Učenje istraživanjem na primjeru sadržajnog područja geometrije

Pintarić, Monika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Monika Pintarić

UČENJE ISTRAŽIVANJEM NA PRIMJERU SADRŽAJNOG PODRUČJA GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________, predsjednik
2. ______________________, član
3. ______________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ________________________
2. ________________________
3. ________________________

Hvala mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na ukazanom povjerenju, svakom savjetu i pomoći tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Od srca zahvaljujem svojoj obitelji i Mateu na bezuvjetnoj podršci i ljubavi tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Vrlo se često danas, u školstvu Republike Hrvatske, koriste sintagme aktivna nastava, nastava usmjerena na učenika i slično. Očito je da se probudila želja da se preispita tradicionalna nastava koja je u našem školstvu većinom još uvijek najzastupljenija. Tijekom godina, javljalo se nekoliko novih programa i ideja u procesu nastave čiji cilj je bio staviti učenika u prvi plan. U školskoj godini koja slijedi 2018./2019. počinje se s novim eksperimentalnim programom pod nazivom "Škola za život". "U skladu s određenjem Nacionalnoga okvirnog kurikuluma (2011.) i Strategije obrazovanja, znanosti i tehnologije i u svrhu ostvarenja vizije kurikularne reforme naglašena je usmjerenost odgoja i obrazovanja u Republici Hrvatskoj prema razvoju generičkih kompetencija. Kompetencije se određuju kao međusobno povezan sklop znanja, vještina, stajališta i vrijednosti" ([5]). Cjelokupnim kurikularnim i strukturnim promjenama želi se djeci i mladima osigurati korisnije i smislenije obrazovanje u skladu s njihovim interesima; nastavnicima i stručnim suradnicima osigurati jačanje profesionalnosti, veću autonomiju u radu, kreativniji rad i smanjenje administrativnih poslova; roditeljima omogućiti veću uključenost u obrazovanje i napredak njihove djece, a društvu osigurati osnovu za aktivno sudjelovanje mladih u različitim zajednicama i slično ([5]).

Jedan od problema koji se javlja pri pokušaju uvođenja promjena u nastavu jest da je većina nastavnika koji trenutno rade u osnovnim i srednjim školama u svojem studiranju i pripremanju za rad s učenicima bila vođena paradigmom didaktike nastave usmjerene na učitelje, a ne učenike kako bi načela suvremene nastave nalagala ([7]). Prema tome, takvi nastavnici na svojim fakultetima učili su o tome kako nastavnik treba raditi i objasniti učenicima neko gradivo, a prema tome, jedina zadaća učenika je učiti iz nastavnikovih predavanja te gradivo uvježbati. Suvremena nastava diktira upravo obrnuto od toga. Ona ističe nastavu usmjerenu na učenika, na razvijanje njegovih kognitivnih i socijalnih kompetencija i vještina, razvoj kritičkog mišljenja i kreativnosti. Ovo je samo jedan od problema koji prate naše školstvo u okretanju prema nastavi budućnosti. No, takvi problemi nisu nerješivi. Sadašnji nastavnici su nastavnici puni iskustva koje su stekli kroz godine svojeg rada. U novom eksperimentalnom programu moći će iskoristiti to svoje iskustvo kako bi poboljšali nastavu te ostvarili predviđene ciljeve koji će stvarati učenike koji imaju razvijene kompetencije predviđene za dobar život u 21. stoljeću.

O metodici nastave matematike koja obuhvaća suvremena načela i principe počelo se govoriti još prije pola stoljeća kada je čuveni matematičar i jedan od najboljih metodičara i pedagoga George Polya objavio knjigu pod naslovom "Kako riješiti matematički zadatak". Već u to vrijeme, naveo je mnoge metode i načine rješavanja matematičkih problema koji se koriste i danas, kako u nastavi tako i općenito. Kasnije je objavio još jednu knjigu "Matematičko otkriće" koja je izvrstan priručnik, ali i velika zbirka zadataka koju mogu koristiti nastavnici matematike kao inspiraciju za zadatke i njihova postupno raspisana rješenja, ali isto tako i roditelji i srednjoškolci. Unatoč tome što je prošlo dosta godina od kada je G. Polya napisao svoje priručnike koji su u to vrijeme bili puno ispred svojeg vremena, oni su i danas često temelj suvremene nastave matematike.

Iako je nastava matematike još uvijek većinom usmjerena na izvršavanje vrlo opsežnog plana i programa i glavni cilj koji iz toga proizlazi je da učenici usvoje što više gradiva, već je odavno primijećeno da takva nastava ne dovodi do poželjnih rezultata, odnosno učenici ne postižu kompetencije koje bi morali postizati i ne ostvaruju svoj puni potencijal. "Samo usvajanje znanja je niža razina matematičkog obrazovanja. Potrebno je podići kakvoću poučavanja, znanja i sposobnosti, osuvremeniti nastavu matematike" ([6]). Posebno su na meti učenici s višim intelektualnim sposobnostima. Provođenjem samo tradicionalne nastave ne može se svim učenicima omogućiti da stalno napreduju i prelaze na stepenicu više, već takvi učenici nakon što s lakoćom usvoje redovno gradivo, gube interes za učenjem matematike. Isto tako, učenici s nižim intelektualnim sposobnostima ili učenici bez samopouzdanja u provođenju samo tradicionalnog oblika nastave nemaju prilike istraživati, razmišljati niti iskazivati svoje ideje o određenom problemu. Prema tome, odavno je jasno da se nešto mora promijeniti. Novi eksperimentalni program koji se uskoro uvodi u škole, između ostalog, navodi mnoge različite metode i oblike rada kojima bi se nastavnik matematike morao služiti da bi se postigao željeni cilj nastave i razvila matematička kompetencija kod učenika, koja spada među osam osnovnih kompetencija Europskog referentnog okvira za cjeloživotno učenje. Jedan takav oblik učenja upravo je i tema mojeg rada – učenje istraživanjem. U ovom radu opisat ću istraživačku nastavu općenito i u sadržajnom području geometrije. Osvrnut ću se na njezine karakteristike i razjasniti unaprjeđuje li ona zaista shvaćanje matematike kod učenika, posebno geometrije, koja je mnogima najteže shvatljivo područje matematike. Osim toga, u radu ću istaknuti nekoliko geometrijskih problema iz osnovnoškolske i srednjoškolske matematike koji će biti kreirani u obliku istraživačke nastave, pa na taj način mogu poslužiti nastavnicima kao ideja koju mogu iskoristiti na nastavi s ciljem unaprjeđenja nastave te razvoj učeničke kreativnosti, interesa, znanja, vještina i sposobnosti za samostalno rješavanje problema.

1 Što je istraživački usmjerena nastava matematike?

Tijekom prošlog desetljeća niz europskih projekata želio je provesti istraživački usmjerene nastavne aktivnosti na različitim razinama obrazovnog sustava. Veliki dio tih projekata obuhvaćali su između ostalog i matematiku. Budući da je očito da je u prirodnim znanostima istraživački pristup uobičajen, odnosno u prirodoslovlju se često možemo osloniti na iskustva učenika, bilo bi poželjno da se i matematika, koja je učenicima često vrlo mrska, sve više svede na učenička iskustva i samostalno zaključivanje koje će se upravo dobiti uvođenjem i provođenjem istraživačke nastave u matematičkom obrazovanju.

Istraživački usmjerena nastava matematike ili poučavanje temeljeno na istraživanju (engl. *Inquiry based mathematics teaching*) je nastavni pristup koji se temelji na istraživanju, propitivanju i rješavanju matematičkih problema u nastavi. Temeljna ideja takve nastave jest pozvati učenike da rade i istražuju na sličan način kao pravi matematičari. Takvo učenje potiče učenike na razmišljanje čime oni dobivaju šire znanje o problemu koji istražuju, sliku o njegovoj primjeni i važnosti, pritom oni sami prate svoj napredak i dobivaju povratne informacije o svojoj angažiranosti i sposobnostima. Istraživački usmjerena nastava matematike podrazumijeva veću samostalnost učenika i njihovo veće ulaganje napora kod istraživanja i rješavanja postavljenog problema. Očekuje se da učenici ne rade po unaprijed diktiranim uputama ili metodama. Takav nastavni pristup omogućuje učenicima da tijekom istraživanja nekog problema koriste svoje postojeće znanje, prilagode ga novim zahtjevima i uvjetima te da konstruiraju novo matematičko znanje koje će biti itekako vrijedno budući da ga je učenik sam stekao.

Općenito, istraživački usmjerena nastava istaknutija je u ostalim znanostima nego u samoj matematici i matematičkom obrazovanju. U nastavi matematike takva nastava svodi se na otkrivanje matematičkih činjenica, postupaka, pravila i zakonitosti, rješavanje problema, matematičko eksperimentiranje, matematičko modeliranje i slično. Dakle, u središtu istraživački usmjerene nastave u matematici je “problem”. Rješavanje problema nije rutinski zadatak nego situacija u kojoj želimo postići određeni cilj, ali nam put do rješenja u početku nije sasvim jasan. Na temelju postavljenog problema učenici istražuju, eksperimentiraju, pokušavaju doći do ideje na razne načine, ispisuju specijalne slučajeve, pretpostavljaju, pojednostavljuju, pokušavaju zaključivati iz pojedinačnog prema općem, postavljaju hipoteze o mogućim rješenjima i strategijama rješavanja, koriste vlastito znanje i otkrivaju novo znanje. Prema tome, istraživanje i rješavanje matematičkog problema je proces koji traje i zahtjeva visok intelektualni angažman od strane učenika za razliku od rutinskih matematičkih zadataka ili aktivnosti. Iako je pojam “istraživački usmjerena nastava matematike” tek nedavnog porijekla, istraživačka nastava matematike ima duboke korijene.

2 Počeci i razvoj istraživački usmjerene nastave

Već prije gotovo 100 godina javile su se prve ideje o tome da se nastava treba temeljiti na aktivnostima učenika i biti povezana s iskustvom učenika. Poznati američki psiholog, filozof i znanstvenik u području obrazovanja John Dewey (1859.-1952.) često se veže uz početne ideje takvog obrazovanja. Već se tada zalagao da je iskustvo učenika temelj podučavanja i nastave. Stavljao je naglasak na intelektualni razvoj učenika, osobito vještini rješavanja problema i kritičkom mišljenju. Kritizirao je strukturu kurikuluma koji nastaje kao rezultat dugogodišnjeg "prijenosa znanja". "Aktivno učenje se odnosi na školsku praksu koja uključuje učenika u aktivnosti kao što je čitanje, pisanje, raspravljanje ili rješavanje problema, koje potiču mišljenje višeg reda (John Dewey)" ([11]). Njegova koncepcija odgoja sažeta je u sintagmi: „učenje kroz rad". Ideje J. Dewey-a slijedili su i mnogi drugi znanstvenici.

Za mnoge matematičare tada, poučavanje je značilo ponavljanje ili imitiranje, odnosno da učenici prepričaju dani tekst ili imitiraju nastavnikove metode kod rješavanja matematičkih problema. Čak i danas, mnoga nastava matematike svodi se na ponavljanje pokazanih tehnika, njihovu uvježbavanju do automatizma. Često se događa da nakon što nastavnik pokaže učenicima neku metodu rješavanja određenih zadataka, nastavnik daje učenicima neke slične primjere na kojima oni uvježbavaju tu istu metodu. Nastava matematike na taj se način svodi na ponavljanje onoga što je nastavnik pokazao bez previše razumjevanja i razmišljanja o tome vrijedi li i zašto vrijedi/ne vrijedi ta metoda kod rješavanja takvih zadataka. Često i mi kao nastavnici u nastavnom procesu izostavljamo postupak dolaženja do nekih zakonitosti kao da one odavno vrijede, kao da su se samo stvorile. Učenicima prezentiramo gotove formule i prelazimo na primjenu istih bez motivacijskih primjera, a da se i mi i učenici ne pitamo jedno jednostavno pitanje: Zašto?.

Jedan jednostavan primjer iz nastave vezan uz geometriju u kojem možemo primijetiti takvo što je kada nastavnik u osnovnoj školi učenicima objašnjava kako računamo površinu trokuta. Iako je geometrija dio matematike koji bi se zaista morao što više zorno prikazivati, pa tako i sve više samostalno istraživati od strane učenika, često se dogodi da nastavnik na početku sata ukratko pokaže otkud formula za površinu trokuta i napiše formulu na ploču:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, a v_a, v_b, v_c duljine visina na odgovarajuću stranicu. No, ako učenici nisu sami došli do zaključka, oni će vrlo brzo taj dio zanemariti i sve što će zapamtiti bit će samo formula. Nakon toga, nastavnici često daju nekoliko primjera u kojima učenici uvježbavaju korištenje formula i sve što učenici nauče na tom satu jesu samo formule. Tražiti učenika da u grupnom radu, u paru ili individualno otkrije formulu za površinu trokuta, da proučava različite vrste trokuta npr. pravokutni trokut i otkriva formulu za njegovu površinu, pa zatim prelazi na opći trokut, dat će puno bolje rezultate. Učenici neće samo zapamtiti formulu nego će biti svjesni zašto na taj način možemo izračunati površinu nekog trokuta. Takav način rada sprječava učenike da ponekad zamijene formule i zbune se jer formula za površinu trokuta nije naučena napamet, nego postoji razlog i smisao zašto je ona baš takva, a učenici ga tada znaju.

Nastava koja učenike tjera da matematiku shvaćaju kao besmisleni skup tehnika koje moraju biti stečene imitativnim treningom izaziva kod učenika ono što često možemo čuti, strah i nezainteresiranost za "takvu matematiku". Neki smatraju da je prenošenje znanja na takav način tijekom prošlog stoljeća stvarno funkcioniralo jer nije bilo potrebe za nastavom kakvu mi danas zagovaramo, budući da je stanje u društvu bilo znatno drugačije od današnjeg. Tijekom prošlog stoljeća jako je malo ljudi uopće upisalo srednju školu (danas je upisuju gotovo svi), prema tome za većinu koja nije nastavljala školovanje nije niti bilo potrebno ulaziti previše u "dubinu" matematike. Bilo je dovoljno svladati neke osnovne tehnike kako bi učenici što prije izašli na tržište rada. Danas, učenici moraju učiti matematiku na dubljim razinama razumijevanja. Društvo je sve razvijenije i okrutnije. Gotovo svi upisuju srednju školu, a i sve više učenika upisuje fakultete jer je samo sa završenom osnovnom školom gotovo nemoguće dobiti posao. Prema tome, od učenika se očekuje sve više i više, pa je potrebno uvesti i nastavu koja će zadovoljiti potrebe današnjeg društva.

J. Dewey se već u svoje doba suprotstavljao nastavi koja se temeljila na prenošenju znanja. Još jedno važno ime tog doba bio je veliki njemački matematičar Felix Klein (1849-1925). On je promicao poučavanje slično aktivnostima matematičara-istraživača koji na temelju svojeg istraživanja dolaze do novog znanja. Početkom dvadesetog stoljeća uveo je reformirani program obrazovanja nastavnika koji se zalaže za praktičnu nastavu i provođenje aktivnosti, te razvoj prostornog zora (intuicije) ([8]). Još jedan matematičar vezan uz nastajanje ideje i promicanje istraživačke nastave u 20. stoljeću bio je George Polya. Kao što je već u uvodu spomenuto, George Polya je poznati matematičar 20. stoljeća, jedan od najboljih metodičara i pedagoga. Uvelike je doprinio području matematičke metodike koja je i najvažnija za ovu temu. Između ostalog, napisao je dvije knjige vezane uz rješavanje matematičkih problema "Kako riješiti matematički zadatak" i "Matematičko otkriće". Te dvije knjige su zapravo dvije velike zbirke zadataka, vrlo detaljno obrađenih, dva velika priručnika za nastavnike s idejama za poučavanje te priručnici primjereni čitanju roditelja, ali i samih učenika. George Polya zalagao se za heuristički pristup učenju i aktivno učenje. Često je isticao da će uspjeh u rješavanju zadataka kod učenika biti veći ako su učenici sami uložili intelektualni napor da najprije shvate zadatak, a onda dobiju ideju za rješavanje.

U svojem predgovoru knjige "Kako riješiti matematički zadatak" Polya je napisao: "Rješenje velikog problema veliko je otkriće, no i u rješavanju svakog problema ima nešto otkrivačko. I pri najskromnijem zadatku, ako on budi tvoj interes, ako pokreće tvoju dosjetljivost, i ako ga rješavaš vlastitim snagama, doživjet ćeš napetost i trijumf pronalazača. Takvi doživljaji u dobi, koja je pristupačna utiscima, mogu stvoriti sklonost za umni rad i utisnuti doživotni pečat na duh i karakter" ([13]). Budući da znamo da je temeljni pojam istraživačke nastave matematike "problem", Polya naglašava da se i običnom zadatku može pristupiti kao problemu ako to učinimo na pravi način i ako razmišljamo o njegovu smislu. Samim time, George Polya već u to doba svojim razmišljanjem daje predodžbu istraživačke nastave kakvu mi danas zamišljamo i želimo provoditi u školi. Prema tome, njegovo razmišljanje i metode koje opisuje u svojim knjigama zaista su pravi počeci istraživačke nastave matematike.

Poznata su četiri Polyina koraka u kojima on opisuje na koji način bi učenici trebali pristupiti svakom problemu i zadatku. Polya je u svakom od tih koraka u svojoj knjizi "Kako riješiti matematički zadatak" istaknuo pitanja koja su vezana uz određeni korak. Budući da je nastavnikova zadaća pomoći učeniku, ali nenametljivo i prirodno, nastavnik bi se često mogao naći u situaciji da cijelo vrijeme ispituje ista pitanja i upozorava na iste postupke. Na primjer: " Što je nepoznato? Isto to možemo pitati i drugim riječima: Što se zahtjeva? Što želiš naći? Što zapravo tražiš? Što nam je nepoznanica?" ([13]). Polya je smatrao kako bi bilo dobro za svaki korak ispisati najvažnija pitanja koja će pomagati učenicima pri određivanju rješenja zadataka. Koraci koje je Polya istaknuo su sljedeći:

Prvi korak:

"Treba razumjeti zadatak" ([13]). U prvom koraku G. Polya opisuje početni pristup nekom problemu. U tom koraku važno je da učenik razluči što je zadano, a što nepoznato. Kako glase uvjeti zadatka? Je li ih moguće zadovoljiti i kako? Rastaviti uvjete na nekoliko jednostavnijih, skicirati problem, uvesti zgodne oznake i slično.

Drugi korak:

"Potraži vezu između zadanog i nepoznatog! Ako se ne može naći neposredna veza morat ćeš možda razmatrati početne zadatke. Najzad treba da dobiješ plan rješavanja" ([13]). U ovom koraku Polya opisuje kako je važno stvoriti plan rješavanja postavljenog problema. Učenik se mora pitati je li već vidio negdje takav zadatak, prisjećati se znanja koje već posjeduje i razmišljati može li što od toga iskoristiti.

Treći korak:

"Izvrši svoj plan" ([13]). U ovom koraku Polya navodi da bi se učenik trebao zapitati provodi li svoj plan rješavanja i kontrolira li svaki korak te može li dokazati da je svaki korak koji je proveo ispravan.

Četvrti korak:

"Provjeri dobiveno rješenje" ([13]). U ovom koraku Polya sugerira učenicima da provjere ono što su dobili kao rezultat, da razmisle o smislenosti dobivenog rješenja, da pokušaju razmisliti jesu li do rješenja mogli doći na neki drugi način te mogu li upotrijebljenu metodu i stečeno znanje upotrijebiti u nekom drugom zadatku.

Polya je smatrao da su ti koraci primjenjivi u svim zadacima i problemima i da je to, na neki način, univerzalni pristup svakom matematičkom problemu, barem što se školske matematike tiče. Očito je da Polya pomoću navedenih koraka pokušava voditi učenike kroz problem kako bi što uspješnije došli do rješenja određenog matematičkog problema. Prema Polyinom razmišljanju možemo zaključiti da je dužnost nastavnika pomoći učeniku da uspješno riješi problem, ali ga istovremeno poučiti da i u budućnosti slične probleme s lakoćom, samostalno rješava. Polyina ideja bila je staviti se u ulogu učenika i sagledati situaciju učenikovim očima. Nakon što nastavnik shvati što se zbiva u učenikovoj glavi, postavlja mu prikladna pitanja koja će ga voditi da sam otkrije put rješavanja problema. Nakon što će učenik usvojiti strategiju rješavanja problema on će sam sebi postavljati slična pitanja i time će se nastavnikovo vođenje polako smanjivati sve do trenutka kada će učenik steći potrebne kompetencije i steći mogućnost samostalnog rješavanja određenih problema. Uočimo da je ovdje ključni pojam *voditi učenika*.

Tijekom provođenja nastave istraživanjem, odnosno rješavanja određenog matematičkog problema važno je kontrolirati učenikov rad i usmjerivati ga u pravom smjeru kako učenik ne bi previše odlutao od središnjeg problema. Voditi učenika vještina je koja se uči iskustvom jer je vrlo bitan način na koji to nastavnik radi. Nastavnik mora voditi računa da svojim sugestijama direktno ne otkriva rješenje problema, nego da malim, ali "pogođenim" savjetima sigurno navodi učenika u pravom smjeru kako bi onda on sam spoznao problematiku postavljenog problema, razmišljao o problemu dovoljno široko i na kraju došao do točnog rezultata koji zna obrazložiti. Nastavnikova uloga je uloga iskusnog istražitelja koji usmjerava učenike koji istražuju. Nastavnik nikako ne bi trebao biti osoba koja je izvor odgovora na sva učenikova pitanja, jer u tom slučaju više ne bi govorili o vođenju učenika nego davanju gotovih odgovora od kojih gotovo da nema koristi u takvom procesu učenja.

Proces vođenja učenika osobito je potreban kod zadataka i problema koji su odmaknuti od same interpretacije nekog već puno puta viđenog tipičnog matematičkog zadatka ili same interpretacije neke metode rješavanja koju je nastavnik pokazao na satu. Dakle, nastavna praksa već dugi niz godina pokazuje da učenici imaju poteškoće baš u zadacima koji očekuju primjenu stečenog znanja u rješavanju problema iz svakodnevnog života. Prema tome, pristup vođenja učenika od strane nastavnika kroz rješavanje nekog matematičkog problema ili zadatka u današnje modernije doba poznat je pod nazivom "postavljanje skela" (engl. *scaffolding*). Prema već objašnjenom to nije ništa novo, već pristup koji je bio poznat i pred prije više desetaka godina. Dakle, ideja postavljanje skela potpore nastavnika u podučavanju matematike starija je od pojma "postavljanje skela". U današnje vrijeme takav se pristup sve više ističe i ključan je dio istraživačke nastave. Upravo je nastavnikovo vođenje učenika ključan uvjet za uspješno učenikovo istraživanje i rješavanje matematičkog problema.

Prije nego detaljno objasnimo proces postavljanja skela, osvrnimo se na još jedan aktualan projekt koji se provodi u sklopu projekta Erasmus +, pod nazivom MERIA, a vezan je uz našu glavnu temu, nastavu istraživanjem, a ujedno je i inspiracija te jedna od literatura za ovaj diplomski rad. Provođenje ovako velikih projekata vezanih uz obrazovanje pokazatelj je da se zaista intenzivno razmišlja o poboljšanju kvalitete nastave, konkretno nastave matematike. MERIA je skraćenica od naziva *Mathematics Education-Relevant, Interesting* *and Applicable*, u prijevodu Matematičko obrazovanje – značajno, zanimljivo i primjenjivo. Cilj projekta je poboljšati kvalitetu matematičkog obrazovanja u srednjim školama diljem Europe koristeći istraživački usmjeren pristup u nastavi matematike uz odgovarajuću podršku profesionalnom razvoju nastavnika. Ovaj projekt razvija pozitivan stav prema matematici provodeći aktivnosti koje pokazuju da je matematika privlačna, važna i korisna. Aktivnosti ovog projekta usmjerene su na učenike s poteškoćama u učenju matematike, a cilj je poboljšati znanje matematike, uspješnost i stav prema matematici kod takvih učenika ([9]). U sklopu ovog projekta izrađuju se mnogi inovativni materijali za učenje i poučavanje matematike uz pružanje potpore nastavnicima kako bi s lakoćom mogli stvoriti istraživački usmjerene situacije u razredu i provoditi predviđeno ovim projektom. Ovaj projekt zasigurno će rezultirati predviđenim ciljem i donijeti mnoge inovativne materijale koji će popularizirati nastavu istraživanjem, no uloga nastavnika koji podupire proces učenja i organizira situaciju u kojoj će se ostvariti potencijal za učenje bit će nezaobilazna.

3 “Postavljanje skela” u nastavi matematike

Postavljanje skela u matematici odnosi se na različite tehnike poučavanja koje se koriste kako bi se učenika postupno dovelo do boljeg razumijevanja s ciljem stjecanja veće neovisnosti u učenju ([4]). Sam naziv dolazi od engleske riječi *scaffold* što znači potporanj, skela. Prema tome, sam naziv govori što taj pojam znači: nastavnik u nastavi “glumi” skelu, potporanj učenicima. Nastavnik pruža više razina potpore učenicima kako bi oni postigli višu razinu razumijevanja i stjecanja vještina, a što ne bi mogli postići bez takve podrške nastavnika. S vremenom, nastavnik primjećuje da učenik napreduje u tom procesu te se nastavnikovo vođenje smanjuje i učenik se sve više osamostaljuje, odnosno nastavnik polako prebacuje veću odgovornost za proces učenja na učenika. Taj pojam često se uspoređuje i sa skelom na gradilištu. Kao što znamo, na početku je skela vrlo detaljna i obuhvaća sve dijelove zgrade koja se obnavlja ili gradi. Postepeno se dijelovi skele odstranjuju jer su neki dijelovi zgrade već restaurirani i poprimaju željeni oblik. Upravo je tako u nastavi. “Skela je samo metafora za strukturu kojom se koristimo da pomognemo učenicima ostvariti ciljeve i uklanjamo je malo po malo kada više nije potrebna” ([4]).

Razlikujemo tri razine strategija poučavanja potrebne za uspješnu primjenu postavljanja skela u nastavi matematike.

Prva razina

Prva razina naziva se još i osnovna te se odnosi na dobru pripremu okoline za učenje. Dobra priprema okoline uključuje različita nastavna pomagala (plakate, fizičke modele, mjerne uređaje, računala,…) te organizaciju učionice. Organizacija učionice ne odnosi se samo na razmještaj klupa i učenika u učionici nego i na različite nastavne situacije – nadolazeće aktivnosti. Prva razina nije povezana s direktnom interakcijom učenika i nastavnika, već je to više kao priprema za nadolazeću interakciju. Takva priprema zaokupit će pažnju učenika za nadolazeće aktivnosti ([4]).

Druga razina

U drugoj razini procesa postavljanja skela razlikujemo dva koraka: utvrđivanje i restrukturiranje znanja. Ta razina uključuje direktnu interakciju učenika i nastavnika. Stara poznata metoda poučavanja novih ideja u nastavi matematike je metoda demonstracije. Iako je ta metoda dobra za objašnjavanje, često se događa da učenici nakon demonstracije neke ideje razmišljaju samo u tom jednom, demonstriranom smjeru. Ostale slučajeve zanemaruju i ne vide. Upravo ovdje nastavnik postavljanjem skela može pomoći učenicima i preusmjeriti njihovu pažnju. Na taj način nastavnik vodi učenike ka razvijanju vlastitog razumijevanja umjesto da se strogo drže onoga što je nastavnik objasnio i demonstrirao. "Postoji nekoliko vrsta interakcija učenika i nastavnika kako bi se utvrdilo u kojoj je mjeri učenik usvojio nove matematičke koncepte i ideje:

- poticati učenika da gleda, dodiruje i/ili verbalizira ono što vidi i/ili o čemu razmišlja,
- poticati učenika da objašnjava i obrazlaže svoje ideje,
- interpretirati učenikove akcije, govor, način rješavanja zadatka,
- propitivati učenika kako bi mu se omogućilo savladavanje kritičnih točaka i daljnje napredovanje prema konačnom rješenju,
- istovremeno modelirati ideju što znači da učitelj pokazuje rješavanje sličnog problema kako bi naveo učenika da samostalno dođe do rješenja svoga problema" ([4]).

Za poticanje boljeg razumijevanja navodi se i drugi već spomenuti korak – restrukturiranje znanja. "Time se omogućuje dodatna refleksija i promišljanje o problemu na višoj razini za što se predlažu sljedeće vrste interakcija učenika i učitelja:

- ponuditi smisleni kontekst apstraktnim matematičkim idejama kako bi učenik postupno prešao s konkretnog na apstraktno razumijevanje,
- pojednostavniti problem ograničavanjem stupnjeva slobode ili ga pokušati razložiti na više jednostavnijih problema,

- drugačije formulirati riječi učenika, posebice ako učenik ima poteškoća s uporabom matematičke terminologije u iznošenju vlastitih ideja,
- u razrednoj diskusiji pregovarati o značenjima novih matematičkih ideja, gdje će učitelj pustiti učenike da iznesu sve svoje ideje, bile dobre ili pogrešne, pa ih bez zauzimanja strane navoditi da sami dođu do zaključka o matematičkoj istini" ([4]).

Treća razina

Treća razina postavljanja skela u nastavi matematike, ujedno i najviša razina, uključuje interakcije između nastavnika i učenika koje će naposljetku dovesti do konačnog cilja, tj. razvoja konceptualnog mišljenja kod učenika. Na ovoj razini učenik i nastavnik zajedničkom komunikacijom jedan drugome prikazuju svoje ideje i zaključke, pri čemu se opet koriste nekim aktivnostima kao što su razvijanje alata za prikazivanje matematičkih ideja (slike, riječi, simboli, tablice,…), povezivanje matematičkih ideja, razvijanje vlastitih strategija kod učenika za rješavanje problemskih zadataka, poticanje korištenja matematičkog jezika, terminologije i slično ([4]).

Proces postavljanja skela primjenjiv je u svim granama matematike pa tako i u geometriji. Geometrija je vrlo stara grana matematike, a zbog svoje deduktivne prirode često i najteže shvatljiva učenicima u školama. Iako je metoda demonstracije vrlo zastupljena u nastavi geometrije, često se događa ono što sam nekoliko redaka prije spomenula, a to je da učenici gledaju samo u jednom smjeru koji su već negdje prije čuli ili vidjeli, odnosno ne razvijaju vlastite ideje o geometrijskim problemima. Očito je da je upravo u takvim trenutcima postavljanje skela i vođenje učenika ključno. Prije demonstracije postavljanja skela na konkretnim primjerima, zaključimo još jednom: upute koje dajemo učenicima u procesu postavljanja skela ne smiju biti sugestivne i otkrivati odgovore na učeničke nedoumice. Upute moraju biti generičke, a ne konkretno vezane uz problem u toj situaciji. Dakle, upute moraju biti takve da ih učenik može primijeniti i u nekim drugim situacijama rješavajući neki drugi problem. Učenike možemo pitati:

- Razumiješ li postavljeni problem?
- Možeš li se sjetiti nečeg sličnog što smo već radili?
- Ako da, kako smo riješili taj problem ili zadatak kojeg se sjećaš?
- Ako ne, možeš li analizirati samo dio zadatka i prisjetiti se što znaš o tome?
- Mogu li ti tvoji kolege u razredu pomoći s kakvom idejom?
- Možeš li mi objasniti o čemu razmišljaš?
- Možeš li argumentirati svoje ideje?
- Možeš li si vizualizirati i/ili skicirati svoje ideje?
- Jesi li siguran u ono što tvrdiš?

3.1 Primjeri postavljanja skela u nastavi matematike u području geometrije

Pogledajmo sljedeći primjer koji će nam prikazati ideju procesa postavljanja skela kroz tri razine u jednom jednostavnom zadatku iz geometrije primjeren učenicima 4. i 5. razreda osnovne škole. Nastavnik postavlja problem učenicima. Problem je zanimljiv i primjenjiv u svakodnevnom životu pa će samim time više zainteresirati učenike.

Primjer 1. Površina poda oko bazena

Bazen u obliku pravokutnika je duljine $20\ m$ *i širine* $10\ m$*. Oko bazena je pod od dasaka širine* $2\ m$*. Kolika je površina tog poda?* ([10])

Prva razina:

U ovoj razini nastavnik najprije priprema problem za učenike. Nastavnik najčešće pripremi problem prije samog početka nastavnog procesa. Nastavnik razmišlja o mogućim strategijama kojih bi se učenici mogli dosjetiti i na taj način se priprema za istraživački rad. Osim toga, nastavnik razmišlja kako će organizirati istraživački rad, a da učenici sami dođu do rješenja problema i uče jedni od drugih. Dolaskom na nastavni sat, nastavnik dijeli učenike u grupe, zajedno s učenicima organizira učionicu tako da bude pogodna za grupni rad.

Druga razina:

Nastavnik postavlja učenicima problem (dijeli im napisani zadatak na nastavnom listiću, piše ga na ploču, prikazuje uz pomoć računala i PowerPoint prezentacije ili sl.). Nakon toga, nastavnik potiče učenike da u grupama pročitaju i razmisle o zadatku. Nastavnik daje učenicima nekoliko minuta da pokušaju smisliti strategiju kojom će pokušati doći do rješenja. Nastavnik potiče učenike da se pokušaju sjetiti sličnog problema s kojim su se već susreli.

Slijedi dijalog učenika i nastavnika kojim nastavnik potiče učenike na postavljanje pitanja, komunikaciju s ostalima te "postavlja skelu" koja ih navodi na razmišljanje u pravom smjeru. (N = nastavnik, U = učenik)

N: Kako glasi problem koji moramo razriješiti?

U: Trebamo naći površina poda oko bazena.

N: Jesmo li već rješavali neke slične probleme?

U: Rješavali smo već zadatke u kojima je trebalo izračunati površine.

N: Što je zadano?

U: Duljina i širina bazena, te širina poda oko bazena.

N: Kakvog je oblika bazen?

U: Bazen ima oblik pravokutnika.

N: Jeste li nacrtali skicu?

U: Nismo još.

N: Znate li je nacrtati?

U: Mislimo da znamo.

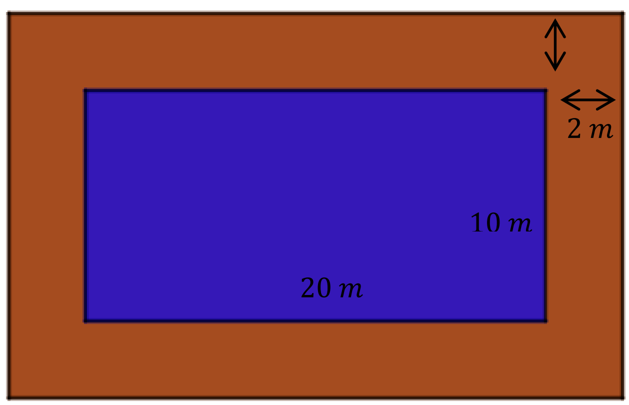
N: Pokušajte.

U: Jesmo.

N: Što ste nacrtali?

U: Nacrtali smo bazen i pod oko bazena.

N: Odlično. To nije bilo teško. Obojimo sada bazen plavom, a pod oko bazena smeđom bojom i označimo na slici duljine koje su nam zadane u zadatku.



Slika 3.1: *Skica problema*

N: Imate li ideju kako bi započeli rješavanje ovog zadatka?

N: Promotrite malo bolje skicu koju ste nacrtali? Što uočavate?

(Učenici u ulozi malih istraživača uočit će različite elemente na nacrtanoj skici pa će prema tome imati više ideja o načinu rješavanja zadanog problema. Zadaća nastavnika koji podupire istraživačku nastavu jest uvažiti i razmotriti svaku ideju, ali prije svega biti pripremljen na moguće učeničke ideje kako niti jedna ideja ne bi bila prikazana kao beskorisna te, s druge strane, kako niti jedna ideja ne bi bila ispred drugih jer su sve jednako vrijedne. Neke nas jedino lakše dovode do rezultata, no ako učenici dobe uvid u više ideja i načina rješavanja nekog problema, kod istraživanja mogućih načina rješavanja sljedećeg problema obratit će pozornost i na efikasnost i brzinu njihove ideje. Prema tome, važna sposobnost svakog nastavnika je da se ponekad stavi u ulogu učenika određene dobi i pokuša razmišljati kao oni. Na taj način, nastavnik se priprema za razne učeničke ideje. U nastavku opisat ću nekoliko mogućih učeničkih ideja o rješavanju zadanog problema uz popratni dijalog nastavnika i učenika – proces postavljanja skela.)

Treća razina:

U ovoj razini učenici su razvili različite strategije za rješavanje danog problema. Učenici najprije komuniciraju međusobno u grupama. Neke od tih strategija prikazane su u tekstu ispod. Osim strategija prikazan je i popratni dijalog učenika i nastavnika za svaku strategiju, ovisno koju učenici izaberu. Naravno, odlično je ako neka grupa sama riješi problem bez detaljnog vođenja od strane nastavnika, oni onda imaju zadatak smisliti novu strategiju za rješenje istog problema.

I. strategija:

U: Uočavamo dva pravokutnika na slici.

N: Kakvom bojom je obojan dio koji nas zanima?

U: Smeđom.

N: Kako možemo otkriti kolika je površina tog dijela?

U: Površinu smeđeg dijela dobit ćemo ako od površine velikog pravokutnika oduzmemo površinu manjeg pravokutnika sa slike.

N: Točno. No, znamo li površinu malog i velikog pravokutnika?

U: Ne znamo.

N: Možemo li ih izračunati? Pogledajmo opet što nam je zadano.

U: Zadana je duljina i širina bazena i širina poda oko bazena.

N: Što nam je zadano kada gledamo skicu?

U: Zadana nam je duljina i širina manjeg pravokutnika.

N: Možemo li izračunati njegovu površinu?

U: Možemo, po formuli za površinu pravokutnika $P = a \cdot b$.

N: Koliko iznosi površina manjeg pravokutnika, odnosno površina bazena?

U: $20 \cdot 10 = 200\ m^2$

N: Tako je, pazimo na mjernu jedinicu. Kako ćemo izračunati površinu većeg pravokutnika?

U: Isto po formuli za površinu pravokutnika.

N: Točno. Dakle, što nam je potrebno?

U: Duljina i širina pravokutnika.

N: Koliko one iznose? Pogledajte skicu.

U: Duljina većeg pravokutnika iznosi $20\ m\ +\ 2\ m\ +\ 2\ m = 24\ m$.

N: A širina?

U: Širina velikog pravokutnika iznosi $10\ m + 2\ m + 2\ m = 14\ m$.

N: Kolika je onda konačno površina velikog pravokutnika?

U: $24 \cdot 14 = 336\ m^2$.

N: Što smo sada dobili?

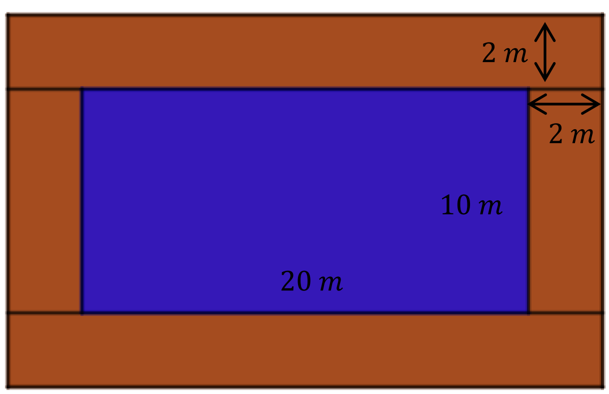
U: Sada imamo površinu velikog i malog pravokutnika sa slike, pa prema početnom planu možemo izračunati površinu poda oko bazena.

N: Koliko iznosi površina poda oko bazena?

U: Površina poda oko bazena jednaka je $P = 336\ m^2 - 200\ m^2 = 136\ m^2$.

II. strategija:

U: Ako nadopunimo skicu kao na slici možemo uočiti nekoliko pravokutnika.



Slika 3.2: *Skica problema*

N: Kakvom bojom je obojan dio čija površina nas zanima?

U: Smeđom bojom.

N: Na koliko dijelova je podijeljen taj smeđi dio?

U: Smeđi dio podijeljen je na 4 pravokutnika.

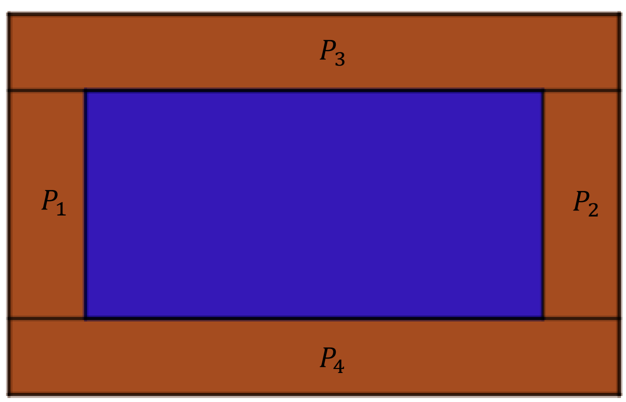
N: Kako možemo otkriti kolika je površina tog smeđeg dijela?

U: Moramo zbrojiti površine za 4 pravokutnika na koje je smeđi dio podijeljen.

N: Možemo li odrediti površine tih pravokutnika? Znamo li njihove dimenzije?

U: Ne znamo.

N: Pogledajmo skicu. Možemo li odrediti iz skice dimenzije tih pravokutnika i odrediti njihovu površinu? Označimo na skici njihove površine s P_1, P_2, P_3, P_4.



Slika 3.3: *Skica problema*

N: Dakle, kolika je površina P_1?

U: $P_1 = 2 \cdot 10 = 20\ cm^2$

N: Kolika je površina P_2?

U: $P_2 = 2 \cdot 10 = 20\ cm^2$

N: Što uočavate?

U: Površina P_1 jednaka je površini P_2.

N: Odlično. U kakvom su odnosu P_3 i P_4?

U: Uočavamo da je $P_3 = P_4$.

N: Točno. Koliko iznosi površina P_3, odnosno P_4? Kolika je duljina stranica tih pravokutnika?

U: Jedna stranica je duljine 2 cm, a druga stranica je duljine $20cm + 2\ cm = 22cm$.

N: Jeste li sigurni? Pogledajmo još jednom dulju stranicu tog pravokutnika. Kolika je njezina duljina?

U: $2\ cm + 20\ cm + 2\ cm = 24\ cm$.

N: Tako je. Koliko onda iznosi površina P_3, odnosno P_4?

U: $P_3 = P_4 = 24 \cdot 2 = 48\ cm^2$.

N: Koliko iznosi površina dasaka oko bazena?

U: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 20\ cm + 20\ cm + 48\ cm + 48\ cm = 136\ cm^2$.

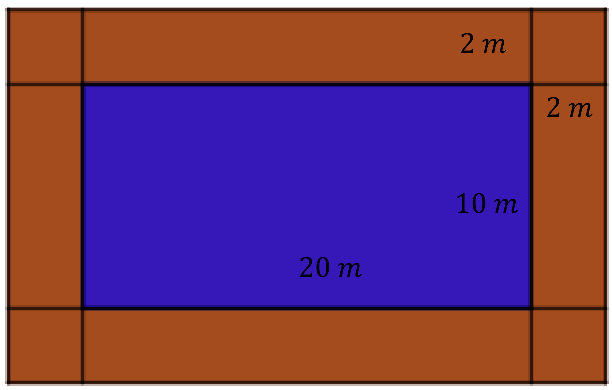
N: Kako bi glasio potpuni odgovor na pitanje iz zadatka?

U: Površina poda oko bazena iznosi $136\ cm^2$.

III. strategija:

U: Uočavamo pravokutnike i kvadrate na slici.

N: Nadopunite skicu da jasno uočimo pravokutnike i kvadrate koje ste zamijetili.



Slika 3.4: *Skica problema*

N: Kakvom bojom je obojan dio koji nas zanima?

U: Smeđom.

N: Na koliko dijelova je podijeljen dio koji nas zanima? Kakvi su oni?

U: Smeđi dio podijeljen je na 4 pravokutnika i na 4 kvadrata.

N: Kako ćemo otkriti kolika je površina smeđeg dijela na slici?

U: Zbrojit ćemo površine ta 4 pravokutnika i 4 kvadrata.

N: Tako je. No, možemo li uopće odrediti površine tih pravokutnika i kvadrata, iz zadanih podataka, na koje je smeđi dio podijeljen?

U: Mislim da možemo.

N: Kako? Istaknimo na skici duljine stranica likova koje znamo. Što nam je zadano?

U: Znamo duljine stranica plavo obojanog pravokutnika. One iznose $20\ cm$ i $10\ cm$.

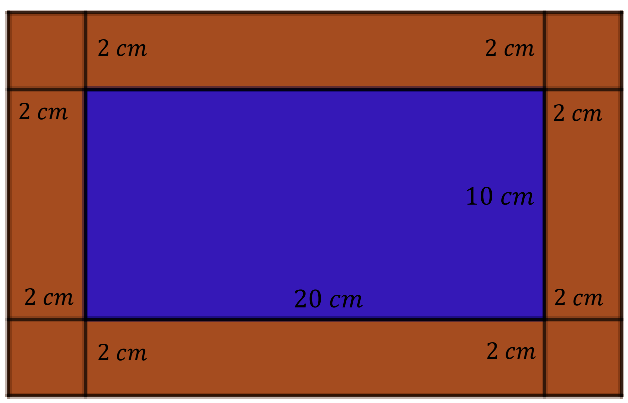
N: Što još znamo? Kolike su duljine stranica kvadrata koje ste uočili?

U: Duljine stranica svih kvadrata iznose $2\ cm$.

N: Zašto?

U: U zadatku piše da se oko bazena nalazi pod širine $2\ cm$.

N: Točno. Istaknimo poznate veličine na skici.



Slika 3.5: *Skica problema*

N: Znamo li sada sve što nam je potrebno kako bi izračunali površinu pravokutnika i kvadrata koje ste uočili u smeđem dijelu skice?

U: Da.

N: Prije nego počnemo računati površine likova koji nas zanimaju možemo li prije nešto primijetiti? U kakvom su odnosu pravokutnici i kvadrati koje ste uočili?

U: Možemo uočiti dva para jednakih pravokutnika i četiri jednaka kvadrata.

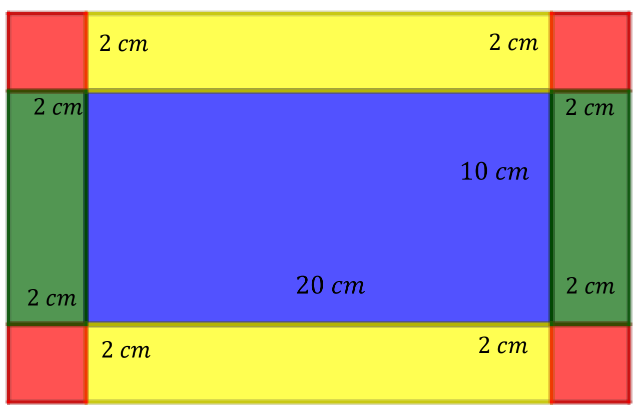
N: Što znači to da su oni jednaki? Što zapravo uočavate?

U: Možemo uočiti dva para pravokutnika međusobno jednakih površina te svi kvadrati također su međusobno jednakih površina.

N: Tako je. Obojimo sada pravokutnike istih površina na skici s istim bojama. Imate li ideju kako da ih obojamo?

U: Možemo za pravokutnike upotrijebiti žutu i zelenu boju, a za kvadrate crvenu.

N: Može. Koje pravokutnike ćemo obojati žuto, a koje zeleno? Bolje ćemo razumjeti jedni druge ako svi imamo istu skicu.



Slika 3.6: *Skica problema*

N: Koliko iznosi površina jednog žutog pravokutnika?

U: $20 \cdot 2 = 40\ cm^2$

N: Koliko iznosi površina jednog zelenog pravokutnika?

U: $10 \cdot 2 = 20\ cm^2$

N: Koliko iznosi površina jednog crvenog kvadrata?

U: $2 \cdot 2 = 4\ cm^2$

N: Kako ćemo sada izračunati traženu površinu poda oko bazena?

U: Moramo zbrojiti površine dviju žutih, dviju zelenih pravokutnika i površinu četiri crvenih kvadrata.

N: Tako je. Zbrojimo. Kako glasi račun?

U: $P = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 4 = 136\ cm^2$.

N: Kako glasi odgovor na pitanje u našem zadatku?

U: Površina poda oko bazena iznosi $136\ cm^2$.

Ovo su samo neki od primjera strategija vezanih uz rješavanje postavljenog problema. Takvim detaljnim vođenjem učenika, oni sami dolaze do ideje za rješavanje problema te naposljetku i do točnog rješenja. Nastavnikova uloga je preciznim pitanjima voditi učenikove misli u pravom smjeru.

Pogledajmo još jedan primjer primjeren učenicima 7. razreda osnovne škole.

Primjer 2. Površina nepravilnog lika

Izračunajte površinu nepravilnog oblika kojeg ste donijeli u školu.

Prva razina:

Nastavnik podsjeća učenike na nepravilne oblike koje su imali za zadatak donijeti u školu. Učenici su mogli donijeti: list nekog drveta ili biljke, podložak za tortu ili neki drugi zanimljiv nepravilan oblik. Ako je netko od učenika zaboravio, nastavnik daje uputu učenicima da će poslužiti i njihov dlan, stopalo ili uzmemo neki nepravilni oblik koji uočimo u učionici i iskoristimo njegov otisak na papiru. Nastavnik organizira učionicu za rad u paru, grupi ili učenici mogu raditi samostalno. Osim toga, nastavnik potiče učenike da usporede svoj dlan s nekim kolegama i procijene površinu vlastitog dlana, što je za njih izrazito složeno.

Druga razina:

Nastavnik u dijalogu s učenicima pokušava učenike dovesti do strategije kojom će otkriti (približnu) površinu nepravilnih oblika. U tom trenutku, učenici nisu svjesni da će to biti tek približna površina jer su još uvijek na razini u kojoj slijepo vjeruju eksperimentu. Nastavnik također ispituje učenike mogu li strategijama koje su predložili odrediti točnu površinu nepravilnog oblika kojeg imaju pred sobom.

I. strategija:

N: Što je naš zadatak?

U: Odrediti površinu lista s drveta, otiska dlana, otiska stopala,…

N: Imate li ideju kako ćemo odrediti njihovu površinu?

U: To sigurno nije lagano budući da su ovako nepravilnog oblika.

N: Jesmo li već rješavali slične probleme? Jesmo li ikada određivali površine nekih likova?

U: Jesmo.

N: Površinu kojih likova znamo odrediti?

U: Kvadrata, pravokutnika, trokuta, paralelograma i trapeza.

N: Koju metodu određivanja površine likova znate, osim primjena gotove formule?

U: Nekad smo brojali kvadratiće ako je lik smješten u kvadratnu mrežu.

N: Tako je. Pa imamo li ideju kako ćemo riješiti naš problem?

U: Precrtat ćemo list s drveta u bilježnicu i prebrojati kvadratiće.

N: Za vas imam i milimetarski papir. Hoće li nam on biti možda korisniji ili ćemo koristiti bilježnicu?

U: Bolji je milimetarski papir jer ima finiju podjelu na kvadratiće.

N: Kako to mislite „finiju“ podjelu? Koliko iznosi površina kvadratića na koje je podijeljen milimetarski papir?

U: 1 mm^2.

N: Koliko iznosi površina kvadratića u bilježnici?

U: Dovoljno je izmjeriti duljinu stranice jednog od njih, budući da su svi kvadratići u bilježnici međusobno sukladni, i izračunati površinu po formuli za površinu kvadrata.

N: Odlično. Možete koristiti i bilježnicu i milimetarski papir. Važno je da ste svjesni gdje će rezultat biti precizniji. Hoćemo li mi moći odrediti točnu površinu otisaka tih objekata?

U: Hoćemo.

N: Razmislite još malo. Malo prije smo rekli da će prebrojavanje kvadratića na milimetarskom papiru dati precizniji rezultat. Nacrtajte sada otisak objekta kojeg ste donijeli u školu na papir, pa onda razmislite.

N: Imate li sada ideju za odgovor na prethodno postavljeno pitanje hoćemo li moći odrediti točnu površinu otisaka tih objekata?

U: A da, nikad nećemo baš točno moći odrediti površinu zato što vidimo da u rubovima površina otisaka ne sadrži cijele kvadratiće nego samo jedan dio od cijelog kvadratića pa ne možemo sa sigurnošću baš reći kolika je površina tog nekog dijela kvadratića.

N: Riješimo sada naš problem.

II. strategija:

Učenici se mogu sjetiti i sljedeće strategije:

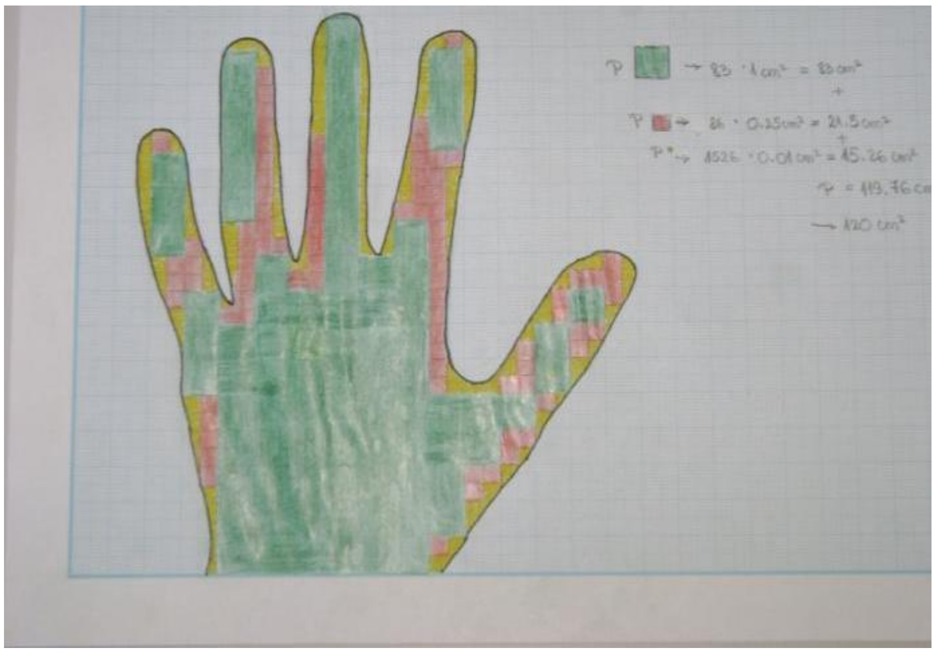
Ako prebrojimo najprije sve kvadratiće koji se u cijelosti nalaze u npr. otisku stopala na papiru i zbrojimo njihove površine, a zatim prebrojimo sve kvadratiće koji barem nešto imaju zajedničko s otiskom stopala (tu spadaju svi kvadratići koji se cijeli nalaze u otisku stopala i svi oni kojima je bar dio otiska stopala) i zbrojimo njihove površine, tražena površina bit će neki broj između tih opisanih površina.

Naravno, rijetko koji učenik će jasno objasniti cjelokupnu strategiju, ali budući da je nastavnik u prvoj razini postavljanja skela razradio nekoliko strategija kako bi bio spreman na istraživački rad, čim učenik počinje opisivati neku strategiju nastavnik prepoznaje njegovu ideju te ga vodi prema njezinoj realizaciji.

Treća razina:

Učenici su razvili strategije i rješavaju problem jednom od strategija. Ovdje je još jednom važno osvijestiti učenike da kao krajnji rezultat ne dobivamo točan iznos površine nepravilnog oblika, nego približnu vrijednost. Na kraju provedenog istraživanja učenici prezentiraju svoje radove i strategije rješavanja, budući da su određivali površine različitih oblika koristeći različite strategije. Na taj način učenici uče jedni od drugih. Nastavnik je cijelo vrijeme u sjeni učenika i nesugestivnim pitanjima ga vodi kroz završnu fazu istraživanja.

Primjer jednog učeničkog rada:



Slika 3.7: *Primjer određivanja površine otiska dlana jednog učenika*

(Web materijal, preuzeto: 3.06.2018.: http://www.ss-cakovec.skole.hr/fotogalerija?show=album&id=14)

4 Zašto poticati istraživačku nastavu u području geometrije?

“Geometrija je opipljivi prostor, to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istraživati i osvajati, kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se. (H. Freudenthal)“ ([10])

Ovaj citat u samo nekoliko riječi odgovorio nam je na pitanje u naslovu, no opišimo ipak malo detaljnije zašto koristiti istraživačku nastavu u geometriji. U nižim razredima osnovne škole učenici upoznaju geometrijska tijela, likove, plohe, crte, poimaju što je dužina, pravac, polupravac, kružnica i krug, te analiziraju trokut, pravokutnik i kvadrat. Nastava u nižim razredima većinom se svodi na zornom prikazu nabrojanih elemenata i tu se već javljaju prvi oblici istraživačke nastave, no možda ipak nedovoljno. Jasno je da učenici u nižim razredima osnovne škole nisu intelektualno spremni za složena istraživanja, ali ako kod učenika od samih početaka počinjemo razvijati istraživački duh vodeći ih kroz neke primjerene radionice i navodeći ih da razmišljaju o primjerenom sadržaju, već ćemo tada kod učenika zamijetiti veliki napredak. Učenicima od samih početaka moramo priuštiti geometrijsko iskustvo, iskustvo u radu s geometrijskim tijelima, likovima,… Budući da je geometrija u nižim razredima osnovne škole nešto što je učenicima najbliže u tom trenutku jer je to tada njima opipljivo i stvarno, na temelju toga već tada moramo kreirati materijale za istraživačku nastavu i provoditi je u nastavi.

Ako omogućimo učenicima da geometrijskim sadržajima pristupaju problemski i istraživački, to im može pomoći u razvijanju logičkog zaključivanja i rješavanju nekih algebarskih i aritmetičkih problema. Jasno je da geometrija igra ključnu ulogu u učenju drugih područja matematike ([16]). Sjetimo se samo koncepta razlomka, omjera i razmjera, raznih djelatnosti i zanimanja u svakodnevnom životu (arhitekti, geodeti, građevinari,…), svakodnevne aktivnosti (uređenje vrta, sport,…), sve je to povezano s geometrijom.

Zaključimo sada nekoliko razloga zašto koristiti istraživačku nastavu u poučavanju geometrijskog sadržaja. Istraživačka nastava kako u području cijele matematike, tako i geometrije:

- omogućava učenicima da sami otkriju i uvjere se u razne geometrijske zakonitosti,
- potiče i omogućuje prevladavanje problema u shvaćanju školske geometrije,
- uči učenike kritički i logički razmišljati,
- povećava motivaciju kod učenika,
- pokazuje učenicima primjenu matematike i geometrije u svih poljima ljudskog djelovanja,
- potiče razvoj istraživačkih, komunikacijskih, organizacijskih i kritičkih sposobnosti učenika u rješavanju raznih problema iz svakodnevnog života,
- pruža učeniku da uči uz pomoć iskustvenog znanja,
- omogućava stjecanje dugotrajnog znanja i vještina primjenjivih u raznim područjima,
- daje učeniku povratnu informaciju o njegovom napretku, te uspjehu i neuspjehu,
- pruža učeniku potporu od strane nastavnika tijekom cijelog procesa istraživanja,
- omogućava nastavniku provođenje formativnog vrednovanja u svrhu unaprjeđenja i prilagodbe nastavnog procesa prema učenikovim potrebama,
- omogućuje aktivniju nastavu, aktivnije učenike i aktivan proces usvajanja potrebnih kompetencija.

5 Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije

Budući da se odavno zna da je za shvaćanje geometrije potrebna viša razina mišljenja, mnogi matematičari, nastavnici i ostali stručnjaci u obrazovanju često su se suočavali s učenicima koji su imali problem na satu geometrije. Taj problem nije nestao, pa ga nastavnici i danas često uočavaju u shvaćanju geometrije kod učenika. Nastava istraživanjem bi, kao što sam već spomenula, trebala pomoći u prevladavanju tih problema budući da bi u takvoj nastavi učenici, vođeni nastavnikom, trebali sami doći do rješenja nekog problema, samostalno bi usvajali znanja, bez tradicionalnog čitanja i memoriranja činjenica koje bi nastavnik izrekao na satu ili koje su zapisane u udžbenicima. Zapravo, cilj koji bi nastavnici trebali postići u nastavi je omogućiti učenicima da steknu sposobnost organiziranja svojeg znanja i razumjevanja geometrije kako bi bila „inkluzivno organizirana“, tj. kako bi učenici stekli sposobnost organiziranja geometrijskih objekata u klase i potklase objekata. To je stari i aktualni način učenja geometrije u kojem se obraća pozornost na to da se proučavaju sličnosti i razlike geometrijskih koncepata kako bi se jedni mogli iskazati pomoću drugi, te kako bi se razne definicije, teoremi i ostale tvrdnje sveli na najjednostavnije.

Kako je problem s usvajanjem geometrijskog mišljenja odavno postojao, ta tema bila je, i još uvijek jest, vrlo interesantna mnogim znanstvenicima. Istaknuti znanstvenici i istraživači tog područja bili su bračni par Pierre i Dina van Hiele. Oni su iznijeli teoriju o razinama mišljenja kroz koje se prolazi pri učenju geometrije. Ta teorija objašnjava zašto velik broj učenika uopće ima problema u nastavi geometrije, a zagovara malo prije spomenuti cilj u kojem učenici postepeno razvijaju sposobnost organiziranja, razumjevanja i povezivanja međusobnih objekata u geometriji. Pierre je pokušavao otkriti razlog lošeg uspjeha učenika u učenju geometrije, dok je Dina pokušavala otkriti metode u nastavi matematike (geometrije) koje bi riješile probleme u shvaćanju geometrije. Bračni par Van Hiele smatrao je da postoji pet diskretnih razina mišljenja kroz koje svaki pojedinac, koji uči geometriju, prolazi kako bi naposljetku stekao sposobnost izvoda i razumijevanja formalnih dokaza i razumio geometriju. Ključnu razliku među razinama predstavljaju objekti o kojima smo u stanju geometrijski misliti. Oni su smatrali da se na putu do više razine ne može preskočiti niti jedna prethodna ([15]). Pogledajmo koje su to razine i njihove karakteristike:

Razina 0 – Vizualizacija

Znanje učenika na ovoj razini temelji se na čistom prepoznavanju određenih geometrijskih likova. Učenici su u stanju prepoznati geometrijske likove kao što su trokut, kvadrat, krug. Ovdje učenici ne znaju karakteristike tih likova, nego na temelju jednog primjera zaključuju općenito kako izgleda npr. kvadrat. Na ovoj razini učenici često ne shvaćaju da je i kvadrat zapravo pravokutnik jer su oni te geometrijske likove zapamtili na temelju jednog karakterističnog primjera, pa im to zvuči kao nemoguće, a zapravo niti ne razmišljaju o tome.

Primjer: Učenici na razini 0 na nastavnikovo pitanje je li kvadrat pravokutnik bez razmišljanja odgovaraju da nije. Jedan od razloga koji bi mogli navesti kako bi opravdali tu svoju tvrdnju je da kvadrat ima sve stranice jednake duljine, dok kod pravokutnika s kojim su se prvo susreli to nije slučaj.

Razina 1 – Analiza

Učenici na ovoj razini proučavaju osobine raznih geometrijskih likova. Oni su spremni prepoznati razna svojstva nekog geometrijskog objekta, ali nisu spremni razlučiti koja su od njih potrebna, a koja dovoljna da ga opišu. Također, često su skloni razvrstavanju likova samo prema jednoj osobini, dok se ostale “manje vidljive” osobine poput dijagonala, simetrije često ignoriraju. Također, počinju vjerovati da ako neki lik pripada nekoj klasi, onda on ima sve osobine te klase. Na ovoj razini učenici nisu razvili pojam o klasi i potklasi.

Primjer 1: Učenici zaključuju da su pravokutnici svi likovi koji imaju četiri prava kuta, no tu ne staju i nabrajaju dalje da su im nasuprotne stranice paralelne, nasuprotne stranice jednakih duljina, dijagonale jednakih duljina koje se raspolavljaju. Prema njihovom mišljenju, kvadrat nije pravokutnik zato što iako ima četiri prava kuta, a njegove sve stranice su jednake duljine dok kod pravokutnika, prema njihovom mišljenju, to nisu.

Primjer 2: Učenici tvrde da su paralelogrami likovi koji imaju nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina, nasuprotne kutove jednakih veličina i dijagonale im se raspolavljaju, pa prema tome, romb nije paralelogram jer su mu sve stranice jednakih duljina.

Razina 2 – Neformalna dedukcija

Na ovoj razini učenici znaju što je dovoljno da se neki geometrijski lik opiše. Učenici su svjesni da postoje ekvivalentne definicije za isti pojam, počinju učiti prirodu definicija i vrijednost kontraprimjera. Također, na ovoj razini učenici počinju razmišljati deduktivno, ali još uvijek ne razumiju pravilo i značenje formalne dedukcije.

Primjer: Učenici su svjesni da je za definiciju paralelograma dovoljno reći da je paralelogram četverokut kojem su nasuprotne stranice paralelne.

Razina 3 – Dedukcija

Na ovoj razini učenici razumiju dedukciju, u mogućnosti su upotrebljavati apstraktne pojmove i razmišljati apstraktno, logički zaključivati, izvoditi srednjoškolske dokaze, razumiju značenje definicije, aksioma, teorema,…

Razina 4 – Strogost

Na ovoj razini mogu se nalaziti neki stariji učenici ili studenti. Uz sve navedeno na prijašnjim razinama, oni razumiju aksiome, definicije, teoreme te dolaze do vlastitih zaključaka. Oni razumiju i provode direktno i indirektno dokazivanje, te pokazuju razumijevanje i nekih neeuklidskih geometrija.

Nastavnici matematike u osnovnim i srednjim školama najčešće razmišljaju na razini 3 ili 4, dok učenici koji upisuju srednju školu razmišljaju na razini 1 ili 2.

Ako malo razmislimo možemo uočiti da se u našem sadašnjem planu i programu stvarno slijedi Van Hileova teorija i razine geometrijskog mišljenja, a zanimljivo je da je program za geometriju napisan još prije nego je Van Hiele osvijestio svoju teoriju.

Pogledavši 1. razred osnovne škole učenici su na razini 0. U prvom razredu nastavnici učenicima pokazuju razna geometrijska tijela i likove uz pomoć modela, traže slične modele u prirodnom okruženju i takve ih pamte. Ne razmišljaju o njihovim svojstvima. To su sami počeci razvoja geometrijskog mišljenja. Tijekom nižih razreda učenici savladavaju razinu 0 (vizualizaciju) i prelaze na razinu 1 (analiza). Već u 6. razredu možemo primijetiti da se pojavljuju prvi dokazi u geometriji poput dokaza tvrdnje da zbroj veličina kutova u trokutu iznosi 180°. Dakle, u 6. razredu odvija se prijelaz s razine 1 na razinu 2 (neformalna dedukcija) koja se uvježbava do kraja osnovne škole. U prvom razredu srednje škole učenici polako prelaze na razinu 3 (dedukcija) i tokom srednje škole ta se razina geometrijskog mišljenja izrazito njeguje i unaprjeđuje. Naravno, nije sve tako jasno i savršeno kao što zvuči. Gotovo je nemoguće točno odrediti trenutak kada učenik prelazi s jedne razine mišljenja na drugu. Prije svega, to nije nešto što se može točno izmjeriti nekim instrumentima, a također svi učenici su različiti pojedinci i napreduju različitim intenzitetom. Neka djeca zauvijek ostanu na razini 0 jer jednostavno nemaju mogućnost razvoja geometrijskog mišljenja, dok neki prelaze iz jedne razine geometrijskog mišljenja u drugu brže od svih drugih. Osim toga, učenici za neke geometrijske koncepte mogu biti na jednoj razini, dok kod nekih drugih geometrijskih koncepata na drugoj. Možemo zaključiti da nastavnik u nastavnom procesu i razvoju geometrijskog mišljenja igra veliku ulogu. Prema tome, osim pet razina mišljenja, Pierre i Dina van Hiele preporučili su i pet faza s postupcima koji odgovaraju prethodnim razinama kako bi se oni što uspješnije savladali.

Razini vizualizacije odgovara faza informiranja.

U ovoj fazi učenici se upoznaju s materijalom i nastavnik ih kroz diskusiju upoznaje s novom temom te od učenika dobiva povratnu informaciju o tome koliko učenici znaju o određenoj temi. Glavna zadaća nastavnika u ovoj fazi je prikupiti što više informacija o učenicima. Nastavnik mora shvatiti na kojoj se razini nalazi većina učenika, koji učenici su napredni, a koji su još na razini 0 kako bi znao na koji način organizirati nastavu i omogućiti napredak svim učenicima. Važno je da nastavnik shvati "kojim matematičkim jezikom oni pričaju", kako bi se međusobno u potpunosti razumjeli. Nakon upoznavanja s 5. razredom i 1. razredom srednje škole nastavnik provodi fazu informiranja, budući da su to razredi kojima je prije njega predavao neki drugi nastavnik.

Primjer: Mentalne mape na razne teme kako bi nastavnik dobio uvid u učeničko znanje, inicijalna provjera i slično.

Razini analiziranja odgovara faza usmjerenog vođenja.

U toj fazi nastavnik zadaje učenicima zadatak, a učenici sami istražuju, analiziraju, mjere i otkrivaju nove odnose koji im do sada nisu bili posve razumljivi. Zadaća nastavnika je voditi učenike kroz njihovo otkrivanje, odgovarati na njihova pitanja i slično.

Primjer: Učenici na nekoliko primjera istražuju odnos obodnog i središnjeg kuta u kružnici. Aktivnost provode uz pomoć programa dinamične geometrije Geogebra. U tablicu upisuju mjere središnjeg i pripadnog obodnog kuta. Nakon toga analiziraju ono što su izmjerili.

Razini apstrakcije odgovara faza objašnjavanja.

U toj fazi učenici izlažu ono što su otkrili prethodnim istraživanjem i mjerenjem, a nastavnik ih vodi na način da im ukazuje kako da sve to što su otkrili pretoče u matematički smisao, jezik i terminologiju.

Primjer: Povezano s prethodnim primjerom, učenici su donijeli zaključak o veličinama obodnog i pripadnog središnjeg kuta koje su izmjerili te izlažu ono što su zaključili prethodnim mjerenjem. Nastavnik potiče učenike da svoje zaključke iznesu u skladu s matematičkim jezikom i terminologijom. Učenici otkrivaju teorem o obodnom i središnjem kutu.

Razini dedukcije odgovara faza slobodnog usmjeravanja.

U toj fazi učenici primjenjuju dosadašnja znanja za rješavanje konkretnih problema, izvode srednjoškolske dokaze i slično.

Primjer: Učenici, uz nastavnikovo vođenje, dokazuju teorem o obodnom i središnjem kutu koji su otkrili u prethodnoj razini.

Razini strogosti odgovara faza integriranja.

U ovoj se fazi obrađuju i sumiraju prethodno stečena znanja i obrađene informacije se pamte.

Primjer: Učenici, nakon što su savladali dokaz teorema o obodnom i središnjem kutu, razmišljaju o drugim načinima dokazivanja tog teorema.

Neki znanstvenici nisu se u potpunosti slagali s Van Hileovom teorijom jer su smatrali da razine mišljenja nisu diskretne, odnosno da se učenik može naći na prijelazu između dvije razine ovisno o temi koja se proučava. Također, teško je uopće odrediti vrijeme koje je potrebno za savladavanje potrebne razine. "Dina van Hiele 1957. godine iznijela je teoriju – da je potrebno 20 lekcija – za prijelaz sa razine 0 na razinu 1, i 50 lekcija – sa razine 1 na razinu 2, ako se radi o dvanaestogodišnjacima" ([15]). Naravno, to nije moguće točno odrediti jer je svako dijete pojedinac s različitim mogućnostima u svakom pogledu, pa tako i u shvaćanju geometrije. U sukusu, van Hiele-ova teorija ne zagovara frontalni oblik rada i njezini autori smatraju da takav rad koji je praćen pasivnošću i memoriranjem činjenica ne doprinosi napretku, a pogotovo ne u geometriji. Ta teorija zalaže se da se djelotvorno učenje odvija samo kad učenici aktivno doživljavaju ono što uče, da je učenje iskustvom ono korisno učenje i da je uključivanje učenika u raspravu važan dio procesa učenja. Pogledavši malo te karakteristike, one nas opet dovode do istraživačke nastave, tj. učenja istraživanjem.

6 Učenje istraživanjem na konkretnim primjerima u području geometrije

Pod ovim naslovom nalaze se primjeri zadataka i problema pogodnih za nastavu istraživanjem u sadržajnom području geometrije koji mogu poslužiti nastavnicima kao inspiracija za neka istraživanja. Prije samih primjera moramo još spomenuti da je najteži dio svakog znanstveno-istraživačkog rada upravo postavljanje problema. U nastavi matematike u većini slučajeva je to nastavnikov zadatak, no nikada nije loše poticati učenike da oni sami postavljaju pitanja i nove probleme. Nakon što nastavnik postavi problem, sljedeći važan korak jest upravo, već spomenuto, "postavljanje skela". Nastavnik tijekom cijelog istraživanja svojim pitanjima vodi učenike kroz postavljen problem. Pri postavljaju skela (pitanja) nastavnik mora voditi računa o njihovoj logičkoj povezanosti i logičkom redoslijedu, o stupnju intelektualnog razvoja učenika, o individualnim razlikama i njihovom predznanju. "Slikovito rečeno: od svakog problema treba načiniti "stepenište" uz koje će se učenik uspinjati svojim vlastitim snagama i doći do cilja" ([12]). Pri postavljanju skela nastavnik se mora pridržavati načela M. Montessori: "Pomozi mi tako da to mogu učiniti sam" ([12]).

Također, za uspješnu primjenu metode istraživanja u nastavi matematike potrebno je sljedeće:

" 1. naviknuti učenike na pravi samostalan rad,

2. održavati istraživački duh kod učenika na potrebnoj visini,

3. pridržavati se načela postupnosti: početi s lakim i jednostavnijim problemima i postupno ići prema težima i složenijima,

4. provesti brižljivo raščlanjivanje složenih problema te podijeliti problem na primjerene metodičke korake,

5. pokazivati na primjerima kako se rješavaju problemi,

6. imati veliko strpljenje u radu i mnogo vremena,

7. imati upornost u radu,

8. imati suzdržanost u pružanju pomoći učenicima” ([12]).

Ostali glavni koraci u istraživanjima u nastavi su postavljanje hipoteza, izrada plana, poduzimanje akcije i prikupljanje podataka, donošenje zaključka, otkrivanje rješenja problema, prezentiranje rješenja i ispitivanje primjenjivosti i važnosti tog rješenja u ostalim problemima.

Sada kada smo teorijski razjasnili učenje istraživanjem u nastavi matematike, primijenimo to na konkretne primjere vezane uz sadržajno učenje geometrije.

Sljedeći primjer primjeren je učenicima 6. razreda osnovne škole.

6.1 Zbroj veličina kutova u trokutu

Istražite koliko iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu.

CILJ: Učenici će otkriti koliko iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta proučavajući razne vrste trokuta te će induktivno zaključiti da to pravilo vrijedi za svaki trokut. Na kraju će učenici neformalno dokazati da zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta iznosi 180°.

ISHODI UČENJA: Učenici će:

- izreći tvrdnju o zbroju veličina kutova u trokutu,
- neformalno dokazati da zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta iznosi 180°.

NASTAVNI OBLICI: suradnički rad u grupi

NASTAVNA METODA:
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava, induktivno zaključivanje

NASTAVNA SREDSTVA: izrezani trokuti od papira i kutomjer

I. ***strategija:*** Mjerimo uz pomoć kutomjera

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Nastavnik slaže učenike u grupe po četvero. Svaka grupa dobiva nekoliko trokutića te tablicu u koju će upisivati veličine kutova dobivenih trokuta.

Primjer tablice koju dobivaju učenici:

α	β	γ	$\alpha+\beta+\gamma$

Tablica 6.1: *Primjer tablice za učenike*

Uloga nastavnika: Nastavnik učenicima dijeli potreban materijal i objašnjava način rada na današnjem satu.

Uloga učenika: Učenici slušaju nastavnikove upute i pripremaju se za rad.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici mjere veličine unutarnjih kutova trokuta te ih upisuju u tablicu. Induktivno zaključuju da zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu iznosi 180°.

Uloga nastavnika: Nastavnik prati rad svih učenika. Vodi ih kroz zamišljenu aktivnost nesugestivnim pitanjima.

Uloga učenika: Učenici mjere zadano, komuniciraju i međusobno uspoređuju rezultate. Budući da učenici mjere uz pomoć kutomjera zbroj veličina unutarnjih kutova u nekim trokutima neće im ispasti baš 180°, pa će i o tome međusobno diskutirati. Učenici će otkriti da je zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu uvijek neka vrijednost vrlo blizu 180°.

Primjer kako bi učenici mogli ispuniti tablicu:

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}$
$75°$	$35°$	$70°$	$180°$
$26°$	$65°$	$90°$	$181°$
$55°$	$85°$	$40°$	$180°$
$45°$	$45°$	$90°$	$180°$
$39°$	$110°$	$30°$	$179°$

Tablica 6.2: *Primjer ispunjene tablice*

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

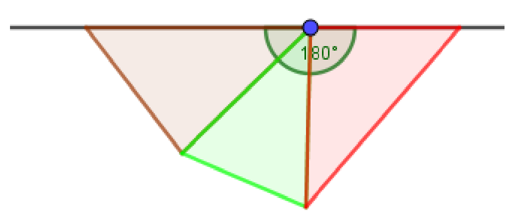
Učenici su otkrili da je zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu uvijek neka vrijednost vrlo blizu 180°, no nisu sigurno koliko ona točno iznosi i malo su zbunjeni. Prateći nastavnikove upute demonstracijom se uvjeravaju da taj zbroj zaista iznosi 180°.

Uloga nastavnika: Vodi učenike kako bi sami zaključili koliko zaista iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta. Pita učenike:

- Što pretpostavljate, koliko iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu?
- Kako bi mogli provjeriti je li zbroj veličina tih kutova zaista 180°?

Nakon kratke diskusije s učenicima, učenici otkriju ideju kako će provjeriti svoju pretpostavku.

Uloga učenika: Učenici će pretpostaviti koliko iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu i otkriti način kako provjeriti svoju pretpostavku. Svaki učenik crta ispruženi kut (kut veličine 180°) u svoju bilježnicu, uzima trokut od papira u kojem je mjerio veličine unutarnjih kutova te ga razreže tako da razdvoji 3 kuta tog trokuta. Budući da učenici žele provjeriti iznosi li zbroj njihovih veličina stvarno 180°, slažu te kutove uz nacrtani ispruženi kut, tako da po dva imaju zajednički krak, a vrh svih kutova je u vrhu ispruženog kuta. Na taj način učenici su se uvjerili da je njihova pretpostavka bila točna.



Slika 6.1: *Primjer mogućeg rješenja iz učeničke bilježnice*

II. ***strategija:*** Koristimo program dinamičke geometrije Geogebra

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici pale računala u učionici ili odlaze u učionicu s računalima i pokreću program Geogebra.

Uloga nastavnika: Nastavnik uvodi učenike u problem koji želimo razriješiti, odnosno u ono što želimo otkriti.

- Kako ćemo uz pomoć računala otkriti koliko iznosi zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu?
- Jesmo li već koristili neki program koji bi nam danas mogao pomoći?
- Što ćemo napraviti sada kada smo pokrenuli program Geogebra?

Uloga učenika: Učenik sluša nastavnikove upute, komunicira s njime i priprema se za rad.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici crtaju različite trokute u Geogebri i uočavaju da zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu koji su nacrtali iznosi 180°.

Uloga nastavnika: Nadgleda rad svakog učenika, prati učeničke zaključke te daje učenicima povratnu informaciju o njihovom uspjehu/neuspjehu u ovom istraživanju.

Uloga učenika: Učenici komuniciraju međusobno i prate rad svojih kolega te zaključuju da koji god trokut konstruirali u Geogrebri, zbroj veličina unutarnjih kutova je uvijek isti.

ZAKLJUČAK

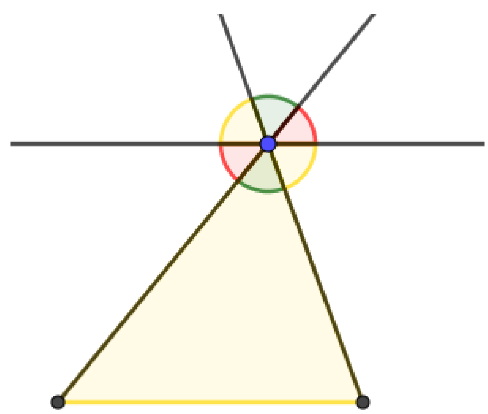
Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici uz pomoć programa Geogebra potvrđuju svoje zaključke iz središnjeg dijela ove aktivnosti.

Uloga nastavnika: Nastavnik navodi učenike da smisle način kako će provjeriti svoj zaključak.

- Kako ćete provjeriti je li vaš zaključak točan?
- Imate li ideju kako bi to provjerili bez mjerenja kutova u trokutu?
- Možete li se sjetiti nečeg sličnog od prije?
- Koje predznanje možemo ovdje iskoristiti?

Uloga učenika: Učenici otkrivaju kako će provjeriti je li njihov zaključak točan, tj. je li zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak 180°. Učenici se prisjećaju znanja o kutovima uz presječnicu usporednih pravaca, te iznose ideju da ako povuku pravac kroz jedan vrh trokuta, koji je paralelan stranicom koja se nalazi nasuprot tog vrha, mogu iskoristiti to predznanje. Uočavaju da kutovi α, β, γ čine ispruženi kut pa je njihov zbroj naravno 180°. Učenici konstruiraju popratnu sliku u Geogebri.



Slika 6.2: *Primjer moguće konstrukcije pomoću koje učenici donose zaključke*

Budući da matematika voli stroge dokaze i ne temelji svoje tvrdnje samo na eksperimentima i takvim istraživanjima poput ovog ovdje provedenog dobro je da učenici, koji su već dorasli tome, strogo zapišu dokaz uz odgovarajuće argumente. Učenicima u 6. razredu je upravo ovaj dokaz o zbroju veličina unutarnjih kutova trokuta prvi dokaz s kojim se susreću u svojem školovanju pa ne bi bilo loše malo se zadržati na njemu. Ako primijetimo da razred koji podučavamo nije na to spreman, ostat ćemo samo na provedenom istraživanju i demonstraciji. U srednjim školama važno je da učenik ono što otkrije istraživačkom nastavom to i dokaže, odnosno da dokaže ili opovrgne kontraprimjerom hipotezu koju je na početku postavio.

6.2 Opseg kruga

Formule za opseg i površinu kruga često su teško pamtljive učenicima u 7. razredu osnovne škole kada se s njima prvi puta susretnu, budući da se te formule razlikuju od formula za površinu pravokutnika i trokuta koje su im već prihvatljive. Pogledajmo primjer istraživanja u nastavi koje će nas dovesti do opsega kruga.

Otkrijte formulu za opseg kruga.

CILJ: Istraživanjem otkriti formulu za opseg kruga.

ISHOD UČENJA: Učenici će izreći formulu za opseg kruga: $o = 2r\pi$, pri čemu je r njegov polumjer.

NASTAVNI OBLICI: suradnički rad u grupi

NASTAVNA METODA:
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava, induktivno zaključivanje

NASTAVNA SREDSTVA: poklopci kružnog oblika, konac, ravnalo, džepno računalo, tablica

Izgled tablice:

Opseg kruga o/ cm	**Promjer kruga $2r$/ cm**	**Omjer $\frac{o}{2r}$ (procjena)**

Tablica 6.3: *Primjer tablice koju dobivaju učenici*

I. ***strategija*:** Radimo pomoću modela koje su donijeli učenici

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Nastavnik dijeli učenike u grupe. Učenici pripremaju potrebni materijal: plastične poklopce kružnog oblika, konac, ravnalo, džepno računalo te im nastavnik dijeli gornju tablicu. Učenici imaju zadatak popuniti dobivenu tablicu s podacima koje će otkriti pomoću dobivenog materijala.

Uloga nastavnika: Nastavnik razgovorom s učenicima vodi učenike prema pravoj strategiji.

- Kako ćemo koristiti materijal koji ste donijeli?
- Jesmo li već radili slična istraživanja?

- Za što nam treba konac?
- Možete li mi rukama na jednom od modela pokazati što je opseg kruga?
- Kako ćemo izmjeriti tu duljinu?

Uloga učenika: Otkriti strategiju kojom će izmjeriti opseg kruga.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici su otkrili strategiju i namotavaju konac oko modela koje imaju (poklopaca kružnog oblika). Nakon što jednom omotaju konac oko poklopca, opet ga razmotaju i izmjere duljinu konca koja je potrebna da se jednom omota poklopac.

Uloga nastavnika: Pratiti rad svih učenika te provoditi formativno vrednovanje tijekom istraživanja.

Uloga učenika: Učenici zaključuju da je duljina jednom namotanog konca oko poklopca zapravo opseg tog poklopca kružnog oblika, pa sada znaju ispuniti tablicu.

Jedan od primjera kako su učenici mogli ispuniti tablicu:

Opseg kruga o/ cm	**Promjer kruga $2r$/ cm**	**Omjer $\frac{o}{2r}$ (procjena)**
17	5.4	3.1481
15.7	5	3.14
23.6	7.5	3.1467
13.2	4.2	3.1428
20.1	6.4	3.1406

Tablica 6.4: *Primjer ispunjene tablice*

Nakon što su ispunili sva tri stupca u tablici, učenici uočavaju da je u zadnjem stupcu uvijek približno ista vrijednost, bez obzira na poklopac čiji opseg su mjerili.

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici još malo proučavaju tablicu i induktivno zaključuju, da je omjer $\frac{o}{2r}$ u svakom mjerenju neki broj vrlo blizu $3{,}14$. Budući da učenici mjere ravnalom ili metrom, njihova mjerenja neće biti precizna kao što bi to bilo da aktivnost i mjerenja provode pomoću računala. Otkrivaju formulu za opseg kruga pomoću tablice.

Uloga nastavnika: Ne sugestivnim pitanjima dovesti učenika do samog otkrića tražene formule. Potaknuti kod učenika razmišljanje o tome da smo ovu formulu zaključili samo iz nekoliko primjera, a matematika zahtjeva pravi dokaz. Osim toga, nastavnik skreće pažnju učenika još jednom na dobivene omjere $\frac{o}{2r}$ te otkriva da se radi o broju koji označavamo grčim slovom π, a koji približno iznosi 3.14, pa je formula za opseg kruga: $o = 2r\pi$.

Uloga učenika: Učenici promatrajući podatke u tablici i otkrivaju formulu za opseg kruga.

II. ***strategija:***

U ovoj strategiji učenici ne rade uz pomoć opipljivih materijala (kružnih poklopaca, konca), nego koriste program dinamičke geometrije Geogebru (Sketchpad i sl.). Primjenom programa Geogebra, učenici mogu mijenjati duljinu promjera (ili polumjera) kruga, pa tako dobivati podatke koje će upisivati u tablicu. „Ako opsege $o_1, o_2, o_3,$ ... različitih krugova međusobno usporedimo, utvrdit ćemo da krugu 2,3,4,... puta većeg promjera pripada 2,3,4,... puta veći opseg. Spojimo li točke kojem pripadaju uređeni parovi $(2r, o)$, dobit ćemo grafički prikaz ovih dviju veličina. Sve te točke nalaze se na istom polupravcu s početkom u ishodištu koordinatnog sustava" ([3]). Nakon što nacrtamo opisani polupravac, njegov nagib odgovara koeficijentu proporcionalnosti omjeru opsega kruga i duljine promjera. Taj omjer je konstantan i jednak broju π. I ovo je jedan, svakako precizniji način, dolaženja do formule za opseg kruga ([3]).

III. ***strategija:***

„Nastavnik može u dogovoru s učenicima provesti projekt koji će učenici provoditi tijekom tjedan dana u samostalnom istraživanju. Važno je učenike uputiti u cilj projekta: mjerenje i bilježenje opsega kružnih predmeta i njihovih promjera kako bi uočili postoji li među njima određena povezanost“ ([3]). Učenici opet imaju zadatak mjeriti opseg i promjer raznih kružnih predmeta na koje naiđu kroz tjedan dana i podatke upisuju u tablicu. Nakon provedenog istraživanja izvan nastave, učenici zajedno s nastavnikom rade analizu provedenog zaključivanja te učenici iznose zaključke uz nastavnikovo vođenje.

Izgled tablice:

Predmet	Opseg	Promjer	Omjer

Tablica 6.5: *Primjer tablice koju dobivaju učenici*

Jedan od primjera kako su učenici mogli ispuniti tablicu:

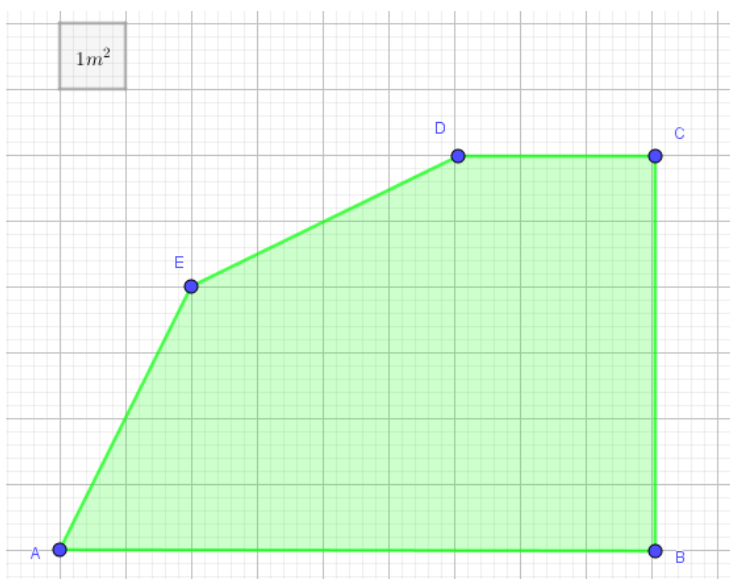
Predmet	Opseg	Promjer	Omjer
Okrugli bazen	7.7 m	2.45 m	3.1428
Okrugli tanjur	66 cm	21 cm	3.1428
Stol	260.75 cm	83 cm	3.1416
Sat			
CD			

Tablica 6.6: *Primjer ispunjene tablice*

Sljedeći problem primjeren je učenicima 7. razreda osnovne škole.

6.3 Površina nepravilnog mnogokuta

Odredite površinu travnjaka sa slike.



Slika 6.3: *Travnjak čija površina se traži*

CILJ: Izračunati površinu nepravilnog mnogokuta na način da učenici pronađu dijelove nepravilnog mnogokuta čija se površina zna izračunati.

ISHODI UČENJA: Učenik samostalno računa površine nepravilnih mnogokuta.

NASTAVNI OBLICI: rad u grupi

NASTAVNA METODA:

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava, induktivno zaključivanje

NASTAVNA SREDSTVA: geometrijski pribor, računalo, nastavni listić

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici dobivaju nastavni listić sa zadanim problemom.

Uloga nastavnika: U uvodnom dijelu nastavnik postavlja problem, daje kratke upute u kojima govori da na nastavnom listiću imaju sliku na kojoj je travnjak čija površina se traži dan tako da je $1\ cm$ na ovoj slici jednak $1\ m$ u prirodi, dijeli učenicima nastavne listiće te organizira istraživanje – slaže učenike u grupe. Uz nekoliko pitanja, nastavnik navodi učenike da potpuno shvate zadani problem:

- Što se od nas traži?
- Ima li ovaj travnjak neki karakterističan oblik?
- Jeste li se već susretali sa sličnim zadacima?

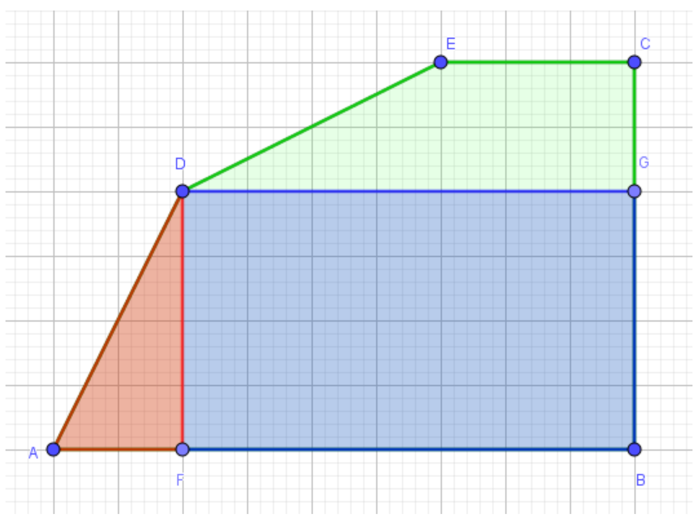
Uloga učenika: Učenici čitaju postavljeni problem još jednom i u grupama razmišljaju o strategijama pomoću kojih će riješiti problem. Uočavaju da jedan kvadratić u kvadratnoj mreži kojom je prekriven zadani travnjak ima površinu $1\ m^2$. Učenici uočavaju da zadani travnjak ima oblik nepravilnog mnogokuta, prema tome shvaćaju da je njihov zadatak odrediti površinu nepravilnog mnogokuta. Učenici međusobno razmjenjuju ideje u grupi te se odlučuju za jednu od strategija.

SREDIŠNJI DIO

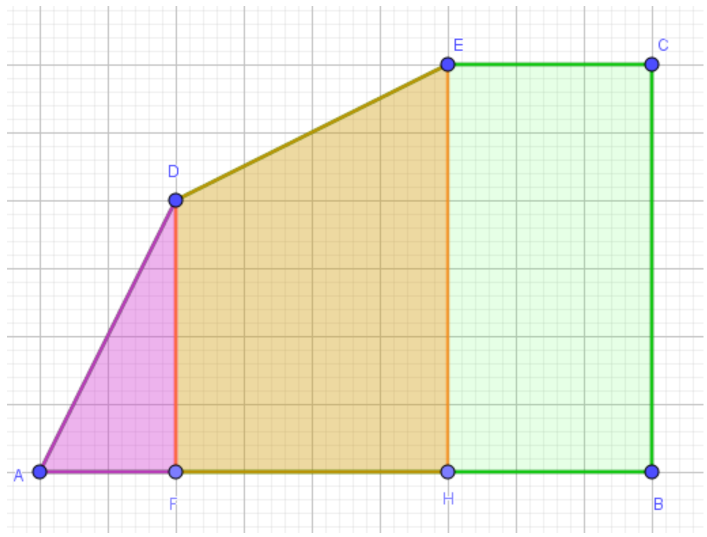
I. ***strategija:*** Dijelimo nepravilni mnogokut na jednostavne likove čije površine znamo izračunati, na papiru uz pomoć geometrijskog pribora.

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici uz pomoć geometrijskog pribora dijele zadani travnjak, odnosno nepravilni mnogokut na jednostavne likove čije površine znamo izračunati. Na kraju računaju površinu traženog travnjaka.



Slika 6.4: *Primjer podijele travnjaka na jednostavne likove*



Slika 6.5: *Primjer podijele travnjaka na jednostavne likove*

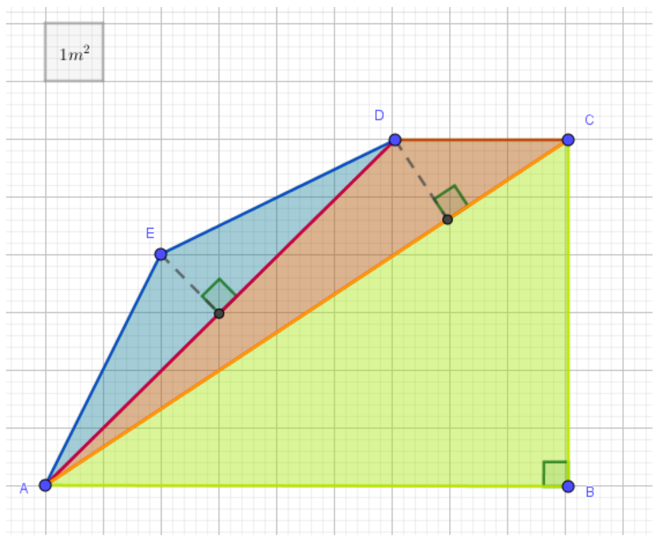
Uloga nastavnika: Nastavnik prati rad svake grupe učenika, primjećuje različite strategije rješavanja zadanog problema te vodi svaku grupu učenika s obzirom na odabranu strategiju rješavanja problema. Potiče rad učenika u grupi, njihovu komunikaciju, razmjenu ideju, međusobnu provjeru.

Uloga učenika: U komunikaciji s ostalim učenicima u grupi učenici dijele nepravilni mnogokut na nekoliko jednostavnih likova. Učenici su nepravilni mnogokut mogli podijeliti na različite načine (dva načina prikazana su na gornjoj slici), ali primjereno spomenutoj strategiji. Provjeravaju znaju li izračunati površine novih likova. Budući da sve potrebne podatke mogu iščitati iz dane slike na nastavnom listiću nije problem izračunati površinu likova koje su dobili. Učenici računaju njihove površine, te zbrajanjem dobivaju površinu traženog travnjaka.

II. ***strategija:*** Dijelimo nepravilni mnogokut na trokute čije površine znamo izračunati

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici uz pomoć geometrijskog pribora, kao i u prethodnoj strategiji, dijele zadani travnjak, odnosno pravilni mnogokut na trokute. Na kraju računaju površinu traženog travnjaka.



Slika 6.6: *Primjer podijele travnjaka na trokute*

Uloga nastavnika: Isto kao i u prethodno opisanoj strategiji. Ono što je novo je da nastavnik prati učenike kako određuju površinu dobivenih trokuta i pruža im potporu kada je to potrebno.

Uloga učenika: Slično prethodnoj strategiji, učenici dijele nepravilni mnogokut na jednostavne likove, ali u ovom slučaju samo na trokute. To mogu također napraviti na više načina, a jedan od njih prikazan je na gornjoj slici. Učenici zajedno u grupi uočavaju na kakve trokute su podijelili travnjak, odnosno nepravilni mnogokut, prisjećaju se formule za površinu trokuta i uočavaju da će im trebati visine trokuta na koje su podijelili mnogokut.

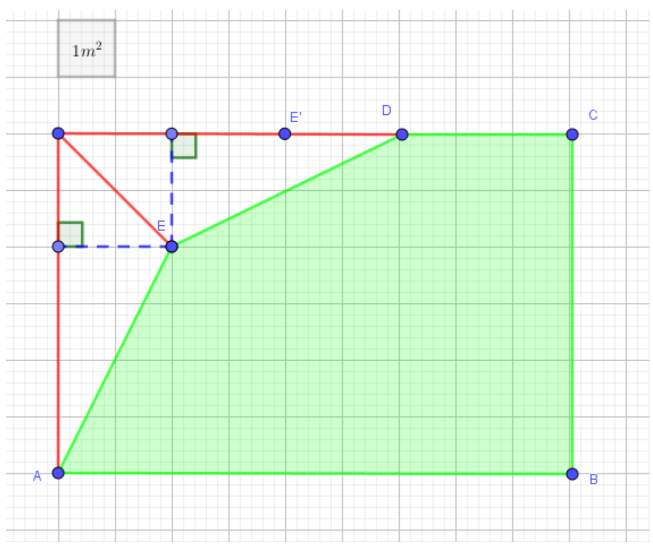
Uz pomoć geometrijskog pribora konstruiraju visine, mjere duljine odgovarajućih visina i određuju traženu površinu.

III. ***strategija:*** Računamo površinu nepravilnog mnogokuta dopunom do pravokutnika

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici uočavaju da se dani travnjak u obliku nepravilnog mnogokuta može nadopuniti do pravokutnika te je to još jedan od načina kako možemo izračunati površinu traženog travnjaka. Učenici pomoću geometrijskog pribora nadopunjuju nepravilni mnogokut do pravokutnika, te u grupi rješavaju zadani problem.

Primjer nadopune travnjaka u obliku nepravilnog mnogokuta do pravokutnika:



Slika 6.7: *Primjer nadopune do pravokutnika*

Uloga nastavnika: Kao i u prethodnim strategijama nastavnik prati rad učenika te ih vodi u situacijama koje ih zbunjuju, ako je to potrebno.

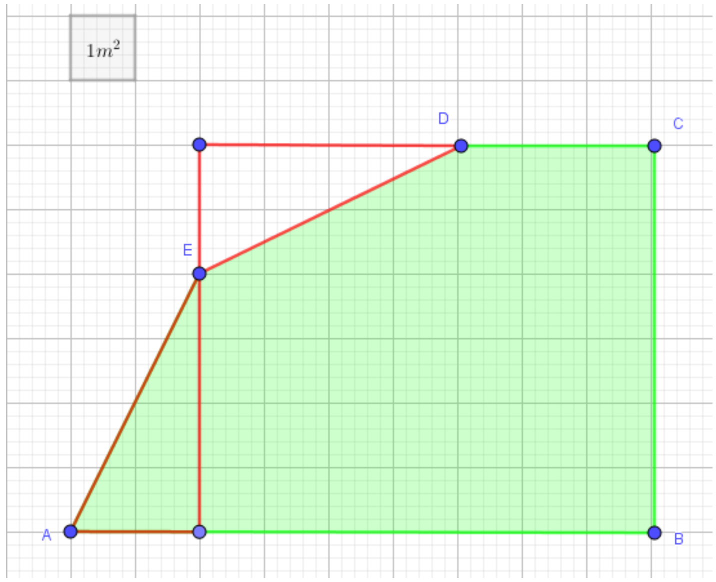
Uloga učenika: Učenici nadopunjuju nepravilni mnogokut do pravokutnika jer je njihova ideja izračunati površinu tog pravokutnika i od njega oduzeti površinu dijela koji ne pripada travnjaku. Jedini problem je odrediti površinu dijela u pravokutniku koji nije dio travnjaka, no brzo uočavaju način kako će to izračunati. Konkretno, kod nadopune koju vidimo na gornjoj slici uočavamo da se onda sastoji od dva trokuta čiju površinu mogu s lakoćom izračunati. Učenici rješavaju problem u grupi.

IV. ***strategija:*** Računamo površinu nepravilnog mnogokuta prebrojavanjem kvadratića u kvadratnoj mreži

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici pokušavaju prebrojati kvadratiće kako bi otkrili površinu travnjaka, no uočavaju da su neki kvadratići djelomično dio travnjaka, a dio izvan njega. Malo opširnijim razmišljanjem učenici uočavaju način kako će otkriti površinu traženog pravokutnika te tako rješavaju problem.

Primjer ideje za primjenu strategije „prebrojavanje kvadratića“:



Slika 6.8. *Primjer podijele travnjaka za primjenu strategije „prebrojavanje kvadratića“*

Uloga nastavnika: Slično prethodnim strategijama nastavnik nadgleda rad učenika u grupi i strategiju koju oni koriste. Nastavnik nesugestivnim pitanjima vodi učenike kako bi pomoću zamišljene strategije riješili postavljeni problem.

Uloga učenika: Učenici uočavaju da ako jedan dio nepravilnog mnogokuta (travnjaka) „preselimo“ na pogodno mjesto, dobivamo opet pravokutnik čiju površinu možemo otkriti brojanjem kvadratića u kvadratnoj mreži kojom je pokriven zadani travnjak. Učenici 7. razreda spremni su i argumentirati zašto su dva crvena trokuta na slici sigurno sukladna, njih su morali uočiti kako bi izveli malo prije spomenuti postupak „preseljenja“. Učenici brojanjem kvadratića rješavaju problem.

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Na kraju, svaka grupa predstavlja svoju strategiju rješavanja postavljenog problema. Svi učenici imaju zadan travnjak istog oblika, kako bi u ovom trenutku predstavljanja strategija lakše pratili obrazloženje i rješenje ostalih grupa. Ovakva demonstracija različitih strategija dodatno će potaknuti raspravu među učenicima, oni će uočiti da se jedan problem može riješiti na više načina te će lako uspoređivati dobiveni rezultat s drugim učenicima. Budući da u početnom problemu nije pisalo odredi površinu nepravilnog mnogokuta, nego površinu travnjaka, ovo je trenutak kada učenici uočavaju primjenu matematičkih metoda u svakodnevnom životu.

Uloga nastavnika: Slušati izlaganje svih grupa u kojima učenici predstavljaju različite strategije rješavanja zadanog problema, ali i samog rješenja problema. Nastavnik skreće pažnju učenika na važna mjesta u primjeni određene strategije, prati jesu li svi učenici razumjeli ono što drugi učenici predstavljaju, te prate li uopće učenici jedni druge. Nastavnik skreće pozornost učenika na primjenu strategija rješavanja ovog problema u ostalim budućim problemima i u svakodnevnom životu. Također, nastavnik skreće pozornost na strategije koje učenici nisu spomenuli u svom izlaganju. Spominje ulogu računala i raznih programa dinamične geometrije kod rješavanja sličnih problema.

Uloga učenika: Učenici slušaju izlaganje jedni drugih, komentiraju tuđa izlaganja, postavljaju pitanja, daju odgovore na postavljena pitanja, šalju povratnu informaciju nastavniku o uspješnosti rada i razumijevanja problema. Daju ideje za još neke strategije.

V. ***strategija:*** Problem možemo riješiti i primjenom jedne od navedenih strategija u programu dinamične geometrije Geogebra.

6.4 Težište trokuta

Istražite u kojem omjeru težište trokuta dijeli težišnice ([12]).

CILJ: Otkriti u kojem omjeru težište trokuta dijeli svaku težišnicu.

ISHOD UČENJA: Učenik će izreći tvrdnju da težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta.

NASTAVNI OBLICI: rad u paru

NASTAVNA METODA:
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava, induktivno zaključivanje

NASTAVNA SREDSTVA: tablica

Izgled potrebne tablice:

Vrsta trokuta s obzirom na duljinu stranica	$\|AT\|$	$\|TP_1\|$		$\|BT\|$	$\|TP_2\|$		$\|CT\|$	$\|TP_3\|$

Tablica 6.7: *Primjer tablice koju dobivaju učenici*

I. ***strategija*****:** Rad uz pomoć programa dinamičke geometrije Geogebra

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Nastavnik dijeli učenike u parove i daje im pripremljenu tablicu. Učenici u paru diskutiraju na koji način će započeti rješavati problem, razvijaju plan. Osim toga, nastavnik učenicima objašnjava značenje dužina istaknutih u tablici. Podsjeća ih na koji način dobivamo polovište neke stranice.

Uloga nastavnika: Nastavnik diskutira s učenicima o njihovim hipotezama i planu rješavanja. Nastavnik organizira proces istraživanja, te postavlja učenicima sljedeća pitanja čije odgovore također zajedno komentiraju.

- Znate li što je težište trokuta?
- Koje su vaše hipoteze koje ste postavili? Što pretpostavljate?
- Kakav rezultat očekujete?
- Imate li plan?
- Podsjeća li vas ovo na nešto što ste već vidjeli, nešto s čime ste se već susreli?

Uloga učenika: Učenici u paru s kolegama razvijaju plan istraživanja i postavljaju hipoteze.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici u programu Geogebra konstruiraju razne trokute ABC, s polovištima stranica P_1, P_2, P_3 koja dobivaju povlačenjem simetrala stranica trokuta. Mjere duljine dužina koje su istaknute u tablici koju su dobili i popunjavaju tablicu. Nakon popunjene tablice učenici donose razne zaključke.

Primjer dijela ispunjene tablice:

Vrsta trokuta s obzirom na stranice	$\lvert AT \rvert$	$\lvert TP_1 \rvert$		$\lvert BT \rvert$	$\lvert TP_2 \rvert$		$\lvert CT \rvert$	$\lvert TP_3 \rvert$
jednakostraničan	1.73	0.865		1.73	0.865		1.73	0.865
jednakokračan	2.4	1.2		2.4	1.2		2.67	1.33
raznostraničan	3.02	1.51		2.03	1.015		1.2	0.6

Tablica 6.8: *Dio ispunjene tablice*

Uloga nastavnika: Prati rad svakog para, vodi ih kroz proces istraživanja uz sljedeća pitanja:

- Što primjećujete? Postoji li veza između podataka u tablici?
- Što zaključujete?

Uloga učenika: Učenici popunjavaju tablicu i donose određene zaključke. Učenici iz dane tablice i iz trenutnog istraživanja mogu donijeti razne i točne i netočne zaključke. Neki od zaključaka koje učenici mogu donijeti proučavajući jednakostranične, jednakokračne i raznostranične trokute su:

Jednakostranični trokuti:

- sve težišnice imaju jednake duljine,
- sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki (težištu),
- težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta.

Jednakokračni trokuti:

- dvije težišnice imaju jednake duljine,
- sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki (težištu),
- težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta.

Raznostranični trokuti:

- sve težišnice su različitih duljina,
- sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki (težištu),
- težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta.

Iz svih navedenih zaključaka, učenici uočavaju da za sve trokute vrijedi: $|AT|:|TP_1| = 2:1$, $|BT|:|TP_2| = 2:1$, $|CT|:|TP_3| = 2:1$ te da se sve tri težišnice uvijek sijeku u jednoj točki (težištu) ([12]).

Osim tih zaključaka, učenici mogu donijeti još neke zaključke kao što su da se simetrale stranica trokuta također sijeku u jednoj točki te da raspolavljaju svaku stranicu. Osim toga, ako učenici odluče proučavati samo jednu vrstu trokuta u opasnosti su od donošenja krivih zaključaka. Kod jednakostraničnih trokuta učenici uočavaju da su sve težišnice u trokutu jedake duljine, pa mogu zaključiti da to vrijedi i za sve ostale trokute. Proučavanjem jednakokračnih i raznostraničnih trokuta uvjerit će se da je ta njihova tvrdnja pogrešna ([12]).

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici grafički prikazuju podatke iz tablice tako da na os apscisu nanose udaljenost težišta od polovišta nasuprotne stranice, a na os ordinata udaljenost vrha trokuta do težišta. Određivanjem nagiba tih grafova (pravaca) koji je jednak omjeru udaljenosti vrha trokuta od težišta i udaljenosti težišta od polovišta nasuprotne stranice, dobivamo 2. Dakle, dobiva se isti zaključak kao prije.

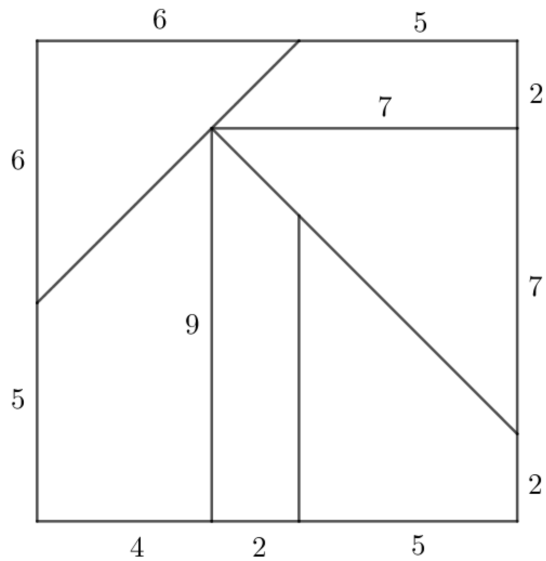
Uloga nastavnika: Nastavnik komentira zaključke s učenicima, ali ih isto tako podsjeća da matematika zahtjeva strogi dokaz i potiče učenike da pokušaju dokazati tvrdnju koju su zaključili.

Uloga učenika: Crtanje grafova koji (donekle) potvrđuju zaključke. Učenici pokušavaju izvesti strogi dokaz dobivene tvrdnje.

6.5 Slagalica

Jedan od pristupa realizacije istraživački usmjerene nastave matematike je tzv. Teorija didaktičkih situacija začetnika Guya Brousseaua, francuskog istražitelja unaprijeđenja matematičkog obrazovanja. Prema njegovoj teoriji nastavnici bi trebali dizajnirati didaktičku okolinu u kojoj će od učenika tražiti da igraju igru te će učenici na taj način rješavati zadani problem i konstruirati novo znanje uz minimalnu pomoć nastavnika. Didaktička okolina možda biti bilo što povezano uz nastavu matematike, od raznih pomagala u nastavi, računala, ravnala ili nekog drugog objekta do samog učeničkog znanja ([9]). Sljedeći primjer je upravo primjer G. Brousseaua koji promovira spomenutu teoriju u kojoj je didaktička okolina zapravo slagalica..

Povećajte danu slagalicu na slici tako da 4 cm na danoj slagalici bude 7 cm na novoj slagalici. Napravite od papira dijelove nove slagalice ([2]).



Slika 6.9. *Zadana slagalica*

Ovaj primjer primjeren je učenicima 7. razreda osnovne škole prije uvođenja koncepta sličnosti ili nakon. Problem je pogodan u oba slučaja.

CILJ: Otkriti da je nova slagalica koju učenici moraju izraditi slična prethodnoj s faktorom $\frac{7}{4}$, tj. prepoznati koncept sličnosti u zadatku (ako je sličnost prije spomenuta) ili otkriti da je ispravna strategija množenje danih dijelova s faktorom $\frac{7}{4}$, pa zatim nastavnik u razgovoru s učenicima otkriva da se radi o sličnosti.

ISHOD UČENJA: Učenik će povezati sličnost i proporcionalnost duljina odgovarajućih dužina za likove u ravnini.

NASTAVNI OBLICI: suradnički rad u grupi

NASTAVNA METODA:

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava

NASTAVNA SREDSTVA: zadana slagalica, geometrijski pribor

I. ***strategija:*** Slagalica na papiru

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Nastavnik dijeli učenike u grupe te dijeli učenicima isprintane slagalice na papiru i upućuje ih da pripreme geometrijski pribor, prazan papir i daje im upute o zadanom problemu. Zadana je slagalica koju su dobili na papiru, a učenici imaju zadatak uvećati slagalicu tako da 4 cm bude 7 cm.

Uloga nastavnika: Upućuje učenike u postavljen problem i organizira proces istraživanja.

Uloga učenika: Slušaju nastavnikove upute i razmišljaju o postavljenom problemu.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici ne samo što su formirani u grupe, moraju i djelovati kao grupa. Svaki učenik izrađuje jedan dio (ili više dijelova) slagalice po danim uputama tako da svaki učenik izradi jednako mnogo dijelova nove slagalice (ovisi o broju učenika u grupi). Posebno, nastavnik mora napomenuti učenicima da nije dopušteno da odjednom rade cijelu novu slagalicu kombinirajući dijelove, nego je važno da svaki učenik radi jedan ili više dijelova slagalice te da na kraju pokušaju složiti novu slagalicu i uvjere se u točnost/netočnost strategije kojom su rješavali dani problem. Učenici otkrivaju da se radi o konceptu sličnosti, odnosno da je nova slagalica slična zadanoj s koeficijentom sličnosti $\frac{7}{4}$.

Uloga nastavnika: Nastavnik vodi učenike kroz istraživanje zadanog problema stavljajući naglasak na to da učenici sami otkriju dobru strategiju za rješenje problema.

Uloga učenika: Učenici moraju otkriti strategiju kojom će riješiti ovaj zadatak, odnosno otkriti da se radi o sličnosti. Osim toga, ovdje učenici imaju i „kontrolu“ prilikom rješavanja ovog problema. Ako su učenici radili na krivi način dijelovi u slagalici neće se slagati jedni s drugima i to im govori da problem nije riješen i da je njihova strategija bila pogrešna. Ako jesu, njihova strategija je bila dobra i problem je uspješno riješen. Također, učenici kontroliraju i ostale kolege u grupi jer ako se neki dijelovi slagalice poklapaju, a neki ne, očito je netko od njih koristio krivu strategiju.

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici u komunikaciji s nastavnikom predstavljaju svoju strategiju rješavanja danog problema i pokazuju jesu li uspješno riješili problem ili ne. Učenicima je odmah jasno je li problem riješen zbog samog koncepta slagalice. Ako se dijelovi u slagalici ne slažu, znači da problem nije riješen.

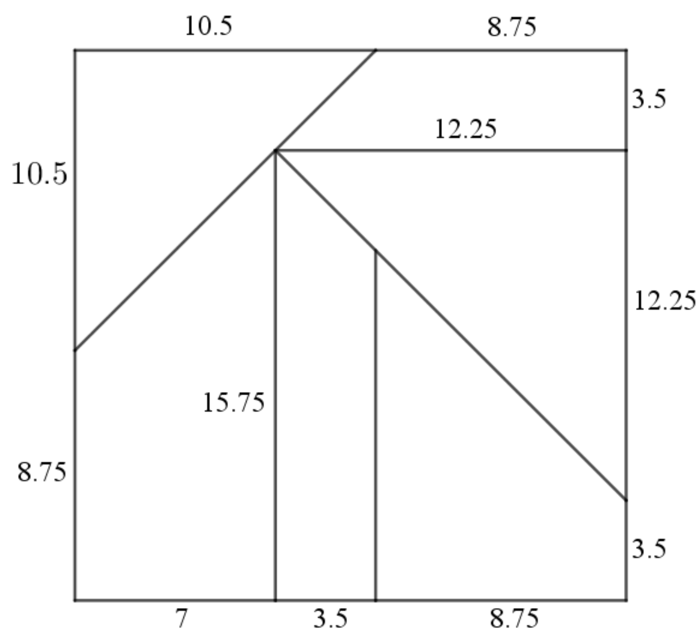
Uloga nastavnika: Slušati učenička otkrića i zaključke te na kraju iskazati cjelokupni zaključak zadanog problema koji je povezan s konceptom sličnosti.

Uloga učenika: Izlagati svoja otkrića i zaključke drugim grupama te ispraviti svoju strategiju ako je ona bila pogrešna po uzoru na ostale.

II. ***strategija:*** Rješavamo problem uz pomoć računala

Ova strategija uvelike ubrzava rješavanje danog problema budući da se povećanje dijelova slagalice može vrlo lagano izvesti uz pomoć programa Geogebre, ali je također glavni cilj povezati povećanje te slagalice s konceptom sličnosti. Koraci strategije vrlo su slični gornjima, pa ih ne moramo opet pisati. Jedina promjena je rad na računalu, pa su učenici puno brži. Također, u gornjoj strategiji svaki učenik radio je jedan dio slagalice pa su onda te dijelove spajali. U ovom slučaju teško je spajati dijelove slagalice, ako se rade na različitim računalima, a na jednom računalu može raditi samo jedan učenik pa niti to nije rješenje. Prema tome, u ovom slučaju bolje bi bilo da učenici rade u paru pa tako podijele poslove ili samostalno. To nije preveliko opterećenje za učenike budući da je uz pomoć računala sam proces povećanja tih dijelova u slagalici vrlo brz, a opet se sve svodi samo na otkriće dobre strategije za rješenje postavljenog problema.

Primjer nove slagalice napravljene u programu Geogebra:



Slika 6.10: *Primjer nove slagalice*

Pogrešna strategija: Povećanje svih dijelova slagalice za 3 cm.

6.6 Tetivni četverokut

Borna se nakon nekoliko godina života u Berlinu sjetio da bi htio vidjeti svoje stare prijatelje Zvonimira, Petra i Renata. Zvonimir živi u Zagrebu, Petar u Parizu, a Renato u Rimu. Nakon obavljenog razgovora, dogovorili su se da će se naći na aerodromu grada koji je jednako udaljen od Berlina, Zagreba, Pariza i Rima. Možemo li odrediti položaj grada u kojem će se sastati stari prijatelji? ([1])

Istraživanje postavljenog problema primjereno je 1. razredu gimnazije, a postavljeni problem razrađen je uz pomoć materijala ([1]). Na početku sata nastavnik postavlja problem. Situacija koja se spominje u postavljenom problemu učenicima je vrlo bliska i brzo će se početi javljati neke ideje o načinu rješavanja. Nastavnikova uloga je voditi učenike kroz ovaj problem tako da istražujući i rješavajući neke jednostavnije slične probleme, koje je nastavnik pripremio na nastavnom listiću, postepeno otkriju rješenje postavljenog problema. Za istraživanje ovog problema trebat će nam učionica koja ima računala.

CILJ: Otkriti rješenje problema i istražiti kada se četverokutu može opisati kružnica.

ISHOD UČENJA: Učenik iskazuje svojstva tetivnog četverokuta.

NASTAVNI OBLICI: suradnički rad u grupi

NASTAVNA METODA:
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava

NASTAVNA SREDSTVA: nastavni listić**,** karta Europe**,** karta Hrvatske**,** Geogebra (ili Sketchpad)

Do rješenja početnog problema nastavnik će učenike voditi postepeno. Učenici će najprije proučavati položaj grada koji je jednako udaljen od neka druga dva grada, zatim položaj grada koji je jednako udaljen od neka druga tri grada, te će učenici na taj način postepeno otkrivati put do rješenja početnog problema. Nastavnik je pripremio nastavni listić koji će ih voditi kroz ovo istraživanje.

Primjer nastavnog listića koji je dio istraživanja za rješavanje početnog problema:

Nastavni listić

1. Razmislite, gdje se treba nalaziti grad ako želimo da bude jednako udaljen od nekoliko istaknutih gradova?

2. Odredite položaj grada u kojem bi se trebali susresti prijatelji ako želimo da taj grad bude jednako udaljen od neka dva grada, na primjer Zagreba i Osijeka?

3. Odredite položaj grada u kojem bi se trebali susresti prijatelji ako želimo da taj grad bude jednako udaljen od neka tri grada, na primjer Zagreba, Pariza i Berlina?

Pokušajte sada riješiti početni problem.

4. Ispitajte uvjete pod kojima je za neke zadane četiri točke moguće pronaći točku jednako udaljenu od zadanih.

Strategije pomoću kojih možemo istraživati zadani problem jesu rad uz pomoć računala i nekog programa dinamične geometrije ili rad uz pomoć geometrijskog pribora. U radu uz pomoć računala učenici su puno brži i mogu na brzinu isprobavati razne načine za rješenje danog problema. Strategija rješavanja problema uz pomoć geometrijskog pribora svodi se na isto, ali je puno dugotrajnija. Za rješavanje ovog problema primjerenija je prva strategija, pa slijedi opis rada uz pomoć računala.

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Nastavnik podijeli učenike u razredu u grupe po troje. Svaka trojka učenika sjedne za svoje računalo i dobiva nastavni listić na kojem se nalaze zadaci uz pomoć kojih se učenici uvode u početni problem. Učenici najprije u grupi diskutiraju o 1. zadatku. Zatim, uz 2. i 3. zadatak s nastavnog listića, nastavnik daje učenicima uputu da pronađu neku kartu Hrvatske na internetu u kojoj su ucrtani zadani gradovi te da je kopiraju u dokument programa dinamične geometrije. Zatim, učenici moraju ucrtati točke na mjestima gdje se nalaze zadani gradovi. Nakon toga, opet u diskusiji s nastavnikom učenici dolaze do zaključka da su sve točke, tj. svi gradovi koji se nalaze na simetrali dužine čije su krajnje točke u gradovima Zagrebu i Osijeku zapravo potencijalna rješenja 2. zadatka jer su svi oni jednako udaljeni od ta dva grada.

Također, učenici ucrtavajući točke na mjesta gradova Zagreba, Berlina i Pariza na karti Europe zaključuju da se traženi grad koji je jednako udaljen od sva tri zadana grada nalazi u središtu kružnice opisane trokutu (u sjecištu simetrala stranica tog trokuta) čiji su vrhovi točke koje se nalaze na položaju zadanih gradova.

Slika 6.11: *Prikaz mogućih položaja točaka u čijim položajima se nalaze gradovi jednako udaljeni od Zagreba i Osijeka*

Slika 6.12: *Prikaz položaja točke u kojoj se nalazi grad jednako udaljen od Pariza, Berlina i Zagreba*

Uloga nastavnika: Najprije, nastavnik objašnjava pravila, dijeli učenike u grupe i objašnjava način rada u trojkama. Učenici će ovako podijeljeni zajedno istraživati kako riješiti zadani problem. Nastavnik ne otkriva glavni cilj ove aktivnosti jer time ne bi učenike potaknuo na istraživanje, budući da bi time onemogućio da učenici razmišljaju „široko“ o zadanom problemu susreta. Također, nastavnik od samog početka prati učenike kroz njihovo razmišljanje, odnosno njeguje proces postavljanja skela. U uvodnom dijelu nastavnik učenicima dijeli nastavni listić sa zadacima koji će navesti učenike da razmišljaju u pravom smjeru. Nastavnik diskutira s učenicima o idejama i rješenjima zadataka s tog nastavnog listića.

Uloga učenika: Učenici čitaju zadatke s nastavnog listića i u trojkama diskutiraju o zadanom. Počinju iznositi početne ideje. U diskusiji s nastavnikom učenici iznose ideje za rješavanje zadataka na nastavnom listiću te rješenja upisuju na nastavni listić.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici su izabrali rad u programu Geogebra. Učenici preuzimaju s interneta kartu Europe i kopiraju je u dokument s programom Geogebra. Zatim, označavaju četiri zadana grada na toj karti kao točke. Spajajući te točke dobivaju četverokut. Učenici shvaćaju da žele dobiti grad (točku) koja se nalazi u središtu dobivenog četverokuta i razmišljaju kako dobiti tu točku.

Uloga nastavnika: Nastavnik obilazi učenike i zapaža njihov rad. Budući da učenici koriste računala, nastavnik brzim pogledom na ekran računala dobiva sliku o učeničkoj ideji. Također, nastavnik vodi učenike kroz istraživanje, odgovara na njihova pitanja te provodi proces postavljanja skela uz pomoć sljedećih karakterističnih pitanja koja, slično koncipirana, možemo koristiti u mnogim učeničkim istraživanjima:

- Imate li točnu ideju što se od nas traži u zadatku?
- Kako ćemo zadano prikazati u Geogebri?

- Obrazložite svoju ideju.
- Ima li netko drugačiju ideju?
- Kako smo pronašli položaj grada koji je jednako udaljen od grada Zagreba, Berlina i Pariza?
- S traženjem kojeg geometrijskog pojma možemo povezati traženje položaja grada koji je jednako udaljen od Zagreba, Berlina i Pariza?
- Nalazi li se točka koja predstavlja Rim na toj kružnici koja prolazi točkama koje se nalaze na položajima grada Zagreba, Pariza i Berlina iz 3. zadatka s nastavnog listića?
- Procijenite, za koji od glavnih europskih gradova postoji položaj aerodroma jednako udaljenog od Zagreba, Pariza, Berlina i tog grada?
- Možemo li četverokutu čiji su vrhovi točke koje se nalaze na položajima gradova Zagreba, Berlina, Pariza i Rima opisati kružnicu?
- Jesmo li sada pronašli rješenje početnog problema? Možemo li odrediti položaj grada koji je jednako udaljen od Zagreba, Berlina, Pariza i Rima?

Uloga učenika: Učenici komunicirajući s kolegama u grupi crtaju u Geogebri potrebne elemente, postupno rješavaju problem i komuniciraju s nastavnikom te razmišljaju o pitanjima koja nastavnik postavlja. Učenici iznose svoje daljnje ideje unutar grupe, obrazlažu ih jedni drugima i postepeno slažu zajednički zaključak o rješenju postavljenog problema.

ZAVRŠNI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

U završnom dijelu, diskusija između nastavnika i učenika privodi se kraju te se dolazi do željenih zaključaka i rješenja postavljenog problema. Učenici su već prije zaključili da se grad koji je jednako udaljen od neka tri grada nalazi u središtu opisane kružnice čiji vrhovi su točke na položajima ta tri grada. Tom logikom zaključuju da se grad koji je jednako udaljen od neka četiri grada nalazi u središtu opisane kružnice koja prolazi vrhovima koji se nalaze na položajima ta četiri grada. Dakle, ako točke koje se nalaze na položajima gradova Zagreba, Pariza, Berlina i Rima označimo redom točkama Z, P, B i R, onda se naš traženi grad nalazi u središtu opisane kružnice četverokutu $ZPBR$. Jedino je pitanje: može li se tom četverokutu uopće opisati kružnica?

Učenici vrlo lako u programu Geogebra mogu uočiti da se tom četverokutu ne može opisati kružnica, pa su time otkrili rješenje početnog problema, odnosno otkrili su da ne možemo naći grad koji je jednako udaljen od gradova Zagreba, Pariza, Berlina i Rima.

Nakon riješenog početnog problema, još nisu ostvareni svi predviđeni ishodi učenja koji su bili predviđeni istraživanjem početnog problema. Nastavnik postavlja učenicima sljedeća pitanja:

- Možemo li svakom trokutu opisati kružnicu? Možemo li svakom četverokutu opisati kružnicu?

Učenici znaju da se svakom trokutu može opisati kružnica, a za četverokut su se u rješavanju početnog problema uvjerili da postoji četverokut kojem se ne može opisati kružnica.

Zadnji zadatak koji nastavnik daje učenicima jest da ispitaju kakvom se četverokutu može opisati kružnica. Nastavnik postavlja pitanja učenicima:

- Kako ćemo ispitati svojstva četverokuta kojima se može opisati kružnica?
- Što sve možemo istražiti?

Nastavnik od učenika traži da mu odgovore da četverokutu možemo mjeriti duljine stranica, veličine kutova,...

Nakon toga, nastavnik potiče učenike da u Gegebri nacrtaju kružnicu i na njoj istaknu četiri točke, konstruiraju četverokut s vrhovima u tim istaknutim točkama i tako dobivenom četverokutu mjere duljine stranica, mjere kutova,... Mijenjajući položaj vrhova učenici dobivaju različite četverokute te imaju zadatak pronaći svojstvo takvih četverokuta koje se ne mijenja – svojstvo koje ima četverokut kojem se može opisati kružnica ([1]).

Uloga nastavnika: Nastavnik potiče učenike da svaka grupa javno iskaže rješenje i obrazloži metodu kojom su došli do rješenje početnog problema. Osim toga, nastavnik potiče učenike da razmisle o smislenosti dobivenog rješenja te o praktičnoj primjeni rješenja ovog problema u svakodnevnom životu. Nakon riješenog problema, još uvijek nije postignut željeni cilj. Nastavnik još uvijek vodi učenike završnim pitanjima koja će ih dovesti do željenog cilja, tvrdnje kada se četverokutu može opisati kružnica. Nakon što je cilj postignut, nastavnik imenuje i definira četverokut s novootkrivenim svojstvima:

Konveksni četverokut kojemu se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut.

Nakon što učenici to odrede, istraživanje je uspješno završeno. Osim toga, nastavnik nakon cjelokupnog procesa istraživanja i rješavanja postavljenog problema zapaža mnoge osobine pojedinih učenika i vrednuje ih.

Uloga učenika: Učenici razmišljaju o smislenosti dobivenog rješenja. Nakon što su učenici otkrili rješenje postavljenog problema prate nastavnikove upute te otkrivaju kada se četverokutu može opisati kružnica, odnosno svojstva takvog četverokuta te kako nazivamo takav četverokut. Zaključci koje će učenici provođenjem istraživanja u Geogebri donijeti:

- stranice četverokuta kojem je opisana kružnica su tetive te kružnice,
- zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova u četverokutu kojem je opisana kružnica jednak je $180°$.

Također, uz pomoć ovakvog istraživanja učenici i sami sebe vrednuju. Dobivaju uvid u svoje sposobnosti, koliko su pridonijeli radu cijele grupe, jesu li razumjeli sve segmente istraživanja ili ne i slično.

Slijedi primjer u kojem učenici otkrivaju presjeke nekih tijela ravninom. Takva istraživanje može se provesti kao uvodno u temu presjeka tijela s ravninom. Kasnije, to istraživanje može se i proširiti tako da učenici računaju površine presjeka koje otkriju i slično. U primjeru istraživanje je provedeno za kocku, na slično se može provesti i za ostala geometrijska tijela, a poželjno je i korištenje nekog od programa dinamične geometrije, npr. Geogebru.

6.7 Presjek kocke ravninom

Istražite postojanje različitih presjeka kocke ravninom.

CILJ: Na fizičkom modelu kocke istražiti postojanje različitih presjeka ravninom.

ISHOD UČENJA:

Učenici će:

- odrediti različite presjeke kocke ravninom,
- imenovati različite presjeke kocke ravninom.

NASTAVNI OBLICI: suradnički rad u grupi

NASTAVNA METODA:

- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava

NASTAVNA SREDSTVA: plastelin (ili model masa, stiropor), nožić, nastavni listić i pribor za pisanje

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Na početku nastavnik dijeli učenike u grupe po 3 i postavlja problem prikazujući ga na PowerPoint prezentaciji, uz pomoć grafoskopa ili usmeno. Svaka grupa proučava isto geometrijsko tijelo - kocku.

Uloga nastavnika: Nastavnik organizira istraživački rad i daje upute.

Uloga učenika: Učenici slušaju nastavnikove upute i izrađuju kocku od plastelina. Svaki učenik izrađuje jednu kocku. Također, u razgovoru s nastavnikom postavljaju hipoteze o obliku presjeka koji se traže.

SREDIŠNJI DIO

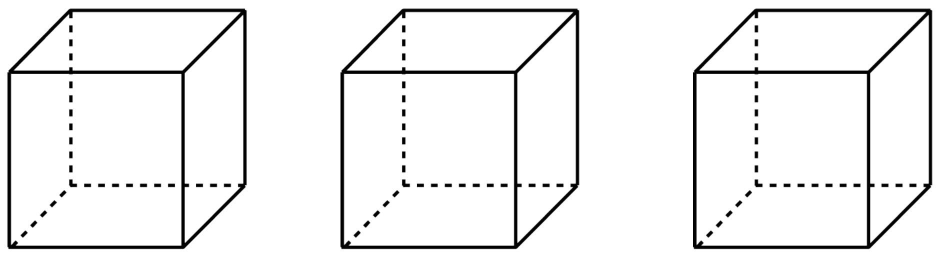
Što se radi? Koji je materijal potreban?

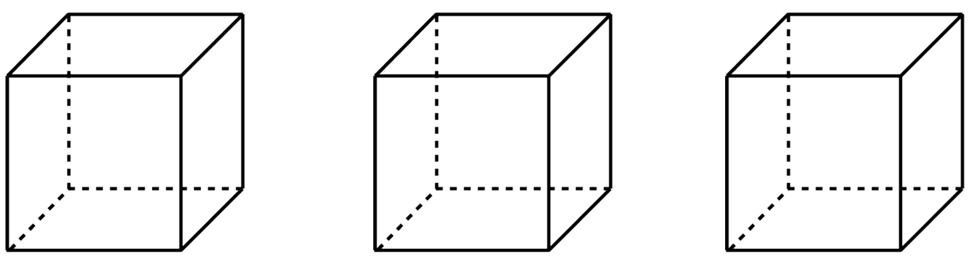
Nastavnik svakoj grupi daje jedan nastavni listić na kojem se nalazi nekoliko konstruiranih kocaka. Prema nastavnikovim uputama učenici istražuju sve moguće presjeke kocke ravninom režući nožićem napravljene modele kocaka od plastelina. Nakon što otkriju neki od presjeka, taj presjek moraju prikazati na jednoj kocki na nastavnom listiću. Cilj je otkriti što više mogućih različitih presjeka kako bi ih uočili na stvarnom modelu i kasnije kod prave konstrukcije imali bolji osjećaj za konstrukciju presjeka kocke različitim ravninama.

Izgled nastavnog listića:

Nastavni listić

1. Na danim kockama označite presjeke koje ste otkrili.



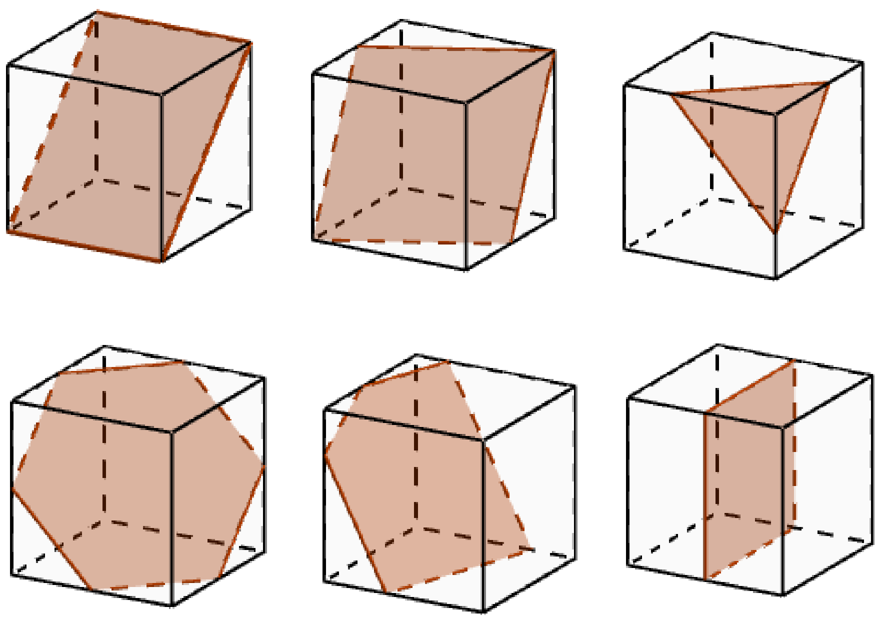


2. Nacrtajte otkrivene presjeke kocke ravninom.

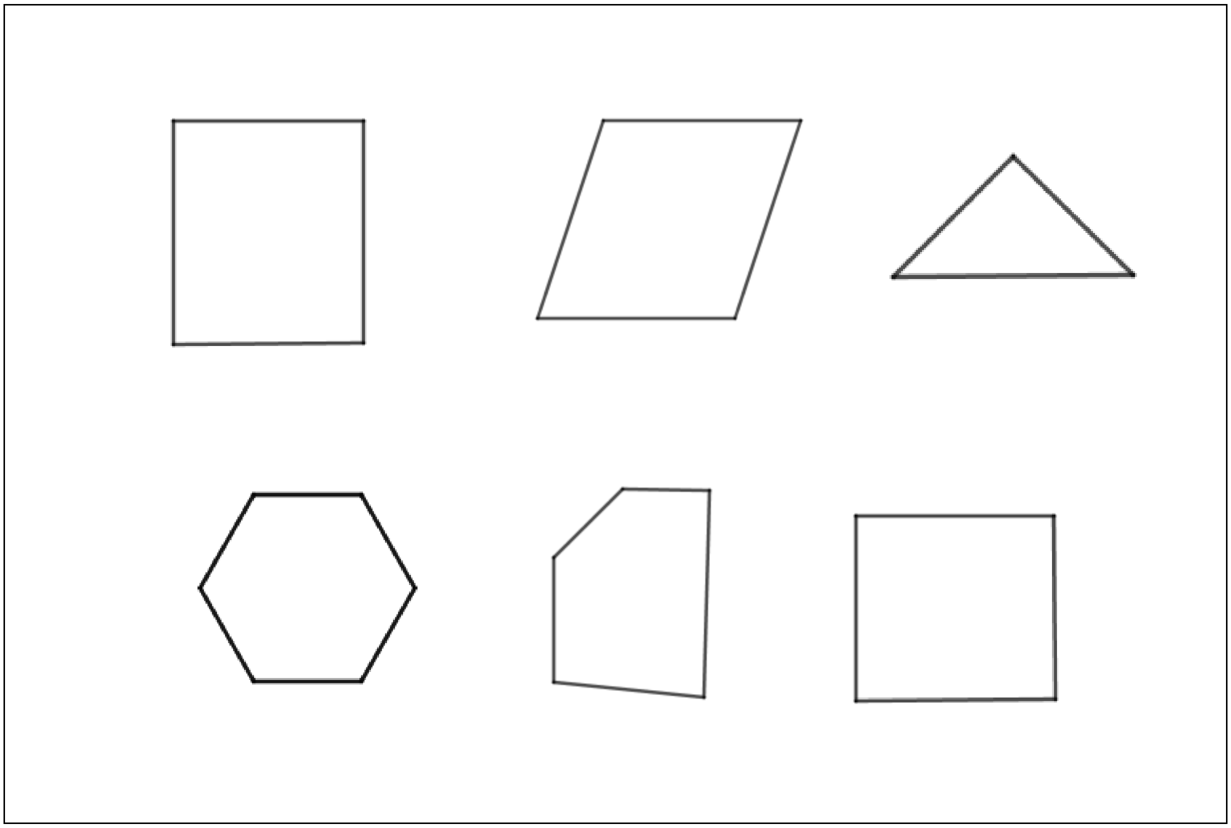
Primjer riješenog nastavnog listića:

Nastavni listić

1. Na danim kockama označite presjeke koje ste otkrili.



2. Nacrtajte otkrivene presjeke kocke ravninom.



Uloga nastavnika: Nastavnik prati rad svake grupe i pruža potporu onim grupama i učenicima koji su zapeli u nekom dijelu istraživanja. Navodi učenike da otkriju sve moguće presjeke.

Uloga učenika: Rješavaju zadatke na nastavnom listiću koristeći se modelima geometrijskih tijela koje su izradili od plastelina i nožićem.

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Na kraju istraživanja predstavnici grupe predstavljaju svoje zaključke (nezaobilazan trenutak u istraživanju u nastavi).

Uloga nastavnika: Nastavnik prati učenikova predstavljanja, postavlja pitanja, pozorno sluša odgovore, navodi učenike na točne zaključke, te navodi učenike da otkriju još one presjeke koje nisu uočili.

Uloga učenika: Predstavljaju radove cijele grupe, formiraju zaključke istraživanja, potvrđuju ili opovrgavaju, uz obavezno argumentiranje, početno postavljene hipoteze. Važno je da na kraju učenici sami (uz vođenje nastavnika) otkriju da presjek kocke ravninom može biti: trokut, četverokut, peterokut ili šesterokut.

Osim primjera koji su vezani uz propisani plan i program i redovnu nastavu, ponekad možemo učenike naučiti i više od toga upoznavajući ih sa složenim matematičkim konceptima na vrlo jednostavan način. Slijedeći primjer je primjer za znatiželjne ili kutak plus.

6.8 Voronoiov dijagram

Na području nekog grada nalaze se 3 bolnice. Pomoću Voronoiovog dijagrama odvojite četvrti grada u kojima su svi domovi bliži nekoj zadanoj bolnici od druge dvije.

CILJ: Otkriti konstrukciju i primjenu Voronoiovog dijagrama za tri točke.

ISHOD UČENJA: Učenici će konstruirati i interpretirati Voronoiov dijagram za tri točke.

NASTAVNI OBLICI: rad u paru

NASTAVNA METODA:
- prema izvorima znanja: metoda dijaloga, metoda otkrivanja

- prema oblicima zaključivanja: heuristička nastava

NASTAVNA SREDSTVA: nastavni listić, geomerijski pribor

UVOD

Što se radi? Koji je materijal potreban?

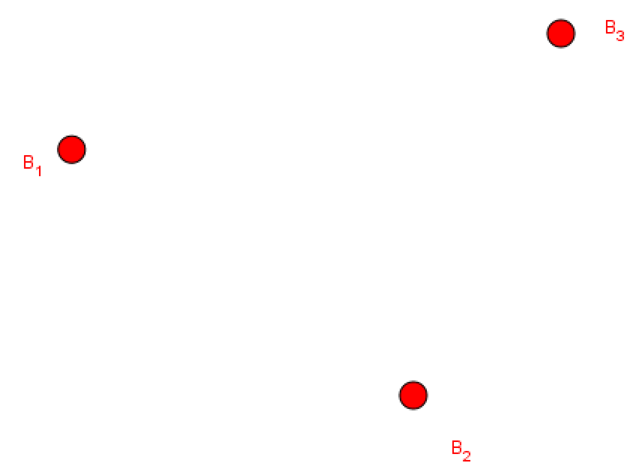
Nastavnik podijeli učenicima nastavne listiće i uvodi ih u problem. Nastavnik čita učenicima zadatke s nastavnog listića i zajedno ih komentiraju.

Izgled nastavnog listića:

Nastavni listić

1. Crvene točke označene s B_1, B_2, B_3 na donjoj slici prikazuju položaj bolnica u zadanom problemu.
   a) Nacrtajte dužine čije su krajnje točke odgovarajući vrhovi na slici.
      Koje dužine si nacrtao/la?
   b) Konstruiraj simetrale tih dužina. Nakon toga, sa slike obriši dužine, a simetrale tih dužina ostavi.
   c) Odredite četvrti grada koje su određene simetralama dužina koje ste konstruirali tako da svaka četvrt sadrži jednu bolnicu (ostale nepotrebne linije iz konstrukcije obrišite).

Konstruirali ste Voronoiov dijagram.



2. Što svako od nacrtanih područja predstavlja?

3. Koje predznanje nam je pomoglo za rješavanje postavljenog problema?

4. Smisli još jedan problem iz stvarnog života, sličan zadanom problemu, koji bi se mogao riješiti pomoću Voronoiovog dijagrama.

4. Razmisli kako bi nacrtali Voronoiov dijagram u početnom problemu da su nam bile zadane 4 bolnice?

Uloga nastavnika: Nastavnik daje upute o zadacima na nastavnom listiću te razgovara s učenicima o idejama rješavanja postavljenog problema. Nastavnik može pitati učenike imaju li ideju kako riješiti zadani problem bez da znaju što je Voronoiov dijagram.

Uloga učenika: Učenici slušaju nastavnikove upute te razmišljaju o strategijama rješavanja postavljenog problema.

SREDIŠNJI DIO

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici u paru rješavaju zadatke s nastavnog listića. Nastavnik prati korake učenika i odgovara im na njihova pitanja.

Uloga nastavnika: Budući da je ovo učenicima prvi susret s Voronoiovim dijagramom, nastavnik detaljno prati korake učenika, ispravlja ih i daje upute. Nastavnik tijekom provođenja aktivnosti na glas ponavlja pitanja učenika i odgovara na ista kako bi svi učenici čuli odgovore jer ih većinu, budući da su u istom razredu i na sličnoj intelektualnoj razini, muče slična pitanja i nedoumice.

Uloga učenika: Učenici postepeno, u komunikaciji s kolegama u paru, rješavaju zadatke s nastavnog listića te konstruiraju Voronoiov dijagram.

ZAKLJUČAK

Što se radi? Koji je materijal potreban?

Učenici predstavljaju svoje zaključke s nastavnog listića te ih u komunikaciji s nastavnikom komentiraju.

Uloga nastavnika: Nastavnik prati zaključke učenika te ih nadopunjuje. Nastavnik postavlja učenicima sljedeća pitanja:

- Jeste li sigurni da nam je ovaj dijagram dao rješenje koje smo tražili?

- Kako možemo biti sigurni u to?
- Zašto smo konstruirali simetrale dužina?
- Što je simetrala neke dužine?

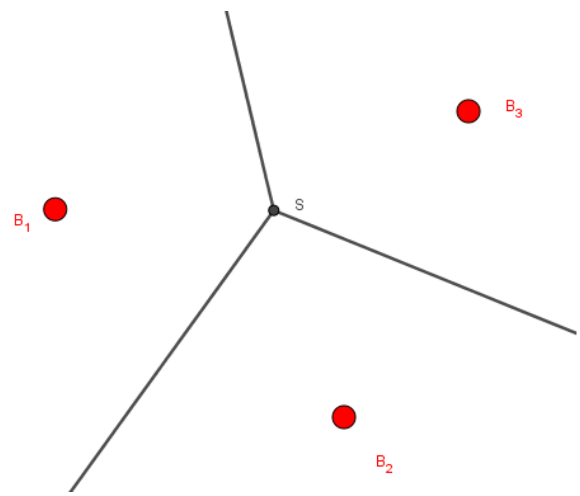
Provođenjem istraživanja u kojima donosimo zaključke koji su primjenjivi u svakodnevnom životu, uz to da su ti zaključci učenicima u potpunosti razumljivi, nastavnik postiže veliki nivo zainteresiranosti učenika za postavljen problem, a i za buduće koncepte koji slijede u budućoj nastavi matematike.

Uloga učenika: Učenici uz pomoć nastavnikovog vođenja zaključuju da smo konstruiranjem simetrala dužine čije krajnje točke su neke dvije bolnice zapravo našli mjesta koja su jednako udaljena od jedne i druge bolnice. Dakle, učenici zaključuju da će konstrukcija simetrala svake dužine čije krajnje točke su zapravo zadane bolnice razdvajati područje grada u tražene četvrti. Svaka točka u svakoj četvrti bit će bliža bolnici u toj četvrti nego bilo kojoj bolnici u cijelom dijagramu.

Moguće rješenje nastavnog listića:

Nastavni listić

1. Voronoiov dijagram



2. Što svako od nacrtanih područja predstavlja?

Svako nacrtano područje predstavlja gradsku četvrt. Svako područje sadrži sva mjesta kojima je bolnica koja se nalazi u tom području bliža od svih ostalih.

3. Koje predznanje nam je pomoglo za rješavanje postavljenog problema?

Konstrukcija i definicija simetrale dužine.

4. Smisli još jedan problem iz stvarnog života, sličan zadanom problemu, koji bi se mogao riješiti pomoću Voronoiovog dijagrama.

U nekom gradu nalazi se 5 osnovnih škola. Učenike iz tog grada treba razmjestiti u tih 5 škola na način da svaki učenik ide u školu koja je najbliža njegovom domu. Odredi područja grada u kojima su svi domovi bliži nekoj školi u tom području od bilo koje druge škole u gradu.

7 Unosi li istraživačka nastava zaista pozitivne promjene u nastavu matematike i u shvaćanju geometrije?

Ono što sa sigurnošću možemo reći jest da istraživački usmjerena nastava utječe na motivaciju učenika u nastavnom procesu, pa tako i u shvaćanju i učenju geometrije. Osim toga, istraživačka nastava nam uz pomoć problema koje učenici istražuju, pokazuje važnost i primjenu matematike u svakodnevnom životu. Tradicionalna nastava i zadaci napisani u udžbenicima baš i ne motiviraju učenike na dublje razmišljanje. Potiču ih samo na jedno, a to je da nauče algoritam ili metodu kako riješiti te zadatke. Niti jedna metoda koja se do sada promovirala ili primjenjivala u nastavi matematike nije savršena, a vjerojatno se takva nikada neće niti pronaći. Sve te metode imaju i prednosti i mane. Istraživačka nastava matematike koja je pomno isplanirana, a provodi je educirani nastavnik koji zna što hoće postići, rijetko da će ispasti loše po učenike. Naravno, osim što niti jedna metoda nije savršena, tako se ne može niti provoditi isključivo samo jedna metoda u procesu nastave. Proces nastave trebao bi biti proces isprepletenih metoda koje se koriste u raznim područjima i najpogodnije su za to područje u određenom trenutku. Osim toga, niti tradicionalni oblik nastave nije nešto što bi se trebalo izbaciti iz procesa obrazovanja. I takav oblik nastave je u nekim situacijama pogodniji od svih. Također, često se spominje da istraživačka nastava zahtjeva puno vremena i nije provediva u nastavi budući da jedan školski sat traje 45 min. Istina je da ta metoda nije provediva na svakom školskom satu jer je gradivo preopširno, ali opet se vraćamo na ono prije spomenuto. Ne mora svaki sat biti istraživački, ali neki koncepti u nastavi matematike, pogotovo nastavi geometrije, morali bi se istražiti od strane samih učenika jer će jedino tako učenici naučiti samostalno kritički i logički razmišljati.

“Iz vlastitog iskustva znamo koja je vrijednost toga da nešto otkrijemo sami umjesto da nas netko samo nauči rješenju. Kada se primjenjuje načelo istraživački usmjerenog učenja, učenici doista uče pristup te imaju više načina za razumijevanje (Nastavnik iz Švicarske)” ([8]).

Također, često se kod nastavnika javljaju razna pitanja koja su rezultat zabrinutosti o tome je li istraživačka nastava matematike zaista dobar izbor. Neka od tih pitanja su:

- Imamo li u nastavi dovoljno vremena za provođenje istraživanja?
- Hoćemo li stići obraditi svo predviđeno gradivo?
- Hoće li takvo učenje biti uspješno, budući da je u takvoj nastavi nastavnik u sjeni i ne poučava učenike direktno?
- Hoće li se učenici snaći u takvom načinu rada?
- Kako poticati učenike da postavljaju i slijede vlastita pitanja?
- Kako naučiti učenike da rade suradnički i da uče jedni od drugih?
- Hoćemo li mi kao nastavnici znati dobro organizirati takvu nastavu?
- Hoće li nam pripremanje za takve satove iziskivati puno više vremena i kako ćemo to uskladiti s našim svakodnevnim obavezama?
- Kako ćemo vrednovati učenike?
- Je li zaista neizbježno uvoditi promjene?

Osim ovih, postoje još mnoga pitanja koja se javljaju kad nastavnika, ali i kod roditelja. Na neka od njih lako je odgovoriti, dok nas neka od njih stvarno potiču na dublje razmišljanje. Što se tiče pitanja “Imamo li u nastavi dovoljno vremena za provođenje istraživanja?” već je u tekstu iznad donekle odgovoreno. Uvođenje nastave i učenja istraživanjem neće isključiti ostale metode poučavanja niti će prevladati ostale metode. Treba postići balans između raznih metoda poučavanja s ciljem postizanja većeg broja predviđenih kompetencija kod učenika. Taj balans i razlučivanje kada je koja metoda najpoželjnija postići ćemo iskustvom, pa neće biti problema s obradom predviđenog gradiva. Pitanja koja možda malo zabrinjavaju jesu: kako sve nastavnike podučiti da dobro organiziraju takvu nastavu, kako kod učenika postići da uče jedni od drugih, kako ih naučiti da postavljaju pitanja, da razmišljaju. To sigurno nije lako, ali nitko ne kaže niti da će biti. Na primjer, ako od učenike koji nikad nisu radili u grupnom radu očekujemo da rade u grupama, prvi puta će se sigurno teško snaći. Bit će problema u organizaciji rada, neki će to shvatiti i kao zabavu i slično, no tako će biti samo prvi puta. Ako neku metodu dovoljno dugo ponavljamo i unaprjeđujemo je, ona će i učenicima i nastavnicima postati prirodna. Nitko se više neće pitati što treba raditi i kako raditi jer su iskustvom sve to naučili. Prema tome, laganim koracima uvođenjem istraživačke nastave u nastavu matematike učenici će polako usvajati predviđene ciljeve te metode.

Što se tiče vrednovanja učenika, tijekom istraživanja problema može se provoditi formativno vrednovanje. Nastavnik može koristiti rubrike zapažanja, kontrolne popise ili slično, kako bi zapisivao povratne informacije koje mu učenici šalju svojim radom. Formativno vrednovanje nastavnik ne provodi kako bi kasnije mogao nekog učenika ocijeniti, nego kako bi uz pomoć informacija koje mu šalju učenici reorganizirao nastavu prema učenikovim potrebama. Sumativno vrednovanje u samom početku uvođenja istraživačke nastave može još malo pričekati. S vremenom će nastavnici promatrajući učenike u takvom, istraživačkom učenju, shvatiti na koji način će ih najbolje sumativno vrednovati.

8 Bibliografija

[1] 1. vježbenica, https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/1_vjezbenica_USB.pdf, (preuzeto 31.05.2018.)

[2] Bašić, M., *Možemo li uklopiti istraživački pristup u redovitu nastavu matematike?,* https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2018/OBRAZOVANJE/Nacionalni-kurikulumi/Edukacija/prezentacija_webinara_mozemo_li_uklopiti_istrazivacki_pristup_u_redovitu_nastavu_matematike.pdf, (preuzeto 31.05.2018.)

[3] Čotić, V., *Procjena i istraživanje u nastavi matematike,* Četvrti kongres nastavnika matematike, Školska knjiga, Zagreb, 2010., 163-170.

[4] Dijanić, Ž. *Scaffolding*. MIŠ. broj 91 (2017/2018), 3-9.

[5] *Eksperimentalni program "Škola za život",* https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2018/OBRAZOVANJE/Nacionalni-kurikulumi/Skola-za-zivot/eksperimentalni_program-skola_za_zivot.pdf, (preuzeto 01.06.2018.)

[6] Kurnik, Z. *Istraživačka nastava*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/istrazivacka.pdf, (preuzeto 04.04.2018.)

[7] Matijević, M., *(Na)učiti kako se uči (matematika),* https://bib.irb.hr/datoteka/510071.Matijevic_Matematika_samostalno_ucenje_2.pdf, (preuzeto 30.03.2018.)

[8] *Meria practical guide to inquity based mathematics teaching,* http://www.meria-project.eu/sites/default/files/2017-10/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT.pdf, (preuzeto 04.04.2018.)

[9] *Meria,* http://meria-project.eu/, (preuzeto 03.06.2018.)

[10] Milin Šipuš, Ž., Čižmešija, A., *Vrednovanje u matematičkom obrazovanju*, *http://degiorgi.math.hr/forum/download.php?id=2688*, (preuzeto 03.06.2018.)

[11] Milin Šipuš, Ž., *Istraživački usmjerena nastava matematike,* http://www.meria-project.eu/sites/default/files/MERIA%20Zagreb%20-%20IBMT.pdf, (preuzeto 04.04.2018.)

[12] Ovčar, S., Loparić, S., *Kako primijeniti istraživačku metodu u nastavi matematike*, Treći kongres nastavnika matematike, Školska knjiga, Zagreb, 2008., 187-198.

[13] Polya, G., *Kako riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[14] Polya, G., *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb, 2003.

[15] Romano, D. A., *Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije,* *https://hrcak.srce.hr/45746,* (preuzeto 04.04.2018.)

[16] Vlasnović, H., Cindrić, M., *Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hieleovoj teoriji, https://hrcak.srce.hr/123229,* (preuzeto 03.06.2018.)

9 Sažetak

Ideja učenja istraživanjem pojavila se još u prošlom stoljeću. Prijedlozi kako osmisliti istraživački usmjerenu nastavu matematike gradili su se godinama, a nedavno je takav oblik učenja postao glavni pristup razvoja nastave matematike. Istraživački usmjerena nastava matematike je nastavni pristup koji se temelji na istraživanju, ispitivanju i rješavanju matematičkih problema u nastavi. Takva nastava poziva učenike da rade na način sličan kao pravi matematičari. Budući da je geometrija grana matematike koja je učenicima često teško shvatljiva zbog svoje deduktivne prirode, to je područje u kojem, provodeći učenje istraživanjem, nastavnici zasigurno mogu postići veću zainteresiranost i uspjeh u učenju kod učenika.

U ovom radu na nekoliko je primjera dana ideja učenja istraživanjem u području geometrije. Primjeri koji su navedeni postavljeni su u obliku malih problema koji su, umjesto da ih nastavnik sam riješi i prezentira učenicima, raspisani u obliku aktivnosti u kojima učenici rješavaju taj isti problem, koristeći različite strategije. Te aktivnosti mogu poslužiti kao primjer nastavnicima za izradu novih aktivnosti istraživanja koje će u budućnosti koristiti za unaprjeđivanje nastave u području geometrije, ali i šire. Osim primjera, u radu su opisane karakteristike istraživačke nastave, njezin razvoj te uloga nastavnika i učenika u takvom obliku nastave.

10 Summary

The notion of inquiry based learning emerged as early as the last century and the suggestions on how to design inquiry based mathematics teaching changed and upgraded through years. As a result, inquiry based teaching became the main approach to the development of teaching mathematics in classroom. It is a teaching approach based on researching, testing and solving mathematical problems in class which lets students think and work like “real” mathematicians. Since geometry is a branch of mathematics most students struggle with because of its deductive nature, this is an area in which teachers could enhance the interest of students and make them more successful in solving problems by applying inquiry based learning.

This paper presents several examples of applying the inquiry based teaching in geometry. The examples are given in the form of small problems designed as activities in which students solve the problem by themselves by using different strategies, instead of having a teacher solve and present the problem himself. These activities can be a base for designing new inquiry based teaching activities and can be used in future to improve geometry teaching, and beyond. In addition to the aforementioned examples, the thesis describes the properties of inquiry based teaching, its development and the role teachers and students have in this type of teaching.

11 Životopis

Rođena sam 28.04.1995. u Varaždinu. 2001. godine upisala sam Osnovnu školu Izidora Poljaka u Donjoj Višnjici, malom mjestu u okolici grada Lepoglave. Nakon završetka osnovne škole, 2009. godine upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec. Fakultetsko obrazovanje započela sam 2013. godine na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu gdje sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer. Nakon završenog preddiplomskog studija, svoje obrazovanje nastavljam 2016. godine upisivanjem Diplomskog studija matematike, nastavnički smjer.