

# Krivulje konstantne širine

---

**Miklenić, Mateja**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:574923>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-27**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mateja Miklenić

**KRIVULJE KONSTANTNE ŠIRINE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Pejkoviću što je oblikovao ideju te svojim stručnim savjetima pomogao u izradi ovog diplomskog rada.*

*Posebno zahvaljujem svojim roditeljima, bratu, dečku i prijateljima, koji su vjerovali u mene od samog početka i bez kojih ne bih bila tu gdje jesam. Od srca vam hvala na neizmjerne ljubavi i podršci koju ste mi pružali tijekom mog obrazovanja.*

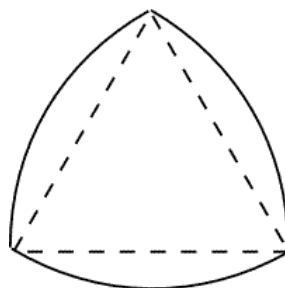
# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Osnovni pojmovi i definicije</b>	<b>3</b>
<b>2 Primjeri krivulja konstantne širine</b>	<b>9</b>
2.1 Reuleauxov trokut . . . . .	9
2.2 Reuleauxovi poligoni . . . . .	13
2.3 Kotač . . . . .	16
<b>3 Teoremi o krivuljama konstantne širine</b>	<b>18</b>
3.1 Osnovne tvrdnje . . . . .	18
3.2 Duljina i površina . . . . .	28
3.3 Aproksimacija krivolinijskim poligonima . . . . .	39
<b>4 Tijela konstantne širine</b>	<b>47</b>
4.1 Rotacijska tijela . . . . .	47
4.2 Nerotacijska tijela . . . . .	49
<b>Bibliografija</b>	<b>54</b>

# Uvod

Počeci geometrije sežu još u doba starih Egipćana, te se ona smatra jednom od najstarijih grana matematike. Ova grana matematike inspirirana je praktičnim problemima s kojima su se ljudi susretali u svakodnevnom životu, a razvila se iz potrebe za mjerenjem u graditeljstvu i astronomiji. S vremenom, geometrija se sve više širila te postala sve apstraktnija. Geometrija je do danas ostala jedna od često primjenjivanih i nezaobilaznih grana matematike.

Opće je poznato da je kotač jedan od najvažnijih povijesnih izuma koji je doprinio razvoju civilizacije. Izumili su ga Sumerani oko 3500. godine prije Krista u Mezopotamiji. Sumerani su kotač izradili u obliku kruga jer su uočili da taj oblik omogućuje glatko gibanje. Obod kotača je kružnica, a udaljenost svake točke kružnice do njenog središta jednaka je polumjeru kružnice. Jasno je da su svi promjeri kružnice jednaki, odnosno da je njena širina jednaka u svakom smjeru, pa možemo reći da kružnica ima konstantnu širinu. Ovo svojstvo kružnicu svrstava među takozvane *krivulje konstantne širine*, o kojima ćemo govoriti u ovom radu. Krivuljama konstantne širine smatramo sve konveksne krivulje kojima je širina jednaka u svakom smjeru. Postoji beskonačno mnogo takvih krivulja, a neke od njihovih svojstava ćemo opisati u ovom radu. Jedan od najpoznatijih primjera krivulje konstantne širine je krivolinijski trokut, kojeg je prvi otkrio njemački znanstvenik i inženjer Franz Reuleaux (1829 – 1905), prema kojem ga nazivamo Reuleauxovim trokutom (vidi sliku 0.1). Reuleauxov trokut najjednostavnija je krivulja konstantne širine, osim kružnice koja je trivijalan primjer takve krivulje.



Slika 0.1: Reuleauxov trokut

Krivulje konstantne širine čine rub lika kojeg nazivamo likom konstantne širine, a njegov prostorni analogon je tijelo konstantne širine. Trodimenzionalna inačica Reuleauxovog trokuta je Reuleauxov tetraedar, no u daljnjem radu ćemo vidjeti da ovo tijelo nema jednaku širinu u svakom smjeru, pa nije tijelo konstantne širine. Ipak, moguće je transformirati ovo tijelo tako da dobijemo tijelo konstantne širine. Prema načinu na koji ih dobivamo, tijela konstantne širine dijelimo u dvije skupine, rotacijska i nerotacijska tijela. Postoji beskonačno mnogo tijela konstantne širine, a u ovom radu ćemo dati nekoliko primjera takvih tijela. Posebno, opisat ćemo dva tipa nerotacijskih tijela, čije otkriće se pripisuje švicarskom matematičaru Ernstu Meissneru (1883 – 1939), prema kojem ih nazivamo Meissnerovim tijelima.

Ovaj rad sastoji se od četiri poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i definicije potrebni za razumijevanje teme ovog rada. Osim toga, slikovno su objašnjene, a potom i precizno matematički definirane, krivulje konstantne širine. U drugom poglavlju navedeni su neki od primjera takvih krivulja. Najprije je opisan najjednostavniji primjer, takozvani Reuleauxov trokut, te je navedena njegova konstrukcija i neka njegova svojstva. Potom su opisane krivulje konstantne širine bez kutnih točaka, koje se dobivaju iz Reuleauxovog trokuta. Nakon toga navedeni su opis i konstrukcija Reuleauxovih poligona. U ovom dijelu opisana je i praktična primjena svojstava krivulja konstantne širine u izradi kotača. Treće poglavlje je matematički najzahtjevnije jer su u njemu navedeni i dokazani brojni teoremi o spomenutim krivuljama. U ovom poglavlju najprije su iskazane i dokazane neke od osnovnih tvrdnji o krivuljama konstantne širine, potom slijede tvrdnje vezane uz opseg i površinu lika konstantne širine, a na kraju je proučena aproksimacija krivolinijskim poligonima. Četvrto poglavlje posvećeno je tijelima konstantne širine. U ovom dijelu rada opisano je kako nastaju rotacijska, a kako nerotacijska tijela konstantne širine. Osim toga navedeni su primjeri takvih tijela, te su iskazana neka od njihovih svojstava.

Osnovna literatura prema kojoj je napisan ovaj rad je Poglavlje 7 iz knjige *Convex Figures* [2], te Poglavlje 25 iz knjige *The Enjoyment of Mathematics* [9]. Uz to, izneseni su i rezultati predstavljeni u člancima [1], [5], [7] iz časopisa *The Mathematical Gazette* i *The Mathematical Intelligencer*. Neke od slika danih u radu su izrađene u programu dinamičke geometrije GeoGebra, dok su neke preuzete iz literature.

# Poglavlje 1

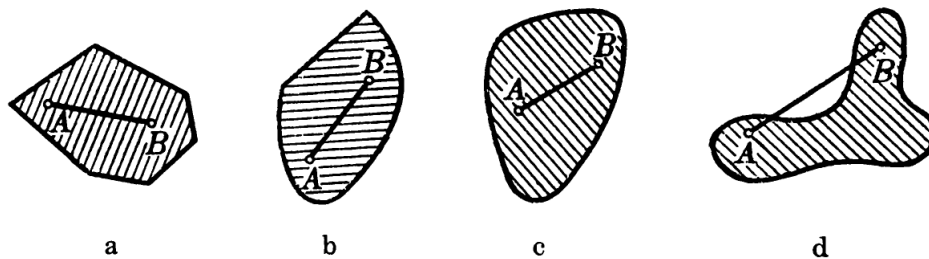
## Osnovni pojmovi i definicije

Prije razrade glavnog dijela rada, definirat ćemo pojmove koji su nam potrebni za samo shvaćanje teme ovog rada. Navest ćemo pojmove koji će nam pomoći pri definiranju novih pojmova, te formuliranju i dokazivanju rezultata vezanih uz temu rada.

**Definicija 1.1.** Neka su  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Skup  $\overline{xy} = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$  nazivamo dužina (spojnica) s krajevima  $x$  i  $y$ .

**Definicija 1.2.** Kažemo da je skup  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konveksan ako za svake dvije točke  $x$  i  $y$  iz skupa  $A$  vrijedi  $\overline{xy} \subseteq A$ .

Drugim riječima, skup je konveksan ako za svake dvije točke tog skupa vrijedi da je i dužina koja spaja te dvije točke također unutar tog skupa. Na slici 1.1 možemo vidjeti tri konveksna skupa označena slovima  $a, b, c$ , dok skup označen slovom  $d$  nije konveksan.



Slika 1.1: Skupovi  $a, b$  i  $c$  su konveksni, a skup  $d$  nije konveksan.

**Definicija 1.3.** Neka je  $M$  ravnina. Kružnica sa središtem u  $S$  i polumjerom  $r$  je skup  $K(S, r) = \{T \in M : |ST| = r\}$ .

U Definiciji 1.3 smo sa  $|ST|$  označili Euklidsku udaljenost između točaka  $S$  i  $T$ , odnosno duljinu dužine  $\overline{ST}$ .



**Definicija 1.4.** Neka je  $x \in \mathbb{R}^n$  i  $r > 0$ . Skup  $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |xy| < r\}$  nazivamo otvorenom kuglom oko  $x$  polumjera  $r$ .

**Definicija 1.5.** Skup  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je ograničen ako postoje točka  $P_0 \in \mathbb{R}^n$  i broj  $r > 0$  takvi da je  $A \subseteq K(P_0, r)$ .

**Definicija 1.6.** Skup  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je otvoren ako za svaki  $x$  iz skupa  $A$  postoji  $r > 0$  takav da je  $K(x, r) \subseteq A$ .

**Definicija 1.7.** Skup  $A \subset \mathbb{R}^n$  je zatvoren ako mu je komplement  $\mathbb{R}^n \setminus A$  otvoren.

**Definicija 1.8.** Neka je  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Zatvarač skupa  $A$ , u oznaci  $\bar{A}$ , je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže  $A$ .

**Definicija 1.9.** Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Rub ili granica skupa  $A$  je skup  $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ .

**Definicija 1.10.** Skup  $A \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

**Definicija 1.11.** Neka je  $M$  ravnina i neka su skupovi  $S, S' \subseteq M$ . Kažemo da su skupovi  $S$  i  $S'$  homeomorfni ako postoji bijekcija  $f : S \rightarrow S'$  takva da su  $f$  i  $f^{-1}$  neprekidne.

**Definicija 1.12.** Jednostavna krivulja je homeomorfna slika segmenta.

Općenito, krivulja je unija jednostavnih krivulja.

**Definicija 1.13.** Jednostavno zatvorena krivulja je homeomorfna slika kružnice.

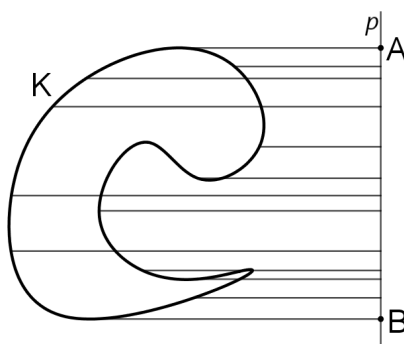
Radi jednostavnosti najčešće nećemo razlikovati krivulju od funkcije kojom je definirana.

**Teorem 1.14 (Jordanov teorem).** Neka je  $\gamma$  jednostavno zatvorena krivulja u ravnini  $\mathbb{R}^2$ . Tada se komplement  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  sastoji od dva disjunktne povezana otvorena skupa i  $\gamma$  je zajednički rub svakog od njih. Jedan od tih povezanih otvorenih skupova je omeđen i naziva se unutrašnje područje jednostavno zatvorene krivulje  $\gamma$  ili područje omeđeno jednostavno zatvorenom krivuljom  $\gamma$ , a drugi je neomeđen i naziva se vanjsko ili neomeđeno područje jednostavno zatvorene krivulje  $\gamma$ .

Mi ćemo pretpostaviti da su krivulje koje promatramo po dijelovima glatke, tj. takve da je funkcija  $f$  iz definicije krivulje neprekidno diferencijabilna na domeni, osim eventualno u konačno mnogo točaka gdje je samo neprekidna.

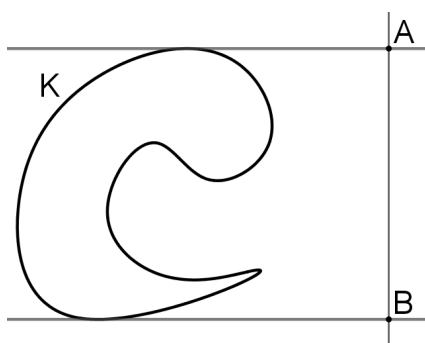
## Krivulje u ravnini

Neka je dana zatvorena krivulja  $K$ . Odredimo širinu krivulje  $K$  u danom smjeru. U tu svrhu odaberimo neki pravac  $p$  paralelan s danim smjerom u kojem želimo odrediti širinu krivulje. Svaku točku krivulje  $K$  ortogonalno projiciramo na pravac  $p$ . Točke dobivene ortogonalnom projekcijom čine dužinu  $\overline{AB}$  koji leži na pravcu  $p$ . Širina krivulje  $K$  u zadanom smjeru jednaka je upravo duljini dužine  $\overline{AB}$ .



Slika 1.2: Širina krivulje

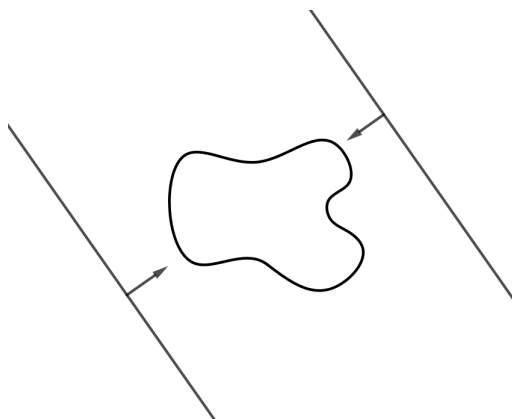
Povucimo pravce koji su okomiti na dužinu  $\overline{AB}$  i prolaze njenim krajnjim točkama  $A$  i  $B$  kao na slici 1.3. Svaki od ta dva pravca dodiruje krivulju  $K$  u barem jednoj točki, no ne prolazi točkama unutar krivulje. Cijela krivulja  $K$  nalazi se s jedne strane svakog od dobivenih pravaca, odnosno nalazi se točno između ta dva pravca. Ovako dobivene pravce zvat ćemo *potporni pravci* krivulje  $K$ .



Slika 1.3: Potporni pravci krivulje

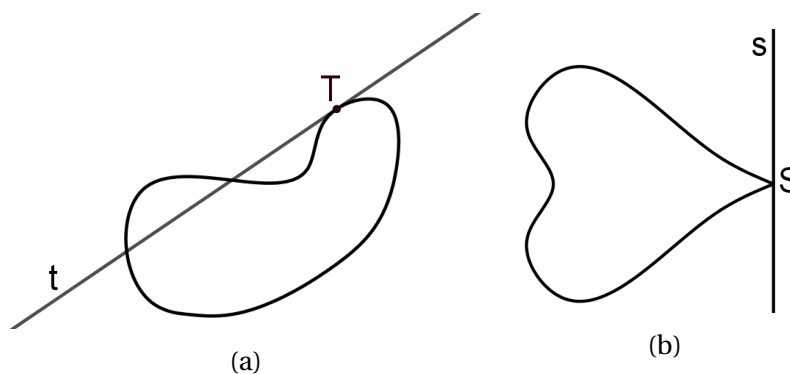
Svaka zatvorena krivulja ima jedan par potpornih pravaca u svakom smjeru. Par potpornih pravaca krivulje  $K$  u danom smjeru možemo odrediti na dva načina. Prvi način je već spomenuta metoda u kojoj ortogonalno projiciramo svaku točku krivulje  $K$  na

pravac  $p$  paralelan sa zadanim smjerom. Drugi način da odredimo par potpornih pravaca krivulje  $K$  u danom smjeru jest da odredimo bilo koja dva paralelna pravca takva da se krivulja  $K$  nalazi između njih, te da su oni okomiti na dani smjer. Potom transliramo svaki od pravaca u danom smjeru sve dok oni ne dotaknu krivulju  $K$  kao na slici 1.4.



Slika 1.4: Potporni pravci krivulje

Važno je napomenuti da potporni pravci krivulje  $K$  nisu isto što i tangente na tu krivulju. Pogledajmo krivulju prikazanu na slici 1.5a. Pravac  $t$  je tangenta na danu krivulju u točki  $T$ , no pravac  $t$  nije potporni pravac te krivulje jer siječe krivulju pa se ona ne nalazi u potpunosti s jedne strane pravca  $t$ . Pogledamo li krivulju sa slike 1.5b, lako možemo uočiti da je pravac  $s$  potporni pravac te krivulje, no pravac  $s$  nije tangenta na tu krivulju jer prolazi točkom  $S$  u kojoj dana krivulja ima šiljak. Naime, krivulja nije diferencijabilna u točki u kojoj ima šiljak, pa ne postoji tangenta na krivulju u toj točki [9].



Slika 1.5

Ovime smo slikovito objasnili pojmove širine i potpornih pravaca zatvorene, ne nužno konveksne, krivulje. U nastavku rada naglasak ćemo staviti na zatvorene konveksne krivulje.

**Definicija 1.15.** *Neka je  $S$  neprazan, ograničen i konveksan skup u ravnini. Rub skupa  $S$ , u oznaci  $\partial S$ , nazivamo zatvorenom konveksnom krivuljom.*

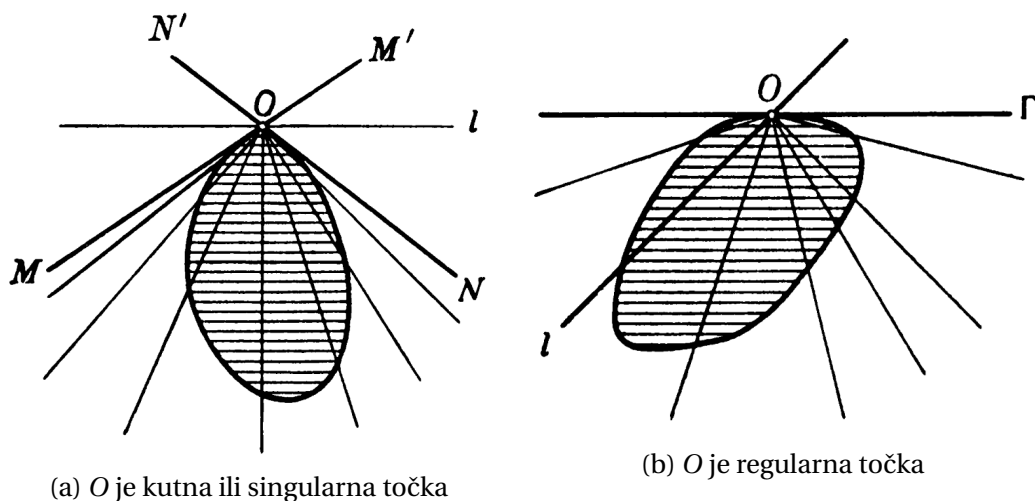
Sada možemo precizno matematički definirati potporne pravce i širinu zatvorene konveksne krivulje, te konačno krivulju konstantne širine.

**Definicija 1.16.** *Kažemo da je pravac  $l$  potporni pravac konveksnog skupa  $S$  u točki  $A \in \partial S$  ako vrijedi:*

1.  $A \in l$
2.  $S$  se nalazi u zatvaraču jedne od dviju otvorenih poluravnina u koje  $l$  rastavlja ravninu [7].

Iz prethodne definicije lako možemo uočiti da se svaka točka ruba konveksnog skupa  $S$  nalazi na nekom potpornom pravcu tog skupa.

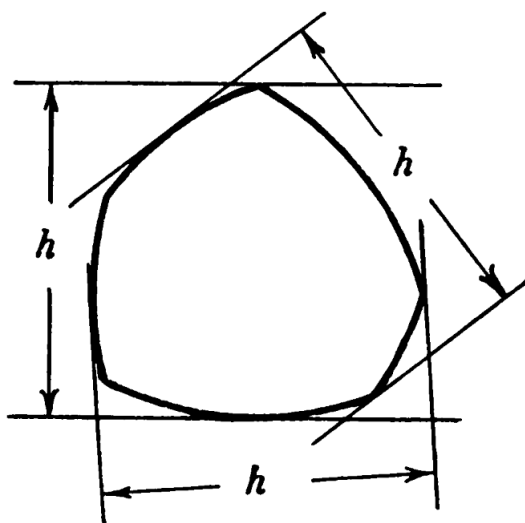
**Definicija 1.17.** *Ako kroz neku točku ruba skupa prolazi više od jednog potpornog pravca tog skupa, tada tu točku zovemo kutna ili singularna točka (slika 1.6a), inače govorimo o regularnoj točki (slika 1.6b).*



Slika 1.6

**Definicija 1.18.** Širina zatvorene konveksne krivulje u danom smjeru je udaljenost između para potpornih pravaca krivulje okomitih na dani smjer. Širina takve krivulje je minimum širina u svim smjerovima.

**Definicija 1.19.** Zatvorenu konveksnu krivulju kojoj je širina jednaka u svim smjerovima nazivamo krivuljom konstantne širine.



Slika 1.7: Krivulja konstantne širine  $h$

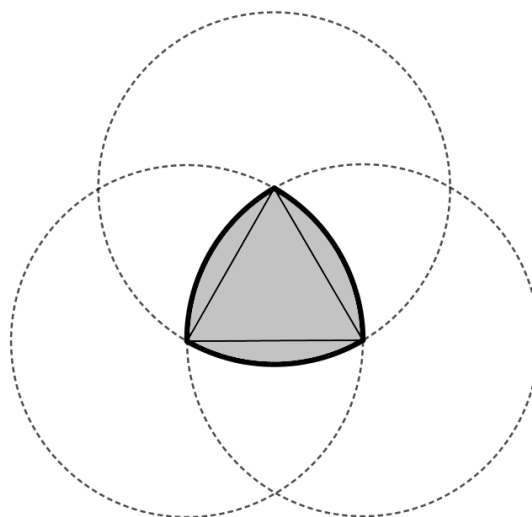
## Poglavlje 2

### Primjeri krivulja konstantne širine

Kao što smo naveli, krivulja konstantne širine je krivulja kojoj je širina u svakom smjeru jednaka. Najjednostavniji primjer takve krivulje je kružnica. No, osim kružnice, postoji beskonačno mnogo krivulja konstantne širine. Krenimo od najjednostavnijeg primjera.

#### 2.1 Reuleauxov trokut

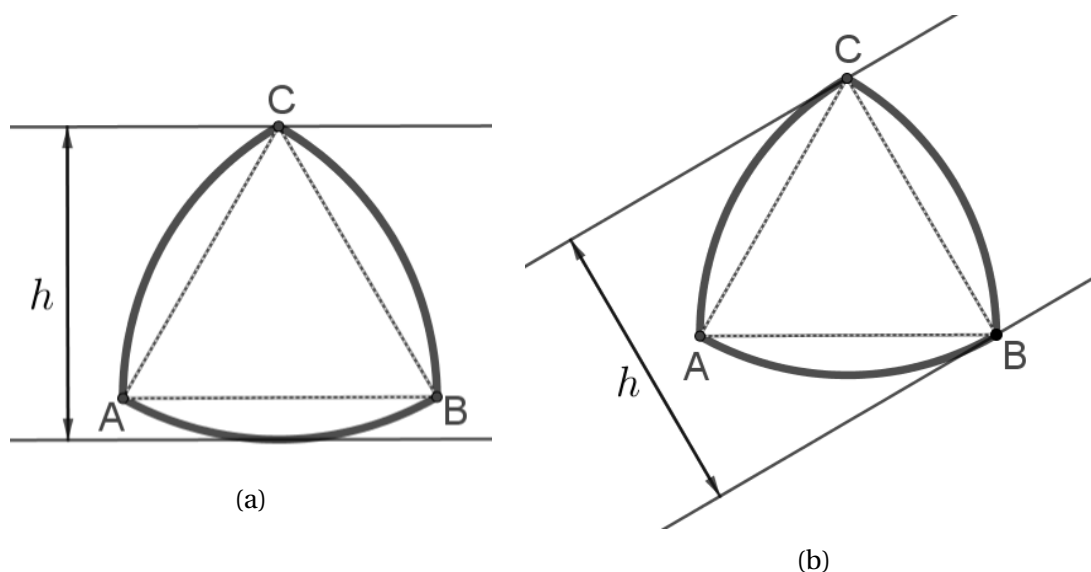
Za početak konstruirajmo proizvoljan jednakostraničan trokut kojemu je duljina stranice  $h$ . Potom konstruirajmo tri kruga polumjera  $h$ , tako da rub svakog od tih krugova prolazi kroz dva vrha trokuta, a središte mu je u trećem vrhu. U presjeku ova tri kruga dobivamo lik kojemu rub nazivamo Reuleauxov trokut (slika 2.1). Vidimo da je to krivo-



Slika 2.1: Konstrukcija Reuleauxovog trokuta

linijski trokut kojemu su vrhovi isti kao vrhovi jednakostraničnog trokuta od kojeg smo započeli, a stranice su mu sukladni kružni lukovi [2].

Odaberemo li bilo koji par paralelnih potpornih pravaca Reuleauxovog trokuta, jedan od njih će prolaziti jednim njegovim vrhom, dok će drugi biti tangenta na nasuprotnu stranicu kao na slici 2.2a, ili će svaki od dva potporna pravca prolaziti po jednom vrhom krivolinijskog trokuta kao na slici 2.2b.

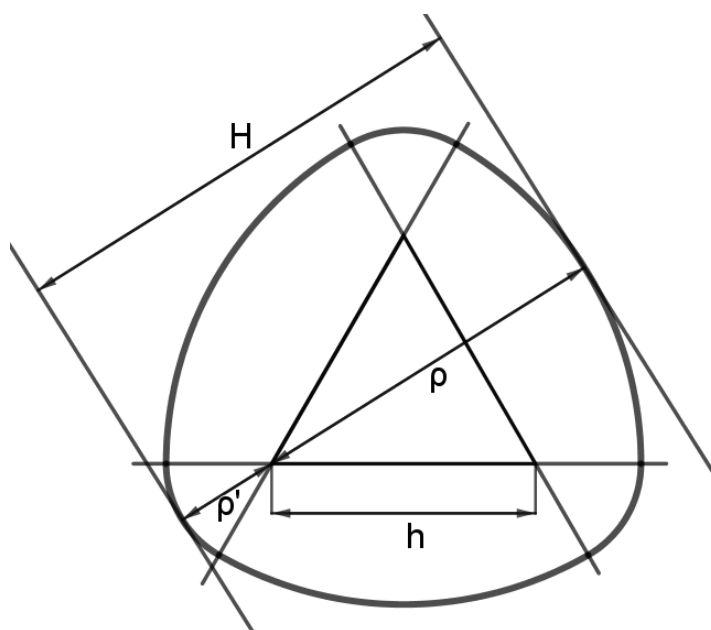


Slika 2.2

Ako jedan potporni pravac prolazi jednim vrhom trokuta, a drugi je tangenta na nasuprotnu stranicu (slika 2.2a), tada je udaljenost između potpornih pravaca očito jednaka polumjeru  $h$  kružnog luka. Ukoliko oba potporna pravca prolaze vrhovima krivolinijskog trokuta (slika 2.2b), onda su oni okomiti na odgovarajuću stranicu početnog jednakostraničnog trokuta, pa je njihova udaljenost jednaka duljini  $h$  stranice tog trokuta. U svakom slučaju, udaljenost između para paralelnih potpornih pravaca krivolinijskog trokuta uvijek je jednaka  $h$ , pa je širina Reuleauxovog trokuta u svakom smjeru jednaka  $h$  [2].

Uočimo da točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$  Reuleauxovog trokuta prolazi više potpornih pravaca pa su  $A$ ,  $B$  i  $C$  kutne točke. Ostalim točkama Reuleauxovog trokuta prolazi točno jedan potporni pravac koji je tangenta na tu stranicu, pa su te točke regularne. Dakle, Reuleauxov trokut ima točno tri kutne točke.

Polazeći od Reuleauxovog trokuta možemo doći do još nekih zanimljivih primjera krivulja konstantne širine. Vidjeli smo da Reuleauxov trokut ima tri kutne točke, a sada ćemo sličnom konstrukcijom doći do krivulje konstantne širine kojoj su sve točke regularne. Za početak, ponovno ćemo konstruirati jednakostraničan trokut sa stranicom duljine  $h$ . Produljimo sve tri stranice trokuta preko svakog od vrhova trokuta (vidi sliku 2.3). Oko svakog vrha trokuta ćemo konstruirati kružni luk, koji se nalazi unutar odgovarajućeg kuta trokuta, a promjer mu je jednak  $\rho > h$ . Nadalje, dobivene lukove spojimo lukovima sa središtima u vrhovima trokuta i polumjerom  $\rho' = \rho - h$ , koji se nalaze izvan kutova trokuta. Po konstrukciji slijedi da se susjedni lukovi nastavljaju jedan na drugoga jer smo polumjer  $\rho'$  upravo tako odabrali.



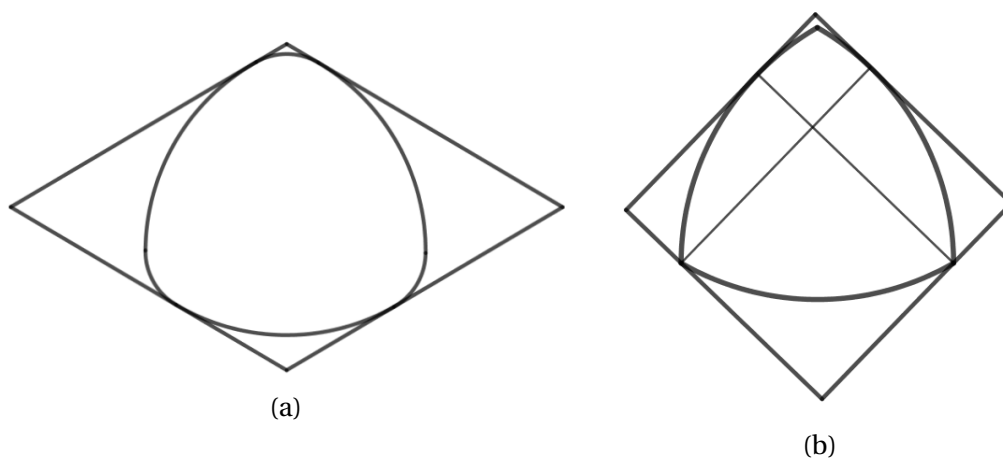
Slika 2.3: Konstrukcija krivulje konstantne širine bez kutnih točaka

Neka je sada  $\rho + \rho' = H$ . Odaberemo li bilo koji par potpornih pravaca dobivene krivulje, jedan od pravaca će biti tangenta na luk kružnice većeg polumjera  $\rho$ , dok će drugi pravac biti tangenta na luk kružnice manjeg polumjera  $\rho'$ , pri čemu lukovi imaju zajedničko središte. Udaljenost između potpornih pravaca je očito  $\rho + \rho' = H$ , pa je dobivena krivulja zaista krivulja konstantne širine  $H$  [2].

Konstruiramo li dva para potpornih pravaca neke krivulje konstantne širine, oni će tvoriti paralelogram. Štoviše, zbog konstantne širine koju ima krivulja, dva para potpornih pravaca tvorit će romb, kao što je prikazano na slici 2.4a. Posebno, ako su dva para potpornih pravaca krivulje konstantne širine okomiti, tada oni tvore romb s pravim ku-

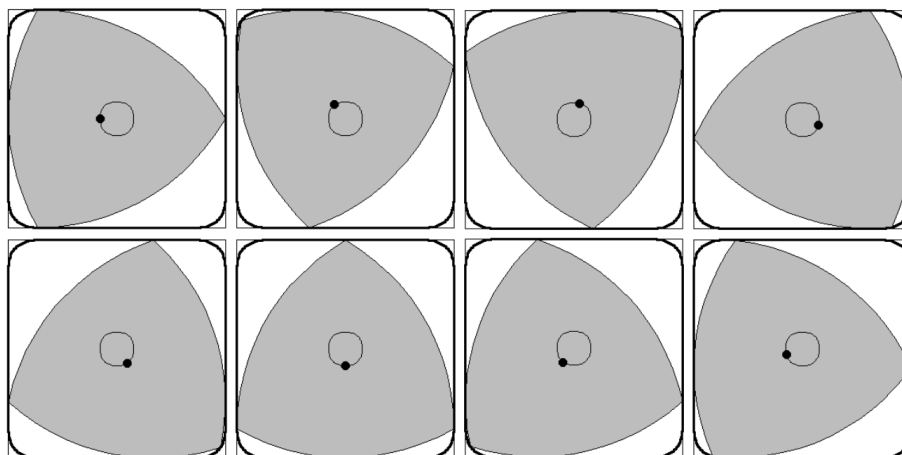


tom, odnosno kvadrat, kao na slici 2.4b. S obzirom da je širina krivulje konstantna i jednaka  $h$ , kvadrat koji čine dva okomita para potpornih pravaca ima stranicu duljine  $h$ . Budući da bilo koja dva para okomitih potpornih pravaca krivulje konstantne širine  $h$  tvore kvadrat sa stranicom duljine  $h$ , svi dobiveni kvadrati su sukladni [9].



Slika 2.4

Krivulja konstantne širine može se slobodno okretati unutar kvadrata čija je duljina stranice jednaka širini krivulje (slika 2.5). Pri tome krivulja u svakom trenutku dotiče sve stranice kvadrata.



Slika 2.5

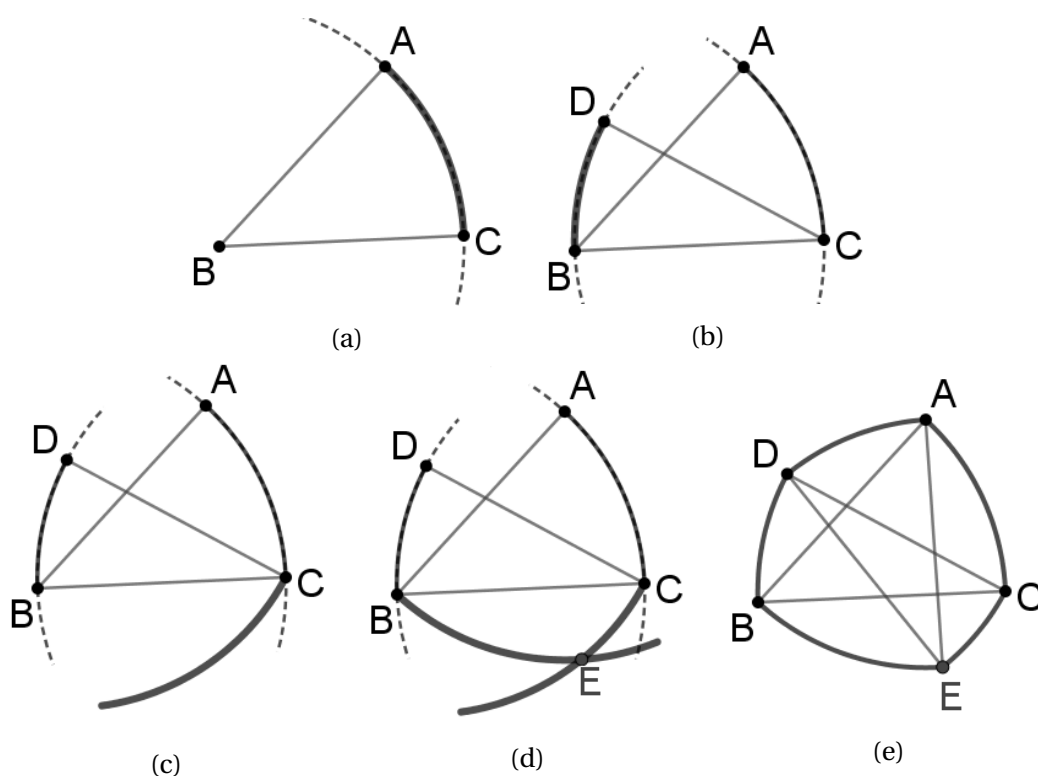
Vrijedi i obrnuto, krivulja koja se može slobodno okretati unutra kvadrata duljine stranice  $h$ , ostajući pri tome u dodiru sa svim stranicama kvadrata, je krivulja konstantne

širine  $h$ . Ovo svojstvo primjenjeno je pri izradi svrdla u obliku Reuleauxovog trokuta, pomoću kojeg se može izdubiti gotovo kvadratna rupa. Rupa koja se dobije nije pravi kvadrat, već ima oblik kvadrata kojemu su vrhovi zaobljeni, što se vidi na slici 2.5. Primjetimo da centar svrdla ne može biti fiksiran, nego se giba po jednoj ovalnoj krivulji [2],[9].

## 2.2 Reuleauxovi poligoni

Po principu konstrukcije Reuleauxovog trokuta možemo konstruirati i krivolinijske poligone s više stranica. Ideja dobivanja krivolinijskih poligona ista je kao i kod Reuleauxovog trokuta, a bit je u konstrukciji niza lukova jednakih polumjera čije središte je u nasuprotnom vrhu. Prikažimo dobivanje takvog krivolinijskog poligona sastavljenog od pet lukova. Općeniti postupak za veći broj lukova provodi se analogno.

1. Odaberemo točku  $B$ , te nacrtamo luk kružnice polumjera  $h$  sa središtem u točki  $B$ . Na dobivenom luku odaberemo dvije točke  $A$  i  $C$  (slika 2.6a).

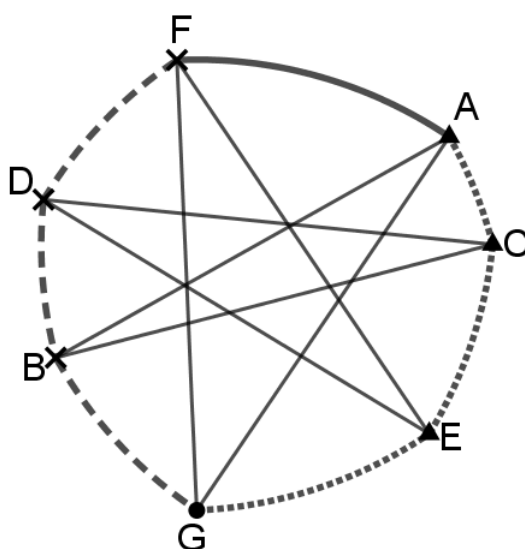


Slika 2.6: Konstrukcija krivolinijskog poligona sastavljenog od pet lukova

2. Konstruiramo luk sa središtem u točki  $C$  i polumjerom  $h$ . Taj luk očito prolazi točkom  $B$ , jer je  $|BC| = h$  po prethodnom koraku konstrukcije. Na dobivenom luku odaberemo točku  $D$  (slika 2.6b).
3. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki  $D$  polumjera  $h$ , koji prolazi točkom  $C$ , jer je  $|CD| = h$  po prethodnom koraku konstrukcije (slika 2.6c).
4. Konstruiramo kružni luk sa središtem u točki  $A$  polumjera  $h$ . Taj luk očito prolazi točkom  $B$ , jer je  $|AB| = h$  po prvom koraku konstrukcije. Presjek lukova s polumjerom  $h$  i središtima u točkama  $A$  i  $D$  je točka  $E$  (slika 2.6d).
5. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki  $E$  koji prolazi točkama  $A$  i  $D$ . Očito je po prethodnom koraku konstrukcije  $|DE| = h$  i  $|AE| = h$ . Time smo dobili krivolinijski poligon  $ABCDE$  konstantne širine  $h$  (slika 2.6e) [9].

Na isti način moguće je konstruirati krivolinijske poligone s većim brojem stranica. Zbog sličnosti konstrukcije s Reuleauxovim trokutom, ovakve poligone još nazivamo Reuleauxovim poligonima. Ovom metodom moguće je konstruirati samo krivolinijske poligone s neparnim brojem stranica, što ćemo sada i pokazati.

Odaberimo neki vrh krivolinijskog poligona konstantne širine i njemu nasuprotnu stranicu, te ih podebljajmo. Na slici 2.7 je prikaz ovog dokaza za  $n = 3$ , a odabrani vrh je  $G$ .

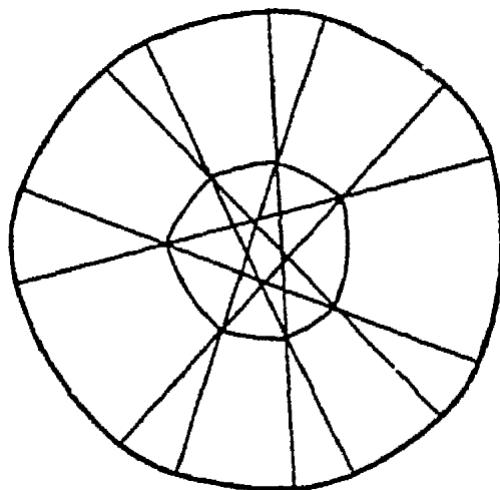


Slika 2.7: Reuleauxev poligon s neparnim brojem stranica

Krenimo sada od odabranog vrha prema njemu nasuprotnoj stranici i brojimo koliko

vrhova i stranica smo prešli, pri čemu odabrani vrh i stranicu ne brojimo. Krenemo li od odabranog vrha prvo ćemo prijeći stranicu pa vrh i tako sve dok ne pređemo vrh nakon kojeg slijedi odabrana stranica. Očito smo na tom dijelu poligona prešli jednak broj vrhova i stranica. Recimo da smo prešli  $n$  vrhova i isto toliko stranica. Označimo dosad prijeđene vrhove križićem, a stranice isprekidanom linijom. Krenimo sada ponovno od odabranog vrha prema njemu nasuprotnoj stranici, ali ovoga puta u drugom smjeru. Analogno kao i prije, prvo ćemo prijeći stranicu pa vrh i tako sve dok ne pređemo vrh nakon kojeg slijedi odabrana stranica. Označimo trokutićem vrhove prijeđene na ovom dijelu poligona, a stranice točkastom linijom. Time smo označili sve vrhove i sve stranice poligona. Budući da je nasuprot svakog vrha označenog križićem stranica, tj. luk koji je istočkan i nasuprot svakog vrha označenog trokutićem stranica koja je isprekidana, zaključujemo da vrhova označenih trokutićem ima također  $n$ . Sada vidimo da poligon ima jedan odabrani vrh,  $n$  vrhova označenih križićem i  $n$  vrhova označenih trokutićem. Također ima jednu odabranu stranicu,  $n$  iscrtkanih i  $n$  istočkanih stranica. Odnosno, poligon ima ukupno  $2n + 1$  vrhova i isti broj stranica [9].

Kao što smo iz Reuleauxovog trokuta mogli konstruirati krivulju konstantne širine koja umjesto tri kutne točke ima još tri manja luka, tako i iz Reuleauxovog poligona možemo na analogan način dobiti krivulju konstantne širine koja umjesto  $2n + 1$  kutnih točaka ima još toliko krivolinijskih stranica (slika 2.8) [9].

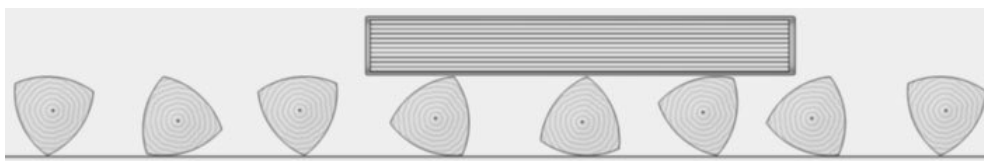


Slika 2.8: Reuleauxeov poligon bez kutnih točaka

## 2.3 Kotač

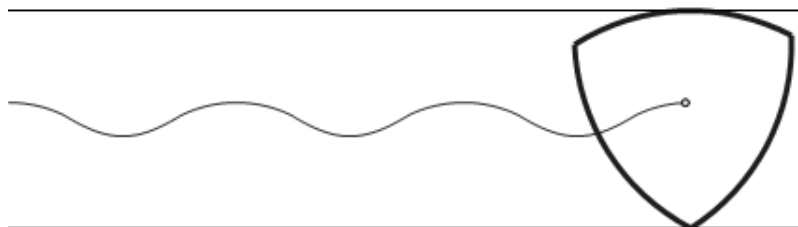
Kružnica je skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od neke čvrste točke te ravnine. Iz same definicije kružnice slijedi da kružnica ima jednaku širinu u bilo kojem smjeru jer je udaljenost između bilo koja dva paralelna potporna pravca konstantna i jednaka promjeru kružnice. Ovo svojstvo kružnice ima svoju primjenu u izradi kotača. Svima je poznato da je kotač izrađen u obliku kruga, čiji rub je upravo kružnica. Centar kotača pri gibanju uvijek ostaje na konstantnoj visini od tla. Upravo iz tog razloga vozilo, koje je pričvršćeno na osovinu čiji krajevi su spojeni sa središtem kotača, pri gibanju ostaje na konstantnoj visini od tla, što omogućuje glatko horizontalno gibanje.

Kroz povijest su ljudi koristili valjke preko kojih su kotrljali težak teret kako bi ga premjestili. Pri tome su uglavnom koristili valjke čije baze su sukladni krugovi, što im je omogućilo da predmet ostaje na konstantnoj visini iznad tla. Primjenivši svojstvo konstantne širine nekih likova, pojedinci nisu izrađivali samo valjke čije baze su sukladni krugovi, već i valjke čije baze su neki drugi sukladni likovi konstantne širine. Primjer takvog valjaka prikazan je na slici 2.9. Kotrljanje predmeta preko ovakvih valjaka također omogućuje glatko horizontalno kretanje tereta.



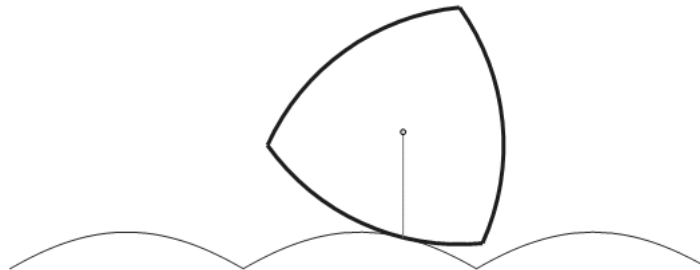
Slika 2.9: Kotrljanje predmeta preko valjaka čije baze su sukladni likovi konstantne širine

Likovi konstantne širine primjenjeni su i pri izradi kotača, no ovdje se javio problem micanja vozila gore-dolje prilikom gibanja. Naime, osovina vozila spojena je s kotačem u njegovom težištu, koje pri kretanju ne ostaje na konstantnoj visini od tla, nego se pomiče gore-dolje. Ovakvi kotači, iako imaju konstantnu širinu, ne omogućuju glatko horizontalno gibanje, već uzrokuju pomicanje vozila gore-dolje prilikom vožnje.



Slika 2.10: Kotač u obliku lika konstantne širine

Neki su se dosjetili modificirati podlogu po kojoj se kreće vozilo s kotačima u obliku lika konstantne širine. Jedno od rješenja prikazano je na slici 2.11.



Slika 2.11: Modifikacija podloge za kotač u obliku lika konstantne širine

Kretanje vozila s kotačima konstantne širine po modificiranoj podlozi, prikazano kao na prethodnoj slici, omogućuje glatko horizontalno gibanje vozila bez pomicanja gore-dolje. Ovakva rješenja naravno nisu praktična i ostaju samo zabavni kuriozitet. Primjetimo da u slučaju modificiranja podloge kretanja, možemo uzeti i proizvoljne druge likove za kotače. Primjerice, na slici 2.12 prikazan je muzejski primjerak "bicikla" s kvadratnim kotačima [7], [9].



Slika 2.12: Muzejski primjerak vozila s kvadratnim kotačima

## Poglavlje 3

# Teoremi o krivuljama konstantne širine

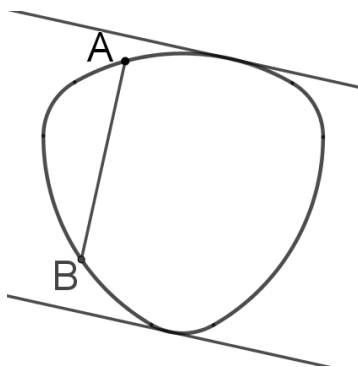
U ovom dijelu rada ćemo navesti i dokazati neke od tvrdnji i rezultata vezanih uz krivulje konstantne širine. Uz to ćemo definirati nekoliko pojmova potrebnih za razumijevanje i dokazivanje samih tvrdnji. Većina teorema i definicija preuzeta je iz knjige [2], dok ih je nekolicina iz knjige [6], što će biti označeno.

### 3.1 Osnovne tvrdnje

Za početak, navedimo i dokažimo neke od osnovnih tvrdnji koje vrijede za krivulje konstantne širine.

**Teorem 3.1.** *Udaljenost između bilo koje dvije točke na krivulji konstantne širine  $h$  nije veća od  $h$ .*

*Dokaz.* Neka su  $A$  i  $B$  neke dvije točke na krivulji konstantne širine  $h$ . Postoji jedinstven par potpornih pravaca okomitih na dužinu  $\overline{AB}$  (slika 3.1).

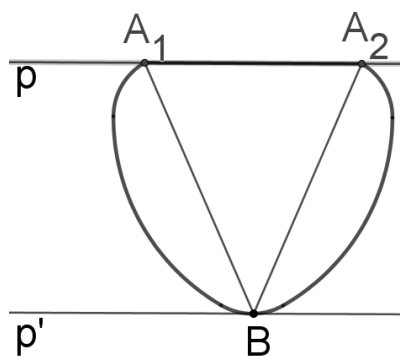


Slika 3.1: Udaljenost između dvije točke na krivulji konstantne širine

Očito se dužina  $\overline{AB}$  nalazi između tih potpornih pravaca, jer se cijela krivulja nalazi između potpornih pravaca. Stoga duljina dužine  $\overline{AB}$  nije veća od udaljenosti potpornih pravaca. Znamo da je udaljenost potpornih pravaca krivulje jednaka širini  $h$  te krivulje. Dakle, udaljenost između bilo koje dvije točke na krivulji konstantne širine  $h$  nije veća od  $h$ .  $\square$

**Teorem 3.2.** *Krivulja konstantne širine ima točno jednu zajedničku točku sa svakim od potpornih pravaca. Dužina koja spaja zajedničke točke dvaju paralelnih potpornih pravaca i krivulje okomita je na te pravce i stoga joj je duljina jednaka širini krivulje.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, odnosno da krivulja konstantne širine i potporni pravac imaju više zajedničkih točaka. Neka je  $h$  širina krivulje i neka je  $p$  potporni pravac zadane krivulje. Nadalje, neka krivulja i pravac  $p$  imaju dvije zajedničke točke  $A_1$  i  $A_2$ . Postoji jedinstveni potporni pravac  $p'$  paralelan s potpornim pravcem  $p$ . Neka krivulja i pravac  $p'$  imaju zajedničku točku  $B$  (slika 3.2). Znamo da je udaljenost između potpornih pravaca  $p$  i  $p'$  jednaka širini  $h$  zadane krivulje.



Slika 3.2

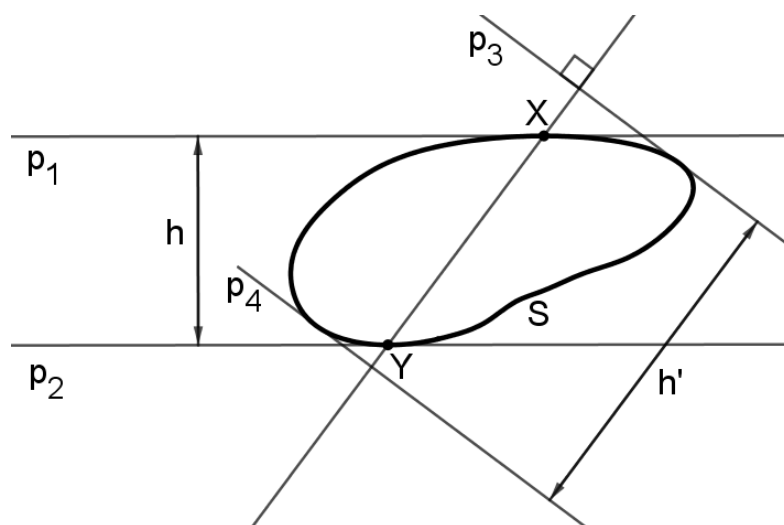
Očito dužine  $\overline{A_1B}$  i  $\overline{A_2B}$  ne mogu obje biti okomite na pravac  $p$  jer trokut  $A_1A_2B$  ne može imati dva prava kuta. Neka, bez smanjenja općenitosti, dužina  $\overline{A_2B}$  nije okomita na pravac  $p$ . Budući da je visina iz točke  $B$  na pravac  $A_1A_2$  duljine  $h$ , slijedi da je  $|A_2B| > h$ , što je u kontradikciji s Teoremom 3.1. Dakle, početna pretpostavka je kriva, što znači da krivulja konstantne širine ima točno jednu zajedničku točku sa svakim od potpornih pravaca. Druga tvrdnja teorema također je sada očita.  $\square$

**Definicija 3.3.** *Neka je  $S$  neprazan ograničen skup. Promjer skupa  $S$  je najveća udaljenost dviju točaka iz  $S$  [6].*

**Teorem 3.4.** *Neka je  $S$  neprazan kompaktan skup. Promjer skupa  $S$  jednak je maksimalnoj širini skupa  $S$  [6].*



*Dokaz.* Neka je  $h$  maksimalna širina skupa  $S$ . Neka su  $p_1$  i  $p_2$  paralelni potporni pravci skupa  $S$  čija udaljenost je  $h$ . Neka su  $X$  i  $Y$ ,  $X \neq Y$ , točke skupa  $S$  koje leže na pravcima  $p_1$  i  $p_2$ . Želimo dokazati da je  $|XY| = h$ . Ako je dužina  $\overline{XY}$  okomita na pravac  $p_1$ , onda je očito  $|XY| = h$ . Pretpostavimo sada da dužina  $\overline{XY}$  nije okomita na pravac  $p_1$ . Tada je  $|XY| > h$ . Neka su  $p_3$  i  $p_4$  dva paralelna potporna pravca skupa  $S$  okomita na pravac  $XY$ . Neka je  $h'$  udaljenost potpornih pravaca  $p_3$  i  $p_4$ , odnosno širina skupa  $S$  u smjeru pravca  $XY$ . Tada je  $|XY| \leq h'$ .



Slika 3.3: Promjer skupa

Sada imamo  $h < |XY| \leq h'$  što je u kontradikciji s pretpostavkom da je  $h$  maksimalna širina skupa  $S$ . Zaključujemo da je  $XY$  okomito na  $p_1$  i  $|XY| = h$ .

Neka su  $P$  i  $Q$  bilo koje dvije točke skupa  $S$ . Neka je  $l$  širina skupa  $S$  u smjeru pravca  $PQ$ . Tada je  $|PQ| \leq l$ . Sada imamo  $|PQ| \leq l \leq h = |XY|$  jer je  $h$  maksimalna širina skupa  $S$ . Vidimo da udaljenost bilo koje dvije točke skupa  $S$  nije veća od  $h$ , pa je  $h$  promjer skupa  $S$ . Time smo dokazali da je promjer skupa  $S$  jednak je maksimalnoj širini tog skupa.  $\square$

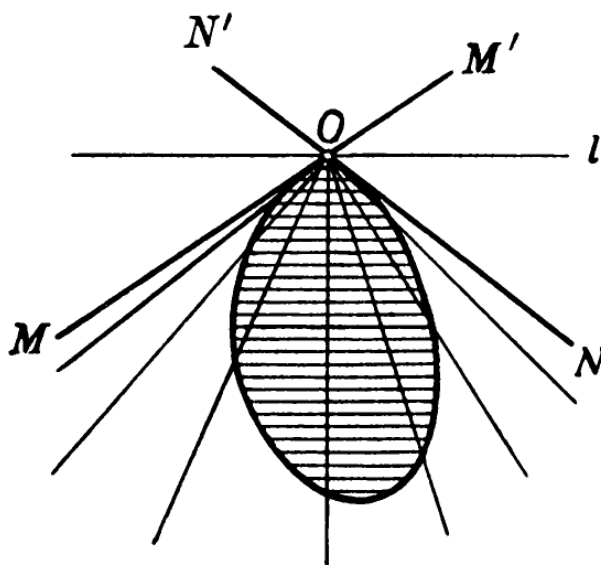
**Definicija 3.5.** *Krivulja za koju vrijedi da udaljenost između bilo koje dvije točke te krivulje nije veća od  $h$ , te da za svaku točku te krivulje postoji jedinstvena točka koja je od nje udaljena za točno  $h$  nazivamo krivuljom konstantnog promjera.*

Očito je svaka krivulja konstantne širine ujedno i krivulja konstantnog promjera. Vrijedi i obrnuto, svaka krivulja konstantnog promjera je ujedno i krivulja konstantne širine, što znači da krivulje konstantne širine i krivulje konstantnog promjera čine isti skup [2]. Promjerom krivulje ćemo zvati i svaku tetivu krivulje, tj. spojnicu točaka na krivulji, kojoj je duljina maksimalna, tj. jednaka promjeru kao prije definiranom pojmu.

**Teorem 3.6.** Svaka tetiva krivulje konstantne širine kojoj je duljina jednaka širini krivulje mora biti promjer te krivulje.

*Dokaz.* Ova tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 3.1. □

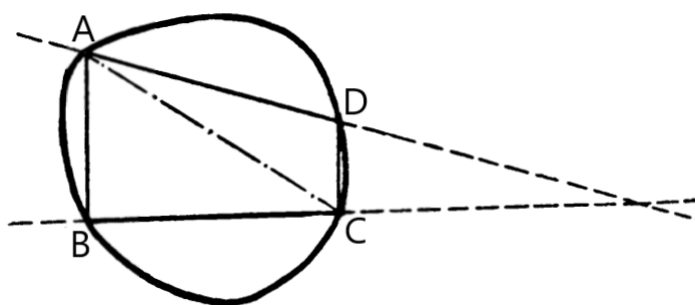
Pogledajmo krivulju prikazanu na slici 3.4. Točka  $O$  je kutna točka krivulje kroz koju prolaze potporni pravci  $MM'$  i  $NN'$ . Kut  $\angle MON = \alpha$  nazivamo unutarnjim kutom krivulje u točki  $O$ , a kut  $\angle MON' = 180^\circ - \alpha$  nazivamo vanjskim kutom krivulje u točki  $O$  [2].



Slika 3.4: Kut  $\angle MON = \alpha$  je unutarnji, a kut  $\angle MON' = 180^\circ - \alpha$  vanjski kut krivulje u točki  $O$ .

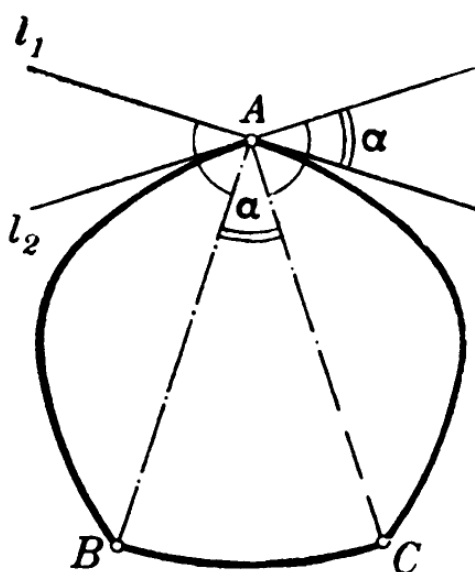
**Teorem 3.7.** Bilo koja dva promjera krivulje konstantne širine sijeku se u unutrašnjosti krivulje ili na krivulji. Ako se sijeku na krivulji, tada je njihovo sjecište kutna točka  $A$ , te vanjski kut krivulje pri točki  $A$  nije manji od kuta između ta dva promjera.

*Dokaz.* Neka dana krivulja ima konstantnu širinu  $h$  i neka su  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  promjeri te krivulje. Tada je  $|AD| = |BC| = h$ . Pretpostavimo da se pravci  $AD$  i  $BC$  na kojima leže promjeri sijeku izvan krivulje ili su paralelni (slika 3.5). Tada su  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  stranice četverokuta  $ABCD$  upisanog danoj krivulji. S obzirom da je zbroj veličina unutarnjih kutova četverokuta  $ABCD$  jednak  $360^\circ$ , barem jedan od kutova tog četverokuta nije manji od  $90^\circ$ . Pretpostavimo da je to kut pri vrhu  $D$ . Budući da je  $|AD| = h$  i  $|AC| > |AD|$  jer je  $\angle ADC > \angle ACD$ , slijedi da je  $|AC| > h$ , što je u kontradikciji s Teoremom 3.1. Dakle, dva promjera krivulje konstantne širine sijeku se u unutrašnjosti krivulje ili na krivulji.



Slika 3.5

Neka se dva promjera  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  sijeku u točki  $A$  na krivulji konstantne širine (slika 3.6). Nadalje, neka su  $l_1$  i  $l_2$  pravci koji prolaze točkom  $A$  i okomiti su na  $AB$ , odnosno  $AC$ . Tada su  $l_1$  i  $l_2$  potporni pravci dane krivulje. S obzirom da kroz točku  $A$  prolaze dva potporna pravca, točka  $A$  je kutna točka.



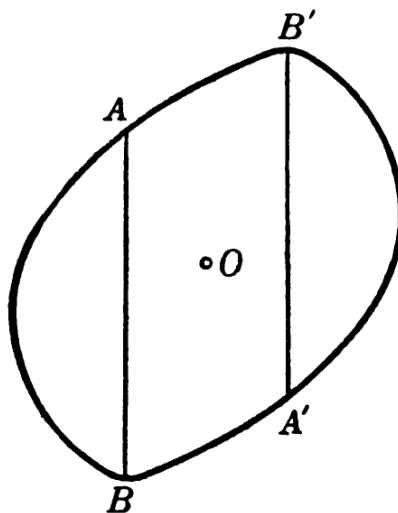
Slika 3.6

Ako je  $\angle BAC = \alpha$ , onda je  $\angle(l_1, l_2) = \alpha$  jer su to kutovi s okomitim kracima. Tada vanjski kut pri vrhu  $A$  nije manji od  $\alpha$ .  $\square$

**Teorem 3.8.** *Kružnica je jedina centralnosimetrična krivulja konstantne širine.*

*Dokaz.* Neka je  $K$  krivulja konstantne širine s centrom simetrije u točki  $O$ . Uočimo da svi promjeri krivulje  $K$  prolaze centrom simetrije  $O$ . Naime, ako promjer  $\overline{AB}$  krivulje  $K$

ne prolazi centrom simetrije  $O$ , tada je dužina  $\overline{A'B'}$ , koja je simetrična dužini  $\overline{AB}$  s obzirom na točku  $O$ , također promjer krivulje  $K$  (vidi sliku 3.7).



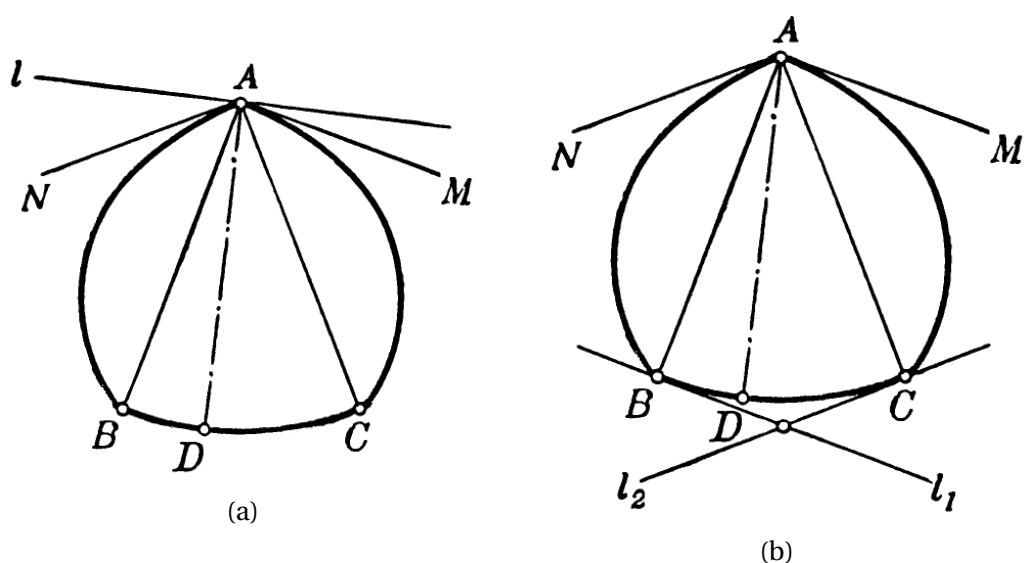
Slika 3.7

Tada su promjeri  $\overline{AB}$  i  $\overline{A'B'}$  paralelni, što je u kontradikciji s Teoremom 3.7. Dakle, svi promjeri krivulje  $K$  prolaze centrom simetrije  $O$ . Zbog simetrije krivulje  $K$ , točka  $O$  raspolavlja svaki od promjera krivulje  $K$ , što znači da je  $K$  kružnica sa središtem u točki  $O$  polumjera  $h/2$ .  $\square$

**Teorem 3.9.** *Ako krivulja konstantne širine  $h$  ima kutnu točku, tada je jedan od lukova krivulje upravo kružni luk polumjera  $h$ , i obrnuto, ako je neki luk krivulje konstantne širine  $h$  kružni luk polumjera  $h$ , onda krivulja ima kutnu točku.*

*Dokaz.* Neka je  $A$  kutna točka krivulje  $K$  konstantne širine  $h$ . Neka su  $AM$  i  $AN$  tangentni polupravci na krivulju  $K$  u točki  $A$  (vidi sliku 3.8a). Konstruirajmo dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  okomite redom na pravce  $AM$  i  $AN$  tako da je  $|AB| = |AC| = h$ . Sada nacrtajmo kružni luk  $\widehat{BC}$  polumjera  $h$  sa središtem u točki  $A$ . Dokažimo da sve točke luka  $\widehat{BC}$  pripadaju krivulji  $K$ .

Neka je  $D$  bilo koja točka luka  $\widehat{BC}$ . Nacrtajmo dužinu  $\overline{AD}$ . Neka je  $l$  pravac kroz točku  $A$  okomit na dužinu  $\overline{AD}$ . Pravac  $l$  je potporni pravac krivulje  $K$  jer oba polupravca  $AM$  i  $AN$  leže s iste strane pravca  $l$ . Budući da je  $l$  potporni pravac i  $A$  točka u kojoj pravac  $l$  dodiruje krivulju  $K$ , dužina  $\overline{AD}$  duljine  $h$  mora biti promjer krivulje  $K$  prema Teoremu 3.2. Stoga točka  $D$  leži na krivulji  $K$ . Isti postupak provedemo za svaku točku luka  $\widehat{BC}$ , te dobivamo da cijeli luk  $\widehat{BC}$  pripada krivulji  $K$ . Ako je vanjski kut krivulje pri kutnoj točki  $A$  jednak  $\alpha$ , tada luk  $\widehat{BC}$  ima pripadni središnji kut  $\alpha$ .



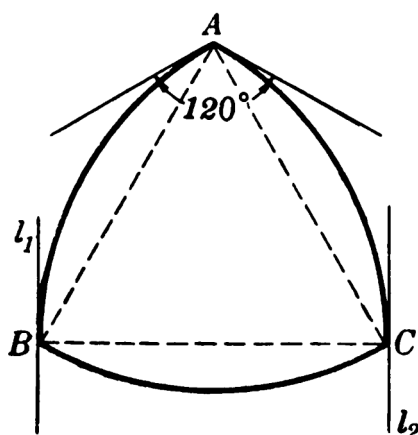
Slika 3.8

Obrnuto, pretpostavimo da je luk  $\widehat{BC}$  krivulje  $K$  konstantne širine  $h$  jednak kružnom luku polumjera  $h$  sa središtem u točki  $A$ . Konstruirajmo tangente  $l_1$  i  $l_2$  na kružni luk  $\widehat{BC}$  u točkama  $B$  i  $C$  (vidi sliku 3.8b). Tada su  $l_1$  i  $l_2$  potporni pravci krivulje  $K$  u točkama  $B$  i  $C$ . Dužine  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  su okomite na pravce  $l_1$  i  $l_2$  i imaju duljinu  $h$ , pa su  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  promjeri krivulje  $K$ . Zato je  $A$  kutna točka krivulje  $K$  prema Teoremu 3.7.  $\square$

**Teorem 3.10.** *Unutarnji kut pri kutnoj točki  $A$  krivulje konstantne širine ne može biti manji od  $120^\circ$ . Jedina krivulja konstantne širine kojoj je unutarnji kut pri kutnoj točki jednak  $120^\circ$  je Reuleauxov trokut.*

*Dokaz.* Neka je  $A$  kutna točka krivulje konstantne širine  $h$ . Ako je unutarnji kut pri točki  $A$  manji od  $120^\circ$ , onda je vanjski kut pri točki  $A$  veći od  $60^\circ$ . Tada krivulja konstantne širine mora imati luk polumjera  $h$  kojemu je pripadni središnji kut veći od  $60^\circ$ . Tada je duljina tetive pridružene krajnjim točkama tog luka veća od  $h$ , što je u kontradikciji s Teoremom 3.1. Dakle, unutarnji kut krivulje pri kutnoj točki  $A$  ne može biti manji od  $120^\circ$ .

Pretpostavimo sada da je unutarnji kut pri kutnoj točki  $A$  krivulje konstantne širine  $h$  jednak  $120^\circ$ . Tada krivulja ima luk polumjera  $h$  kojemu je središnji kut  $\angle BAC$  jednak  $60^\circ$ , pa je trokut  $ABC$  jednakostraničan (slika 3.9). S obzirom da je  $|BC| = h$ ,  $\widehat{BC}$  je promjer krivulje. Pravci  $l_1$  i  $l_2$ , koji prolaze točkama  $B$  i  $C$  i okomiti su na  $BC$ , su potporni pravci krivulje, jer je udaljenost među njima jednaka  $h$ . Budući da se promjeri  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  sijeku u točki  $B$ ,  $B$  je kutna točka krivulje. To znači da kružni luk sa središtem u točki  $B$  polumjera



Slika 3.9

$h$  prolazi točkama  $A$  i  $C$ , i pripada danoj krivulji. Također, luk polumjera  $h$  koji prolazi točkama  $A$  i  $B$  pripada danoj krivulji, pa se radi o Reuleauxovom trokutu.  $\square$

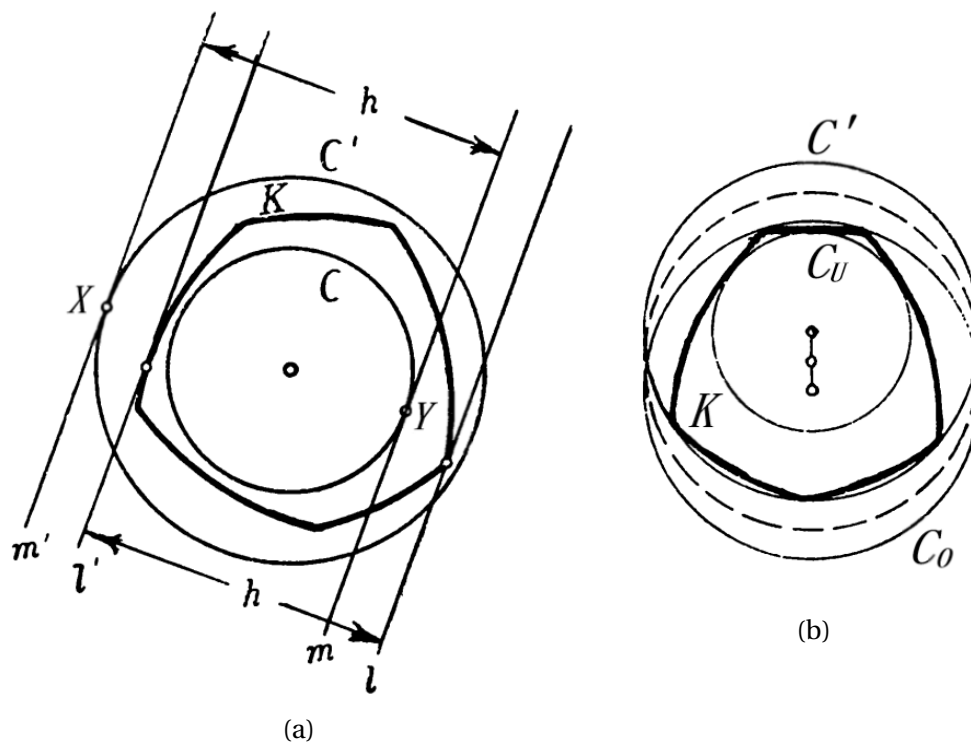
**Definicija 3.11.** *Neka je  $S$  kompaktan konveksan skup. Rub kruga najvećeg promjera koji je sadržan u skupu  $S$  nazivamo kružnicom upisanom skupu  $S$ . Rub kruga najmanjeg promjera koji sadrži skup  $S$  nazivamo kružnicom opisanom skupu  $S$  [6].*

Općenito, skup može imati više upisanih kružnica, no opisana kružnica je uvijek jedinstvena. Posebno, skupovi konstantne širine imaju jedinstvenu i opisanu i upisanu kružnicu. Štoviše, one su koncentrične, što ćemo i dokazati.

**Teorem 3.12.** *Neka je  $K$  konveksna krivulja konstantne širine. Tada su kružnica upisana krivulji  $K$  i kružnica opisana krivulji  $K$  koncentrične, a zbroj njihovih polumjera jednak je širini skupa  $K$ .*

*Dokaz.* Neka krivulja  $K$  ima konstantnu širinu  $h$  i neka je  $C$  kružnica polumjera  $r$  koja se cijela nalazi unutar krivulje  $K$ . Nadalje, neka je  $C'$  kružnica polumjera  $h - r$  koncentrična kružnici  $C$ . Tvrdimo da se krivulja  $K$  cijela nalazi unutar kružnice  $C'$ . Da bismo to dokazali odaberimo neku točku  $X$  na kružnici  $C'$  (vidi sliku 3.10a). Neka je  $m'$  tangenta na kružnicu  $C'$  u točki  $X$  i neka je  $m$  tangenta na kružnicu  $C$  paralelna s tangentom  $m'$  koja je od nje udaljena za  $h$  (vidi sliku 3.10a). Označimo sa  $Y$  točku u kojoj tangenta  $m$  dodiruje kružnicu  $C$ . Nadalje, neka su  $l$  i  $l'$  potporni pravci krivulje  $K$  paralelni s  $m$  i  $m'$ . Udaljenost između potpornih pravaca  $l$  i  $l'$  jednaka je širini  $h$  krivulje  $K$ . Uočimo da je udaljenost između potpornih pravaca  $l$  i  $l'$  jednaka udaljenosti između tangenata  $m$  i  $m'$ . Kako točka  $Y$  leži u području unutar krivulje  $K$ , pravac  $m$  se nalazi između pravaca  $l$  i  $l'$ . S obzirom da se pravac  $m'$  nalazi na udaljenosti  $h$  od pravca  $m$ , on tada sigurno

ne leži između pravaca  $l$  i  $l'$ . Stoga se točka  $X$ , koja leži na pravcu  $m'$ , ne nalazi unutar krivulje  $K$ , što smo i trebali dokazati.



Slika 3.10

Slično, ako kružnica  $C'$  polumjera  $R$  okružuje krivulju  $K$  i ako je kružnica  $C$  polumjera  $h - R$  koncentrična kružnici  $C'$ , tada možemo zaključiti da se kružnica  $C$  nalazi unutar krivulje  $K$ .

Neka je kružnica  $C_O$  polumjera  $R$  opisana krivulji  $K$ , a kružnica  $C_U$  polumjera  $r$  upisana krivulji  $K$  (vidi sliku 3.10b). Tada  $R$  ne može biti veći od  $h - r$  jer kružnica polumjera  $h - r$  koncentrična kružnici  $C_U$  okružuje krivulju  $K$ , a opisana kružnica  $C_O$  ima najmanji polumjer od svih kružnica koje okružuju krivulju  $K$ . S druge strane,  $R$  ne može biti manji od  $h - r$  jer bi tada kružnica polumjera  $h - R$  koncentrična kružnici  $C_O$  bila unutar krivulje  $K$  i imala bi polumjer veći od  $r$ . Dakle, mora biti  $R = h - r$ , odnosno  $R + r = h$ .

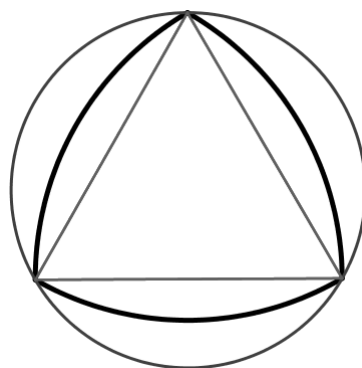
Konačno, pretpostavimo da kružnice  $C_O$  i  $C_U$  nisu koncentrične. Tada kružnica  $C'$  polumjera  $R$  koncentrična kružnici  $C_U$  također okružuje krivulju  $K$ , što je u kontradikciji s jedinstvenosti opisane kružnice krivulje  $K$ . Dakle, opisana i upisana kružnica konveksne krivulje  $K$  konstantne širine su koncentrične i zbroj njihovih polumjera jednak je širini  $h$  krivulje  $K$ .  $\square$

**Teorem 3.13 (Jung).** *Za svaki ravninski lik promjera 1 postoji krug polumjera  $\sqrt{3}/3$  koji ga sadrži.*

Dokaz Jungovog teorema nije nam od presudne važnosti za ovaj rad pa ga preskačemo, no ovu tvrdnju ćemo koristiti u dokazu idućeg teorema.

**Teorem 3.14.** *Reuleauxov trokut je krivulja konstantne širine  $h$  koja ima najveći polumjer opisane kružnice i najmanji polumjer upisane kružnice. S druge strane, kružnica je krivulja konstantne širine  $h$  koja ima najmanji polumjer opisane kružnice i najveći polumjer upisane kružnice.*

*Dokaz.* Dokažimo najprije tvrdnje vezane uz polumjer opisane kružnice. Lako se vidi da je polumjer kružnice opisane Reuleauxovom trokutu širine  $h$  jednak  $h\sqrt{3}/3$  jer je to ujedno kružnica opisana jednakostraničnom trokutu sa stranicom duljine  $h$  (slika 3.11). Sve krivulje konstantne širine  $h$  imaju promjer  $h$ , a prema Jungovom teoremu polumjer kružnice opisane krivulji promjera  $h$  nije veći od  $h\sqrt{3}/3$ .



Slika 3.11: Kružnica opisana Reuleauxovom trokutu

Ako krivulja  $K$  konstantne širine  $h$  nije Reuleauxov trokut, tada se lako pokaže da je polumjer kružnice opisane krivulji  $K$  manji od  $h\sqrt{3}/3$ . Polumjer kružnice opisane krivulji promjera  $h$  može poprimiti maksimalnu vrijednost  $h\sqrt{3}/3$  samo ako opisana kružnica sadrži tri točke krivulje koje čine vrhove jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine  $h$ . Ako krivulja  $K$  konstantne širine  $h$  sadrži tri točke koje čine vrhove jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine  $h$ , tada su stranice tog jednakostraničnog trokuta upravo promjeri krivulje  $K$ , pa je krivulja  $K$  očito Reuleauxov trokut. Dakle, Reuleauxov trokut je krivulja konstantne širine  $h$  koja ima najveći polumjer opisane kružnice.

Očito promjer kružnice opisane bilo kojoj krivulje  $K$  konstantne širine ne može biti manji od promjera krivulje  $K$ . S obzirom da je kružnica opisana nekoj kružnici upravo ta ista kružnica, promjer opisane kružnice jednak je promjeru dane kružnice, pa je njen



polumjer jednak  $h/2$ . Ako krivulja  $K$  konstantne širine  $h$  nije kružnica, onda je promjer kružnice opisane krivulji  $K$  veći od  $h$ . Dakle, kružnica je krivulja konstantne širine  $h$  koja ima najmanji polumjer opisane kružnice.

Dokažimo sada tvrdnje vezane uz polumjer upisane kružnice. Prema Teoremu 3.12 znamo da je zbroj polumjera upisane i opisane kružnice bilo kojoj krivulji konstantne širine  $h$  konstantan i jednak upravo širini  $h$  te krivulje. Dokazali smo da Reuleauxov trokut ima najveći polumjer opisane kružnice, pa po Teoremu 3.12 direktno slijedi da Reuleauxov trokut ima najmanji polumjer upisane kružnice. Analogno, kružnica ima najmanji polumjer opisane kružnice i najveći polumjer upisane kružnice.  $\square$

Iz prethodnog teorema dobivamo sljedeće ograde za polumjer  $R$  kružnice opisane krivulji konstantne širine  $h$  i polumjer  $r$  kružnice upisane krivulji konstantne širine  $h$ :

$$0.5h = \frac{h}{2} \leq R \leq h \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58h$$

$$0.42h \approx \frac{h(3 - \sqrt{3})}{3} \leq r \leq \frac{h}{2} = 0.5h.$$

Uočimo da se polumjeri kružnica opisanih i upisanih bilo kojoj krivulji konstantne širine nalaze unutar prilično uskih ograda.

## 3.2 Duljina i površina

U ovom dijelu rada ćemo iskazati i dokazati dvije važne tvrdnje vezane uz opseg i površinu lika konstantne širine. Prije toga definirajmo opseg i površinu konveksnog lika.

**Definicija 3.15.** *Neka je  $S$  neprazan, kompaktan i konveksan skup. Opseg skupa  $S$  je duljina ruba skupa  $S$  i jednak je infimumu opsega svih konveksnih poligona opisanih skupu  $S$  [6].*

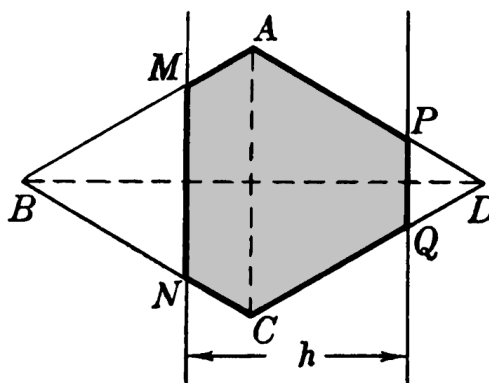
**Definicija 3.16.** *Neka je  $S$  neprazan, kompaktan i konveksan skup. Površina skupa  $S$  jednaka je infimumu površina svih konveksnih poligona opisanih skupu  $S$  [6].*

Za dokaz tvrdnji vezanih uz opseg i površinu lika konstantne širine bit će nam potrebna sljedeća lema. Tvrdnju ove leme koristit ćemo u daljnjem radu, no samu lemu nećemo dokazivati, jer nam njen dokaz nije od velike važnosti za ovaj rad.

**Lema 3.17.** *Neka je  $ABCD$  romb. Neka su  $\overline{MN}$  i  $\overline{PQ}$  dvije dužine okomite na dijagonalu  $\overline{BD}$  i neka je njihova udaljenost jednaka  $h$  (slika 3.12). Tada vrijedi:*

(i) *Opseg šesterokuta  $AMNCQP$  ne ovisi o položaju pravaca  $MN$  i  $PQ$ .*

- (ii) Površina šesterokuta  $AMNCQP$  je najveća kada su pravci  $MN$  i  $PQ$  na jednakoj udaljenosti  $h/2$  od dijagonale  $\overline{AC}$  zadanog romba. Površina šesterokuta  $AMNCQP$  je najmanja kada pravac  $MN$  prolazi vrhom  $B$  zadanog romba ili pravac  $PQ$  prolazi vrhom  $D$  zadanog romba.



Slika 3.12

Francuski astronom i matematičar Joseph-Émile Barbier (1839 – 1889) otkrio je jedno zanimljivo svojstvo krivulja konstantne širine. Uočio je da krivulja konstantne širine  $h$  i kružnica promjera  $h$  imaju jednaku duljinu, odnosno da krivulja konstantne širine  $h$  ima duljinu  $\pi h$ . Ovu tvrdnju prema njemu nazivamo Barbierovim teoremom, a sad ćemo ju i dokazati.

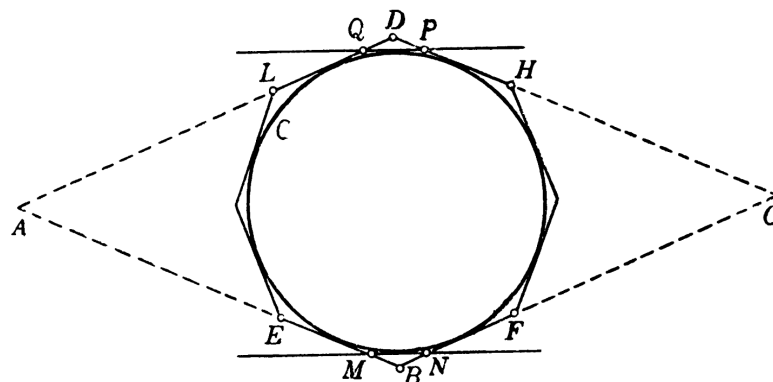
**Teorem 3.18 (Barbierov teorem).** *Krivulja konstantne širine  $h$  ima duljinu  $\pi h$ .*

*Dokaz.* Neka je  $S$  neprazan, kompaktan, konveksan skup konstantne širine  $h$ . Tada je rub skupa  $S$  krivulja konstantne širine  $h$ . Želimo dokazati da je opseg skupa  $S$  jednak  $\pi h$ . Nadalje, neka je  $C$  krug promjera  $h$ . Tvrdimo da bilo koja dva jednakokutna poligona s  $2^n$  stranica opisana skupu  $S$  i krugu  $C$  imaju jednak opseg. Jednakokutni poligon je onaj kojemu su svi unutarnji kutovi sukkladni. Ovu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po  $n$ .

Za  $n = 2$  dobivamo kvadrat. Jasno je da je duljina stranica kvadrata opisanog skupu  $S$  konstantne širine  $h$  jednaka širini tog skupa. Također, duljina stranica kvadrata opisanog krugu promjera  $h$  jednaka je duljini promjera. Dakle, oba kvadrata imaju stranice duljine  $h$ , što znači da su to sukkladni kvadrati, pa imaju jednak opseg. Time je dokazana baza indukcije.

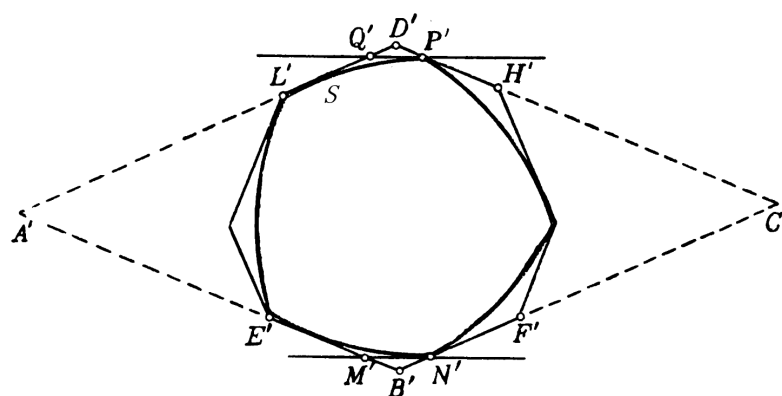
Pretpostavimo da svi jednakokutni poligoni s  $2^n$  stranica opisani skupu  $S$  i krugu  $C$  imaju jednak opseg. Pogledajmo dvije susjedne stranice jednakokutnog poligona s  $2^n$  stranica opisanog krugu  $C$ , te njima nasuprotne stranice. Neka su to stranice  $\overline{BE}$  i  $\overline{BF}$ , a

$\overline{DL}$  i  $\overline{DH}$  su njima nasuprotne stranice. Pravci na kojima leže stranice  $\overline{BE}$  i  $\overline{DL}$  sijeku se u točki  $A$ , a pravci na kojima leže stranice  $\overline{BF}$  i  $\overline{DH}$  sijeku se u točki  $C$ , te tvore četverokut  $ABCD$  (slika 3.13).



Slika 3.13: Jednakokutni poligon s  $2^n$  stranica opisan krugu  $C$

Znamo da su nasuprotne stranice jednakokutnog poligona s  $2^n$  stranica paralelne, pa su onda paralelni i pravci  $AB$  i  $CD$ , te pravci  $BC$  i  $AD$ . Iz toga slijedi da su točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  vrhovi paralelograma. S obzirom da je paralelogram opisan krugu promjera  $h$ , udaljenost nasuprotnih stranica paralelograma jednaka je  $h$ . Slijedi da su sve visine tog paralelograma jednake duljine, pa je riječ o rombu  $ABCD$ . Analogni postupak primjenimo i na jednakokutni poligon s  $2^n$  stranica opisan skupu  $S$ , te dobivamo romb  $A'B'C'D'$  (slika 3.14).



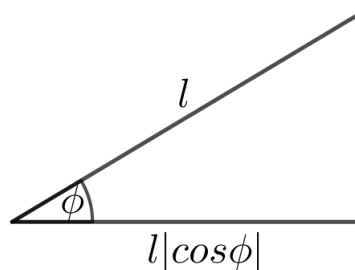
Slika 3.14: Jednakokutni poligon s  $2^n$  stranica opisan skupu  $S$

Dobiveni rombovi  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  su sukladni jer su im odgovarajući kutovi sukladni, a visine jednakih duljina, pa rombovi  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  imaju jednak opseg.

Nacrtajmo sada potporne pravce  $MN$  i  $PQ$  kruga  $C$  okomite na dijagonalu  $\overline{BD}$  (vidi sliku 3.13), te potporne pravce  $M'N'$  i  $P'Q'$  skupa  $S$  okomite na dijagonalu  $\overline{B'D'}$  (vidi sliku 3.14). Očito je u oba slučaja udaljenost potpornih pravaca jednaka  $h$ . S obzirom da su rombovi  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  sukladni, te da je udaljenost između potpornih pravaca  $MN$  i  $PQ$ , te  $M'N'$  i  $P'Q'$  jednaka, prema Lemi 3.17(i) možemo zaključiti da šesterokuti  $AMNCPQ$  i  $A'M'N'C'P'Q'$  imaju jednak opseg. Stoga i poligoni opisani krugu  $C$  i skupu  $S$ , dobiveni iz poligona s  $2^n$  stranica zamjenom dužina  $BE$ ,  $BF$ ,  $DL$  i  $DH$  s dužinama  $EM$ ,  $MN$ ,  $FN$ ,  $LQ$ ,  $PQ$  i  $HP$ , te dužina  $B'E'$ ,  $B'F'$ ,  $D'L'$  i  $D'H'$  s dužinama  $E'M'$ ,  $M'N'$ ,  $F'N'$ ,  $L'Q'$ ,  $P'Q'$  i  $H'P'$ , imaju jednak opseg.

Provedemo li analognu konstrukciju u svakom vrhu, dobivamo poligone s  $2^{n+1}$  stranica, te zaključujemo da su njihovi opsezi jednaki. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da za svaki  $n$  poligoni s  $2^n$  stranica opisani skupu  $S$  i krugu  $C$  imaju jednak opseg. Stoga je i limes ovih opsega kada  $n \rightarrow \infty$  jednak. Zaključujemo da je i opseg skupa  $S$  konstantne širine  $h$  jednak opsegu kruga širine  $h$ , tj.  $\pi h$ . Time smo dokazali da je duljina krivulje konstantne širine  $h$  jednaka  $\pi h$ .  $\square$

Prethodnu tvrdnju dokazat ćemo i pomoću rezultata do kojeg je došao francuski matematičar Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) (vidi [1]). On je primjetio da, ako promatramo koliko široka izgleda neka dužina iz svih smjerova u ravnini te integriramo dobivene prividne duljine, tada dobivamo četiri puta stvarnu duljinu dane dužine. Promatramo li dužinu duljine  $l$ , tada dana dužina i njena projekcija zatvaraju kut  $\phi$ , pa projekcija ima duljinu  $l|\cos\phi|$  (slika 3.15).



Slika 3.15

Tada je

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} l|\cos\phi| d\phi &= l\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\phi d\phi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos\phi d\phi\right) \\ &= l\left(\sin\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin\phi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin\phi\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) \\ &= l(1 - (-1 - 1) + 1) = 4l. \end{aligned}$$

Neka konveksni poligon ima opseg  $p$  i neka je  $q(\phi)$  duljina njegove ortogonalne projekcije na pravac koji zatvara kut  $\phi$  sa fiksnim smjerom. Projekcija konveksnog poligona je dvostruko prekrivanje, pa slijedi

$$2 \int_0^{2\pi} q(\phi) d\phi = 4p.$$

Gledajući limes i korištenjem odgovarajućih argumenata neprekidnosti, dobiva se ista formula za opseg bilo kojeg konveksnog lika. Korištenjem Cauchyjeve formule možemo ponovno dokazati Barbierov teorem.

*Dokaz.* (Cauchy) Krivulja  $K$  ima konstantnu širinu  $h$  pa je  $q(\phi) = h$  za svaki  $\phi$ . Iz

$$2 \int_0^{2\pi} q(\phi) d\phi = 4p$$

slijedi da je

$$p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q(\phi) d\phi.$$

Duljina krivulje  $K$  jednaka je

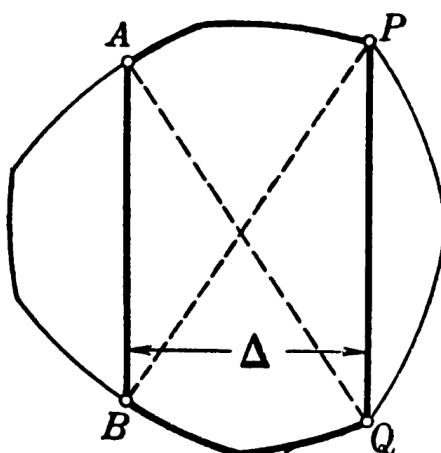
$$p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} q(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h d\phi = \frac{1}{2} h\phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} h(2\pi - 0) = \pi h.$$

Dakle, krivulja konstantne širine  $h$  ima duljinu  $\pi h$ . □

Time smo na dva načina dokazali jednu od važnijih tvrdnji o krivuljama konstantne širine. Nakon dokaza Barbierovog teorema, navest ćemo još dva teorema o duljini krivulja konstantne širine. Vidjet ćemo da su krivulje konstantne širine ekstremalne, odnosno da minimiziraju i maksimiziraju duljinu u odgovarajućim skupovima krivulja.

**Teorem 3.19.** (i) *Među svim konveksnim krivuljama promjera 1, krivulje konstantne širine 1 imaju najveću duljinu.*

(ii) *Neka je  $K'$  krivulja konstantne širine  $D$  i neka su  $\overline{AB}$  i  $\overline{PQ}$  dvije paralelne tetive takve da su dijagonale  $\overline{AQ}$  i  $\overline{BP}$  trapeza  $ABQP$  upravo promjeri krivulje  $K'$  (vidi sliku 3.16). Označimo s  $\Delta$  udaljenost između pravaca  $AB$  i  $PQ$ . Neka je  $K$  krivulja sastavljena od lukova  $\overline{AP}$  i  $\overline{BQ}$  krivulje  $K'$  i tetiva  $\overline{AB}$  i  $\overline{PQ}$ . Tada krivulja  $K$  ima najveću duljinu među svim konveksnim krivuljama promjera  $D$  i širine  $\Delta$ .*



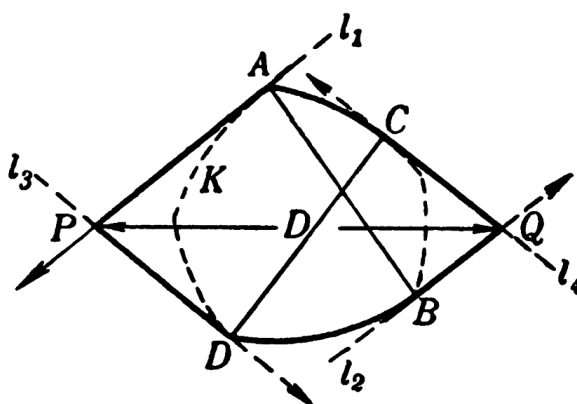
Slika 3.16

Uočimo da je Teorem 3.19(ii) generalizacija Teorema 3.19(i). U Teoremu 3.19(i) promatramo sve konveksne krivulje kojima je promjer fiksiran, dok im je širina proizvoljna. Jasno je da širina krivulje ne može biti veća od njenog promjera. Među svim takvim krivuljama najveću duljinu imaju krivulje kojima je širina konstantna i jednaka danom promjeru. U Teoremu 3.19(ii) konveksne krivulje koje promatramo imaju fiksiran promjer, ali i širinu. Među svim takvim krivuljama, krivulje opisane u tvrdnji Teorema 3.19(ii) imaju najveću duljinu.

**Teorem 3.20.** (i) Među svim konveksnim krivuljama širine 1, krivulje konstantne širine 1 imaju najmanju duljinu.

(ii) Neka su  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  dva promjera krivulje  $K'$  konstantne širine  $\Delta$  (vidi sliku 3.17). Neka su  $l_1$  i  $l_2$  dva potporna pravca krivulje  $K'$  okomita na  $AB$  i neka su  $l_3$  i  $l_4$  dva potporna pravca krivulje  $K'$  okomita na  $CD$ . Označimo s  $P$  sjecište pravaca  $l_1$  i  $l_3$  i s  $Q$  sjecište pravaca  $l_2$  i  $l_4$ . Neka je  $D$  udaljenost između točaka  $P$  i  $Q$ . Neka je krivulja  $K$  sastavljena od dužina  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PD}$ ,  $\overline{BQ}$ ,  $\overline{QC}$  i lukova  $\widehat{AC}$  i  $\widehat{BD}$  krivulje  $K'$ . Tada krivulja  $K$  ima najmanju duljinu među svim krivuljama širine  $\Delta$  i promjera  $D$ .

Slično kao i kod Teorema 3.19, lako možemo uočiti da je Teorem 3.20(ii) generalizacija Teorema 3.20(i). U prvoj tvrdnji Teorema 3.20 promatramo sve konveksne krivulje kojima je širina fiksna, ovdje jednaka 1, dok im je promjer proizvoljan, naravno ne manji od širine. Među svim takvim krivuljama najmanju duljinu imaju krivulje konstantne širine. U drugoj tvrdnji Teorema 3.20 promatramo sve konveksne krivulje kojima su fiksni i širina i promjer. Od svih takvih krivulja najmanju duljinu ima upravo krivulja opisana u tvrdnji teorema.



Slika 3.17

Iz tvrdnji Teorema 3.19 i 3.20 mogu se dobiti sljedeće ograde za duljinu  $L$  konveksne krivulje  $K$  koja ima promjer  $D$  i širinu  $\Delta$ :

$$\pi D \geq L \geq \pi \Delta;$$

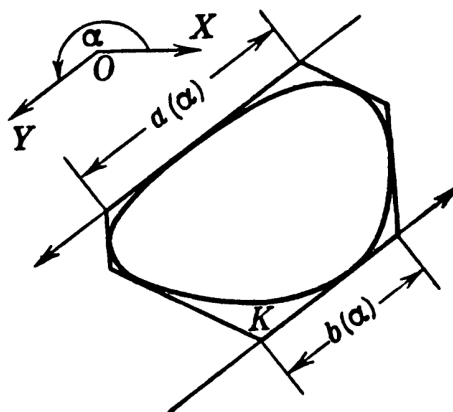
$$2 \left[ D \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\Delta}{D} \right) + \sqrt{D^2 - \Delta^2} \right] \geq L \geq 2 \left[ \Delta \left( \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\Delta}{D} \right) + \sqrt{D^2 - \Delta^2} \right].$$

Nakon duljine krivulje konstantne širine, prelazimo na površinu koju ona omeđuje. Prije toga, dokažimo lemu koju ćemo koristiti u dokazu tvrdnje vezane uz površinu omeđenu krivuljom konstantne širine.

**Lema 3.21.** *Svakoј konveksnoj krivulji moguće je opisati jednakokutni šesterokut kojemu su dvije nasuprotne stranice sukladne.*

*Dokaz.* Neka je dana zraka  $OX$  i neka je  $\alpha$  veličina kuta koji zraka  $OY$  zatvara sa zrakom  $OX$ . Oko svake konveksne krivulje možemo opisati jednakokutni šesterokut, kojemu su svi unutarnji kutovi jednaki  $120^\circ$ , tako da jedna stranica šesterokuta ima isti smjer kao i zraka  $OY$ . Označimo duljinu stranice šesterokuta koja ima smjer  $OY$  sa  $a(\alpha)$ , a duljinu njoj nasuprotne stranice sa  $b(\alpha)$  (slika 3.18). Očito stranica duljine  $b(\alpha)$  ima smjer suprotan smjeru  $OY$ . Pretpostavimo da je  $a(\alpha) \neq b(\alpha)$ . Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je  $a(\alpha) > b(\alpha)$ , odnosno  $a(\alpha) - b(\alpha) > 0$ . Ako  $\alpha$  zamjenimo sa  $\alpha + 180^\circ$ , opisani šesterokut će ostati nepromjenjen i stranica duljine  $a(\alpha + 180^\circ)$  će se podudarati sa stranicom duljine  $b(\alpha)$ , a stranica duljine  $b(\alpha + 180^\circ)$  sa stranicom duljine  $a(\alpha)$ . Sada imamo  $a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) < 0$ . Budući da je razlika  $a(\alpha) - b(\alpha)$  neprekidna funkcija u varijabli  $\alpha$ , mora postojati kut  $\alpha_0$  između  $\alpha$  i  $\alpha + 180^\circ$  takav da je

$a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0$ . Iz toga slijedi da je  $a(\alpha_0) = b(\alpha_0)$ , odnosno da šesterokut ima u tom položaju dvije nasuprotne stranice sukladne.

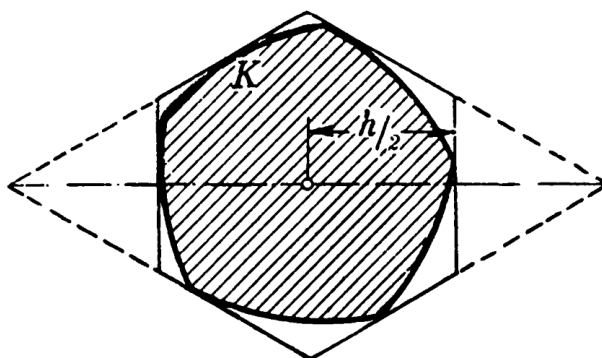


Slika 3.18

□

**Teorem 3.22.** *Od svih krivulja fiksirane konstantne širine kružnica  $C$  omeđuje najveću, a Reuleauxov trokut  $T$  najmanju površinu.*

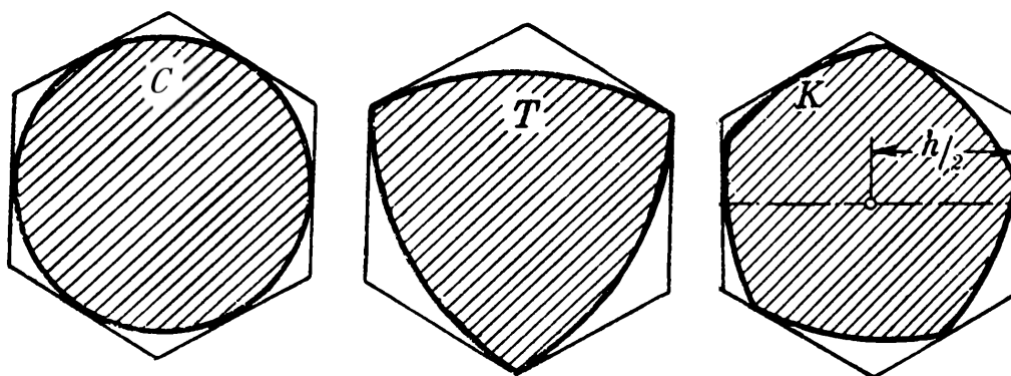
*Dokaz.* Promatrat ćemo jednakokutne poligone s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisane oko proizvoljne krivulje  $K$  konstantne širine  $h$ , oko kružnice  $C$  promjera  $h$  i oko Reuleauxovog trokuta  $T$  širine  $h$ . Najprije ćemo dokazati da oko svake krivulje konstantne širine  $h$  možemo opisati pravilni šesterokut. Prema Lemi 3.21 znamo da oko svake krivulje konstantne širine  $h$  možemo opisati jednakokutni šesterokut kojemu su dvije nasuprotne stranice sukladne. Produžetci četiriju stranica tog šesterokuta tvore paralelogram s kutom od  $120^\circ$ .

Slika 3.19: Jednakokutni šesterokut opisan krivulji konstantne širine  $h$



Sve visine tog paralelograma imaju duljinu  $h$ , pa je riječ o rombu s visinama duljine  $h$  i kutom od  $120^\circ$ . Dvije nasuprotne stranice šesterokuta su okomite na dulju dijagonalu romba i sijeku ju u točkama koje su od središta romba udaljene za  $h/2$  jer su odgovarajuće nasuprotne stranice jednake duljine (slika 3.19). Iz toga slijedi da je šesterokut pravilan, te da je polumjer njemu upisane kružnice jednak  $h/2$ .

Opišimo sada pravilni šesterokut oko kružnice  $C$  promjera  $h$ , oko Reuleauxovog trokuta  $T$  širine  $h$  i oko krivulje  $K$  konstantne širine  $h$  (slika 3.20). Uočimo da se tri vrha pravilnog šesterokuta opisanog Reuleauxovom trokutu  $T$  podudaraju s kutnim točkama Reuleauxovog trokuta  $T$ .

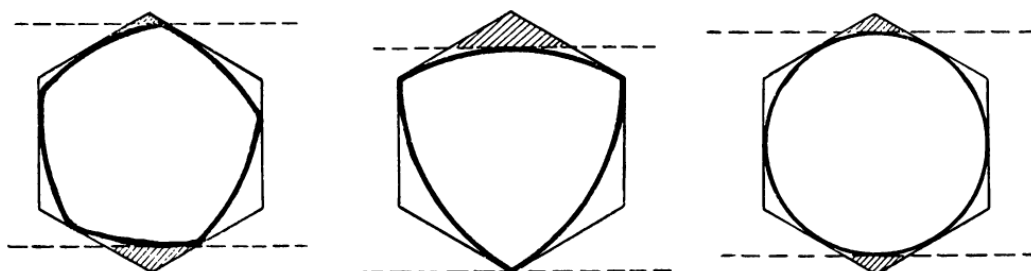


Slika 3.20

Udvostručimo sada stranice pravilnog šesterokuta opisanog krivuljama  $C$ ,  $T$  i  $K$  istim postupkom kao u dokazu Teorema 3.18. Time dobivamo pravilne poligone opisane krivuljama koji imaju 12 stranica. Ponovnim udvostručavanjem broja stranica dobivamo pravilne poligone s 24 stranice, i tako dalje. Uzmimo jednakokutne poligone s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisane krivuljama  $C$ ,  $T$  i  $K$ . Dokazat ćemo da za svaki  $n$ , površina poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog kružnici  $C$  ne može biti manja od površine poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog krivulji  $K$ , te da površina poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog Reuleauxovom trokutu  $T$  ne može biti veća od površine poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog krivulji  $K$ . Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po  $n$ .

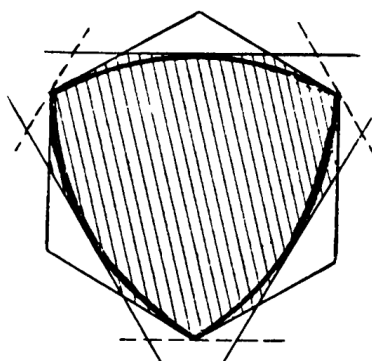
Za  $n = 1$  tvrdnja vrijedi, jer su šesterokuti opisani krivuljama  $C$ ,  $T$  i  $K$  pravilni s polumjerom upisane kružnice jednakim  $h/2$ , pa su svi međusobno sukladni.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za poligone s  $3 \cdot 2^n$  stranica. Površina poligona s  $3 \cdot 2^{n+1}$  stranica je dobivena iz površine poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica oduzimanjem površina  $3 \cdot 2^{n-1}$  parova trokuta dobivenih rezanjem poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica po paru potpornih pravaca krivulje, kao na slici 3.21. Za kružnicu  $C$  poligon s  $3 \cdot 2^n$  stranica je pravilan i svaki put crtamo sekante jednako udaljene od središta poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica jer je kružnica centralnosimetrična krivulja.



Slika 3.21

Dokažimo sada da za Reuleauxov trokut  $T$  jedna od sekanti uvijek prolazi vrhom poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica. Znamo da jedan od dva paralelna potporna pravca Reuleauxovog trokuta uvijek prolazi jednom kutnom točkom. S obzirom da su sve kutne točke Reuleauxovog trokuta ujedno vrhovi opisanog šesterokuta, nakon konstrukcije opisanog jednakokutnog poligona s 12 stranica, jedan pravac u svakom od tri para paralelnih potpornih pravaca prolazi vrhom šesterokuta. Iz tog razloga, jednakokutni poligon s 12 stranica opisan Reuleauxovom trokutu  $T$  ustvari ima 9 stranica jer tri njegove stranice imaju duljinu 0. Stoga su sve tri kutne točke Reuleauxovog trokuta ujedno vrhovi poligona s 9 stranica (slika 3.22).



Slika 3.22

Slično, za svaki jednakokutan poligon s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisan Reuleauxovom trokutu  $T$ , sve tri kutne točke Reuleauxovog trokuta  $T$  su ujedno vrhovi poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica (zapravo taj poligon uvijek ima manje od  $3 \cdot 2^n$  stranica). Stoga, u svakom paru paralelnih potpornih pravaca Reuleauxovog trokuta  $T$  u konstrukciji poligona s  $3 \cdot 2^{n+1}$  stranica, jedan potporni pravac uvijek prolazi vrhom poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica.

Sada u poligonima s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanim krivuljama  $C$ ,  $T$  i  $K$ , uzimamo rombove koji su sastavljeni od dviju susjednih stranica  $l_1$  i  $l_2$ , te njima paralelnih stranica  $l_3$  i  $l_4$ .

Sva tri dobivena romba imaju visine duljine  $h$  i sukladan kut koji je jednak unutarnjem kutu pravilnog poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica, tj.

$$\frac{3 \cdot 2^n - 2}{3 \cdot 2^n} \cdot 180^\circ.$$

Slijedi da su sva tri romba sukladna. Prema Lemi 3.17(ii), zbroj površina trokuta odvojenih iz danog romba parom paralelnih stranica poligona s  $3 \cdot 2^{n+1}$  stranica opisanog kružnici  $C$ , nije veći od zbroja površina izrezanih trokuta krivulje  $K$ , dok zbroj površina pripadnih trokuta Reuleauxovog trokuta  $T$  nije manji od zbroja površina izrezanih trokuta krivulje  $K$ . Naime, kod kružnice su ti pravci simetrični s obzirom na središte romba, dok kod Reuleauxovog trokuta jedan pravac prolazi vrhom romba. Stoga, površina poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog kružnici  $C$  nije manja od površine poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog krivulji  $K$ , dok površina poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog Reuleauxovom trokutu  $T$  nije veća od površine poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisanog krivulji  $K$ .

Prelazeći na limes kad  $n \rightarrow \infty$  dokazali smo da kružnica  $C$  omeđuje površinu koja nije manja od površine koju omeđuje krivulja  $K$ , dok Reuleauxov trokut  $T$  omeđuje površinu koja nije veća od površine koju omeđuje krivulja  $K$ .

Štoviše, možemo pokazati da krivulja  $K$ , koja nije kružnica, omeđuje površinu strogo manju od kružnice  $C$ , a ne samo površinu koja nije veća od one koju omeđuje kružnica  $C$ . Svaki puta kada nacrtamo par paralelnih potpornih pravaca kružnice  $C$  i krivulje  $K$ , izrežemo par trokuta dobivenih iz poligona opisanog krivulji  $K$  čija površina nije manja od površine para trokuta izrezanih iz poligona opisanog kružnici  $C$ . Dobivene površine mogu biti jednake samo ako svaki puta, kod obje krivulje, izrežemo par trokuta jednakih površina. To je moguće jedino ako je svaki par paralelnih potpornih pravaca krivulje  $K$  nacrtanih u konstrukciji poligona s  $3 \cdot 2^{n+1}$  stranica, simetričan s obzirom na središte romba sastavljenog od susjednih stranica poligona s  $3 \cdot 2^n$  stranica. Ako se to dogodi, onda su svi poligoni s  $3 \cdot 2^n$  stranica opisani krivulji  $K$  centralnosimetrični s centrom simetrije u središtu pravilnog šesterokuta opisanog krivulji  $K$ . Stoga, krivulja  $K$  mora imati centar simetrije, pa je prema Teoremu 3.8  $K$  kružnica. Dakle, kružnica  $C$  promjera  $h$  omeđuje površinu strogo veću od površine koju omeđuje krivulja  $K$  konstantne širine  $h$  koja nije kružnica.

Dokažimo sada da ako krivulja  $K$  nije Reuleauxov trokut, onda  $K$  omeđuje strogo veću površinu nego Reuleauxov trokut  $T$ . Krivulja  $K$  i Reuleauxov trokut  $T$  omeđuju jednaku površinu samo ako pri konstrukciji par paralelnih potpornih pravaca krivulje  $K$  i Reuleauxovog trokuta  $T$  svaki puta odsjecaju trokute jednakih površina. No, prvi par paralelnih potpornih pravaca krivulje  $K$  ne mora od opisanog pravilnog šesterokuta odsjecati površinu jednaku površini koju odsjeca par paralelnih potpornih pravaca Reuleauxovog trokuta  $T$  od njemu opisanog pravilnog šesterokuta. To se događa samo ako jedan od dva paralelna potporna pravca krivulje  $K$  prolazi vrhom tog krivulji opisanog pravilnog šesterokuta, što je pak moguće samo ako odgovarajući vrh šesterokuta pripada

krivulji  $K$  i događa se samo ako krivulja  $K$  ima unutarnji kut veličine  $120^\circ$ . Tada je prema Teoremu 3.10  $K$  Reuleauxov trokut. Dakle, Reuleauxov trokut  $T$  širine  $h$  omeđuje površinu strogo manju od površine koju omeđuje krivulja  $K$  konstantne širine  $h$  koja nije Reuleauxov trokut.

Time je dokazano da kružnica  $C$  omeđuje najveću, a Reuleauxov trokut  $T$  najmanju površinu od svih krivulja fiksirane konstantne širine.  $\square$

Na temelju prethodnog teorema mogu se dobiti sljedeće ograde za površinu  $S$  koju omeđuje bilo koja krivulja konstantne širine  $h$ :

$$0.7048h^2 \approx \frac{1}{2}h^2(\pi - \sqrt{3}) \leq S \leq \frac{1}{4}\pi h^2 \approx 0.7854h^2.$$

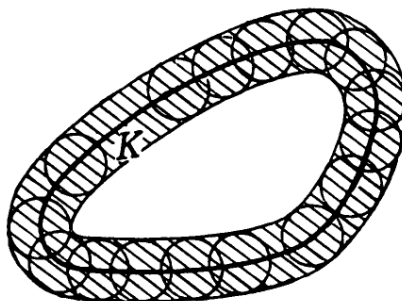
Uočimo da se površina omeđena krivuljom konstantne širine  $h$  nalazi unutar vrlo uskih ograda, što znači da se površine omeđene svim krivuljama jednake konstantne širine vrlo malo razlikuju.

### 3.3 Aproksimacija krivolinijskim poligonima

Svaki konveksan skup u ravnini može se aproksimirati konveksnim poligonima. Slično tome, svaki konveksan skup konstantne širine u ravnini može se aproksimirati krivolinijskim poligonima kojima su stranice kružni lukovi. Upravo o tome bit će govora u ovom odjeljku.

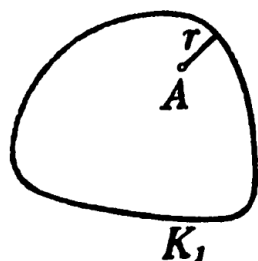
Prije nego što krenemo na Aproksimacijski teorem potrebno je opisati i definirati okolinu krivulje, te udaljenost među krivuljama.

**Definicija 3.23.** *Neka je  $K$  konveksna krivulja. Uzmimo skup svih krugova polumjera  $r$  kojima središte leži na krivulji  $K$ . Točke ravnine koje prekriva barem jedan takav krug tvore skup koji sadrži krivulju  $K$  i koji nazivamo  $r$ -okolina konveksne krivulje  $K$ .*

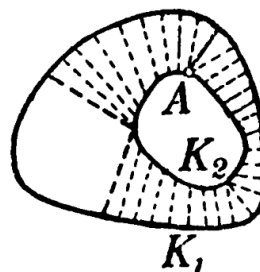


Slika 3.23:  $r$ -okolina konveksne krivulje  $K$

Neka je dana krivulja  $K_1$  i točka  $A$ . Udaljenost točke  $A$  do krivulje  $K_1$  je udaljenost točke  $A$  do točke na krivulji  $K_1$  koja je najbliža točki  $A$  (slika 3.24a).



(a) Udaljenost točke  $A$  od krivulje  $K_1$

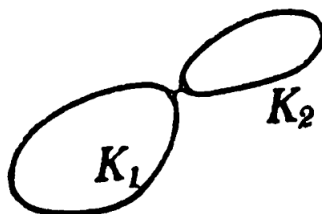


(b) Udaljenost između krivulja  $K_1$  i  $K_2$

Slika 3.24

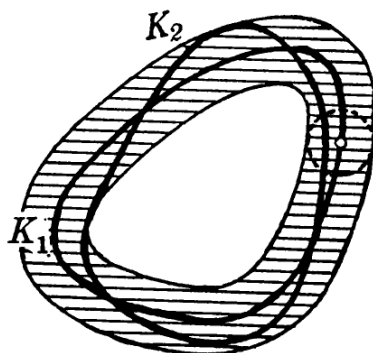
Neka su sada dane dvije krivulje  $K_1$  i  $K_2$ . Udaljenost krivulje  $K_2$  od krivulje  $K_1$  je udaljenost od krivulje  $K_1$  do točke na krivulji  $K_2$  koja je najdalje od krivulje  $K_1$  (vidi sliku 3.24b). Drugim riječima, da bismo odredili udaljenost krivulje  $K_2$  od krivulje  $K_1$  moramo gledati sve moguće udaljenosti točke  $A_2$  od točke  $A_1$ , pri čemu točka  $A_2$  pripada krivulji  $K_2$ , a točka  $A_1$  krivulji  $K_1$ . Za svaku fiksiranu točku  $A_2$  tražimo najmanju od svih tih udaljenosti, i ona predstavlja udaljenost točke  $A_2$  od krivulje  $K_1$ . Maksimum najmanjih udaljenosti točke  $A_2$  od krivulje  $K_1$ , kad  $A_2$  ide po svim točkama krivulje  $K_2$ , predstavlja udaljenost između krivulja  $K_2$  i  $K_1$ .

Definicija udaljenosti krivulja je poprilično složena iz razumljivog razloga da mala udaljenost između krivulja podrazumijeva da su krivulje u što većoj mjeri jedna blizu druge. Zato ne bi bilo dobro definirati udaljenost između krivulja  $K_1$  i  $K_2$  kao najmanju udaljenost između bilo koje točke krivulje  $K_1$  i bilo koje točke krivulje  $K_2$ , jer dvije krivulje mogu imati točke smještene u blizini, no same krivulje ipak mogu biti bitno razdvojene jedna od druge kao na slici 3.25 [2].



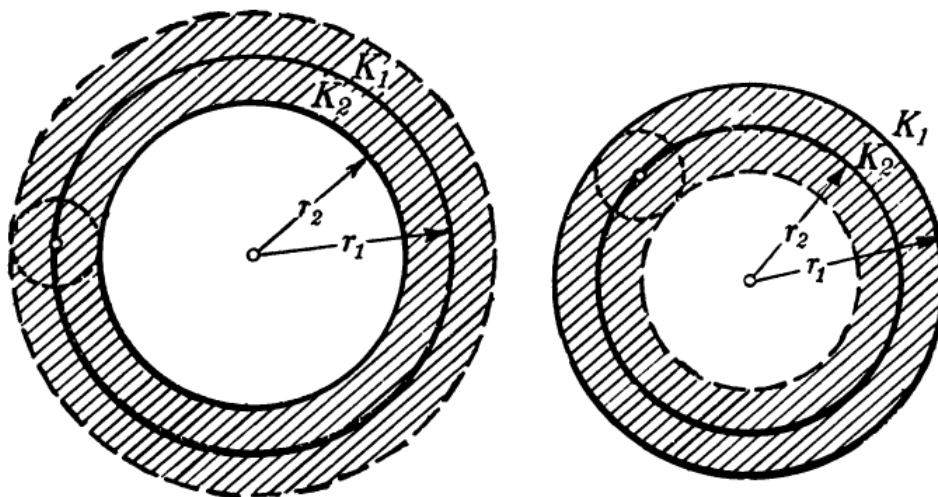
Slika 3.25

Radi boljeg razumijevanja ovog pojma, navedimo i ekvivalentnu definiciju udaljenosti dviju krivulja. Neka su  $K_1$  i  $K_2$  konveksne krivulje i neka je broj  $r$  takav da je krivulja  $K_2$  cijela sadržana u  $r$ -okolini krivulje  $K_1$ . Nadalje, neka za  $r' < r$  krivulja  $K_2$  nije cijela sadržana u  $r'$ -okolini krivulje  $K_1$ . Tada kažemo da je broj  $r$  udaljenost krivulje  $K_2$  od krivulje  $K_1$  (slika 3.26).



Slika 3.26

Neka su dane dvije koncentrične kružnice  $K_1$  i  $K_2$  s polumjerima  $r_1$  i  $r_2$  (slika 3.27).

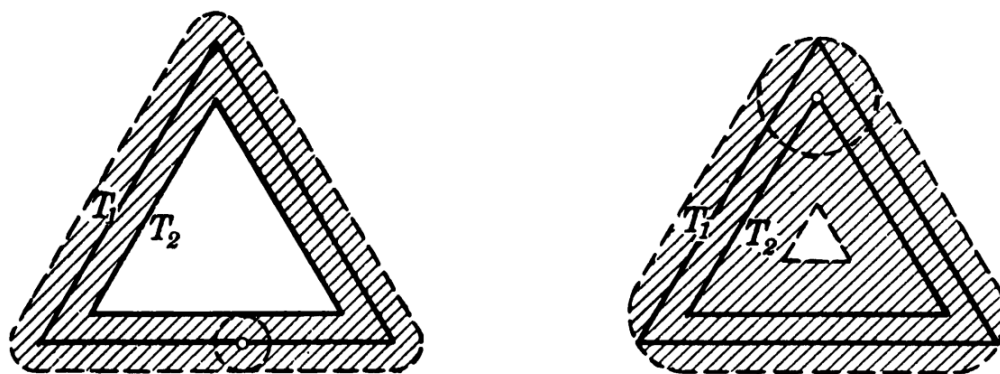


Slika 3.27

Krivulja  $K_2$  je cijela sadržana u  $(r_1 - r_2)$ -okolini krivulje  $K_1$ , pa je udaljenost krivulje  $K_2$  od krivulje  $K_1$  jednaka  $(r_1 - r_2)$ . Također, krivulja  $K_1$  je cijela sadržana u  $(r_1 - r_2)$ -okolini krivulje  $K_2$ , pa je udaljenost krivulje  $K_1$  od krivulje  $K_2$  jednaka  $(r_1 - r_2)$ . Očito su njihove

međusobne udaljenosti jednake, no to ne mora uvijek biti tako. Naime, udaljenost krivulje  $K_1$  od krivulje  $K_2$  ne mora biti jednaka udaljenosti krivulje  $K_2$  od krivulje  $K_1$ , što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

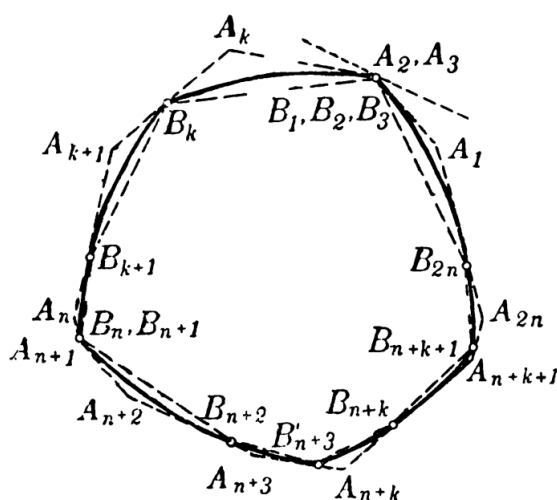
Neka su  $T_1$  i  $T_2$  dva jednakostranična trokuta s paralelnim stranicama i zajedničkim središtem (slika 3.28). Odredimo udaljenost unutarnjeg trokuta  $T_2$  od vanjskog  $T_1$ . Tražimo najmanju okolinu oko vanjskog trokuta  $T_1$  u kojoj je sadržan cijeli unutarnji trokut  $T_2$ . Udaljenost unutarnjeg trokuta  $T_2$  od vanjskog  $T_1$  jednaka je udaljenosti između paralelnih stranica tih trokuta. Odredimo sada udaljenost vanjskog trokuta  $T_1$  od unutarnjeg  $T_2$ . Tražimo najmanju okolinu oko unutarnjeg trokuta  $T_2$  u kojoj je sadržan cijeli vanjski trokut  $T_1$ . Udaljenost vanjskog trokuta  $T_1$  od unutarnjeg  $T_2$  jednaka je udaljenosti između odgovarajućih vrhova tih trokuta. Očito udaljenost između paralelnih stranica danih trokuta nije jednaka udaljenosti između odgovarajućih vrhova tih trokuta, što znači da udaljenost  $T_2$  od  $T_1$  nije jednaka udaljenosti  $T_1$  od  $T_2$ . Stoga udaljenost krivulja  $K_1$  i  $K_2$  definiramo kao veća od dviju udaljenosti, tj.  $K_1$  od  $K_2$  i  $K_2$  od  $K_1$  [2].



Slika 3.28

**Teorem 3.24 (Aproksimacijski teorem).** *Neka je  $K$  krivulja konstantne širine  $h$ . Moguće je konstruirati krivulju konstantne širine  $h$  sastavljenu od kružnih lukova polumjera  $h$  koja je proizvoljno blizu krivulje  $K$ .*

*Dokaz.* Promatrajmo poligon  $A_1A_2\dots A_{2n}$  opisan krivulji  $K$  takav da su mu nasuprotne stranice  $\overline{A_kA_{k+1}}$  i  $\overline{A_{n+k}A_{n+k+1}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), te  $\overline{A_nA_{n+1}}$  i  $\overline{A_{2n}A_1}$  paralelne. Nadalje, uzmimo poligon  $B_1B_2\dots B_{2n}$  upisan krivulji  $K$  kojemu su vrhovi upravo točke u kojima opisani poligon  $A_1A_2\dots A_{2n}$  dodiruje krivulju  $K$  (slika 3.29). Ne smijemo isključiti mogućnost da se susjedni vrhovi opisanog ili upisanog poligona podudaraju, kao u našem slučaju  $A_2$  i  $A_3$  ili  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$ .



Slika 3.29

Dokažimo da postoji krivulja konstantne širine  $h$  sastavljena od kružnih lukova koja je upisana poligonu  $A_1A_2\dots A_{2n}$  i opisana poligonu  $B_1B_2\dots B_{2n}$ .

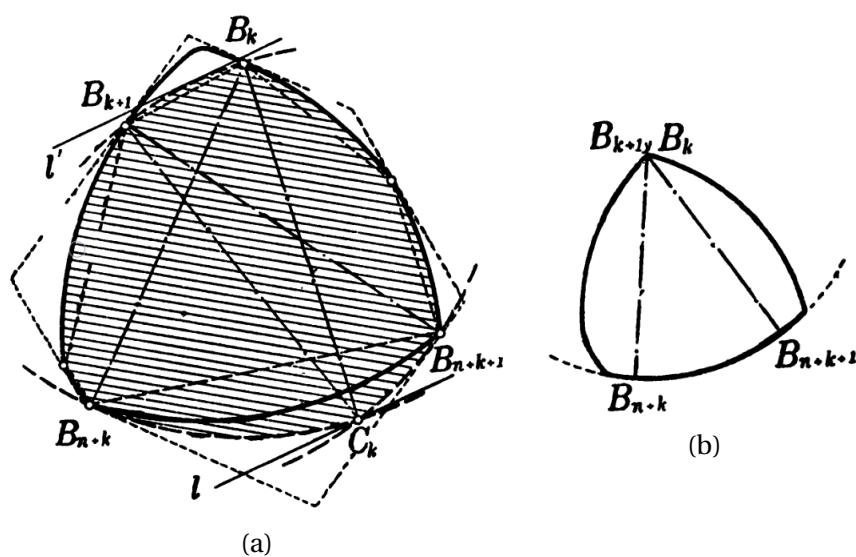
Ako su  $B_k$  i  $B_{n+k}$  dva nasuprotna vrha upisanog poligona  $B_1B_2\dots B_{2n}$ , tada je tetiva  $\overline{B_kB_{n+k}}$  krivulje  $K$  ustvari njen promjer, jer su  $B_k$  i  $B_{n+k}$  točke u kojima dva paralelna potporna pravca dodiruju krivulju  $K$ . Iz toga slijedi da je duljina tetive  $\overline{B_kB_{n+k}}$  jednaka  $h$ . Analogno je i duljina tetive  $\overline{B_{k+1}B_{n+k+1}}$  jednaka  $h$ .

Zamijenimo sada nasuprotno lukove  $\overline{B_kB_{k+1}}$  i  $\overline{B_{n+k}B_{n+k+1}}$  krivulje  $K$  novim kružnim lukovima polumjera  $h$  tako da je krivulja i dalje upisana poligonu  $A_1A_2\dots A_{2n}$ , te da širina krivulje ostane  $h$ . U tu svrhu konstruirajmo kružnice polumjera  $h$  oko točaka  $B_k$  i  $B_{k+1}$  (slika 3.30a). Označimo sa  $C_k$  točku presjeka tih kružnica koja leži s iste strane tetive  $\overline{B_kB_{k+1}}$  kao i točke  $B_{n+k}$  i  $B_{n+k+1}$ .

Očito je udaljenost točke  $C_k$  do točaka  $B_k$  i  $B_{k+1}$  jednaka  $h$ . Konstruirajmo sada kružni luk polumjera  $h$  oko točke  $C_k$ . Taj luk prolazi točkama  $B_k$  i  $B_{k+1}$ . Zamijenimo luk  $\overline{B_kB_{k+1}}$  krivulje  $K$  kružnim lukom polumjera  $h$  sa središtem u točki  $C_k$ . Također, zamijenimo luk  $\overline{B_{n+k}B_{n+k+1}}$  krivulje  $K$  kružnim lukovima  $\overline{B_{n+k}C_k}$  i  $\overline{C_kB_{n+k+1}}$  polumjera  $h$  sa središtem u točkama  $B_k$  i  $B_{k+1}$ . Tako dobivenu krivulju označimo s  $K'$ . Očito je nova krivulja  $K'$  također krivulja konstantne širine  $h$ . Zaista, neka su  $l$  i  $l'$  paralelni potporni pravci krivulje  $K'$ . Ako potporni pravac  $l$  dira luk  $\overline{B_{n+k}C_k}$ , tada potporni pravac  $l'$  prolazi vrhom  $B_k$ . Ako potporni pravac  $l$  prolazi točkom  $C_k$ , tada je potporni pravac  $l'$  tangenta na luk  $\overline{B_kB_{k+1}}$ . Ako potporni pravac  $l$  dira luk  $\overline{C_kB_{n+k+1}}$ , tada potporni pravac  $l'$  prolazi vrhom  $B_{k+1}$ . Stoga je krivulja  $K'$  također upisana poligonu  $A_1A_2\dots A_{2n}$  i opisana poligonu  $B_1B_2\dots B_{2n}$ .

Prema Teoremu 3.7 dva promjera krivulje konstantne širine sijeku se u unutrašnjosti

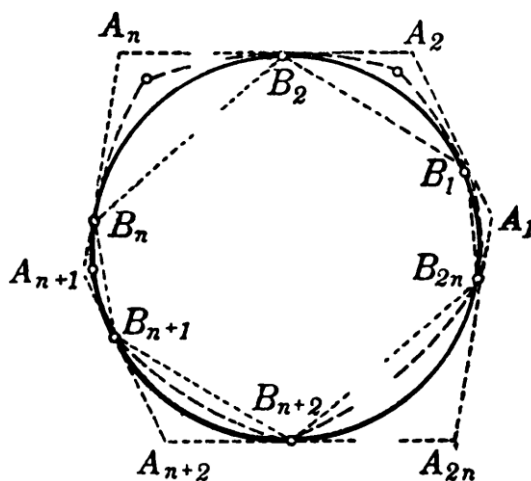




Slika 3.30

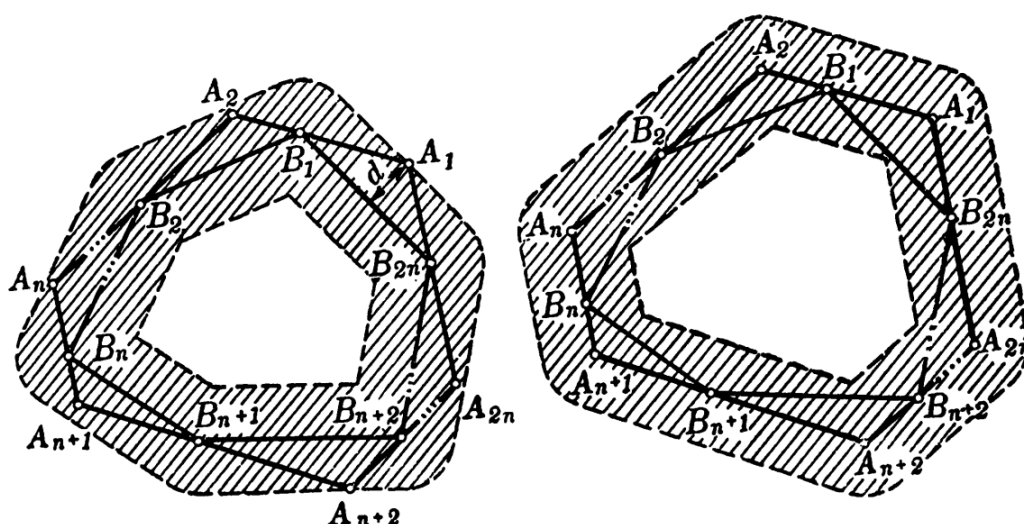
krivulje ili na krivulji. Ako se sijeku na krivulji, tada je točka njihovog presjeka upravo jedna od kutnih točaka krivulje. Ukoliko se točke  $B_k$  i  $B_{k+1}$  podudaraju, promjeri  $\overline{B_k B_{n+k}}$  i  $\overline{B_{k+1} B_{n+k+1}}$  se sijeku na krivulji u točki  $B_k = B_{k+1}$  (slika 3.30b). U tom slučaju je luk  $B_{n+k} B_{n+k+1}$  upravo kružni luk sa središtem u točki  $B_k = B_{k+1}$  polumjera  $h$ .

Provedemo li analognu konstrukciju za svaki par nasuprotnih lukova krivulje  $K$ , dobit ćemo krivulju  $K_0$  konstantne širine, sastavljenu samo od kružnih lukova polumjera  $h$ , koja je upisana poligonu  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i opisana poligonu  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  (slika 3.31).



Slika 3.31

Preostaje još dokazati da dobrim izborom poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  udaljenost između krivulja  $K_0$  i  $K$  možemo učiniti po volji malom. Ova tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da su krivulje  $K_0$  i  $K$  obje upisane poligonu  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i opisane poligonu  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ , pa udaljenost između krivulja  $K_0$  i  $K$  nije veća od udaljenosti između poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ . Naime, ako  $r$ -okolina poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  sadrži poligon  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  i  $r$ -okolina poligona  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  sadrži poligon  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ , onda krivulja  $K$  ne može ležati izvan  $r$ -okoline krivulje  $K_0$ , a krivulja  $K_0$  ne može ležati izvan  $r$ -okoline krivulje  $K$ . Ako dokažemo da udaljenost između poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  može biti proizvoljno mala, to će povlačiti da i udaljenost između krivulja  $K_0$  i  $K$  može biti proizvoljno mala. Udaljenost između poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  jednaka je najvećoj udaljenosti između vrhova  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  i odgovarajućih stranica  $\overline{B_{2n} B_1}, \overline{B_1 B_2}, \dots, \overline{B_{2n-1} B_{2n}}$  poligona  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ . Ako je  $d$  ta najveća udaljenost, onda je poligon  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  cijeli sadržan u  $d$ -okolini poligona  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  i obrnuto, poligon  $B_1 B_2 \dots B_{2n}$  je cijeli sadržan u  $d$ -okolini poligona  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  (slika 3.32).

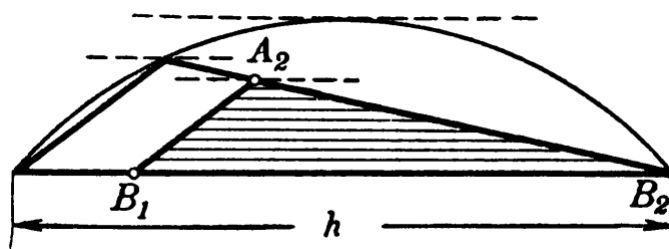


Slika 3.32

Pretpostavimo sada da su svi unutarnji kutovi poligona sukladni, odnosno da je njihova veličina jednaka

$$\frac{(2n-2) \cdot 180^\circ}{2n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ.$$

Pogledajmo trokute  $B_{2n} A_1 B_1, B_1 A_2 B_2, \dots, B_{2n-1} A_{2n} B_{2n}$ . Duljina osnovice svakog od tih trokuta je manja od  $h$ , a veličina kuta pri vrhu  $A_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ , jednaka je  $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$ , jer je to ujedno unutarnji kut poligona (slika 3.33). Očito je visina svakog od tih trokuta manja od visine sličnog trokuta kojemu najdulja stranica upravo tetiva duljine  $h$ .



Slika 3.33

Kako se  $n$  povećava, duljine tih visina postaju po volji male. Stoga, odabirom poligona  $A_1A_2\dots A_{2n}$  s dovoljno velikim brojem stranica, udaljenost između poligona  $A_1A_2\dots A_{2n}$  i  $B_1B_2\dots B_{2n}$ , pa onda i udaljenost između krivulja  $K_0$  i  $K$ , je najmanja moguća.  $\square$

Iz Aproksimacijskog teorema direktno slijedi da za svaku krivulju  $K$  konstantne širine  $h$  postoji niz krivulja  $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$  konstantne širine  $h$  sastavljenih od kružnih lukova polumjera  $h$ , kojemu je limes krivulja  $K$ . Pri tome je dovoljno zahtjevati da je udaljenost između krivulja  $K_1$  i  $K$  manja od 1, udaljenost između krivulja  $K_2$  i  $K$  manja od  $1/2$ , ..., udaljenost između krivulja  $K_n$  i  $K$  manja od  $1/n$ , i tako dalje. Koristeći ovu činjenicu nije teško dati još jedan dokaz Barbierovog teorema 3.18.

## Poglavlje 4

# Tijela konstantne širine

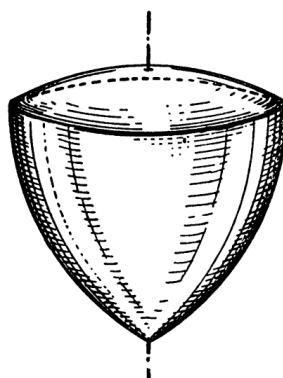
Prostorni analogon ravninskih likova konstantne širine su tijela konstantne širine. Kao što je u ravnini krug trivijalni primjer lika konstantne širine, tako je u prostoru kugla trivijalni primjer tijela konstantne širine. Znamo da je kugla omeđena sferom, odnosno skupom točaka u prostoru jednako udaljenih od neke čvrste točke. Očito je promjer sfere jednak u svakom smjeru, pa je širine kugle jednaka u svakom smjeru, što znači da je kugla doista tijelo konstantne širine. Jasno je da kuglu možemo smjestiti između dviju paralelnih ravnina tako da ju one dodiruju. Spomenute ravnine nazivat ćemo potpornim ravninama. Potporne ravnine u prostoru su analogon potpornim pravcima u ravnini. Rotiramo li kuglu u bilo kojem smjeru, ona će uvijek dodirivati obje paralelne potporne ravnine. Očito je udaljenost dviju paralelnih potpornih ravnina kugle jednaka širini kugle [5]. Sada možemo navesti definiciju tijela konstantne širine.

**Definicija 4.1.** *Konveksno tijelo u prostoru nazivamo tijelom konstantne širine  $h$  ako je udaljenost bilo kojeg para paralelnih potpornih ravnina jednaka  $h$  [2].*

Osim kugle, postoji beskonačno mnogo tijela konstantne širine. Općenito, dijelimo ih u dvije skupine, rotacijska i nerotacijska tijela konstantne širine.

### 4.1 Rotacijska tijela

Kod nekih tijela konstantne širine može se uočiti svojstvo simetrije. Takva tijela nastaju rotacijom lika konstantne širine oko njegove osi simetrije, zbog čega ih i nazivamo rotacijskim tijelima konstantne širine. Najjednostavniji netrivialni primjer tijela konstantne širine je tijelo koje nastaje rotacijom Reuleauxovog trokuta oko jedne njegove osi simetrije (vidi sliku 4.1) [2].



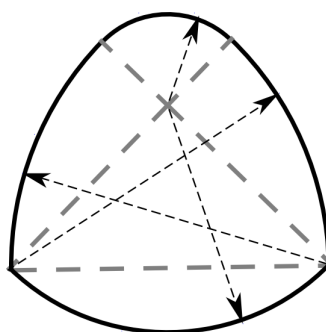
Slika 4.1: Tijelo nastalo rotacijom Reuleauxovog trokuta oko jedne njegove osi simetrije

Prethodno smo dokazali da Reuleauxov trokut omeđuje najmanju, a kružnica najveću površinu među svim krivuljama konstantne širine (vidi Teorem 3.22). Slična tvrdnja vrijedi i u prostoru za volumen kugle i tijela nastalog rotacijom Reuleauxov trokuta.

**Teorem 4.2.** *Tijelo nastalo rotacijom Reuleauxov trokuta ima najmanji volumen među svim rotacijskim tijelima konstantne širine, dok kugla ima najveći volumen [5].*

Ova tvrdnja znatno je kompliciranija nego analogna tvrdnja u ravnini, te je dokazana tek 2009. godine.

Na slici 4.2 je prikazan još jedan zanimljiv primjer krivulje konstantne širine koja je sastavljena od četiri kružna luka različitih duljina. Ovu krivulju nazivamo Reuleauxovim četverokutom (vidi odjeljak 2.2), zbog njene sličnosti s Reuleauxovim trokutom.



Slika 4.2: Reuleauxov četverokut

Rotacijom Reuleauxovog četverokuta oko njegove osi simetrije dobivamo tijelo konstantne širine prikazano na slici 4.3 [5].

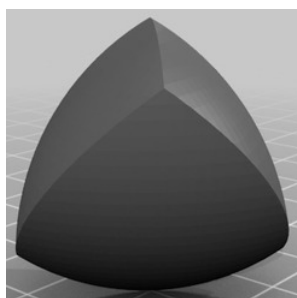


Slika 4.3: Tijelo konstantne širine nastalo rotacijom Reuleauxovog četverokuta

## 4.2 Nerotacijska tijela

Postoji i beskonačno mnogo tijela konstantne širine koja nisu dobivena rotacijom. Mi ćemo dati samo primjer dvaju tipova takvih tijela dobivenih iz tetraedra.

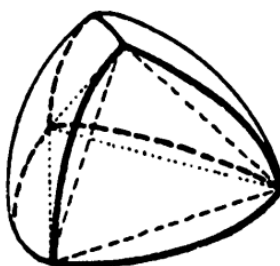
Kao što je već navedeno u prethodnom dijelu ovog rada, Reuleauxov trokut konstantne širine  $h$  dobivamo presjekom tri kruga polumjera  $h$ , tako da svaki od tih krugova prolazi kroz dva vrha jednakostraničnog trokuta, a središte mu je u trećem vrhu (vidi odjeljak 2.1). Analogan postupak možemo primijeniti za dobivanje Reuleauxovog tetraedra. U ovom slučaju, Reuleauxov tetraedar konstantne širine  $h$  dobivamo kao presjek četiri kugle polumjera  $h$ , tako da svaka od tih kugli prolazi trima vrhovima pravilnog tetraedra s bridom duljine  $h$ , a središte joj je u četvrtom vrhu. Reuleauxov tetraedar se sastoji od četiri kutne točke, četiri dijela kugle i šest zakrivljenih bridova od kojih je svaki presjek dviju sfera (slika 4.4).



Slika 4.4: Reuleauxov tetraedar

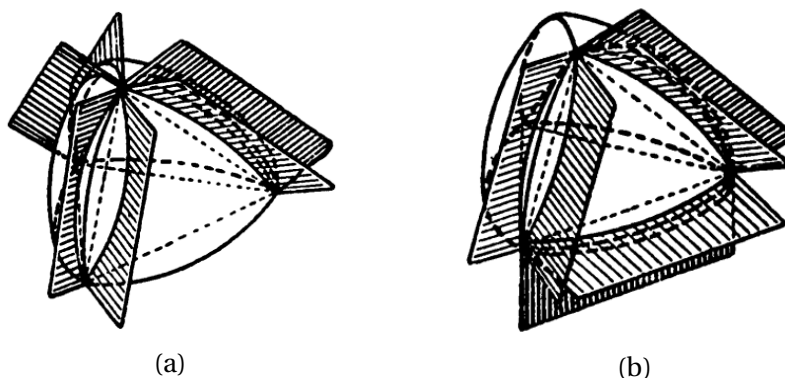
Smjestimo li Reuleauxov tetraedar između dviju paralelnih potpornih ravnina tako da jedna dodiruje kutnu točku, a druga nasuprotnu stranu, odnosno dio kugle, udaljenost između potpornih ravnina je očito jednaka  $h$  po konstrukciji Reuleauxovog tetraedra. Međutim, ako potporne ravnine dodiruju Reuleauxov tetraedar u dva nasuprotna brida, udaljenost između potpornih ravnina je nešto veća od  $h$ . Točnije, udaljenost je tada  $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1.025$  puta veća od  $h$ . Dakle, širina Reuleauxovog tetraedra nije konstantna, već se mijenja s obzirom na smjer, pa Reuleauxov tetraedar nije tijelo konstantne širine. Ipak, Reuleauxov tetraedar možemo transformirati do tijela konstantne širine na sljedeći način.

1. Konstruiramo pravilni tetraedar s bridom duljine  $h$  te dalje već opisanim postupkom dobivamo Reuleauxov tetraedar.



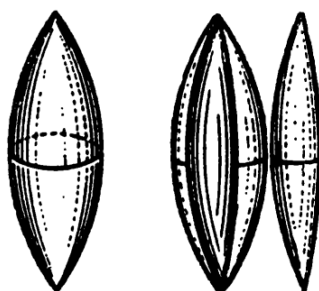
Slika 4.5

2. Odredimo dvije ravnine koje se sijeku u jednom bridu početnog tetraedra. Ovaj postupak primjenimo na tri brida tetraedra koja imaju zajednički vrh (slika 4.6a) ili na tri brida koji čine jednu stranu tetraedra (slika 4.6b).



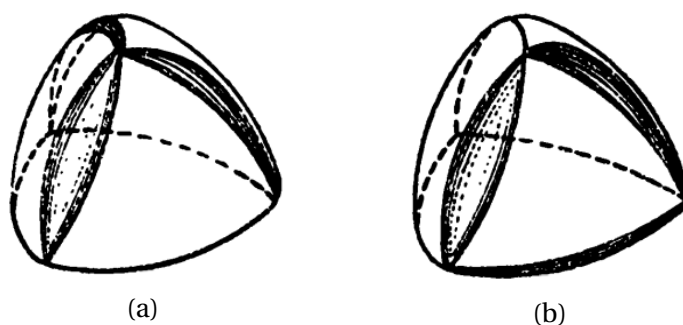
Slika 4.6

3. Uklonimo tri dijela Reuleauxovog tetraedra koja sadrže zaobljeni brid i koja se nalaze između spomenutih ravnina.
4. Presjek Reuleauxovog tetraedra i svake od spomenutih ravnina je kružni luk. Dva kružna luka nad svakim od triju odabranih bridova tetraedra imaju zajedničke krajnje točke u kutnim točkama Reuleauxovog tetraedra. Rotacijom jednog luka oko odgovarajućeg brida stvara se ploha koja svojim oblikom odgovara dijelu vretena.



Slika 4.7

Ovaj postupak primjenimo na svaki od tri odabrana brida početnog tetraedra. S obzirom na to jesmo li odabrali tri susjedna brida početnog tetraedra (slika 4.8a) ili tri brida koja čine jednu stranu tetraedra (slika 4.8b), dobivamo dva različita tijela konstantne širine  $h$  [2].

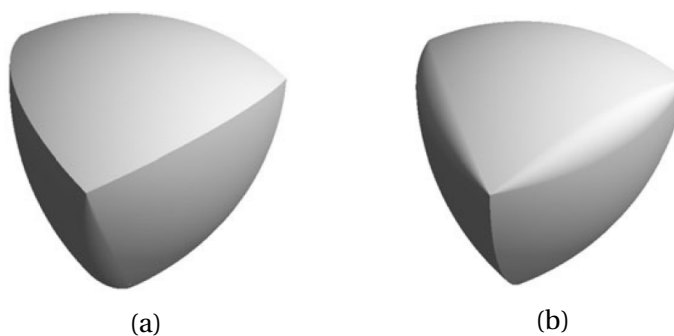


Slika 4.8

Dva tipa nerotacijskih tijela konstante širine dobivena opisanim postupkom otkrio je švicarski matematičar Ernst Meissner (1883 – 1939), prema kojem ih nazivamo Meissnerovim tijelima. Tijelo prikazano na slici 4.9a dobiveno je zaobljivanjem tri susjedna



brida Reuleauxovog tetraedra koji se sijeku u jednoj točki, te predstavlja prvu vrstu Meissnerovih tijela koju označavamo sa  $M_V$ . Tijelo prikazano na slici 4.9b dobiveno je zaobljivanjem tri brida Reuleauxovog tetraedra koja čine jednu njegovu stranu i predstavlja drugu vrstu Meissnerovih tijela koju označavamo sa  $M_F$  [5].



Slika 4.9

Meissnerova tijela imaju četiri vrha, tri kružna brida, četiri sferne površine i tri toroidalne površine. Sva Meissnerova tijela mogu se smjestiti između dvije paralelne potporne ravnine i pri tome jedna ravnina dodiruje tijelo u vrhu, a druga na sferičnom dijelu, ili jedna ravnina dodiruje tijelo na oštroj bridu, a druga na toroidalnom dijelu.

Obje vrste Meissnerovih tijela  $M_V$  i  $M_F$  konstantne širine  $h$  imaju jednak volumen i on iznosi

$$\left( \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \arccos \frac{1}{3} \right) \cdot \pi \cdot h^3 \approx 0.41986 \cdot h^3.$$

Volumen Meissnerovog tijela iznosi oko 80% volumena  $\pi/6$  kugle promjera 1, te je za 6% manji od volumena Reuleauxovog tetraedra. Pretpostavlja se da Meissnerova tijela imaju najmanji volumen od svih tijela konstantne širine. Dokaz ove tvrdnje ne postoji iako je proveden velik broj eksperimenata i postoji mnogo metoda i razloga koji podupiru njenu istinitost.

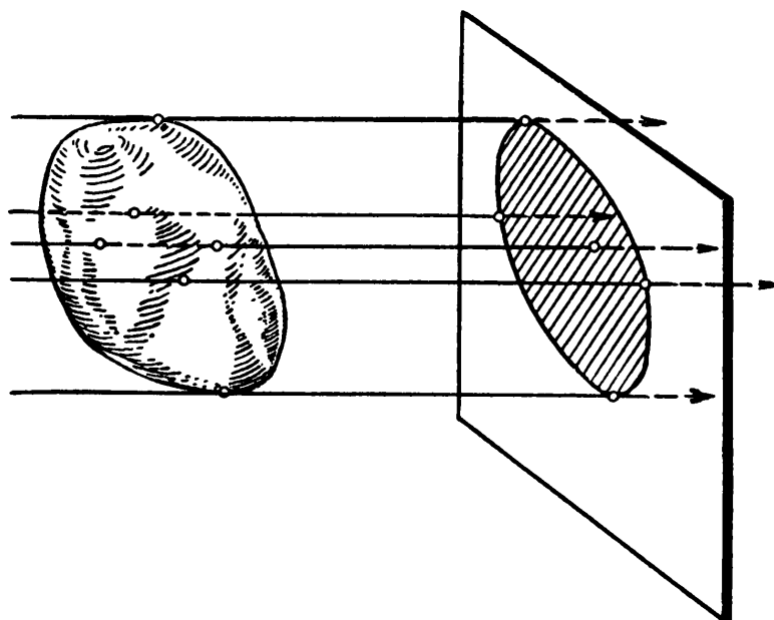
Meissnerova tijela  $M_V$  i  $M_F$  konstantne širine  $h$ , osim jednakog volumena, imaju i jednako oplošje, te ono iznosi

$$\left( 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \arccos \frac{1}{3} \right) \cdot \pi \cdot h^2 \approx 2.934115 \cdot h^2.$$

Više o volumenu i oplošju Meissnerovih tijela u [5].

Općenito, prostorni analogon Barbierovog teorema ne vrijedi, odnosno različita tijela konstantne širine  $h$  mogu imati različita oplošja.

Pogledajmo ortogonalnu projekciju nekog konveksnog tijela na ravninu (slika 4.10).



Slika 4.10

Sve projekcije tijela konstantne širine  $h$  na ravninu su očito ravninski likovi konstantne širine  $h$ . Prema Barbierovom teoremu slijedi da sve projekcije tijela konstantne širine  $h$  na ravninu imaju jednak opseg. Stoga možemo govoriti da konveksno tijelo ima konstantan opseg ako sve njegove projekcije na ravnine imaju jednak opseg. Sada se lako vidi da su sva tijela konstantne širine ujedno i tijela konstantnog opsega, ali vrijedi i obrnuto, tj. svako tijelo konstantnog opsega je ujedno i tijelo konstantne širine, no dokaz te tvrdnje je znatno teži [2].

# Bibliografija

- [1] D. G. Ball, *A Generalisation of  $\pi$* , The Mathematical Gazette, Vol. 57, No. 402 (1973.), 298-303.
- [2] V. G. Boltyanskii, I. M. Yaglom, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1961.
- [3] E. Jost, E. Maor, *Beautiful Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2014.
- [4] D. Jukić, *Konveksni skupovi*, Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2015.
- [5] B. Kawohl, C. Weber, *Meissner's Mysterious Bodies*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 33, No. 3 (2011.), 94-101.
- [6] S. R. Lay, *Convex Sets and Their Applications*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.
- [7] C. M. Leon, S. von Wuthenau Mayer, *Reinventing the Wheel: Non-Circular Wheels*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 27, No. 4 (2005.), 7-13.
- [8] P. Pandžić, J. Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, skripta, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/p\\_o3.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/p_o3.pdf) (lipanj 2018.)
- [9] H. Rademacher, O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [10] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2002.
- [11] Š. Ungar, *Matematička analiza 4*, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf> (lipanj 2018.)

# Sažetak

Svakoj zatvorenoj krivulji možemo odrediti širinu u bilo kojem smjeru. Krivulju kojoj je širina jednaka u svakom smjeru nazivamo *krivuljom konstantne širine*. Trivijalni primjer takve krivulje je kružnica. Osim kružnice, postoji beskonačno mnogo krivulja konstantne širine. Najjednostavniji primjer takve krivulje je krivolinijski trokut, kojeg je otkrio njemački znanstvenik i inženjer Franz Reuleaux, prema kojem ga nazivamo *Reuleauxovim trokutom*. U prvom dijelu rada dani su i drugi načini konstrukcije krivulja konstantne širine.

Krivulje konstantne širine imaju mnoga zanimljiva svojstva, od kojih su neka navedena i dokazana u drugom dijelu ovog rada. Primjerice, Barbierov teorem kaže da krivulja konstantne širine  $h$  i kružnica promjera  $h$  imaju jednaku duljinu. Iskazane su i ilustrirane i dvije tvrdnje o duljini i površini obuhvaćenoj takvim krivuljama, a dokazan je i Aproximacijski teorem za krivulje konstantne širine.

Krivulja konstantne širine čini rub lika kojeg nazivamo likom konstantne širine. Prostorni analogon lika konstantne širine je tijelo konstantne širine. Prema načinu na koji ih dobivamo, dijelimo ih na rotacijska i nerotacijska tijela. Otkriće dva tipa nerotacijskih tijela konstantne širine pripisuje se švicarskom matematičaru Ernstu Meissneru. Kratko izlaganje o tijelima konstantne širine dano je u završnom dijelu ovog rada.

# Summary

For each closed curve we can determine the width in any direction. If the width of a curve is the same in all directions, then it is called a *curve of constant width*. A common example of such a curve is a circle. Apart from the circle, there are infinitely many other curves of constant width. The simplest example of such curves is the curvilinear triangle, also called the *Reuleaux triangle* because it was discovered by German scientist and engineer Franz Reuleaux. In the first part of this graduate thesis we describe different ways of constructing curves of constant width.

Curves of constant width have many interesting properties, and some of them are mentioned and proven in this work. For example, Barbier's theorem says that a curve of constant width  $h$  and a circle of diameter  $h$  have the same length. This and other statements on length and the area enclosed by such curves are given and illustrated. The so called Approximation Theorem for curves of constant width is also proved.

A curve of constant width is the boundary of the figure that we call a figure of constant width. The three-dimensional analogy of the figure of constant width is the body of constant width. According to the way they are obtained, they are divided into rotational and non-rotational bodies. Two types of non-rotational bodies of constant width were discovered by Swiss mathematician Ernst Meissner. A short exposition on bodies of constant width makes the last part of this thesis.

# Životopis

Rođena sam 29.4.1993. godine u Zagrebu. Od 2000. godine pohađala sam Osnovnu školu Bukovac u Zagrebu. Po završetku osnovnoškolskog obrazovanja 2008. godine upisala sam III. Gimnaziju u Zagrebu. Nakon završene opće gimnazije, 2012. godine upisala sam preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. završila sam preddiplomski studij, te iste godine upisala diplomski studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu. Metodičku praksu položila sam u Osnovnoj školi Malešnica, te XV. Gimnaziji – MIOC u Zagrebu. Tijekom studiranja sudjelovala sam na Otvorenom danu matematike i Večeri matematike, te na stručnim usavršavanjima nastavnika matematike u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva i Udruge Magistra Nova.