinante ostaje nepromijenjena. Dakle, Vandermondeov polinom je alternirajući polinom. Pokažimo to na jednom primjeru.

Primjer 3.1.2. *Prema teoremu 3.1.1 vrijedi:*

$$\begin{aligned} detV(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot\prod_{i=3}^{n}(x_i-x_2)\cdot\prod_{i=4}^{n}(x_i-x_3)\cdots\prod_{i=n}^{n}(x_n-x_{n-1}) = \\ &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdots . \end{aligned}$$

Zamjenimo li mjesta x_1 i x_2 dobivamo:

$$detV(x_2,x_1,x_3,\dots,x_n) = \prod_{1,3,\dots,n}(x_i-x_2)\cdot\prod_{3,\dots,n}(x_i-x_1)\cdot\prod_{4,\dots,n}(x_i-x_3)\cdots\prod_{n}(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= (x_1-x_2)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdot(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\prod_{4,\dots,n}(x_i-x_3)\cdots\prod_{n}(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= \underline{-(x_2-x_1)}(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdot\underline{(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)}\cdot\prod_{4,\dots,n}(x_i-x_3)\cdots\prod_{n}(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= -detV(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n).$$

Teorem 3.1.3. *Neka je $n=2$. Svaki alternirajući polinom f je produkt Vandermondeovog polinoma $detV(x,y)$ i nekog simetričnog polinoma.*

Dokaz. Neka je f alternirajući polinom u dvije varijable. Promotrimo racionalnu funkciju $g(x,y)$ zadanu sa:

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{x-y}.$$

Pitamo se je li $g(x,y)$ polinom?
Polinomu

$$f(x,y) = f_n(y)x^0 + f_{n-1}(y)x^1 + \cdots + f_0(y)x^n$$

fiksiramo y. Tada je $f(x, y) = h(x)$ i dijelimo $h(x)$ s $(x - y)$. Prema Bezoutovom teoremu, ako je $h(y) = 0$, onda je $h(x)$ djeljiv s $(x - y)$. Polinom $h(y)$ izgleda ovako:

$$h(y) = f_n(y)y^0 + f_{n-1}(y)y^1 + \cdots + f_0(y)y^n.$$

Kako vrijedi:

$$f(y, x) = -f(x, y),$$

za $x = y$ imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} f(y, y) &= -f(y, y) \\ 2f(y, y) &= 0 \\ f(y, y) &= 0 \end{aligned}$$

i zaključujemo da je $h(y) = 0$. Činjenica da je $h(y) = 0$ nam povlači da je $h(x)$ djeljiv s $(x - y)$ tj. da je

$$g(x, y) = \frac{f(x, y)}{x - y}$$

polinom. Provjerimo je li simetričan:

$$g(y, x) = \frac{f(y, x)}{y - x} = (\text{jer je } f \text{ alternirajući}) = \frac{-f(x, y)}{-(x - y)} = \frac{f(x, y)}{x - y} = g(x, y)$$

i naposlijetku dobivamo

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y).$$

Alternirajući polinom f je umnožak Vandermondeovog polinoma, $detV = (x - y)$, i simetričnog polinoma $g(x, y)$. $\square$

Bibliografija

[1] N. Elezović, B. Dakić *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2005.

[2] I. Ilišević, *Primjena Vièteovih formula na rješavanje sustava jednadžbi*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, 9. državni susret, Mali Lošinj, svibanj 2000.

[3] B. Pavković, B. Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Sažetak

U ovom diplomskom radu definiraju se polinomi jedne, dvije i više varijabli. Naglasak je na simetričnim i alternirajućim polinomima te prikazivanju istih pomoću Newtonovih, elementarnih i homogenih simetričnih polinoma. Obrađena su razna svojstva i veze među njima.

Summary

In this thesis we are researching symmetrical and alternating polynomials. The reader will be introduced with different properties and relations between Newton's (power sums), elementary, homogeneous, symmetric and alternating polynomials.

Životopis

Rođen sam 12. prosinca 1980. godine u Zagrebu. Svoje obrazovanje započeo sam u Osnovnoj školi Josip Kraš u Dugavama u Zagrebu. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, 1995. godine upisujem se u I. gimnaziju u Zagrebu koju sam završio 1999. godine. U akademskoj godini 2008./2009. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Diplomu prvostupnika edukacije matematike stječem u akademskoj godini 2013./2014. i 2015./2016. upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički.