Primjene Hamilton-Cayleyevog teorema na kvadratne matrice reda 2

Perković, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Perković

PRIMJENE HAMILTON–CAYLEYEVOG TEOREMA NA KVADRATNE MATRICE REDA 2

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima. Bez njih ga ne bi ni bilo. Od početka mog školovanja su uz mene, bodre me i podržavaju u svemu. Ovaj uspjeh pripisujem njihovom trudu i njihovim riječima koje su me podigle kada je bilo najteže. Uz takve roditelje sve je bilo moguće i lakše. Također, iznimno zahvaljujem svojoj mentorici koja mi je pomagala pri stvaranju ovog rada i uvijek bila tu kada mi je bila potrebna pomoć.

Sadržaj

Uvod

Pojam matrice uveo je 1850. godine engleski matematičar James Joseph Sylvester, a apstraktu definiciju matrice prvi je dao njegov suradnik Arthur Cayley 1858. godine u radu *Memoir on the Theory of Matrices* i time uspostavio teoriju matrica kao posebnu granu matematike. Prije toga matrice su se proučavale samo u nekim posebnim kontekstima. Tema ovog diplomskog rada jest Hamilton–Cayleyev teorem i njegove primjene na kvadratne matrice drugog reda. Hamilton–Cayleyev teorem je jedan od najznačajnijih rezultata u linearnoj algebri. Teorem kaže da svaka kvadratna matrica poništava svoj karakteristični polinom. Irski matematičar William Rowan Hamilton dokazao je 1853. godine ovaj teorem u posebnom slučaju izvjesnih realnih kvadratnih matrica četvrtog reda odnosno kompleksnih kvadratnih matrica drugog reda. Engleski matematičar Arthur Cayley je 1858. godine iskazao teorem za matrice trećeg reda te objavio dokaz za kvadratne matrice drugog reda, te se tada taj rezultat smatrao izuzetnim otkrićem. Njemački matematičar Ferdinand Georg Frobenius je 1878. godine ovaj teorem dokazao u općem slučaju.

Ovaj diplomski rad je podijeljen u dva poglavlja. Na početku rada dajemo nekoliko osnovnih definicija i pojmova vezanih uz matrice, a potom se bavimo Hamilton–Cayleyevim teoremom i njegovim primjenama na kvadratne matrice drugog reda. U prvom poglavlju koristimo Hamilton–Cayleyev teorem pri potenciranju nekih posebnih tipova matrica drugog reda te zatim pri dokazivanju raznih tvrdnji koje uključuju determinante i tragove matrica drugog reda. Također se bavimo dijagonalizacijom simetričnih realnih matrica drugog reda, proučavamo karakteristične polinome umnoška matrica drugog reda te određujemo Jordanove kanonske forme kompleksnih, realnih ili racionalnih matrica, kao i nekih posebnih tipova matrica drugog reda. U drugom poglavlju prikazujemo rezultate o potenciranju kvadratnih matrica drugog reda, i to najprije u terminima njihovih elemenata i svojstvenih vrijednosti, a zatim korištenjem nizova brojeva zadanih rekurzivno u terminima traga i determinante promatrane matrice. Također se bavimo rješavanjem binomnih matričnih jednadžbi tipa $X^n = A$ za kvadratne matrice drugog reda.

Poglavlje 1

Hamilton–Cayleyev teorem

1.1 Pojam matrice

$\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ označava skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Za takve matrice kažemo da su tipa $m \times n$ odnosno (m, n). U slučaju kada je $m = n$ umjesto $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ običaj je pisati kraće $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ i tada govorimo o skupu kvadratnih matrica reda n.

Zapravo, riječ je o funkcijama $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ uz dogovor da funkcijsku vrijednost $A(i, j)$ označavamo kraće s a_{ij} i onda dogovorno zapisujemo u pravokutnu $m \times n$ tablicu i to u $i - ti$ redak i $j - ti$ stupac. Matricu A s elementima a_{ij} zapisujemo kao

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ili kraće kao $A = (a_{ij})$.

Matricu čiji su svi elementi nule nazivamo *nulmatricom* i kraće označavamo s 0 ili $0_{m,n}$ odnosno 0_n ako želimo naglasiti o kojem se tipu odnosno redu matrice radi.

Matrica $B = (b_{ij})$ tipa $n \times m$ je *transponirana matrica* matrice $A = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ ako je $b_{ij} = a_{ji}$ za sve $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, m$. Matricu B tada označavamo A^T.

U kvadratnoj matrici $A = (a_{ij})$ reda n , elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ čine *glavnu dijagonalu*, a elementi $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ čine *sporednu dijagonalu*.

Kvadratna matrica je *dijagonalna* ako su svi njezini elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli.

Kvadratna matrica je *gornjotrokutasta* ako su svi njezini elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, a *donjotrokutasta* ako su svi njezini elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ je *skalarna* ako je A dijagonalna matrica za koju vrijedi $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$.

Za dijagonalnu matricu kažemo da je *jedinična* ako su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1. Jediničnu matricu označavamo s I odnosno I_n ako želimo naglasiti kojeg je reda promatrana matrica.

Kažemo da je matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ *regularna* ako postoji matrica $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi

$$AB = BA = I.$$

U tom slučaju se matrica B zove *inverzna matrica* matrice A i označava s A^{-1}. Umjesto regularna koristi se i termin *invertibilna matrica*. Za matricu $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{F})$ koja nije invertibilna, kažemo da je *singularna*.

Uočimo da je jedinična matrica I regularna i sama sebi inverzna, vrijedi $I \cdot I = I$.

Zbroj elemenata na glavnoj dijagonali kvadratne matrice A zovemo *trag matrice* i označavamo s $\mathrm{tr}(A)$.

Determinanta matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ označava se s $\det(A)$, a definira s

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

gdje je S_n skup svih permutacija od n elemenata, tj. skup svih bijekcija

$$p : \{1, 2, \cdots n\} \to \{1, 2, \cdots n\},$$

a $I(p)$ je broj inverzija u permutaciji p. (Inverziju dobijemo kada je $i < j$ i $p(i) > p(j)$.) Uočimo da je determinanta definirana samo za kvadratne matrice i da je $\det(A)$ skalar.

Regularnost matrice može se ispitati računanjem njene determinante. Naime, pokazuje se da je A regularna matrica ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$.

Matrice nad poljem kompleksnih brojeva zovemo *kompleksnim* matricama, a one nad poljem realnih brojeva zovemo *realnim* matricama. Uvedimo neke posebne tipove kompleksnih matrica.

Matrica $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{C})$ je *adjungirana matrica* matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ ako je $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ za sve $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, gdje $\overline{a_{ij}}$ označava kompleksno konjugirani broj broja a_{ij}. Tada matricu B označavamo s A^*. Vrijedi $(A^*)^* = A$.

Matrica $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je:

- *hermitska* ako je $A^* = A$;
- *anti-hermitska* ako je $A^* = -A$;

- *simetrična* ako je $A^T = A$;
- *anti-simetrična* ako je $A^T = -A$;
- *normalna* ako je $A^*A = AA^*$;
- *unitarna* ako je $A^*A = AA^* = I$;
- *ortogonalna* ako je $A^TA = AA^T = I$;
- *idempotentna* ako je $A^2 = A$;
- *involutorna* ako je $A^2 = I$;
- *anti-involutorna* ako je $A^2 = -I$;
- *nilpotentna* ako je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Uočimo da je svaka realna hermitska (anti-hermitska) matrica zapravo simetrična (anti-simetrična) matrica, te da je svaka realna unitarna matrica ortogonalna, jer je u slučaju realnih matrica $A^* = A^T$. Nadalje, primijetimo da je matrica A hermitska ako i samo ako je iA anti-hermitska, te da je A involutorna ako i samo ako je iA anti-involutorna matrica.

Svakoj kompleksoj matrici jednoznačno je pridružen linearan operator koji djeluje na odgovarajućem vektorskom prostoru. Označimo s $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor svih uređenih n-torki $(x_1, \dots, x_n)$ kompleksnih brojeva x_i, $i = 1, \dots, n$. Prostor $\mathbb{C}^n$ je unitaran uz skalarni produkt koji se definira kao

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

gdje su $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Taj prostor je ujedno i normiran uz normu induciranu skalarnim produktom, tj.

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Kanonsku bazu prostora $\mathbb{C}^n$ čine vektori $e_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$, kojima je i-ta komponenta jednaka 1 dok su na ostalim mjestima nule.

U daljnjem ćemo vektore prostora $\mathbb{C}^n$ označavati i kao jednostupčane matrice, dakle $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$ zapisujemo i kao

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Unutar ovog rada koristit ćemo i kraću oznaku za matricu $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$, gdje je $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ prvi stupac matrice A, a $y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$ drugi stupac matrice A, tj. pisat ćemo $A = (x \,|\, y)$.

Pomoću kanonskih baza $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ i $\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\}$ prostora $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ redom, poistovjećuje se vektorski prostor $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ svih linearnih operatora s $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^m$ s vektorskim prostorom $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ na način da se linearni operator $A \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ shvaća kao matrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ s elementima $a_{ij} = \langle Ae_j^{(n)}, e_i^{(m)} \rangle$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Uvedimo pojam svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora kvadratne matrice.

Definicija 1.1.1. *$\lambda \in \mathbb{C}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ ako postoji vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tako da je $Ax = \lambda x$. Vektor x zove se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

Vektor x iz navedene definicije nije jedinstven. Ako je x_0 svojstveni vektor pridružen λ_0 onda je i αx_0 svojstven vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Imamo

$$A(\alpha x_0) = \alpha A x_0 = \alpha(\lambda_0 x_0) = \lambda_0(\alpha x_0).$$

Za jedinični operator I su svi vektori, osim nulvektora, svojstveni za svojstvenu vrijednost 1 jer vrijedi

$$Ix = 1x, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A nazivamo *spektrom* od A i taj ćemo skup označavati sa $\sigma(A)$.

Definicija 1.1.2. *Neka je $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ naziva se karakterističan (svojstveni) polinom matrice A. Jednadžba $k_A(\lambda) = 0$ naziva se karakteristična jednadžba matrice A.*

Svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ su nultočke karakterističnog polinoma. Naime, $\lambda \in \sigma(A)$ ako i samo ako postoji $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sa svojstvom $Ax = \lambda x$, tj. $(\lambda I - A)x = 0$. Uočimo da takav vektor x postoji ako i samo ako je $\lambda I - A$ singularna matrica, tj. $\det(\lambda I - A) = 0$ odnosno $k_A(\lambda) = 0$.

Karakteristični polinom $k_A(\lambda)$ matrice A reda n je polinom n-tog stupnja u varijabli λ pa u slučaju kompleksne matrice A taj polinom ima n kompleksnih nultočaka. Dakle, kompleksna matrica A reda n ima n svojstvenih vrijednosti među kojima može biti i jednakih.

Pokazuje se da za matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \quad \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

gdje su λ_i, $i = 1, \ldots, n$, svojstvene vrijednosti matrice A.

1.2 Hamilton–Cayleyev teorem

Definicija 1.2.1. *Neka je je* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

(i) *Karakterističan (svojstveni) polinom matrice A definira se kao*

$$k_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

(ii) *Jednadžba* $k_A(\lambda) = 0$ *odnosno* $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ *zove se karakteristična jednadžba matrice A.*

Pošto su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nultočke kvadratne jednadžbe $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, pomoću Vièteovih formula dobivamo sljedeće:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A), \quad \lambda_1\lambda_2 = \det(A).$$

Navedimo neka osnovna svojstva svojstvenih vrijednosti kvadratne matrice, koja se lako provjere direktnim računom.

Propozicija 1.2.2. *Neka je* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Ako* λ *nije svojstvena vrijednost matrice* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, *onda sustav*

$$\begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + (d-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \lambda x, \tag{1.1}$$

gdje je $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, *ima samo trivijalno rješenje* $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nadalje, ako su λ_1 *i* λ_2 *svojstvene vrijednosti matrice* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, *tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(ii) λ_1^n *i* λ_2^n *su svojstvene vrijednosti matrice* A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $P(\lambda_1)$ *i* $P(\lambda_2)$ *su svojstvene vrijednosti matrice* $P(A)$, *gdje je P polinom kompleksne varijable.*

(iv) *Ako je matrica A regularna, onda su* $\dfrac{1}{\lambda_1}$ *i* $\dfrac{1}{\lambda_2}$ *svojstvene vrijednosti od* A^{-1}.

Teorem 1.2.3 (Hamilton–Cayley)**.** *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tada vrijedi*

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2.$$

Dokaz. Ovaj teorem ćemo dokazati direktnim računom. Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tada je

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}.$$

Ako je $x = \mathrm{tr}(A) = a + d$, tada je

$$\begin{aligned} A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+ad-ax & 0 \\ 0 & d^2+ad-dx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2. \end{aligned}$$

Time smo dokazali ovaj teorem.

□

Slijede rezultati u kojima ćemo koristiti Hamilton–Cayleyev teorem pri računanju inverzne matrice te potenciranja nekih posebnih matrica reda 2.

Propozicija 1.2.4. *Ako je matrica $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ regularna, tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)$$

i

$$\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\det(A)}.$$

Dokaz. Iz Hamilton–Cayleyevog teorema znamo da vrijedi $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$. Pomnožimo li navedenu jednakost sa A^{-1} dobivamo

$$A - \mathrm{tr}(A)I_2 + \det(A)A^{-1} = 0_2. \tag{1.2}$$

Odavde slijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A).$$

Drugi dio propozicije dokazujemo tako da na jednakost (1.2) djelujemo s tragom. Dobivamo

$$\mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(A) \cdot 2 + \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}) = 0_2$$

odnosno

$$\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{\mathrm{tr}(A)}{\det(A)}.$$

□

Propozicija 1.2.5. *(n-ta potencija dviju specijalnih matrica)*

(a) *Ako je* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *i* $\det(A) = 0$ *, tada je*

$$A^n = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Ako je* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *i* $\mathrm{tr}(A) = 0$*, tada je*

$$A^n = \begin{cases} [-\det(A)]^k I_2, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ [-\det(A)]^{k-1}A, & n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Dokaz. (a) Po Hamilton–Cayleyevom teoremu vrijedi

$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A. \tag{1.3}$$

Matematičkom indukcijom ćemo pokazati da vrijedi $A^n = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Baza indukcije: Provjeravamo da navedena jednakost vrijedi za $n = 1$. Imamo

$$A = [\mathrm{tr}(A)]^0 \cdot A \Rightarrow A = A.$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A^n = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A$.
Korak indukcije: U koraku indukcije trebamo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n+1$, tj. da je $A^{n+1} = [\mathrm{tr}(A)]^n A$. Prema (1.3) i pretpostavci indukcije imamo

$$A^{n+1} = A^n A = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}AA = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A^2 = [\mathrm{tr(A)}]^{n-1}[\mathrm{tr(A)}]A = [\mathrm{tr(A)}]^n A.$$

Obzirom da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $n = 1$, te uz pretpostavku indukcije smo dokazali da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $n+1$, slijedi prema aksiomu matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) Budući da je $\mathrm{tr}(A) = 0$ i koristeći Hamilton–Cayleyev teorem slijedi da je $A^2 + \det(A)I_2 = 0_2$, tj.

$$A^2 = -\det(A)I_2. \tag{1.4}$$

Matematičkom indukcijom po $k \in \mathbb{N}$ dokazujemo da je

$$A^n = [-\det(A)]^k I_2, \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Baza indukcije: Uočimo da $A^n = [-\det(A)]^k I_2$ za $k = 1$ i $n = 2$ vrijedi prema (1.4).
Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da $A^n = [-\det(A)]^k I_2$ vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$ i $n = 2k$.
Korak indukcije: U koraku indukcije trebamo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$, tj. da je $A^n = [-\det(A)]^{k+1} I_2$ za $n = 2(k + 1)$. Prema (1.4) i pretpostavci indukcije imamo

$$A^{2(k+1)} = A^{2k}A^2 = [\text{-}\det(A)]^k I_2[\text{-}\det(A)]I_2 = [\text{-}\det(A)]^{k+1} I_2.$$

Obzirom da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $k = 1$, te uz pretpostavku indukcije smo dokazali da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k+1$, slijedi prema aksiomu matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Analogno se matematičkom induckijom dokazuje da vrijedi

$$A^n = [-\det(A)]^{k-1} A, \quad n = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

Propozicija 1.2.6. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne.*

(a) $A^2 = 0_2$.

(b) *Postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tako da je $A^n = 0_2$.*

Dokaz. Implikacija (a)⇒(b) je očita.

(b)⇒(a) Dokaz ovog smjera baziramo na tome da su svojstvene vrijednosti matrice A jednake nula. Naime, ako je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A, tada je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Tada je prema pretpostavci $0 = A^n x = \lambda^n x$, odakle slijedi $\lambda = 0$. Dakle, $\sigma(A) = \{0\}$ pa je stoga $\operatorname{tr}(A) = 0$ i $\det(A) = 0$. Tada je karakteristični polinom matrice A jednak $k_A(\lambda) = \lambda^2$ odakle prema teoremu1.2.3 slijedi da je $A^2 = 0$. □

Napomena 1.2.7. *Uočimo da iz propozicije 1.2.6 slijedi da ako je $A^2 \neq 0_2$ tada ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n = 0$, tj. takva matrica ne može biti nilpotentna.*

Propozicija 1.2.8. *Neka su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Ako su A i B nilpotentne matrice i $AB = BA$, tada su i $A + B$ i $A - B$ nilpotentne matrice.*

Dokaz. Prema prehodnoj propoziciji dovoljno je pretpostaviti da su A i B komutativne matrice te da je $A^2 = 0_2$ i $B^2 = 0_2$. Tada vrijedi

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 = 2AB,$$

pa je $(A \pm B)^4 = 4A^2B^2 = 0_2$. Stoga su matrice $A + B$ i $A - B$ nilpotentne. □

U nastavku primjenjujemo Hamilton–Cayleyev teorem pri dokazivanju raznih tvrdnji koje uključuju determinante i tragove matrica reda 2.

Lema 1.2.9. *Ako je* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$*, tada je*

$$\det(A) = \frac{1}{2}\left[[\operatorname{tr}(A)]^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]. \tag{1.5}$$

Dokaz. Prema teoremu 1.2.3 vrijedi $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$. Djelujući s tragom na obje strane ove jednakosti dobivamo

$$\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A) + 2\det(A) = 0$$

odakle slijedi tvrdnja. □

Propozicija 1.2.10. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *i* $x \in \mathbb{C}$ *tada vrijedi*

$$\det(A + xB) = \det(A) + \big(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)\big)x + \det(B)x^2. \tag{1.6}$$

Dokaz. Dokaz provodimo koristeći relaciju (1.5). Imamo

$$\begin{aligned}
\det(A + xB) &= \frac{1}{2}\left[[\operatorname{tr}(A + xB)]^2 - \operatorname{tr}\Big((A + xB)^2\Big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}(A) + x\ \operatorname{tr}(B))^2 - \operatorname{tr}(A^2 + xAB + xBA + x^2B^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[[\operatorname{tr}(A)]^2 + 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)x + [\operatorname{tr}(B)]^2x^2 - \operatorname{tr}(A^2) - 2\operatorname{tr}(AB)x - \operatorname{tr}(B^2)x^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[[\operatorname{tr}(A)]^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right] + (\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB))x + \frac{1}{2}\left[[\operatorname{tr}(B)]^2 - \operatorname{tr}(B)^2\right]x^2 \\
&= \det(A) + \big(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)\big)x + (\det(B))x^2.
\end{aligned}$$

□

Korolar 1.2.11. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *tada je*

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2\det(A) + 2\det(B).$$

Dokaz. Dokaz se provodi tako da se u (1.6) uvrsti najprije $x = 1$, a zatim $x = -1$ te se dobivene jednakosti zbroje. □

Korolar 1.2.12. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *tada je:*

(a) $\det(A + B) - \det(A) - \det(B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)$;

(b) $\det(A - B) - \det(A) - \det(B) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$;

(c) $\det(A+B) - \det(A-B) = 2(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))$.

Dokaz. Tvrdnje (a) i (b) dokazujemo tako da u (1.6) uvrstimo $x = 1$ i $x = -1$ redom. Tvrdnju (c) dobijemo tako da od jednakosti u tvrdnji (a) oduzmemo jednakost iz tvrdnje (b). □

Teorem 1.2.13. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tada je*

$$AB + BA - \mathrm{tr}(A)B - \mathrm{tr}(B)A + [\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)]I_2 = 0_2.$$

Dokaz. Primjenjujući Hamilton–Cayleyev teorem na matricu $A + B$ dobivamo

$$(A+B)^2 - \mathrm{tr}(A+B)(A+B) + \det(A+B)I_2 = 0_2.$$

Budući da je $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$, po korolaru 1.2.12(a) odavde slijedi

$$A^2 + B^2 + AB + BA - [\mathrm{tr}(A)A + \mathrm{tr}(B)A + \mathrm{tr}(A)B + \mathrm{tr}(B)B]$$

$$+[\det(A) + \det(B) + \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)]I_2 = 0_2.$$

Kako je osim toga prema teoremu 1.2.3

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2, \quad B^2 - \mathrm{tr}(B)B + \det(B)I_2 = 0_2,$$

teorem je dokazan. □

Korolar 1.2.14. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tada je:*

$$\begin{aligned} 2ABC &= \mathrm{tr}(A)BC + \mathrm{tr}(B)AC + \mathrm{tr}(C)AB - \mathrm{tr}(AC)B + [\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)]C \\ &+ [\mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(C)]A - [\mathrm{tr}(ACB) - \mathrm{tr}(AC)\mathrm{tr}(B)]I_2; \end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(BC) + \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(AC) + \mathrm{tr}(C)\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(ACB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(C).$$

Dokaz. Dokaz prve jednakosti temelji se na teoremu 1.2.13. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2ABC &= A(BC + CB) + (AB + BA)C - [B(AC) + (AC)B] \\ &= A[\mathrm{tr}(B)C + \mathrm{tr}(C)B - (\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(C) - \mathrm{tr}(BC))I_2] \\ &+ [\mathrm{tr}(A)B + \mathrm{tr}(B)A - (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))I_2]C \\ &- [\mathrm{tr}(AC)B + \mathrm{tr}(B)AC - (\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(AC) - \mathrm{tr}(ACB))I_2] \\ &= \mathrm{tr}(A)BC + \mathrm{tr}(B)AC + \mathrm{tr}(C)AB - \mathrm{tr}(AC)B + [\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)]C \\ &+ [\mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(C)]A - [\mathrm{tr}(ACB) - \mathrm{tr}(AC)\mathrm{tr}(B)]I_2. \end{aligned}$$

Dokaz druge jednakosti slijedi direktno djelovanjem funkcije traga na prvu jednakost. □

Korolar 1.2.15. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *i* $x, y \in \mathbb{C}$ *tada je*

$$\det(xA + yB) = x^2\det(A) + y^2\det(B) + xy[\det(A + B) - \det(A) - \det(B)].$$

Dokaz. Ako je $x = 0$ tada nemamo ništa za dokazati. Ako je $x \neq 0$ uzmemo $\alpha = \dfrac{y}{x}$ i po propoziciji 1.2.10 imamo

$$\begin{aligned}
\det(xA + yB) &= x^2\det(A + \alpha B) \\
&= x^2[\det(A) + (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))\alpha + \alpha^2\det(B)] \\
&= x^2\det(A) + xy(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)) + y^2\det(B) \\
&= x^2\det(A) + xy[\det(A + B) - \det(A) - \det(B)] + y^2\det(B).
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi prema korolaru 1.2.12(a). □

Korolar 1.2.16. *Ako je* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *i* $x \in \mathbb{C}$ *tada je* $\det(A + xI_2) = \det(A) + \mathrm{tr}(A)x + x^2$.

Dokaz. Dokaz izravno slijedi koristeći propoziciju 1.2.10 uz supstituciju $B = I_2$. □

Lema 1.2.17. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *, tada je* $\det(AB - BA) = \mathrm{tr}(A^2B^2) - \mathrm{tr}((AB)^2)$.

Dokaz. Prema formuli (1.6) imamo

$$\det(AB - BA) = \det(AB) - (\mathrm{tr}(AB)\mathrm{tr}(BA) - \mathrm{tr}(AB^2A)) + \det(BA).$$

Znamo da vrijedi $\det(AB) = \det(BA), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ i $\mathrm{tr}(AB^2A) = \mathrm{tr}(A^2B^2)$. Sada slijedi

$$\det(AB - BA) = 2\det(AB) - (\mathrm{tr}(AB))^2 + \mathrm{tr}(A^2B^2).$$

Kombinirajući zadnju jednakost s formulom (1.5) tvrdnja slijedi. □

Lema 1.2.18. *Ako su* $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$*, tada je*

$$\det(A - B)\det(A + B) = \det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA).$$

Dokaz. Prema korolaru 1.2.11 imamo

$$\det[(A^2 - B^2) + (AB - BA)] + \det[(A^2 - B^2) - (AB - BA)] = 2[\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA)].$$

Međutim

$$\det[(A^2 - B^2) + (AB - BA)] = \det[(A - B)(A + B)] = \det(A - B)\det(A + B),$$

$$\det[(A^2 - B^2) - (AB - BA)] = \det[(A + B)(A - B)] = \det(A + B)\det(A - B).$$

Time je lema dokazana. □

Lema 1.2.19. *Ako su $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, tada je*

$$\det(A^2 + B^2) = \det(AB - BA) + (\det(A) - \det(B))^2 + (\det(A + B) - \det(A) - \det(B))^2.$$

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti lemu 1.2.18. Supstituiramo B sa iB te dobivamo

$$\det(A - iB)\det(A + iB) = \det(A^2 + B^2) + \det[i(AB - BA)].$$

Slijedi da je

$$\det(A^2 + B^2) = \det(AB - BA) + \det(A - iB)\det(A + iB). \tag{1.7}$$

Koristeći sada formulu (1.6) dobivamo

$$\det(A + iB) = \det(A) - \det(B) + (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))i$$

i

$$\det(A - iB) = \det(A) - \det(B) - (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))i.$$

Sada slijedi

$$\det(A - iB)\det(A + iB) = (\det(A) - \det(B))^2 + (\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB))^2.$$

Koristeći korolar 1.2.12(a) dobivamo

$$\det(A - iB)\det(A + iB) = (\det(A) - \det(B))^2 + (\det(A + B) - \det(A) - \det(B))^2. \tag{1.8}$$

Kombinirajući (1.7) i (1.8) slijedi tvrdnja leme. □

Teorem 1.2.20. *Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) $(A - \lambda_1 I_2)^{2n} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n} I_2, \quad n \geq 1;$

(b) $(A - \lambda_1 I_2)^{2n-1} - (A - \lambda_2 I_2)^{2n-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n-1} I_2, \quad n \geq 1.$

Dokaz. (a) dio teorema dokazat ćemo matematičkom indukcijom po n.
Baza indukcije: Provjeravamo vrijedi li tvrdnja $(A - \lambda_1 I_2)^{2n} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n} I_2$ za $n = 1$. Imamo

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I_2)^2 + (A - \lambda_2 I_2)^2 &= A^2 - 2\lambda_1 A + \lambda_1^2 I_2 + A^2 - 2\lambda_2 A + \lambda_2^2 I_2 \\ &= 2[A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I_2] + (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)I_2 \\ &= 2[A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2] + (\lambda_2 - \lambda_1)^2 I_2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^2 I_2,\end{aligned}$$

pri čemu u zadnjoj jednakosti koristimo Hamilton–Cayleyev teorem.

Pretpostavka induckije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Korak indukcije: Provjerimo vrijedi li tvrdnja i za $n + 1$.

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I_2)^{2n+2} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n+2} &= [(A - \lambda_1 I_2)^{2n} + (A - \lambda_2 I_2)^{2n}][(A - \lambda_1 I_2)^2 + (A - \lambda_2 I_2)^2] \\ &- (A - \lambda_1 I_2)^{2n}(A - \lambda_2 I_2)^2 - (A - \lambda_2 I_2)^{2n}(A - \lambda_1 I_2)^2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n}(\lambda_2 - \lambda_1)^2 I_2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{2n+2} I_2,\end{aligned}$$

budući da je $(A - \lambda_1 I_2)(A - \lambda_2 I_2) = (A - \lambda_2 I_2)(A - \lambda_1 I_2) = 0_2$.
Obzirom da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $n = 1$, te uz pretpostavku indukcije smo dokazali da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $n+1$, slijedi prema aksiomu matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) dio teorema dokazujemo također matematičkom indukcijom analogno kao i (a) dio teorema. Time je teorem dokazan. □

1.3 Svojstvene vrijednosti simetričnih matrica

Prisjetimo se da za matricu $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ kažemo da je *ortogonalna* ako je $AA^T = A^T A = I_2$.

Matrica rotacije (u *xy*-ravnini) oko 0 za kut θ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu definira se kao

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lako se provjeri da je R_θ ortogonalna matrica.

U ovoj točki pokazat ćemo da su realne simetrične matrice reda 2 dijagonalizabilne i da se svaka takva matrica može dijagonalizirati pomoću matrice rotacije.

Teorem 1.3.1. *Neka je* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) *A ima realne svojstvene vrijednosti*

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \quad i \quad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2},$$

te je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *ako i samo ako je* $A = \lambda I_2$.

(b) *A je dijagonalizabilna matrica, a ortogonalna matrica* $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *koja dijagonalizira A može se izabrati da bude matrica rotacije. Vrijedi*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad gdje\ je\ \ P = R_\theta, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{d - a\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2b}, \quad b \neq 0.$$

Dokaz. (a) dio teorema slijedi direktnim računom.

(b) Jasno je da tvrdnja vrijedi ako je $b = 0$. Stoga pretpstavimo da je $b \neq 0$. Invertibilna matrica P ima kao stupce svojstvene vektore matrice A kojima odgovaraju svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2. Ako svojstveni vektori v_i, $i = 1, 2$, odgovaraju svojstvenim vrijednostima λ_i, $i = 1, 2$, tada iz $(A - \lambda_i I_2)v_i = 0$, $i = 1, 2$, slijedi

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{d - a + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2b} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podijelimo ta dva vektora njihovom duljinom

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{1 + \left(\frac{d - a + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2b}\right)^2}$$

te uzmimo

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d - a + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2b}$$

i zatim stavimo

$$P = \cos\theta \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \,\middle|\, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right).$$

Tada je $P = R_\theta$, čime je teorem dokazan. □

1.4 Obrat Hamilton–Cayleyevog teorema

Teorem 1.4.1. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i neka su $a, b \in \mathbb{C}$ takvi da je $A^2 - aA + bI_2 = 0_2$. Ako $A \notin \{\alpha I_2 : \alpha \in \mathbb{C}\}$, tada je* $\operatorname{tr}(A) = a$ *i* $\det(A) = b$.

Dokaz. Koristeći Hamilton–Cayleyev teorem 1.2.3 imamo:

$$A^2 - aA + bI_2 = 0_2,$$

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2.$$

Slijedi da je $[a - \operatorname{tr}(A)]A = (b - \det(A))I_2$.

Ako je $a - \operatorname{tr}(A) \neq 0$, tada imamo

$$A = \frac{b - \det(A)}{a - \operatorname{tr}(A)} I_2,$$

što je u kontradikciji sa $A \notin \{\alpha I_2 : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Stoga je $a - \operatorname{tr}(A) = 0$. Tada je $b - \det(A) = 0$. Time je teorem dokazan. □

Napomena 1.4.2. *Spomenimo još da postoje matrice* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *takve da je* $A^2 - aA + bI_2 = 0_2$ *čiji je* $\mathrm{tr}(A) \neq a$ *i* $\det(A) \neq b$*. Da bismo to pokazali promatrat ćemo matricu* $A = \alpha I_2$*, gdje* $\alpha \in \mathbb{C}$ *zadovoljava jednadžbu* $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$*. Tada je* $A^2 - aA + bI_2 = 0_2$, $\mathrm{tr}(A) = 2\alpha$ *i* $\det(A) = \alpha^2$*. Ako su* a *i* b *takvi da je* $a^2 - 4b \neq 0$ *i* $b \neq 0$*, imamo da je* $\mathrm{tr}(A) \neq a$ *i* $\det(A) \neq b$*. (Naime, iz* $\mathrm{tr}(A) = a$ *slijedilo bi* $2\alpha = a$ *i stoga* $\alpha^2 - 2\alpha^2 + b = 0$ *tj.* $b = \alpha^2$ *što je u suprotnosti s pretpostavkom* $a^2 - 4b \neq 0$*. Ako bi vrijedilo* $\det(A) = b$ *tj.* $\alpha^2 = b$*, imali bismo* $b - \alpha a + b = 0$ *odnosno* $\alpha a = 2b$*. Tada bi slijedilo* $\alpha^2 a^2 = 4b^2$ *tj.* $ba^2 = 4b^2$ *pa bi se dijeljenjem ove jednakosti s* b *ponovo dobilo* $a^2 = 4b$ *što je u suprotnosti s pretpstavkom.)*

Primjer 1.4.3. *Neka su* $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *takvi da je* $a^2 - 4b < 0$*. Pokazati da ne postoji matrica* $A = (a_{ij})$ *reda* 2 *s elementima* $a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i, j = 1, 2$*, koja zadovoljava jednadžbu* $A^2 - aA + bI_2 = 0_2$*.*

Rješenje. Da bismo dokazali tvrdnju koristit ćemo teorem 1.4.1. Pretpostavimo suprotno, neka $A = (a_{ij})$ zadovoljava jednadžbu $A^2 - aA + bI_2 = 0_2$. Razlikujemo dva slučaja.

(i) Ako je $A = \alpha I_2$, onda je $a_{11} = a_{22} = \alpha$ i $a_{12} = a_{21} = 0$ te je prema pretpostavci α rješenje jednadžbe $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$. Kako je diskriminante ove jednadžbe $a^2 - 4b < 0$, jednadžba nema realnih rješenja pa stoga $a_{11}, a_{22} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prema tome, A ne može biti skalarna matrica s elementima $a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i, j = 1, 2$.

(ii) Ako A nije skalarna matrica, onda prema teoremu 1.4.1 vrijedi $\mathrm{tr}(A) = a$ i $\det(A) = b$. Tada je $a_{11} + a_{22} = a$ i $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = b$. Stoga je

$$0 > a^2 - 4b = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

pa ne postoje $a_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i, j = 1, 2$, koji zadovoljavaju tu nejednakost.

1.5 Karakterističan polinom matrica XY i YX

U ovom dijelu dokazujemo dva temeljna rezultata u matričnoj teoriji koja se odnose na karakteristične polinome matrica XY i YX.

Teorem 1.5.1. *Ako su* $X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ *, tada matrice* XY *i* YX *imaju iste karakteristične polinome, tj.* $k_{XY} = k_{YX}$*.*

Dokaz. Kako je $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ i $\det(XY) = \det(YX)$, vrijedi

$$k_{XY}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(XY)\lambda + \det(XY) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(YX)\lambda + \det(YX) = k_{YX}(\lambda).$$

□

Uočimo da teorem 1.5.1 povlači da je

$$\det(XY - \lambda I_2) = \det(YX - \lambda I_2) \quad \forall X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

pa matrice XY i YX imaju isti spektar.

Teorem 1.5.2. *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i vrijedi*

$$\det(XY - A) = \det(YX - A), \quad \forall X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}),$$

tada postoji $a \in \mathbb{C}$ takav da je $A = aI_2$.

Dokaz. Neka je $E_{i,j}$ matrica koja na (i, j) mjestu ima 1 a na ostalim mjestima ima 0, te neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Ako je $X = E_{1,2}$ i $Y = E_{2,2}$, tada je $XY = E_{1,2}, YX = 0_2$, te jednakost iz pretpostavke teorema glasi

$$\det\begin{pmatrix} -a & 1-b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

odakle slijedi da je $c = 0$.

Ako je $X = E_{2,1}, Y = E_{1,1}$, tada je $XY = E_{2,1}$ i $YX = 0_2$. U tom slučaju jednakost iz pretpostavke teorema poprima oblik

$$\det\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1-c & -d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

odakle slijedi da je $b = 0$. Prema tome, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Ako je $X = E_{1,2}$, $Y = E_{2,1}$ dobivamo da je $XY = E_{1,1}$ i $YX = E_{2,2}$. Tada iz

$$\det\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1-d \end{pmatrix},$$

slijedi da je $a = d$. Stoga je $A = aI_2$. Time je teorem u potpunosti dokazan. □

Korolar 1.5.3. *Ako su A i $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ dvije regularne matrice takve da je*

$$\det(XAY + B) = \det(YBX + A), \quad \forall X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}), \tag{1.9}$$

tada postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $A^2 = B^2 = aI_2$.

Dokaz. Ako je $Y = 0_2$ dobivamo da je $\det(A) = \det(B)$.

Ako je $Y = I_2$, tada dobivamo da je

$$\det(XA + B) = \det(BX + A), \quad \forall X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}).$$

Sada lijevu stranu gornje jednakosti množimo slijeva s $\det(B)$, te desnu stranu iste jednakosti množimo zdesna s $\det(A)$, i dobivamo jednakost

$$\det(BXA + B^2) = \det(BXA + A^2), \quad \forall X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}). \tag{1.10}$$

Budući da su matrice A i B regularne, funkcija $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ definirana kao $f(X) = BXA$ je surjektivna i stoga (1.10) možemo zapisati kao

$$\det(Z + B^2) = \det(Z + A^2), \quad \forall Z \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}). \tag{1.11}$$

Uzimamo da je Z u (1.11) jednako $0_2, E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}$ redom. Dobivamo da je $B^2 = A^2$. Sada pomnožimo lijevu stranu jednakosti (1.9) slijeva sa $\det(B)$, te desnu stranu iste te jednakosti pomnožimo zdesna sa $\det(A)$. Dobivamo

$$\det(BXAY + B^2) = \det(YBXA + A^2), \quad \forall X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$$

odnosno

$$\det(X_1Y_1 + C) = \det(Y_1X_1 + C), \quad \forall X_1, Y_1 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}),$$

gdje je $C = A^2 = B^2$. Po teoremu 1.5.2 slijedi da postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $C = aI_2$. Potrebno je još uvrstiti $A^2 = B^2 = aI_2$, te će time korolar biti u potpunosti dokazan. □

1.6 Jordanova kanonska forma

Teorem 1.6.1. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ili je $A = \alpha I_2$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

(b) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ i $A \neq \lambda I_2$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Dokaz. (a) Ako je $A = \alpha I_2$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, onda je $P = I_2$. Stoga pretpostavimo da su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ svojstvene vrijednosti matrice A. Postoji svojstveni vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tako da je $Ax = \lambda_1 x$ i svojstveni vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tako da je $Ay = \lambda_2 y$.

Vidimo sada da je $y \neq \alpha x$ za sve $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tj. svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 nisu linearno zavisni. Naime, kada bi bilo $y = \alpha x$ za neki $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, imali bismo da je $Ay = \alpha Ax$, iz čega bi slijedilo da je $\lambda_2 y = \alpha\lambda_1 x$. Odavde bismo dobili $\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)x = 0$, a kako je $x \neq 0$ slijedilo bi $\lambda_1 = \lambda_2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da su svojstvene vrijednosti različite. Dakle, svojstveni vektori x i y nisu linearno zavisni iz čega slijedi da je matrica $P = (x\,|\,y)$ regularna.

Jednakosti $Ax = \lambda_1 x$ i $Ay = \lambda_2 y$ mogu se napisati i kao $A(x\,|\,y) = (\lambda_1 x\,|\,\lambda_2 y)$ odnosno

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = PJ_AP^{-1} \quad \text{gdje je} \quad J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

U (b) dijelu teorema razmatramo slučaj kada su svojstvene vrijednosti jednake, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ i $A \neq \lambda I_2$. Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Svojstvene vrijednosti matrice A su nultočke kvadratne jednadžbe $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$, a budući da su one jednake vrijedi $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$ odnosno

$$(a-d)^2 + 4bc = 0. \tag{1.12}$$

Kako je $a + d = \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda$, slijedi $\lambda = \frac{1}{2}(a+d)$. Tada je

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Kako je $A - \lambda I_2 \neq 0_2$ singularna matrica reda 2, rang matrice $A - \lambda I_2$ iznosi 1. Označimo s $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Pokazat ćemo da tada postoji vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ takav da vrijedi $Ay = \lambda y + x$, tj. $(A - \lambda I_2)y = x$. Takav y će postojati ako je rang matrice $A - \lambda I_2$ jednak rangu proširene matrice $(A - \lambda I_2 \,\vdots\, x)$, dakle ako je rang matrice

$$(A - \lambda I_2 \,\vdots\, x) = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b & x_1 \\ c & \frac{d-a}{2} & x_2 \end{pmatrix}$$

jednak 1. Iz $(A - \lambda I_2)x = 0$ imamo

$$\frac{a-d}{2}x_1 + bx_2 = 0, \quad cx_1 + \frac{d-a}{2}x_2 = 0. \tag{1.14}$$

Pretpostavimo najprije da je $a = d$. Tada iz (1.12) slijedi $bc = 0$ pa je $b = 0$ ili $c = 0$. Također, $\lambda = a$, a iz (1.14) slijedi da je $bx_2 = cx_1 = 0$. Kako je $A \neq \lambda I_2$, mora biti $c \neq 0$ ili $b \neq 0$. Ako je $c \neq 0$ onda je $x_1 = 0$, a ako je $b \neq 0$ onda je $x_2 = 0$. Stoga je

$$(A - \lambda I_2 \vdots x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad (A - \lambda I_2 \vdots x) = \begin{pmatrix} 0 & b & x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, rang matrice $(A - \lambda I_2 \vdots x)$ iznosi 1.

Razmotrimo sada slučaj $a \neq d$. Kako je $A - \lambda I_2$ matrica ranga 1, iz (1.13) slijedi da postoji $t \in \mathbb{C}$ takav da je

$$b = t\frac{a-d}{2}, \quad \frac{d-a}{2} = tc. \tag{1.15}$$

Tada iz (1.14) i (1.15) slijedi da je $x = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$ svojstveni vektor matrice A te

$$(A - \lambda I_2 \vdots x) = \begin{pmatrix} -tc & -t^2c & -t \\ c & tc & 1 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, i u ovom slučaju rang matrice $(A - \lambda I_2 \vdots x)$ iznosi 1.

Time smo pokazali da postoji vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ takav da vrijedi $Ay = \lambda y + x$. Neka je $P = (x \,|\, y)$. Tada imamo

$$AP = A(x \,|\, y) = (Ax \,|\, Ay) = (\lambda x \,|\, \lambda y + x)$$

odnosno

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = PJ_AP^{-1}, \quad \text{gdje je} \quad J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Time je teorem dokazan. □

Matrice $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ odnosno $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ iz teorema 1.6.1 zovemo *Jordanovom kanonskom formom* matrice A.

Korolar 1.6.2. *(Jordanova kanonska forma specijalnih matrica)*

(a) *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotentna matrica, $A \neq 0_2$, onda je*

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

gdje je P neka regularna matrica.

(b) *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ idempotentna matrica, onda je $A = 0_2$, $A = I_2$ ili*

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

gdje je P neka regularna matrica.

(c) *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ involutorna matrica, onda je $A = \pm I_2$ ili*

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1},$$

gdje je P neka regularna matrica.

(d) *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ anti-involutorna matrica, onda je $A = \pm iI_2$ ili*

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

gdje je P neka regularna matrica.

Dokaz. (a) Za matricu A postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $A^n = 0$. Obje svojstvene vrijednosti matrice A su jednake nuli. Naime, ako je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, onda je $0 = A^n x = \lambda^n x$ pa je $\lambda = 0$. Tada tvrdnja (a) slijedi prema teoremu 1.6.1(b).

(b) Neka je $A^2 = A$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Tada je $\lambda^2 x = A^2 x = Ax = \lambda x$ pa je $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$ odakle slijedi $\lambda^2 - \lambda = 0$. Dakle, $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$. To pokazuje da su ili obje svojstvene vrijednosti od A jednake 0, ili su obje svojstvene vrijednosti jednake 1, ili je jedna svojstvena vrijednost jednaka 0 a druga 1.

Ako su obje svojstvene vrijednosti od A jednake nuli, te ako pretpostavimo da je $A \neq 0$, tada prema teoremu 1.6.1(b) vrijedi $A = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ za neku regularnu matricu P, pa je $A^2 = 0$ i stoga je $A = 0$. Prema tome, u slučaju da su obje svojstvene vrijednosti nule, mora biti $A = 0$.

Ako su obje svojstvene vrijednosti od A jednake 1, te ako pretpostavimo da je $A \neq I_2$, tada prema teoremu 1.6.1(b) vrijedi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$, pa je $A^2 = P\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ za neku regularnu matricu P, što je nemoguće jer je $A^2 = A$. Prema tome, u slučaju da su obje svojtvene vrijednosti jednake 1, mora biti $A = I_2$.

Ako je jedna svojstvena vrijednost jednaka 0 a druga 1, tada po teoremu 1.6.1(a) vrijedi $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ za neku regularnu matricu P. Time je tvrdnja (b) dokazana.

(c) Neka je $A^2 = I_2$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Tada je $\lambda^2 x = A^2 x = x$ pa je $(\lambda^2 - 1)x = 0$ odakle slijedi $\lambda^2 = 1$. Dakle, $\lambda = 1$ ili

$\lambda = -1$. To pokazuje da su ili obje svojstvene vrijednosti od A jednake 1, ili su obje svojstvene vrijednosti jednake -1, ili je jedna svojstvena vrijednost jednaka 1 a druga -1. Sada se sličnim rezoniranjem kao u dokazu tvrdnje (b) pokaže da prema teoremu 1.6.1 vrijedi $A = \pm I_2$ ili $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$, za neku regularnu matricu P.

(d) Neka je $A^2 = -I_2$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $Ax = \lambda x$ za neki vektor $x \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$. Tada je $\lambda^2 x = A^2 x = -x$ pa je $(\lambda^2 + 1)x = 0$ odakle slijedi $\lambda^2 + 1 = 0$. Dakle, $\lambda = i$ ili $\lambda = -i$. To pokazuje da su ili obje svojstvene vrijednosti od A jednake i, ili su obje svojstvene vrijednosti jednake $-i$, ili je jedna svojstvena vrijednost jednaka i a druga $-i$. Ponovo se sličnim rezoniranjem kao u dokazu tvrdnje (b) pokaže da prema teoremu 1.6.1 vrijedi $A = \pm iI_2$ ili $A = \tilde{P}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$, za neku regularnu matricu $\tilde{P}$. Stavimo $P = \frac{1}{2}\tilde{P}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$. Tada je P regularna matrica i vrijedi $A = P\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$. □

U sljedećem teoremu ćemo razmotriti realnu kanonsku formu matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Teorem 1.6.3. *(Realna kanonska forma realne matrice)*
Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ i neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ili ako je $A = \alpha I_2$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tako da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

(b) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ i $A \neq \lambda I_2$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tako da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}.$$

(c) *Ako je $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ takva da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Dokaz. Dokaz (a) i (b) dijela teorema provodi se slično kao dokaz teorema 1.6.1.

(c) dio teorema ćemo dokazati. U ovom slučaju prema teoremu 1.6.1(a) Jordanova kanonska forma matrice A glasi

$$J_A = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

Ako je $Az = \lambda_1 z$, $z \neq 0$, tada je $A\overline{z} = \overline{\lambda_1 z} = \lambda_2 \overline{z}$. Regularna matrica $P_{\mathbb{C}}$ za koju vrijedi $A = P_{\mathbb{C}} J_A P_{\mathbb{C}}^{-1}$ je oblika $P_{\mathbb{C}} = (z \,|\, \overline{z})$.

Ako je $z = x + iy$ gdje su x i y realni vektori, tada imamo

$$Az = \lambda_1 z \quad \Leftrightarrow \quad A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy),$$

te dobivamo jednakosti $Ax = \alpha x - \beta y$ i $Ay = \beta x + \alpha y$. Uočimo da su x i y linearno nezavisni vektori. Naime, kada bi bilo $y = tx$ za neki $t \in \mathbb{R}$, imali bismo $z = x + iy = (1 + ti)x$ i $\overline{z} = (1 - ti)x$ pa bi stoga z i $\overline{z}$ bili linearno zavisni vektori, što nisu budući da je matrica $P_{\mathbb{C}}$ regularna. Sada definiramo matricu P kao $P = (x \,|\, y)$ koja je zbog linearne nezavisnosti vektora x i y također regularna. Tako dobivamo

$$AP = A(x \,|\, y) = (Ax \,|\, Ay) = (\alpha x - \beta y \,|\, \beta x + \alpha y) = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

odnosno $A = P J_A^{\mathbb{R}} P^{-1}$, gdje je

$$J_A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Time je teorem dokazan. □

Matrice $J_A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $J_A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, odnosno $J_A^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ iz teorema 1.6.3 zovemo *realnom Jordanovom kanonskom formom* matrice A.

U sljedećem teoremu dajemo racionalnu kanonsku formu matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$.

Teorem 1.6.4. *(Racionalna kanonska forma racionalne matrice)*
Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ i neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

(a) *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, ili ako je $A = \alpha I_2$ za neki $\alpha \in \mathbb{Q}$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ tako da je*

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(b) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{Q}$ i $A \neq \lambda I_2$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ tako da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(c) *Ako je $\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\beta}$ i $\lambda_2 = \alpha - \sqrt{\beta}$, gdje je $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ te $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, tada postoji regularna matrica $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ takva da je*

$$A = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dokaz. (a) i (b) dio teorema dokazujemo analogno kao teorem 1.6.1.

(c) dio teorema ćemo sada dokazati. Prema teoremu 1.6.1(a) Jordanova kanonska forma za matricu A glasi

$$J_A = \begin{pmatrix} \alpha + \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & \alpha - \sqrt{\beta} \end{pmatrix}.$$

Neka je $z \neq 0$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\beta}$, tj. neka vrijedi $Az = \lambda_1 z$. Tada je $z = x + \sqrt{\beta}y$ za neke racionalne vektore x i y. Računanjem dobivamo da iz $A(x + \sqrt{\beta}y) = (\alpha + \sqrt{\beta})(x + \sqrt{\beta}y)$ slijedi

$$Ax = \alpha x + \beta y \quad \text{i} \quad Ay = x + \alpha y.$$

To sada povlači da je $A(x - \sqrt{\beta}y) = (\alpha - \sqrt{\beta})(x - \sqrt{\beta}y)$, tj. $Az' = \lambda_2 z'$, gdje je $z' = x - \sqrt{\beta}y$. Regularna matrice $P_{\mathbb{C}}$ za koju vrijedi $A = P_{\mathbb{C}} J_A P_{\mathbb{C}}^{-1}$ je dana s $P_{\mathbb{C}} = (z \,|\, z')$. Neka je $P = (x \,|\, y) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$. Tada je P regularna matrica, budući da su vektori x i y linearno nezavisni. Zaista, kada bi bilo $y = tx$ za neki $t \in \mathbb{Q}$, vrijedilo bi $z = (1 + \sqrt{\beta}t)x$ i $z' = (1 - \sqrt{\beta}t)x$ pa bi z i z' bili linearno zavisni vektori i stoga bi $P_{\mathbb{C}}$ bila singularna matrica, što nije istina. Imamo

$$AP = (Ax \,|\, Ay) = (\alpha x + \beta y \,|\, x + \alpha y) = (x \,|\, y)\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

tj. $A = PJ_A^{\mathbb{Q}}P^{-1}$, gdje je

$$J_A^{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. □

Matrice $J_A^{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $J_A^{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, odnosno $J_A^{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ iz teorema 1.6.4 zovemo *racionalnom Jordanovom kanonskom formom* matrice A.

Poglavlje 2

Primjene Hamilton–Cayleyevog teorema

2.1 n-ta potencija kvadratnih matrica reda 2

U ovoj točki dokazat ćemo teorem koji govori o računanju n-te potencije matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ u terminima njezinih elemenata i svojstvenih vrijednosti. U tu svrhu potrebno je uvesti pojam linearne homogene rekurzivne relacije drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Definicija 2.1.1. *Linearna homogena rekurzivna relacija drugog reda s konstantnim koeficijentima za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ realnih ili kompleksnih brojeva je oblika*

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, \quad n \geq 2, \tag{2.1}$$

gdje su a_0 i a_1 poznate vrijednosti, a p i $q \neq 0$ dane konstante.

Rekurzivnoj relaciji (2.1) pridružuje se *karakteristična jednadžba* oblika

$$\lambda^2 = p\lambda + q. \tag{2.2}$$

Jednadžba (2.2) je reda 2 pa ima dva kompleksna rješenja, koja ćemo označiti s λ_1 i λ_2. Eksplicitne formule za opći član niza $(a_n)_{n\geq 0}$ koji je zadan rekurzivno relacijom (2.1) određuju se pomoću rješenja λ_1 i λ_2 karakteristične jednadžbe (2.2). O tome govori sljedeći rezulat, koji ovdje samo navodimo, a dokaz se može naći u npr. [3].

Teorem 2.1.2. *Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz zadan rekurzivnom relacijom*

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

gdje su a_0 i a_1 poznate vrijednosti, a p i $q \neq 0$ dane konstante. Neka su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe $\lambda^2 = p\lambda + q$.

(i) *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada postoje konstante α i β takve da vrijedi*

$$a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \quad n \geq 1.$$

(ii) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada postoje konstante α i β takve da vrijedi*

$$a_n = (\alpha + \beta n)\lambda_1^n, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema nalazi se u knjizi Diskretna matematika, [**?**]. □

Teorem 2.1.3. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A.*

(a) *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_2^n C$, gdje su*

$$B = \frac{A - \lambda_2 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{i} \quad C = \frac{A - \lambda_1 I_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(b) *Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $A^n = \lambda^n B + n\lambda^{n-1}C$, gdje su*

$$B = I_2 \quad \text{i} \quad C = A - \lambda I_2.$$

Dokaz. (1) Razmotrimo najprije slučaj $\det(A) = 0$. Tada prema propoziciji 1.2.5(a) imamo $A^n = [\mathrm{tr}(A)]^{n-1}A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $0 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2$ pa bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $\lambda_1 = 0$. Tada je $\mathrm{tr}(A) = \lambda_2$ pa je $A^n = \lambda_2^{n-1}A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $\lambda_2 \neq 0$ stavimo

$$B = \frac{A - \lambda_2 I_2}{-\lambda_2}, \quad C = \frac{A}{\lambda_2}.$$

Tada je

$$\lambda_1^n B + \lambda_2^n C = \lambda_2 \frac{A}{\lambda_2} = \lambda_2^{n-1}A = A^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

i tvrdnja (a) je dokazana.

Ako je $\lambda_2 = 0$, tada je $\mathrm{tr}(A) = 0$ pa je $A^2 = 0_2$. Stavimo $B = I_2$ i $C = A$ i tvrdnja (b) je dokazana.

(2) Preostaje razmotriti slučaj $\det(A) \neq 0$. Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, te imamo da je

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2, \tag{2.3}$$

gdje je $\mathrm{tr}(A) = a + d$ i $\det(A) = ad - bc$. Množeći jednakost (2.3) sa A^{n-1} dobivamo,

$$A^{n+1} - \mathrm{tr}(A)A^n + \det(A)A^{n-1} = 0_2,$$

iz čega slijedi

$$A^{n+1} = \mathrm{tr}(A)A^n - \det(A)A^{n-1}. \tag{2.4}$$

Neka je $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $n \geq 0$, uz dogovor $A^0 = I_2$. Koristeći jednakost (2.4) dobivamo sljedeće rekurzivne formule:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathrm{tr}(A)a_n - \det(A)a_{n-1}, \\ b_{n+1} &= \mathrm{tr}(A)b_n - \det(A)b_{n-1}, \\ c_{n+1} &= \mathrm{tr}(A)c_n - \det(A)c_{n-1}, \\ d_{n+1} &= \mathrm{tr}(A)d_n - \det(A)d_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Stoga nizovi $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ i $(d_n)_{n\geq 1}$ zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju

$$x_{n+1} = \mathrm{tr}(A)x_n - \det(A)x_{n-1}, \quad n \geq 1$$

koja ima karakterističnu jednadžbu $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$ čija su rješenja svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice A.

Razlikujemo sljedeća dva slučaja.

(i) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, prema teoremu 2.1.2(i) slijedi da je $x_n = \alpha_x\lambda_1^n + \beta_x\lambda_2^n$, gdje su $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{C}$. Dobivamo eksplicitne formule za određivanje elemenata matrice A^n u terminima njezinih svojstvenih vrijednosti:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_a\lambda_1^n + \beta_a\lambda_2^n, \\ b_n &= \alpha_b\lambda_1^n + \beta_b\lambda_2^n, \\ c_n &= \alpha_c\lambda_1^n + \beta_c\lambda_2^n, \\ d_n &= \alpha_d\lambda_1^n + \beta_d\lambda_2^n. \end{aligned}$$

To podrazumijeva postojanje matrica $B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_b \\ \alpha_c & \alpha_d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta_a & \beta_b \\ \beta_c & \beta_d \end{pmatrix},$$

tako da je $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_2^n C$ za svaki $n \geq 0$. Posebno, za $n = 0$ i $n = 1$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} I_2 = B + C \\ A = \lambda_1 B + \lambda_2 C \end{cases}$$

odakle se dobije

$$B = \frac{A - \lambda_2 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{i} \quad C = \frac{A - \lambda_1 I_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

(ii) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, po teoremu 2.1.2(ii) slijedi da je $x_n = \alpha_x\lambda^n + \beta_x n\lambda^n$, gdje je $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{C}$. Dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_a\lambda^n + \beta_a n\lambda^n, \\ b_n &= \alpha_b\lambda^n + \beta_b n\lambda^n, \\ c_n &= \alpha_c\lambda^n + \beta_c n\lambda^n, \\ d_n &= \alpha_d\lambda^n + \beta_d n\lambda^n. \end{aligned}$$

To podrazumijeva postojanje matrica $B, \tilde{C} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$,

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_a & \alpha_b \\ \alpha_c & \alpha_d \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \beta_a & \beta_b \\ \beta_c & \beta_d \end{pmatrix},$$

tako da je $A^n = \lambda^n B + n\lambda^n\tilde{C}$ za svaki $n \geq 0$. Posebno, za $n = 0$ i $n = 1$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} I_2 = B \\ A = \lambda B + \lambda\tilde{C} \end{cases}$$

odakle se dobije $\lambda\tilde{C} = A - \lambda I_2$. Stavimo $C := \lambda\tilde{C}$. Tada je $C = A - \lambda I_2$ i vrijedi $A^n = \lambda^n B + n\lambda^{n-1}C$ za svaki $n \geq 1$. □

Teorem 2.1.3 se može zapisati u ekvivalentnom obliku, o čemu govori sljedeća napomena.

Napomena 2.1.4. *Ako je $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ te ako su λ_1, λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A, tada je*

$$A^n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}A - \det(A)\dfrac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}I_2, & \text{ako } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ n\lambda^{n-1}A - (n-1)\lambda^n I_2, & \text{ako } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \end{cases}$$

(Naime, ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je prema teoremu 2.1.3

$$\begin{aligned} A^n &= \lambda_1^n B + \lambda_2^n C \\ &= \lambda_1^n\frac{A - \lambda_2 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2^n\frac{A - \lambda_1 I_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}A - \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1})}{\lambda_1 - \lambda_2}I_2 \\ &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}A - \det(A)\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}I_2. \end{aligned}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, onda je

$$\begin{aligned} A^n &= \lambda^n B + n\lambda^{n-1}C \\ &= \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}(A - \lambda I_2) \\ &= n\lambda^{n-1}A - (n-1)\lambda^n I_2. \end{aligned}$$

U sljedećem rezultatu se potencije kvadratne matrice A reda 2 određuju pomoću nizova brojeva zadanih rekurzivno, i to u terminima traga i determinante matrice A. U tu svrhu najprije uvedimo pojam centralizatora matrice A.

Definicija 2.1.5. *Za $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ definiramo skup $C(A)$ svih matrica koje komutiraju s matricom A kao centralizator matrice A;*

$$C(A) = \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ AX = XA\}.$$

Teorem 2.1.6. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i neka je $C(A) = \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ AX = XA\}$.*

(a) *Ako je $A = kI_2$, $k \in \mathbb{C}$, tada je $C(A) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.*

(b) *Ako je $A \neq kI_2$, $k \in \mathbb{C}$, tada je $C(A) = \{\alpha A + \beta I_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.*

Dokaz. (a) Ako je $A = kI_2$, $k \in \mathbb{C}$, nemamo ništa za dokazati budući da sve kvadratne matrice komutiraju s kI_2.

(b) Neka je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i neka je $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Iz jednadžbe $AX = XA$ slijedi

$$\begin{cases} ax + bz = xa + yc \\ ay + bt = xb + yd \\ cx + dz = za + tc \\ cy + dt = zb + td \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} bz = cy \\ y(a-d) = b(x-t) \\ z(a-d) = c(x-t). \end{cases}$$

Ako je $a \neq d$, tada je $y = b\alpha$, $z = c\alpha$, gdje je $\alpha = \dfrac{x-t}{a-d}$. Imamo da je $t = x - \alpha a + \alpha d = \beta + \alpha d$, gdje je $\beta = x - \alpha a$. Sada slijedi

$$X = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta & b\alpha \\ c\alpha & \alpha d + \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2.$$

Ako je $a = d$, tada je $b(x-t) = c(x-t) = 0$. Uočimo da b i c ne mogu istovremeno biti nula jer bi to bilo u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je $A \neq kI_2$. Stoga je $x = t$ te također znamo da je $bz = cy$.

Ako je $b = 0$ onda je $y = 0$ i imamo da je

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2, \quad \text{gdje je} \quad \alpha = \frac{z}{c}, \quad \beta = x - \frac{az}{c}.$$

Ako je $b \neq 0$ imamo da je $z = \dfrac{cy}{b}$ i

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{cy}{b} & x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta I_2, \quad \text{gdje je} \quad \alpha = \frac{y}{b}, \quad \beta = x - \frac{ay}{b}.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. □

Teorem 2.1.7. *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tada postoje nizovi $(x_n)_{n\geq 1}$ i $(y_n)_{n\geq 1}$ tako da je*

$$A^n = x_n A + y_n I_2, \ \ \textit{za svaki} \ \ n \in \mathbb{N},$$

gdje nizovi $(x_n)_{n\geq 1}$ i $(y_n)_{n\geq 1}$ zadovoljavaju sljedeće rekurzivne relacije:

$$x_{n+1} = \mathrm{tr}(A)x_n - \det(A)x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$y_{n+1} = \mathrm{tr}(A)y_n - \det(A)y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Ako je $A = \alpha I_2$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, tada je $A^n = \alpha^n I_2$, $\mathrm{tr}(A) = 2\alpha$, $\det(A) = \alpha^2$, te uzimamo $x_n = 0$ i $y_n = \alpha^n$.

Ako je $A \neq \alpha I_2$ za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$, tada koristeći teorem 2.1.6 imamo, budući da je $A^n A = AA^n$, da je $A^n = x_n A + y_n I_2$, $n \in \mathbb{N}$. Iz $A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}I_2$ i

$$A^{n+1} = A^n A = x_n A^2 + y_n A = x_n[\mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2] + y_n A = [x_n \mathrm{tr}(A) + y_n]A - x_n \det(A) I_2$$

dobivamo da je

$$[x_{n+1} - (x_n \mathrm{tr}(A) + y_n)]A + [y_{n+1} + x_n \det(A)]I_2 = 0_2$$

odakle, budući da A nije skalarna matrica, slijedi

$$x_{n+1} = x_n \mathrm{tr}(A) + y_n, \quad y_{n+1} = -x_n \det(A).$$

Budući da je $y_n = -x_{n-1}\det(A)$ imamo da je $x_{n+1} = x_n \mathrm{tr}(A) - x_{n-1}\det(A)$. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -x_n \det(A) \\ &= -[x_{n-1}\mathrm{tr}(A) + y_{n-1}]\det(A) \\ &= -x_{n-1}\mathrm{tr}(A)\det(A) - y_{n-1}\det(A) \\ &= y_n \mathrm{tr}(A) - y_{n-1}\det(A). \end{aligned}$$

□

Napomena 2.1.8. *Karakteristična jednadžba nizova $(x_n)_{n\geq 1}$ i $(y_n)_{n\geq 1}$ je karakteristična jednadžba matrice A;*

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

čija su rješenja λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A.

- *Ako je* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *tada je*

$$x_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad i \quad y_n = -\det(A)\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad n \geq 1.$$

- *Ako je* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *tada je* $x_n = n\lambda^{n-1}$ *i* $y_n = -(n-1)\lambda^n, \quad n \geq 1.$

2.2 Nizovi definirani pomoću sustava linearnih rekurzivnih relacija

U ovoj točki ćemo prikazati metodu za određivanje općeg člana nizova definiranih pomoću sustava linearnih rekurzivnih relacija.

Teorem 2.2.1. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$$

i neka su $(x_n)_{n\geq 0}$ *i* $(y_n)_{n\geq 0}$ *nizovi definirani pomoću sustava linearnih rekurzivnih relacija*

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n, \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Tada je

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0.$$

Neka su λ_1 *i* λ_2 *svojstvene vrijednosti matrice* A.

(i) *Ako je* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *tada je*

$$\begin{cases} x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ y_n = \gamma\lambda_1^n + \delta\lambda_2^n, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

(ii) *Ako je* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, *tada je*

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n(\alpha + \beta n) \\ y_n = \lambda^n(\gamma + \delta n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

(iii) *Ako je* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, *tada je* $x_n = y_n = 0$ *za* $n \geq 2$.

Dokaz. Sustav (2.5) može biti i ovako zapisan,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0.$$

Slijedi

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0,$$

te se problem rješava računanjem A^n.

Drugi dio teorema dokazuje se koristeći teorem 2.1.3. Naime, ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je prema teoremu 2.1.3 $A^n = \lambda_1^n B + \lambda_2^n C$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, za neke matrice $B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Stavimo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} := C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^n B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda_2^n C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda_1^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \lambda_2^n \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0,$$

tj.

$$\begin{cases} x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ y_n = \gamma\lambda_1^n + \delta\lambda_2^n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, onda je prema teoremu 2.1.3 $A^n = \lambda^n B + n\lambda^{n-1} C$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, za neke matrice $B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Stavimo

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} := \frac{1}{\lambda} C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda^n B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + n\lambda^{n-1} C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + n\lambda^n \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 0,$$

tj.

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n(\alpha + \beta n) \\ y_n = \lambda^n(\gamma + \delta n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tada je prema teoremu 2.1.3(b) $A^2 = 0_2$ pa je $x_n = y_n = 0$ za $n \geq 2$. □

2.3 Binomne matrične jednadžbe

U ovoj točki bavit ćemo se rješavanjem binomnim jednadžbi tipa $X^n = A$, gdje je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i $n \geq 2$ cijeli broj.

Definicija 2.3.1. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i $n \geq 2$ cijeli broj. Jednadžba $X^n = A$, gdje je $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, zove se binomna matrična jednadžba.*

Općenito, za rješavanje binomnih matričnih jednadžbi potrebna su nam neka svojstva koja smo u prethodnim točkama dokazali, a sada ćemo ih nabrojati u sljedećoj lemi.

Lema 2.3.2. *Vrijede sljedeća svojstva.*

(a) *Ako je $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i $\det(X) = 0$, tada je $X^n = [\operatorname{tr}(X)]^{n-1}X,\ n \geq 1$.*

(b) *Ako je $X^n = A$, tada matrice A i X komutiraju, $AX = X^nX = X^{n+1} = XX^n = XA$.*

(c) *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq aI_2$, $a \in \mathbb{C}$, tada matrica X koja komutira s matricom A ima oblik $X = \alpha A + \beta I_2$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

(d) *Ako je $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tada je $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = 0_2$.*

(e) *Ako je $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ i ako postoji $n \geq 2$ tako da je $X^n = 0_2$, tada je $X^2 = 0_2$.*

(f) *Ako su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ međusobno različite, tada postoji regularna matrica P tako da vrijedi*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

U sljedećem rezultatu opisana su rješenja jednadžbe $X^n = A$ uz uvjet $\det(A) = 0$.

Teorem 2.3.3. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je $\det(A) = 0$ i $n \geq 2$ cijeli broj.*

(1) *Ako je $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, tada jednadžba $X^n = A$ ima n rješenja u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ dana s*

$$X_k = \frac{z_k}{\operatorname{tr}(A)}A,$$

gdje su z_k, $k = 1, \ldots, n$, rješenja jednadžbe $z^n = \operatorname{tr}(A)$.

(2) *Ako je $\operatorname{tr}(A) = 0$, tada razlikujemo sljedeće slučajeve.*

(a) *Ako je $A \neq 0_2$, jednadžba $X^n = A$ nema rješenja u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, za $n \geq 2$.*

(b) *Ako je $A = 0_2$, rješenja jednadžbe $X^n = A$ su*

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C},\, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{i} \quad X_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Za $X^n = A$, imamo da je $[\det(X)]^n = \det(A) = 0$ pa je $\det(X) = 0$. Koristeći svojstvo (a) iz leme 2.3.2 slijedi da je $X^n = [\mathrm{tr}(X)]^{n-1}X$. Dobivamo da je

$$[\mathrm{tr}(X)]^{n-1}X = A, \tag{2.6}$$

iz čega slijedi da je $[\mathrm{tr}(X)]^n = \mathrm{tr}(A)$. Sada razlikujemo sljedeće slučajeve.

(1) Ako je $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, tada je $A \neq 0_2$. Koristeći svojstvo (d) iz leme 2.3.2, vidimo da je $A^2 = \mathrm{tr}(A)A \neq 0_2$. Nadalje, jednadžba $[\mathrm{tr}(X)]^n = \mathrm{tr}(A)$ povlači da je $\mathrm{tr}(X) \neq 0$ i $\mathrm{tr}(X) \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, gdje su z_i, $i = 1, \dots, n$, rješenja jednadžbe $z^n = \mathrm{tr}(A)$. Sada je prema (2.6)

$$X = \frac{1}{[\mathrm{tr}(X)]^{n-1}}A = \frac{\mathrm{tr}(X)}{[\mathrm{tr}(X)]^n}A = \frac{\mathrm{tr}(X)}{\mathrm{tr}(A)}A$$

pa su rješenja matrične jednadžbe $X^n = A$ dana s

$$X_k = \frac{z_k}{\mathrm{tr}(A)}A,$$

gdje su z_k, $k = 1, \dots, n$, rješenja jednadžbe $z^n = \mathrm{tr}(A)$.

(2) Ako je $\mathrm{tr}(A) = 0$ tada je, prema svojstvu (d) iz leme 2.3.2, $A^2 = 0_2$, te jednadžba $X^n = A$ povlači $X^{2n} = A^2 = 0_2$. Koristeći svojstvo (e) iz leme 2.3.2 dobivamo da je $X^2 = 0_2$. Ovdje razlikujemo sljedeće slučajeve.

(a) Ako je $A \neq 0_2$ tada, budući da vrijedi $X^2 = 0_2$, jednadžba $X^n = A$ nema rješenja u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, za $n \geq 2$.

(b) Ako je $A = 0_2$, tada jednadžba $X^n = 0_2$ povlači da je $X^2 = 0_2$. Stavimo

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Iz jednadžbe $X^2 = 0_2$ slijedi

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 0. \end{cases}$$

Ako je $a + d \neq 0$ tada je $b = c = 0$, $a^2 = d^2 = 0$, što je u kontradikciji s $a + d \neq 0$. Stoga je $a + d = 0$ pa dobivamo da je $d = -a$.

Promatrajući jednadžbu $a^2 + bc = 0$ slijedi da ako je $b \neq 0$ tada je

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Ako je $b = 0$ tada je

$$X_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Osim toga, jasno je da za matrice $X_{a,b}$ i X_c vrijedi $X_{a,b}^2 = X_c^2 = 0_2$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

□

Korolar 2.3.4. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq 0_2$, i neka je* $\det(A) = 0$. *Tada jednadžba $X^n = A$, $n \geq 2$, ima rješenje u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ ako i samo ako je $A^2 \neq 0_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $A^2 \neq 0_2$. Budući da je

$$0_2 = A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = A^2 - \operatorname{tr}(A)A,$$

slijedi $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ pa je stoga $\operatorname{tr}(A) \neq 0$. Tada prema tvrdnji (1) teorema 2.3.3 jednadžba $X^n = A$ ima n rješenja u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Obratno, pretpostavimo da jednadžba $X^n = A$, $n \geq 2$, ima rješenje u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Tada je $[\det(X)]^n = \det(X^n) = \det(A) = 0$ pa je $\det(X) = 0$. Iz $X^2 - \operatorname{tr}(X)X + \det(X)I_2 = 0$ slijedi $X^2 = \operatorname{tr}(X)X$ pa je $X^n = [\operatorname{tr}(X)]^{n-1}X$ tj. $A = [\operatorname{tr}(X)]^{n-1}X$. Pretpostavimo da je $A^2 = 0_2$. Tada je $0_2 = A^2 = [\operatorname{tr}(X)]^{2n-2}X^2$ odakle slijedi $\operatorname{tr}(X) = 0$ ili $X^2 = 0_2$. Ako je $X^2 = 0_2$ tada je $\operatorname{tr}(X)X = 0_2$ pa slijedi $\operatorname{tr}(X) = 0$. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom $A \neq 0_2$. Stoga mora biti $A^2 \neq 0_2$. □

Primjer 2.3.5. *Riješiti jednadžbu* $X^4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rješenje. Neka je $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tada znamo da je $\det(A) = 0$, $\operatorname{tr}(A) = 1$. Rješenja jednadžbe $z^4 = 1$ su $\{1, -1, i, -i\}$. Prema teoremu 2.3.3(1), rješenja jednadžbe $X^4 = A$ su matrice $\pm A, \pm iA$.

Primjer 2.3.6. *Dokazati da jednadžba* $X^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *nema rješenja za $n \geq 2$.*

Rješenje. Kvadriranjem obiju strana dane jednadžbe dobivamo $X^{2n} = 0_2$ odakle prema svojstvu (e) iz leme 2.3.2 slijedi $X^2 = 0_2$ pa je $X^n = 0_2$ za svaki $n \geq 2$. Međutim, to je nemoguće jer je

$$X^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.3.7. *Odrediti matrice* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, *gdje su* $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ *prosti brojevi, tako da je* $X^2 = 0_2$.

Rješenje. Kao i u dokazu tvrdnje (2)(b) iz teorema 2.3.3, pokaže se da je opće rješenje jednadžbe $X^2 = 0_2$ oblika

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix},$$

te pošto je $\dfrac{a^2}{b}$ prost broj, slijedi da je $a = b$. Rješenja naše jednadžbe su

$$X = \begin{pmatrix} p & p \\ -p & -p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

gdje je p prost broj.

Sljedeći rezultat opisuje rješenja jednadžbe $X^n = A$, gdja je $A \neq 0_2$ skalarna matrica.

Teorem 2.3.8. *Neka je* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *i neka je* $n \geq 2$ *cijeli broj. Rješenja jednadžbe* $X^n = aI_2$ *su*

$$X = P \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix} P^{-1},$$

gdje je P *bilo koja regularna matrica i* a_i, $i = 1, \ldots, n$, *su rješenja jednadžbe* $z^n = a$.

Dokaz. Ako je $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ rješenje jednadžbe $X^n = aI_2$, tada je matrica $X_P = P^{-1}XP$ također rješenje, gdje je P bilo koja regularna matrica. Zaista,

$$X_p^n = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) \cdots (P^{-1}XP) = P^{-1}X^nP = P^{-1}(aI_2)P = aI_2.$$

Razlikovat ćemo sada slučajeve kada su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice X jednake i kada su međusobno različite.

- Ako su svojstvene vrijednosti matrice X međusobno različite, koristeći lemu 2.3.2(f) imamo

$$X_P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

te matrična jednadžba glasi
$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$
Slijedi da su $\lambda_1, \lambda_2 \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, gdje su a_i, $i = 1, \dots, n$, rješenja jednadžbe $z^n = a$. Dakle, rješenja matrične jednadžbe $X^n = aI_2$ su oblika
$$X = P \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix} P^{-1},$$
gdje su $a_i \neq a_j$ proizvoljna rješenja jednadžbe $z^n = a$, a P je proizvoljna regularna matrica.

- Ako su svojstvene vrijednosti matrice X jednake, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tada se dokaz bazira na svojstvu (d) iz leme 2.3.2. Naime, tada je $\mathrm{tr}(X) = 2\lambda$, $\det(X) = \lambda^2$ pa je
$$0_2 = X^2 - \mathrm{tr}(X)X + \det(X)I_2 = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2 I_2 = (X - \lambda I_2)^2 = 0_2.$$
Ako je $Y = X - \lambda I_2$, tada je $X = \lambda I_2 + Y$ i $Y^2 = 0_2$. Induktivno se pokaže da je $X^k = \lambda^k I_2 + k\lambda^{k-1} Y$ za svaki $k \geq 2$ te jednadžba $X^n = aI_2$ postaje $\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1} Y = aI_2$ iz čega slijedi da je $n\lambda^{n-1} Y = (a - \lambda^n) I_2$. Budući da je $a \neq 0$ dobivamo da je $\lambda \neq 0$. Tada je $Y = \dfrac{a - \lambda^n}{n\lambda^{n-1}} I_2$ te kombinirajući s $Y^2 = 0_2$ dobivamo da je $a = \lambda^n$, te da je $Y = 0_2$. Stoga je $X = a_i I_2$, gdje su a_i, $i = 1, \dots, n$, rješenja jednadžbe $\lambda^n = a$.

Zaključujemo da su rješenja jednadžbe $X^n = aI_2$ oblika
$$X = P \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix} P^{-1},$$
gdje su a_i, a_j proizvoljna rješenja jednadžbe $z^n = a$ i P bilo koja regularna matrica. □

Uz određene uvjete n-ti korijen dijagonalne matrice su dijagonalne matrice, što pokazuje sljedeći rezultat.

Lema 2.3.9. *(n-ti korijen specijalnih dijagonalnih matrica)*
Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$, te neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Rješenja jednadžbe $X^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ su $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, gdje su $a, d \in \mathbb{C}$, te je $a \neq d$, $a^n = \alpha$ i $d^n = \beta$.

Dokaz. Neka je $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ tako da je $X^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Budući da matrica X komutira s $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ imamo da je $(\alpha - \beta)b = 0$ i $(\alpha - \beta)c = 0$. Budući da je $\alpha \neq \beta$, mora biti

$b = c = 0$. Slijedi

$$X^n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Time je lema dokazana. □

Teorem 2.3.10. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ matrica s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2. Rješenja jednadžbe $X^n = A$ su*

$$X = P_A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

gdje je P_A regularna matrica za koju vrijedi $P_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ i $\alpha^n = \lambda_1, \beta^n = \lambda_2$.

Dokaz. Prema svojstvu (f) iz leme 2.3.2 postoji regularna matrica P_A za koju vrijedi

$$P_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$(P_A^{-1} X P_A)^n = P_A^{-1} X^n P_A = P_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Koristeći lemu 2.3.9 slijedi da je $P_A^{-1} X P_A$ dijagonalna matrica, tj.

$$P_A^{-1} X P_A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Sada slijedi

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Iz posljednje jednakosti matrica slijedi da je $\alpha^n = \lambda_1$ i $\beta^n = \lambda_2$. Stoga su rješenja dane jednadžbe matrice

$$X = P_A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

gdje je P_A regularna matrica za koju vrijedi $P_A^{-1} A P_A = J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ i $\alpha^n = \lambda_1, \beta^n = \lambda_2$. Time je teorem dokazan. □

Korolar 2.3.11. *(n-ti korijen anti-dijagonalne matrice)*
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $ab > 0$, te neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Rješenja, u $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, jednadžbe

$$X^n = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

su

$$X_{k,j} = \frac{\sqrt[2n]{ab}}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_k + \mu_j & \dfrac{a}{\sqrt{ab}}(\epsilon_k - \mu_j) \\ \dfrac{\sqrt{ab}}{a}(\epsilon_k - \mu_j) & \epsilon_k + \mu_j \end{pmatrix},$$

gdje su $\epsilon_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $k = 0, \dots, n-1$, n-ti korijeni iz jedinice, a $\mu_j = e^{\frac{(2j+1)\pi}{n}i}$, $j = 0, \dots, n-1$, n-ti korijeni broja -1.

Dokaz. Matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ima dvije međusobno različite svojstvene vrijednosti; to su $\lambda_1 = \sqrt{ab}$ i $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$. Neka je x svojstveni vektor matrice A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\sqrt{ab}$, a y svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $-\sqrt{ab}$. Tada se iz $Ax = \sqrt{ab}x$ i $Ay = -\sqrt{ab}y$ dobije $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{a} \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{ab}} \\ 1 \end{pmatrix}$. Prema teoremu 2.3.10, rješenja jednadžbe $X^n = A$ su

$$X = P_A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

gdje je P_A regularna matrica za koju vrijedi $P_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & 0 \\ 0 & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}$ i $\alpha^n = \sqrt{ab}$, $\beta^n = -\sqrt{ab}$. Pritom je P_A matrica čiji su stupci svojstveni vektori x i y matrice A, (v. dokaz teorema 1.6.1(a)) tj. $P_A = (x \,|\, y)$ odnosno

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{\sqrt{ab}} \\ \dfrac{\sqrt{ab}}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Odavde slijedi

$$X = P_A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \dfrac{a}{\sqrt{ab}}(\alpha - \beta) \\ \dfrac{\sqrt{ab}}{a}(\alpha - \beta) & \alpha + \beta \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\alpha^n = \sqrt{ab}$ i $\beta^n = -\sqrt{ab}$, tj.

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt[2n]{ab}}\right)^n = 1, \quad \left(\frac{\beta}{\sqrt[2n]{ab}}\right)^n = -1.$$

Prema tome, kompleksni brojevi α su oblika $\sqrt[2n]{ab}\epsilon_k$, gdje su ϵ_k n-ti korijeni iz jedinice, tj. $\epsilon_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $k = 0, \dots, n-1$, a kompleksni brojevi β su oblika $\sqrt[2n]{ab}\mu_j$, gdje su μ_j n-ti korijeni broja -1, tj. $\mu_j = e^{\frac{(2j+1)\pi}{n}i}$, $j = 0, \dots, n-1$. Time je tvrdnja dokazana. □

Sljedeći rezultat opisuje rješenja jednadžbe $X^n = A$, gdje A nije skalarna matrica.

Teorem 2.3.12. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takva da je $A \neq aI_2$, $a \in \mathbb{C}$, te neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Neka su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ svojstvene vrijednosti matrice A i neka su μ_1 i $\mu_2 \in \mathbb{C}$ fiksni takvi da je $\mu_1^n = \lambda_1$ i $\mu_2^n = \lambda_2$. Rješenja jednadžbe $X^n = A$ su*

$$X = \alpha A + \beta I_2,$$

gdje su

$$\alpha = \frac{\mu_1\epsilon_k - \mu_2\epsilon_p}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{\mu_2\epsilon_p\lambda_1 - \mu_1\epsilon_k\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

a ϵ_k, ϵ_p su n-ti korijeni iz jedinice.

Dokaz. Matrica X za koju vrijedi $X^n = A$ komutira s matricom A. Pošto je $A \neq aI_2$, $a \in \mathbb{C}$, prema svojstvu (c) leme 2.3.2 slijedi da je $X = \alpha A + \beta I_2$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ako su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A, tada su svojstvene vrijednosti matrice X jednake $\alpha\lambda_1 + \beta$ i $\alpha\lambda_2 + \beta$, pa su svojstvene vrijednosti matrice X^n jednake $(\alpha\lambda_1 + \beta)^n$ i $(\alpha\lambda_2 + \beta)^n$. Iz jednadžbe $X^n = A$ slijedi da je $(\alpha\lambda_1 + \beta)^n = \lambda_1$ i $(\alpha\lambda_2 + \beta)^n = \lambda_2$.

Neka je $\mu_1 \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu_1^n = \lambda_1$ i neka je $\mu_2 \in \mathbb{C}$ takav da je $\mu_2^n = \lambda_2$. Tada je

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta = \mu_1\epsilon_k \\ \alpha\lambda_2 + \beta = \mu_2\epsilon_p \end{cases}$$

gdje su ϵ_k i ϵ_p n-ti korijeni iz jedinice. Rješavajući ovaj sustav jednadžbi dobivamo vrijednosti α i β kao u iskazu teorema, čime je tvrdnja dokazana. □

Uz određene uvjete n-ti korijen trokutaste matrice su trokutaste matrice, kao što pokazuje sljedeći rezultat.

Lema 2.3.13. *Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Rješenja jednadžbe $X^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ su*

$$X = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{na^{n-1}} \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

gdje je $a \in \mathbb{C}$ takav da je $a^n = \lambda$.

Dokaz. Neka je $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Budući da matrica X komutira s matricom $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, jednostavnim računom dobivamo da je $a = d$ i $c = 0$. Slijedi da je $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i jednadžba

$$X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

povlači da je $a^n = \lambda$ i $na^{n-1}b = 1$. □

Teorem 2.3.14. *Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ matrica koja ima jednake i različite od nule svojstvene vrijednosti tako da je $A \neq \alpha I_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, te neka je $n \geq 2$ cijeli broj. Rješenja jednadžbe $X^n = A$ su*

$$X = P_A \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{na^{n-1}} \\ 0 & a \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

gdje je P_A regularna matrica za koju je $P_A^{-1} A P_A = J_A$ i $a \in \mathbb{C}$ za koji je $a^n = \lambda$.

Dokaz. Prema teoremu1.6.1(b), imamo

$$A = P_A \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

gdje je $\lambda \neq 0$ svojstvena vrijednost matrice A. Tada je

$$(P_A^{-1} X P_A)^n = P_A^{-1} X^n P_A = P_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Koristeći lemu 2.3.13 slijedi da je

$$P_A^{-1} X P_A = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{na^{n-1}} \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

gdje je $a \in \mathbb{C}$ takav da je $a^n = \lambda$. Time je teorem dokazan. □

Teorem 2.3.15. *(Specijalna kvadratna jednadžba)*
Neka su $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, i neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Kvadratna jednadžba

$$aX^2 + bX + cI_2 = A$$

reducira se na jednadžbu $Y^2 = B$ za neki $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Dokaz. Iz jednadžbe $aX^2 + bX + cI_2 = A$ slijedi

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}I_2 = \frac{1}{a}A \quad \Leftrightarrow \quad \left(X + \frac{b}{2a}I_2\right)^2 = \frac{1}{a}A + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)I_2.$$

Ako su Y i B oblika

$$Y = X + \frac{b}{2a}I_2 \quad \text{i} \quad B = \frac{1}{a}A + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}I_2,$$

jednadžba $aX^2 + bX + cI_2 = A$ se svodi na oblik $Y^2 = B$. □

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2008.

[2] V. Pop, O. Furdui, *Square Matrices od Order 2*, Springer International Publishing AG, 2017.

[3] D. Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, Zagreb 2001.

Sažetak

Tema ovog rada je primjena Hamilton–Cayleyevog teorema na kvadratne matrice reda 2. Ovaj diplomski rad sastoji se od dva poglavlja. Prvo poglavlje bavi se poznatim Hamilton–Cayleyevim teoremom, njegovim obratom, svojstvenim vrijednostima i dijagonalizacijom simetričnih realnih matrica, Jordanovom kanonskom formom kompleksnih, realnih i racionalnih matrica, te Jordanovom kanonskom formom nekih posebnih tipova matrica.

U drugom poglavlju dajemo formule za izračunavanje n-te potencije matrica reda 2, proučavamo nizove definirane pomoću sustava linearnih rekurzivnih relacija, rješavamo binomne matrične jednadžbe $X^n = A$ za matrice drugog reda.

Summary

The topic of this thesis is application of Hamilton–Cayley's theorem to square matrices of order 2. This graduate thesis is composed of two chapters. The first one deals with the celebrated Hamilton–Cayley's theorem, its reciprocal, the eigenvalues and diagonalization of symmetric real matrices, the Jordan canonical form of complex, real and rational matrices, and the Jordan canonical form of some special types of second-order matrices.

In the second chapter we give formulae for the calculation of the nth power of square matrices of order 2, we study sequences defined by systems of linear recurrence relations, we solve binomial matrix equations $X^n = A$ for second-order matrices.

Životopis

Rođena sam 11. listopada 1991. godine u Zagrebu. Odrastala sam u Jablanovcu gdje sam završila osnovnu školu. Srednju školu pohađala sam u Zagrebu. Godine 2010. upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer, a 2014. godine završavam preddiplomski studij. Godine 2015. upisujem na istom fakultetu diplomski studij, smjer nastavnički. Kroz godine studija radila sam u OŠ Ivana Brlić Mažuranić u Brdovcu, te u OŠ Josip Juraj Strossmayer u Zagrebu. Pripremala sam kroz sve godine studija učenike za državnu maturu.