

# Dinamička modalna dekompozicija u realnom vremenu

---

Poletar, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:503989>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Matej Poletar

**DINAMIČKA MODALNA**  
**DEKOMPOZICIJA U REALNOM**  
**VREMENU**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc Zlatko Drmač

Zagreb, srpanj 2018.



Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_



# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>1</b>
<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Matematička podloga</b>	<b>5</b>
1.1 Generalizirani inverz . . . . .	5
1.2 Problem najmanjih kvadrata . . . . .	6
1.3 Matrične dekompozicije: SVD i POD . . . . .	8
<b>2 Uvod u DMD</b>	<b>23</b>
2.1 Uvod . . . . .	23
2.2 Dinamički sustavi . . . . .	24
2.3 Definicija . . . . .	25
2.4 Redukcija dimenzije i reducirani modeli . . . . .	26
<b>3 Računanje dinamičke modalne dekompozicije</b>	<b>29</b>
3.1 DMD algoritam . . . . .	29
3.2 Primjeri . . . . .	32
<b>4 Koopmanova spektralna teorija</b>	<b>39</b>
4.1 Osnove Koopmanove spektralne teorije . . . . .	39
<b>5 DMD u realnom vremenu</b>	<b>41</b>
5.1 <i>Online</i> DMD algoritam . . . . .	41
5.2 Težinski DMD algoritam . . . . .	46
5.3 DMD algoritam s klizećim vremenskim prozorom ( <i>windowed</i> DMD) . . . . .	47
5.4 Usporedba algoritama za dinamičku modalnu dekompoziciju u realnom vremenu . . . . .	50
<b>Bibliografija</b>	<b>57</b>



# Uvod

Dinamička modalna dekompozicija matematička je metoda za analizu dinamike nelinearnih sistema, čija dinamika često nije eksplicitno poznata. Tada govorimo o tzv. *data-driven* metodama, odnosno metodama u kojima se model generira danim podacima. DMD radi lokalno linearnu aproksimaciju nelinearne dinamiku nekog sustava i pritom daje dekompoziciju podataka u prostorne modove i karakteristične frekvencije promatranog sustava.

Prvo, uvodno poglavlje ovoga rada započinje sa pregledom definicija i rezultata koji su bitni za daljnji tijek radnje kao što su generalizirani inverz, problem najmanjih kvadrata te dekompozicija po singularnim vrijednostima. Iscrpno su opisane SVD i POD dekompozicije koje su sastavni dio DMD algoritma te su ilustrirane na nekoliko primjera.

Drugo poglavlje u ovom radu opisuje osnove DMD-a kao metode, definiraju se dinamički sustavi koje ćemo u nastavku promatrati te je dana definicija dinamičke modalne dekompozicije kao i njeno intuitivno shvaćanje. Također, opisane su najčešće primjene DMD-a, a poglavlje završava s redukcijom dimenzionalnosti koja je eksplicitno uključena u DMD algoritam.

Treće poglavlje rezervirano je za detaljan opis DMD algoritma i oslanja se na praktični i računalni aspekt ideja opisanih u drugom poglavlju nakon čega slijedi ilustracija algoritma na primjeru razdvajanja prostorno-vremenskog signala u njegove komponente. Poglavlje završava sa posebno konstruiranim primjerima na kojima se uočavaju neke mane DMD algoritma kao i mogućnosti za poboljšanje metode.

U četvrtom poglavlju dan je uvod u Koopmanovu spektralnu teoriju koja je u uskoj svezi s teorijom DMD-a.

Konačno, peto poglavlje bavi se DMD algoritmima kod kojih dinamika ovisi o vremenu, odnosno primjenom DMD-a na sustave s promjenjivom dinamikom. U tom slučaju govorimo o DMD-u u realnom vremenu, tj. *real-time DMD*-u. U takvim se metodama DMD matrica mora obnavljati kako pristižu novi podaci. No, kako su problemi često velike dimenzije izazov predstavlja kako što efikasnije ažurirati već postojeću aproksimaciju dinamike što je povod za razvoj novih algoritama. U poglavlju su opisana tri algoritma koja omogućuju računanje DMD-a u realnom vremenu, a to se online DMD, težinski DMD i windowed DMD. Nakon detaljnog teorijskog opisa slijedi usporedba i karakterizacija opisanih algoritama na jednostavnom primjeru s varirajućom dinamikom.





# Poglavlje 1

## Matematička podloga

### 1.1 Generalizirani inverz

Ukoliko želimo proširiti pojam inverza i na matrice koje nisu regularne ili čak nisu kvadratne, onda zahtijevamo da on mora zadovoljavati malo slabije uvjete nego standardni inverz. Prisjetimo se definicije standardnog inverza kvadratne regularne matrice  $A \in \mathbb{M}_n$ . Kažemo da je  $B$  inverz od  $A$  ako vrijedi

$$AB = BA = I_n \quad (1.1)$$

i pišemo  $B = A^{-1}$ .

Inverz se može generalizirati na više načina. Jedan od najčešće u praksi korištenih generaliziranih inverza (pseudoinverza) je **Moore-Penroseov inverz**. Taj inverz mora zadovoljavati četiri svojstva:

$$\begin{aligned}ABA &= A \\BAB &= B \\(AB)^* &= AB \\(BA)^* &= BA\end{aligned}$$

gdje je s  $A^*$  označena adjungirana matrica od  $A$ , tj. ako je  $A = (a_{ij})$ , onda je  $A^* = (\bar{a}_{ji})$ .

Gornji uvjeti nazivaju se Moore-Penroseovi uvjeti. Ukoliko postoji  $B$  koji zadovoljava sva četiri svojstva kažemo da je  $B$  Moore-Penroseov inverz ili pseudoinverz od  $A$  te označavamo  $B = A^\dagger$ .

Neka je  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Za generalizirani inverz vrijede sljedeća svojstva:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$

- $(\bar{A})^\dagger = \overline{A^\dagger}$ , gdje je  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ , tj. kompleksno konjugirana matrica po elementima
- $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$
- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^\dagger) = \text{rang}(AA^\dagger) = \text{rang}(A^\dagger A)$
- Ako je  $\text{rang}(A) = n$  onda je

$$A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$$

a ako je  $\text{rang}(A) = m$  onda je

$$A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$$

## 1.2 Problem najmanjih kvadrata

Za  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$  i  $b \in \mathbb{R}^m$  tražimo  $x \in \mathbb{R}^n$  koji minimizira  $\|Ax - b\|_2$ , tj. određujemo minimum reziduala  $r = Ax - b$  u Euklidskoj normi ili 2-normi koja se definira kao

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \text{ za } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definirajmo funkciju  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (1.2)$$

Funkcija  $\phi$  se može na sljedeći način raspisati

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \frac{1}{2} (Ax - b)^T (Ax - b) \\ &= \frac{1}{2} x^T A^T Ax - x^T A^T b + \frac{1}{2} b^T b \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i (A^T A)_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n x_i (A^T b)_i + \frac{1}{2} b^T b \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (A^T A)_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i (A^T b)_i + \frac{1}{2} b^T b \end{aligned} \quad (1.3)$$

Zatim tražimo stacionarne točke

$$\nabla \phi(x) = 0 \quad (1.4)$$

U tu svrhu računamo parcijalnu derivaciju od  $\phi$  po  $x_k$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x) &= (A^T A)_{kk} x_k + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (A^T A)_{kj} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} (A^T A)_{ik} x_i - (A^T b)_k \\
&= \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ki} x_i - (A^T b)_k \\
&= (A^T A x - A^T b)_k
\end{aligned} \tag{1.5}$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je  $A^T A$  simetrična matrica.

Dakle,

$$\nabla \phi(x) = A^T A x - A^T b \tag{1.6}$$

pa za stacionarne točke mora vrijediti

$$A^T A x = A^T b \tag{1.7}$$

ili drugačije zapisano

$$A^T (A x - b) = 0 \tag{1.8}$$

Gornji sustav (1.7) nazivamo sustav normalnih jednadžbi.

Time je dokazan sljedeći teorem.

**Teorem 1.2.1.** Označimo sa  $S$  skup svih rješenja problema najmanjih kvadrata

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \right\} \tag{1.9}$$

Tada je  $x \in S$  ako i samo ako vrijedi relacija

$$A^T (A x - b) = 0 \tag{1.10}$$

□

Da se zaista radi o minimumu funkcije odredimo Hesijan od  $\phi$

$$H\phi = A^T A \tag{1.11}$$

U slučaju da je matrica  $A$  punog stupčanog ranga, tj.  $\text{rang } A = n$ , Hesijan  $H$  je pozitivno definitan te ima inverz. Onda postoji jedinstveni minimum i on je jedinstveno rješenje sustava

$$A^T A x = A^T b \tag{1.12}$$

te je dano s

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = A^\dagger b \tag{1.13}$$

U slučaju da  $A$  nema puni rang rješenje nije jedinstveno, nego se minimum postiže na čitavom afinom potprostoru  $x + \text{Ker}(A)$ , gdje je  $x$  neko rješenje. Među svim rješenjima problema najmanjih kvadrata uvijek postoji jedinstveno rješenje  $x$  najmanje norme, tj. koje još minimizira i  $\|x\|_2$ . Taj  $x$  je okomit na jezgru od  $A$ .

## 1.3 Matrične dekompozicije: SVD i POD

### 1.3.1. SVD

Dekompozicija po singularnim vrijednostima (engl. *Singular Value Decomposition*, SVD) jedna je od najkorisnijih matričnih dekompozicija kako sa teorijskog aspekta tako i u primjeni.

**Teorem 1.3.1.** *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Tada postoje ortogonalne matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  i  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  te dijagonalna matrica  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min\{m,n\}})$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min\{m,n\}}$  tako da vrijedi  $A = U\tilde{\Sigma}V^T$ , gdje je  $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix}$ , u slučaju  $m \geq n$  i  $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix}$ , u slučaju  $m < n$ .*

*Dokaz.* [1] Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $m \geq n$ . Inače promatramo matricu  $A^T$ . Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po  $n$ .

*Baza indukcije:* Za  $n = 1$ , matrica  $A$  je stupčana i njen SVD je dan s

$$A = U\Sigma V^T,$$

gdje je

$$U = \frac{A}{\|A\|_2}, \Sigma = \|A\|_2, V = 1,$$

što vrijedi za svaki  $m \geq 1$ .

*Korak indukcije:* Izaberimo jedinični vektor  $v$  tako da vrijedi

$$\|A\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|Av\|_2,$$

te definirajmo vektor  $u := \frac{Av}{\|Av\|_2}$ . Vektore  $u$  i  $v$  nadopunimo matricama  $\tilde{U}$  i  $\tilde{V}$  tako da  $U_0 = [u, \tilde{U}]$  i  $V_0 = [v, \tilde{V}]$  budu ortogonalne matrice reda  $m$ , odnosno  $n$ . Sada imamo,

$$U_0^T A V_0 = \begin{bmatrix} u^T \\ \tilde{U}^T \end{bmatrix} A [v, \tilde{V}] = \begin{bmatrix} u^T A v & u^T A \tilde{V} \\ \tilde{U}^T A v & \tilde{U}^T A \tilde{V} \end{bmatrix}.$$

Iz definicije vektora  $u$  i  $v$  imamo

$$u^T A v = \frac{v^T A^T}{\|Av\|_2} A v = \frac{\|Av\|_2^2}{\|Av\|_2} = \|Av\|_2 = \|A\| =: \sigma.$$

Kako je  $U_0$  ortogonalna, svi stupci njene podmatrice  $\tilde{U}$  su okomiti na vektor  $u$ , pa je  $\tilde{U}^T u = 0$  te

$$\tilde{U} A v = \tilde{U}^T u \|Av\|_2 = 0.$$

Uvedimo oznake  $A_1 = U_0^T A V_0$ ,  $w^T = u^T A \tilde{V}$  i  $B = \tilde{U}^T A \tilde{V}$ . Tada je

$$A_1 = U_0^T A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Tvrdimo  $w = 0$ . Zbog unitarne invarijantnosti 2-norme vrijedi

$$\sigma = \|A\|_2 = \|U_0^T A V_0\|_2 = \|A_1\|_2.$$

Nadalje, za proizvoljni vektor  $z \neq 0$  vrijedi

$$\|A_1\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|A_1 x\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|A_1 z\|_2}{\|z\|_2},$$

iz čega slijedi nejednakost  $\|A_1\|_2 \|z\|_2 \geq \|A_1 z\|_2$ . Neka je  $z = \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix}$ . Onda je

$$\begin{aligned} \|A_1\|_2^2 \|z\|_2^2 &= \|A_1\|_2^2 (\sigma^2 + \|w\|_2^2) \geq \|A_1 z\|_2^2 = \left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= (\sigma^2 + w^T w)^2 + \|Bw\|_2^2 \geq (\sigma^2 + \|w\|_2^2)^2. \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa, dijeljenjem s  $(\sigma^2 + w^T w)$ , slijedi

$$\sigma^2 = \|A\|_2^2 = \|A_1\|_2^2 \geq \sigma^2 + \|w\|_2^2,$$

što vrijedi samo ako  $w = 0$ . Dakle,

$$U_0^T A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Sada prepostavimo da  $B$  ima SVD

$$B = U_1 \Sigma_1 V_1^T,$$

pa dobivamo

$$U_0^T A V_0 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & U_1 \Sigma_1 V_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

**Napomena 1.3.2.** Teorem 1.3.1 vrijedi i za kompleksne matrice  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , no tada su  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  i  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitarne matrice.

Neka je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , gdje je  $m \geq n$  i neka je  $A = \hat{U}\tilde{\Sigma}V^T$  rastav matrice  $A$  iz teorema 1.3.1. Particioniramo matricu  $\hat{U} = \begin{bmatrix} U & U_0 \end{bmatrix}$  te je

$$A = \hat{U}\tilde{\Sigma}V^T = \begin{bmatrix} U & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T = U\Sigma V^T. \quad (1.14)$$

Stupce matrice  $\hat{U} = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  nazivamo lijevi singularni vektori, a stupce matrice  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  desni singularni vektori. Dijagonalne elemente matrice  $\Sigma$  nazivamo singularnim vrijednostima. Iz  $A = U\Sigma V^T$  lagano slijedi

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T. \quad (1.15)$$

Svaki član  $u_i v_i^T$  u gornjoj sumi je matrica ranga 1. Sukladno tome,  $A$  je linearna kombinacija takvih matrica gdje su koeficijenti u linearnoj kombinaciji upravo sinuglarne vrijednosti.

Dekompozicija po singularnim vrijednostima (SVD) usko je povezana sa svojstvenom dekompozicijom te svojstvenim vektorima i vrijednostima matrice. Iz (1.15) slijedi

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$A^T u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

iz čega dalje slijedi

$$A^T Av_i = A^T (Av_i) = A^T (\sigma_i u_i) = \sigma_i A^T u_i = \sigma_i^2 v_i,$$

što pokazuje da su desni singularni vektori  $(v_i)_{i=1}^n$  svojstveni vektori matrice  $A^T A$  s pripadnom svojstvenom vrijednosti  $\lambda_i := \sigma_i^2$ . Analogno se vidi da su lijevi singularni vektori  $(u_i)_{i=1}^n$  svojstveni vektori matrice  $AA^T$  s istom pripadnom svojstvenom vrijednosti  $\lambda_i$ . Preostalih  $m - n$  lijevih singularnih vektora, su također svojstveni vektori matrice  $AA^T$  sa svojstvenom vrijednosti 0.

SVD dekompozicija omogućuje i određivanje ranga matrice  $A$ . Neka su singularne vrijednosti  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ . Tada je  $\text{rang}(A) = r$ , tj. rang matrice  $A$  je broj pozitivnih singularnih vrijednosti. Također lako se vidi da je  $\text{rang}(\Sigma) = \text{rang}(A)$ . Dakle, u sumi (1.15) dovoljno je uzeti prvih  $r$  članova jer su preostali jednaki 0

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T. \quad (1.16)$$

Ako  $A$  ima puni rang, onda se rješenje problema najmanjih kvadrata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

može dobiti kao

$$x = V\Sigma^{-1}U^T b. \quad (1.17)$$

Naime,

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|U\Sigma V^T x - b\|_2^2 = \|\hat{U}^T(U\Sigma V^T x - b)\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} U^T \\ U_0^T \end{bmatrix} (U\Sigma V^T x - b) \right\|_2^2, \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma V^T x - U^T b \\ -U_0^T b \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\Sigma V^T x - U^T b\|_2^2 + \|U_0^T b\|_2^2 \end{aligned}$$

što postiže minimum kada je prvi član jednak 0, tj. upravo kada je  $x = V\Sigma^{-1}U^T b$ .

Ukoliko je pak  $\text{rang}(A) = r < n$ , matrica  $\Sigma$  nije regularna jer ima nule na dijagonali

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podmatrica  $\Sigma_+$  je tada regularna matrica reda  $r$ . Nadalje, za  $A$  imamo sljedeći rastav

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}^T = U_1 \Sigma_+ V_1^T$$

gdje matrice  $U_1$  i  $V_1$  imaju  $r$  stupaca, pa matrica  $U_2$  ima  $m - r$  stupaca, a matrica  $V_2$  ima  $n - r$  stupaca. Analogno kao u slučaju matrice punog ranga računamo

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|U^T(Ax - b)\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} (U_1 \Sigma_+ V_1^T x - b) \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \Sigma_+ V_1^T x - U_1^T b \\ -U_2^T b \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\Sigma_+ V_1^T x - U_1^T b\|_2^2 + \|U_2^T b\|_2^2. \end{aligned}$$

Očito je prethodni izraz minimiziran ukoliko je prvi član 0, tj.

$$\Sigma_+ V_1^T x = U_1^T b,$$

iz čega slijedi rješenje

$$x = V_1 \Sigma_+^{-1} U_1^T b. \quad (1.18)$$

Matricu  $A$  možemo aproksimirati matricom manjeg ranga  $A_k$ ,  $k < r$ . Tada ćemo uzeti prvih  $k$  stupaca matrice  $U$  i matrice  $V$  te prvih  $k$  singularnih vrijednosti. Definiramo

$$U(:, 1 : k)_{ij} = U_{ij}, 1 \leq j \leq k,$$

$$V(:, 1 : k)_{ij} = V_{ij}, 1 \leq j \leq k,$$

$$\Sigma(1 : k, 1 : k)_{ij} = \Sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq k.$$

O pogrešci pritom načinjene aproksimacije govori sljedeći rezultat.



**Teorem 1.3.3.** Neka je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ranga  $r$  i neka je  $A = U\Sigma V^T$  njen SVD. Definirajmo  $A_k := U(:, 1:k) \Sigma(1:k, 1:k) V(:, 1:k)^T$ . Tada je za svaki  $k < r$

$$\min_{\text{rang } X=k} \|A - X\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1},$$

i

$$\min_{\text{rang } X=k} \|A - X\|_F = \|A - A_k\|_F = \sqrt{\sum_{j=k+1}^r \sigma_j^2}.$$

□

Dakle, ukoliko su nakon prvih  $k$  singularnih vrijednosti preostale zanemarivo male, matrica  $A$  je dovoljno dobro opisana matricom ranga  $k$ , a o kvaliteti aproksimacije govore preostale, odnosno zanemarene singularne vrijednosti.

SVD nam omogućava da iz nekog skupa podataka, prikazanog pomoću matrice, izdvojimo relevantni dio, a ostatak izostavimo. Za primjer navedimo kako SVD algoritam omogućuje kompresiju slika. Uzmimo sliku dimenzije  $3000 \times 3000$  piksela. Kako bismo takvu sliku spremili u memoriju potrebno nam je  $3\,000 \cdot 3\,000 \cdot 24 = 216\,000\,000$  bitova memorije (za pamćenje jednog piksela koristimo 24 bita) što je zahtjev od 25.7 megabajta na memoriju. Općenito, zamislimo da matrica  $A$  predstavlja  $m \times n$  grayscale sliku gdje broj na  $(i, j)$  mjestu u matrici predstavlja svjetlinu piksela na mjestu  $(i, j)$  na slici. Za pamćenje slike potrebno je pamtiti  $m \cdot n$  brojeva. SVD te matrice dan je s  $A = U\Sigma V^T$  i prema teoremu 1.3.3 znamo da je  $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$  najbolja aproksimacija matricom ranga  $k$ . Za spremiti tu matricu u memoriju potrebno je pamtiti  $(m+n) \cdot k$  brojeva što je značajna ušteda memorije.



(a)

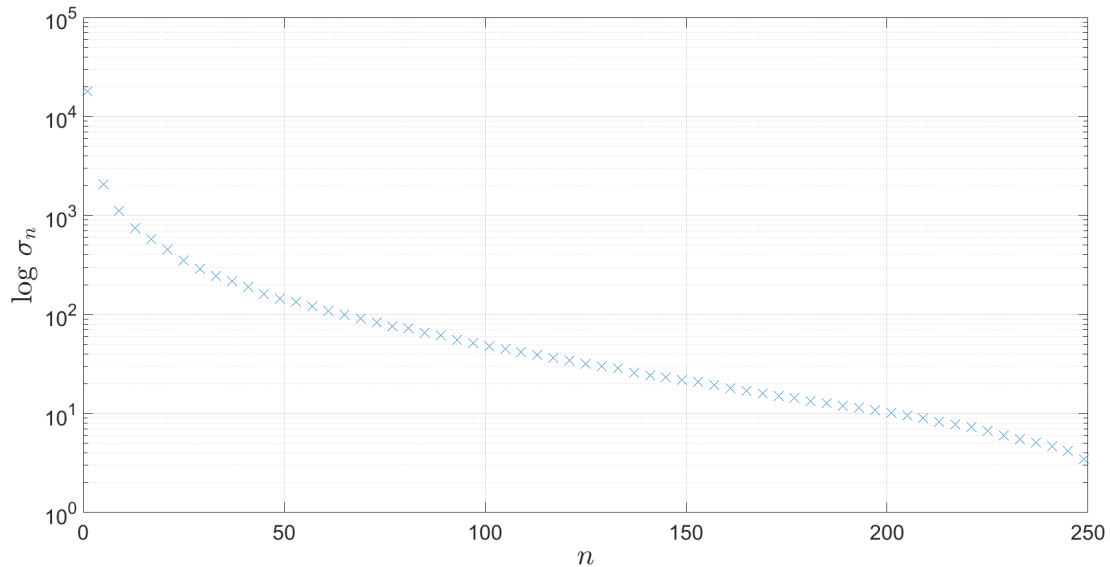


(b)



(c)

Slika 1.1: Komprimirana slika (a)  $k = 10$  (b)  $k = 50$  (c) Originalna slika



Slika 1.2: Grafički prikaz singularnih vrijednosti za matricu dobivenu iz gornje slike u logaritamskoj skali

U gornjem primjeru originalna slika je dimenzije  $360 \times 250$ . Rekonstruirana slika sa prvih 50 singularnih vrijednosti daje vizualno identičnu sliku, dok je pritom načinjena ušteda memorijskog prostora od 66.1%. Slika 1.2 prikazuje padajući trend singularnih vrijednosti za sliku iz primjera.

### 1.3.2. POD

*Proper Orthogonal Decomposition* ili skraćeno POD glavna je metoda redukcije dimenzionalnosti podataka. POD je praktično identičan SVD dekompoziciji matrice podataka  $X$ , no interpretacija je nešto drugačija. Glavna je ideja POD-a, kao i SVD-a izvući glavnu informaciju iz seta podataka koristeći nekoliko glavnih baznih vektora, odnosno reducirati dimenziju sustava.

Neka je  $X = U\Sigma V^T$  SVD dekompozicija od  $X$ . Pokušajmo sada podatke projicirati na jednodimenzionalni potprostor i naći pritom najbolju aproksimaciju. Problem nalaženja vektora koji najbolje opisuje podatke  $X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$  možemo formulirati na sljedeći način

$$\max_{\psi_1 \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi_1 \rangle|^2, \quad \|\psi_1\|_2 = 1. \quad (1.19)$$

Problem (1.19) predstavlja optimizacijsku zadaću uz uvjet. Regularnost rješenja optimizacijske zadaće osigurava  $\psi_1 \neq 0$ . Lagrangeova funkcija  $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je oblika

$$L(\psi, \lambda) = \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi \rangle|^2 + \lambda(1 - \|\psi\|_2^2), \quad (\psi, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$$

Ako je  $\psi \in \mathbb{R}^m$  rješenje problema (1.19) onda je  $\nabla L(\psi, \lambda) = 0$ .

Računamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi_i}(\psi, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m X_{kj} \psi_k \right|^2 + \lambda \left( 1 - \sum_{k=1}^m \psi_k^2 \right) \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m X_{kj} \psi_k \right) X_{ij} - 2\lambda \psi_i \\ &= 2 \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n X_{ij} X_{jk}^T \psi_k \right) - 2\lambda \psi_i \\ &= 2 \sum_{k=1}^m (XX^T)_{ik} \psi_k - 2\lambda \psi_i. \end{aligned}$$

Iz toga proizlazi da je gradijent Lagrangeove funkcije jednak

$$\nabla_{\psi} L(\psi, \lambda) = 2(XX^T \psi - \lambda \psi) = 0 \Rightarrow XX^T \psi = \lambda \psi. \quad (1.20)$$

Pritome je  $XX^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simetrična pozitivno definitna matrica. Dakle postoji  $m$  ortonormiranih svojstvenih vektora  $(\psi_i)_{i=1}^m$  i  $m$  pridruženih nenegativnih svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ . Odaberimo sada  $\psi_1$  kao prvi lijevi singularni vektor, tj. prvi stupac matrice  $U$ . Otprije znamo da  $\psi_1$  rješava (1.20). Pokažimo da rješava i optimizacijsku zadaću (1.19). Kako je  $U$  ortogonalna matrica, uvjet vrijedi. Treba još pokazati da  $\psi_1$  maksimizira funkciju cilja iz (1.19). Neka je  $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^m$  proizvoljni jedinični vektor ( $\|\tilde{\psi}\|_2 = 1$ ). Vektori  $(\psi_i)_{i=1}^m$  čine ortonormalan skup pa možemo pisati  $\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i$ . Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |\langle x_j, \tilde{\psi} \rangle|^2 &= \sum_{j=1}^n \left| \left\langle x_j, \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \left\langle x_j, \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i \right\rangle \left\langle x_j, \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \psi_i \right\rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\langle x_j, \psi_i \rangle \langle x_j, \psi_k \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \underbrace{\left\langle \sum_{j=1}^n \langle x_j, \psi_i \rangle x_j, \psi_k \right\rangle}_{=\lambda_i \psi_i} \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left( \underbrace{\langle \lambda_i \psi_i, \psi_k \rangle}_{=\lambda_i \delta_{ik}} \langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle \langle \tilde{\psi}, \psi_k \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i |\langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle|^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^m |\langle \tilde{\psi}, \psi_i \rangle|^2 = \lambda_1 \|\tilde{\psi}\|^2 = \lambda_1 = \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi_1 \rangle|^2
\end{aligned}$$

Dakle,  $\psi_1 = (U_{j1})_{j=1}^m$  maksimizira funkciju iz (1.19), uz vrijednost funkcije cilja  $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$ .

Kada bismo tražili drugi vektor  $\psi_2$  baze u kojoj radimo projekciju i to ortogonalan na prethodni, rješavali bismo problem

$$\max_{\psi_2 \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi_2 \rangle|^2, \quad \|\psi_2\|_2 = 1, \quad \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0 \quad (1.21)$$

U biti rješavamo isti optimizacijski problem kao i kad smo tražili prvi vektor  $\psi_1$ , no ne više na  $\mathbb{R}^m$ , nego na ortogonalnom komplementu od  $\{\psi_1\}$ . Slično se pokazuje da za  $\psi_2$  treba uzeti drugi stupac matrice  $U$  iz SVD dekompozicije te da je  $\max_{\psi_2 \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi_2 \rangle|^2 = \sigma_2^2 = \lambda_2$ . Ovaj postupak iterativno nastavljamo do konstrukcije baze željene dimenzije. Dobivene bazne vektore, tj. stupce matrice  $U$  zvat ćemo POD modovi, odnosno POD baza [9], [8].

Pokazali smo da se računanje POD baze svodi na računanje SVD dekompozicije. U suštini te dvije dekompozicije su praktično ista stvar.

**Napomena:** Za  $f, g \in \mathbb{R}^n$  definiramo težinski skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle_W := f^T W g, \quad (1.22)$$

gdje je  $W$  simetrična i pozitivno definitna matrica. Norma inducirana tim skalarnim produktom je  $\|f\|_W = \sqrt{\langle f, f \rangle_W}$ . Sada prethodni izvod možemo ponoviti uz definiciju ovog novog skalarnog produkta, koji predstavlja svojevrsnu generalizaciju Euklidskog skalarnog produkta. Umjesto (1.19) imali bismo

$$\max_{\psi_1 \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^n |\langle x_j, \psi_1 \rangle_W|^2, \quad \|\psi_1\|_W = 1. \quad (1.23)$$

Analogno, uveli bi Lagrangeovu funkciju što bi nas dovelo do generaliziranog svojstvenog problema umjesto (1.20)

$$(WX)(WX)^T \psi = \lambda W \psi. \quad (1.24)$$

Motivacija za uvođenje težinskog skalarnog produkta, dolazi od poopćenja POD dekompozicije na beskonačnodimenzionalne prostore, kao što je npr. prosto kvadratno integrabilnih funkcija  $L^2(\Omega)$ , gdje je  $\Omega$  neki kompakt u  $\mathbb{R}^n$ . To je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, dx, \quad \text{za } f, g \in L^2(\Omega).$$

Pri diskretizaciji  $L^2$ -funkcija, tj. aproksimacijama u konačnodimenzionalnim potprostorima skalarni produkt (integral) računamo kvadraturnim formulama. Kvadraturene formule uključuju težine u čvornim točkama domene, stoga je ovdje prirodno koristiti težinski skalarni produkt  $\langle f, g \rangle_W := f^T W g$ .

Ilustrirajmo sada gornje ideje na nekoliko primjera iz kvantne mehanike.

### Primjer 2.2.1. (Kvantni harmonički oscilator)

Schrödingerova jednadžba

$$\mathbf{i}u_t = \mathcal{H}u \quad (1.25)$$

opisuje ponašanje kvantnih sistema. U jednadžbi (1.25),  $\mathbf{i}$  je imaginarna jedinica, rješenje  $u(x, t) \in \Omega$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  zovemo valna funkcija i ona statistički opisuje stanje sustava, a  $\mathcal{H}$  je operator na  $\Omega$  dan s

$$\mathcal{H}u = -\frac{1}{2}\nabla^2 u + Vu, \quad (1.26)$$

gdje  $V$  predstavlja potencijal, odnosno potencijalnu energiju promatranog kvantnog sustava. Operator  $\mathcal{H}$  se još naziva i hamiltonijan, odnosno operator ukupne energije jer mu spektar sadrži upravo dopustive energije sustava. Sada pretpostavimo  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , tj. da imamo jednu prostornu dimenziju te pretpostavljamo specifičan oblik potencijala  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ , koji je tzv. harmonički potencijal. Dakle, imamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\mathbf{i}u_t = -\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}x^2 u \quad (1.27)$$

koja opisuje dinamiku kvantnog harmoničkog oscilatora. Množenjem s  $-i$

$$u_t = \frac{i}{2}u_{xx} + -\frac{i}{2}x^2u$$

te primjenom Fourierove transformacije dobivamo

$$\hat{u}_t = \frac{i}{2}(ik)^2\hat{u} + -\frac{i}{2}\widehat{x^2u}.$$

Ako k tome dodamo još i početni uvjet  $u(x, 0) = e^{-0.2x^2}$  imamo inicijalnu zadaću, čije je numeričko rješenje prikazano na slici 1.3(a). Diskretizacija prostornog dijela domene načinjena je s  $n = 512$  točaka, dakle aproksimacije rješenja su 512-dimenzionalni vektori u danim vremenskim trenutcima.

$$u(x, t_j) \approx u_j, \quad t_j \in [0, T], \quad j = 1, \dots, m.$$

No već pogledom na graf, možemo uočiti da podaci pokazuju neku pravilnost, odnosno hipodimenzionalnost te naslućujemo da bismo mogli opisati te podatke (približno) jednako dobro i u nekom nižedimenzionalnom potprostoru.

Na dobiveno numeričko rješenje (zapisano u matricu), odnosno podatke ćemo primjeniti SVD dekompoziciju i odrediti POD modove.

$$X = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

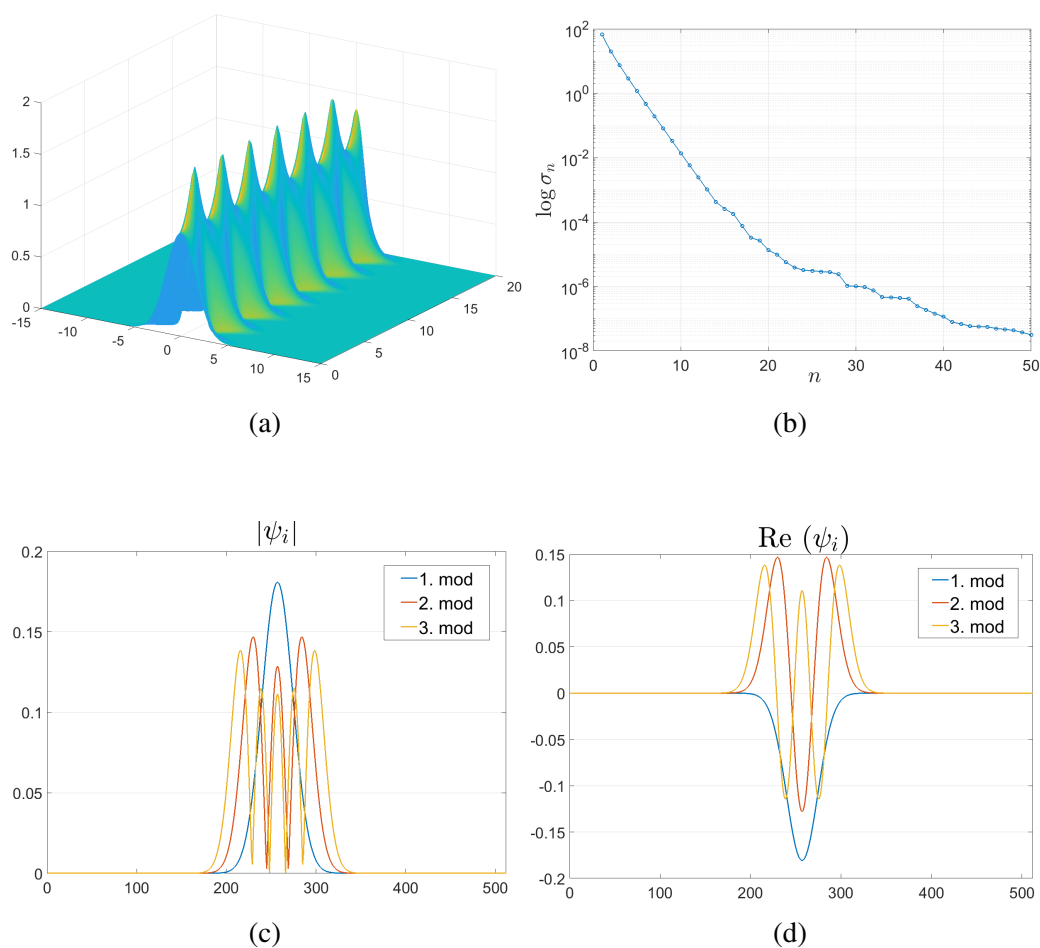
Prva singularna vrijednost matrice  $X$  ima težinu oko 68%, druga oko 21%, treća oko 8%, dok su preostale zanemarivo male (Slika 1.3(b)). To znači da podatke možemo dobro opisati s tri singularne vrijednosti i tri singularna vektora (moda). Iako su podaci dimenzije  $n \times m$  (u primjeru  $n = 512$ ,  $m = 100$ ), iz SVD-a prozlaži da su oni intrinzično trodimenzionalne prirode. Stoga umjesto rastava  $X = U\Sigma V^*$ , podatke možemo vjerno rekonstruirati uzimajući prva tri stupca od  $U$  i  $V$

$$X = U(:, 1 : 3)\Sigma(1 : 3, 1 : 3)V(:, 1 : 3)^*.$$

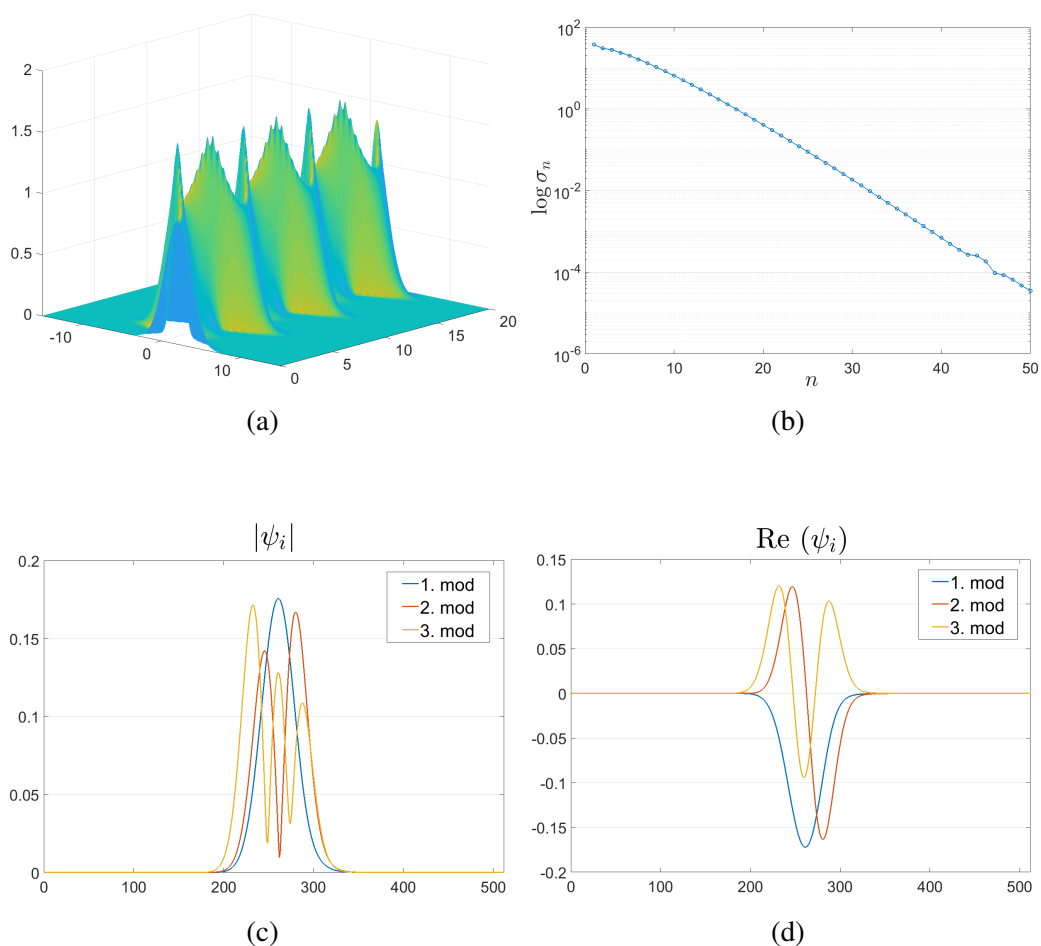
Za prva tri moda (glavni modovi), odnosno prva tri stupca od  $U$  prikazani su realni dio te modul na slici 1.3(c) i (d). Primjetimo još da su modovi simetrični. Simetrija modova, posljedica je simetričnosti početnog uvjeta  $u(x, 0) = e^{-0.2x^2}$ .

Pogledajmo sada što će se dogoditi ako promjenimo početni uvjet, npr.  $u(x, 0) = e^{-0.2(x-2)^2}$ .

Prvo uočavamo da modovi, osim 1. moda, nisu više simetrični (Slika 1.4(c) i (d)). No, sada prvih 20-ak singularnih vrijednosti ima značajnu vrijednost i za vjeran opis ovako generiranih podataka trebali bismo uzeti recimo prvih 20 modova.



Slika 1.3: (a) Rješenje Schrödingerove jednadžbe za kvantnomehanički harmonički oscilator (1.27) uz početni uvjet  $u(x, 0) = e^{-0.2x^2}$  (ulazni podaci  $X$ ) (b) SVD je izračunat na generiranim podacima  $X$  te su prikazane singularne vrijednosti u logaritamskoj skali. (c) Apsolutna vrijednost i (d) realni dio za 3 glavna moda



Slika 1.4: (a) Rješenje Schrödingerove jednadžbe za kvantnomehanički harmonički oscilator (1.27) uz početni uvjet  $u(x, 0) = e^{-0.2(x-2)^2}$  (ulazni podaci  $X$ ) (b) SVD je izračunat na generiranim podacima  $X$  te su prikazane singularne vrijednosti u logaritamskoj skali. (c) Apsolutna vrijednost i (d) realni dio za 3 glavna moda



**Primjer 2.2.2.** (*Nelinearna Schrödingerova jednadžba*)

U ovom primjeru bit će ilustrirana redukcija dimenzionalnosti za nelinearni sustav, kakvi su česti u praksi. Razmatramo nelinearnu Schrödingerovu jednadžbu

$$\mathbf{i}u_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0. \quad (1.28)$$

Ako pomnožimo s  $-\mathbf{i}$  imamo

$$u_t = \frac{\mathbf{i}}{2}u_{xx} + \mathbf{i}|u|^2u.$$

Sada primjenimo Fourierovu transformaciju i dobivamo

$$\hat{u}_t = \frac{\mathbf{i}}{2}(\mathbf{i}k)^2\hat{u} + \mathbf{i}(\widehat{|u|^2u}).$$

Uz početni uvjet npr.  $u(0) = 2\operatorname{sech}x$  opet imamo inicijalnu zadaću čije rješenje će nam poslužiti kao set podataka za analizu. Rješenje, tj. simulirani podaci prikazani su na slici 1.5 (a). Nadalje izračunati su glavni POD modovi kao i sinuglarne vrijednosti matrice podataka  $X$  (Slika 1.5 (b)) te vidimo da su prve dvije singularne vrijednosti značajno veće od drugih te da imamo 2 glavna moda.

Pogledajmo situaciju kada podatke aproksimiramo samo jednim modom, odnosno ako ih prikažemo u jednodimenzionalnom potprostoru. Tada je rješenje  $u$  opisano samo prvim modom  $\psi_1$  te vremenskom evolucijom  $a(t)$

$$u(x, t) = a(t)\psi_1(x). \quad (1.29)$$

Preostaje naći vremensku evoluciju  $a(t)$ . Uvrstimo raspis  $u(x, t) = a(t)\psi_1(x)$  u jednadžbu (1.28) te imamo

$$\mathbf{i}a'(t)\psi_1(x) + \frac{1}{2}a(t)\psi_1''(x) + |a|^2a|\psi_1|^2\psi_1 = 0. \quad (1.30)$$

i pomnožimo s  $\psi_j$ . Zbog ortonormiranosti baze  $(\psi_i)$  preostaje nam jedino jednadžba

$$\mathbf{i}a'(t) + \frac{1}{2}a(t)\langle\psi_1'', \psi_1\rangle + |a|^2a\langle|\psi_1|^2\psi_1, \psi_1\rangle = 0. \quad (1.31)$$

Označimo  $\alpha = \langle\psi_1'', \psi_1\rangle$  i  $\beta = \langle|\psi_1|^2\psi_1, \psi_1\rangle$  pa prethodna jednadžba poprima oblik

$$\mathbf{i}a_t + \frac{\alpha}{2} + \beta|a|^2a = 0, \quad (1.32)$$

koja uz definirani početni uvjet  $a(0) = a_0$  ima egzaktno rješenje

$$a(t) = a_0 e^{i\frac{\alpha}{2}t + \beta|a_0|^2t}. \quad (1.33)$$

Situacije kada imamo egzaktno rješenje nekog problema su izuzetno dobre, ali nažalost u praksi nisu česte.

Kako smo ranije već odredili da su nam u podacima prisutna dva glavna moda, željeli bismo napraviti sličan postupak kao gore ali koristeći dva moda, odnosno projekciju u dvodimenzionalnom potprostoru s bazom  $(\psi_1, \psi_2)$ .

$$u(t, x) = a_1(t)\psi_1(x) + a_2(t)\psi_2(x) = \sum_{i=1}^2 a_i(t)\psi_i(x) = \Psi \vec{a}, \quad (1.34)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2).$$

Uvrštavanjem gornjeg raspisa u bazi  $(\psi_1, \psi_2)$  u jednadžbu (1.28) i množenjem s  $\Psi^T$  slijeva dobivamo

$$a' = \frac{i}{2} \Psi^T \Psi'' a + i \Psi^T (|\Psi a|^2 \Psi a). \quad (1.35)$$

Prvi član je linearan i nije zahtjevan za računanje. Komplikacije u praksi obično predstavljaju nelinearni članovi poput drugog člana u gornjoj jednadžbi.

Uvrstimo još početni uvjet

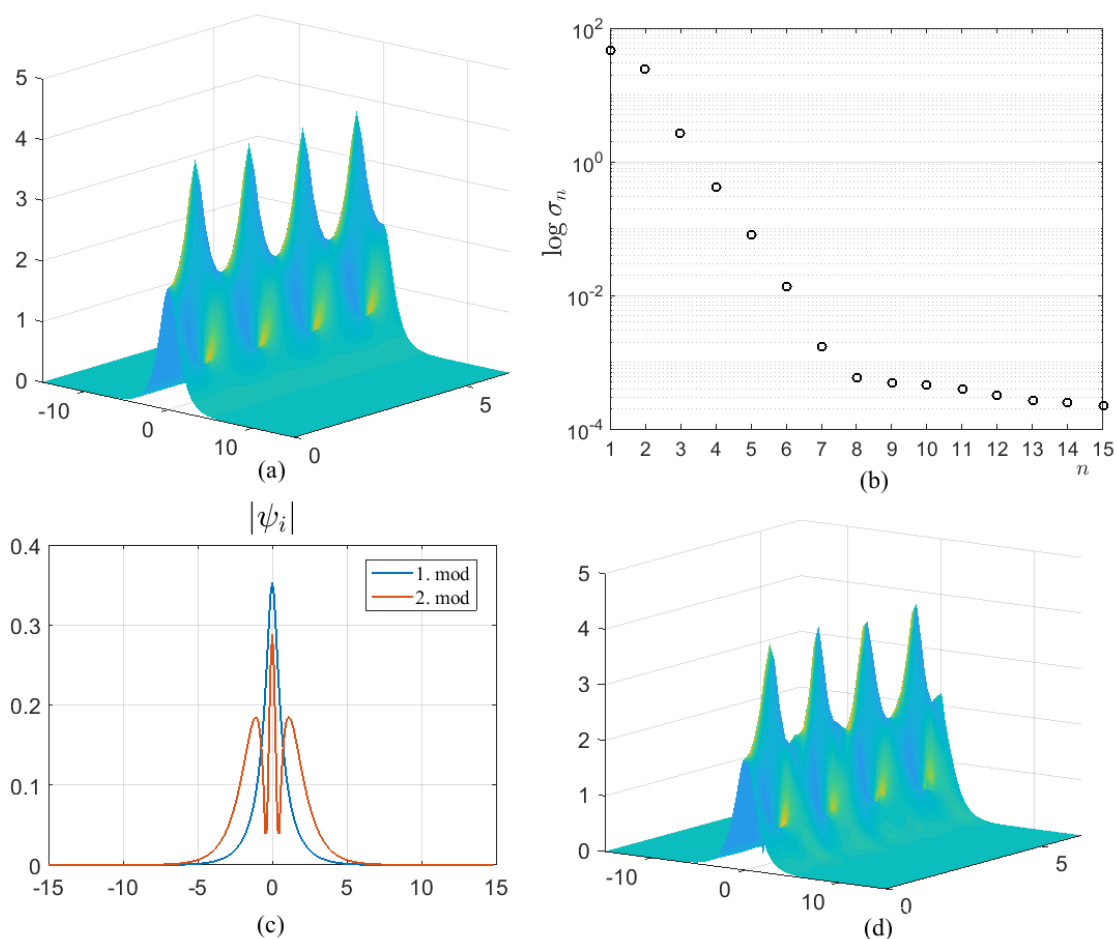
$$u(x, 0) = a_1(0) \psi_1(x) + a_2(0) \psi_2(x). \quad (1.36)$$

Koeficijente  $a_1(0)$  i  $a_2(0)$  redom možemo izračunati množenjem s  $\psi_1$  i  $\psi_2$

$$a_1(0) = \langle u(x, 0), \psi_1(x) \rangle,$$

$$a_2(0) = \langle u(x, 0), \psi_2(x) \rangle.$$

Koristeći aproksimaciju reda 2 dobivamo vrlo vjernu rekonstrukciju početnih podataka  $X$  i to koristeći samo 2 moda, tj. reprezentaciju u dvodimenzionalnom potprostoru (Originalni prostor rješenja diferencijalne jednadžbe je bio 512-dimenzionalan).



Slika 1.5: (a) Rješenje nelinearne Schrödingerove jednadžbe (1.28) uz početni uvjet  $u(x,0) = 2 \operatorname{sech}x$  (ulazni podaci  $X$ ) (b) SVD je izračunat na generiranim podacima  $X$  te su prikazane singularne vrijednosti u logaritamskoj skali. (c) Apsolutna vrijednost za 2 glavna moda (d) Rekonstrukcija podataka iz simulacije, odnosno aproksimacija podataka u bazi  $(\psi_1, \psi_2)$

# Poglavlje 2

## Uvod u DMD

### 2.1 Uvod

**Dinamička modalna dekompozicija** (DMD) je matematička metoda razvijena u svrhu razumijevanja, kontrole i simulacije kompleksnih nelinearnih sustava čije ponašanje nije opisivo jednažbama (barem djelomično). DMD je metoda originalno razvijena za numeričke simulacije u dinamici fluida pri analizi kompleksnih tokova, no DMD je do danas primjenjen u mnogim drugim područjima kao što su epidemiologija, analiza financijskih tržišta, neuroznanosti, klimatologija, razne grane inženjerstva i dr. Eksperimentalni (ili simulirani) podaci koji tako dolaze iz različitih područja su slike stanja sustava prikupljeni u različitim vremenskim trenucima.

DMD algoritam daje dekompoziciju podataka ovisnih o prostornim i vremenskim varijablama u prostorne modove (DMD modove) čije je vremensko ponašanje karakterizirano pripadnom frekvencijom (svojstvenom vrijednosti). Moć DMD-a je u tome što eksploatira hipodimensionalnost kompleksnog sistema velike dimenzije, koja *a priori* nije jasna. Time se dobiva reducirani nižedimensionalni oblik sustava koji je računalno, a i teorijski prihvatljiviji.

Dinamička modalna dekompozicija ima brojne primjene u raznim područjima, no 3 su generalne primjene DMD-a u praksi:

1. Dijagnostika
2. Predikcija budućih stanja sustava
3. Kontrola

DMD algoritam prvotno je korišten kao dijagnostički alat u karakterizaciji kompleksnih tokova fluida ([4], [5]). Algoritam iz danog seta podataka daje hipodimensionalnu strukturu sistema čime omogućuje fizikalnu interpretaciju rezultata u terminima glavnih pros-

tornih modova čije je vremensko ponašanje asocirano s pripadnim frekvencijama. Uloga DMD u dijagnostici i otkrivanju fundamentalnih zaključaka o kompleksnim fizikalnim sistemima danas je vrlo značajna.

Još sofisticiranija primjena DMD metode je predikcija budućih stanja sustava. Naime, cilj je iz danog seta podataka konstruirati model koji će samo na temelju tih podataka predviđati stanje u kojem će se sustav naći u nekom budućem trenutku (engl. *data-driven*). Prostorni modovi i pripadne frekvencije koje izračunava DMD algoritam generiraju dinamički model koji omogućuje predikciju stanja sustava. Također, ove ideje su široko korištene u primjeni i pokazale su se uspješnima u mnogim područjima.

Konstrukcija kontrolnih strategija koje su temeljene samo na ulaznom setu podataka je najizazovnija primjena za DMD. Zbog toga što zapravo DMD-om aproksimiramo dinamiku nelinearnog sustava linearnim modelom predikcija stanja sistema je vjerodostojna u ograničenom vremenskom rasponu u budućnosti. Stoga je ideja kontrolnih strategija osigurati dovoljno veliki vremenski interval u kojem je predikcija dovoljno pouzdana da se može koristiti za kontroliranje ponašanja kompleksnih dinamičkih sustava.

## 2.2 Dinamički sustavi

Promatramo općeniti dinamički sustav

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu), \quad (2.1)$$

gdje je  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  vektor koji opisuje stanje sustava u vremenskom trenutku  $t$ , a  $\mu$  su parametri konkretnog sustava, dok funkcija  $f$  opisuje dinamiku promatranog sustava. Dinamika sustava je ovdje opisana kao sustav običnih (općenito nelinearnih) diferencijalnih jednadžbi, no ovaj sustav može doći i od diskretizacije neke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Nadalje diskretizacijom u vremenskoj domeni  $t_k = k\Delta t$  dobivamo  $x_k = x(k\Delta t)$  koji predstavlja stanje sustava u diskretnom trenutku  $t_k$ . Definiramo preslikavanje  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kao

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (2.2)$$

koje predstavlja evoluciju sustava iz  $x_k$  u  $x_{k+1}$ . Stanja sustava je moguće mjeriti u trenucima  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  te označimo s  $y_k = g(x_k)$  dobivena mjerenja. Realno stanje sistema obično nije poznato, već samo mjerenja koja možemo načiniti. Stoga ćemo često za funkciju  $g$  uzeti identitetu, tj. poistovjetiti stanje sustava i mjerenje u danom vremenskom trenutku.

Važno je naglasiti da za DMD metodu nisu potrebne nikakve pretpostavke o promatranom sistemu, tj. dinamika sistema  $f$  ne mora biti unaprijed poznata (engl. *equation-free*).

DMD algoritam konstruira lokalno linearni dinamički sustav

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x \quad (2.3)$$

koji aproksimira ponašanje nelinearnog dinamičkog sistema (2.1). Uz početni uvjet  $x(0)$  sustav (2.3) ima rješenje

$$x(t) = \sum_{k=1}^n b_k \phi_k e^{\omega_k t} = \Phi e^{\Omega t} b \quad (2.4)$$

gdje je  $\Phi = (\phi_k)_k$  matrica svojstvenih vektora,  $\Omega = \text{diag}(\omega_k)$  dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima matrice  $A = e^{\mathcal{A}\Delta t}$  na dijagonali, a  $b = (b_k)$  vektor čije koordinate predstavljaju koordinate početnog uvjeta u bazi svojstvenih vektora  $\Phi$ .

## 2.3 Definicija

Dinamičku modalnu dekompoziciju možemo shvatiti i kao linearnu regresiju podataka na lokalno linearnu dinamiku

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (2.5)$$

gdje je matrica  $A$  odabrana tako da minimizira  $\|x_{k+1} - Ax_k\|_2$ , a  $\|\cdot\|_2$  je standardna euklidska norma.

$$\|x_{k+1} - Ax_k\| \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.6)$$

Zapišimo podatke u dvije matrice:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_m \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

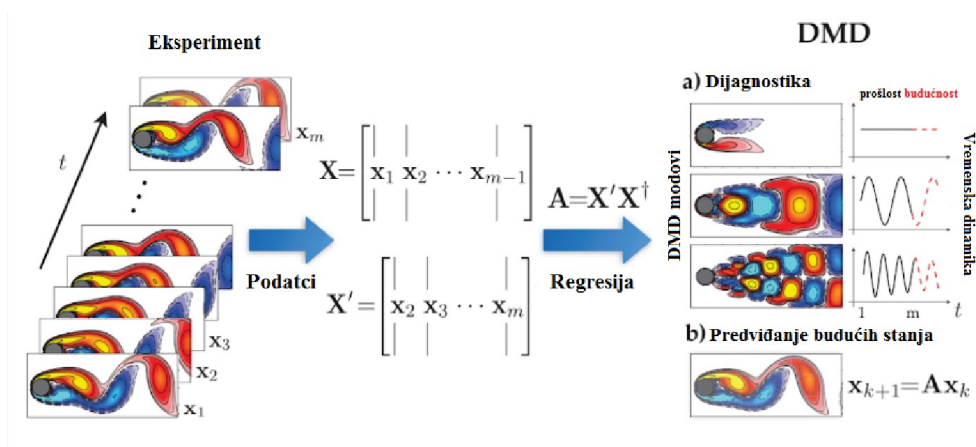
Lokalno linearnu aproksimaciju možemo napisati i matrično kao

$$X' = AX \quad (2.8)$$

Matrica  $A$  koja minimizira  $\|X' - AX\|_F$  ( $\|\cdot\|_F$  Frobeniusova matrična norma) je rješenje problema najmanjih kvadrata. Ako  $X$  ima puni stupčani rang onda je rješenje jedinstveno i dano je formulom

$$A = X'X^\dagger \quad (2.9)$$

gdje je  $X^\dagger$  Moore-Penroseov pseudoinverz od  $X$  (vidi poglavlje 1.1).



Slika 2.1: Shematski prikaz dinamičke modalne dekompozicije (DMD) na primjeru kompleksnog toka fluida [3]

Rečeno je ranije da je DMD metoda koja daje dekompoziciju podataka u skup dinamičkih modova (DMD modova) čije je vremensko ponašanje opisano pripadnim svojstvenim vrijednostima (frekvencijama). Sada ćemo iskazati preciznu matematičku definiciju DMD-a.

**Definicija 2.3.1.** (Dinamička modalna dekompozicija) *Neka su  $X$ ,  $Y$  dvije matrice podataka*

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ Y &= [y_1, y_2, \dots, y_n] \end{aligned} \quad (2.10)$$

*te neka je dan dinamički sustav čija je evolucija opisana s  $y_k = Ax_k$ . Dinamička modalna dekompozicija para podataka  $(X, Y)$  je svojstvena dekompozicija matrice*

$$A = YX^\dagger \quad (2.11)$$

*čije su svojstvene vrijednosti  $\Lambda$  i vektori  $\Phi$ . Svojstvene vektore  $\Phi$  nazivamo DMD modovi.*

Jednadžba (2.8) je specijalni slučaj gornje definicije uz  $y_k = x_{k+1}$ .

## 2.4 Redukcija dimenzije i reducirani modeli

Podaci  $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$  kojima raspolažemo i koje smo sortirali kao stupce matrice  $X$  njih ukupno  $m - 1$  gdje je  $m$  broj vremenskih trenutaka, su dimenzije  $n$ . Dimenzija vektora

$n$  predstavlja broj čvornih točaka u kojemu je snimljeno stanje sustava, odnosno broj diskretizacijskih točaka prostorne domene. Dakle matrica podataka  $X$  je dimenzije  $n \times (m - 1)$ , kao i matrica  $X'$ . Obično je  $n \gg m$ , odnosno dimenzija stanja sustava je puno veća od broja vremenskih trenutaka u kojima je stanje sustava zabilježeno. Tako su matrice podataka  $X$  i  $X'$  prema tome visoke i uske (engl. *tall and skinny*).

Matrica  $A$  iz definicije DMD-a je onda dimenzije  $n \times n$ . Problem je u tome što  $n$  vrlo brzo može narasti do velikog broja, npr.  $10^6$ , što će značiti da matrica  $A$  ima  $10^{12}$  elemenata. S tako velikim matricama nije ugodno računati i traženje pseudoinverza iz definicije 2.3.1 može postati računalno prezahtjevno, a problem može nastati i samo kod spremanja u memoriju ukoliko je matrica prevelika. Naime  $A = X'X^\dagger$ , što možemo interpretirati na način da je  $A$  linearna kombinacija stupaca od  $X'$  kojih je  $m - 1$ , a koeficijenti u linearnoj kombinaciji dani su u  $X^\dagger$ . Dakle rang matrice  $A$  je najviše  $m - 1$ .

Jedna od glavnih karakteristika DMD algoritma je da vrši redukciju dimenzionalnosti podataka, odnosno da iz velikog seta podataka izolira samo glavnu i bitnu informaciju. Stoga matricu  $A$  nikad nećemo konstruirati nego ćemo napraviti projekciju  $\tilde{A}$  u nekom nižedimenzionalnom potprostoru. Pomoću operatora  $\tilde{A}$  će se kasnije moći rekonstruirati svojstvene vrijednosti i vektori originalne matrice  $A$ . Prije nastavka priče o DMD algoritmu razmotrit ćemo detaljnije prvi korak koji je vezan za redukciju dimenzionalnosti.

Glavna metoda redukcije dimenzionalnosti podataka su matrice dekompozicije SVD (*Singular Value Decomposition*) i POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) koje su iscrpno opisane u prošlom poglavlju.





## Poglavlje 3

# Računanje dinamičke modalne dekompozicije

U ovom poglavlju bit će detaljno opisan DMD algoritam nakon čega slijedi ilustracija algoritma na primjeru razdvajanja prostorno-vremenskog signala u njegove komponente. Poglavlje završava sa posebno konstruiranim primjerima na kojima se uočavaju neke mane DMD algoritma te daje uvid u mogućnosti za poboljšanje metode.

### 3.1 DMD algoritam

prisjetimo se definicije DMD-a iz prethodnog poglavlja. Dinamička modalna dekompozicija nekog para podataka  $(X, X')$  je u biti svojstvena dekompozicija matrice  $A = X'X^\dagger$  koja aproksimira dinamiku nekog sustava ( $X' = AX$ ). Ona ujedno i minimizira  $\|X' - AX\|_F$ .

U praksi gdje je dimenzija stanja  $n$  najčešće vrlo velika, ne možemo na gore opisani način, tj. direktno računati matricu  $A$  primjenom formula  $A = X'X^\dagger$ . Stoga, DMD algoritam radi s reduciranom matricom  $\tilde{A}$ , odnosno matricom koja je projicirana na nekoliko glavnih POD modova.

#### Algoritam 1. (DMD)

1. Izračunaj SVD dekompoziciju od  $X$ :

$$X = U\Sigma V^* \quad (3.1)$$

te uzmi aproksimaciju na temelju prvih  $r$  POD modova, odnosno stupaca matrice  $U$ .

2. Izračunaj projekciju  $\tilde{A}$  originalne matrice  $A$ :

$$\tilde{A} = U^*AU = U^*X'V\Sigma^{-1}. \quad (3.2)$$

Matrica  $\tilde{A}$  definira dinamiku linearnog modela u POD koordinatama kako je definirano u koraku 1:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k. \quad (3.3)$$

Originalni vektori se mogu rekonstruirati množenjem s  $U$ :

$$x_k = U\tilde{x}_k.$$

3. Izračunaj svojstvenu dekompoziciju od  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}W = W\Lambda, \quad (3.4)$$

gdje su  $W = (w_k)_k$  svojstveni vektori (po stupcima), a  $\Lambda$  dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti  $\lambda_k$ .

4. Konačno radimo rekonstrukciju svojstvenih vrijednosti i vektora originalne matrice  $A$  iz izračunatih  $W$  i  $\Lambda$ . Svojstvene vrijednosti od  $A$  su također  $\lambda_k$ , a svojstveni vektori  $\Phi = (\phi_k)_k$  računaju se na sljedeći način:

$$\Phi = X'V\Sigma^{-1}W. \quad (3.5)$$

Da su  $\lambda_k$  svojstvene vrijednosti od  $A$ , a  $\phi_k$  svojstveni vektori nije odmah evidentno. O tome govori sljedeći rezultat [7].

**Teorem 3.1.1.** *Svaki par  $(\lambda, \phi)$  generiran Algoritmom 1. je svojstveni par matrice  $A$ . Nadalje, algoritam daje sve svojstvene vrijednosti različite od 0.*

*Dokaz.* [7] Iz SVD dekompozicije imamo  $X = U\Sigma V^*$  te možemo pisati

$$X^\dagger = V\Sigma^{-1}U^*.$$

te

$$A = X'X^\dagger = X'V\Sigma^{-1}U^*.$$

Označimo  $B := X'V\Sigma^{-1}$ . Sada (3.2) možemo zapisati

$$\tilde{A} = U^*X'V\Sigma^{-1} = U^*B.$$

Pretpostavimo da je  $\tilde{A}w = \lambda w$  i  $\lambda \neq 0$  te stavimo  $\phi = \frac{1}{\lambda}Bw$ . Sada imamo

$$A\phi = \frac{1}{\lambda}BU^*Bw = B\frac{1}{\lambda}\tilde{A}w = Bw = \lambda\phi.$$

Pokažimo još  $\phi \neq 0$ . Ako je  $Bw = 0$ , onda  $U^*Bw = \tilde{A}w = 0$  pa je  $\lambda = 0$ . Dakle,  $\phi$  je svojstveni vektor matrice  $A$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ .

Da pokažemo da algoritam daje sve nenul svojstvene vrijednosti od  $A$ , pretpostavimo  $A\phi = \lambda\phi$ , za  $\lambda \neq 0$  i stavimo  $w = U^*\phi$ . Dobivamo

$$\tilde{A}w = U^*BU^*\phi = U^*A\phi = \lambda U^*\phi = \lambda w.$$

Nadalje,  $w \neq 0$ . Jer ako  $U^*\phi = 0$  onda  $BU^*\phi = A\phi = 0$  i  $\lambda = 0$ .  $\square$

**Napomena 3.1.2.** Algoritam 1. se također može koristiti za pronalaženje svojstvenih vektora sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda = 0$ , tj. svojstvenog nulpotprostora od  $A$ . Posebno, ako je  $\tilde{A}w = 0$  i  $\phi = X'V\Sigma^{-1}w \neq 0$ , onda je  $\phi$  svojstveni vektor sa svojstvenom vrijednost  $\lambda = 0$  i nalazi se u slici od  $X'$ . A ako je  $\tilde{A}w = 0$  i  $X'V\Sigma^{-1}w = 0$  onda je  $\phi = Uw$  svojstveni vektor sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda = 0$  i element je slike od  $X$ . Naime, DMD modovi sa pripadnom svojstvenom vrijednosti  $\lambda = 0$  nisu previše od interesa jer uopće ne pridonose dinamici sustava.

Svojstveni vektori, odnosno DMD modovi (3.5) koje daje Algoritam 1. nazivamo egzaktni svojstveni vektori premda su to svojstveni vektori matrice  $A$  kako je pokazano u teoremu 3.1.1. Razlikujemo i projicirane DMD modove

$$\hat{\phi} = Uw. \quad (3.6)$$

Suptilna, ali bitna razlika je da projicirani modovi leže u slici od  $X$ , dok egzaktni DMD modovi leže u  $\text{Im } X'$ . Projicirani modovi  $\hat{\phi}$  naime nisu svojstveni vektori matrice  $A$ , ali imaju veze s njima. Odgovor na pitanje koja je veza projiciranih i egzaktnih DMD modova daje sljedeći rezultat.

**Teorem 3.1.3.** Neka je  $\tilde{A}w = \lambda w$ ,  $\lambda \neq 0$  i neka je  $\mathbb{P}_X$  ortogonalni projektor na  $\text{Im } X$ . Projicirani DMD mod  $\hat{\phi}$  je svojstveni vektor od  $\mathbb{P}_X A$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ . Nadalje vrijedi  $\hat{\phi} = \mathbb{P}_X \phi$ .

*Dokaz.* [7] Iz  $X = U\Sigma V^*$ , ortogonalni projektor na  $\text{Im } X$  je  $\mathbb{P}_X = UU^*$ . Iz dokaza teorema 3.1.1 imamo  $A = BU^*$  i  $\tilde{A} = U^*B$ . Računamo

$$\mathbb{P}_X A \hat{\phi} = (UU^*)(BU^*)(Uw) = U(U^*B)w = U\tilde{A}w = \lambda Uw = \lambda \hat{\phi}.$$

Dakle,  $\hat{\phi}$  je svojstveni vektor matrice  $\mathbb{P}_X A$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda$ . Nadalje,

$$U^*\phi = \frac{1}{\lambda}U^*Bw = \frac{1}{\lambda}\tilde{A}w = w,$$

pa slijedi

$$\hat{\phi} = Uw = UU^*\phi = \mathbb{P}_X \phi.$$

$\square$

Prethodni dokaz jasno ilustrira naziv projicirani modovi za vektore  $\hat{\phi}$ .

Iz podataka dobivenih DMD algoritmom jednostavno se može rekonstruirati aproksimacija stanja sustava u bilo kojem trenutku  $t$ :

$$x(t) = \sum_{k=1}^r b_k \phi_k e^{\omega_k t} = \Phi e^{\Omega t} b. \quad (3.7)$$

gdje je  $b_k$  inicijalna amplituda pojedinog moda,  $b$  vektor inicijalnih amplituda,  $\Phi$  je matrica čiji su stupci DMD modovi,  $\omega_k = \frac{\ln(\lambda_k)}{\Delta t}$  su frekvencije te  $\Omega = \text{diag}(\omega_k)$  dijagonalna matrica s frekvencijama  $\omega_k$  na dijagonali.

Preostaje još samo odrediti vektor  $b$ . U trenutku  $t = 0$  sustav je u stanju  $x_1$ .

$$x_1 = x(0) = \Phi b. \quad (3.8)$$

Dakle potrebno je još samo riješiti linearni sustav (3.8). Rješenje je dano s

$$b = \Phi^\dagger x_1. \quad (3.9)$$

## 3.2 Primjeri

### Primjer 3.2.1.

Sada ćemo demonstrirati kako DMD algoritam funkcionira na primjeru razdvajanja signala. U tu svrhu korištena je implementacija u MATLAB-u iz [3]. Definirajmo funkcije

$$g(x, t) = e^{-0.8x^2} (\cos(2.5t) + i \sin(2.5t))$$

i

$$h(x, t) = 2 e^{-(x+1)^2/0.25} (\cos(2t) + i \sin(2t))$$

koje opisuju dva prostorno-vremenska signala (Slika 3.1 (a) i (b)). Njihovo vremensko ponašanje opisano je frekvencijama  $\omega_g = 2.5$  te  $\omega_h = 2$ . Definirajmo i funkciju

$$f(x, t) = g(x, t) + h(x, t)$$

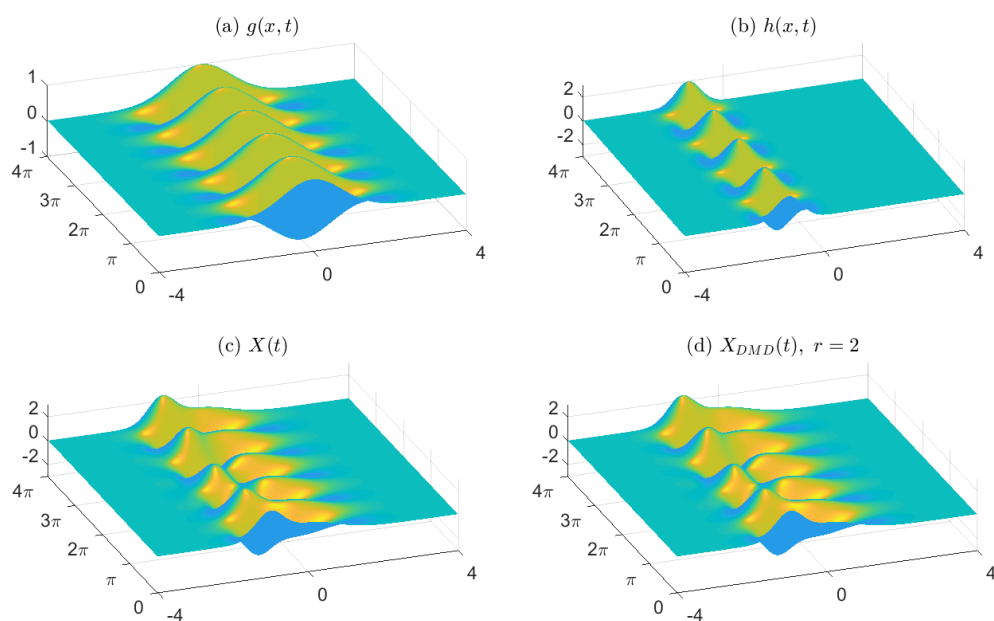
koja opisuje superpoziciju gornja dva signala, tj. signal dobiven miješanjem signala  $g$  i  $h$  (Slika 3.1 (c)).

Simulacijom i diskretizacijom signala  $f$  dobit ćemo matricu  $X$  koja će nam poslužiti kao matrica ulaznih podataka za DMD algoritam. Prostorna domena  $[-4, 4]$  diskretizirana

je s 400 točaka, a vremenska domena  $[0, 4\pi]$  s 200 točaka. Dakle vektori stanja su iz  $\mathbb{R}^{400}$ , tj.  $n = 400$  i ima ih 200, tj.  $m = 200$ . Dakle,  $X \in \mathbb{R}^{400 \times 200}$ .

U prvom koraku računamo SVD matrice  $X$  te kako su samo dvije singularne vrijednosti različite od nula ( $\sigma_1 = 171.1612$ ,  $\sigma_2 = 97.4166$ ,  $\sigma_3 = \dots = 0$ ), napraviti ćemo aproksimaciju ranga 2. Iako su podaci relativno velike dimenzije  $400 \times 200$ , intrinzično su dvodimenzionalni, tj. iz SVD-a nalazimo da je rang matrice podataka 2 pa će nam biti dovoljno 2 singularna vektora i 2 singularne vrijednosti za potpun opis tog skupa podataka. To je u potpunosti očekivano jer znamo da su ulazni podaci dobiveni simulacijom iz dva različita signala. No, često to ne znamo, već samo imamo podatke iz nekog izvora čiju dinamiku također često ne znamo.

Gore opisani algoritam će izračunati DMD modove (svojtvene vektore matrice  $A$ )  $\Phi = (\phi_k)_k$ , svojtvene vrijednosti, odnosno frekvencije  $\omega_k$  te inicijalne amplitude pojedinih modova. Potom će iz dobivenih vrijednosti pomoću jednadžbe (3.7) moći rekonstruirati sliku sustava u bilo kojem vremenskom trenutku  $t$ . U našem slučaju je  $r = 2$  što znači da u sumi (3.7) imamo samo 2 člana, tj. DMD rekonstruira kompletni set podataka sa samo dva člana, ali omogućuje i predviđanje ponašanja sustava u budućim vremenskim trenucima.



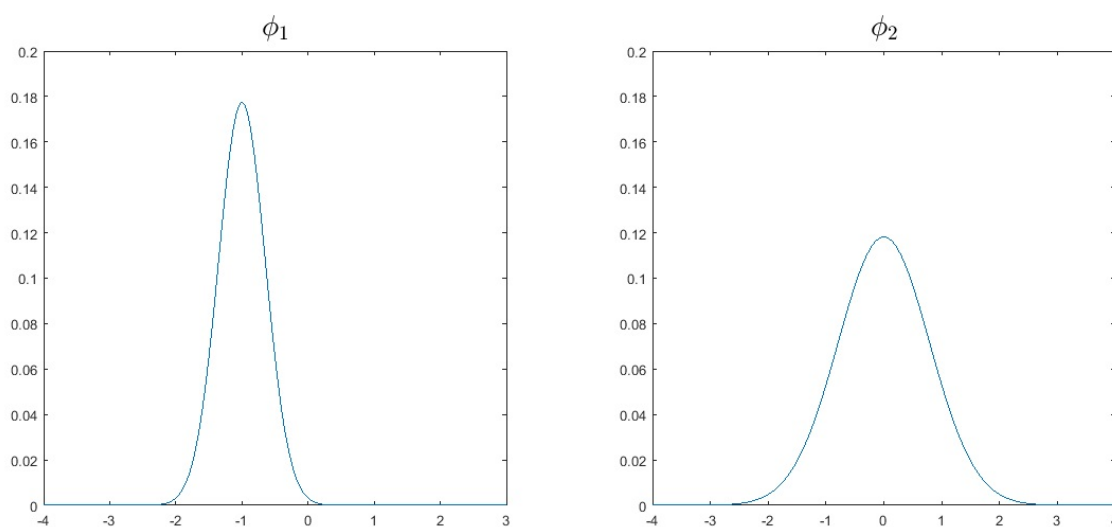
Slika 3.1: (a) Prostorno-vremenski signal  $g$  (b) Prostorno-vremenski signal  $h$  (c) Prostorno-vremenski signal  $f$  dobiven kao superpozicija signala  $g$  i  $h$  te ujedno ulazni podaci  $X$  za DMD algoritam (d) Rekonstrukcija signala nakon DMD-a na ulaznim podacima s aproksimacijom ranga 2

Izračunate svojstvene vrijednosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , tj. njihovi imaginarni dijelovi, točno se poklapaju s frekvencijama oscilacija pojedinih signala:

omega =

$$\begin{aligned} &0.0000 + 2.0000 i \\ &0.0000 + 2.5000 i \end{aligned}$$

Također, DMD modovi  $\phi_1$  i  $\phi_2$  odgovaraju prostornim dijelovima signala  $g$  i  $h$  redom (slika 3.2).



Slika 3.2: DMD modovi (a)  $\phi_1$  i (b)  $\phi_2$  redom odgovaraju prostornim dijelovima signala  $g$  i  $h$

### Primjer 3.2.2.

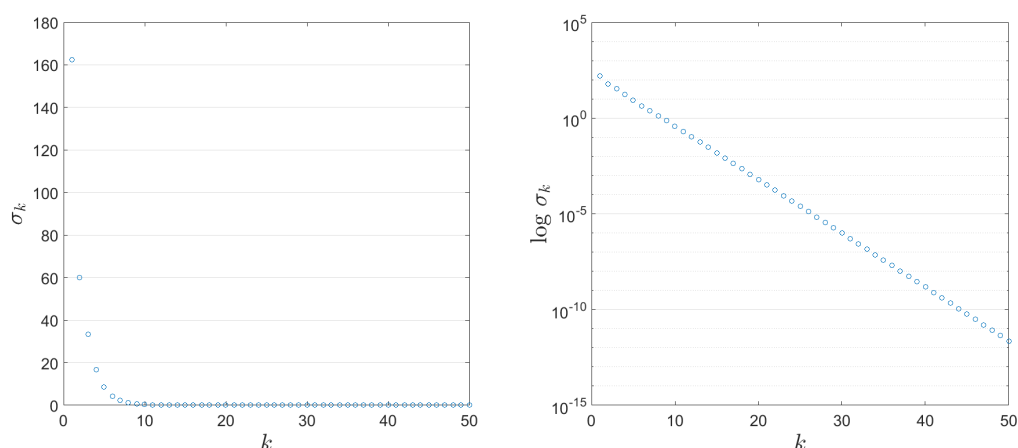
Pogledajmo sada primjer gdje su nam signali  $g$  i  $h$  dani s:

$$g(x, t) = \operatorname{sech}(x + 3 - 0.5t) (\cos(2.5t) + i \sin(2.5t)),$$

$$h(x, t) = 2 e^{-(x+1)^2/0.25} (\cos(2t) + i \sin(2t)).$$

U ovom slučaju signal  $g$  putuje (translatira se) prostornom domenom konstantnom brzinom od 0.8. I dalje promatramo pomiješani signal  $f = g + h$  kojeg analiziramo DMD algoritmom (Slika 3.4 (a) - (c)). Očekujemo dvije DMD frekvencije  $\omega_1 = 2.5$  i  $\omega_2 = 2$  te dva DMD moda. Naime, aproksimacija ranga 2 ne daje vjernu rekonstrukciju ulaznih podataka te predikcija koristeći aproksimaciju ranga 2 neće biti dobra (Slika 3.4 (d)).

Također, ni aproksimacija ranga 5 nije dovoljno dobro (Slika 3.4 (e)). Tek aproksimacija ranga 10 daje dobru aproksimaciju ulaznih podataka (Slika 3.4 (f)). Razlog tomu je što ovaj put imamo 10 signifikantnih sinuglarnih vrijednosti u SVD-u (Slika 3.3). Iako su prirodno prisutna samo 2 moda, za dobar opis trebamo uzeti barem 10 modova u sumi (3.7). Ovo aritificijelno povećanje dimenzije posljedica je toga da SVD ne može dobro prepoznati translacije podataka (kao ni rotacije) i korelacije u vremenu [3].



Slika 3.3: Singularne vrijednosti matrice  $X$  sa slike 3.4 u standardnoj (lijevo) i logaritamskoj skali (desno). Prvih 10 singularnih vrijednosti je nezanemarivo, te za dobar opis podataka potrebno je u uzeti barem 10 modova u sumi (3.7).

### Primjer 3.2.3.

Idući primjer ilustrira ograničenje DMD metode pri tranzijentnom ponašanju signala. Definirajmo kao i ranije dva prostorno-vremenska signala

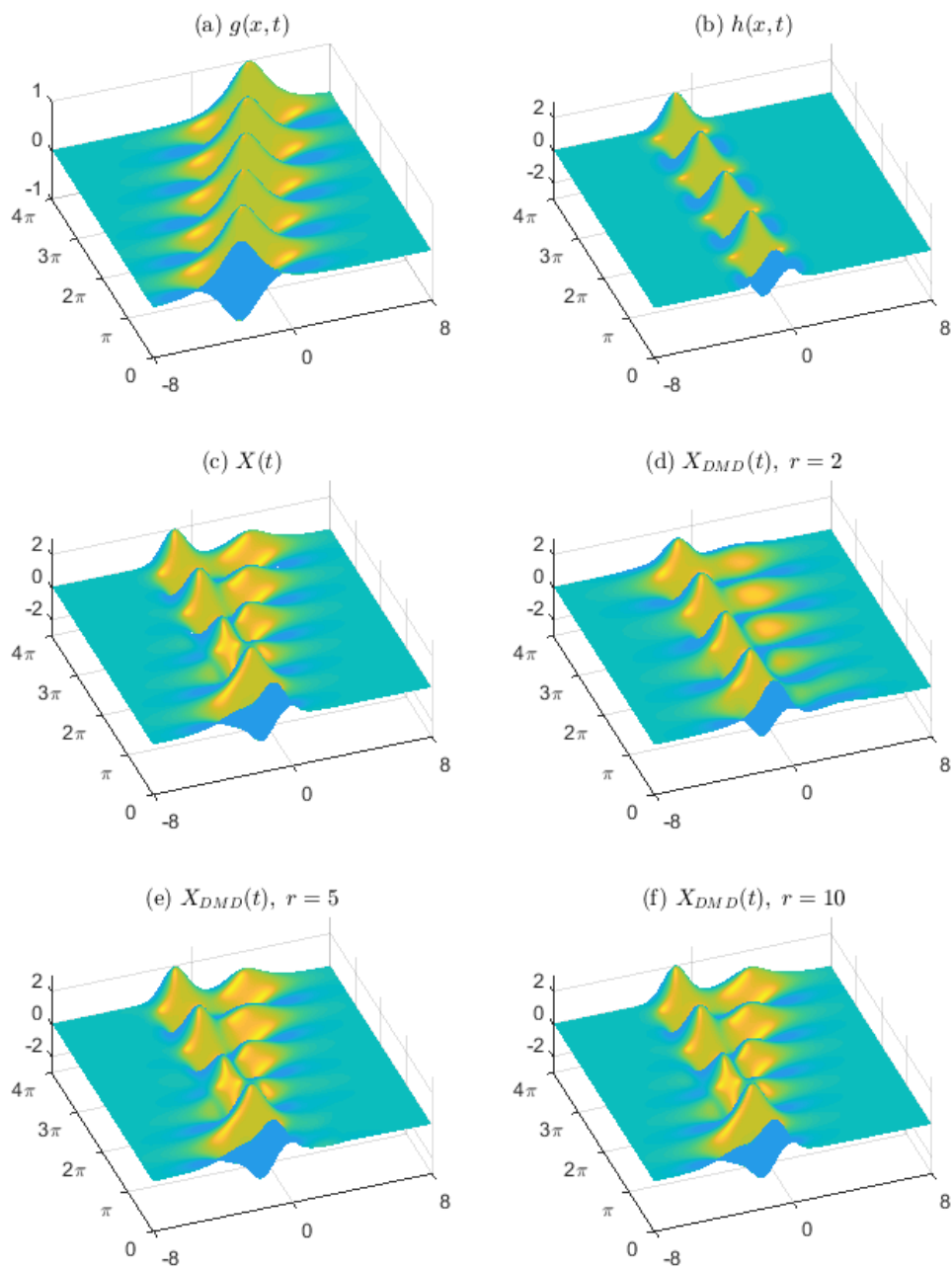
$$g(x, t) = \operatorname{sech}(x + 3 - 0.5t) (\cos(2.5t) + i \sin(2.5t)) (\tanh(t - \pi) - \tanh(t - 3\pi))$$

i

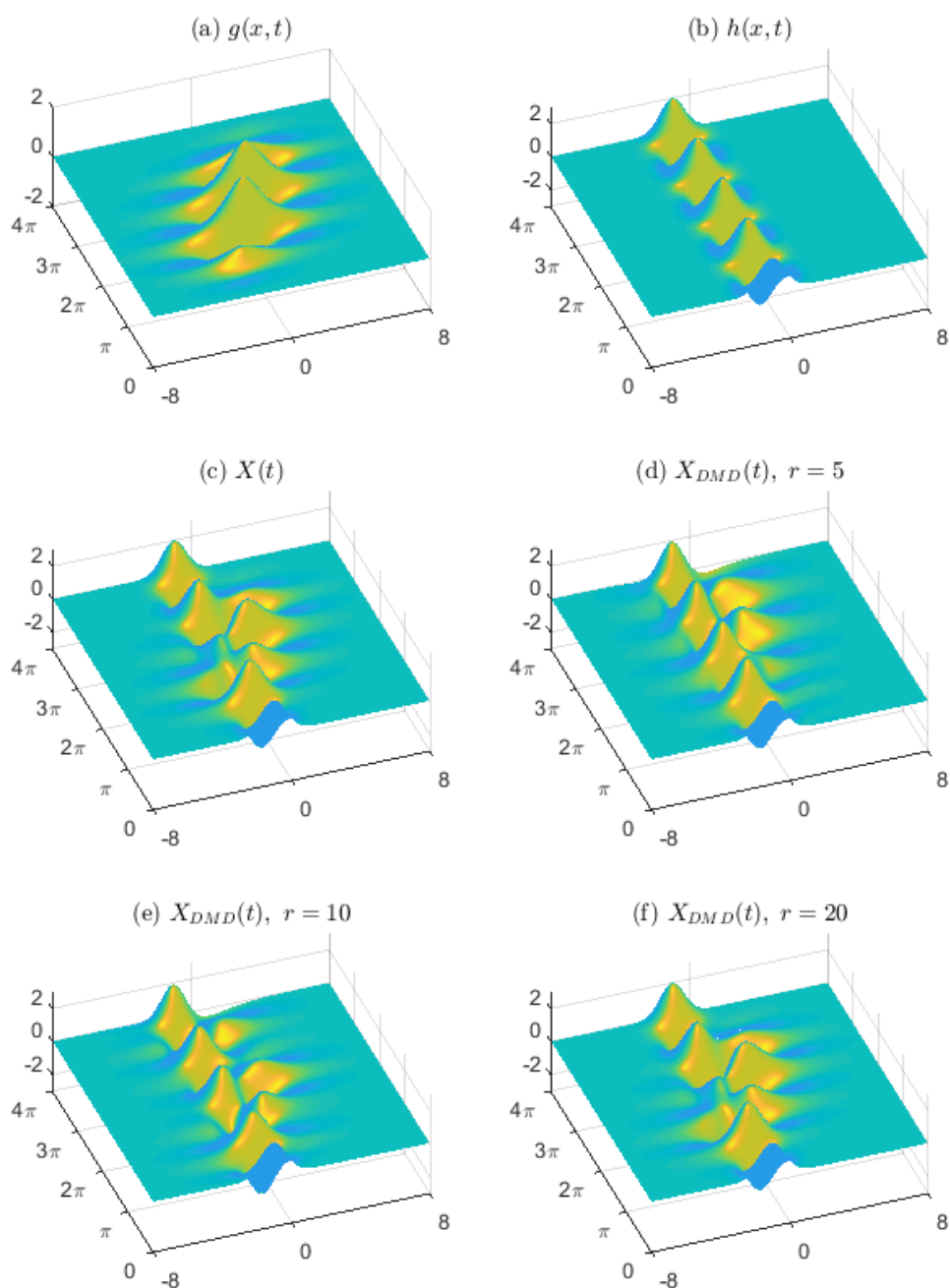
$$h(x, t) = 2 e^{-(x+1)^2} (\cos(2t) + i \sin(2t)).$$

Signal  $g$  se zbog faktora  $\tanh(t - \pi) - \tanh(t - 3\pi)$  uključuje i isključuje u vremenu. Pojedini signali  $g$  i  $h$  te pomiješani signal  $f = g + h$  dani su na slici 3.5 (a) - (c). Simulacijom signala  $f$  dobivamo kao i ranije ulazne podatke  $X$  za analizu. Rekonstrukcija ulaznih podataka  $X$  DMD algoritmom ovaj puta zahtjeva minimalno 20 modova u sumi (3.7). Ali, i tada DMD ne može dobro odrediti ponašanje prvog moda koji se uključuje i isključuje. Za razliku od prethodnog primjera gdje smo samo imali aritificijelno povećanje dimenzije zbog translacije, ovdje DMD ne daje dobar opis dinamike sustava. Potencijalna strategija za rješenje ovog problema je tzv. multi-resolution DMD ([3], [2]).





Slika 3.4: (a) Prostorno-vremenski signal  $g$  (b) Prostorno-vremenski signal  $h$  (c) Prostorno-vremenski signal  $f$  dobiven kao superpozicija signala  $g$  i  $h$  te ujedno ulazni podaci  $X$  za DMD algoritam (d) - (f) Rekonstrukcija signala nakon DMD-a na ulaznim podacima s aproksimacijom ranga 2, 5 i 10. Tek aproksimacijom ranga 10 dobivamo vjernu rekonstrukciju ulaznih podataka



Slika 3.5: (a) Prostorno-vremenski signal  $g$  (b) Prostorno-vremenski signal  $h$  (c) Prostorno-vremenski signal  $f$  dobiven kao superpozicija signala  $g$  i  $h$  te ujedno ulazni podaci  $X$  za DMD algoritam (d) - (f) Rekonstrukcija signala nakon DMD-a na ulaznim podacima s aproksimacijom ranga 5, 10 i 20. Tek aproksimacijom ranga 20 dobivamo vjernu rekonstrukciju ulaznih podataka



## Poglavlje 4

# Koopmanova spektralna teorija

Teorija dinamičke modalne dekompozicije u uskoj je vezi sa Koopmanovom spektralnom teorijom čiji je centralni objekt proučavanja Koopmanov operator koji je linearni operator na beskonačnodimenzionalnim Hilbertovim prostorima te opisuje evoluciju mjerenja dinamičkog sustava s nelinearnom dinamikom.

### 4.1 Osnove Koopmanove spektralne teorije

Započnimo definicijom Koopmanovog operatora.

**Definicija 4.1.1.** *Neka je  $x \in M$  stanje te promatrajmo (kontinuiranu) dinamiku*

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (4.1)$$

*Nadalje, neka je funkcija  $g : M \rightarrow \mathbb{C}$  opservabla. Koopmanov operator  $\mathcal{K}$  je beskonačnodimenzionalni operator definiran*

$$\mathcal{K}g(x) = g \circ f(x). \quad (4.2)$$

Sve funkcije  $g$  čine Hilbertov prostor  $H$ , stoga je  $\mathcal{K} \in H'$ . Prednost beskonačnodimenzionalne reprezentacije je da omogućava rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi pomoću spektralnih teorema.

Koopmanov operator se na analogan način definira za dinamičke sustave u diskretnom vremenu. Neka je  $F : M \rightarrow M$  preslikavanje koje predstavlja evoluciju stanja sustava  $x_k$  u  $x_{k+1}$

$$x_{k+1} = F(x_k) = x_k + \int_t^{t+\delta t} f(x(\tau))d\tau. \quad (4.3)$$

Koopmanov operator  $\mathcal{K}$  je u ovom slučaju definiran s

$$\mathcal{K}g(x_k) = g(F(x_k)) = g(x_{k+1}) \quad (4.4)$$

ili kraće možemo pisati

$$\mathcal{K}g = g \circ F. \quad (4.5)$$

Nas najviše zanima spektar i svojstveni vektori Koopmanovog operatora. Stoga promatramo spektralnu zadaću

$$\mathcal{K}\phi_k = \lambda_k\phi_k. \quad (4.6)$$

Nadalje promatrat ćemo  $p$  opservabli

$$g_j : M \rightarrow \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (4.7)$$

Označimo s  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p)^T$  vektor opservabli. Vektor  $g$  se može zapisati u bazi Koopmanovih svojstvenih funkcija  $\phi_k$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \mathbf{v}_k, \quad (4.8)$$

gdje je  $\mathbf{v}_k$   $k$ -ti Koopmanov mod pridružen svojstvenoj funkciji  $\phi_k$ .

Algoritam dinamičke modalne dekompozicije aproksimira svojstvene vrijednosti i modove Koopmanovog operatora. Naravno, ta je aproksimacija, kako ćemo kasnije vidjeti, moguća samo uz određene uvjete. Ključnu ulogu ovdje igra izbor opservabli.

Neka je  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$  ulazna matrica podataka. Definiramo još dvije matrice

$$Y = (y_k), \quad y_k = \mathbf{g}(x_k), \quad (4.9)$$

$$Y' = (y'_k), \quad y'_k = \mathbf{g}(f(x_k)). \quad (4.10)$$

Ukoliko napravimo DMD na matricama  $Y$  i  $Y'$  dobit ćemo spektralnu dekompoziciju matrice  $A_Y = Y'Y^\dagger$ . Sve je isto kao i ranije, jedino je DMD umjesto na prostoru stanja sustava, izračunat na prostoru opservabli. Sljedeći rezultat pokazuje u kojoj su vezi Koopmanova teorija i DMD.

**Teorem 4.1.2.** [3] *Neka je  $(\lambda_k, \phi_k)$  svojstveni par Koopmanovog operatora  $\mathcal{K}$  i pretpostavimo da  $\phi_k \in \text{span}\{g_j : j = 1, \dots, p\}$ ,  $\forall k$  pa za svaki vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^p$  možemo pisati*

$$\phi_k(x) = w_1g_1(x) + w_2g_2(x) + \dots + w_pg_p(x) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}. \quad (4.11)$$

Ako je  $\mathbf{w} \in \text{Im}(Y)$ , onda je  $\mathbf{w}$  lijevi svojstveni vektor od  $A_Y$  sa svojstvenom vrijednosti  $\lambda_k$

$$\mathbf{w}^* A_Y = \lambda_k \mathbf{w}^*. \quad (4.12)$$

# Poglavlje 5

## DMD u realnom vremenu

Glavna je ideja DMD metode naći lokalno linearni sistem koji odgovara promatranj dinamici, čija formulacija je u praksi često nepoznata (engl. *equation-free*), dinamika sustava je najčešće nelinearna. Tako dobivamo matricu  $A$  čiji su svojstveni vektori DMD modovi, a pripadne svojstvene vrijednosti frekvencije tih modova. Ranije smo promatrali sustave čija se dinamika ne mijenja s vremenom (stacionarna dinamika). U situacijama gdje dinamika sistema evoluiru u vremenu, potrebno je obnavljati matricu  $A$  kako pristižu novi podatci. Kako su podaci obično vrlo velike dimenzije, ne dolazi u obzir da se DMD računa svaki puta ispočetka. Naime, želimo efikasan način kako DMD matricu iz prethodnog koraka  $A_k$  obnoviti čim pristignu najsvježiji podatci  $x_{k+1}$  i dobiti novu matricu  $A_k$ . Algoritmi koje ćemo razmotriti u ovom poglavlju omogućuju računanje DMD-a u realnom vremenu, tj. aproksimacija dinamike sustava se efikasno obnavlja kako pristižu novi podatci. Neki od tih algoritama su *online* DMD, težinski DMD te DMD algoritam s klizećim vremenskim prozorom.

### 5.1 *Online* DMD algoritam

Neka su  $x_j \in \mathbb{R}^n$  vektori kojima je opisano stanje sustava, neka je  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dinamika sustava te  $y_j = F(x_j)$ . Parove  $(x_j, y_j)$  složimo u matrice  $X$  i  $Y$

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_k],$$

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_k].$$

Dodatno ćemo pretpostaviti da je  $k > n$ , tj. da imamo puno više izmjerenih stanja sustava, nego što je dimenzija stanja. U svakom koraku tražimo matricu  $A_k$  dimenzije  $n \times n$  tako da je  $A_k X_k = Y_k$  te koja minimizira funkciju cilja

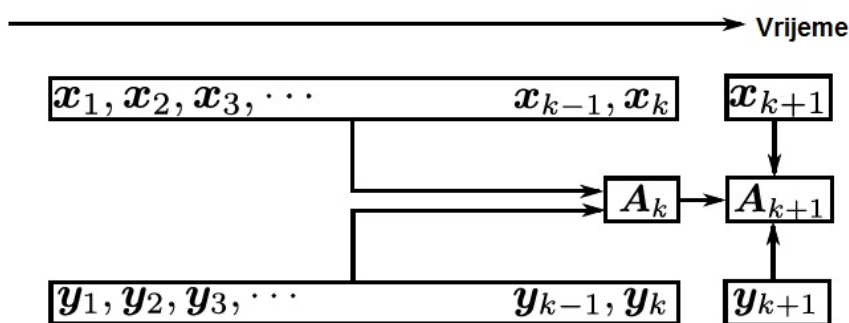
$$J_k = \sum_{i=1}^k \|y_i - A_k x_i\|_2^2 = \|Y_k - A_k X_k\|_F^2. \quad (5.1)$$

Kao i ranije u originalnom DMD-u, jedinstveno je rješenje problema minimizacije dano s

$$A_k = Y_k X_k^\dagger = Y_k X_k^T (X_k X_k^T)^{-1}. \quad (5.2)$$

Da bi pseudoinverz u prethodnoj jednadžbi postojao, pretpostavljamo da  $X_k$  ima puni stupčani rang.

Pretpostavimo da u  $k$ -tom koraku imamo izračunatu matricu  $A_k$ . Želimo ju efikasno ažurirati i dobiti matricu  $A_{k+1}$  čim novi par podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  postane dostupan. Jasno je da računanje matrice  $A_{k+1}$  po formuli (5.2) nije najbolja opcija jer može postati računalno prezahtjevno. Također kako pristižu novi podatci sve je veći zahtjev na memoriju da bi se spremile matrice  $X_k$  i  $Y_k$ . Stoga je osmišljen algoritam koji efikasno računa matricu  $A_{k+1}$  iz matrice  $A_k$  i novog para podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ .



Slika 5.1: Shema online DMD-a. Blokovi predstavljaju podatke, a strijelice pokazuju smjer toka podataka. U trenutku  $k + 1$ , matrica  $A_{k+1}$  izračunava se iz matrice  $A_k$  koristeći informacije iz  $k$ -tog koraka te novi par podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  koji je dostupan u  $k + 1$ -om koraku [11]

Algoritam je baziran na pretpostavci da je matrica  $A_{k+1}$  u nekom smislu blizu matrice  $A_k$ , tj. da dinamika evoluira polagano, tj. postepeno.

U jednadžbi (5.2) označimo  $Q_k = Y_k X_k^T$  i  $P_k = (X_k X_k^T)^{-1}$  pa  $A_k$  postaje

$$A_k = Q_k P_k. \quad (5.3)$$

Matrice  $Q_k$  i  $P_k$  su kvadratne matrice reda  $n$ . Primjetimo još da je matrica  $P_k$  simetrična te pozitivno definitna što se lako vidi iz definicije. Sada želimo izračunati  $A_{k+1} = Q_{k+1}P_{k+1}$ :

$$Q_{k+1} = Y_{k+1}X_{k+1}^T = \begin{bmatrix} Y_k & y_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^T \\ x_{k+1}^T \end{bmatrix} = Y_k X_k^T + y_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.4)$$

$$P_{k+1}^{-1} = X_{k+1} X_{k+1}^T = \begin{bmatrix} X_k & X_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^T \\ x_{k+1}^T \end{bmatrix} = X_k X_k^T + x_{k+1} x_{k+1}^T. \quad (5.5)$$

Dakle matrice  $Q_k$  i  $P_k^{-1}$  ažuriramo na sljedeći način

$$Q_{k+1} = Q_k + y_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.6)$$

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.7)$$

a ažurirana matrica  $A_k$  se može izračunati

$$A_{k+1} = Q_{k+1}P_{k+1} = \left( Q_k + y_{k+1} x_{k+1}^T \right) \left( P_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T \right)^{-1} \quad (5.8)$$

Sada se problem svodi na pitanje kako efikasno računati  $P_{k+1}$  iz  $P_k$ . Ovdje se pokazuje vrlo korisna Sherman-Morrisonova formula za računanje inverza matrice koja je dana u sljedećoj lemi [6].

**Lema 5.1.1.** (Sherman-Morrison) *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regularna te neka su  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Vrijedi da je  $A + uv^T$  invertibilna ako i samo ako je  $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ . Nadalje, ako je  $A + uv^T$  invertibilna njen je inverz dan izrazom*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}. \quad (5.9)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je  $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ . Treba pokazati da je  $A + uv^T$  invertibilna i da je njen inverz dan formulom (5.9).

$$\begin{aligned} (A + uv^T) \left( A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right) &= AA^{-1} + uv^T A^{-1} - \frac{AA^{-1} u v^T A^{-1} + uv^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \\ &= I + uv^T A^{-1} - \frac{uv^T A^{-1} + uv^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \\ &= I + uv^T A^{-1} - \frac{u(1 + v^T A^{-1} u)v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \\ &= I + uv^T A^{-1} - uv^T A^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$



Na isti način se provjerava

$$\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}\right)(A + uv^T) = I.$$

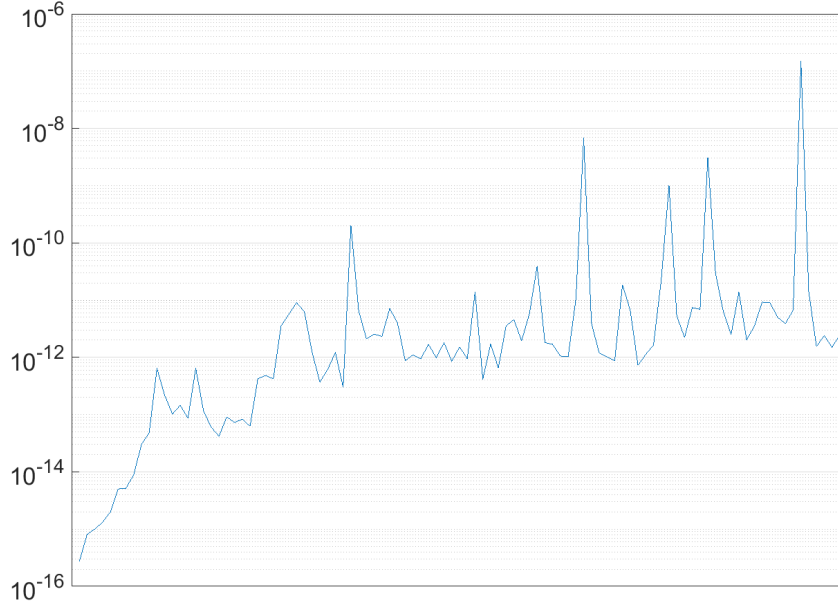
Suprotno, pretpostavimo da je  $A + uv^T$  invertibilna. Ako  $u = 0$  tvrdnja trivijalno slijedi. Stoga pretpostavimo  $u \neq 0$ . Tada

$$(A + uv^T)A^{-1}u = u + uv^T A^{-1}u = (1 + v^T A^{-1}u)u.$$

Matrica  $(A + uv^T)A^{-1}$  je također invertibilna kao produkt dvije invertibilne matrice. Zbog pretpostavke  $u \neq 0$  slijedi  $(A + uv^T)A^{-1}u \neq 0$ . Iz gornjeg računa sada imamo  $(1 + v^T A^{-1}u)u \neq 0$  iz čega pak slijedi  $1 + v^T A^{-1} \neq 0$ .

□

Sherman-Morrisonova formula za računanje inverza matrice koja je ažurirana matricom ranga 1 je analitički točna, no ponekad pokazuje numeričku nestabilnost. Na primjeru matrice  $A = 3I$  testirana je numerička stabilnost formule (5.9). Matrica  $A$  se ažurira vektorima  $u$  i  $v$  koji su slučajni. Inverz izračunat Sherman-Morrisonovom formulom uspoređen je s direktno izračunatim inverzom te su rezultati simulacije prikazani na slici 5.2



Slika 5.2: Pogreška pri izračunu inverza matrice  $A = 3I$  Sherman-Morrisonovom formulom (5.9) u odnosu na direktno izračunati inverz. Matrica  $A$  je sukcesivno ažurirana slučajnim vektorima  $u$  i  $v$  sto puta.

Primjenom prethodne leme na jednadžbu (5.8) dobivamo

$$P_{k+1} = \left( P_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T \right)^{-1} = P_k - \gamma_{k+1} P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k \quad (5.10)$$

gdje je

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1}}.$$

Uvjeti leme su zadovoljeni jer je  $P_k$  pozitivno definitna matrica stoga  $1 + x_{k+1}^T P_k x_{k+1} \neq 0$ , za svaki  $x_{k+1}$ . Sada ažurirano DMD matricu možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \left( Q_k + y_{k+1} x_{k+1}^T \right) \left( P_k - \gamma_{k+1} P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k \right) \\ &= Q_k P_k - \gamma_{k+1} Q_k P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + y_{k+1} x_{k+1}^T P_k - \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k \\ &= Q_k P_k - \gamma_{k+1} Q_k P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + \gamma_{k+1} y_{k+1} \left( \gamma_{k+1}^{-1} - x_{k+1}^T P_k x_{k+1} \right) x_{k+1}^T P_k \\ &= Q_k P_k - \gamma_{k+1} Q_k P_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k \\ &= A_k - \gamma_{k+1} A_k x_{k+1} x_{k+1}^T P_k + \gamma_{k+1} y_{k+1} x_{k+1}^T P_k \end{aligned}$$

što konačno daje

$$A_{k+1} = A_k + \gamma_{k+1} (y_{k+1} - A_k x_{k+1}) x_{k+1}^T P_k. \quad (5.11)$$

Primjenom gornje jednadžbe DMD matrica se može efikasno ažurirati kada novi par podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  postane dostupan. Za računanje  $A_{k+1}$  potrebno je izračunati dva množenja matrice s vektorom  $(A_k x_{k+1}$  i  $P_k x_{k+1})$  te dva vanjska produkta vektora, što je ukupno  $O(4n^2)$  floating-point operacija. To je efikasniji način računanja nasuprot direktne primjene formule (5.2) koja zahtjeva  $O(kn^2)$  operacija. Također, velika prednost ovog algoritma je da se velike matrice  $X_k$  i  $Y_k$  ne moraju spremati u memoriju u cijelosti.

Pogledajmo još numerički smisao formule (5.11). Član  $y_{k+1} - A_k x_{k+1}$  predstavlja grešku aproksimacije trenutnog modela, tj. modela u koraku  $k$ . Novi model (matrica  $A_{k+1}$ ) izračunava se dodajući član proporcionalan toj pogrešci.

Za izračun  $A_{k+1}$  potrebno je poznavati  $A_k$  i  $P_k$  iz prethodnog koraka. Što se tiče inicijalizacije algoritma, generalno postoje dva pristupa. Prvi je da se na početku sakupi dovoljno podataka tako da  $X_k$  ima rang  $n$  te se matrice  $A_k$  i  $P_k$  izračunaju direktno:

$$A_k = Y_k X_k^\dagger, \quad P_k = (X_k X_k^T)^{-1}. \quad (5.12)$$

Alternativni pristup je da se za matricu  $A_0$  izabere neka slučajna matrica i postavi  $P_0 = \alpha I$ , gdje je  $\alpha$  veliki pozitivni skalar. Tada za  $\alpha \rightarrow \infty$  matrice  $A_k$  i  $P_k$  izračunate po formuli (5.11) konvergiraju k stvarnim vrijednostima.

## 5.2 Težinski DMD algoritam

Sljedeći algoritam za DMD u realnom vremenu koji će biti razmotren je težinski DMD algoritam. On je samo modifikacija online DMD algoritma u kojem se pridajemo veću težinu kasnijim slikama stanja sustava, a ranijima manju. Neka je  $\rho \in (0, 1]$ . U svakom koraku tražimo DMD matricu koja će minimizirati funkciju cilja

$$\tilde{J}_k = \sum_{i=1}^k \rho^{k-i} \|y_i - A_k x_i\|^2 \rightarrow \min. \quad (5.13)$$

Težinski faktor  $\rho$  u (5.13) pridaje veću težinu kasnijim stanjima. Neka je  $\rho = \sigma^2$  i definirajmo matrice

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k &= [\sigma^{k-1} x_1, \sigma^{k-2} x_2, \dots, x_k], \\ \tilde{Y}_k &= [\sigma^{k-1} y_1, \sigma^{k-2} y_2, \dots, y_k]. \end{aligned}$$

Sada funkciju iz (5.13) možemo pisati

$$\tilde{J}_k = \sum_{i=1}^k \|\sigma^{k-i} y_i - A_k \sigma^{k-i} x_i\|^2 = \|\tilde{Y} - A_k \tilde{X}\|_F^2. \quad (5.14)$$

Jedinstveno rješenje problema minimizacije funkcije  $\tilde{J}_k$  je potpuno analogno onom ranije

$$A_k = \tilde{Y}_k \tilde{X}_k^\dagger = \tilde{Y}_k \tilde{X}_k^T (\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T)^{-1}. \quad (5.15)$$

Također, definirajmo

$$\tilde{Q}_k = \tilde{Y}_k \tilde{X}_k^T, \quad \tilde{P}_k = (\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T)^{-1}.$$

U  $k$ -tom koraku imamo matricu  $A_k = \tilde{Q}_k \tilde{P}_k$  i želimo odrediti  $A_{k+1} = \tilde{Q}_{k+1} \tilde{P}_{k+1}$ .

$$\tilde{Q}_{k+1} = \tilde{Y}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T = \begin{bmatrix} \sigma \tilde{Y}_k & y_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \tilde{X}_k^T \\ x_{k+1}^T \end{bmatrix} = \sigma^2 \tilde{Y}_k \tilde{X}_k^T + y_{k+1} x_{k+1}^T = \rho \tilde{Q}_k + y_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.16)$$

$$P_{k+1}^{-1} = \tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T = \begin{bmatrix} \sigma \tilde{X}_k & \tilde{X}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \tilde{X}_k^T \\ x_{k+1}^T \end{bmatrix} = \sigma^2 \tilde{X}_k \tilde{X}_k^T + x_{k+1} x_{k+1}^T = \rho \tilde{P}_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T. \quad (5.17)$$

Dakle matrice  $\tilde{Q}_k$  i  $\tilde{P}_k^{-1}$  ažuriramo na sljedeći način

$$\tilde{Q}_{k+1} = \rho \tilde{Q}_k + y_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.18)$$

$$\tilde{P}_{k+1}^{-1} = \rho \tilde{P}_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T, \quad (5.19)$$

a ažurirana matrica  $A_{k+1}$  se može izračunati

$$A_{k+1} = \rho \tilde{Q}_{k+1} \tilde{P}_{k+1} = (\rho \tilde{Q}_k + y_{k+1} x_{k+1}^T) (\tilde{P}_k^{-1} + x_{k+1} x_{k+1}^T)^{-1}. \quad (5.20)$$

Opet možemo primjeniti lemu 5.1.1 za efikasno računanje inverza  $\tilde{P}_{k+1}^{-1}$

$$\tilde{P}_{k+1} = \frac{1}{\rho} \tilde{P}_k - \gamma_{k+1} \frac{1}{\rho} \tilde{P}_k x_{k+1} x_{k+1}^T \frac{1}{\rho} \tilde{P}_k, \quad (5.21)$$

gdje je

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{1 + x_{k+1}^T \frac{1}{\rho} \tilde{P}_k x_{k+1}}.$$

Označimo s  $\hat{P}_k = \frac{1}{\rho} \tilde{P}_k$ . Sličnim računom kao u prethodnom poglavlju dobivamo formulu za  $A_{k+1}$

$$A_{k+1} = A_k + \gamma_{k+1} (y_{k+1} - A_k x_{k+1}) x_{k+1}^T \hat{P}_k, \quad (5.22)$$

gdje je

$$\hat{P}_{k+1} = \frac{1}{\rho} (\hat{P}_k - \gamma_{k+1} \hat{P}_k x_{k+1} x_{k+1}^T \hat{P}_k) \quad (5.23)$$

i

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{1 + x_{k+1}^T \hat{P}_k x_{k+1}}.$$

Formula (5.22) je identična formuli (5.11) iz prethodnog poglavlja samo uz matricu  $\hat{P}_k$  umjesto  $P_k$ . Ako stavimo  $\rho = 1$  onda se te dvije formule poklapaju, a odgovarajući algoritmi su identični tako da je težinski DMD algoritam samo poopćenje prethodno opisanog online DMD algoritma.

### 5.3 DMD algoritam s klizećim vremenskim prozorom (windowed DMD)

U prethodnoj sekciji razmatran je algoritam za DMD u realnom vremenu koji daje veću težinu podacima u kasnijim vremenskim trenucima. Sljedeći algoritam koji ćemo razmotriti koristi samo najnovije podatke iz ograničenog vremenskog prozora širine  $w$ , odnosno samo zadnjih  $w$  parova podataka  $(x_j, y_j)_{k-w+1}^k$  u  $k$ -tom trenutku. Sukladno s tim za  $k \in \mathbb{N}$  definirajmo matrice podatka

$$X_k = [x_{k-w+1}, x_{k-w+2}, \dots, x_k],$$

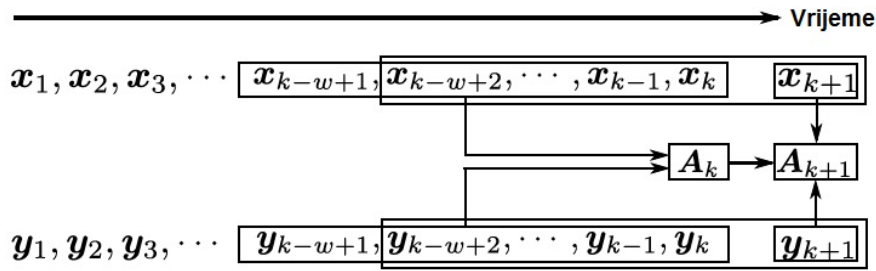
$$Y_k = [y_{k-w+1}, y_{k-w+2}, \dots, y_k].$$

Rješavamo isti problem kao i prije, odnosno tražimo  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tako da je  $A_k X_k = Y_k$  te koja minimizira funkciju

$$J_k = \|Y_k - A_k X_k\|_F^2. \quad (5.24)$$

Uz pretpostavku da je rang od  $X_k$  jednak  $n$ , imamo jedinstvenost minimizacijskog problema koje je dano s

$$A_k = Y_k X_k^\dagger. \quad (5.25)$$



Slika 5.3: Shema *windowed* DMD-a. Blokovi predstavljaju podatke, a strijelice pokazuju smjer toka podataka. U trenutku  $k$ , matrica  $A_k$  ovisi o samo zadnjih  $w$  podataka. U idećem trenutku  $k + 1$  kako dolazi novi par podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  stari podaci se zaboravljaju [11]

Izvod algoritma započinjemo kao i u prethodnoj sekciji definiranjem matrica  $Q_k$  i  $P_k$ :

$$Q_k = Y_k X_k^T = \sum_{i=k-w+1}^k y_i x_i^T, \quad (5.26)$$

$$P_k = (X_k X_k^T)^{-1} = \left( \sum_{i=k-w+1}^k x_i x_i^T \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

U  $k$ -tom koraku imamo matricu  $A_k = Y_k X_k^T (X_k X_k^T)^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{P}_k$  te želimo odrediti matricu  $A_{k+1}$  u  $k + 1$ -om koraku. Opet ćemo pogledati na koji su način matrice  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$  povezane s matricama  $Q_k$  i  $P_k$ . Pri konstrukciji matrica  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$  dodaje se novi par podataka  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ , a briše se najstariji par podataka  $(x_{k-w+1}, y_{k-w+1})$ :

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= Y_{k+1} X_{k+1}^T = \sum_{i=k-w+2}^{k+1} y_i x_i^T = \sum_{i=k-w+1}^k y_i x_i^T - y_{k-w+1} x_{k-w+1}^T + y_{k+1} x_{k+1}^T \\ &= Q_k - y_{k-w+1} x_{k-w+1}^T + y_{k+1} x_{k+1}^T, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{-1} &= X_{k+1} X_{k+1}^T = \sum_{i=k-w+2}^{k+1} x_i x_i^T = \sum_{i=k-w+1}^k x_i x_i^T - x_{k-w+1} x_{k-w+1}^T + x_{k+1} x_{k+1}^T \\ &= P_k^{-1} - x_{k-w+1} x_{k-w+1}^T + x_{k+1} x_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Neka su

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} x_{k-w+1} & x_{k+1} \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} y_{k-w+1} & y_{k+1} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa  $Q_{k+1}$  i  $P_{k+1}$  možemo zapisati

$$Q_{k+1} = Q_k + VCU^T \quad (5.30)$$

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + UCU^T \quad (5.31)$$

te  $A_{k+1}$  računamo kao

$$A_{k+1} = Q_{k+1} P_{k+1} = (Q_k + VCU^T) (P_k^{-1} + UCU^T)^{-1}. \quad (5.32)$$

Za efikasno računanje inverza u prethodnom izrazu koristit ćemo Woodburyjevu formulu za invertiranje matrica [10]

**Lema 5.3.1.** (Woodbury) *Neka su  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{k \times k}$  te  $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$  te neka su  $A$  i  $C$  invertibilne matrice. Ako je  $A + UCV$  invertibilna onda je njen inverz dan formulom*

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \quad (5.33)$$

*Dokaz.* Direktna provjera identiteta  $AB = BA = I_n$ . □

Primjenom formule (5.33) imamo

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + UCU^T)^{-1} = P_k - P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k, \quad (5.34)$$

gdje je

$$\Gamma_{k+1} = (C^{-1} + U^T P_k U)^{-1}. \quad (5.35)$$

Ako to uvrstimo u (5.32) dobivamo

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= (Q_k + VCU^T)(P_k - P_kU\Gamma_{k+1}U^T P_k) \\
&= Q_k P_k - Q_k P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k + VCU^T P_k - VCU^T P_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k \\
&= A_k - A_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k + VC(\Gamma_{k+1}^{-1} - U^T P_k U) \Gamma_{k+1} U^T P_k \\
&= A_k - A_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k + VCC^{-1} \Gamma_{k+1} U^T P_k \\
&= A_k - A_k U \Gamma_{k+1} U^T P_k + V \Gamma_{k+1} U^T P_k
\end{aligned}$$

te konačno

$$A_{k+1} = A_k + (V - A_k U) \Gamma_{k+1} U^T P_k. \quad (5.36)$$

Formula (5.36) ima sličnosti s formulom iz online DMD metode (5.11). Član  $V - A_k U$  se može shvatiti kao pogreška modela iz prethodnog koraka  $A_k$ , a korekcija u novom modelu je proporcionalna toj pogrešci.

Izračunavanje ažurirane matrice  $A_{k+1}$  zahtijeva dva matrična množenja kvadratne matrice reda  $n$  i matrice dimenzija  $n \times 2$  te dva produkta matrica dimenzija  $n \times 2$  i  $2 \times n$  što je ukupno  $8n^2$  množenja. Vremenska složenost windowed DMD algoritma je  $O(wn^2)$ .

Što se tiče prostorne složenosti, potrebno je spremati u memoriju matrice  $A_k$  i  $P_k$  koje su dimenzije  $n \times n$  te zadnjih  $w$  stanja sustava. Ovaj algoritam zahtijeva više prostora u memoriji nego *online* DMD ili težinski DMD algoritam.

## 5.4 Usporedba algoritama za dinamičku modalnu dekompoziciju u realnom vremenu

**Primjer 5.4.1.**[11] Pogledajmo sljedeći dinamički sustav s promjenjivom dinamikom

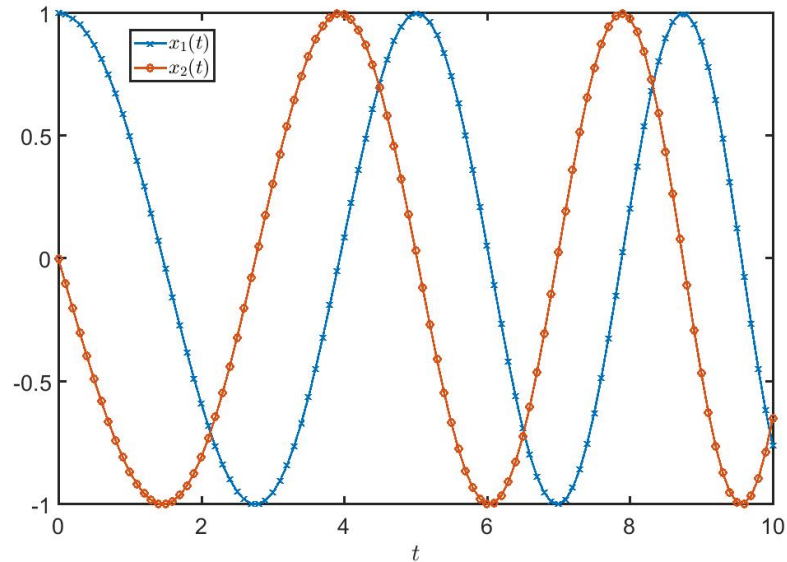
$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= \omega(t) x_2(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= -\omega(t) x_1(t),
\end{aligned} \quad (5.37)$$

gdje je  $\omega(t) = 1 + \epsilon t$ . Ako je  $\epsilon$  mali, sustav polagano varira. Uzmimo  $\epsilon = 0.1$ . Neka je  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Sustav (5.37) možemo u matričnoj formi napisati

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), \quad (5.38)$$

gdje je

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t) \\ -\omega(t) & 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 5.4: Rješenje sustava (5.37)

Svojtvene vrijednosti od  $\mathbf{A}$  su čisto imaginarne i iznose  $\pm i\omega(t)$ . Sada ćemo simulirati podatke koji predstavljaju rješenje sustava (5.37) te usporediti algoritme za dinamičku modalnu dekompoziciju u realnom vremenu opisane u ovom poglavlju. Uzmimo vrijeme simulacije  $T = 10$  s vremenskim korakom diskretizacije  $\Delta t = 0.1$ . Tada  $t \in (0, T)$ . Početni uvjet neka je  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ . Rješenje zadatke (5.37) koje je generirano kao rezultat simulacije dano je na slici 5.4.

Tablica 5.1: Usporedba karakteristika DMD algoritama u realnom vremenu. Dimenzija prostora stanja je  $n$ , a  $w$  je širina prozora kod *windowed* DMD-a [11]

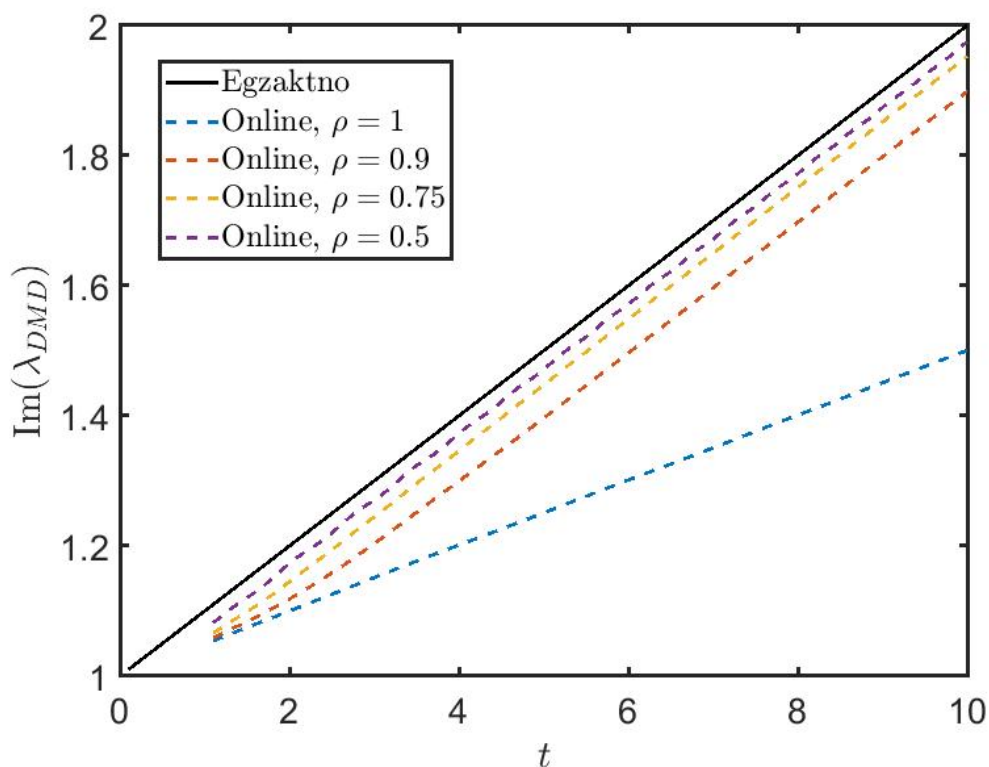
Karakteristika	<i>Online</i> DMD	Težinski DMD	<i>Windowed</i> DMD
Vremenska složenost	$O(4n^2)$	$O(4n^2)$	$O(8n^2)$
Prostorna složenost	$O(2n^2)$	$O(2n^2)$	$O(wn + 2n^2)$
Čuva prošla stanja	Ne	Ne	Da

Usporedit ćemo algoritme prema tome koliko dobro predviđaju frekvenciju  $\omega$ . Na generiranim podacima pokrenut je online DMD, težinski DMD s nekoliko različitih težinskih faktora te *windowed* DMD, također s nekoliko različitih težinskih faktora.

U prvoj simulaciji na generiranim podacima pokrenut je online DMD algoritam, odnosno težinski DMD s težinama  $\rho = 1, 0.9, 0.75, 0.5$  te su rezultati prikazani na slici 5.5.



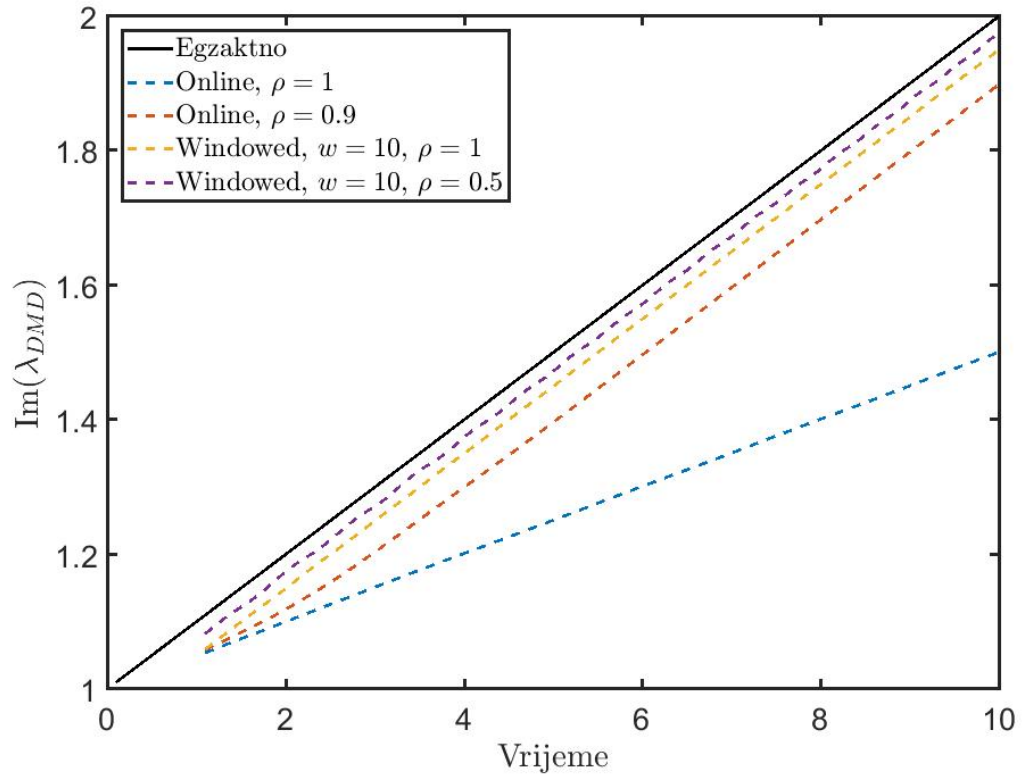
Smanjenjem težinskog faktora, stanja u kasnijim trenucima imaju veću težinu pa frekvencija koju predviđa algoritam postaje bliža egzaktnoj.



Slika 5.5: Usporedba kvalitete predviđanja frekvencije za online, odnosno težinski DMD s nekoliko različitih težinskih faktora  $\rho = 1, 0.9, 0.75, 0.5$

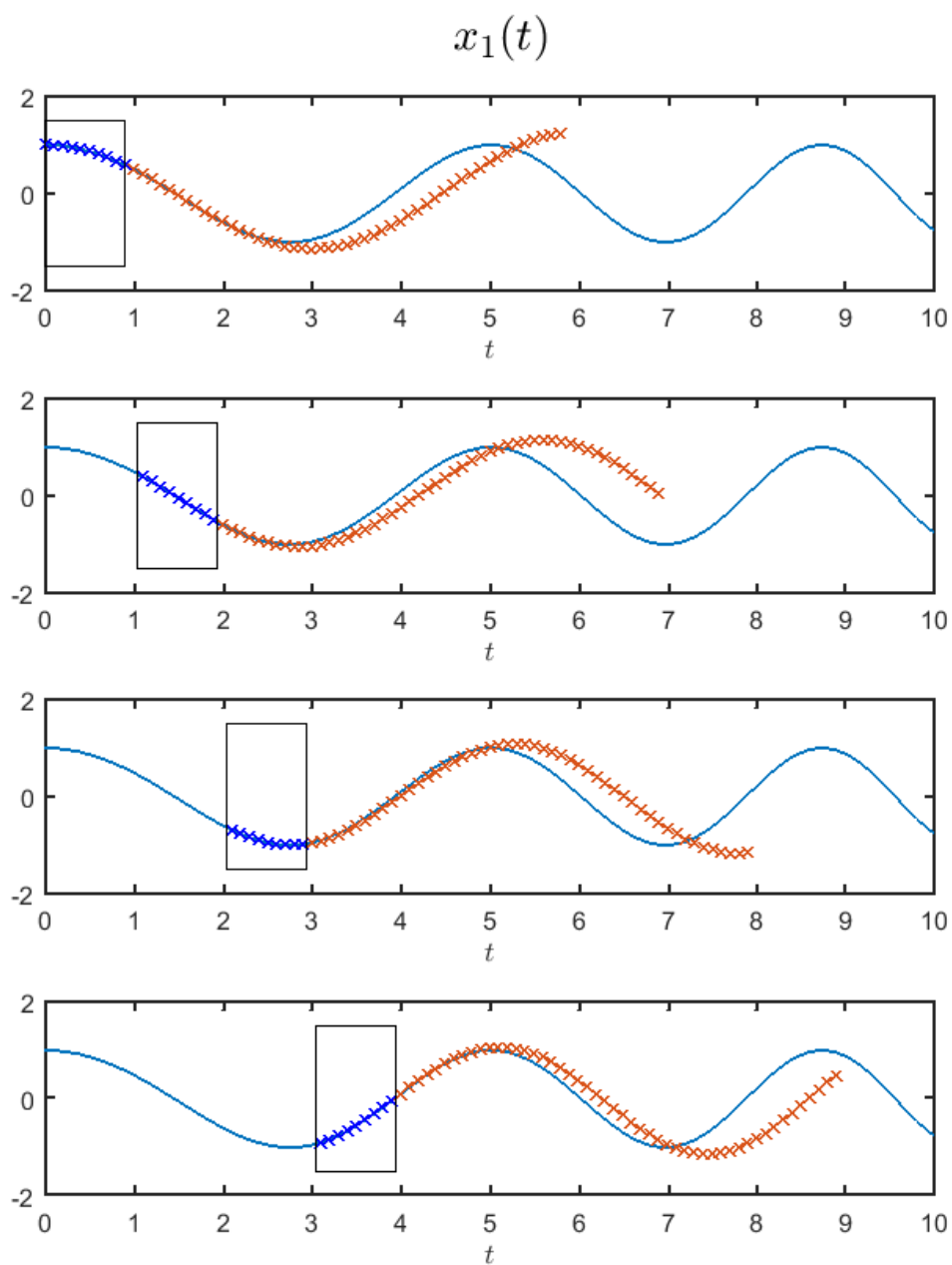
U drugoj simulaciji uspoređeni su online DMD i windowed DMD algoritam s težinama 1 i 0.9 za online te 1 i 0.5 za windowed. Windowed DMD algoritam generalno daje bolju predikciju frekvencije nego online DMD, no windowed DMD je računalno zahtjevniji te u uvjetima simulacije traje dvostruko duže (Tablica 5.1). Predikcija frekvencije kako je već i ranije zaključeno je bolja sa smanjenjem težinskog faktora  $\rho$ , odnosno davanjem veće težine kasnijim slikama stanja sustava u matrici podataka.

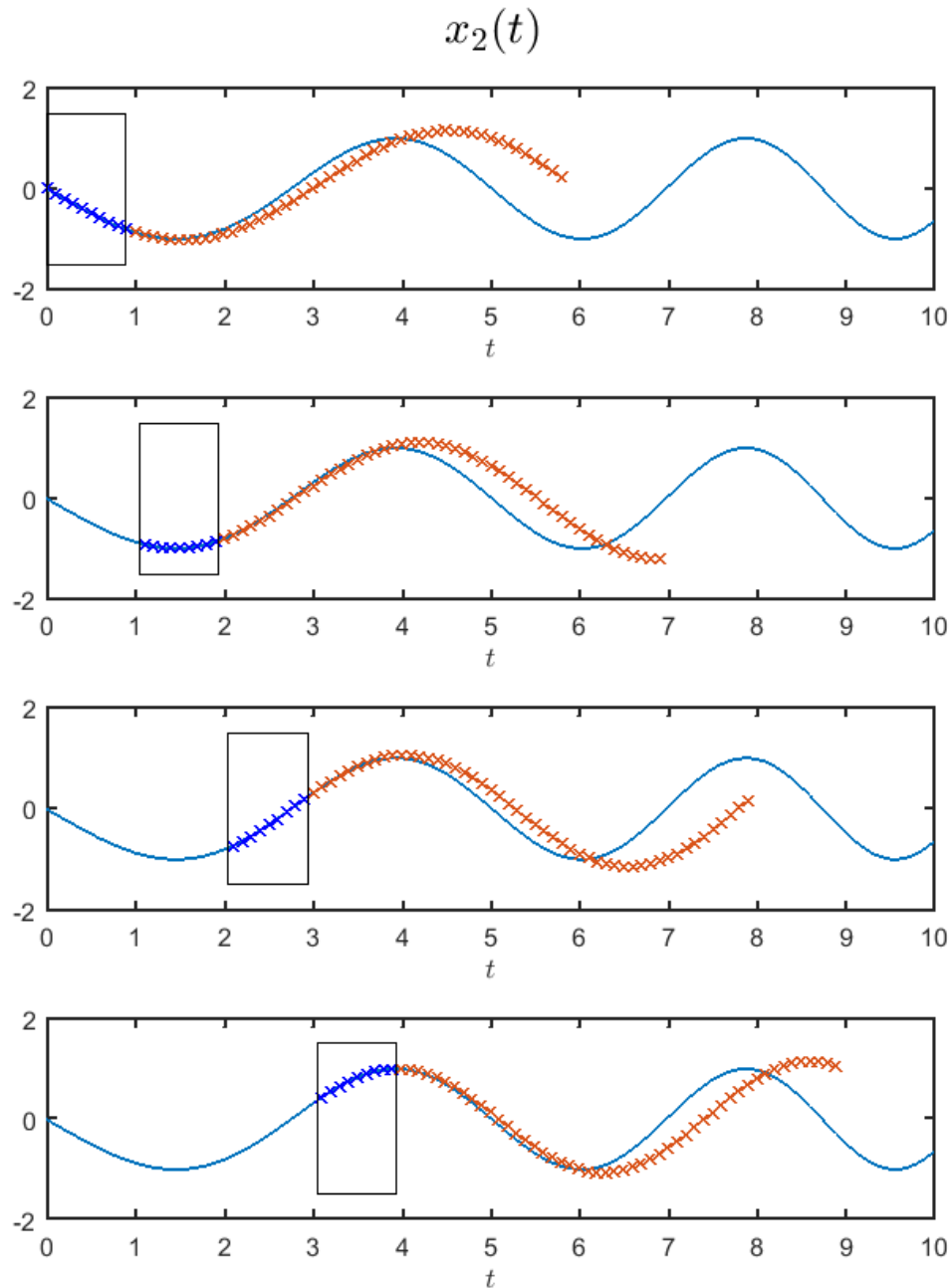
Nadalje, na istom primjeru ilustrirat ćemo i predikciju stanja sustava (5.37) DMD algoritmom uz fiksnu širinu klizećeg vremenskog prozora  $w = 10$ . Dakle, DMD matrica izračunata je iz 10 parova podataka, te je izvršeno predviđanje stanja  $x_1$  i  $x_2$  u sljedećih 50 vremenskih trenutaka (Slika 5.7). Kako vremenski prozor "klizi" po podacima pratimo predikciju budućih stanja sustava. Metoda dobro predviđa prvih nekoliko stanja, no u da-



Slika 5.6: Usporedba kvalitete predviđanja frekvencije za online, odnosno težinski DMD te windowed DMD

Ijoj budućnosti predviđanje nije zadovoljavajuće. Razlogu tomu je promjenjiva dinamika sustava (5.37) koja ovisi o  $\epsilon$ .





Slika 5.7: Predikcija budućih stanja sustava (5.37) *windowed* DMD algoritmom uz fiksnu širinu klizećeg vremenskog prozora  $w = 10$ . Podaci iz klizećeg vremenskog prozora koji se koriste za konstrukciju DMD matrice su na prikazu uokvireni. Ravna linija predstavlja egzaktno rješenje sustava (5.37). Crveni x-evi predstavljaju sljedećih 50 predviđenih stanja sustava. Metoda dobro predviđa prvih destak stanja, no zbog promjenjive dinamike predviđanje u daljoj budućnosti nije zadovoljavajuće.



# Bibliografija

- [1] *Predavanja iz Numeričke analize*, [https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num\\_anal/NA\\_0910/25.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/25.pdf).
- [2] J. Nathan Kutz, Xing Fu i Steven L. Brunton, *Multiresolution Dynamic Mode Decomposition*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems **15** (2016), br. 2, 713–735.
- [3] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton i J. L. Proctor, *Dynamic Mode Decomposition*, SIAM, 2016.
- [4] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter i D. S. Henningson, *Spectral analysis of nonlinear flows*, J. Fluid Mech. (2009), 115–127.
- [5] P. J. Schmid, *Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data*, J. Fluid Mech. (2010), 5–28.
- [6] Jack Sherman i Winifred J. Morrison, *Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix*, Ann. Math. Statist. **21** (1950), br. 1, 124–127, <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729893>.
- [7] J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, J. N. Kutz i S. L. Brunton, *On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications*, Journal of Computational Dynamics **1** (2014), 391–421.
- [8] S. Volkwein, *Proper Orthogonal Decomposition: Theory and Reduced-Order Modeling, Lecture Notes*, (2013).
- [9] S. Volkwein i M. Hinze, *Proper Orthogonal Decomposition Surrogate Models for Nonlinear Dynamical Systems: Error Estimates and Suboptimal Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [10] M. A. Woodbury, *Inverting modified matrices*, Memorandum report **42** (1950), 106.
- [11] Hao Zhang, Clarence W. Rowley, Eric A. Deem i Louis N. Cattafesta, *Online dynamic mode decomposition for time-varying systems*, CoRR **abs/1707.02876** (2017).



# Sažetak

Dinamička modalna dekompozicija (*Dynamic Mode Decomposition*, DMD) je metoda originalno razvijena za numeričke simulacije u dinamici fluida i pokazala se uspješnom u analizi tzv. koherentnih struktura. U praktičnoj realizaciji je često kombinirana s *Proper Orthogonal Decomposition* (POD). DMD je posebno prikladna u tzv. *data driven* scenarijima, kada se iz niza dobivenih podataka empirijski gradi model kojeg se može koristiti za kontrolu i/ili predviđanje budućih vrijednosti. U slučaju simulacija u realnom vremenu i s vremenski promjenjivim koeficijentima nužno je koristiti podatke iz klizećeg vremenskog prozora ograničene širine koji uključuje najnovije podatke. Pri tome se DMD mora u svakom koraku obnavljati, što zahtijeva nove efikasne algoritme. U ovoj radnji su proučeni takvi algoritmi s primjenama na odabranim primjerima.





# Summary

[REDACTED]





# Životopis

Osnovni podatci **Matej Poletar**

██

██

██

Obrazovanje

**Srednja škola**

2008 – 2012

III. Gimnazija Osijek (smjer: prirodoslovno-matematički)

2008 – 2012

Glazbena i plesna škola Franje Kuhača Osijek (smjer: Klavir)

**Visoko obrazovanje**

2012-2015

Preddiplomski studij kemije na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu Sveučilišta u Zagrebu

prosjek ocjena: 5,00

Tema završnog rada: Taxol – sinteza i svojstva

Stečena titula prvostupnika kemije (univ. bacc. chem.)

2015-2017

Diplomski studij kemije na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu- smjer: istraživački, grana: Organska kemija i Biokemija

prosjek ocjena: 5,00

Tema diplomskog rada: Kinetička analiza heterocikličkih  $\alpha$ -D-manopiranozida kao potencijalnih inhibitora butirilkolinesteraze (mentor: prof. dr. sc. S. Tomić – Pisarović)

Stečena titula magistra kemija (mag. chem.)

2016-2018

Diplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu - smjer Primjenjena matematika

prosjek ocjena:

Tema diplomskog rada: Dinamička modalna dekompozicija u realnom vremenu

**Rezultati i nagrade** Posebna Rektorova nagrada za sudjelovanje na  
7. Otvorenom danu PMF-a (2014)  
Rektorova nagrada za samostalni istraživački rad (2016)  
Status iznimno uspješnog studenta na Prirodoslovno-  
matematičkom Fakultetu Sveučilišta u Zagrebu (od 2016.)  
Nagrada za izuzetan uspjeh u studiju (2017)  
Stipendist Sveučilišta u Zagrebu (2014-2017)

**Akademski i  
znanstveno-  
istraživački rad**

**Prirodoslovno-matematički fakultet**

Demonstrator kolegija Matematika 1 i Matematika 2 na  
preddiplomskom studiju kemije (2014-2016)

**Jezici**

Engleski jezik (C1 razina)