Prikazi presjeka tijela pomoću aksonometrije

Radić, Rosanda

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:353139

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Rosanda Radić

PRIKAZI PRESJEKA TIJELA POMOĆU AKSONOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Obitelji
Kad se naučiš zamišljati, možeš zamisliti sve što poželiš.

Sadržaj

Uvod

Od samih početaka ljudske kulture, ljudi su nastojali predmete iz svoje okoline tj. trodimenzionalne objekte prikazati na listu papira kao dvodimenzionalne objekte. Na samom početku su ti crteži služili kao podloga za razvoj likovne umjenosti, no uskoro, s razvojem graditeljstva i njihova svrha se promijenila. Po prvi puta su služili kao praktična i tehnička pomoć. Prvi dokazi o postojanju neke vrste tehničkih crteža sežu iz 25. godine prije Krista, a navedeni su u djelu *De arhitectura*, Marcusa Vitruviusa Pollioa. U stoljećima nakon Pollioa sve više su se razvijali tehnički crteži, no i dalje im je nedostajalo tumačenje o metodama po kojima nastaju. Po prvi puta, pravo geometrijsko razumijevanje i prostorno predstavljanje (još uvijek daleko od egzaktnih metoda) možemo pronaći u djelu *Četiri knjige o mjerenju* njemačkog slikara Alberchta Dürera iz 16. stoljeća. Osnivačem nacrtne geometrije smatramo francuskog vojnog inženjera i matematičara Gesparda Mongea. Monge je u svom djelu *Geometrie descriptive* prikazao sve postupke tehničkog crtanja koji su tijekom prethodnih stoljeća razvijeni. On definira nacrtnu geometriju kao znanost o metodama koje omogućuju prikazivanje trodimenzionalnih figura iz prostora na nekoj dvodimenzionalnoj ravnini i rješavanje prostornih problema u ravnini konstruktivno - geometrijskim putem. Danas se uz naziv nacrtna geometrija, upotrebljavaju i nazivi deskriptivna geometrija te opisno mjeriteljstvo. Neke od najpoznatijih metoda nacrtne geometrije su: Mongeova projekcija, perspektiva; kosa projekcija, fotogrametrija, kotirana projekija, aksonometrija, itd.
U ovom radu posebno ćemo se posvetiti metodi nacrtne geometrije koja se naziva aksonometrija. Glavna svrha aksonometrije je stvaranje predodžbe o stvarnom izgledu nekog predmeta u prostoru. Svi prikazi u radu bit će vezani uz jedan prostorni koordinatni sustav, koji će u ovisnosti o situaciji biti koso ili ortogonalno projiciran na jednu ravninu, tzv. *ravninu slike*. Ishodište tog koordinatnog sustava označavat ćemo sa O, a njegove međusobno okomite osi sa x, y i z. Općenito, ishodište O sa svojim osima x, y i z nazivamo *osni križ* $Oxyz$. U ovisnosti o projekciji na ravninu slike (okomito ili koso) i položaju osi s obzirom na ravninu slike (jedna ili dvije osi usporedne s ravninom slike) dobivamo četiri vrste aksonometrijskih metoda:

1. Sve tri osi koso postavljene na ravninu slike i smjer projiciranja kos - *kosa aksonometrija.*

2. Jedna os usporedna s ravninom slike i smjer projiciranja kos - *vojna aksonometrija.*

3. Dvije osi usporedne s ravninom slike i smjer projiciranja kos - *kosa projekcija.*

4. Sve tri osi koso postavljene na ravninu slike i smjer projiciranja okomit - *ortogonalna aksonometrija.*

Općenito, u aksonometrijskim metodama projekcije točaka $(A, B, C, \dots)$ i pravaca $(p, q, r, \dots)$ na ravninu označavamo sa crticom iznad svakog slova $(\overline{A}, \overline{p}, \dots)$.
U ovom radu ću iznijeti karakteristike osnovnih aksonometrijskih metoda, a zatim te iste metode primijeniti pri projiciranju nekih tijela te određivanju presjeka tih tijela s ravninom. Posebnu pažnju posvetit ćemo kosoj aksonometriji, budući da sve ostale aksonometrijske metode na neki način proizlaze iz nje. U posljednjem poglavlju osvrnut ćemo se na dio školskog gradiva koje je povezano s ovom temom.

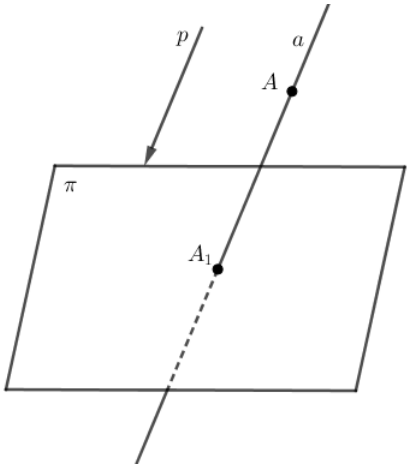
Poglavlje 1

Paralelno projiciranje

Kako bi neki problem gometrije prostora riješili konstruktivno potrebno je cijeli prostor E^3 preslikati na određenu ravninu u kojoj bi onda izvodili konstrukcije. Stoga, nam se prirodno nameće pitanje: "Kako pogodno preslikati elemente, tj. objekte prostora na ravninu?".
Svako preslikavanje prostora E^3 na neku ravninu zovemo **projiciranjem** prostora na ravninu.
Ravninu na koju projiciramo zovemo **ravnina projiciranja** i označavamo je sa π, a slike točaka i objekata zovemo **projekcije**.
Međutim, u nacrtnoj geometriji trebamo biti pažljivi, jer nam rješavanje problema zahtijeva i obrnut postupak. Budući da je poželjno da dobivenu projekciju znamo interpretirati prostorno, traženo preslikavanje treba biti bijekcija. Od velikog interesa u ovom radu će biti paralelno projiciranje koje ćemo sada malo detaljnije obasniti.
Prirodno nam se nameće na sljedeći način opisati, odnosno definirati paralelno projiciranje.
Neka je u E^3 dana ravnina π i pravac p tako da pravac nije paralelan s danom ravninom. Tim pravcem je definiran snop pravaca koji su međusobno paralelni, a upravo s tim je definiran njihov smjer. Ako nekom točkom $A \in E^3$ položimo pravac a istog smjera kao i pravac p te odredimo probodište pravca a i ravnine π na jednoznačan način smo točki prostora pridružili točku ravnine.

Definicija 1.1. *Neka je π ravnina, a p pravac koji nije paralelan s ravninom π. Preslikavanje $f\colon E^3 \to \pi$ kojim svakoj točki $A \in E^3$ pridružujemo točku $A_1 \in \pi$ tako da je točka A_1 probodište pravca kroz točku A paralelnog sa pravcem p i ravnine π nazivamo* ***paralelnim projiciranjem*** *prostora E^3 na ravninu π.*

Smjer pravca p nazivamo **smjerom paralelnog projiciraja**, pravce smjera p **zrakama paralelnog projiciranja**, a točku A_1 **paralelna projekcija** točke A na



Slika 1.1.: Paralelno projiciranje

ravninu π.
Kada je smjer projiciranja okomit na ravninu π tada ovo preslikavanje nazivamo **normalnim ili ortogonalnim preslikavanjem**. Paralelno preslikavanje koje nije normalno nazivamo **kosim projiciranjem**. U ovom radu nećemo toliko govoriti o normalnom preslikavanju, ali u [4] je ono na veoma pogodan i razumljiv način objašnjeno.
Dakle, od sada pa nadalje ćemo promatratti koso projiciranje i njegovu primjenu u nacrtnoj geometriji.
Koso projiciranje kao vrsta preslikavanje ima nekoliko veoma "lijepih" svojstava:

1. Kosa projekcija dužine (kuta) na ravninu može biti kraća, jednaka ili duža od njene prave veličine.

2. Kosa projekcija paralelnih pravaca su paralelni pravci.

3. Kosa projekcija omjera triju ili dvoomjera četiriju točaka na jednom pravcu ostaje nepromijenjena.

4. Ako je α kut između dužine duljine d i njene kose projekcije duljine $\overline{d}$, a β kut između kose projekcije duljine $\overline{d}$ i zrake kosog projiciranja tada: za $\alpha < \beta$ vrijedi $\overline{d} < d$, za $\alpha = \beta$ vrijedi $\overline{d} = d$ i za $\beta < \alpha$ vrijedi $d < \overline{d}$.

5. Ako je dužina duljine d okomita na ravninu projekcije π, tj. $\alpha = 90°$ tada je $\overline{d} < (>) d$ kada je $\beta < (>) 45°$.

Poglavlje 2

Aksonometrijske metode

Paralelno projiciranje prostora na ravninu očito nije bijekcija te promatrajući samo sliku predmeta ne možemo znati kako taj predmet izgleda u originalu. Ali ako promatrani predmet smjestimo u koordinatni sustav te pri paralelnom projiciranju osim predmeta projiciramo i koordinatni sustav tada je problem "rekonstruiranja" originalne slike rješiv, tj. promatrajući samo dvodimenzionalnu sliku predmeta možemo otkriti sve podatke o izgledu tog predmeta kao trodimenzionalnog objekta. Ovakvo projiciranje naziva se aksonometrija. Dakle, aksonometriju možemo definirati na sljedeći način:

Definicija 2.1. *Aksonometrija je paralelna projekcija prostora s istaknutim koordinatnim sustavom na jednu ravninu, pri čemu se koordinatni sustav nalazi u općem položaju prema ravnini projekcije.*

U uvodnom dijelu već smo nabrojali da aksonometriju možemo podijeliti na četiri skupine:

1. Kosa aksonometrija;
2. Specijalna kosa aksonometrija;
3. Kosa projekcija;
4. Ortogonalna aksonometrija.

Unutar svake od tih skupina imamo još mnoštvo podjela, no nama će od najvećeg interesa biti promatranje nastajanja kosoaksonometrijeske slike predmeta.

2.1 Kosa aksonometrija

Prije no što kažemo više o samom nastajanju kosoaksonometrijske slike geometrijskih tijela prisjetimo se Mongeove projekcije. Kod Mongeove projekcije, tijela smo zadavali tlocrtom i nacrtom te na taj način u potpunosti odredili njihovu veličinu, oblik i smještaj u prostoru. Kod paralene projekcije tijela predočavamo samo u jednoj ravnini, ravnini projekcije te na taj način ih ne određujemo u potpunosti. Zbog toga je potrebno uz samu projekciju tijela vezati i koordinatni sustav, koji se sastoji od tri međusobno okomite osi x, y i z te ishodišta O.

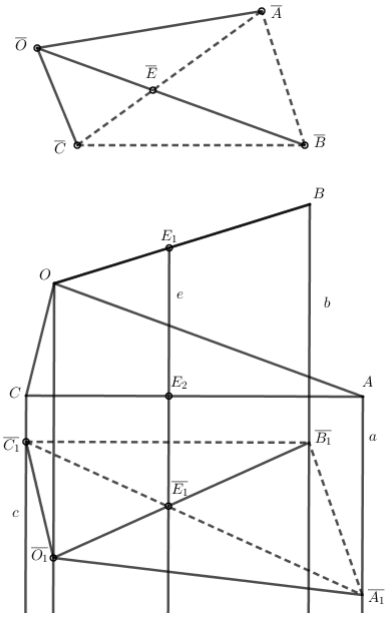
Dužine ću u cijelom radu označavati bez crte iznad točaka jer će se pri kosoj aksonometriji slika točke označavati pomoću crte iznad imena točke.

Ukoliko sukladne dužine OA, OB i OC koje se nalaze na koordinatinim osima x,y i z koso projiciramo na ravninu slike dobivamo tri nove dužine: $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$ i $\overline{O}\,\overline{C}$. Međutim, dobivene projicirane dužine nisu niti sukladne ni međusobno okomite, ali sve tri prolaze točkom $\overline{O}$. Duljina kose projekcije svake od tih dužina mijenja se po određenom omjeru: za os x $\left|\overline{O}\,\overline{A}\,\right| : |OA|$, za os y $\left|\overline{O}\,\overline{B}\,\right| : |OB|$ te za os z $\left|\overline{O}\,\overline{C}\,\right| : |OC|$. Ovi se omjeri nazivaju prikrate i označavaju se redom p_x, p_y i p_z. Upravo na ovom principu se zasniva nastajanje kosoaksonometrijske slike predmeta. Kada zamišljamo neko tijelo, većinom ga zamišljamo u vertikalnom položaju stoga kosu projekciju jedne osi (najčešće z), postavljamo u vertikalan položaj. Kako bi otkrili način konstruiranja kosoaskonometrijske slike nekog predmeta iz tlocrta i nacrta, još nam preostaje da odredimo dužine $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$ i $\overline{O}\,\overline{C}$ na kosim projekcijama osi. Tu nam do velikog izražaja dolazi sljedeći teorem, tzv. Pohlkeov stavak:

Teorem 2.2. *[4] Povučemo li iz jedne točke $\overline{O}$ bilo kakve tri dužine $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$ i $\overline{O}\,\overline{C}$, koje ne pripadaju istom pravcu, tada se te tri dužine uvijek mogu smatrati paralelnom projekcijom triju sukladnih dužina OA, OB i OC koje izlaze iz jedne točke O, a međusobno su okomite (pravilni pravokutan trobrid $OABC$).*

Dokaz. Neka su $\overline{O}\,\overline{A}$, $\overline{O}\,\overline{B}$ i $\overline{O}\,\overline{C}$ zadane tri dužine sa zajedničkom početnom točkom $\overline{O}$ te neka dužina $\overline{A}\,\overline{C}$ siječe dužinu $\overline{O}\,\overline{B}$ u točki $\overline{E}$ (slika 2.3.).

Nadalje, neka je u prostoru zadan pravilan pravokutni trobrid $OABC$ ($OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $OB \perp OC$). Točke E_1 i E_2 su uzete tako da bude $\left|\overline{O}\,\overline{E}\,\right| : \left|\overline{E}\,\overline{B}\,\right| = |OE_1| : |E_1B|$ te $|AE| : |EC| = |AE_2| : |E_2C|$. Točkama O, A, B i C povucimo pravce o, a, b i c tako da budu paralelni sa pravcem $E_1E_2 = e$. Ako pravce a, b i c uzmemo kao bridove pravilne trostrane prizme možemo dokazati da se dobivena trostrana prizma može presjeći nekom ravninom π u trokutu $A_1B_1C_1$ koji će biti sličan trokutu $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Budući da točka E_2 pripada dužini AC slijedi da točka $\overline{E_1}$ pripada dužini $\overline{A_1}\,\overline{C_1}$ i



Slika 2.1.: Pohlkeov stavak

vrijedi $\left|\overline{A_1}\,\overline{E_1}\right| : \left|\overline{E_1}\,\overline{C_1}\right| = |AE_2| : |E_2C| = |AE| : |EC|$.
Međutim, pravci b, o i e pripadaju istoj ravnini stoga sjecište $\overline{O_1}$ pravca o s ravninom π na spojnici $\overline{B_1}\,\overline{E_1}$ i vrijedi $\left|\overline{B_1}\,\overline{E_1}\right| : \left|\overline{E_1}\,\overline{O_1}\right| = |BE_1| : |E_1O| = |BE| : |EO|$. Budući da su trokuti $A_1B_1C_1$ i $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ slični, slijedi da su četverokuti $\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ i $O_1A_1B_1C_1$ slični.
Dakle, zaključili smo da za dužine $\overline{O_1}\,\overline{A_1}$, $\overline{O_1}\,\overline{B_1}$ i $\overline{O_1}\,\overline{C_1}$ koje pripadaju ravnini π postoji u prostoru pravilan pravokutni trobrid $OABC$, koji se u smjeru pravca e projicira na tu ravninu. Isto to možemo zaključiti i za dužine OA, OB i OC. Taj trobrid (s ishodištem O_1 i krajnjim točkama A_1, B_1 i C_1) bi dobili tako da na dužine OA, OB i OC duljine d nanesemo od točke O dužinu duljine d_1 tako da vrijedi: $d_1 : d = \left|\overline{O}\,\overline{B}\right| : \left|\overline{O_1}\,\overline{B_1}\right| = \left|\overline{O}\,\overline{C}\right| : \left|\overline{O_1}\,\overline{C_1}\right|$.

□

Ovaj stavak nam omogućuje da uvijek možemo iz neke točke $\overline{O}$ povući tri polupravca $\overline{x}$, $\overline{y}$ i $\overline{z}$ i na njih počevši od točke $\overline{O}$ nanijeti tri po volji uzete dužine duljina $\left|\overline{O}\,\overline{A}\right| = d_x$, $\left|\overline{O}\,\overline{B}\right| = d_y$ i $\left|\overline{O}\,\overline{C}\right| = d_z$. Upravo te dužine tada možemo smatrati projekcijama triju međusobno okomitih dužina duljina d.
S obzirom na različite dužine duljina d_x, d_y i d_z i njihov odnos dobivamo sljedeće vrste kose aksonometrije:

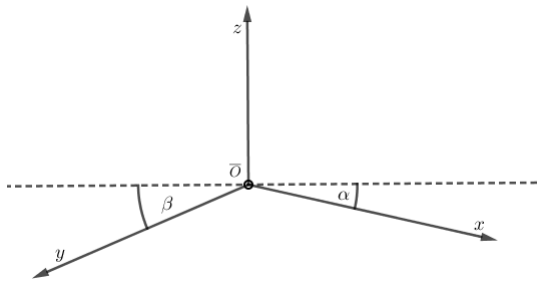
1. Za $d_x = d_z = d$ i $d_y > (<) d$ dobivamo **KOSU DIMERTIJU**.

2. Za $d_x = d_y = d_z = d$ dobivamo **KOSU IZOMETRIJU**.

3. Za $d_x \neq d_y \neq d_z$ dobivamo **KOSU TRIMETIJU**.

Sloboda biranja dužina duljina d_x, d_y i d_z uvjetuje slobodu u biranju mjerila pri kosom projiciranju. Međutim, kao i u bilo kojem drugom projiciranju, cilj nam je da projekcija objekta bude što manje izobličena, odnosno da joj damo što prirodniji izgled. Stoga postoji nekoliko dogovorenih pravila kojih se držimo kada radimo kosoaksonometrijsku sliku predmeta.

1. $10° \leq \alpha \leq 15°$ i $20° \leq \beta \leq 30°$



Slika 2.2.: Osni križ

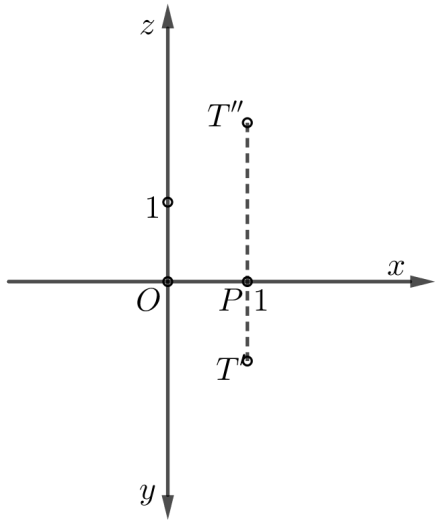
2. Os z uvijek postavimo tako da bude u vertikalnom položaju (vertikalni bridovi i na slici ostaju vertikalni).

3. Prikrate: $0.7 \leq p_x \leq 1$, $0.5 \leq p_y \leq 0.8$ i $p_z \approx 1$.

Također s ciljem što prirodnijeg izgleda slika u cijelom radu ću pri određivanju vidljivosti bridova smatrati da tijelo gledamo odozgo.
Aksonometrija se u velikoj mjeri oslanja na poznavanje Mongeove projekcije te ću u ovom radu smatrati da je čitatelj dobro upoznat s osnovnim idejama i postupcima konstruiranja Mongeove projekcije objekata.

2.1.1 Prenošenje točke iz Mongeove projekcije u kosu aksonometriju

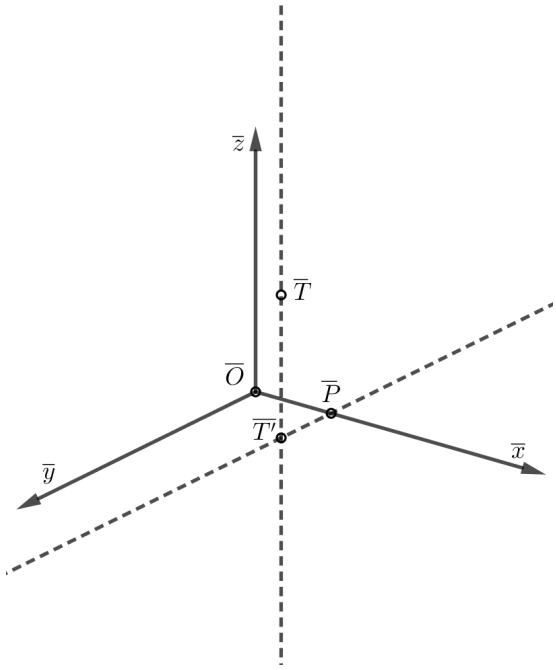
Primjer 2.3. *Neka je zadana kosoaksonometrijska slika pravokutnog koordinatnog sustava i točka $T(1, 1, 2)$. Odredimo kosoaksonometrijsku sliku točke T tako da $d_x = d$, $d_y = 0.7\ d$ i $d_z = 0.9\ d$.*



Slika 2.3.: Točka T u Mongeovoj projekciji

Rješenje. Označimo sa P presjek TT'' i x osi te uzmimo da je $|OP| = d = 1$.

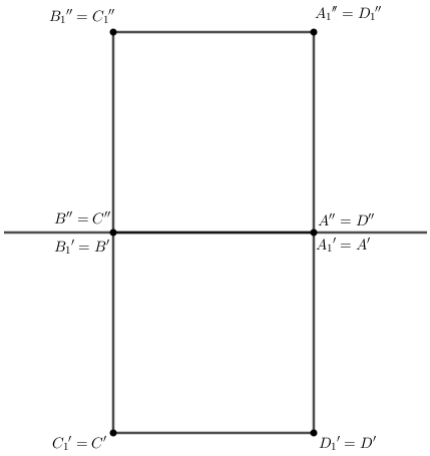
1. Na $\overline{x}$ počevši od točke $\overline{O}$ nanesemo $|\overline{O}\,\overline{P}\,| = d$.
2. Konstruiramo paralelu s $\overline{y}$ osi kroz točku $\overline{P}$.
3. Na paraleli odredimo točku $\overline{T'}$ tako da je $|\overline{P}\,\overline{T'}\,| = 0.7|PT|$.
4. Konstruiramo paralelu sa $\overline{z}$ osi kroz točku $\overline{T'}$.
5. Na paralelu počevši od točke $\overline{T'}$ nanesemo $|\overline{T}'\overline{T}\,| = 0.9|PT''|$. Točka $\overline{T}$ je kosoaksonometrijska slika zadane točke T.



Slika 2.4.: Kosoaksonometrijska slika točke T

Sada ćemo kroz nekoliko primjera predočiti projekcije kocke te vidjeti kako se izgled kocke mijenja s obzirom na različite prikrate i kutove. Zanimljivo je vidjeti kako kocka poprima neprirodan izgled kada uzmemo prikrate i kutove izvan dogovorenih veličina.

Primjer 2.4. *Odredimo kosoaksonometrijsku sliku kocke brida* $a = 2.5$ *cm zadane svojim tlocrtom i nacrtom ako je:*



Slika 2.5.: Tlocrt i nacrt kocke

1. $p_x = 0.8$, $p_y = 0.7$ i $p_z = 0.9$, $\alpha = 15°$ i $\beta = 30°$;

   Rješenje. Postavimo osni križ tako da $\overline{O} = \overline{B}$.
   Budući da je točka A pripada x-osi i točka C pripada y-osi lako odredimo $d(\overline{O}, \overline{A})$ i $d(\overline{O}, \overline{C})$, odnosno položaj točki $\overline{A}$ i $\overline{C}$.

   $d(\overline{O}, \overline{A}) = p_x \cdot d(O, A) = 0.8 \cdot 2.5 = 2$ cm;

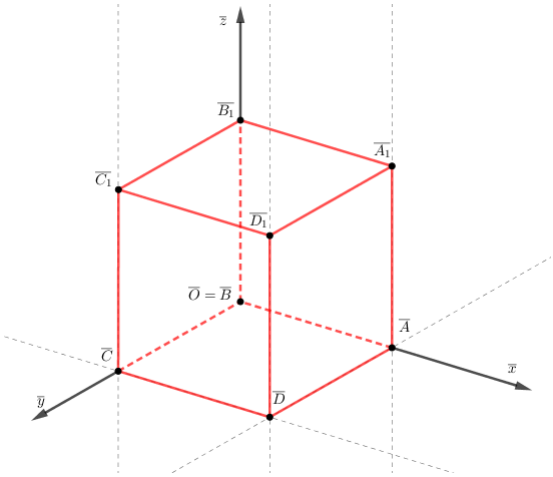
   $d(\overline{O}, \overline{C}) = p_y \cdot d(O, C) = 0.7 \cdot 2.5 = 1.75$ cm.

   Paralela s $\overline{x}$ kroz točku $\overline{C}$ siječe paralelu s $\overline{y}$ kroz točku $\overline{A}$ u točki $\overline{D}$.

   Nadalje, znamo da je B_1 pripada z-osi, pa vrijedi:

   $d(\overline{O}, \overline{B_1}) = p_z \cdot d(O, B_1) = 0.9 \cdot 2.5 = 2.25$ cm.

   Kako bi odredili preostale vrhove gornje baze kocke još trebamo povući paralele s $\overline{z}$-osi iz vrhova donje baze kocke i na svaku paralelu počevši od vrha donje baze nanijeti dužinu duljine 2.25 cm.



Slika 2.6.: Kosoaksonometrijska slika kocke uz $p_x = 0.8$, $p_y = 0.7$ i $p_z = 0.9$

2. $p_x = 0.4$, $p_y = 0.9$ i $p_z = 0.9$, $\alpha = 15°$ i $\beta = 30°$;

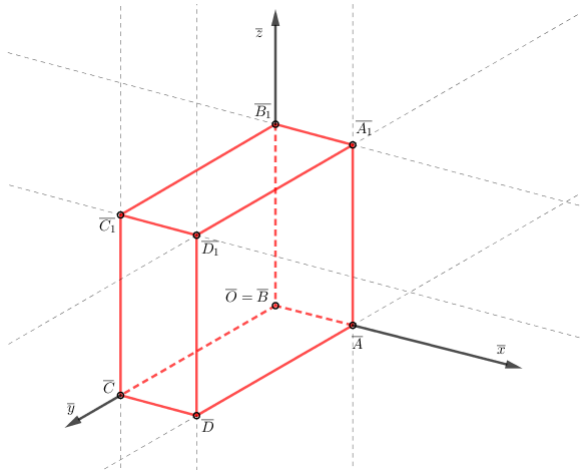
Rješenje. Postavimo osni križ tako da $\overline{O} = \overline{B}$.
Analogno kao u 1. dolazimo do projekcija vrhova kocke, samo nam se mijenjaju veličine, odnosno:

$d(\overline{O}, \overline{A}) = p_x \cdot d(O, A) = 0.4 \cdot 2.5 = 1$ cm;

$d(\overline{O}, \overline{C}) = p_y \cdot d(O, C) = 0.9 \cdot 2.5 = 2.25$ cm:

$d(\overline{O}, \overline{B_1}) = p_z \cdot d(O, B_1) = 0.9 \cdot 2.5 = 2.25$ cm.

Analogno kao u 1. određujemo projekcije vrhova gornje baze kocke.



Slika 2.7.: Kosoaksonometrijska slika kocke uz $p_x = 0.4$, $p_y = 0.9$ i $p_z = 0.9$

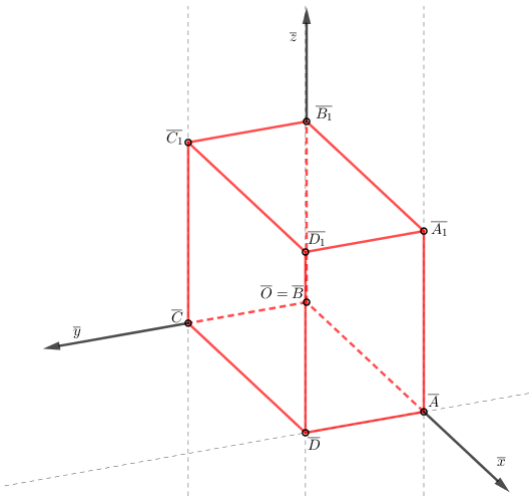
3. $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$ i $p_z = 0.9$, $\alpha = 40°$ i $\beta = 10°$;

Rješenje. Postavimo osni križ tako da $\overline{O} = \overline{B}$.

$d(\overline{O}, \overline{A}) = p_x \cdot d(O, A) = 0.8 \cdot 2.5 = 2$ cm;

$d(\overline{O}, \overline{C}) = p_y \cdot d(O, C) = 0.6 \cdot 2.5 = 1.5$ cm;

$d(\overline{O}, \overline{B_1}) = p_z \cdot d(O, B_1) = 0.9 \cdot 2.5 = 2.25$ cm.



Slika 2.8.: Kosoaksonometrijska slika kocke uz $\alpha = 40°$ i $\beta = 10°$

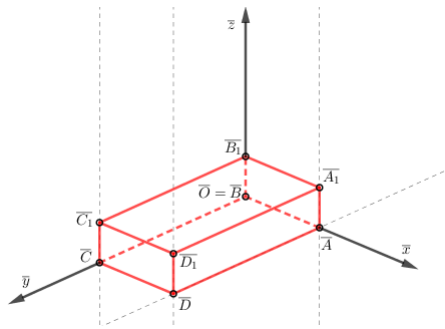
4. $p_x = 0.4$, $p_y = 0.8$ i $p_z = 0.2$, $\alpha = 20°$ i $\beta = 25°$;

   Rješenje. Postavimo osni križ tako da $\overline{O} = \overline{B}$.

   $d(\overline{O}, \overline{A}) = p_x \cdot d(O, A) = 0.4 \cdot 2.5 = 1$ cm;

   $d(\overline{O}, \overline{C}) = p_y \cdot d(O, C) = 0.8 \cdot 2.5 = 2$ cm;

   $d(\overline{O}, \overline{B_1}) = p_z \cdot d(O, B_1) = 0.2 \cdot 2.5 = 0.5$ cm.



Slika 2.9.: Kosoaksonometrijska slika kocke uz $p_x = 0.4$, $p_y = 0.8$ i $p_z = 0.2$

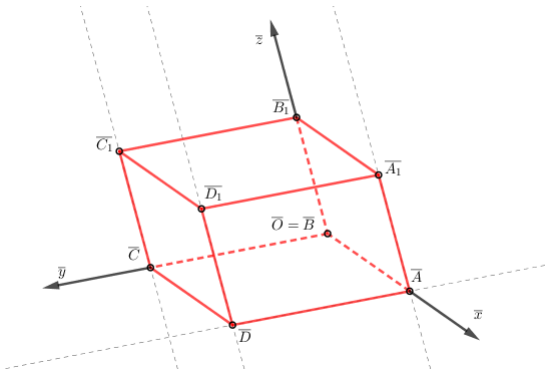
5. $p_x = 0.5$, $p_y = 0.9$ i $p_z = 0.6$, $\alpha = 35°$ i $\beta = 10°$.

   Rješenje. Postavimo osni križ tako da $\overline{O} = \overline{B}$. U ovom primjeru ćemo i os z postaviti nakoso pod proizvoljnim kutom.

   $d(\overline{O}, \overline{A}) = p_x \cdot d(O, A) = 0.5 \cdot 2.5 = 1.25$ cm;

   $d(\overline{O}, \overline{C}) = p_y \cdot d(O, C) = 0.9 \cdot 2.5 = 2.25$ cm;

   $d(\overline{O}, \overline{B_1}) = p_z \cdot d(O, B_1) = 0.6 \cdot 2.5 = 1.5$ cm.



Slika 2.10.: Kosoaksonometrijska slika kocke uz $p_x = 0.5$, $p_y = 0.9$ i $p_z = 0.6$, $\alpha = 35°$ i $\beta = 10°$

Kao što vidimo iz prethodnih primjera, najprirodniju sliku dobili smo u prvom primjeru.

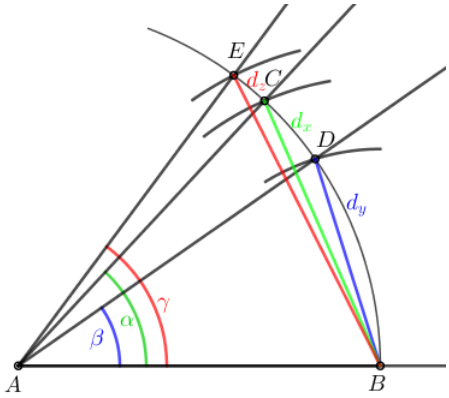
2.1.2 Kutovi proporcionalnosti

Vidjeli smo kako pomoću tlocrta i nacrta točke možemo konstruirati kosoaksonometrijsku sliku točke. Na analogan način možemo konstruirati kosoaksonometrijsku sliku tijela zadanog pomoću tlocrta i nacrta. Zamjetimo da smo pri prethodnoj konstrukciji računali duljine što se u nacrtnoj geometriji pokušava svesti na najmanju mjeru. Uvijek se više cijeni konstruktivni postupak. Osim toga, ukoliko treba preslikati nekoliko desetaka točaka, tada je jasno da računanje njihovih prikraćenih dužina nije racionalno rješenje. Međutim, postoji i jednostavniji način, pomoću tzv. **kutova proporcionalnosti**. Na sljedećem primjeru ćemo vidjeti na koji način se konstruiraju kutovi proporcionalnosti neke dužine.

Primjer 2.5. *Odredimo kutove proporcionalnosti dužine AB čija duljina iznosi d, ako je zadano $d_x = 0.8\ d$, $d_y = 0.6\ d$ i $d_z = 0.9\ d$.*

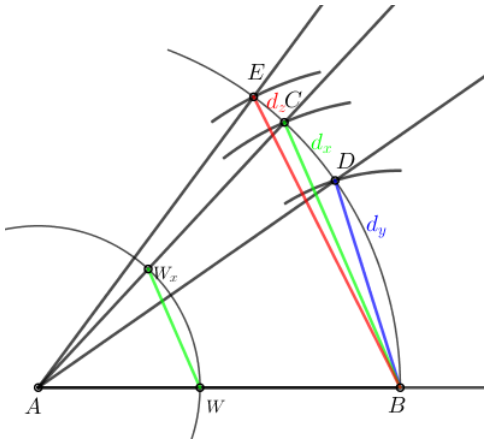
Rješenje.

1. Opišemo kružni luk sa središtem u točki A i polumjerom $|AB|$.
2. Na kružni luk nanesemo dužine duljina: $0.8|AB|$, $0.6|AB|$ i $0.9|AB|$.
3. Presjek kružnog luka i nanesenih dužina su točke: C, D i E.
4. $\angle BAC = \alpha \qquad \angle BAD = \beta \qquad \angle BAE = \gamma$
   Kutovi α, β i γ se nazivaju kutovi proporcionalnosti dužine $\overline{AB}$.



Slika 2.11.: Kutovi proporcionalnosti

Primjetimo da ako odaberemo neku drugu udaljenost d, različitu od $|AB|$ ovi kutovi zajedno s lukovima daju prikraćene dužine d_x, d_y te d_z.



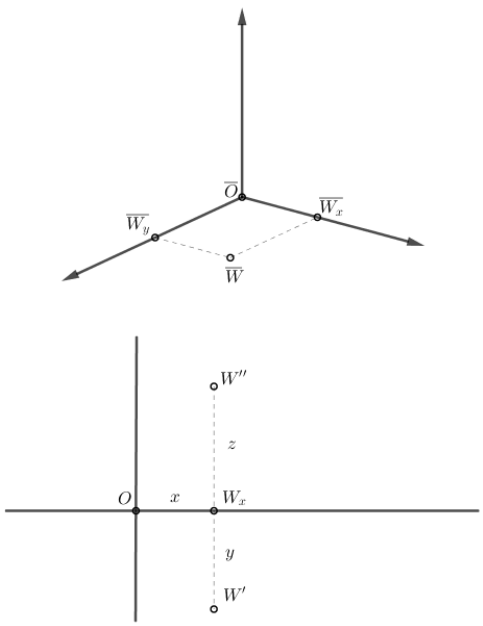
Slika 2.12.: Određivanje prikrata za proizvoljnu udaljenost

Neka je W proizvoljna točka na AB. Kružnica sa središtem u točki A kroz točku W siječe polupravac AC u točki W_x. Očito je da su trokuti AWW_x i ABC slični po K-K poučku o sličnosti trokuta. Tada vrijedi:

$$\frac{|WW_x|}{|AW|} = \frac{|BC|}{|AB|} = p_x$$

$$|WW_x| = p_x \cdot |AW|$$

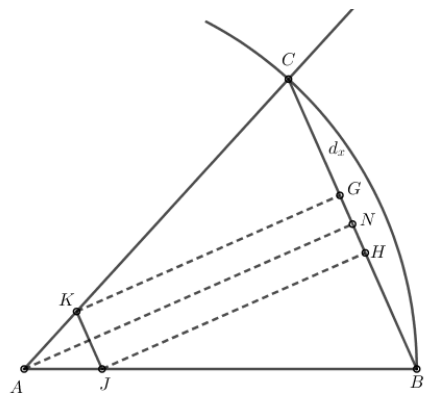
Dakle, dokazali smo da udaljenost između točka W i W_x doista jest prikrata u smjeru x-osi. Analogno bi dokazali i za prikrate u smjeru y i z osi.
Ako znamo kosoaksonometrijsku sliku točke W, kako odrediti tlocrt i nacrt točke W? Neka je $W \in xy$ ravinini. Sada smo u situaciji da poznajemo $\overline{O}\,\overline{W_x}$, tj. duljinu osnovice jednakokračnog trokuta koji se javlja kod kutova proporcionalnosti, a trebamo naći krak. Taj krak će biti x koordinata točke W.



Slika 2.13.: Prikaz točke W u kosoj aksonometriji i Mongeovoj projekciji

$$p_x = \frac{|\overline{O}\,\overline{W_x}\,|}{|OW_x|} \qquad p_y = \frac{|\overline{O}\,\overline{W_y}\,|}{|OW_y|}$$

Simetrala kuta $\angle BAC$ siječe BC u točki N. Na BC s početkom u N nanesemo duljinu $\frac{|\overline{O}\,\overline{W_x}\,|}{2}$. Na taj smo način dobili točke G i H Paralele sa AN kroz G i H sijeku krakove AC i AB u točkama K i J. Tražena apscisa $|OW_x|$ je duljina kraka AJ.

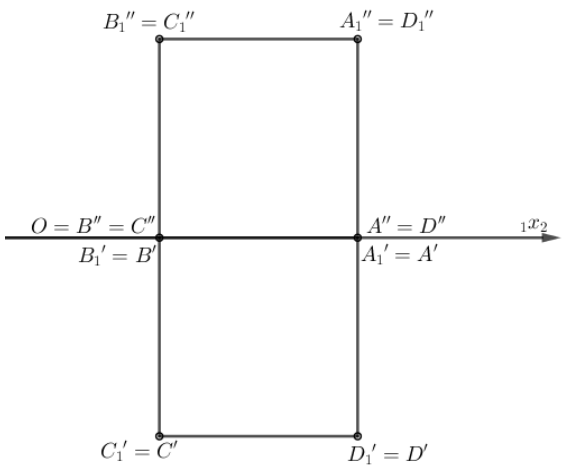


Slika 2.14.: Konstrukcija duljine apscise $|OW_x|$

2.2 Specijalna kosa aksonometrija

Kao što smo u uvodnom dijelu već naveli, osim kose aksonometrije postoji još nekoliko aksonometrijskih metoda. Naime, kosa aksonometrija je najopćenitija metoda, odnosno metoda u kojoj su sve tri osi koso smještene prema ravnini slike π. Ukoliko jednu od osiju, na primjer os z postavimo tako da bude paralelna s ravninom slike dobivamo novu metodu koju nazivamo *specijalna kosa aksonometrija.*

Primjer 2.6. *Neka je dana kocka svojim nacrtom i tlocrtom. Odredimo specijalno*

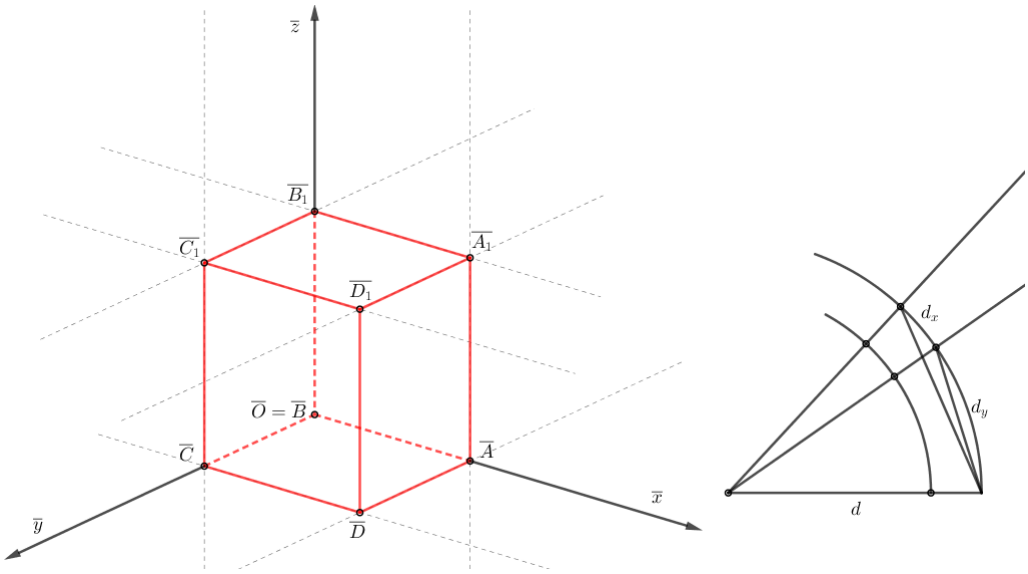


Slika 2.15.: Tlocrt i nacrt kocke

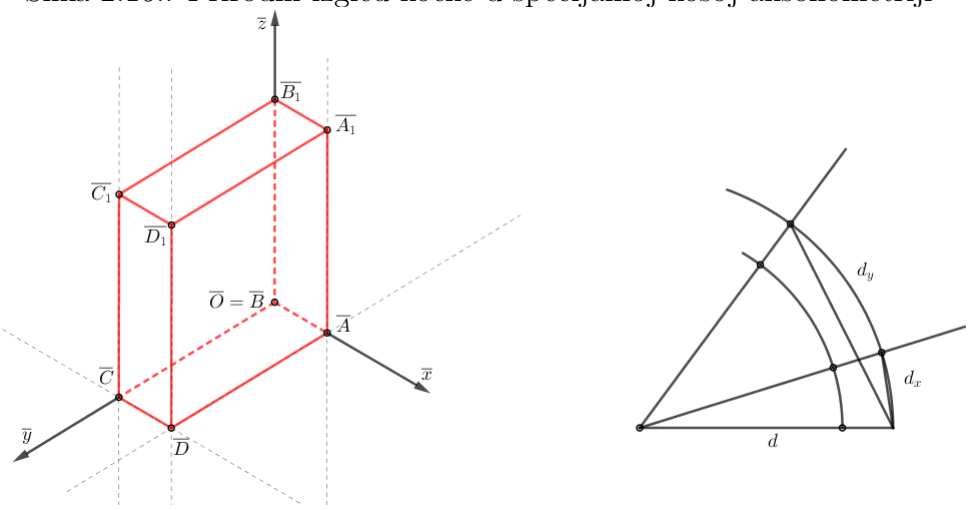
kosoaksonometrijsku sliku kocke ako je:

1. $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$, $\alpha = 15°$ *te* $\beta = 25°$
2. $p_x = 0.3$, $p_y = 0.9$, $\alpha = 30°$ *te* $\beta = 30°$.

Rješenje. Specijalno kosoaksonometrijsku sliku kocke određujemo analogno kao i kosoaksonometrijsku sliku kocke pomoću kutova proporcionalnosti.



Slika 2.16.: Prirodni izgled kocke u specijalnoj kosoj aksonometriji



Slika 2.17.: Neprirodni izgled kocke u specijalnoj kosoj aksonometriji

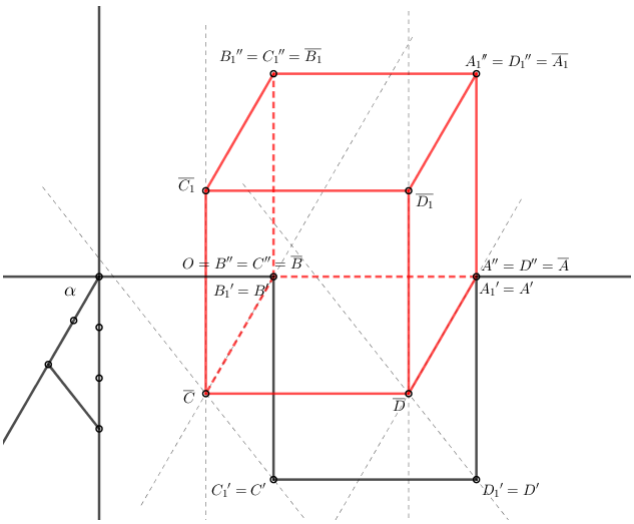
2.3 Kosa projekcija

Kosa projekcija je još jedna metoda aksonometrije koja se temelji na tome da dvije osi (najčešće osi x i z) postavimo tako da budu paralelene s ravninom slike. Pri preslikavanju svi bridovi tijela koji su usporedni sa osima x i z prikazivat će se u pravoj veličini i bit će međusobno okomiti. Os y projicirat će se koso i s osi x će zatvarati određeni kut α, a kosa projekcija neke dužine na toj osi u ovisnosti o priklonom kutu bit će manja, jednaka ili veća od prave veličine. Pri zadavanju zadataka, uz kut α zadaje se i takozvana **prikrata** n koja nam predstavlja omjer kose projekcije neke dužine i njene prave veličine, ako je na osi y.

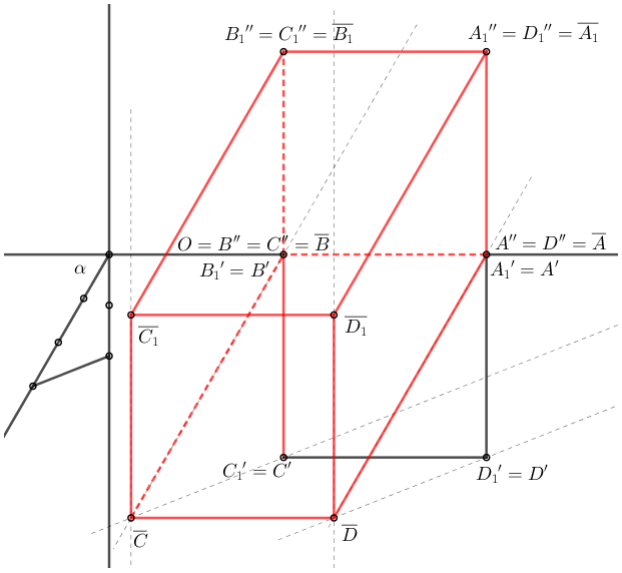
Primjer 2.7. *Odredimo kosu projekciju kocke zadane svojim tlocrtom i nacrtom (slika 2.15) ako je:*

1. $\alpha = 60°$, $n = \frac{2}{3}$;
2. $\alpha = 60°$, $n = \frac{3}{2}$.

Rješenje.



Slika 2.18.: Prirodni izgled kocke u kosoj projekciji, $n = \frac{2}{3}$



Slika 2.19.: Neprirodni izgled kocke u kosoj projekciji, $n = \frac{3}{2}$

Poglavlje 3

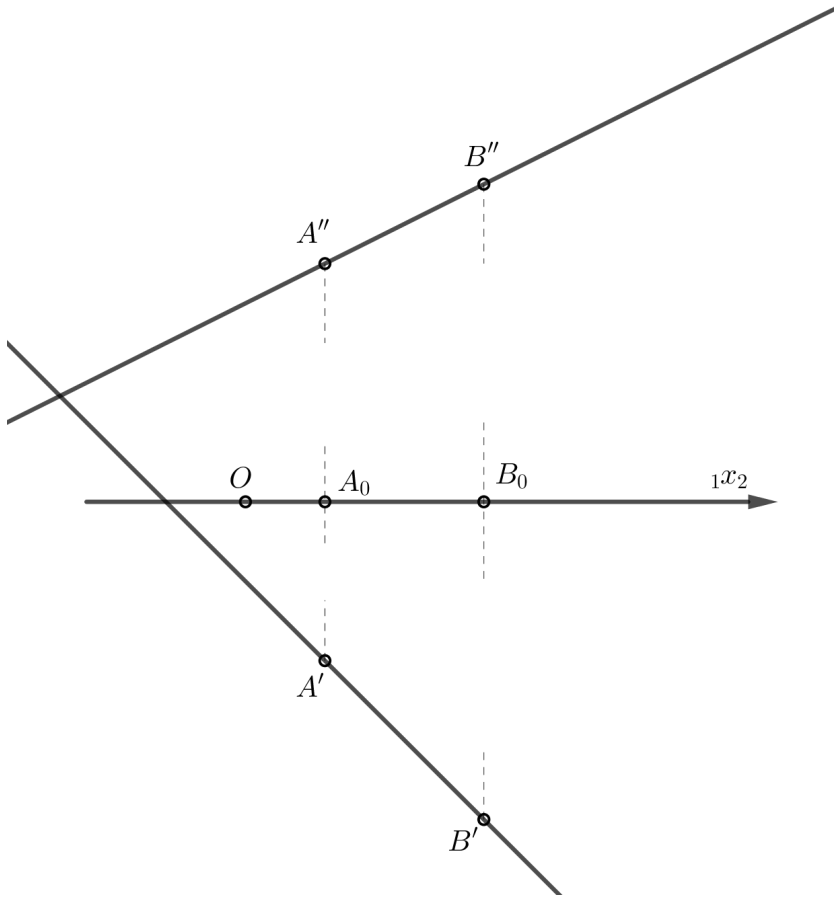
Kosa aksonometrija pravca, ravnine i tijela

Već prije u radu smo objasnili na koji način se dobiva kosoaksonometrijska slika točke, stoga nam je ostalo još promotriti kako odrediti kosoaksonometrijsku sliku pravca, ravnine i tijela. Budući da je pravac određen s dvije točke, kosoaksonometrijska slika pravca je pravac koji prolazi kosoaksonometrijskim slikama točaka koje određuju početni pravac.
Kosu ćemo aksonometriju uvijek izvoditi pomoću kutova proporcionalnosti, ali crteže tih kutova ćemo dati samo u nekoliko prvih primjera, dok ćemo ih u ostalima izostaviti.

Primjer 3.1. *Odredimo kosoaksonometrijsku sliku pravca AB ako je $A(1,2,3)$, $B(3,2,4)$ te $p_x = 0.9$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.8$, $\alpha = 15°$ i $\beta = 30°$.*

Rješenje.

1. Na temelju zadanih podataka odrediti Mongeovu projekciju pravca AB.
   Pravac $A''B''$ je nacrt pravca AB, a pravac $A'B'$ njegov tlocrt. Točke presjeka $A'A''$ i $B'B''$ sa ${}_1x_2$ označimo sa A_0 i B_0.



Slika 3.1.: Mongeova projekcija pravca AB

2. Pomoću kutova proporcionalnosti odrediti aksonometrijsku sliku točaka A i B. Neka je $d = 10$ cm. Tada je $d_x = p_x \cdot 0.9 = 9$ cm, $d_y = p_y \cdot 0.6 = 6$ cm te $d_z = p_z \cdot 0.8 = 8$ cm.

   (a) Dužinu duljine d presječemo lukom duljine $|OA_0|$ te odredimo presjek luka i polupravca koji određuje na koji način se mijenjaju koordinate na osi x.

   (b) Udaljenost presjeka od odgovarajuće točke na dužini d nanesemo iz točke $\overline{O}$ na $\overline{x}$. Točkom presjeka $\overline{x}$ i nanesene udaljenosti položimo pravac paralelan

sa $\overline{y}$.

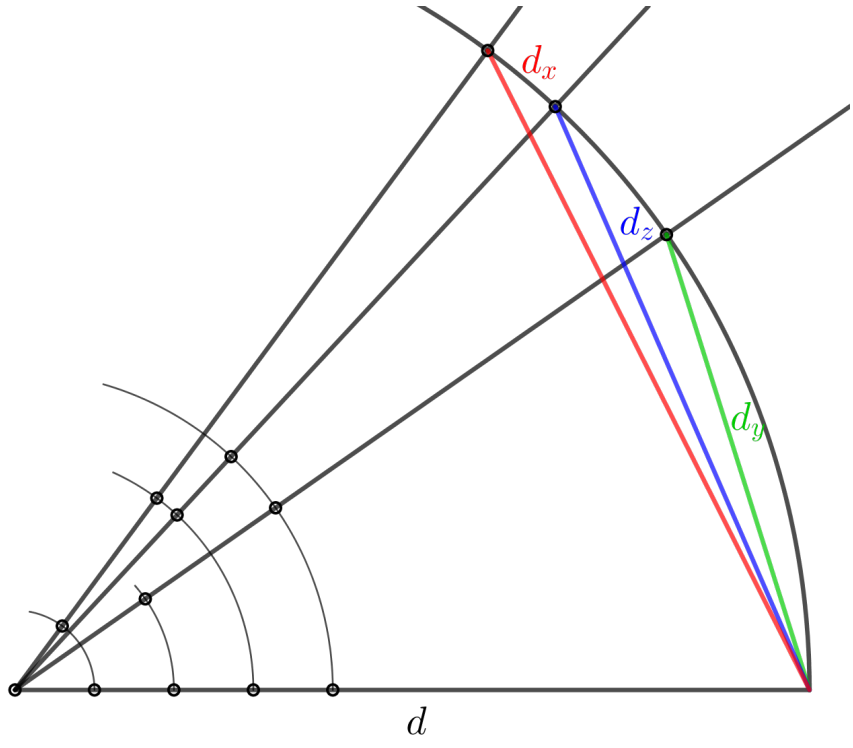
(c) Dužinu duljine d presječemo lukom duljine $|A_0A'|$ te odredimo presjek luka i polupravca koji određuje na koji način se mijenjaju koordinate na osi y.

(d) Udaljenost presjeka od odgovarajuće točke na dužini d nanesemo na prethodno dobiven pravac paralelan sa $\overline{y}$. Točkom presjeka paralelnog pravca sa $\overline{y}$ i nanesene udaljenosti položimo pravac paralelan sa $\overline{z}$.

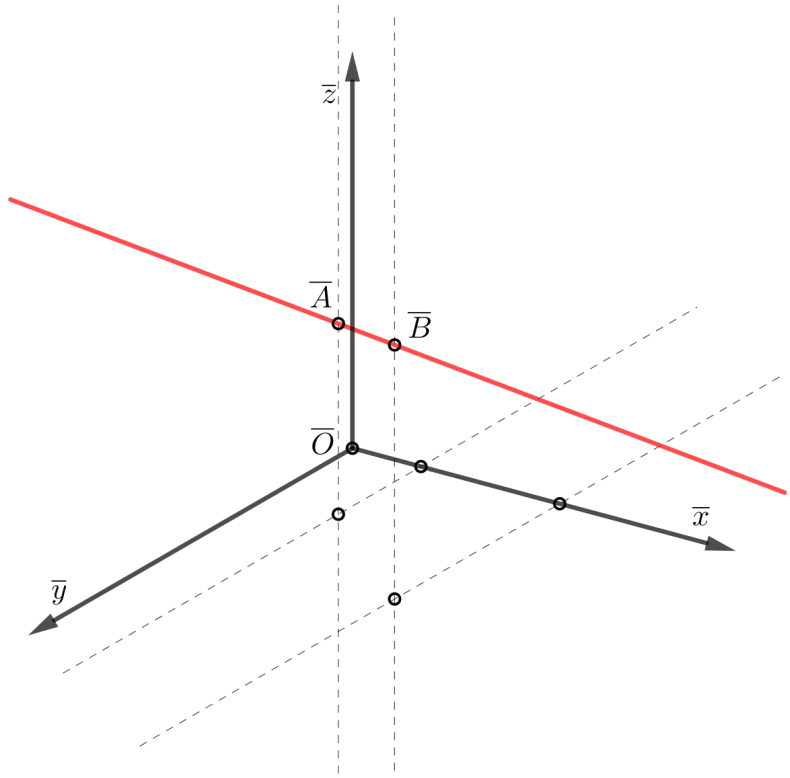
(e) Dužinu duljine d presječemo lukom duljine $|A_0A''|$ te odredimo presjek luka i polupravca koji određuje na koji način se mijenjaju koordinate na osi z.

(f) Udaljenost presjeka od odgovarajuće točke na dužini d nanesemo na prethodno dobiven pravac paralelan sa $\overline{z}$ kako bi odredili kosoaksonometrijsku sliku točke A

Analogan postupak ponovimo kako bi odredili kosoaksonometrijsku sliku točke B. Pravac $\overline{A}\,\overline{B}$ je kosoaksonometrijska slika pravca AB.



Slika 3.2.: Kutovi proporcionalnosti



Slika 3.3.: Kosoaksonometrijska slika pravca AB

Budući da je ravnina određena svojim tragovima vrlo lako možemo odrediti kosoaksonometrijsku sliku ravnine sada kada znamo kako se određuje kosoaksonometrijska slika točke i pravca.

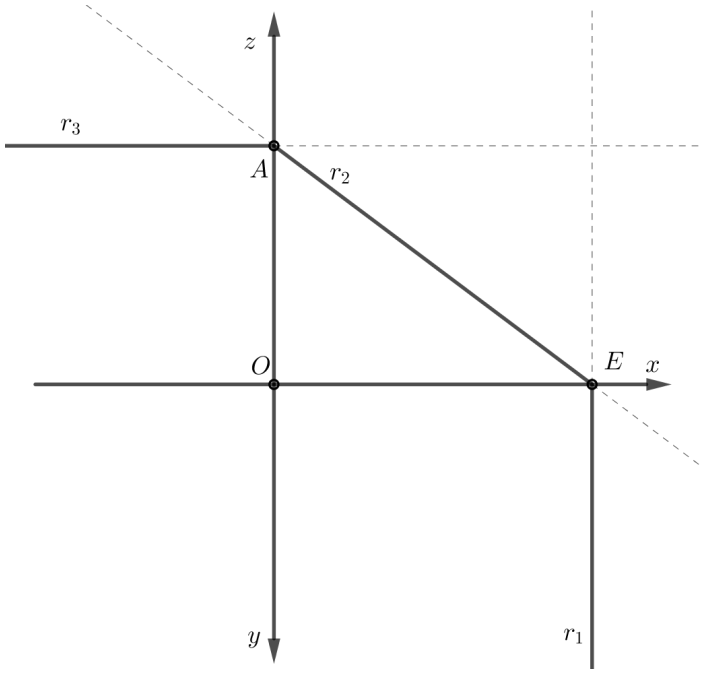
1. Odrediti kosoaksonometrijsku sliku čvora ravnine (kosoaksonometrijska slika točke).

2. Odrediti kosoaksonometrijsku sliku tragova ravnine (kosoaksonometrijska slika pravca). Kod projicirajuće ravnine jedan trag će biti paralelan sa osi (ovisi o vrsti projicirajuće ravnine).

Primjer 3.2. *Odredimo kosoakosometrijsku sliku ravnine* $\rho(4, \infty, 3)$ *ako je* $p_x = 0.7$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.9$ *te* $\alpha = 15°$ *i* $\beta = 30°$.

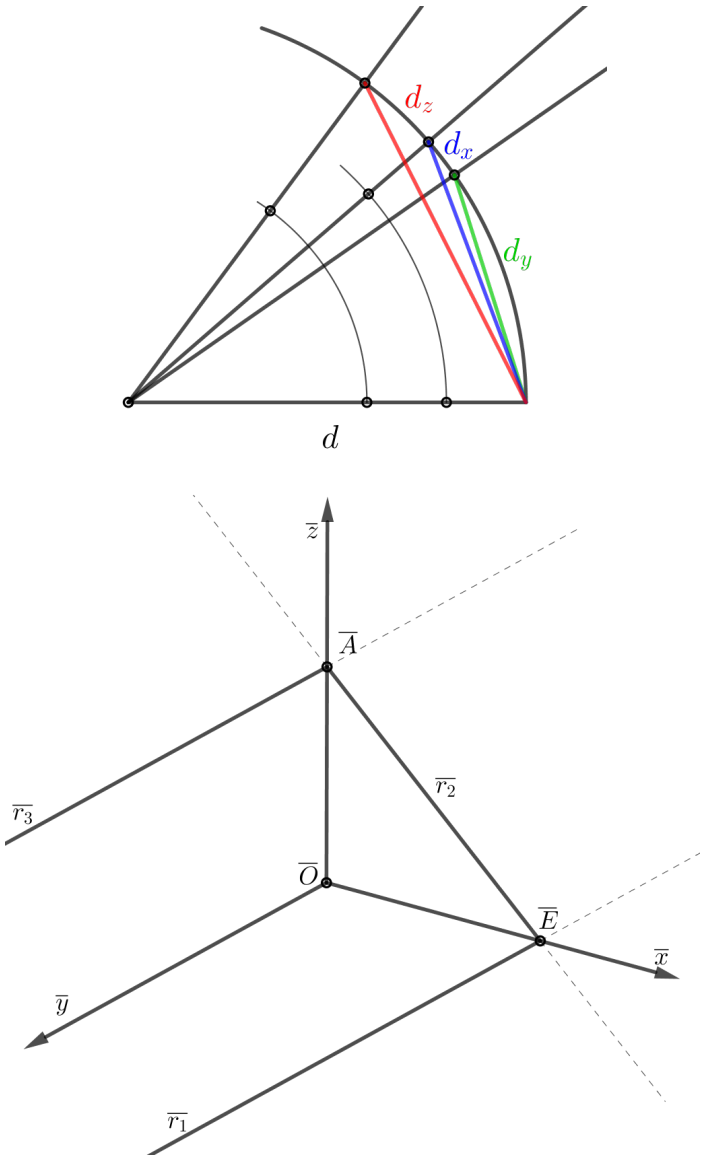
Rješenje.

1. Iz zadanih podataka odrediti Mongeovu projekciju ravnine ρ. Označimo s E čvor ravnine te s A presjek drugog traga i z osi.



Slika 3.4.: Tragovi ravnine ρ

2. Odrediti kosoaksonometrijsku sliku točaka E i A.
   Pravac $\overline{E}\,\overline{A}$ je kosoaksonometrijska slika drugog traga ravnine ρ. Pravac kroz $\overline{E}$ paralelan sa $\overline{y}$ je kosoaksonometrijska slika prvog traga ravnine ρ, a pravac kroz $\overline{A}$ paralelan sa $\overline{y}$ je kosoaksonometrijska slika trećeg traga ravnine ρ.



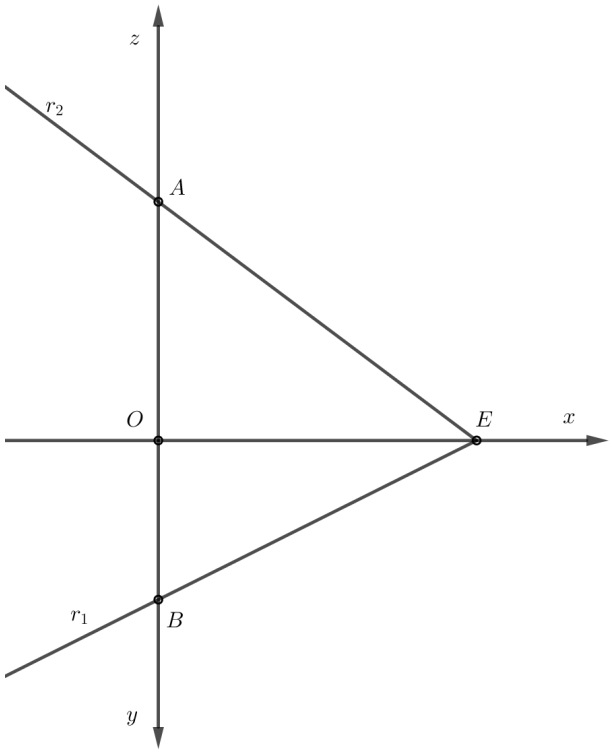
Slika 3.5.: Kosoaksonometrijska slika projicirajuće ravnine ρ

U primjeru 3.2. smo vidjeli kako bi odredili kosoaksonometrijsku sliku tragova drugopojicirajuće ravnine. Postupak određivanja kosoaksonometrijske slike prvoprojicirajuće, ili pak trećeprojicirajuće ravnine je analogan.

Primjer 3.3. *Odredimo kosoakosometrijsku sliku ravnine* $\rho(4, 2, 3)$ *ako je* $p_x = 0.7$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.9$ *te* $\alpha = 15°$ *i* $\beta = 30°$.

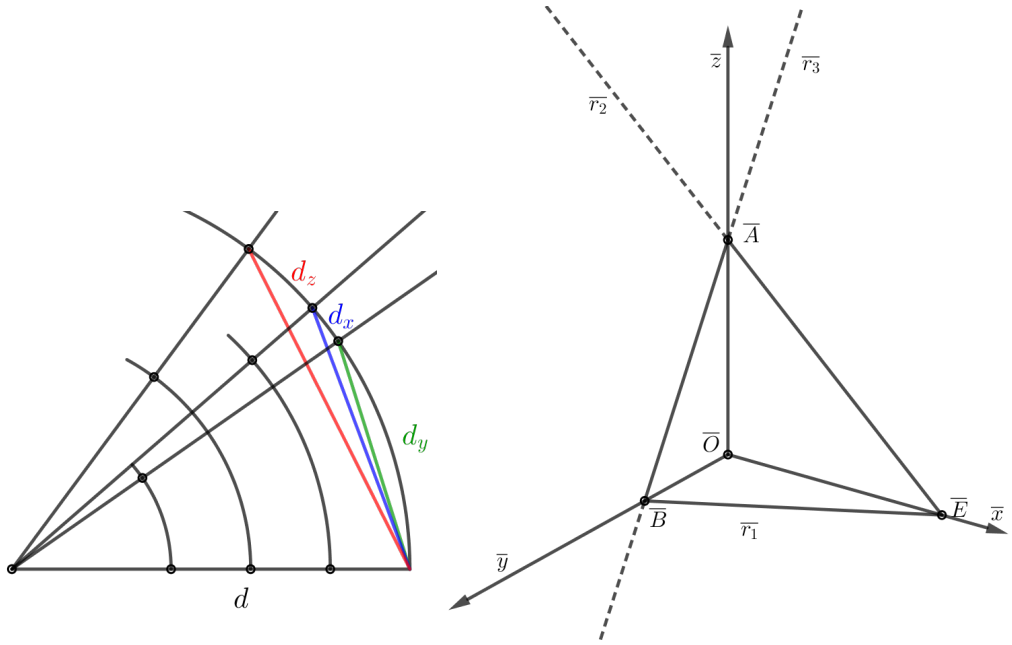
Rješenje.

1. Iz zadanih podataka odrediti Mongeovu projekciju ravnine ρ. Označimo s E čvor ravnine, A presjek drugog traga i z osi te s B presjek prvog traga i y osi.



Slika 3.6.: Tragovi ravnine ρ

2. Odrediti kosoaksonometrijsku sliku točaka E, A i B.
   Pravac $\overline{E}\,\overline{A}$ je kosoaksonometrijska slika drugog traga ravnine ρ.
   Pravac $\overline{E}\,\overline{B}$ je kosoaksonometrijska slika prvog traga ravnine ρ.
   Pravac $\overline{A}\,\overline{B}$ je kosoaksonometrijska slika trećeg traga ravnine ρ.



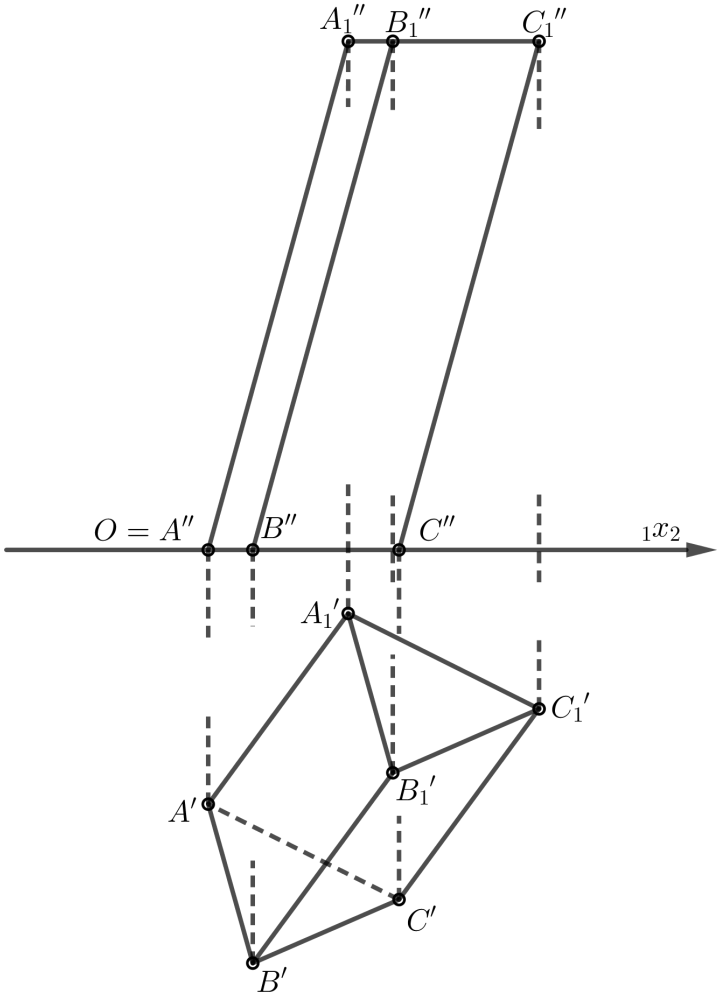
Slika 3.7.: Kosoaksonometrijska slika opće ravnine ρ

Sada kada znamo na koji način se određuju kosoaksonometrijske slike točaka, pravaca i ravnina vrlo lako možemo odrediti kosoaksonometrijsku sliku tijela.

Primjer 3.4. *Dana je prizma* $ABCA_1B_1C_1$, $A(0,4,0)$, $B(0.7,6.5,0)$, $C(3,5.5,0)$, $A_1(2.2,1,8)$. *Konstruirajmo kosoaksonometrijsku sliku prizme ako je* $p_x = 0.9$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.8$ *te* $\beta = 30°$, $\alpha = 15°$.

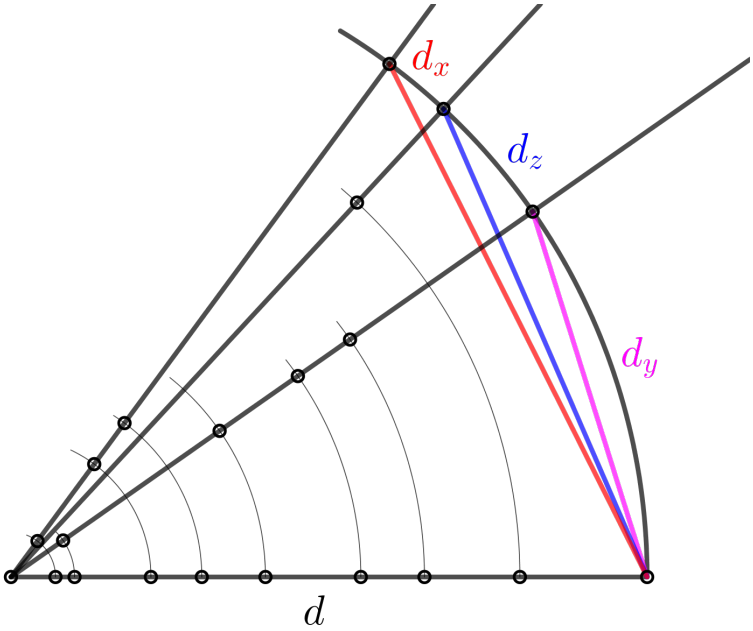
Rješenje.

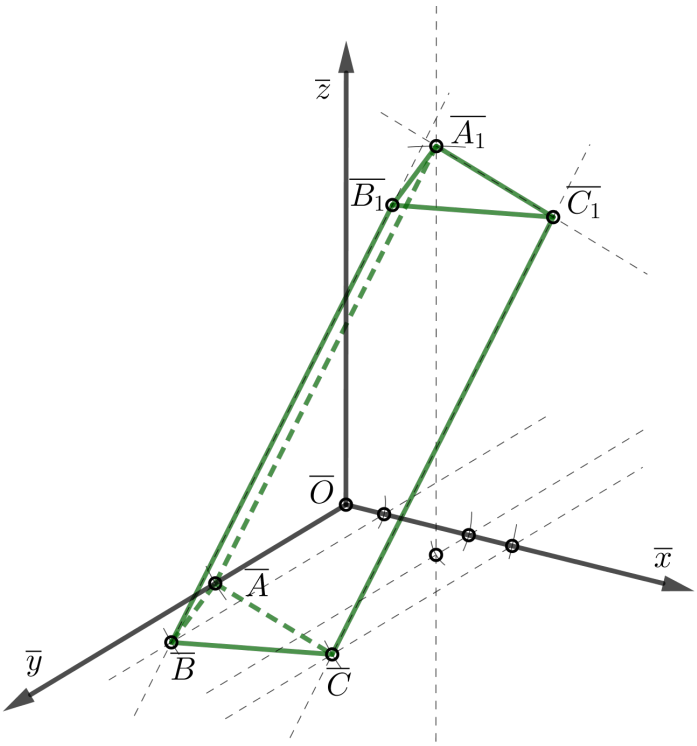
1. Pomoću zadanih podataka odredimo Mongeovu projekciju prizme.



Slika 3.8.: Mongeova projekcija prizme (mjerilo 4 : 5)

2. Kosoaksonometrijska slika prizme dobivena uz pomoć kutova proporcionalnosti. Neka je $d = 10$ cm. Tada je: $d_x = p_x \cdot d = 9$ cm, $d_y = p_y \cdot d = 6$ cm te $d_z = p_z \cdot d = 8$ cm. Kako bi odredili kosoaksonometrijsku sliku točaka koje određuju prizmu koristimo se pomoćnom slikom (gore na slici 3.8) na kojoj određujemo na koji način se mijenjaju veličine za određenu točku.





Slika 3.9.: Kosoaksonometrijska slika prizme (mjerilo 4 : 5)

(a) Budući da se točka A'' nalazi u ishodištu koordinatnog sustava tada se točka $\overline{A}$ nalazi na osi $\overline{y}$.

(b) Dužinu duljine d presječemo lukom duljine udaljenosti točke A' od ${}_1X :_2$ te odredimo presjek luka i polupravca koji određuje na koji način se mijenjaju koordinate na osi y.

(c) Udaljenost presjeka od odgovarajuće točke na dužini d nanesemo iz točke $\overline{O}$ na $\overline{y}$.Time smo dobili točku $\overline{A}$

(d) Dužinu duljine d presječemo lukom duljine udaljenosti točke B'' od O te odredimo presjek luka i polupravca koji određuje na koji način se mijenjaju koordinate na osi x.

(e) Udaljenost presjeka od odgovarajuće točke na dužini d nanesemo iz točke $\overline{O}$ na $\overline{x}$.
Točkom presjeka $\overline{x}$ i nanesene udaljenosti položimo pravac paralelan sa $\overline{y}$. Na analogan način odredimo odgovarajuću veličinu koja predstavlja promjenu za y vrijednost i nanesemo ju na paralelu. Time smo dobili točku $\overline{B}$

(f) Analogno kao u (c), (d) i (e) odredimo $\overline{C}$ i kosoaksonometrijsku sliku tlocrta točke A_1.

(g) Dobivenom kosoaksonometrijskom slikom tlocrta točke A_1 položimo paralelu sa $\overline{z}$ te na nju nanesemo odgovarajuću udaljenost koja predstavlja promjenu za z vrijednost. Time smo dobili točku $\overline{A_1}$

(h) Presjek paralele kroz točku $\overline{C}$ s $\overline{AA_1}$ i pralele s $\overline{AC}$ kroz $\overline{A_1}$ je točka $\overline{C_1}$.

(i) Presjek paralele kroz točku $\overline{B}$ s $\overline{AA_1}$ i pralele s $\overline{BC}$ kroz $\overline{C_1}$ je točka $\overline{B_1}$.

Napravit ćemo i jedan primjer s kosom projekcijom prizme, a u nastavku teksta ćemo isključivo slike raditi u kosoj aksonometriji.

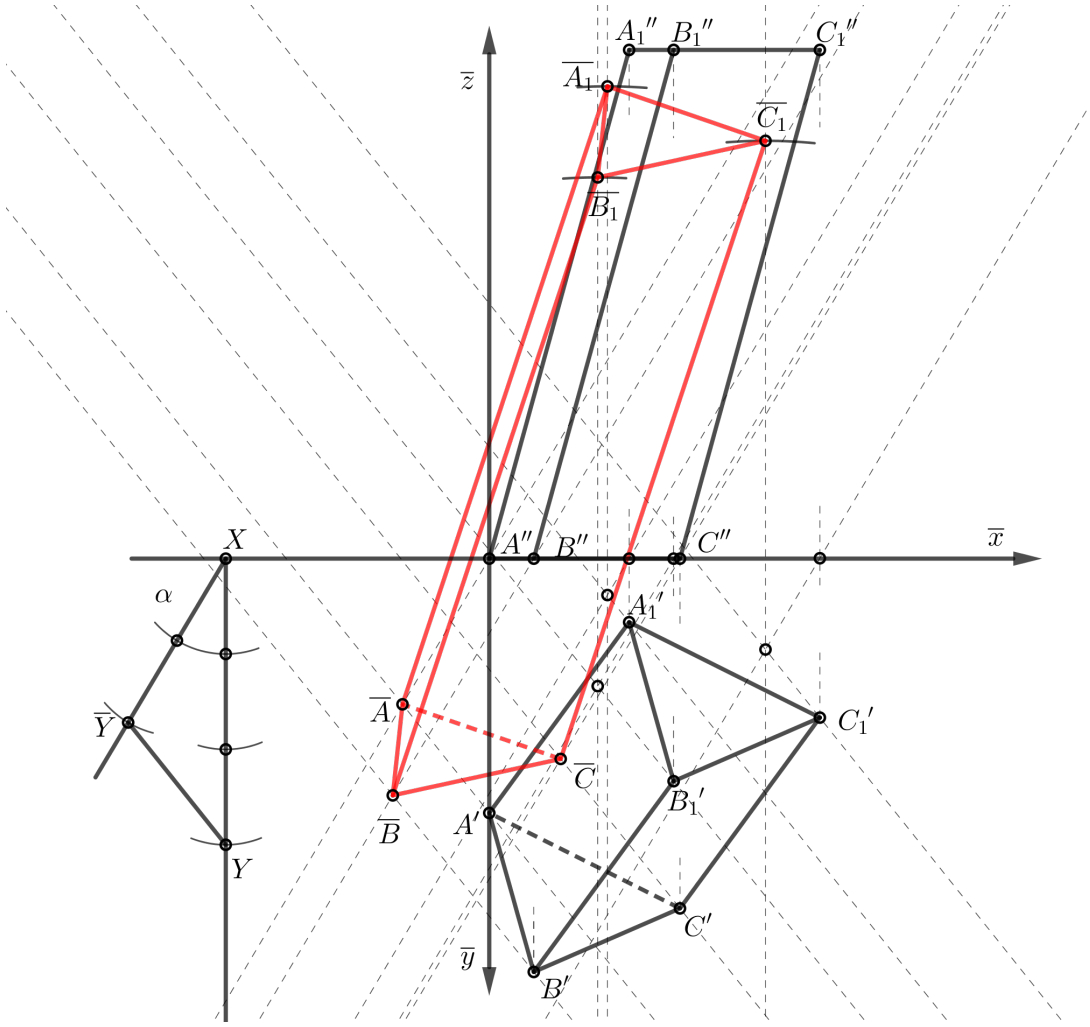
Primjer 3.5. *Dana je prizma* $ABCA_1B_1C_1$, $A(0,4,0)$, $B(0.7,6.5,0)$, $C(3,5.5,0)$, $A_1(2.2,1,8)$. *Konstruirajmo kosu projekciju slike ako je* $\alpha = 60°$ *i* $n = \frac{2}{3}$.

Rješenje.

1. Konstruiramo trokut prikrate te na x osi odredimo presjeke dužina određenih nacrtima i tlocrtima točaka.

2. Kroz točku A' položimo paralelu sa $Y\overline{Y}$ te kroz odgovarajući presjek na osi x paralelu sa $X\overline{Y}$. Presjek paralela je točka $\overline{A}$.

3. Analogno kao točku $\overline{A}$ odredimo $\overline{B}$, $\overline{C}$ te kosu projekciju tlocrta točke A_1.
4. Kosom projekcijom tlocrta točke A_1 položimo paralelu sa $\overline{z}$ te na nju nanesemo visinu nacrta točke A_1. Time smo dobili točku $\overline{A_1}$.
5. Kosom projekcijom tlocrta točke B_1 položimo paralelu sa $\overline{z}$ te na nju nanesemo visinu nacrta točke B_1. Time smo dobili točku $\overline{B_1}$.
6. Kosom projekcijom tlocrta točke C_1 položimo paralelu sa $\overline{z}$ te na nju nanesemo visinu nacrta točke C_1. Time smo dobili točku $\overline{C_1}$.



Slika 3.10.: Kosa projekcija prizme (mjerilo 4 : 5)

Prethodni primjeri nam pokazuju dva prikaza istog tijela pomoću aksonometrije. Iako na prvi pogled izgleda da se u obje konstrukcije služimo sličnim metodama vidimo da se na kraju prikaz tijela ipak razlikuje. U sljedećim primjerima uz konstruiranje aksonometrijske slike predmeta konstruirat ćemo i presjek zadane ravnine i tijela. Pri konstruiranju kosoaksonometrijskih slika točaka koje određuju tijelo ili presjek tijela i ravnine koristit ćemo se kutovima proporcionalnosti.
Osim dobrog poznavanja postupka određivanja kosoaksonometrijske slike tijela pri rješavanju zadataka bit će nam potrebno i poznavanje postupka određivanja probodišta pravca i ravnine te određivanja presjeka dviju ravnina. Kroz sljedeća dva primjera ću prvo objasniti na koji način određujemo probodišta (točke presjeka) u Mongeovoj projekciji, a zatim to isto napraviti u kosoj aksonometriji.
Pogledajmo kako bi odredili presjek pravca i opće ravnine:

Primjer 3.6. *Odredimo kosoaksonometrijsku sliku točke koja je presjek pravca* $p = AB$, $A(-1.5, 2, 3.5)$, $B(0, 1, 1.5)$ *i ravnine* $\rho(-2.5, 1.5, 2)$, *ako je:* $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.9$ *te* $\alpha = 20°$ *i* $\beta = 30°$

Rješenje.

1. Iz zadanih podataka odrediti Mongeovu projekciju pravca i ravnine.

2. Kako bi odredili presjek pravca p i ravnine ρ uvodimo prvo(drugo) projicirajuću ravninu σ koja sadrži pravac p. Uzmimo da je σ drugoprojicirajuća ravnina. To nam povlači da se svi nacrti nalaze na drugom tragu ravnine, odnosno da je nacrt pravca p drugi trag ravnine σ

3. U svrhu određivanja točke presjeka ravnine ρ i pravca p trebamo odrediti presjek ravnine ρ i ravnine σ. Označimo sa q presjek ravnina ρ i σ.

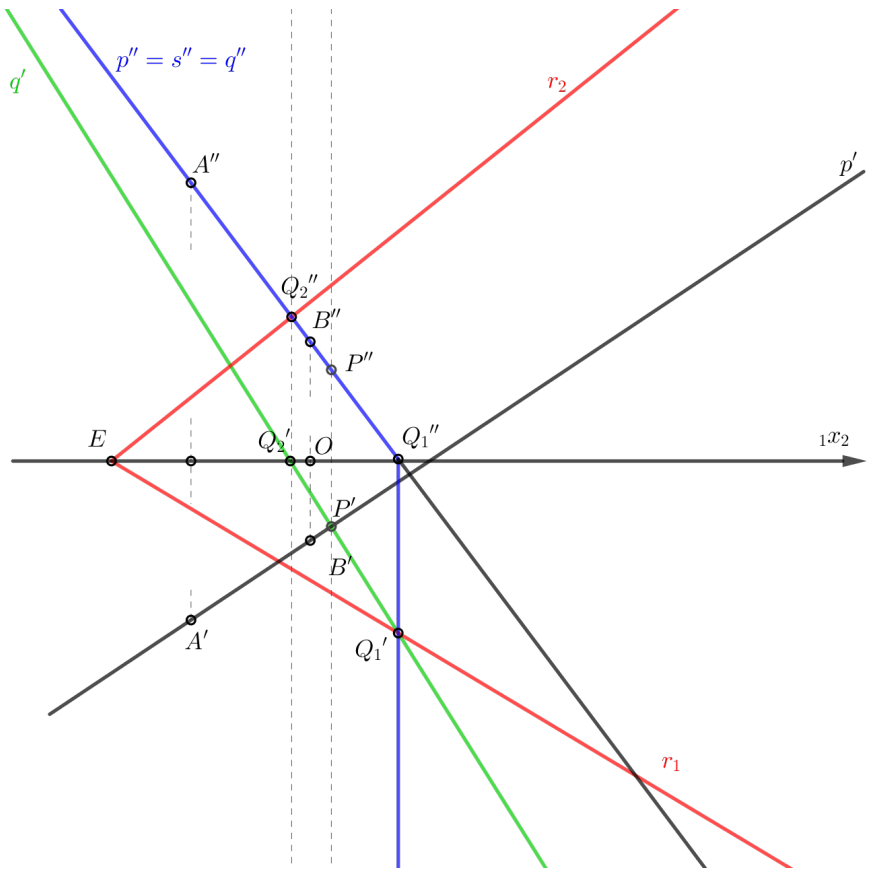
   (a) $r_1 \cap s_1 = \{Q_1'\}$ te iz te točke povučemo ordinalu do osi x kako bi dobili točku Q_1''.

   (b) $r_2 \cap s_2 = \{Q_2''\}$ te iz te točke povučemo ordinalu do osi x kako bi dobili točku Q_2'.

   (c) Pravac $Q_1'Q_2'$ je tlocrt pravca q, a pravac $Q_1''Q_2''$ njegov nacrt.

   Općenito, kada određujemo presjek dviju ravnina (projicirajućih ili ne) postupak se uvijek svodi na gore navedena tri koraka.

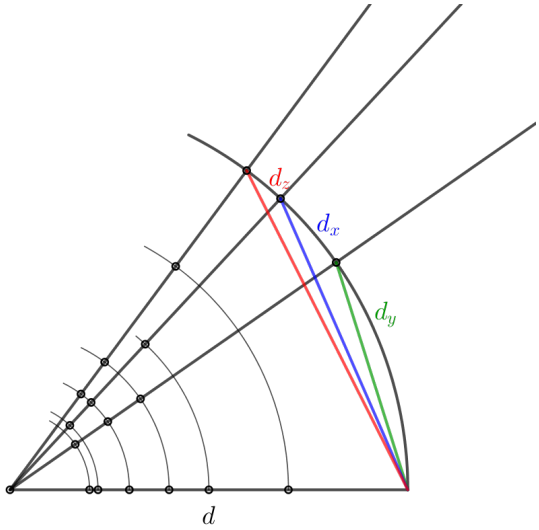
4. Sada nam se traženje presjeka pravca i ravnine svelo na traženje presjeka dvaju pravaca, p i q.
   $p' \cap q' = \{P'\}$ te iz te točke povučemo ordinalu do nacrta pravca p ($p'' = q'' = s_2$) kako bi odredili nacrt točke presjeka, odnosno točku P''.
   Dakle, točka P' je tlocrt presjeka ravnine ρ i pravca p, a točka P'' njegov nacrt.

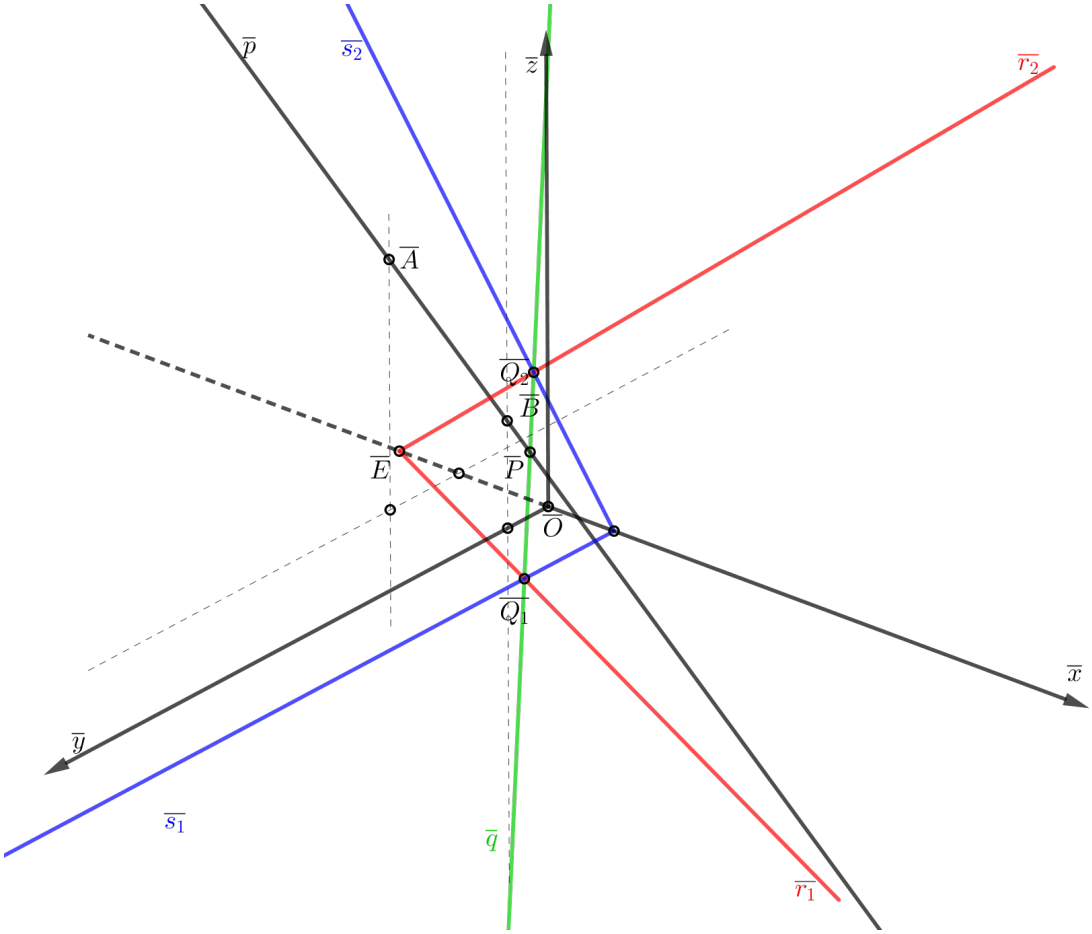


Slika 3.11.: Mongeova projekcija presjeka pravca p i ravnine ρ

5. Pomoću kutova proporcionalnosti odredimo na koji način se mijenjaju veličine na osima. Neka je $d = 5$ cm. Tada je: $d_x = 4$ cm, $d_y = 3$ cm te $d_z = 4.5$ cm.

6. Kao u primjeru 3.1. odredimo kosoaksonometrijsku sliku pravca p te kao u primjeru 3.2. sliku ravnina ρ i σ. Sjecišta tragova ravnina ρ i σ određuju pravac $\overline{q}$, a presjek pravaca $\overline{p}$ i $\overline{q}$ je tražena točka $\overline{P}$ (presjek ravnine ρ i pravca p).





Slika 3.12.: Presjek pravca p i ravnine ρ u kosoj aksonometriji

Poglavlje 4

Projekcije i presjeci tijela

U ovom poglavlju naglasak će biti na prikazu projekcije tijela pomoću aksonometrije, a zatim na presjeku tijela i ravnine. U svim primjerima prolazit ću kroz tri temeljne konstrukcije:

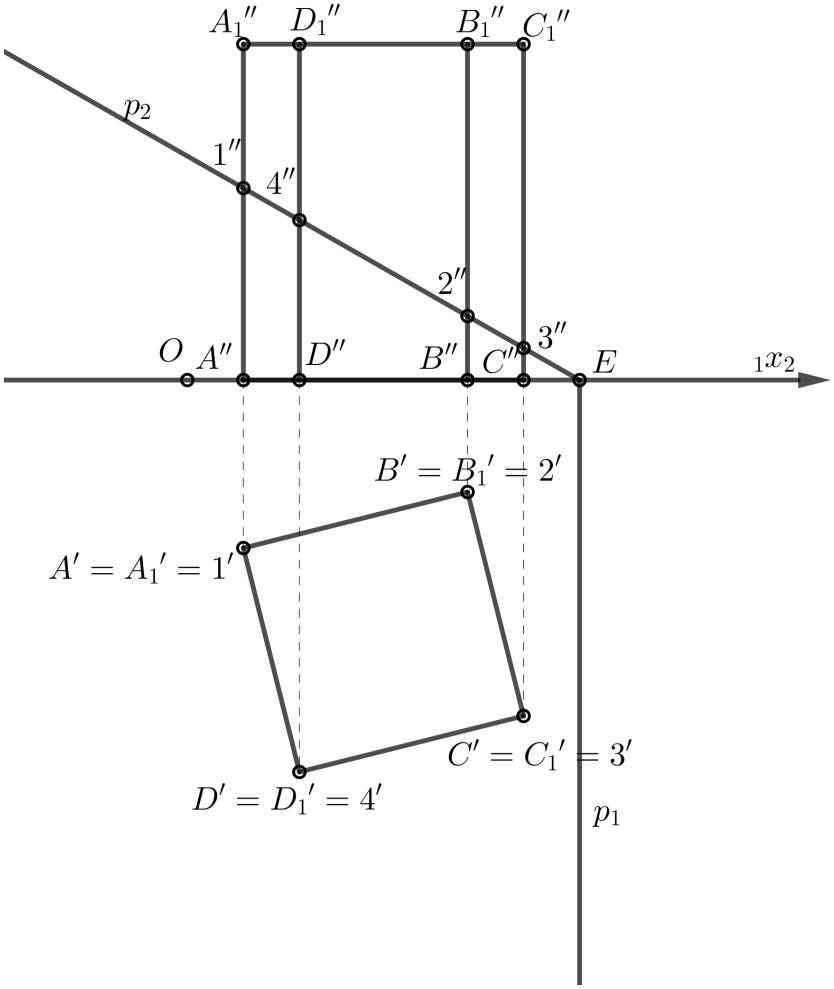
1. Na temelju zadanih podataka odrediti Mongeovu projekciju tijela.
2. Odrediti Mongeovu projekciju točaka presjeka ravnine i tijela.
3. Odrediti aksonometrijsku sliku predmeta (aksonometrijska slika točaka s kojima je tijelo određeno).
4. Odrediti aksonometrijsku sliku točaka presjeka tragova ravnine i tlocrta (nacrta) tijela.

Prvo ćemo određivati presjek tijela i projicirajuće ravnina, a zatim na dva načina (metodom stranocrta i kolineacije) određivati presjek tijela i opće ravnine.

Primjer 4.1. *Neka je kvadrat $ABCD$, $A = (1, 3, 0)$ i $B = (5, 2, 0)$ osnovka uspravne prizme visine $v = 6$. Odredimo kosoaksonometrijsku sliku uspravne prizme i presjek prizme i ravnine $\pi(7, \infty, 4)$ ako je: $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, $p_x = 0.8$, $p_y = 0.7$ i $p_z = 0.9$.*

Rješenje.

1. Iz zadanih podataka konstruiramo Mongeovu projekciju uspravne prizme. Budući da je π projicirajuća ravnina, nacrti svih njegovih točaka nalaze se na drugom tragu p_2. Dakle, i nacrti točaka koje su u presjeku ravnine π i tijela nalaze se na drugom tragu. Drugi trag p_2 siječe nacrt bočnih bridova prizme u točkama $1''$, $2''$, $3''$ i $4''$ i to su nacrti vrhova presječnog poligona. Budući da je $1 \in AA_1$ slijedi da je $1' \in A'A'_1$, tj. $1' = A' = A'_1$. Analogno vrijedi za ostale točke.



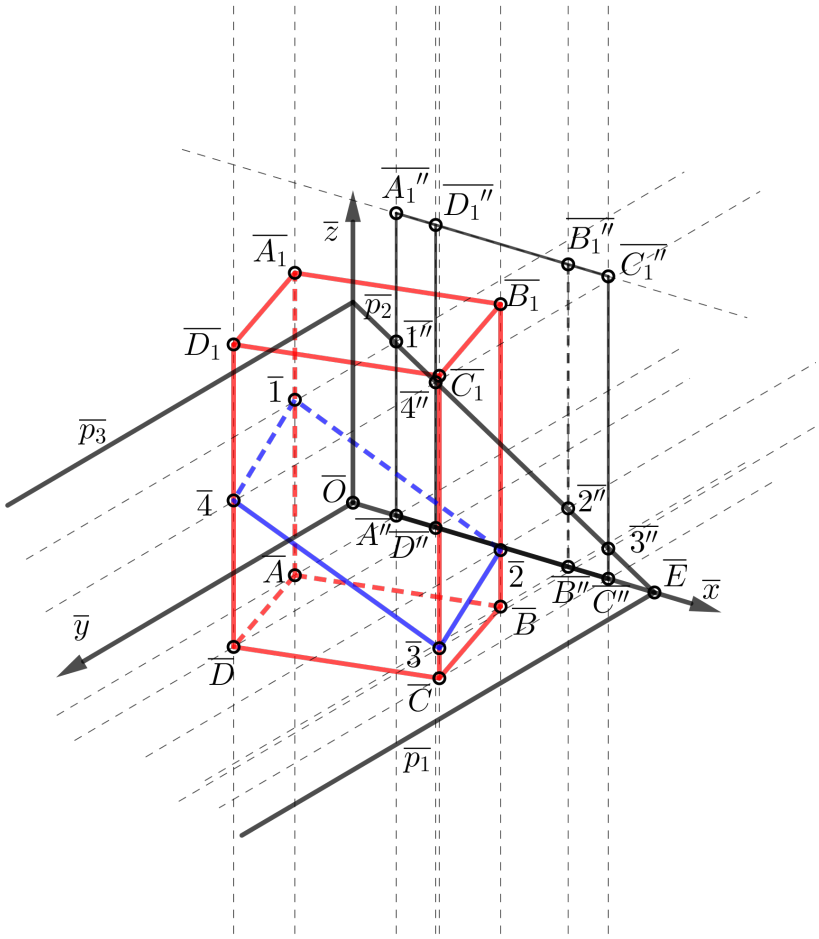
Slika 4.1.: Mongeova projekcija uspravne prizme (mjerilo 7 : 10)

2. S obzirom na zadane kutove α i β postaviti osni križ.

3. Uz pomoć kutova proporcionalnosti analogno kao u primjeru 3.4. dobivamo projekcije vrhova uspravne prizme.

4. Konstrukcija presjeka uspravne prizme i ravnine π.
   Analogno kao u primjeru 3.3. konstruiramo tragove ravnine π te odredimo

presjek drugog traga $\overline{p_2}$ i nacrta uspravne prizme. Time smo dobili točke $\overline{1''}$, $\overline{2''}$, $\overline{3''}$, $\overline{4''}$.
Iz svake točke presjeka povučemo paralele sa $\overline{y}$.
Presjek paralela i odgovarajućih stranica su točke $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, odnosno točke u kojima zadana ravnina siječe bočne bridove uspravne prizme. Presjek je četverokut $\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}\,\overline{4}$.



Slika 4.2.: Presjek uspravne prizme i ravnine π (mjerilo 7 : 10)

Primjer 4.2. *Neka je dana četverostrana kosa prizma $ABCDEFGH$ kojoj baza leži u π_2, $A(1.5, 0, 2.5)$, $B(3.5, 0, 1)$, $C(5.5, 0, 2)$, $D(3, 0, 3.5)$, $E(4, 5.5, 6)$. Odredimo kosoaksonometrijsku sliku presjeka kose prizme i ravnine $\sigma(9, 6, 8)$, ako je: $p_x = 0.7$, $p_y = 0.5$, $p_z = 0.9$ te $\alpha = 15°$ i $\beta = 25°$.*

Rješenje. Kao što smo već napomenuli presjek opće ravnine i tijela možemo odrediti na dva načina: metodom kolineacije i metodom stranocrta. U ovom primjeru ćemo se koristiti metodom kolineacije.

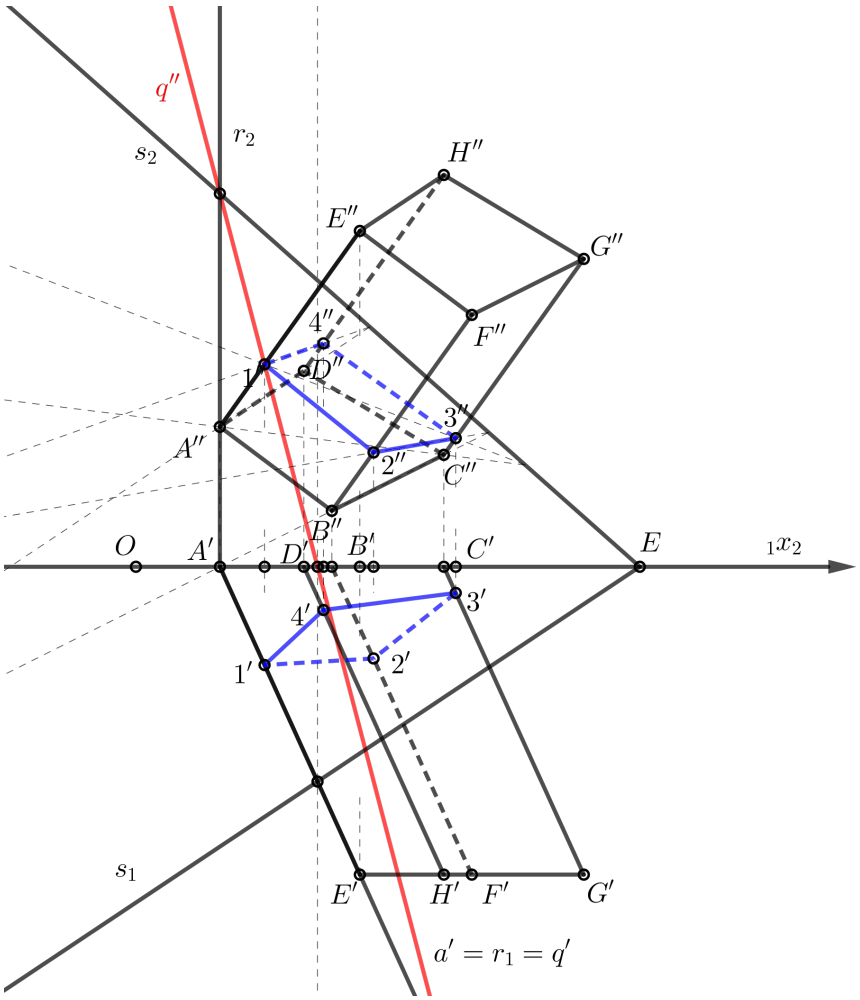
1. Iz zadanih podataka odredimo Mongeovu projekciju kose prizme, a zatim metodom kolineacije odredimo točke presjeka prizme i ravnine σ.
   Točke u kojima ravnina σ siječe bočne bridove AE, BF, CG, DH označimo redom s 1, 2, 3 i 4.

   (a) Trebamo odrediti jedan od nacrta točaka presjeka. Na primjer odredimo točku $1''$ koja je nacrt točke 1 u kojoj ravnina σ siječe brid AE.

   (b) Znamo da je $1''$ točka presjeka pravca $A''E''$ i ravnine σ. Analogno kao u primjeru 3.5. odredimo gdje se na $A''E''$ nalazi točka $1''$. U tu svrhu postavimo projicirajuću ravninu ρ tako da joj se prvi trag r_1 podudara s tlocrtom pravca AE na kojem leži brid AE. Presjek ravnina ρ i σ je pravac q, a presjek pravca q i AE je točka 1.

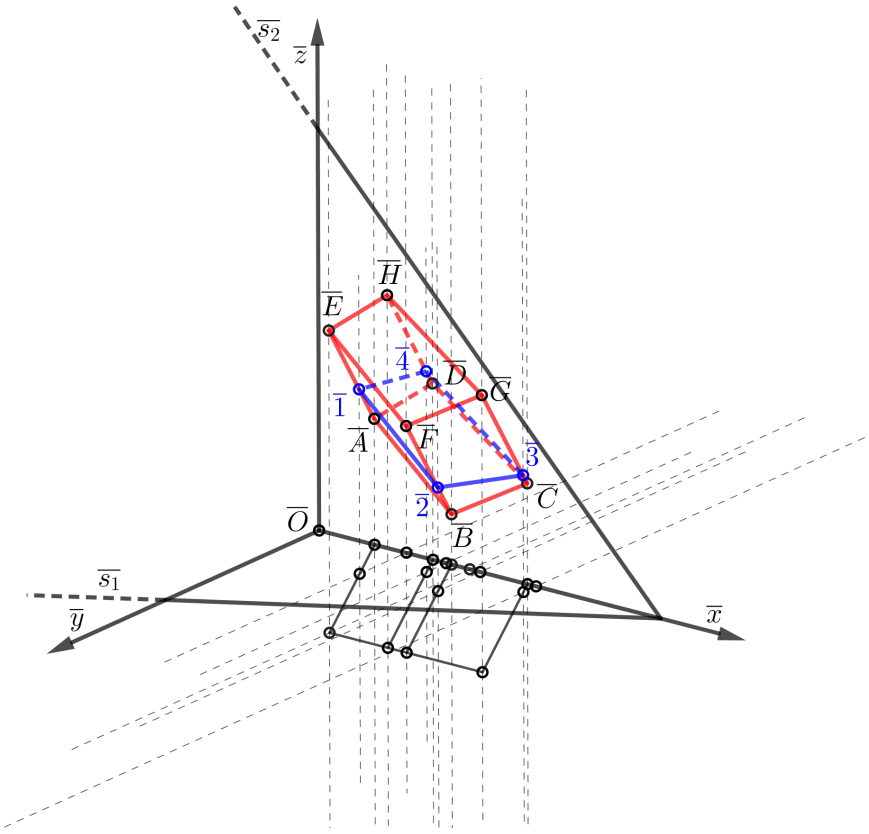
   (c) Sada definiramo afinost, odnosno kolineaciju s beskonačno dalekim središtem, čija je os s_2, a zrake bočni bridovi prizme. Pomoću definirane afinosti dolazimo do točaka $2''$, $3''$ i $4''$. Dakle, $A''B''C''D''$ je perspektivno afin sa $1''2''3''4''$.

   (d) Spustimo ordinale do odgovarajući bridova u tlocrtu kako bi dobili točke $1'$, $2'$, $3'$ i $4'$.



Slika 4.3.: Mongeova projekcija presjeka kose prizme i ravnine σ (mjerilo 7 : 10)

2. Neka je $d = 10$ cm. Tada vrijedi: $d_x = 7$ cm, $d_y = 5$ cm te $d_z = 9$ cm. Pomoću tih podataka konstruiramo kutove proporcionalnosti. Odredimo kosoaksonometrijsku sliku prizme pomoću kutova proporcionalnosti, a zatim, budući da smo u Mongeovoj projekciji odredili točke presjeka ravnine i prizme vrlo lako odredimo i kosoaksonometrijske slike točaka presjeka.



Slika 4.4.: Presjek kose prizme i ravnine σ (mjerilo 7 : 10)

U sljedećem primjeru prikazat ćemo na koji način određujemo presjek prizme i opće ravnine metodom stranocrta.

Primjer 4.3. *Neka je dana trostrana prizma $ABCDEF$ kojoj baza leži u π_1, $A(1.5, 5, 0)$, $B(3.5, 6, 0)$, $C(5.5, 4, 0)$, $D(3.5, 2.5, 5)$. Odredimo kosoaksonometrijsku sliku presjeka prizme i ravnine $\rho(-3, 4, 1)$, ako je: $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.9$ te $\alpha = 15°$ i $\beta = 25°$.*

Rješenje.

1. Iz zadanih podataka odredimo Mongeovu projekciju trostrane prizme, a zatim metodom stranocrta odredimo presjek prizme i ravnine ρ. Točke u kojima ravnina ρ siječe bočne bridove AD, BE, CF označimo redom s 1, 2, 3.

(a) Postavimo ${}_1x_3$ tako da bude okomit na r_1.

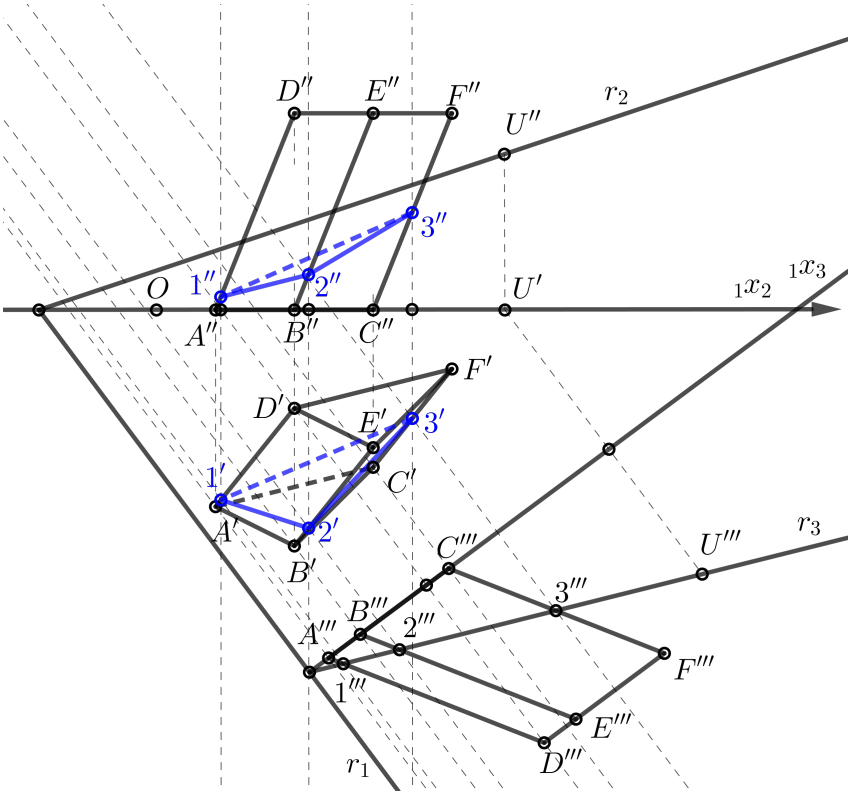
(b) Spustimo ordinale iz točaka A', B', C', D' na ${}_1x_3$ te nanesemo visine nacrta. Time smo dobili točke A''', B''', C''' i D'''. Kroz točku D''' povučemo paralelu s ${}_1x_3$. Kroz točke B''' i C''' povučemo paralele s $A'''D'''$ te u presjeku paralelom kroz točku D''' dobivamo točke E''' i F'''

(c) Uzmimo bilo koju točku U'' na r_2. Spustimo ordinalu na ${}_1x_2$ kako bi odredili tlocrt točke, tj. U'.
Povučemo okomicu iz U' na ${}_1x_3$ te od točke presjeka okomice i ${}_1x_3$ nanesemo visinu nacrta. Time smo dobili točku U'''.
Pravac kroz točke U''' i presjek prvog traga ravnine ρ i ${}_1x_2$ je treći trag ravnine ρ.

(d) U sustavu $\pi_1 - \pi_3$ ρ je projicirajuća ravnina, stoga možemo lako odrediti točke presjeka. Točke presjeka su $1''' \in A'''D'''$, $2''' \in B'''E'''$ te $3''' \in C'''F'''$.

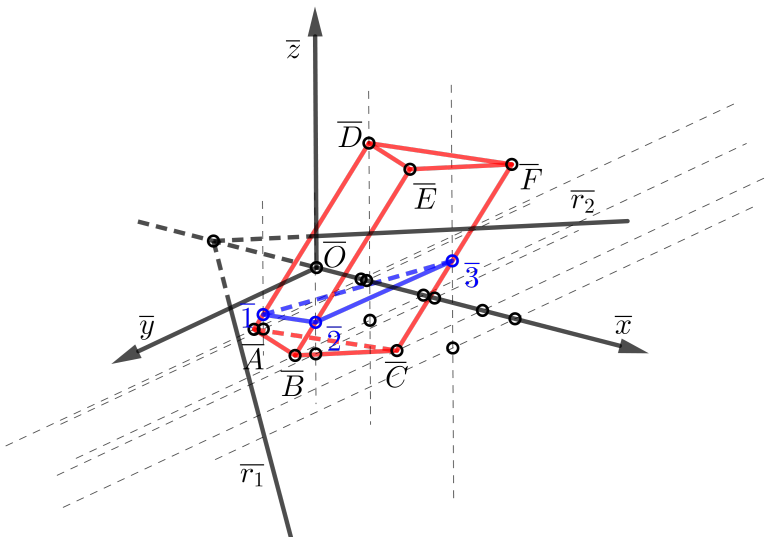
(e) Presjek ordinale iz $1'''$ na ${}_1x_3$ i brida $A'V'$ je točka $1'$. Na analogan način dobijemo točke $2'$ i $3'$.

(f) Presjek ordinale iz $1'$ na ${}_1x_2$ i brida $A''V''$ je točka $1''$. Na analogan način dobijemo točke $2''$ i $3''$.



Slika 4.5.: Mongeova projekcija presjeka trostrane prizme i ravnine ρ (mjerilo 1 : 2)

2. Neka je $d = 10$ cm. Tada vrijedi: $d_x = 8$ cm, $d_y = 5$ cm te $d_z = 9$ cm. Analogno kao u prethodnim primjerima, budući da smo odredili Mongeovu projekciju presjeka prizme i ravnine, pomoću kutova proporcionalnosti odredimo kosoaksonometrijsku sliku presjeka.



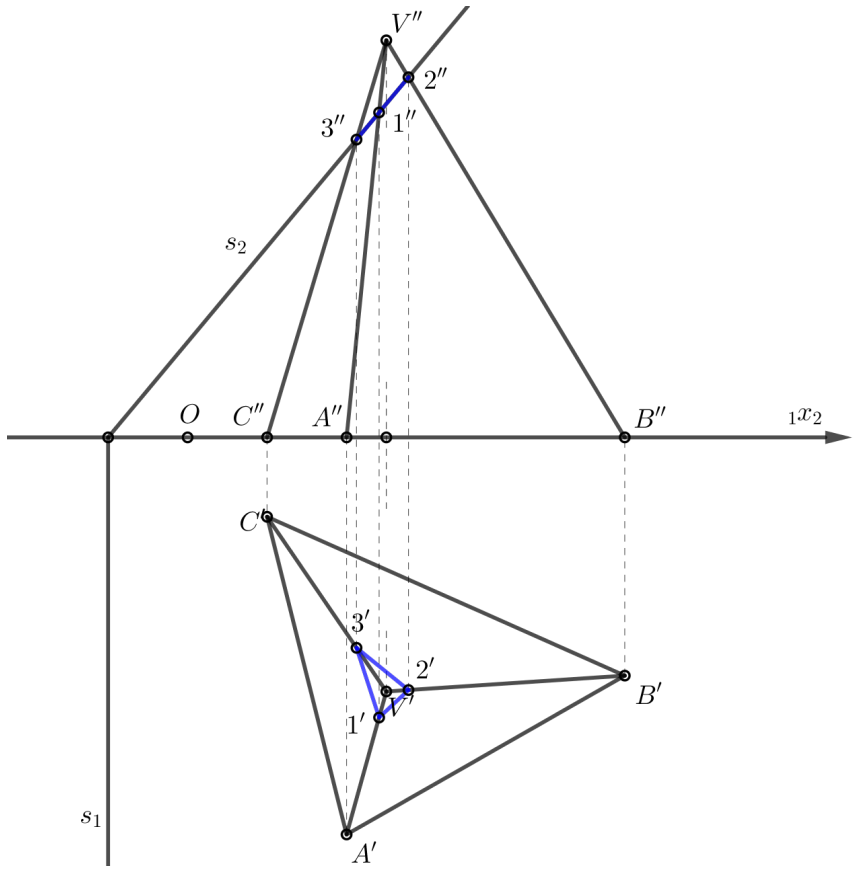
Slika 4.6.: Presjek trostrane prizme i ravnine ρ (mjerilo 1 : 2)

Vidjeli smo na prethodna dva primjera dvije metode za određivanje presjeka tijela i opće ravnine. U ovisnosti o situaciji, biramo onu metodu koja nam je pogodnija. Sada ćemo analogno kao šo smo za prizmu napravli, napraviti nekoliko primjera s piramidom. Prvo ćemo pogledati kako odrediti presjek piramide i projicirajuće ravnine, a zatim kako odrediti presjek piramide i opće ravnine (metoda stranocrta i metoda kolineacije).

Primjer 4.4. *Neka je dana trostrana piramida $ABCV$, $A(2,5,0)$, $B(5.5,3,0)$, $C(1,1,0)$, $V(2.5,3.2,5)$ i ravnina $\sigma(-1,\infty,1.2)$. Odredimo kosoaksonomerijsku sliku presjeka trostrane piramide i ravnine σ ako je: $p_x = 0.7$, $p_y = 0.6$, $p_z = 0.9$ te $\alpha = 10°$, $\beta = 20°$.*

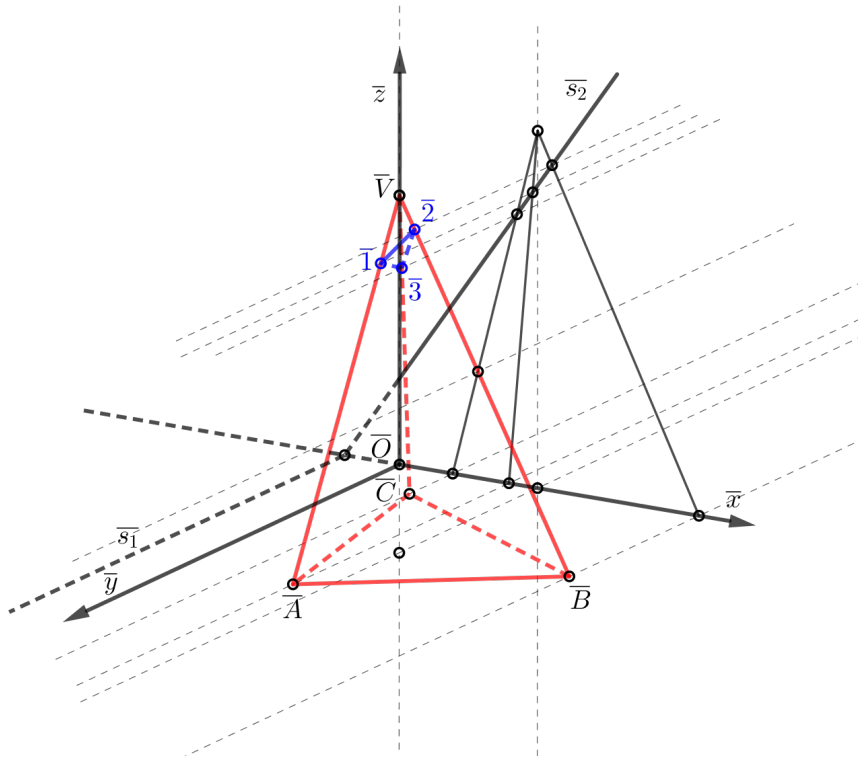
Rješenje.

1. Odredimo Mongeovu projekciju trostrane piramide te presjek trostrane piramide i ravnine σ u Mongeovoj projekciji.
   Označimo s 1, 2, 3 presječne točke bočnih bridova VA, VB i VC s ravninom σ. Budući da je ravnina σ projicirajuća,nacrti svih njezinih točaka nalaze se na drugom tragu s_2. Ujedno, nacrti $1''$, $2''$ i $3''$ nalaze se i na nacrtima bridova $V''A''$, $V''B''$ i $V''C''$. Tlocrte točaka 1, 2 i 3 dobivamo povlačenjem ordinala do tlocrta bočnih bridova.



Slika 4.7.: Mongeova projekcija presjeka trostrane piramide i ravnine σ

2. Konstrukcija presjeka trostrane piramide i ravnine σ.
   Analogno kao u primjeru 3.3. konstruiramo tragove ravnine σ te odredimo presjek drugog traga $\overline{s_2}$ i nacrta piramide. Time smo dobili kosoaksonometrijske slike točaka nacrta presjeka piramide i ravnine.
   Iz svake točke presjeka povučemo paralele sa $\overline{y}$.
   Presjek paralela i odgovarajućih stranica su točke $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, odnosno točke u kojima zadana ravnina siječe trostranu piramidu.



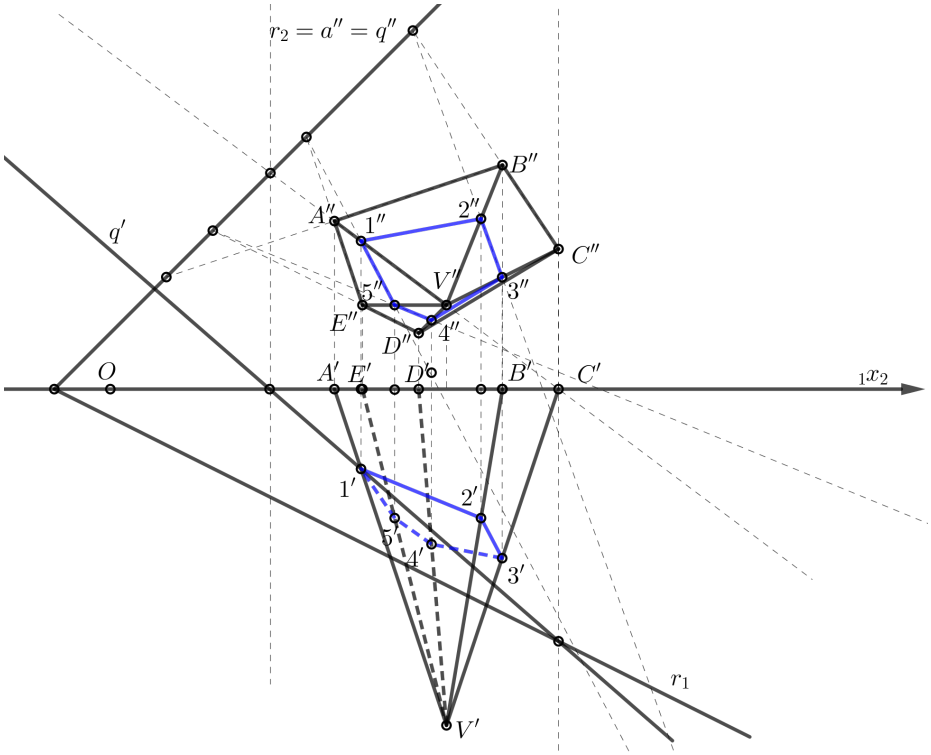
Slika 4.8.: Kosoaksonometrijska slika presjeka trostrane piramide i ravnine σ

Primjer 4.5. *Konstruirajte kosoaksonometrijsku sliku peterostrane piramide $ABCDEV$ ako je $A(4,0,3)$, $B(7,0,4)$, $C(8,0,2.5)$, $D(5.5,0,1)$, $E(4.5,0,1.5)$ $V(6,6,1.5)$, $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$ te $p_x = 0.8$, $p_y = 0.5$, $p_z = 0.9$. Odredimo presjek piramide i ravnine $\rho(-1,0.5,1)$.*

Rješenje. Ovaj primjer ćemo riješiti koristeći se metodom kolineacije, pri čemu će nam u zadatku os kolineacije biti drugi trag ravnine ρ, središte kolineacije točka V'' te par pridruženih točaka $A'' \mapsto 1''$.

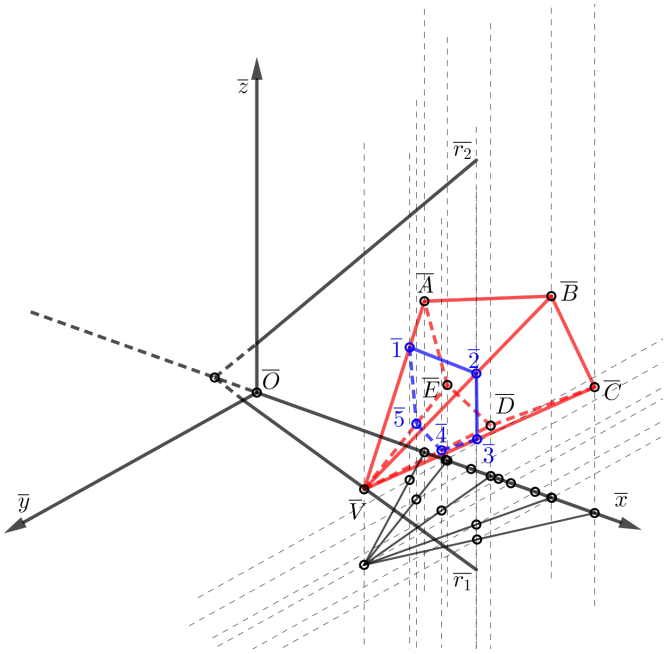
1. Odredimo Mongeovu projekciju peterostrane piramide, a pomoću metode kolineacije odredimo točke presjeka peterostrane piramide i ravnine ρ u nacrtu.

2. Iz svake točke presjeka u nacrtu povučemo ordinalu na ${}_1x_2$ do odgovarajućih bridova u tlocrtu. Na taj način odredili smo presjek peterostrane piramide i ravnine ρ u tlocrtu.



Slika 4.9.: Mongeova projekcija presjeka peterostrane piramide i ravnine ρ (mjerilo $7:10$)

3. Neka je $d = 10$ cm. Tada vrijedi: $d_x = 8$ cm, $d_y = 5$ cm te $d_z = 9$ cm. Pomoću kutova proporcionalnosti analogno kao u prethodnim primjerima odredimo kosoaksonometrijsku sliku presjeka peterostrane piramide i ravnine ρ.



Slika 4.10.: Kosoaksonometrijska slika presjeka peterostrane piramide i ravnine ρ (mjerilo $7:10$)

Primjer 4.6. *Konstruirajte kosoaksonometrijsku sliku trostrane piramide $ABCV$ ako je $A(2,5,0)$, $B(5.5,3,0)$, $C(1,1,0)$, $V(2.5,3.2,5)$, $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$ te $p_x = 0.8$, $p_y = 0.5$, $p_z = 0.9$. Odredimo presjek piramide i ravnine $\rho(-1,3,0.6)$.*

Rješenje.

1. Iz zadanih podataka konstruiramo Mongeovu projekciju trostrane piramide.

2. Ucrtamo tragove ravnine ρ.
   Budući da je ravnina ρ opća ravnina, uvest ćemo novu ravninu, stranocrtnu ravninu π_3 koja će biti okomita na π_1.
   U sustavu $\pi_1 - \pi_3$ ravnina ρ će postati projicirajuća ravnina te se zadatak svodi na presjek tijela i projicirajuće ravnine.

3. Pomoću stranocrta odredimo presjek dane ravnine i piramide:

   (a) Postavimo ${}_1x_3$ tako da bude okomit na r_1.

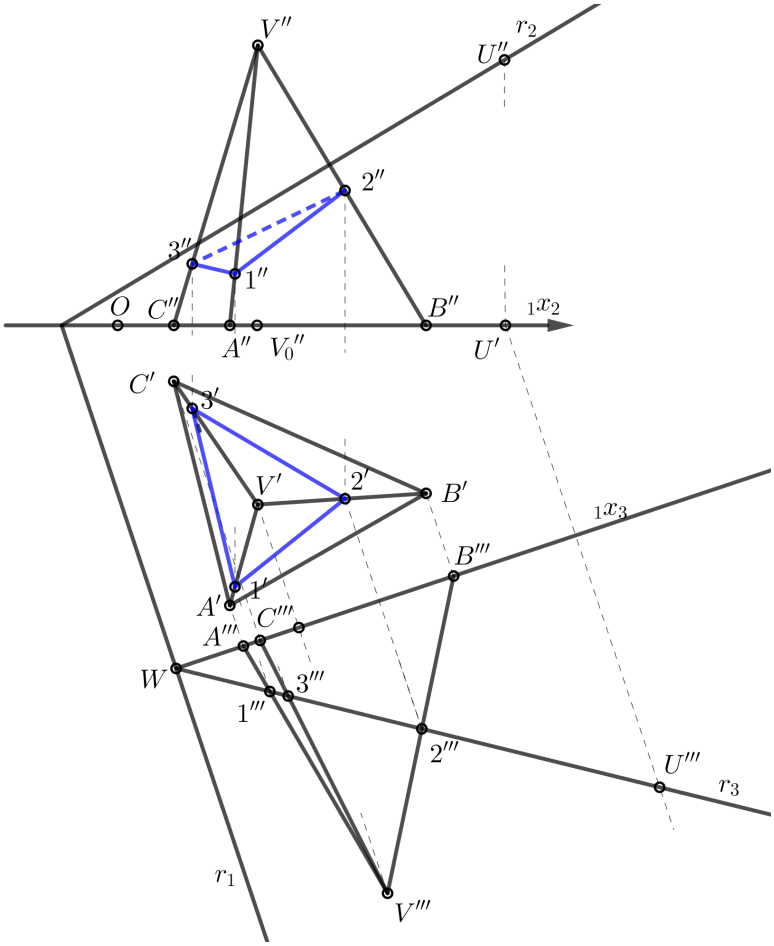
   (b) Spustimo ordinale iz točaka A', B', C', V' na ${}_1x_3$ te nanesemo visine nacrta. Na taj način dobivamo točke A''', B''', C''', V'''.

(c) Uzmimo bilo koju točku U'' na r_2.
Spustimo ordinalu na ${}_1x_2$ kako bi dobili točku U'.
Povučemo okomicu iz U' na ${}_1x_3$ te od točke presjeka okomice i ${}_1x_3$ nanesemo visinu nacrta. Na taj način smo dobili točku U'''.
Presjek prvog traga ravnine ρ i ${}_1x_3$ označimo sa W. Pravac WU''' je treći trag ravnine ρ.

(d) U sustavu $\pi_1 - \pi_3$ ρ je projicirajuća ravnina, stoga možemo lako odrediti točke presjeka, tj. točke $1'''$,$2'''$, $3'''$, pri čemu točka 1pripada bridu VA, točka 2 bridu VB, a točka 3 pripada bridu VC.

(e) Presjek ordinale iz $1'''$ na ${}_1x_3$ i brida $A'V'$ je točka $1'$. Na analogan način dobijemo točke $2'$ i $3'$.

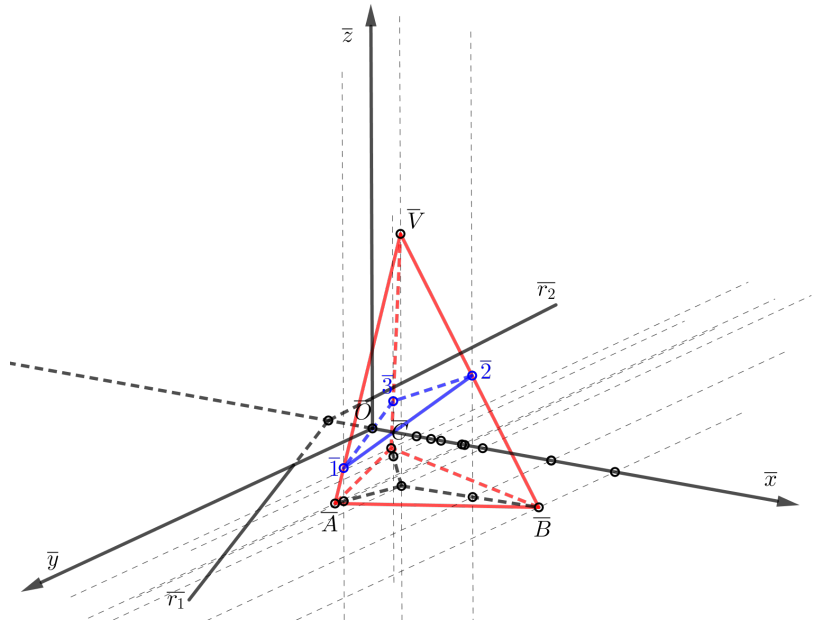
(f) Presjek ordinale iz $1'$ na ${}_1x_2$ i brida $A''V''$ je točka $1''$. Na analogan način dobijemo točke $2''$ i $3''$.



Slika 4.11.: Presjek trostrane piramide i ravnine ρ (mjerilo 7 : 10)

4. S obzirom na zadane kutove α i β postavimo aksonometriju koordinatnih osi.

5. Neka je $d = 10$ cm. Tada je $d_x = 8$ cm, $d_y = 5$ cm te $d_z = 9$ cm. Budući da smo odredili Mongeovu projekciju presjeka piramide i ravnine, pomoću kutova proporcionalnosti analognim postupkom kao u primjeru 4.3 odredimo kosoaksonometrijsku sliku presjeka trostrane prizme i ravnine ρ.
   Presjek trostrane piramide i ravnine ρ je trokut $\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{3}$.



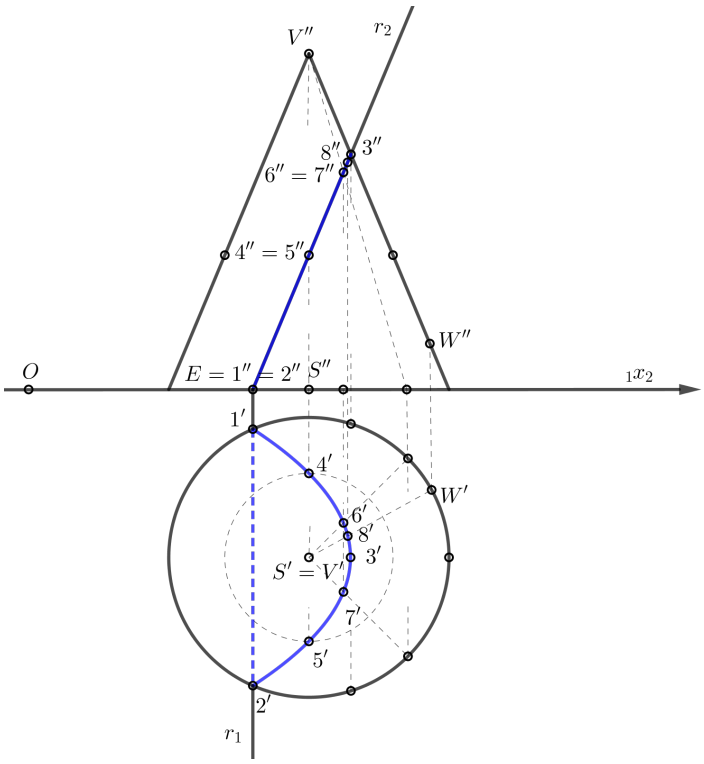
Slika 4.12.: Presjek trostrane piramide i ravnine ρ (mjerilo 7 : 10)

Primjer 4.7. *Neka je baza uspravnog stošca u ravnini π_1 takva da $S(5, 3, 0)$ i $r = 2.5$, a visina stošca iznosi $v = 6$. Odredite kosoaksonometrijsku sliku uspravnog stošca i presjek stošca i ravnine $\rho(4, \infty, -)$ po paraboli ako je: $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$ te $p_x = 0.8$, $p_y = 0.6$ i $p_z = 0.9$.*

Rješenje.

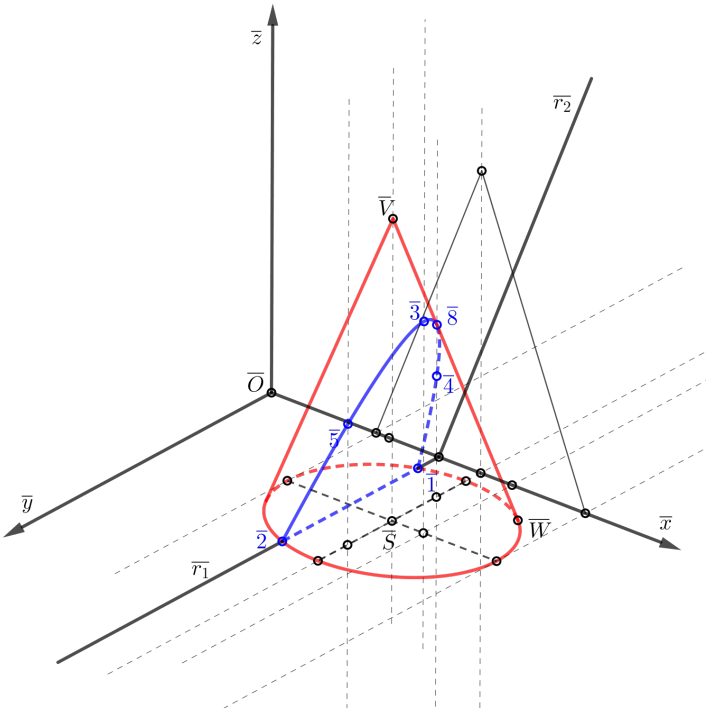
1. Odredimo drugi trag ravnine ρ.
   Budući da je drugi trag paralelan s izvodnicom uspravnog stošca iz točke presjeka prvog traga ravnine ρ i ${}_1x_2$ povučemo paralelu sa izvodnicom stošca.

2. Iz zadanih podataka konstruiramo Mongeovu projekciju uspravnog stošca i presjek stošca i ravnine u Mongeovoj projekciji.



Slika 4.13.: Mongeova projekcija uspravnog stošca (mjerilo 7 : 10)

3. Neka je $d = 10$ cm. Tada je $d_x = 8$ cm, $d_y = 6$ cm te $d_z = 9$ cm. Znamo da je kosoaksonometrijska slika kružnice elipsa, stoga s ciljem njene konstrukcije uzmemo bilo koja dva međusobno okomita promjera kružnice i preslikamo ih kosom aksonometrijom. Na taj način smo dobili konjugirane promjere elipse. Malu i veliku poluos konstruiramo pomoću Rytzove konstrukcije. Konturne izvodnice su tangente iz $\overline{V}$ na elipsu.
   Pomoću kutova proporcionalnosti odredimo kosoaksonometrijske slike točaka presjeka uspravnog stošca i ravnine ρ te kosoaksonometrijsku sliku vrha stošca. Presjek uspravnog stošca je krivulja koja prolazi točkama $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$.
   Točku $\overline{8}$ u kojoj slika parabole mijenja vidljivost određujemo na sljedeći način. Ta točka leži na konturnoj izvodnici $\overline{V}\,\overline{W}$. Točka $\overline{W}$ leži na elipsi i ona je kosoaksonometrijska slika točke W sa kružnice baze. Odredimo W' i W'' u Mongeovoj projekciji baze stožca (kao u poglavlju 2.1.). Koristeći izvodnicu VW u nacrtu odredimo točku $8''$, a potom i $8'$ te točku 8 preslikamo kosom aksonometrijom.

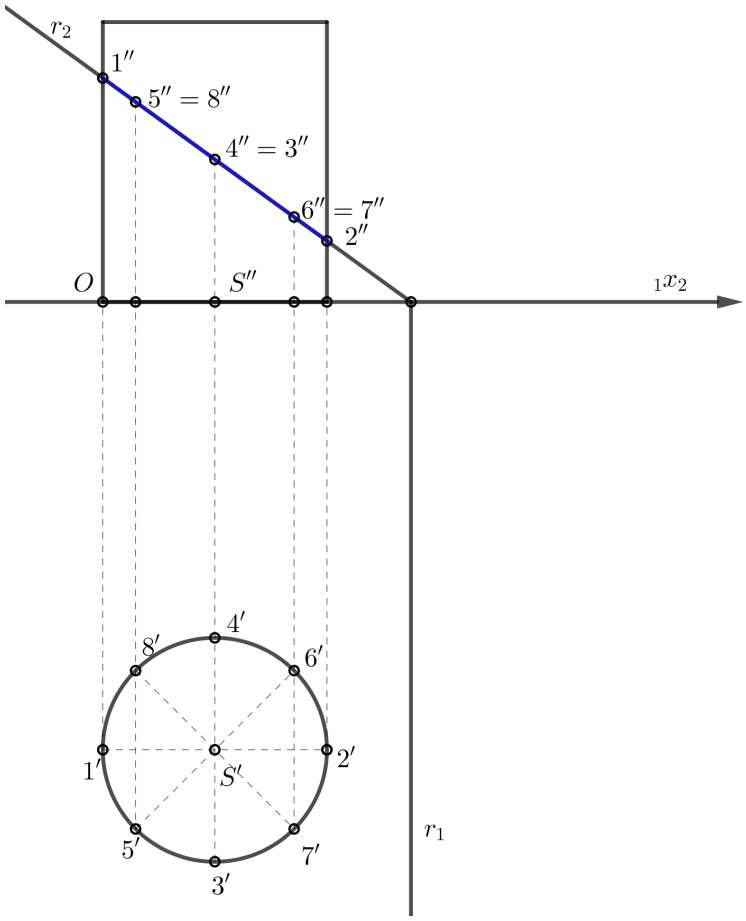


Slika 4.14.: Kosoaksonometrijska slika presjeka uspravnog stošca i ravnine ρ (mjerilo $7:10$)

Primjer 4.8. *Odredimo kosoaksonometrijsku sliku i presjek rotacijskog valjka ravninom* $\rho(5.5, \infty, 4)$ *ako se baza valjka nalazi u* π_1, $S(2, 8, 0)$ *je središte baze valjka,* $r = 2$, $v = 5$ *te* $\alpha = 10°$, $\beta = 25°$, $p_x = 0.9$, $p_y = 0.6$ *i* $p_z = 0.8$.

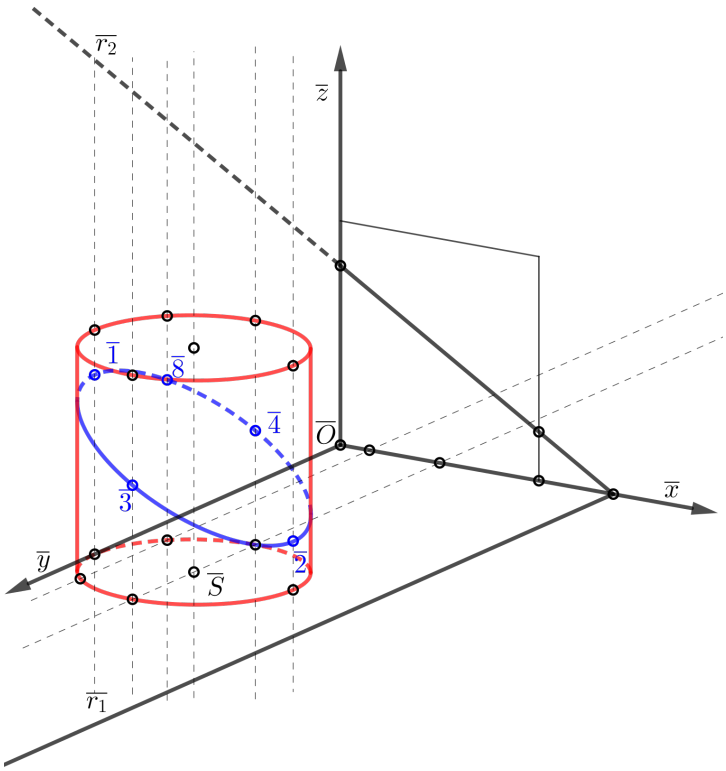
Rješenje.

1. Iz zadanih podataka konstruiramo Mongeovu projekciju rotacijskog valjka i presjek valjka i ravnine.
   Budući da ravnina ρ siječe sve izvodnice valjka presjek je elipsa čiji se tlocrt podudara s tlocrtom osnovke. Nacrt elipse je dužina po kojoj drugi trag r_2 siječe nacrt valjka jer je ρ projicirajuća ravnina pa su nacrti svih njezinih točaka, a time i nacrti svih točaka presjeka na tragu r_2.



Slika 4.15.: Mongeova projekcija presjeka rotacijskog valjka i ravnine ρ (mjerilo 7 : 10)

2. Neka je $d = 10$ cm. Tada je $d_x = 9$ cm, $d_y = 6$ cm te $d_z = 8$ cm. Analogno kao u prethodnom primjeru odredimo kosoaksonometrijsku sliku kružnice, odnosno elipsu (donja baza valjka)
   Translatiramo dobivenu elipsu za prikraćenu visinu u kosoj aksonoometriji. Pomoću kutova proporcionalnosti odredimo kosoaksonometrijske slike točaka presjeka rotacijskog valjka i ravnine ρ.
   Presjek rotacijskog valjka i ravnine ρ je krivulja koja prolazi točkama $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$. To je kosoaksonometrijska slika elipse određene točkama $1, 2, 3, \ldots, 8$



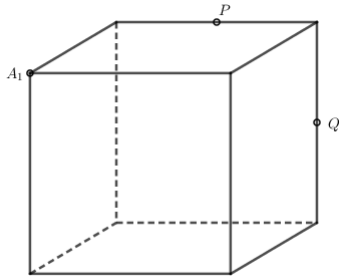
Slika 4.16.: Kosoaksonometrijska slika presjeka rotacijskog valjka i ravnine ρ (mjerilo $7:10$)

Poglavlje 5

Primjena u srednjoškolskoj matematici

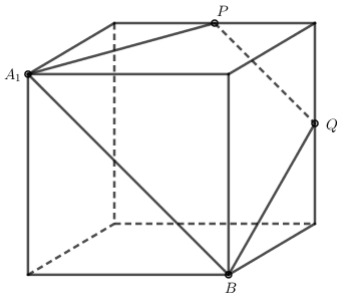
S pojmom i metodama aksonometrije vjerojatno se većina studenata nije susrela do prve godine na fakultetu. Međutim, počevši od nižih razreda osnovne škole, a zatim i u višim razredima često smo se koristili s aksonometrijom. Pravi primjer za to nam je kocka koju crtamo upravo na način na koji sam ju ja konstruirala koristeći se kosom projekcijom. Iako ne znajući, vidimo da se tijekom cijelog školovanja koristimo metodama aksonometrije.
Učenici u nižim razredima osnovne škole se po prvi puta upoznaju s geometrijskim tijelima i nekim njihovim osnovnim svojstvima. Potom u višim razredima osnovne škole, naročito u osmom razredu, malo detaljnije proučavaju geometrijska tijela i njihova svojstva. No, prvi puta kada se učenici zapravo dosta detaljnije posvećuju geometrijskim tijelima i presjecima geometrijskih tijela i ravnina je u drugom razredu srednje škole. Prvo proučavaju općenito geometriju prostora i njene osnovne pojmove, a zatim prelaze na geometrijska tijela gdje postepeno obrađuju različite skupine tijela. U ovom poglavlju na nekoliko primjera ću objasniti na koji način određujemo presjek geometrijskog tijela i ravnine. Odnosno prikazat ću kako se učenicima u srednjoj školi objašnjava što je presjek nekog tijela i ravnine.

Primjer 5.1. *[1] Konstruiraj presjek kocke ravninom što je određena trima istaknutim točkama. Točke P i Q polovišta su bridova na kojima leže. Ako je duljina brida kocke a odredi površinu presjeka.*



Slika 5.1.: Kocka i istaknute točke ravnine

Rješenje.



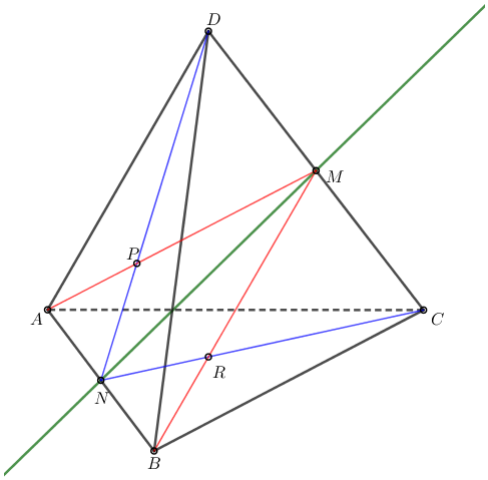
Slika 5.2.: Presjek kocke i ravnine

Budući da su ravnine ABB_1 i DCC_1 paralelne slijedi da su presječni pravci tih ravnina s ravninom APQ paralelni. Drugim riječima, dužina PQ je paralelna s onom stranicom presječnog poligona koja se nalazi na strani kocke ABB_1A_1. Budući da PQ sa C_1D_1 zatvara kut od 45°,taj kut će zatvarati i stranicapresječnog poligona, a to znači da je tražena stranica upravo dijagonala A_1B.
Lako se vidi da je presjek kocke i ravine određene istaknutim točakama na kocki jednakokračni trapez kojem je duljina veće osnovice duljina dijagonale strane kocke, odnosno $a\sqrt{2}$, a duljina kraće osnovice polovina duljine dijagonale strane kocke, odnosno $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Duljine krakova i visine trapeza odredimo koristeći se Pitagorinim poučkom, a one iznose $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Još nam je preostalo izračunati površinu presjeka:

$$P = \frac{(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2})\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{18a^2}{16} = \frac{9a^2}{8}.$$

Primjer 5.2. *[1] Neka je dan pravilan tetraedar $ABCD$ te neka su točke M i N polovišta bridova CD i AB. Odredimo presjek ravnina ABM i CND.*

Rješenje. Nacrtajmo tetraedar $ABCD$ i istaknimo zadane ravnine. Označimo s P presjek dužina AM i DN te s R presjek dužina BM i CN. Na prvi pogled dobivamo dojam kao da je presjek ovih dviju ravnina pravac PR.



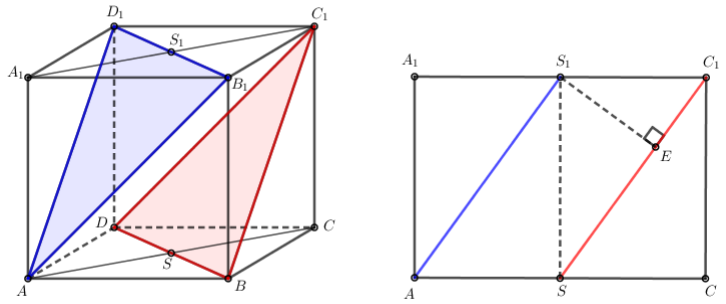
Slika 5.3.: Presjek ravnina AMB i CND

Međutim, uočimo da su pravci AM i DN mimoilazni, kao i pravci BM i CN. To zaključujemo iz kriterija mimoilaznosti dvaju pravaca (pravac DN pripada ravnini ABD jer točka D pripada toj ravnini, a točka N pripada dužini AB koja također pripada ravnini, no pravac AM siječe tu ravninu u točki A koja ne pripada pravcu DN, analogno se pokaže i za mimoilaznost pravaca BM i CN). Dakle, presjek danih ravnina nije pravac PR.
Uočimo da točke N i M (polovište stranice CD) pripadaju ravnini CND stoga i pravac MN pripada toj ravnini. Isto tako, točke M i N (polovište stranice AB) pripadaju ravnini AMB, pa i pravac MN pripada toj ravnini.
Budući da pravac MN pripada ravnini CND i ravnini AMB on je presjek tih dviju ravnina.

Uz zadatke ovog tipa, gdje se određuje presjek ravnina u nekom geometrijskom tijelu, u udžbenicima za srednju školu pojavljuje se mnoštvo zadataka u kojima je potrebno prvo odrediti presjek nekog geometrijskog tijela s ravninom, a zatim odrediti opseg ili površinu lika nastalog presjekom.

Primjer 5.3. *[1] Neka je dana kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Dokažimo da su ravnine AB_1D_1 i BC_1D paralelne i odredimo udaljenost između tih ravnina.*

Rješenje. Nacrtajmo kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i istaknimo zadane ravnine.



Slika 5.4.: Položaj ravnina AB_1D_1 i BC_1D (lijevo). Udaljenost između ravnina AB_1D_1 i BC_1D (desno)

Znamo da vrijedi: $AD_1 \parallel BC_1$ ($AD_1 \in ADD_1A_1$, $BC_1 \in BCC_1B_1$, a budući da je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka ravnine ADD_1B_1 i BCC_1B_1 su međusobno paralelne) i $AB_1 \parallel DC_1$ (analogno dokažemo). Dakle, zaključujemo da su ravnine AB_1D_1 i BC_1D međusobno paralene.
Trokuti AB_1D_1 i BC_1D su jednakokračni s krakovima duljine $a\sqrt{2}$, gdje je a duljina brida kocke. Udaljenost ravnina AB_1D_1 i BC_1D jednaka je udaljenosti pravaca AS_1 i C_1S, gdje su točke S i S_1 središta strana $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ kocke (isto tako to su polovišta osnovica odgovarajućih jednakokračnih trokuta). Iz točke S_1 spustimo okomicu na dužinu C_1S i dobiveni presjek označimo sa E. Udaljenost između ravnina jednaka je $|S_1E|$. Duljinu dužine S_1E izračunat ćemo izjednačavanjem izraza za površinu trokuta SC_1S_1. Imamo:

$$\frac{|SC_1| \cdot |S_1E|}{2} = \frac{|SS_1| \cdot |S_1C_1|}{2}$$

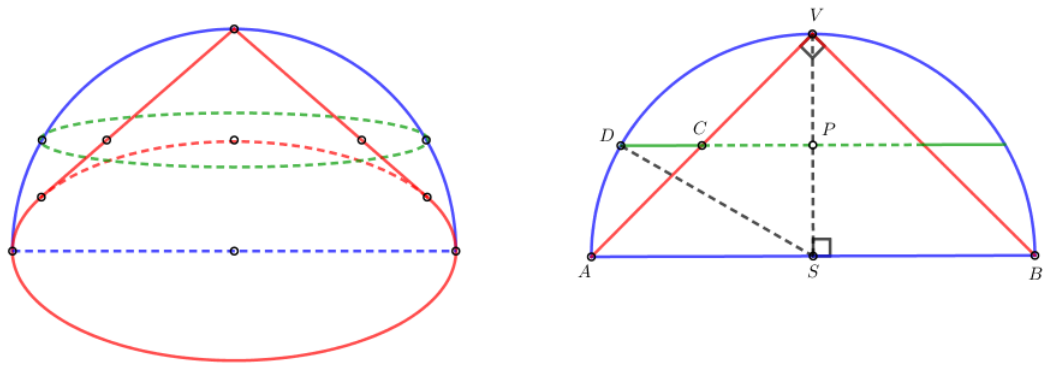
$$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot |S_1E|}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$|S_1E| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Dakle, udaljenost između paralelnih ravnina AB_1D_1 i BC_1D je $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, gdje je a duljina brida kocke.

Primjer 5.4. *[1] U polukugli je upisan uspravan stožac tako da ta dva tijela imaju zajedničku osnovku. Paralelno s osnovkom polovištem visine stošca položena je ravnina. Dokažite da je površina lika između polukugle i stošca koji se dobije pri tom presjeku jednaka polovini površine osnovke stošca.*

Rješenje. Nacrtajmo polukuglu i njoj upisani stožac, a zatim i ravninu paralelnu osnovci kroz polovište visine stošca.



Slika 5.5.: Presjek stošca i polukugle ravninom paralelnom osnovki kroz polovište visine stošca.

Uočimo da je trokut ABV pravokutan i jednakokračan. Znamo da vrijedi $|AS| = |SV| = r$ te $|SP| = |CP| = \frac{r}{2}$, gdje je r polumjer osnovke stošca. Udaljenost između točaka D i P označimo sa r_1, a udaljenost između točaka C i P sa r_2. Iz Pitagorina poučka slijedi $r_1^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$, tj. $r_1 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.
Površinu lika između polukugle i stošca koji se dobije pri presjeku označimo s P. Ona iznosi: $P = r_1^2\pi - r_2^2\pi = \frac{r^2\pi}{2}$, a upravo to smo i trebali dokazati.

Bibliografija

[1] B. Dakić, N. Elezović, Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za drugi razred gimnazije (2.dio), Element, Zagreb, 2006.

[2] M. C. Hawk, Theory and problems of descriptive geometry, Schaum's outline series McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

[3] L. Lipošinović, Nacrtna geometrija, udžbenik za graditeljske tehničke škole, Element, Zagreb, 1998.

[4] V. Niče, Deskriptivna geometrija 1. i 2., Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[5] D. Palman, Nacrtna geometrija, Element, Zagreb, 2001.

[6] Predavanja s kolegija Nacrtna geometrija, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/`

[7] Prezentacije s kolegija Povijest matematike, `http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povijest.html`

Sažetak

U ovom radu posebnu pažnju posvetila sam presjecima tijela aksonometrijskim metodama i njihovoj primjeni u srednjoj školi. U prvom poglavlju objasnila sam općenito što je to aksonometrija te nabrojila i ukratko objasnila njene vrste. Kao važnu činjenicu koja nam omogućava proizvoljan odabir pri konstruiranju osnog križa iznijela sam i dokazala Pohlkeov stavak. Iako u radu nije svaki put napisano, ali upravo ovaj stavak nam je omogućio sve konstrukcije. Nadalje sam opisala na koji način se točke, pravci, ravnine i tijela prenose iz Mongeove projekcije u kosu aksonometriju. Kao posebnu cjelinu sam navela i objasnila kutove proporcionalnosti uz pomoć kojih možemo na brži način doći do kosoaksonometrijskih slika točaka. Kroz cijeli rad sam konstruirala slike u kosoj aksonometriji, ali sam isto tako navela i ostale vrste aksonometrije (specijalna kosa aksonometrija, kosa projekcija) te na primjeru kocke prikazala kako izgledaju slike u prirodnom izgledu, a kako u neprirodnom.
U četvrtom poglavlju sam obradila razne primjere presjeka tijela i ravnine u kosoj aksonometriji. Uvijek sam polazila od jednostavnijih presjeka (presjek tijela i projicirajuće ravnine) prema složenijima (presjek tijela i opće ravnine). Nastojala sam obuhvatiti sva tijela, pa sam tako napravila presjek prizmi, piramida, stošca i valjka sa zadanim ravninama.
U petom i posljednjem poglavlju u ovom radu, posvetila sam se primjeni u srednjoj školi. Na nekoliko primjera sam pokazala kako bi se u srednjoj školi došlo do presjeka tijela i ravnine.

Summary

Throughout this dissertation I have dedicated attention towards axonometric methods and their use in high schools. In the first chapter I provided a general idea of axonometric projections and further enlisted and explained their various variants. I have shown the important concept which allows arbitrary selection when constructing the axial cross by proving the Pohlke's theorem. This theorem allowed us to create all constructions. I have described how to construct an oblique projection of points, lineas, surfaces and some figures. An entire section of this dissertation is devoted to the proportional angles which help us to determine the oblique-axonometric constructions in a faster manner. I have also enlisted other types of axonometric projection (special oblique axonometric projection, oblique projection) and using the cube as an example I showcased how different cases of p_x, p_y, p_z, α and β give us natural or less natural pictures.

In the fourth chapter I constructed several examples of intersections of surfaces and figures using oblique axonometric projection. Throughout this paper, I always started from simpler examples of intersections towards more complicated examples. I endeavoured to cover all of bodies, therefore I made intersections of prisms, pyramids, cones and cylinders with assigned planes.

Fifth and last chapter of this paper I dedicated to constructive problems in high school mathematics. Through a couple of examples I showcased methods on how to construct intersections of bodies and planes in high school mathematics.

Životopis

Rosanda Radić je rođena 01.09.1994. u Splitu kao dijete Nediljka i Jagode Radić. Provela je većinu svog života živeći s obitelji u mjestu Lučane, nedaleko od grada Sinja, a obitelj joj sačinjavaju roditelji i trojica braće. Prve četiri godine osnovne škole pohađa u područnoj školi Marka Marulića u Lučanima, a ostala četiri razreda osnovne škole završava u istoimenoj školi u Sinju. Kao sljedeći korak u svom školovanju odlučuje se na pohađanje opće gimnazije Dinka Šimunovića u Sinju. Tijekom četiri godine srednjoškolskog školovanja u njoj se rađa interes za matematiku. Uspješno upisuje studij matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Marljivim radom i upornošću uspješno polaže sve ispite iz godine u godinu te u roku završava studij. Prilikom pohađanja fakulteta paralelno radi studentske poslove koji joj omogućavaju stjecanje dodatnih znanja i vještina. Dok studije privodi kraju, javlja se interes za nacrtnom geometrijom iz koje se odlučuje na pisanje diplomskog rada. Danas boravi u Zagrebu te od sljedeće školske godine počinje raditi u osnovnoj školi u Zagrebu kao profesor matematike.