Dualnost u semidefinitnom programiranju

Rakocija, Paolo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Paolo Rakocija

Dualnost u semidefintnom programiranju

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2018

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Paolo Rakocija

Dualnost u semidefintnom programiranju

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, srpanj, 2018

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Semidefinitno programiranje je grana optimizacije koja zanima znanstvenike još od četrdesetih godina prošlog stoljeća, a tijekom devedesetih godina zauzima jako bitno mjesto u matematičkom programiranju. Pokazalo se kao iznimno koristan alat s mnogo primjena. Mnoge zadaće konveksne optimizacije možemo zapisati kao zadaće semidefinitnog programiranja, tako da nam semidefinitno programiranje nudi jedinstven način za proučavanje svojstava i razvijanje algoritama za širok spektar različitih problema konveksne optimizacije. Stoga je važno naučiti uspješnu metodu za rješavanje zadaća tog tipa.

Glavni cilj ovog rada je razviti teoriju semidefintnog programiranja te naročito dualnosti koje predstavljaju polazište za metodu unutrašnje točke. Prvo poglavlje se bavi isključivo linearnim programiranjem radi lakšeg razumijevanja semidefinitnog programiranja i međusobne usporedbe. Jedna od sličnosti je bogata teorija dualnosti koja je centralni dio ovog rada. Ipak, semidefinitno programiranje je mnogo općenitije nego linearno programiranje i postoji širok spektar raznovrsnih problema nelinearne konveksne optimizacije koji se mogu formulirati i riješiti pomoću semidefintinog programiranja.
Teoriju dualnosti semidefinitnog programiranja nismo razvijali direktno, već preko općenitijih postavki konusnog programiranja. Takva općenitost nam je omogućila da jasnije vidimo bit problema i jednostavnije ga ilustriramo na nekim geometrijskim primjerima. Štoviše, teorija konusnog programiranja može biti korisna i u nekim drugim područjima, kao npr. u kopozitivnom programiranju.

Poglavlje I

Linearno programiranje

1 Uvod u linearno programiranje

Četrdesetih godina prošlog stoljeća ljudi su se počeli zanimati za probleme minimizacije troškova raznih sustava uz različita ograničenja. Do takvih problema nam je i danas stalo i možemo ih učinkovito riješiti. Takve probleme nazivamo optimizacijski problemi, a linearno programiranje predstavlja njihovu osnovnu klasu. Prije formalne definicije linearnog programiranja, navest ćemo dva ključna pojma u našoj teoriji.

Definicija 1.1. *Kažemo da je* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *konus ako* $(\forall x \subseteq K)(\forall \lambda \geq 0)\lambda x \in K$

Definicija 1.2. *Kažemo da je* K *zatvoreni konveksni konus ako zadovoljava sljedeća dva uvjeta:*

1. *Ako su* $x, w \in K$*, tada je* $\alpha x + \beta w \in K$*, za svaki* $\alpha, \beta \geq 0$
2. K *je zatvoren skup.*

Sada promatramo zadaću linearnog programiranja u njenoj standardnoj formi:

$$\begin{aligned}
&c^\intercal x \to max \\
&a_i^\intercal x = b_i, i = 1, ..., m \\
&x \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}$$

gdje su $c, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$, oznaka za skalarni produkt

$$c^\intercal x = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j,$$

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$ je zatvoreni konveksni konus.

Vidimo da je zadaća LP zapravo minimiziranje linearne funkcije $c^\intercal x$, tako da je x rješenje m jednadžbi danih s $a_i^\intercal x = b_i,\ i = 1, \ldots, m$ i da x leži u zatvorenom konveksnom konusu $K = \mathbb{R}^n_+$.

Primjer 1.1 (Problem dijete)**.** Pretpostavimo da osoba želi otići na dijetu. Istovremeno, u svojoj prehrani mora imati dovoljno hrane i nutrijenata. Pretpostavimo da joj je na raspolaganju n vrsta hrane i m nutrijenata. Neka je a_{ij} količina nutrijenta i u svakoj jedinici hrane j, b_i minimalna količina nutrijenta i koje na dijeti treba unijeti, i c_j cijena jedne jedinice hrane j. Ovakva ograničenja možemo zapisati:

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_j$$
$$x_j \geq 0$$

Ciljna funkcija koju treba minimizirati je cijena:

$$\sum_j c_j x_j \to \min$$

Već iz ovog jednostavnog primjera vidimo da na probleme ovakvog tipa često nailazimo u svakodnevnom životu stoga je iznimno korisno znati ih rješavati.

2 Dualnost u linearnom programiranju

Prije formalnog definiranja teorije dualnosti, promotrit ćemo sljedeći ilustrativni primjer:

Primjer 2.1. Pogledajmo sljedeću zadaću linearnog programiranja:

$$\begin{aligned}
&f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
&2x_1 + x_2 \leq 3 \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Pokušajmo dobiti maksimalnu vrijednost funkcije f^* na danom skupu stavljanjem gornjih granica na slučajeve:

- Iz $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$, imamo $f^* \leq 12$
- Iz $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6$, imamo $f^* \leq 6$
- Iz $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{3}((4x_1 + 8x_2) + (2x_1 + x_2)) \leq 5$, imamo $f^* \leq 5$.

U svakom od ovih slučajeva uzimamo linearnu kombinaciju ograničenja s pozitivnim koeficijentima i gledamo što bolju granicu na najveću moguću vrijednost od $2x_1 + 3x_2$. Možemo ovo formalizirati, stavljajući y_1, y_2, y_3 kao koeficijente naše linearne kombinacije. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
&4y_1 + 2y_2 + 3y_2 \geq 2\\
&8y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3\\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0\\
&12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \to \min .
\end{aligned}$$

Ovo je također zadaća linearnog programiranja koju nazivamo dualnom zadaćom, dok polaznu zadaću nazivamo primarnom. Načelno, nije bitno koji problem nazivamo primarnim, a koji dualnim jer je dual dualne zadaće zapravo jednak primarnoj zadaći. Konstruirali smo ovu dualnu zadaću kako bi poslužila kao gornja granica na optimalnu vrijednost primarne zadaće. Drugim riječima, ako je y dopustiva točka dualne i x dopustiva točka primarne zadaće, mora vrijediti $2x_1 + 3x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$ (teorem slabe dualnosti). Stoga, ako možemo pronaći dvije dopustive točke primarne i dualne zadaće koje su jednake, tada smo pronašli optimalnu vrijednost ovog problema linearnog programiranja. U ovom slučaju, točke $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{4}$ i $y_1 = \frac{5}{16}, y_2 = 0, y_3 = \frac{1}{4}$ daju jednaku vrijednost 4.75, što mora biti optimalna vrijednost.

Kada među ograničenjima imamo jednakosti ili varijable koje mogu biti negativne, primarna zadaća izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
&c^{\mathsf{T}}x \to \max\\
&a_i x \leq b_i,\ i \in I_1\\
&a_i x = b_i,\ i \in I_2\\
&x_j \geq 0,\ j \in J_1\\
&x_j \in \mathbb{R},\ j \in J_2,
\end{aligned}$$

čemu odgovara dualna zadaća:

$$\begin{aligned}
&b^\intercal y \to \min\\
&y_i \geq 0,\ \ i \in I_1\\
&y_i \in \mathbb{R},\ \ i \in I_2\\
&A_j y \geq c_j,\ \ j \in J_1\\
&A_j y = c_j,\ \ j \in J_2.
\end{aligned}$$

Primjerice, zadaće

$$(P) \quad \begin{aligned}
&c^\intercal x \to \max\\
&Ax \leq b\\
&x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \leq b\}$ i

$$(D) \quad \begin{aligned}
&b^\intercal y \to \min\\
&A^\intercal y = c\\
&y \geq 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^m :\ y \geq 0,\ A^\intercal y = c\}$ su u dualnosti.

Teorem 2.1 (Teorem slabe dualnosti)**.** *Ako je $x \in \mathcal{P}$, a $y \in \mathcal{D}$, tada vrijedi $c^\intercal x \leq b^\intercal y$*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
c^\intercal x &= (A^\intercal y)^\intercal x && \text{jer je } y \in \mathcal{D}\\
&= y^\intercal A x\\
&\leq y^\intercal b && \text{jer je } x \in \mathcal{P} \ \text{ i } y \geq 0\\
&= b^\intercal y
\end{aligned}$$

□

Prije nego iskažemo teorem jake dualnosti navest ćemo Farkasevu lemu te jednu njezinu varijantu koju koristimo u dokazu teorema.

Teorem 2.2 (Farkaseva lema)**.** *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica i $b \in \mathbb{R}^m$ vektor. Tada postoji vektor $x \geq 0$ takav da je $Ax = b$ ako i samo ako vrijedi implikacija*

$$q^\intercal A \leq 0 \Rightarrow q^\intercal b \leq 0$$

.

Teorem 2.3 (Farkaseva lema - varijanta)**.** *Sustav linearnih jednadžbi* $Ax \le b$ *ima rješenje ako i samo ako je* $q^\intercal b \ge 0$ *za svaki vektor* $q \ge 0$ *za koji je* $q^\intercal A = 0$.

Dokaz. Neka je x rješenje sustava $Ax \le b$. Tada postoji $z \ge 0$ koji zadovoljava jednadžbu $Ax + z = b$. Nadalje, x zapišemo u obliku $x = u - v$ gdje je $u, v \ge 0$. Označimo li s x' blok stupac sastavljen od u, v, z onda je $x' \ge 0$ rješenje sustava $A'x' = b$, gdje je A' blok matrica $A' = \begin{bmatrix} A & -A & I \end{bmatrix}$. Obratno, ako je $x' \ge 0$ rješenje sustava $A'x' = b$, onda je $x = u - v$ rješenje sustava $Ax \le b$.
Stoga je svejedno rješavamo li sustav $Ax \le b$ ili tražimo nenegativna rješenja x' sustava $A'x' = b$. Prema osnovnom teoremu Farkasove leme prošireni sustav ima nenegativno rješenje ako i samo ako $q^\intercal A' \ge 0 \Rightarrow q^\intercal b \ge 0$ tj. ako $q^\intercal a \ge 0$ za svaki stupac a matrice A' implicira $q^\intercal b \ge 0$.
Uvažimo li oblik matrice A' vidimo da je uvjet $q^\intercal a \ge 0$ za svaki stupac matrice A' ekvivalentan s $q^\intercal a = 0$ za svaki stupac matrice A te $q \ge 0$ što dokazuje tvrdnju. □

Teorem 2.4 (Teorem jake dualnosti)**.** *Ako su skupovi dopustivih točaka* $\mathcal{P}$ *i* $\mathcal{D}$ *primarne i dualne zadaće (P) i (D) neprazni, onda vrijedi jednakost*

$$\max\{c^\intercal x \mid Ax \le b\} = \min\{y^\intercal b \mid y \ge 0,\ y^\intercal A = c^\intercal\} \tag{2.3}$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{P}$ i $y \in \mathcal{D}$. Tada je

$$c^\intercal x = y^\intercal A x \le y^\intercal b$$

pa je maksimum konačan i max $\le$ min. Za dokaz obratne nejednakosti dovoljno je dokazati da postoje $x \in \mathcal{P}$ i $y \in \mathcal{D}$ takvi da je $y^\intercal b \le c^\intercal x$ što je ekvivalentno egzistenciji rješenja sustava

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -c^\intercal & b^\intercal \\ 0 & A^\intercal \\ 0 & -A^\intercal \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Prema varijanti Farkaseve leme problem ima rješenje ako i samo ako za svaki $u \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^m$, takvi da je $u \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $v \ge 0$, $w \ge 0$, $h \ge 0$, jednakost

$$\begin{bmatrix} A & -c^\intercal & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^\intercal & A^\intercal & -A^\intercal & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

implicira

$$\begin{bmatrix} u^\intercal & \lambda & v^\intercal & w^\intercal & h^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.6}$$

Mi ćemo dokazati posljednu implikaciju. Pretpostavimo stoga da u, λ, v, w, h zadovoljavaju njenu premisu. Tada je $A^\intercal u = \lambda c$ i $\lambda b + Av - Aw = h$ odakle množenjem druge jednakosti s $u^\intercal$, zbog $u^\intercal h \geq 0$, dobivamo

$$\lambda u^\intercal b + u^\intercal Av - u^\intercal Aw \geq 0$$

Iskoristimo li ponovno prvu jednakost dobivamo

$$\lambda u^\intercal b + \lambda c^\intercal v - c^\intercal w \geq 0.$$

U slučaju kad je $\lambda \geq 0$ prethodna nejednakost implicira

$$u^\intercal b + c^\intercal v - c^\intercal w \geq 0$$

što se i htjelo dokazati. Ako je $\lambda = 0$ tada je $A^\intercal u = 0$ i $Av - Aw = h \geq 0$ pa za $x \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ i $\mathcal{D}$ su neprazni) vrijedi

$$u^\intercal b \geq u^\intercal Ax = 0.$$

S druge strane postoji $y \in \mathcal{D}$ i

$$0 \geq -h^\intercal y \geq (w^\intercal - v^\intercal)A^\intercal y = (w^\intercal - v^\intercal)c$$

što kombinirano s prethodnom nejednakošću daje

$$u^\intercal \geq (w^\intercal - v^\intercal)c.$$

Time je teorem u potpunosti dokazan. $\square$

3 Metoda unutrašnje točke za linearno programiranje

Najpoznatija metoda rješavanja zadaće linearnog programiranja je simpleks metoda. U ovom odjeljku mi ćemo proučavati jednu od elementarnijih alternativa simpleks metodi - metodu unutrašnje točke. Metoda unutrašnje točke, kako joj samo ime govori, traži rješenje preko niza unutrašnjih točaka. U toj metodi ne postoje dvije faze, inicijalizacija i optimizacija kao u simpleks metodi, pa je neki stoga svrstavaju u takozvane jednofazne metode. Druga razlika između simpleks metode i metode unutrašnje točke je da simpleks metoda staje u konačno mnogo koraka i daje rješenje koje je vrh polieadarskog skupa dok metoda unutrašnje točke generira niz aproksimacija rješenja zadaće u unutrašnjosti skupa dopustivih točaka. Te aproksimacije konvergiraju tzv. analitičkom centru skupa rješenja. Metoda unutrašnje točke je generički naziv za više metoda, a mi ćemo opisati jednu od jednostavnijih i ilustrativnijih - metodu centralnog puta.

Primarnu i dualnu zadaću zapisujemo u obliku

$$\max\{c^\intercal x |\ x \geq 0, Ax \leq b\} \tag{3.1}$$

$$\min\{y^\intercal b |\ y \geq 0, y^\intercal A \geq c^\intercal\} \tag{3.2}$$

gdje je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica s m redaka i n stupaca, $b \in \mathbb{R}^m$ i $c \in \mathbb{R}^n$. Dodavanjem nenegativnih varijabli $w \in \mathbb{R}^m$ i $s \in \mathbb{R}^n$ u uvjetima primarne i dualne zadaće možemo postići da ti uvjeti postanu jednakosti. Primarne varijable su sada x, w, a dualne y, u i gornje zadaće možemo zapisati u formi

$$(P') \quad \max \underbrace{\{c^\intercal x |\ x, w \geq 0, Ax + w = b\}}_{\mathcal{P}'} \tag{3.3}$$

$$(D') \quad \min \underbrace{\{y^\intercal b |\ y, u \geq 0, y^\intercal A - u^\intercal = c^\intercal\}}_{\mathcal{D}'} \tag{3.4}$$

Time smo postigli napredak jer je ograničenje u obliku nejednakosti ostalo samo za varijable, a ne i za funkcije tih varijabli. Uvjet $x_i \geq 0$ može se eliminirati tako da se poveže s funkcijom cilja na način da joj dodamo neku funkciju koja poprima vrijednost

$$\begin{array}{c} -\infty \text{ ako je } \ x_i \leq 0 \\ 0 \text{ inače.} \end{array}$$

Dodavanjem takve funkcije mijenja se funkcija cilja i nestaju uvjeti na varijablu x_i, imajući na umu da maksimiziramo funkciju cilja. Dobili smo ekvivalentnu zadaću, ali smo umjesto diskontinuiteta u varijabli dobili diskontinuitet u funkciji cilja. Sljedeći korak je diskontinuiranu funkciju cilja 'aproksimirati' nekom derivabilnom funkcijom. Najjednostavija od takvih aproksimacija je

$$\mu \ln x_i$$

i za male vrijednosti od μ, tj. kad $\mu \to 0$ ta će aproksimacija biti dobra, ali samo za ograničene vrijednosti od x_i. Prema tome, bit će nam potreban dodatan uvjet na zadaću linearnog programiranja koji osigurava ograničenost skupa rješenje primarne i dualne zadaće. Želimo li izbaciti uvjete nenegativnosti na sve varijable promatrat ćemo modificiranu glatku funkciju cilja.

$$f(x,w) = c^{\intercal}x + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \mu \sum_{j=1}^{m} \ln w_j \tag{3.5}$$

i umjesto problema linearnog programiranja promatrati pridruženi problem

$$\max\{f(x,w) |\ Ax + w = b\} \tag{3.6}$$

koji se naziva problem s preprekom pridružen linearnom programiranju. To je zapravo familija problema parametriziranih parametrom μ. Svaki od njih je jedan nelinearan problem jer je funkcija cilja f nelinearna. Nelinearna funkcija cilja naziva se još i kaznena funkcija ili logaritamska kaznena funkcija. Prepreka je ovdje $x_i = 0$ i $w_j = 0$ koju varijabla ne smije preći, a ako je prijeđe kazna je (negativno) beskonačna. Ono što je najteže u problemu nije riješiti nelinearni problem s preprekom, nego dokazati da njegovo rješenje teži k rješenju polaznog problema kad $\mu \to 0$. Skup dopustivih točaka je poliedarski skup i na rubu poliedarskog skupa bar jedna komponenta varijable x ili w jednaka je nuli. Kaznena funkcija jednaka je $-\infty$ na rubu i poprima konačne vrijednosti na unutrašnjosti. Maksimum funkcije se postiže na unutrašnjosti i točka maksimuma se približava rješenju originalne zadaće linearnog programiranja kad $\mu \to 0$ koja je u vrhu poliedarskog skupa. Promatrano kao funkcija od μ točke maksimuma leže na krivulji koja pripada unutrašnjosti poliedarskog skupa. Taj put nazivamo centralni put.

Egzistencija maksimuma kaznene funkcije

Da bi uopće mogli koristiti algoritme i metode računanja maksimuma kaznene funkcije, moramo se uvjeriti postoji li maksimum i pod kojim uvjetima. U ovom pododjeljku napisat ćemo teoreme koji dokazuju egzistenciju maksimuma kaznene funkcije. Za dokaze teorema pogledati u knjizi L. Čaklović[1]. Zapisat ćemo još jednom uvjete iz primarne i dualne zadaće te njima pridružiti uvjete optimalnosti gdje nam $u \circ x$ označava Hadamardov produkt dva vektora odnosno

$$u \circ x = (u_1x_1, \ldots, u_nx_n)$$

Zapišimo jednadžbe

$$\begin{aligned} Ax + w &= b \\ A^\intercal y - u &= c \\ u \circ x &= \mu \mathbb{1} \\ w \circ y &= \mu \mathbb{1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Gornje jednadžbe možemo matrično zapisati

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^\intercal & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \mu 1$$

ili

$$\begin{aligned} MX + W &= Z \\ X \circ W &= \mu \mathbb{1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

gdje je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^\intercal & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$

Teorem 3.1. *Za svaki niz $\mu_k \to 0$ niz $(X(\mu_k), W(\mu_k))$ rješenja sustava (3.8) je ograničen pa stoga ima konvergentan podniz. Svaki njegov podniz konvergira rješenju (X^*, W^*) zadaće linearnog programiranja, koje je strogo komplementarno, tj. $X^* + W^* > 0$.*

Definicija 3.1. *Neka je $x \in \mathbb{R}^p$, $x \geq 0$ nenegativan vektor, $L \subset \mathbb{R}^p$ afina mnogostrukost i $L_+ = \{x \in L | \ x \geq 0\}$ nenegativan dio od L. Pretpostavimo da je L_+ omeđen.*
Nosač od x, u oznaci $\sigma(x)$, definira se kao skup svih indeksa i za koje je $x_i > 0$.
Nosač od L_+ definira se kao skup svih indeksa $i \in \{1, ..., p\}$

$$\sigma(L_+) = \{i | \exists x \in L_+, \ x_i > 0\}.$$

Tada je analitički centar od L_+ nul vektor ako je $\sigma(L_+) = \emptyset$ odnosno, vektor $x \in L_+$ koji maksimizira produkt

$$\prod_{i \in \sigma(L_+)} x_i$$

na skupu L_+.

Teorem 3.2. *Primarni centralni put konvergira analitičkom centru skupa rješenja* $(\mathcal{P}')^*$ *problema* P'*, a dualni centralni put konvergira analitičkom centru skupa rješenja* $(\mathcal{D}')^*$ *problema* D'.

Sumirajmo dosadašnje rezultate. Ako postoji unutarnja točka od $(\mathcal{P}')^*$ i unutarnja točka od $(\mathcal{D}')^*$, onda za svaki $\mu > 0$ postoji jedinstveno rješenje sustava (3.8)

$$(X(\mu), W(\mu)).$$

Preslikavanje $\mu \to (X(\mu), W(\mu)),\ \mu > 0$ naziva se primarno dualni centralni put. Teorem 3.2. osigurava da limes tog puta kad $\mu \to 0$ postoji i jednak je analitičkom centru skupa rješenja $(\mathcal{P}')^* \times (\mathcal{D}')^*$.

Naivni algoritam i Newtonova metoda

Ideja "naivnog algoritma" se sastoji u tome da se fiksira broj $0 < \alpha < 1$, početna vrijednost $\mu > 0$ i točka $(X(\mu), W(\mu))$ na centralnom putu. Formirajmo niz

$$\mu_i = (1-\alpha)^i \mu$$

i za svaki μ_i izračunajmo μ-centar $(X_i, W_i) = (X(\mu), W(\mu))$ i vrijednost dualnog procjepa $X^\intercal W = (n+m)\mu$. Glavni problem je pronalaženje μ-centra. Kako je μ-centar točka maksimuma logaritamske kaznene funkcije, koja ovisi o μ, i koja je strogo konkavna najbolji je kandidat za računanje točke maksimuma Newtonova metoda. Konvergencija Newtonove metode je to bolja što je polazna točka algoritma bliže točki maksimuma, tj. u ovom slučaju μ-centru.

Numeričke metode unutarnje točke polaze od zadane unutarnje točke $(X, W) > 0$ i iterativno obnavljavaju njezine vrijednosti. Ovdje ćemo ugrubo prikazati korake iteracije, a za detalje o Newtonovoj metodi pronalaženja μ-centra pogledati u knjizi L. Čaklović[1].

1. Ocijeniti pogodnu vrijednost za μ, niti preveliku niti premalu.

2. Izračunati vektor $(\Delta X, \Delta W)$ usmjeren prema μ-centru $(X(\mu), W(\mu))$.

3. Osigurati da je $(X + \Delta X, W + \Delta W)$ unutarnja točka.

4. Zamijeniti $X \leftarrow X + \Delta X, W \leftarrow W + \Delta W$.

Simpleks metoda nasuprot metodi unutrašnje točke

U donjoj tablici sadržani su rezultati usporedne analize u kojoj su rješavani navedeni problemi pomoću simpleks metode i metode unutrašnje točke. Neki od problema kao fit2p imaju 3000 uvjeta i oko 14000 varijabli. Za današnje standarde, to je srednje velik problem. Za veće probleme testovi pokazuju da su metode unutrašnje točke superiornije simpleks metodi iako rezultati variraju ovisno o specifičnosti problema. Zanimljivo je da su fit2p i fit2d dualni problemi i metodi unutrašnje točke potrebno je približno isto vrijeme da riješi jedan i drugi primjer, što se ne može reći za simpleks metodu. Ipak, za relativno male probleme simpleks metoda je definitivno brža i to 3-4 puta.

Ime	Simpleks	Unutr. točka
25fv47	2m55.70s	3m14.82s
80bau 3b	7m59.57s	2m34.84s
agg3	0m1.72s	0m26.52s
bnl2	3m54.52s	10m19.04s
fit2p	36h31m31.80s	2m35.67s
fit2d	1h3m14.37s	4m27.66s
maros	1m0.87s	3m19.43s

Poglavlje II

Semidefinitno programiranje

4 Uvod u semidefinitno programiranje

Problemi semidefinitnog programiranja obuhvaćaju jednu od najvećih klasa optimizacijskih problema koji mogu biti učinkovito riješeni - kako i u teoriji, tako i u praksi. Igraju važnu ulogu u različitim istraživačkim područjima, kao što su kombinatorna optimizacija, algoritmi aproksimacije, računalna složenost, teorija grafova, geometrija, algebarska geometrija, kvantno računanje i dr.

U ovom ćemo odjeljku uvesti problem semidefinitnog programiranja (uz pripadajuća svojstva pozitivno semidefinitnih matrica), uočiti sličnost između linearnog i semidefinitnog programiranja te pokazati kako je linearno programiranje zapravo poseban slučaj semidefinitnog programiranja.

Počnimo s konceptom linearnog programiranja. Ponovno zapisujemo zadaću linearnog programiranja iz prvog poglavlja:

$$\begin{aligned} LP: \quad & c^\intercal x \to max \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

gdje je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\intercal$ vektor s n varijabli, $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^\intercal$ vektor funkcije cilja, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^\intercal$ vektor desne strane i $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica ograničenja.
Drugim riječima, od svih $x \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju $Ax = b$ i nejednakost $x \geq 0$, tražimo x^* s najvećom vrijednosti $c^\intercal x^*$.

Kako bi dobili zadaću semidefinitnog programiranja, zamijenimo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ s vektorskim prostorom

$$\mathrm{Sym}_n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ X^\intercal = X\}$$

simetričnih $n \times n$ matrica, a matricu A zamijenimo linearnim preslikavanjem $A : \mathrm{Sym}_n \to \mathbb{R}^m$.
Euklidski skalarni produkt $(x, y) \to x^\intercal y$ na $\mathbb{R}^n$ zamijenimo standardnim skalarnim produktom

$$X \cdot Y := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$$

na Sym_n. Alternativno, možemo pisati $X \cdot Y = \mathrm{Tr}(X^\intercal Y)$, gdje je za kvadratnu matricu M, $\mathrm{Tr}(M)$ (trag od M) suma vrijednosti na dijagonali od M. Na kraju, zamijenimo ograničenje $x \geq 0$ s ograničenjem

$$X \succeq 0,$$

gdje $X \succeq 0$ znači "matrica X je pozitivno semidefinitna".

Prije nego formalno definiramo zadaću semidefinitnog programiranja, definirat ćemo pojam pozitivno semidefinitnih matrica i neka njihova svojstva

Definicija 4.1. *Kažemo da je kvadratna matrica M pozitivno semidefinitna ako je simetrična ($M^\intercal = M$) i sve svojstvene vrijednosti su joj nenegativne.*

Teorem 4.1. *Neka je $M \in \mathrm{Sym}_n$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

1. *M je pozitivno semidefinitna, tj. njezine svojstvene vrijednosti su nenegativne*
2. *$x^\intercal M x \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *Postoji matrica $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da $M = U^\intercal U$.*

Oznakom Sym_n^+ označavamo skup pozitivno semidefinitnih $n \times n$ matrica. Matricu M nazivamo pozitivno definitnom ako vrijedi $x^\intercal M x > 0$ za sve $x \neq 0$.

Definicija 4.2. *Zadaća semidefinitnog programiranja ima sljedeći oblik:*

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to max \\ &\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} = b_k, \;\; k = 1, ..., m \\ &X \succeq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdje su x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, n^2 vrijednosti koje zadovoljavaju uvjete simetrije $x_{ij} = x_{ji}$ za sve i, j, c_{ij}, a_{ijk} i b_k su realni koeficijenti i

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Sym}_n.$$

U kompaktnijoj formi, (4.1) se može napisati i kao

$$\begin{aligned} &C \cdot X \to max \\ &A_1 \cdot X = b_1 \\ &A_2 \cdot X = b_2 \\ &\quad \vdots \\ &A_m \cdot X = b_m \\ &X \succeq 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje je

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$$

matrica funkcije cilja i

$$A_k = (a_{ijk})_{i,j=1}^n, \; k = 1, ...m.$$

Sustav od m linearnih ograničenja $A_1 \cdot X = b_1, ..., A_m \cdot X = b_m$ možemo napisati i kao

$$AX = b$$

gdje je $b = (b_1, ..., b_m)$ i $A : \mathrm{Sym}_n \to \mathbb{R}^m$ linearno preslikavanje.

Kao i kod linearnog programiranja, zadaću semidefinitnog programiranja (4.2) nazivamo dopustivom ako postoji dopustiva točka, tj. matrica $\tilde{X} \in \mathrm{Sym}_n$ takva da $A\tilde{X} = b$, $\tilde{X} \succeq 0$. Vrijednost dopustive zadaće semidefinitnog programiranja je definirana kao

$$\sup\{C \cdot X : \; AX = b, X \succeq 0\} \tag{4.3}$$

što uključuje mogućnost da je vrijednost jednaka ∞, inače govorimo o ograničenoj zadaći semidefinitnog programiranja.

Optimalna točka je dopustiva točka X^* takva da $C \cdot X^* \geq C \cdot X$ za sve dopustive točke X. Posljedično, ako postoji optimalna točka, vrijednost zadaće semidefinitnog programiranja je konačna, što znači da je supremum iz (4.3) zapravo maksimum.

Napomena 4.1. Ako je supremum u (4.3) konačan, općenito ne možemo zaključiti da je vrijednost moguće postići. Pokazat ćemo to na primjeru:
Neka je $X \in \mathrm{Sym}_2$,

$$\begin{aligned} -x_{11} &\to \max \\ x_{12} &= 1 \\ X &\succeq 0. \end{aligned}$$

Dopustive točke ove zadaće su sve pozitivne semidefinitne matrice X oblika:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da je takva matrica pozitivno semidenitna ako i samo ako $x_{11}, x_{22} \geq 0$ i $x_{11}x_{22} \geq 1$. Ekvivalentno, $x_{11} > 0$ i $x_{22} \geq 1/x_{11}$. Ovo povlači da je vrijednost zadaće jednaka 0, ali ne postoji točka koje postiže tu vrijednost.

Primjer 4.1. $n = 3,\ m = 2$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Tada će varijabla X biti 3×3 simetrična matrica

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{aligned} C \bullet X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \\ &= x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 9x_{22} + 3x_{31} + 7x_{33} \\ &= \text{(zbog simetričnosti)} \\ &= x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 7x_{33} \end{aligned}$$

Problem sad možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} & x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 7x_{33} \to \min \\ & x_{11} + 2x_{13} + 3x_{22} + 14x_{23} + 5x_{33} = 11 \\ & 4x_{12} + 16x_{13} + 6x_{22} + 4x_{33} = 19 \\ & X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

Na sljedećem primjeru ćemo pokazati da je zadaća linearnog programiranja zapravo specijalan slučaj zadaće semidefinitnog programiranja.

Primjer 4.2. Pretpostavimo da $(c, a_1, ..., a_m, b)$ sadrži podatke za zadaću linearnog programiranja, tada definiramo

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \end{bmatrix}, i = 1, ..., m \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Tada se zadaća može zapisati kao

$$\begin{aligned} & C \cdot X \to min \\ & A_i \cdot X = b_i, \ i = 1, ..., m \\ & X_{ij} = 0, \ i = 1, ..., n, \ j = i + 1, ..., n \\ & X \succeq 0, \end{aligned}$$

uz dogovor da je $X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}$.

Naravno, u praksi nećemo nikada pretvarati zadaću linearnog programiranja u zadaću semidefinitnog programiranja. Gornja konstrukcija pokazuje da semidefinitno programiranje uključuje linearno programiranje kao svoj specijalan slučaj.

5 Dualnost u semidefinitnom programiranju

Teorem jake dualnosti jedan je od najvažnijih rezultata u linearnom programiranju. Za semidefinitno programiranje također je razvijena teorija dualnosti, međutim dokaz je manje izravan od onog u linearnom programiranju.

Umjesto direktnog razvijanja teorije dualnosti u semidefinitnom programiranju, mi ćemo raditi u općenitijem okružju konusnog programiranja. Ova apstrakcija omogućuje nam da jasnije vidimo bit problema, a i korisna je u nekim drugim aspektima semidefinitnog programiranja.

Radi preglednosti, ponovit ćemo definiciju semidefinitnog programiranja u matričnom obliku (4.2)

$$\begin{aligned}
&C \cdot X \to \max \\
&A_i \cdot X = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m \\
&X \succeq 0.
\end{aligned}$$

Pritom, X je realna $n \times n$ simetrična matrica ($X \in \mathrm{Sym}_n$), $C \in \mathrm{Sym}_n$ matrica funkcije cilja, $b \in \mathbb{R}^m$ i $A_i \in \mathrm{Sym}_n,\ i = 1, ..., m$.

Za potrebe ovog poglavlja, zapisat ćemo ovih m ograničenja u formi $AX = b$, gdje je $A : \mathrm{Sym}_n \to \mathbb{R}^m$ linearni operator.

$$AX = (A_1 \cdot X, A_2 \cdot X, ..., A_m \cdot X).$$

Osnovni cilj ovog poglavlja je izvesti i dokazati sljedeći teorem jake dualnosti.

Teorem 5.1 (Teorem jake dualnosti za semidefinitno programiranje)**.** *Ako je zadaća semidefinitnog programiranja (4.2) dopustiva, štoviše ako postoji pozitivno definitna matrica $\tilde{X}$ takva da $A\tilde{X} = b$, te ako (4.2) ima konačnu vrijednost γ, onda je dualna zadaća*

$$\begin{aligned}
&b^\intercal y \to \min \\
&\sum_{i=1}^{m} y_i A_i - C \succeq 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

dopustiva i ima konačnu vrijednost γ.

Poveznica s konusnim programiranjem je utvrđena činjenicom da je skup $\mathrm{Sym}_n^+ = \{X \in \mathrm{Sym}_n : \ X \succeq 0\}$ pozitivnih semidefinitnih matrica zapravo zatvoreni konveksni konus.

Shema ovog poglavlja je sljedeća. Ponovit ćemo definiciju zatvorenih konveksnih konusa i definirat ćemo njihove duale. Dokazat ćemo jednostavan, ali moćan teorem separacije za zatvorene konveksne konuse koji se već može smatrati rezultatom u teoriji dualnosti. Na temelju toga, uvođenjem linearnog operatora A i vektora desne strane b, dokazat ćemo Farkasevu lemu za konuse. Za završni korak još uzimamo funkciju cilja u račun i izvodimo teorem dualnosti za konusno programiranje. Rezultat u semidefinitnom slučaj će biti izveden kao korolar.

Zatvoreni konveksni konusi i njihovi duali

Još smo u prvom poglavlju (Definicija 1.1.) definirali pojam zatvorenog konveksnog konusa.

Lema 5.1. *Skup* $\mathrm{Sym}_n^+ \subseteq \mathrm{Sym}_n$ *pozitivno semidefinitnih matrica je zatvoreni konveksni konus.*

Dokaz. Za dokaz konveksnosti uzimamo karakterizaciju simetričnih matrica (Teorem 4.1). Neka $M, N \in \mathrm{Sym}_n^+$, tada za neki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x^\intercal Mx \geq 0$ i $x^\intercal Nx \geq 0$, tj. $x^\intercal \lambda Mx = \lambda x^\intercal Mx \geq 0$ za $\lambda \geq 0$ i $x^\intercal(M+N)x = x^\intercal Mx + x^\intercal Nx \geq 0$. Time smo dokazali da se radi o konveksnom konusu.

Za dokaz zatvorenosti, pokazat ćemo da je komplement otvoren. Zaista, ako imamo simetričnu matricu M koja nije pozitivno semidefinitna, onda postoji $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ takva da $\tilde{x}^\intercal M\tilde{x} < 0$ i ova nejednakost i dalje vrijedi za sve matrice M u dovoljno maloj okolini od M. □

Pogledajmo još primjera zatvorenih konveksnih konusa. Trivijalni primjeri su naravno $K = \mathbb{R}^n$ i $K = \{0\}$. Očito je da je nenegativni ortant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}_n : \ x \geq 0\}$ primjer zatvorenog konveksnog konusa.

Primjer 5.1 (Lorentzov konus u $\mathbb{R}^n$)**.** Ovaj konus je definiran kao

$$V_n = \{(x, r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \ ||x|| \leq r\}.$$

Zatvoren je zbog nejednakosti "$\leq$" (sličan argument kao u dokazu zatvorenosti u gornjoj lemi), a konveksnost proizlazi iz nejednakosti trokuta: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definicija 5.1. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Neka je $K \subseteq V$ konus. Skup*

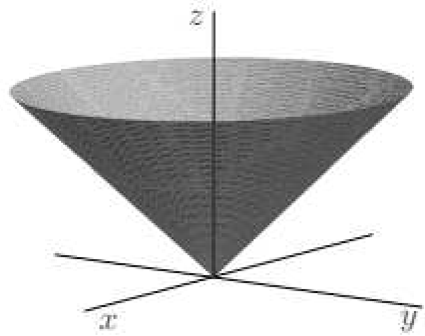
$$K^* := \{y \in V : \ \langle y, x\rangle \geq 0 \ \textit{za sve } x \in K\}$$

zovemo dualni konus od K.

K^* je zatvoreni konveksni konus čak i ako je K samo konus. Tvrdnja se lako dokazuje, koristimo bilinearnost skalarnog produkta za dokaz konveksnosti i Cauchy-Schwarzovu nejednakost za dokaz zatvorenosti.

Izračunajmo dual nenegativnog ortanta $\mathbb{R}^n_+$. To mora biti skup $y \in \mathbb{R}^n$ takvih da vrijedi

$$y^\intercal x \geq 0 \text{ za sve } x \geq 0.$$



Slika 5.1: Lorentzov konus

Ovaj skup očito sadrži nenegativni ortant $\mathbb{R}^n_+$.
Ako uzmemo $y \in \mathbb{R}^n$ takav da $y_i < 0$, imamo $y^\intercal e_i < 0$ gdje je e_i i-ti jedinični vektor (element $\mathbb{R}^n_+$), a to dokazuje da y nije element dualnog konusa $(\mathbb{R}^n_+)^*$. Slijedi da je dual od $\mathbb{R}^n_+$ zapravo $\mathbb{R}^n_+$, tj. nenegativni ortant je sam sebi dual. Za trivijalne duale, situacija je sljedeća:

K	K^*
$\{0\}$	$\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n$	$\{0\}$

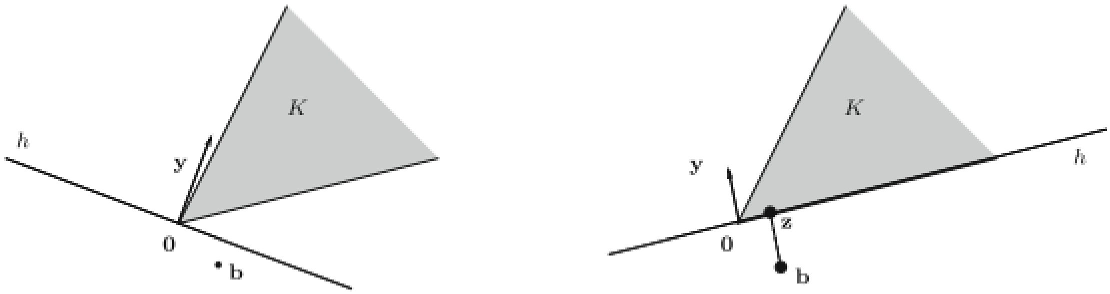
Zbog ovakve konstrukcije duala, očekujemo da će vrijediti da je dual duala zatvorenog konveksnog konusa zapravo on sam. Za konusnu dualnost ova tvrdnja stvarno vrijedi i mi ćemo ju dokazati. Možda i iznenađujuće, dokaz ove činjenice već zahtijeva teorem separacije za konuse. Međutim, teorem separacije nam je bitan i za kasnije razvijanje teorije konusnog programiranja. On, u općem slučaju, govori da disjunktni konveksni skupovi mogu biti separirani hiperravninom.

Teorem 5.2 (Teorem separacije)**.** *Neka je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus i $b \in V \backslash K$. Tada postoji vektor $y \in V$ takav da*

$$\langle y, x\rangle \ \geq 0 \ za\ sve\ x \in K,\ \ i\ \langle y, b\rangle < 0$$

.

Dokaz. Neka je z projekcija točke b na skup K. Kako je K zatvoren i konveksan skup, projekcija uvijek postoji i jedinstvena je. (Slika 5.2)



Slika 5.2: Točka b koja nije sadržana u zatvorenom konveksnom konusu K može se odvojiti od K hiperravninom $h = \{x \in V : \langle y, x\rangle = 0\}$.

Definiramo $y := z - b$. Prvo provjerimo da je $\langle y, z\rangle = 0$. Pretpostavimo da vrijedi $\langle y, z\rangle > 0$ i definiramo $z' = (1 - \alpha)z$ za mali $\alpha > 0$. Izračunamo $||z' - b||^2 = \langle (y - \alpha z), (y - \alpha z)\rangle = ||y||^2 - 2\alpha\langle y, z\rangle + \alpha^2||z||^2$. Imamo $2\alpha\langle y, z\rangle > \alpha^2||z||^2$ za dovoljno male $\alpha > 0$, a iz toga slijedi $||z' - b||^2 < ||y||^2 = ||z - b||^2$ što je u kontradikciji s tvrdnjom da je z najbliža točka skupa K u točki b. Analogno rješavamo za slučaj $\langle y, z\rangle < 0$ uzimajući $z' = (1 + \alpha)z$.

Za provjeru $\langle y, b\rangle < 0$, imamo $y \neq 0$ i izračunamo $0 < \langle y, y\rangle = \langle y, z\rangle - \langle y, b\rangle = -\langle y, b\rangle$.

Neka je $x \in K$, $x \neq z$. Kut $\angle bzx$ mora biti najmanje $90°$, inače, točke na segmentu $[z, x]$ dovoljno bliske z će biti bliže b nego z (konveksnost od K); ekvivalentno $\langle (b - z), (x - z)\rangle \leq 0$. Ovo je slično gore navedenom argumentu za $\langle y, z\rangle = 0$. Dakle $0 \geq \langle (b - z), (x - z)\rangle = -\langle y, x\rangle + \langle y, z\rangle = -\langle y, x\rangle$. □

Lema 5.2. *Neka je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus. Tada je $(K^*)^* = K$.*

Dokaz. Za inkluziju $K \subseteq (K^*)^*$, samo trebamo primijeniti definiciju dualnosti: Uzmimo $b \in K$. Po definiciji dualnosti K^*, $\langle y, b\rangle = \langle b, y\rangle \geq 0$ za sve $y \in K^*$, iz toga slijedi da je $b \in (K^*)^*$.

Za obrnutu inkluziju, uzmimo da je $b \in V \backslash K$. Prema Teoremu 5.2, možemo naći vektor y takav da $\langle y, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in K$ i $\langle y, b\rangle = \langle b, y\rangle < 0$. Prva nejednakost pokazuje da je $y \in K^*$, a posljednja nejednakost pokazuje da $b \notin (K^*)^*$. □

Farkaseva lema

Farkaseva lema je kamen temeljac teorije linearnog programiranja. Pojavljuje se u više ekvivalentnih verzija, a jednu od njih smo dokazali u prvom poglavlju.

Sada ćemo prikazati verziju koja je prikladnija za konusno programiranje.

Lema 5.3. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Tada točno jedan od sljedeća dva sustava ima rješenje:*

- $Ax = b,\ x \geq 0$
- $A^\intercal y \geq 0,\ b^\intercal y < 0.$

Ovdje želimo prije svega istaknuti da je Farkaseva lema poseban slučaj Teorema 5.2. Definiramo $V = \mathbb{R}^m$ i

$$K = \{Ax : \ x \in \mathbb{R}^n_+\} \subseteq V.$$

K je, zapravo, skup svih konusnih kombinacija stupaca od A, tj. konačno generiran konus. Konačno generirani konusi su zatvoreni i konveksni pa možemo primijeniti Teorem 5.2.

Sada, ako prvi sustav $Ax = b$, $x \geq 0$ nema rješenja, to znači da $b \in V \backslash K$. Po Teoremu 5.2, postoji $y \in V = \mathbb{R}^m$ takav da

$$y^\intercal Ax \geq 0 \ \textit{za sve}\ x \in \mathbb{R}^n_+, \ \textit{i}\ y^\intercal b < 0.$$

Kako prethodna nejednakost znači $A^\intercal Y \in (\mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n_+$, mi zapravo imamo rješenje drugog sustava $A^\intercal y \geq 0$, $b^\intercal y < 0$. Vidimo da prvi i drugi sustav nikad ne mogu biti rješivi istodobno.
U ovom potpoglavlju želimo generalizirati Farkasevu lemu za sustave oblika

$$AX = b, \ x \in K$$

gdje je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus, a $A : V \to W$ linearni operator.

"Standardna" Farkaseva lema bavi se slučajem $K = \mathbb{R}^n_+ \subseteq V := \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, gdje linearni operator može biti prikazan matricom. Za semidefinitno programiranje moramo promotriti slučaj $K = \mathrm{Sym}^+_n \subseteq V := \mathrm{Sym}_n$ i $W = \mathbb{R}^m$.

Postoje dvije prepreke za prevladati. Prva je tehničke prirode: moramo definirati što $A^\intercal$ treba značiti za opći linearni operator. Druga je stvarna: konus oblika $\{AX : \ X \in K\}$ je konveksan, ali ne i nužno zatvoren, tako da Teorem 5.2 neće biti primjenjiv.

Definirat ćemo odgovarajuću generalizaciju transponirane matrice.

Definicija 5.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator. Kažemo da je linearni operator $A^\intercal : W \to V$ adjungiran operatoru A ako vrijedi*

$$\langle y, Ax\rangle_W = \langle A^\intercal y, x\rangle_V \ \textit{za sve}\ x \in V \ \textit{i}\ y \in W.$$

Za $V = \mathbb{R}^n$ i $W = \mathbb{R}^m$ i operator reprezentiran $m \times n$ matricom A, transponirana matrica $A^\intercal$ predstavlja jedinstveni adjungirani operator. Općenito, ako su V i W konačnodimenzionalni prostori (što pretpostavljamo), postoji adjungirani operator $A^\intercal$ operatoru A. Ako postoji adjungirani operator, onda je lako vidjeti da je on jedinstven, što opravdava zapis $A^\intercal$.

U semidefinitnom programiranju, imamo $V = \mathrm{Sym}_n$ (sa skalarnim produktom $X \cdot Y$) i $W = \mathbb{R}^m$ (sa standardnim skalarnim produktom). U ovom slučaju je također lako odrediti adjungirani operator.

Lema 5.4. *Neka je $V = \mathrm{Sym}_n$, $W = \mathbb{R}^m$ i $A : V \to W$ definiran s $AX = (A_1 \cdot X, A_2 \cdot X, ..., A_m \cdot X)$. Tada*

$$A^\intercal y = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i.$$

Nakon što smo definirali adjungiran operator i time riješili prvu prepreku, ostaje nam pitanje zatvorenosti konusa $C := A(K) = \{Ax : \ x \in K\}$.

Da spasimo situaciju, radit ćemo sa zatvaračem skupa C.

Definicija 5.3. *Neka je $C \subset \mathbb{R}^n$. Zatvarač skupa C, u oznaci $\bar{C}$, je presjek svih zatvorenih skupova što sadrže C.*

Lema 5.5. *Neka je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus i $C = \{Ax : \ x \in K\}$. Tada je $\bar{C}$ zatvoreni konveksni konus.*

Dokaz. Budući da znamo da je C konus (lako dobijemo raspisivanjem po definiciji konusa), ostaje nam provjeriti da ako je C konus, tada vrijedi i da je $\bar{C}$ konus.

Neka je $x \in \bar{C}$ takav da postoji niz $(x_n) \subseteq C$ takav da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i neka je $\lambda \geq 0$. Tada vrijedi $\lambda x = \lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{\lambda x_n}_{\in C}) \in \bar{C}$, odnosno $\bar{C}$ je konus i lema je dokazana. □

Činjenica "$b \in \bar{C}$" može se zapisati bez referenciranja na konus C, što će biti prikladnije za ono što slijedi.

Definicija 5.4. *Neka je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus. Sustav*

$$Ax = b, \ x \in K$$

se naziva granično dopustivim ako postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da $x_k \in K$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{k\to\infty} Ax_k = b$$

Jasno je da ako je sustav $Ax = b,\ x \in K$ granično dopustiv, tada je $b \in \bar{C}$, ali vrijedi i obrnuta implikacija. Ako je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u C koji konvergira prema b, tada svaki niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da $y_k = Ax_k$ za sve k dokazuje graničnu dopustivost sustava. Sada pišemo varijantu Farkaseve leme za konuse.

Lema 5.6 (Farkaseva lema za konuse)**.** *Neka je $K \subseteq V$ zatvoreni konveksni konus i $b \in W$. Ili je sustav*

$$Ax = b,\ x \in K$$

granično dopustiv, ili sustav

$$A^{\intercal}y \in K^*,\ \langle b, y\rangle < 0$$

ima rješenje, ali ne oboje.

Dokaz. Ako je $Ax = b,\ x \in K$ granično dopustiv, uzimamo jedan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ iz definicije granične dopustivosti sustava. Za $y \in W$, računamo

$$\langle y, b\rangle = \langle y, \lim_{k\to\infty} Ax_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle y, Ax_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle A^{\intercal}y, x_k\rangle.$$

Ako je $A^{\intercal}y \in K^*$, tada $x_k \in K$ povlači $\langle A^{\intercal}y, x_k\rangle \geq 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, pa slijedi $\langle y, b\rangle \geq 0$, tj. drugi sustav nema rješenja.

Ako $Ax = b,\ x \in K$ nije granično dopustiv, to se može ekvivalentno izraziti kao $b \notin \bar{C}$, gdje je $C = \{A(x) :\ x \in K\}$. Kako je $\bar{C}$ zatvoreni konveksni konus, iskoristimo Teorem separacije (Teorem 5.2) da dobijemo hiperravninu koja strogo razdvaja b od $\bar{C}$ (a onda i od C). To znači da smo našli $y \in W$ takav da

$$\langle y, b\rangle < 0 \text{ i za sve } x \in K,\ \langle y, Ax\rangle = \langle A^{\intercal}y, x\rangle \geq 0.$$

Ostaje nam zaključiti da je izraz "$\langle A^{\intercal}y, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in K$" ekvivalentan s "$A^{\intercal}y \in K^*$". □

Konusno programiranje

Sada ćemo definirati pojam konusnog programiranja. Ova dodatna općenitost u odnosu na semidefinitno programiranje će uvesti simetriju između primarnog i dualnog programiranja.

Definicija 5.5. *Neka su $K \subseteq V,\ L \subseteq W$ zatvoreni konveksni konusi, $b \in W,\ c \in V$ i $A : V \to W$ linearni operator. Zadaća konusnog programiranja je optimizacijski problem oblika*

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle \to \max \\ &b - Ax \in L \\ &x \in K \end{aligned} \tag{5.2}$$

Za $L = \{0\}$, dobijemo zadaću konusnog programiranja u obliku ranije promatrane jednadžbe.

Slično kao i kod linearnog programiranja, zadaću konusnog programiranja nazivamo dopustivom ako postoji dopustiva točka $\tilde{x}$ takva da $b - A(\tilde{x}) \in L,\ \tilde{x} \in K$. Vrijednost dopustive zadaće konusnog programiranja definirana je kao

$$\sup\{\langle c, x\rangle :\ b - A(x) \in L,\ x \in K\}, \tag{5.3}$$

što uključuje mogućnost da je vrijednost ∞.

Optimalna točka je dopustiva točka x^* takva da $\langle c, x^*\rangle \geq \langle c, x\rangle$ za svaku dopustivu točku x. Dakle, ako postoji optimalna točka, onda je vrijednost zadaće konusnog programiranja konačna, a ta vrijednost je postignuta, što znači da je supremum u (5.3) zapravo maksimum.

Već smo u prethodnoj točki pričali o pojmu granične dopustivosti (Definicija 5.4), što je također jedan aspekt s kojim se ne susrećemo u linearnom programiranju. Ako zadaća linearnog programiranja nije dopustiva, ona će takva ostati u bilo kojoj dovoljno maloj perturbaciji desne strane b. Nasuprot tome, postoje zadaće konusnog programiranja koje nisu dopustive, a mogu postati dopustive pod proizvoljno malom perturbacijom desne strane b.

Ponovit ćemo Definiciju 5.4 za linearni operator $(A|id) : V \oplus W \to W$ i konus $K \oplus L$.

Definicija 5.6. *Kažemo da je zadaća konusnog programiranja (5.2) granično dopustiva ako postoje nizovi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da $x_k \in K$ i $x'_k \in L$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i*

$$\lim_{k\to\infty}(Ax_k + x'_k) = b$$

Ovakvi nizovi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se zovu dopustivi nizovi od (5.2).

Svaka dopustiva zadaća je granično dopustiva, a obrat vrijedi samo ako je konus $C = \{Ax + x' :\ x \in K,\ x \in L\}$ zatvoren.

Granično dopustivoj zadaći konusnog programiranja možemo dodijeliti vrijednost, a tu vrijednost nazivamo granična vrijednost.

Definicija 5.7. *S obzirom na dopustiv niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zadaće (5.2), definiramo njegovu vrijednost kao*

$$\langle c, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle := \limsup_{k\to\infty}\langle c, x_k\rangle.$$

Granična vrijednost od (5.2) je onda definirana kao

$$\sup\{\langle c, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle :\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ je dopustiv niz od } (5.2)\}.$$

Nije teško provjeriti da je granična vrijednost dostignuta nekim dopustivim nizom.

Po definiciji, vrijednost zadaće dopustivog konusnog programiranja uvijek je odozgo omeđena graničnom vrijednošću i primamljivo je misliti da su one jednake. Međutim, to općenito nije točno. Postoje dopustive zadaće s konačnom vrijednošću, a beskonačnom graničnom vrijednošću. Moguća je i situacija gdje su obe vrijednosti konačne, a nisu jednake.

Srećom, takvi problemi nestaju ako program ima unutrašnju točku. Općenito, zahtijevanje dodatnih uvjeta, u cilju izbjegavanja iznimnih situacija, zovemo zahtjevima regularnosti. Postojanje unutrašnje točke poznato je kao Slaterov zahtjev regularnosti

Definicija 5.8. *Unutrašnja točka (ili Slaterova točka) konusnog programa je vektor x takav da*

$$x \in K,\ b - Ax \in L,$$

sa sljedećim dodatnim uvjetom:

$$\begin{aligned} x &\in int(K) \quad \textit{ako } L = \{0\},\ i \\ b - Ax &\in int(L) \quad \textit{inače.} \end{aligned}$$

(Za skup S, $int(S)$ je skup svih točaka x takvih da postoji dovoljno malena kugla oko x potpuno sadržana u S.)

Teorem 5.3. *Ako zadaća konusnog programiranja (5.2) ima unutrašnju točku, onda je njezina vrijednost jednaka graničnoj vrijednosti.*

Dualnost

Zadaću konusnog programiranja (5.2) zvat ćemo primarnom zadaćom s oznakom (P):

$$\begin{aligned} (P) \quad & \langle c, x\rangle \to \max \\ & b - Ax \in L \\ & x \in K. \end{aligned}$$

Sada definiramo dualnu zadaću također kao zadaću konusnog programiranja:

$$\begin{aligned} (D) \quad & \langle b, y\rangle \to \min \\ & A^{\intercal} y - c \in K^* \\ & y \in L^*. \end{aligned}$$

(D) formalno nema oblik zadaće (5.2), ali to možemo lako postići tako da ju zapišemo kao:

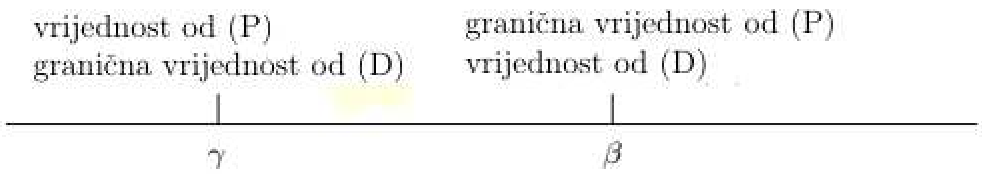
$$
\begin{aligned}
(D') \quad & -\langle b, y\rangle \to \max \\
& -c + A^{\intercal} y \in K^* \\
& y \in L^*.
\end{aligned}
$$

Za dualni problem (D), što je problem minimizacije, vrijednost i granična vrijednost su definirani preko inf i lim inf, analogno.

Kao i kod linearnog programiranja, pretpostavljamo da je primarna zadaća (P) dopustiva i ima konačnu vrijednost. Onda želimo zaključiti da je i njegova dualna zadaća dopustiva i ima jednaku vrijednost. Ali, za razliku od linearnog programiranja, trebamo još jedan uvjet da bi ovo vrijedilo: (P) mora imati unutrašnju točku. Sada ćemo napisati teorem jake dualnosti za konusno programiranje.

Teorem 5.4. *Ako je primarna zadaća (P) dopustiva, ima konačnu vrijednost γ i ima unutrašnju točku $\tilde{x}$, onda je dualna zadaća (D) također dopustiva i ima jednaku vrijednost γ.*

Ovo je shema dokaza. Prvo ćemo dokazati slabu dualnost, sličnu kao i kod linearnog programiranja. Onda ćemo dokazati regularnu dualnost: ako je primarna zadaća (P) granično dopustiva, onda je dualna zadaća (D) dopustiva i ne postoji "praznina" između granične vrijednosti (P) i vrijednosti (D). Kod linearnog programiranja, naravno, ne postoji razlika između vrijednosti i granične vrijednosti i zato tamo preskačemo regularnu dualnost i odmah prelazimo na jaku dualnost. Ali ovdje je moguć sljedeći scenarij: I (P) i (D) su dopustivi, ali postoji praznina između vrijednosti γ i β (Slika 5.3). Kako bi



Slika 5.3: Praznina između γ i β.

dobili jaku dualnost, treba nam Slaterov zahtjev regularnosti: Ako primarna zadaća (P) ima unutrašnju točku (Definicija 5.8), onda nema praznine između primarne i dualne vrijednosti. Ovaj rezultat je trivijalna posljedica regularne dualnosti i Teorema 5.3.

Slaba dualnost

Teorem 5.5. *Ako je dualna zadaća (D) dopustiva i ako je primarna zadaća (P) granično dopustiva, onda je granična vrijednost od (P) ograničena odozgo vrijednošću od (D).*

Ako je (P) također dopustiv, vrijednost od (P) je ograničena odozgo vrijednošću od (D) i one su konačne. Ovo je zapravo slaba dualnost kakvu poznajemo iz linearnog programiranja.

Dokaz. Uzmimo bilo koje dopustivu točku y iz (D) i proizvoljno dopustiv niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ iz (P). Koristeći definiciju adjungiranog operatora $A^\intercal$, imamo

$$0 \leq \langle \underbrace{A^\intercal y - c}_{\in K^*}, \underbrace{x_k}_{\in K} \rangle + \langle \underbrace{y}_{\in L^*}, \underbrace{x'_k}_{\in L} \rangle = \langle y, Ax_k + x'_k \rangle - \langle c, x_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sada vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty} \langle c, x_k \rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \langle y, Ax_k + x'_k \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle y, Ax_k + x'_k \rangle = \langle y, b \rangle.$$

Kako je dopustiv niz proizvoljan, granična vrijednost od (P) nije veća od $\langle y, b \rangle$, a budući je y proizvoljna dopustiva točka od (D), dokaz je gotov. □

Regularna dualnost

Teorem 5.6. *Dualna zadaća (D) je dopustiva i ima konačnu vrijednost β ako i samo ako je primarna zadaća (P) granično dopustiva i ima konačnu graničnu vrijednost γ. Tada vrijedi $\beta = \gamma$.*

Dokaz. Ako je (D) dopustiv i ima vrijednost β, znamo da vrijedi

$$A^\intercal y - c \in K^*,\ y \in L^* \quad \Rightarrow \quad \langle b, y \rangle \geq \beta. \tag{5.4}$$

Također znamo

$$A^\intercal y \in K^*,\ y \in L^* \quad \Rightarrow \quad \langle b, y \rangle \geq 0. \tag{5.5}$$

Zaista, ako postoji y koji ne zadovoljava posljednju implikaciju, mogli bismo dodati veliki pozitivni višekratnik na bilo koje dopustivu točku (D) i na taj način dobiti dopustivu točku vrijednosti manje od β.

Sada možemo spojiti (5.4) i (5.5) u jednu implikaciju

$$A^\intercal y - zc \in K^*,\ y \in L^*,\ z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b, y \rangle \geq z\beta. \tag{5.6}$$

Za $z > 0$, ovu implikaciju dobijemo iz (5.4) množenjem svih izraza sa z i preimenovanjem $zy \in L^*$ natrag u y. Za $z = 0$, imamo (5.5). Koristeći matrični zapis, implikaciju možemo zapisati

$$\begin{bmatrix} A^\intercal & -c \\ id & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (y, z) \in K^* \oplus L^* \oplus \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \langle (b, -\beta), (y, z) \rangle \geq 0. \tag{5.7}$$

Ovdje i u nastavku, uzimamo vektor stupac $c \in V$ kao linearni operator $z \rightarrowtail zc$ od $\mathbb{R}$ do V i vektor redak $c^\intercal$ kao (adjungirani) linearni operator $x \rightarrowtail \langle c, x \rangle$ od V do $\mathbb{R}$.

Matrični oblik (5.7) nam dopušta da iskoristimo Farkasevu lemu. Prema Lemi 5.6, implikacija (5.7) vrijedi ako i samo ako je sustav

$$\begin{bmatrix} A & id & 0 \\ -c^\intercal & 0^\intercal & 1 \end{bmatrix} (x, x', z) = (b, -\beta), \ (x, x', z) \in (K^* \oplus L^* \oplus \mathbb{R}_+)^* = K \oplus L \oplus \mathbb{R}_+ \tag{5.8}$$

granično dopustiv.

Sustav (5.8) je granično dopustiv ako i samo ako postoje nizovi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da $x_k \in K$, $x'_k \in L$, $z_k \geq 0$ za sve k i

$$\lim_{k\to\infty} Ax_k + x'_k = b \tag{5.9}$$

i

$$\lim_{k\to\infty} \langle c, x_k \rangle - z_k = \beta. \tag{5.10}$$

(5.9) pokazuje da je (P) granično dopustiv, a (5.10) pokazuje da je granična vrijednost od (P) barem β. Iz slabe dualnosti znamo da je on najviše β pa smo jednu stranu dokazali.

Za obrnutu implikaciju pretpostavimo da je (P) granično dopustiv s konačnom graničnom vrijednosti γ.

Pretpostavimo suprotno, tj. da (D) nije dopustiv. Tada vrijedi

$$A^\intercal y - zc \in K^*, \ y \in L^*, \quad \Rightarrow \quad z \leq 0, \tag{5.11}$$

jer za bilo koji par (y, z) koji to krši, $\frac{1}{z} y$ bi bilo dopustivo rješenje od (D). Sada ćemo ovo ponovno zapisati u matričnom obliku da možemo iskoristiti Farkasevu lemu.

$$\begin{bmatrix} A^\intercal & -c \\ id & 0 \end{bmatrix} (y, z) \in K^* \oplus L^* \quad \Rightarrow \quad \langle (0, -1), (y, z) \rangle \geq 0. \tag{5.12}$$

Prema Lemi 5.6 (Farkaseva lema), ovo znači da je sustav

$$\begin{bmatrix} A & id \\ -c^{\mathsf{T}} & 0 \end{bmatrix} (x, x') = (0, -1), \ (x, x') \in (K^* \oplus L^*)^* = K \oplus L \tag{5.13}$$

granično dopustiv, što zapravo znači da postoje nizovi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da $x_k \in K$, $x'_k \in L$ za sve k i

$$\lim_{k\to\infty} Ax_k + x'_k = 0 \tag{5.14}$$

i

$$\lim_{k\to\infty} \langle c, x_k \rangle = 1. \tag{5.15}$$

Ovo je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Elemenarno dodavanje $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilo kojem dopustivom nizu od (P) koji postiže graničnu vrijednost γ će rezultirati dopustivim nizom koji postiže graničnu vrijednost najmanje $\gamma + 1$.

Prema tome, dualna zadaća (D) mora biti dopustiva. Slaba dualnost (Teorem 5.5) povlači da (D) ima konačnu vrijednost $\beta \geq \gamma$. Jednakost $\beta = \gamma$ slijedi iz dokaza prve implikacije. □

Jaka dualnost

Sada napokon možemo dokazati teorem jake dualnosti pod uvjetom Slaterovog zahtjeva regularnosti.

Dokaz Teorema 5.4. Primarna zadaća (P) je dopustiva, pa onda i granično dopustiv. Budući da ima unutrašnju točku, Teorem 5.3 pokazuje da je granična vrijednost (P) jednaka vrijednosti (P), tj. γ. Koristeći Teorem 5.6 (Regularna dualnost), slijedi tvrdnja. □

Semidefinitni slučaj

Koristeći Teorem 5.4, možemo dokazati ono što nam je od početka bila namjera - teorem jake dualnosti za semidefinitno programiranje (Teorem 5.1). U tu svrhu primjenjujemo teorem 5.4 gdje je $V = \mathrm{Sym}_n$, $W = \mathbb{R}^m$, $K = \mathrm{Sym}_n^+$ *i* $L = \{0\}$. Prema Lemi 5.4 adjungirani operator poprima potreban oblik

$$A^{\mathsf{T}} y = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i.$$

Posljednja stvar za dokaz Teorema 5.1 je da odredimo dual skupa pozitivno semidefinitnih matrica. Kao što ćemo vidjeti, taj skup je sam sebi dual.

Lema 5.7. $(\mathrm{Sym}_n^+)^* = \mathrm{Sym}_n^+$.

Dokaz. Prvo provjerimo da svaki $X \succeq 0$ također pripada $(\mathrm{Sym}_n^+)^*$, što znači da treba dokazati da $X \cdot Y \geq 0$ za svaki $X, Y \succeq 0$.
Zapisat ćemo X u obliku $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \beta_i^\intercal$, gdje su β_i jedinični vektori i $\lambda_i \geq 0$ (prema spektralnom teoremu). Onda ćemo upotrijebiti izraz $X \cdot Y$ za $\mathrm{Tr}(X^\intercal Y) = \mathrm{Tr}(XY)$, odnosno trag matrice XY. Znamo da vrijedi "komutativnost" traga, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Računamo

$$X \cdot Y = \mathrm{Tr}(\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \beta_i^\intercal Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{Tr}(\beta_i \beta_i^\intercal Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathrm{Tr}(\beta_i^\intercal Y \beta_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i^\intercal Y \beta_i \geq 0,$$

Nejednakost vrijedi zbog $Y \succeq 0$.

Ostaje dokazati drugu inkluziju $(\mathrm{Sym}_n^+)^* \subseteq \mathrm{Sym}_n^+$. Uzmimo proizvoljni $M \in (\mathrm{Sym}_n^+)^*$. Za sve $x \in \mathbb{R}^n$, matrica $xx^\intercal$ je pozitivno semidefinitna, pa koristeći isti trik s tragom od prije, računamo

$$0 \leq M \cdot xx^\intercal = \mathrm{Tr}((Mx)x^\intercal) = \mathrm{Tr}(x^\intercal Mx) = x^\intercal Mx.$$

Imamo $x^\intercal Mx \geq 0$ za sve x, pa slijedi $M \succeq 0$. Lema je dokazana, a s njom i Teorem 5.1. □

Slika 5.4. na sljedećoj stranici rezimira cijeli put dokaza teorema jake dualnosti za semidefinitno programiranje koji smo proveli u ovom poglavlju.

6 Metoda unutrašnje točke za semidefintno programiranje

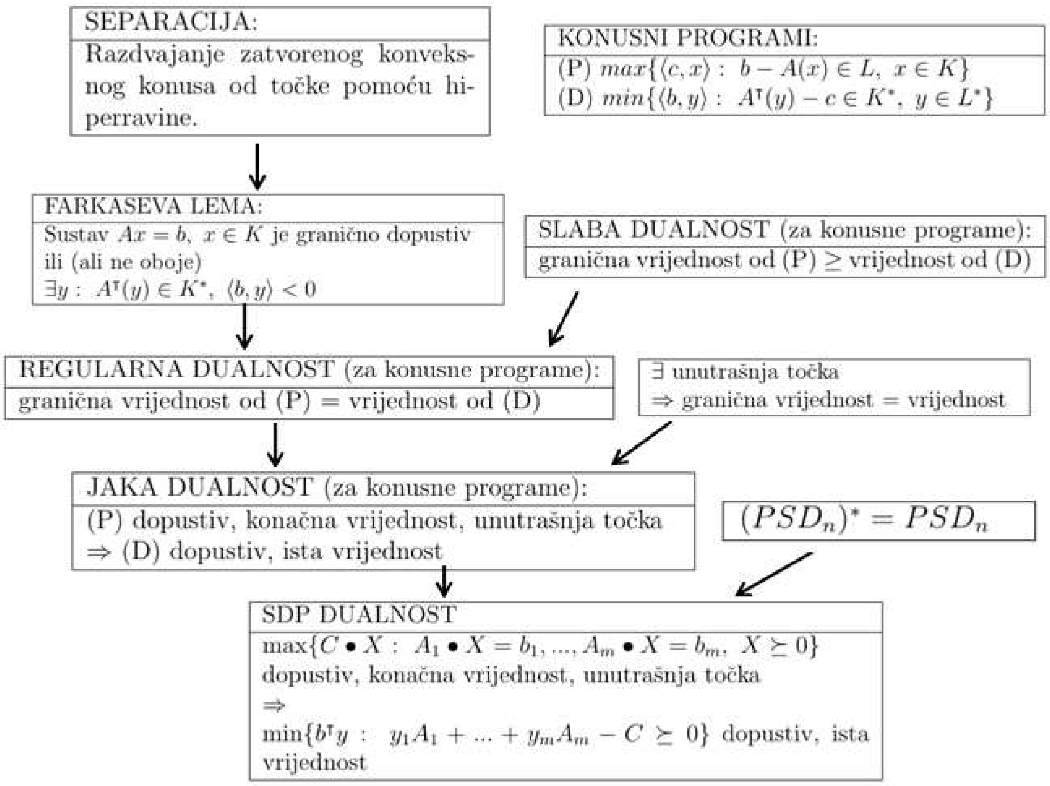
Kao u prvom poglavlju, i ovdje ćemo opisati jednu od jednostavnijih i ilustrativnijih metoda unutrašnje točke - metodu centralnog puta. Detaljno ćemo obraditi teorijsku pozadinu algoritma centralnog puta, odnosno egzistenciju i jedinstvenost rješenja i uvjete pod kojim se postiže. Također ćemo objasniti glavne korake algoritma.

Ponovimo problem semidefinitnog programiranja u obliku jednadžbe:

$$\begin{aligned} &C \cdot X \to \max \\ &A_i \cdot X = b_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ &X \succeq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdje su C i A_i simetrične matrice.

Glavna ideja svih metoda centralnog puta je riješiti se "teškog" nelinearnog ograničenja $X \succeq 0$ izmjenom funkcije cilja. Naime, dodamo joj kaznenu funkciju tako da funkcija cilja teži u $-\infty$ kako se od interiora skupa



Slika 5.4: Skica dokaza Teorema jake dualnosti za SDP

$\mathrm{Sym}_n^+ = \{X \in \mathrm{Sym}_n : X \succeq 0\}$ pribiližavamo njegovoj granici. Takvom modifikacijom možemo odbaciti uvjet $X \succeq 0$.

Formalno, za realni broj $\mu > 0$, razmatramo sljedeći pomoćni problem

$$\begin{aligned} &f_\mu(X) := C \cdot X + \mu \ln \det X \to \max \\ &A_i \cdot X = b_i,\ i = 1, ..., m, \\ &X \succ 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

$X \succ 0$ znači da je X pozitivno definitan (sve svojstvene vrijednosti su mu strogo pozitivne). Kako sve matrice na granici skupa Sym_n^+ imaju barem jednu svojstvenu vrijednost jednaku 0, singularne su i zadovoljavaju $\det X = 0$. $\mu \ln \det X$ je zaista kaznena funkcija u gore navedenom smislu.

Željeli bi pokazati da pod određenim uvjetima, pomoćni problem (6.2) ima jedinstveno rješenje $X^*(\mu)$ za svaki $\mu > 0$ i da $C \cdot X^*(\mu)$ konvergira optimalnoj vrijednosti (6.1) kada $\mu \to 0$. Očito je da moramo pretpostaviti da postoji dopustivi $X \succ 0$, ali bit će nam potrebni i dodatni uvjeti. Skup $\{X^*(\mu) : \ \mu > 0\}$ je poznat kao centralni put jer kazneni dio $\mu \ln \det X$ gura $X^*(\mu)$ prema centru dopustivog područja.

Jedinstvenost rješenja

Lema 6.1. *Funkcija* $X \to \ln \det X$ *je strogo konkavna na skupu* Sym_n^+*. (Budući je* $C \cdot X$ *linearna u* X*, to također povlači strogu konkakvnost funkcije* f_μ *za svaki* $\mu > 0$*.)*

Dokaz. Neka su $X, Y \succ 0, \ X \neq Y$. Moramo pokazati da je za $0 \leq \alpha \leq 1$ zadovoljena nejednakost

$$\ln \det(\alpha X + (1-\alpha)Y) \geq \alpha \ln \det A + (1-\alpha) \ln \det Y$$

i da jednakost vrijedi za $X = Y$ ili $\alpha \in \{0, 1\}$.
Napisat ćemo matricu X kao umnožak $X^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}$, a s λ_i označavamo i-tu svojstvenu vrijednost matrice $X^{-\frac{1}{2}}YX^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
&\ln \det(X^{\frac{1}{2}}(\alpha I + (1-\alpha)X^{-\frac{1}{2}}YX^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}}) \\
=& \ln((\det X) \det(\alpha I + (1-\alpha)X^{-\frac{1}{2}}YX^{-\frac{1}{2}})) \\
=& \ln \det X + \ln \prod_{i=1}^{n} (\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \\
=& \ln \det X + \sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \\
\geq& \ln \det X + (1-\alpha) \ln \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \\
=& \ln \det X + (1-\alpha) \ln \det(X^{-1}Y) \\
=& \ln \det X - (1-\alpha) \ln \det X + (1-\alpha) \ln \det Y
\end{aligned}$$

Stroga konkavnost slijedi iz stroge konkavnosti logaritma. □

Lema 6.2. *Ako* f_μ *postiže maksimum na dopustivom području od (6.2), onda* f_μ *postiže jedinstveni maksimum.*

Dokaz. Ova tvrdnja lako slijedi iz činjenice da je f_u stogo konkavna na interioru Sym_n^+ (Lema 6.1), što znači da za svaki $X, Y \succ 0$ takav da $X \neq Y$ vrijedi

$$f_\mu((1-t)X + tY) > (1-t)f_\mu(X) + tf_\mu(Y), \quad 0 < t < 1.$$

Ako se maksimum postiže u dvije različite matrice X^* i Y^*, onda bi stroga konkavnost implicirala da $(X^* + Y^*)/2$ postiže još veću f_μ-vrijednost - kontradikcija. $\square$

Nužni i dovoljni uvjeti za optimalnost

Iz prethodnog odjeljka znamo da ako za pomoćni problem uopće postoji optimalna točka $X^*(\mu)$, tada je ona jedinstvena. Sada koristimo metodu Lagrangeovih multiplikatora da izvedemo nužne i dovoljne uvjete optimalnosti za optimalnu točku $X^*(\mu)$.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora je općenita metoda za nalaženje (lokalnog) maksimuma $f(x)$ uz m ograničenja $g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, ...,\ g_m(x) = 0$, gdje su f i $g_1, ..., g_m$ funkcije iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$. U njoj se uvodi sljedeći sustav jednadžbi s nepoznanicama $x \in \mathbb{R}^n$ i $y \in \mathbb{R}^m$ (y_i su pomoćne varijable koje nazivamo Lagrangeovi multiplikatori):

$$g_1(x) = g_2(x) = ... = g_m(x) = 0 \text{ i } \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x). \tag{6.3}$$

Ovdje ∇ označava gradijent:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^\intercal.$$

Teorem 6.1. *Neka su f i g_i definirani na nepraznom otvorenom podskupu U od $\mathbb{R}^n$ i imaju neprekidne prve parcijalne derivacije na njemu. Neka je $\tilde{x} \in U$ regularna točka, što znači da su vektori $\nabla g(\tilde{x})$ linearno nezavisni.*
Ako je $\tilde{x}$ lokalni maksimum od $f(x)$ uz uvjet $g_1(x) = ... = g_m(x) = 0$, tada $\tilde{x}$ zadovoljava (6.3), tj. tada postoji $\tilde{y}$ takav da $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ zajedno zadovoljavaju (6.3).

Ako su funkcije ograničenja g_i linearne (što je istina u našem slučaju), onda možemo odbaciti uvjet regularnosti na $\tilde{x}$.

Sad kad smo ukratko opisali metodu Lagrangeovih multiplikatora, možemo ju primjeniti na naš problem.

Lema 6.3. *Ako je $X^*(\mu) \succ 0$ optimalna točka za pomoćni problem (6.2), onda postoji vektor $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ takav da $X^*(\mu)$ i $\tilde{y}$ zadovoljavaju jednakosti*

$$A_i \cdot X = b_i,\ i = 1, 2, ..., m,$$
$$C + \mu X^{-1} = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i.$$

Dokaz ove leme je jednostavan jednom kad definiramo funkcije f i g_i na koje možemo primjeniti Teorem 6.1.

Za otvoreni podskup U uzimamo dovoljno malo područje naše optimalne točke $X^*(\mu)$. Za funkciju f jednostavno uzimamo funkciju cilja s kaznenim dijelom:

$$f(X) = f_\mu(X) = C \cdot X + \mu \ln \det(X).$$

Imamo dva skupa funkcija ograničenja:

$$g_i(X) = A_i \cdot X - b_i, \; i = 1, 2, ..., m,$$

za linearna ograničenja i

$$g_{ij}(X) = x_{ij} - x_{ji}, \; 1 \leq i < j \leq n,$$

za iskazivanje simetrije od X. Pošto je $X^*(\mu)$ maksimum pomoćnog problema (6.2), vrijedi da je (lokalni) maksimum ograničenjima $g_i(X) = 0$ i $g_{ij}(X) = 0$ zbog $X^*(\mu) \succ 0$. g_i i g_{ij} su linearni pa ne trebamo brinuti za uvjet regularnosti $X^*(\mu)$. Također, lako je pokazati da vrijedi $\nabla \ln \det X = (X^\intercal)^{-1}$. Sad smo definirali sve potrebno za dokaz leme primjenom Teorema 6.1.

Dokaz Leme 6.3. Jednadžbe $A_i \cdot X(\mu) = b_i, \; i = 1, 2, ..., m$ slijede iz dopustivosti $X^*(\mu)$ pomoćnog problema.

Drugi skup jednadžbi se dobije iz uvjeta Lagrangeovih multiplikatora. Prvo moramo izračunati gradijent funkcija f, g_i, g_{ij} gore definiranih. Koristeći činjenicu da vrijedi $\nabla(M \cdot X) = M$ za svaku matricu M, računamo

$$\nabla f_\mu(X) = C + \mu(X^\intercal)^{-1}$$
$$\nabla g_i(X) = A_i, \; i = 1, ..., m.$$

Povrh toga, $\nabla g_{ij}(X)$ je antisimetrična matrica za sve $i < j$. Dakle, iz metode Lagrangeovih multiplikatora dobijemo $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ i antisimetričnu matricu $\tilde{Y} = \sum_{i<j} \tilde{y}_{ij} \nabla g_{ij}(X^*(\mu))$ takve da vrijedi

$$C + \mu(X^*(\mu))^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i A_i + \tilde{Y},$$

gdje koristimo $X^*(\mu) \in \mathrm{Sym}_n$. Budući su sve matrice osim $\tilde{Y}$ simetrične, antisimetrični dio $\tilde{Y}$ nestaje i lema je dokazana. □

Jednadžbe razvijene u lemi ćemo ponovno zapisati, ali u praktičnijem obliku, uvođenjem matrice $S = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - C = \mu X^{-1}$. Tada $X^*(\mu)$ zadovoljava Lagrangeov sustav

$$\begin{aligned} & A_i \cdot X = b_i, \ i = 1, 2, ..., m \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - S = C \\ & SX = \mu I_n \\ & S, X \succ 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

za odgovarajuće $y \in \mathbb{R}^m$ i $S \in SYM_n$.

Vrijedi i obrat Teorema 6.1: ako je f konkavna, a g_i afine funkcije, onda svako rješenje Lagrangeovog sustava daje točku globalnog maksimuma.

Iz činjenice da $X^*(\mu)$, ako postoji, zadovoljava Lagrangeov sustav (6.4), već možemo zaključiti da kad μ teži prema 0, optimalna vrijednost $C \cdot X^*(\mu)$ kaznene funkcije konvergira vrijednosti našeg originalnog semidefinitnog programa (6.1). Ovo će slijediti iz jačeg svojstva: Jednadžbe (6.4) nam daju primarno dopustivu vrijednost i dualno dopustivu vrijednost s malom razlikom u dualnosti (razlika između primarne i dualne vrijednosti funkcije cilja).

Lema 6.4. *Ako $\tilde{X}, \tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ zadovoljavaju Lagrangeov sustav (6.4) za neki $\mu > 0$, tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

1. *Matrica $\tilde{X}$ je strogo dopustiva točka primarnog semidefinitnog programa*

$$\begin{aligned} & C \cdot X \to \max \\ & A_i \cdot X = b_i, \ i = 1, 2, .., m \\ & X \succeq 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

   Ovdje stroga dopustivost znači $\tilde{X} \succ 0$.

2. *Točka $\tilde{y}$ je strogo dopustiva točka dualnog semidefinitnog programa*

$$\begin{aligned} & b^\intercal y \to \min \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - C \succeq 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

   Ovdje stroga dopustivost znači $\sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i A_i - C \succ 0$.

3. *Razlika primarne i dualne funkcije cilja zadovoljava*

$$b^\intercal \tilde{y} - C \cdot \tilde{X} = n\mu.$$

Dokaz. Iz $\tilde{S}, \tilde{X} \succ 0$ odmah imamo da je $\tilde{X}$ strogo dopustiva točka za primarnu, a $\tilde{y}$ strogo dopustiva točka za dualnu zadaću. Za razliku primarne i dualne funkcije cilja, koristimo linearnost skalarnog produkta u prvom argumentu i računamo

$$\begin{aligned} C \cdot \tilde{X} &= (\sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i A_i - \tilde{S}) \cdot \tilde{X} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i (A_i \cdot \tilde{X}) - \tilde{S} \cdot \tilde{X} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i b_i - \tilde{S} \cdot \tilde{X} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i b_i - \mathrm{Tr}(\underbrace{\tilde{S}\tilde{X}}_{\mu I_n}) \\ &= b^{\mathsf{T}} \tilde{y} - n\mu. \end{aligned}$$

□

Lema pokazuje da, ako bi mogli izračunati $X^*(\mu)$ za mali μ, tada bi imali skoro optimalnu točku semidefinitnog programa (6.1). Budući da zbog slabe dualnosti vrijedi $C \cdot X \leq b^{\mathsf{T}} \tilde{y}$ za sva dopustive točke X, $C \cdot X^*(\mu)$ dolazi unutar $n\mu$ optimalne vrijednosti.

Dosad smo pokazali da ako problem maksimiziranja funkcije $f_\mu(X)$ uz uvjete $A_i \cdot X = b_i$ i $X \succ 0$ ima maksimum u X^*, tada postoji $S^* \succ 0$ i $y^* \in \mathbb{R}^m$ takvi da X^*, y^*, S^* zadovoljavaju Lagrangeov sustav (6.4). Dalje ćemo formulirati uvjete na semidefinitni problem pod kojim je Lagrangeov sustav jedinstveno rješiv i daje maksimum od f_μ.

Da bi Lagrangeov sustav bio u potpunosti rješiv, stroga dopustivost primarne i dualne zadaće mora biti ispunjena. Jedini uvjet iznad toga je linearna nezavisnost matrica A_i, a to možemo pretpostaviti bes smanjenja općenitosti.

Lema 6.5. *Pretpostavimo da i primarna (6.5) i dualna zadaća (6.6) imaju strogo dopustive točke $\tilde{X}$ i $\tilde{y}$, respektivno. Pretpostavimo još da su matrice A_i, $i = 1, 2, ..., m$ linearno nezavisne (kao elementi vektorskog prostora SYM_n).*

Tada za svaki $\mu > 0$, Lagrangeov sustav (6.4) ima jedinstveno rješenje $X^* = X^*(\mu)$, $y^* = y^*(\mu)$, $S^* = S^*(\mu)$. Štoviše, $X^*(\mu)$ je jedinstveni maksimum od f_μ uz uvjete $A_i \cdot X = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$ i $X \succ 0$.

Algoritam centralnog puta

U ovoj točki bavit ćemo se pitanjem kako se Lagrangeov sustav (6.4) može riješiti za mali μ, pošto je to ono što nam treba da bi dobili dobre primarne i dualne točke (Lema 6.4).

Definirajmo primarno-dualni centralni put semidefinitnog problema (6.5) kao skup

$$\{(X^*(\mu), y^*(\mu), S^*(\mu)) \in \mathrm{Sym}_n^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathrm{Sym}_n^+ : \ \mu > 0\}.$$

. Ideja metode centralnog puta je početi od nekog $(\tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{S})$ blizu centralnog puta i aproksimativno pratiti centralni put dok μ ne postane dovoljno mali.

Fiksirajmo za početak μ i uvedimo funkciju centralnog puta F koja predstavlja odstupanje trojke (X, y, S) od centralnog puta:

$$\begin{aligned}
F : \mathrm{Sym}_n \times \mathbb{R}^m \times \mathrm{Sym}_n &\to \mathbb{R}^m \times \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n, \\
F(X, y, S) &= \begin{bmatrix} P(X,y,S) \\ Q(X,y,S) \\ R(X,y,S) \end{bmatrix}, \\
P(X, y, S) &= \begin{bmatrix} A_1 \cdot X - b_1 \\ A_2 \cdot X - b_2 \\ \vdots \\ A_m \cdot X - b_m \end{bmatrix}, \\
Q(X, y, S) &= \sum_{i=1}^{m} y_i A_i - S - C, \\
R(X, y, S) &= SX - \mu I_n.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Znamo da vrijedi $F(X^*(\mu), y^*(\mu), S^*(\mu)) = (0, 0, 0)$ i da je to jedina nultočka od F uz uvjet $X, S \succ 0$ zbog jedinstvenosti rješenja Lagrangeovog sustava. Nadalje, htjeli bismo izračunati tu nultočku za mali μ kako bi dobili gotovo optimalno rješenje primarne (6.5) i dualne zadaće (6.6), po Lemi 6.4.

Direktno rješavanje sustava $F(X^*(\mu), y^*(\mu), S^*(\mu)) = (0, 0, 0)$ je teško jer sadrži n^2 nelinearnih jednadžbi $SX - \mu I_n = 0$. Zato koristimo poznatu numeričku metodu za izračunavanje nultočki - Newtonovu metodu.
Newtonova metoda je iteratitivna metoda pronalaženja nultočke. Ako imamo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, iteracija izgleda ovako::

$$Df(x^{(i)})(x^{(i+1)} - x^{(i)}) = -f(x^{(i)}),$$

gdje je $Df(x)$ Jakobijan od f u x, tj $n \times n$ matrica

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f(x)_i}{\partial x_j}.$$

Uzimajući u obzir da znamo provesti jedan korak Newtonove metode, uzimamo $\mu = \epsilon/n$ i provodimo ga na $F_\mu^{\tilde{X}}$, sve dok $F_\mu^{\tilde{X}} \approx 0$. Tada su trenutni $\tilde{X}, \tilde{y}$ gotovo optimalne točke (6.5) i (6.6) s razlikom u dualnosti ϵ.

Problem u ovoj metodi nam može stvarati to što se brza konvergencija može postići samo ako krenemo dovoljno blizu centralnog puta. Naša početna točka $(\tilde{X}, \tilde{y}, \tilde{S})$ može biti predaleko. Ne bi bilo dobro provoditi Newtonove korake s fiksiranom velikom vrijednošću μ. Dobili bismo točku proizvoljno blizu centralnog puta na μ, ali to nebi bila otprilike optimalna točka.

Kako bi to izbjegli, u svakoj iteraciji Newtonove metode provodimo korak s obzirom na nešto manju vrijednost μ. Namjera nam je ponavljati taj postupak sve dok iteracija ne bude blizu centralnog puta za dovoljno mali μ. Formalno ćemo zapisati ovaj pojam "blizine".

Definicija 6.1. *Za realni broj $\gamma > 0$, γ-okolina centralnog puta je skup unutrašnjih točaka (X, y, S) takvih da $||X^{1/2}SX^{1/2} - \mu I_n||_F \leq \mu\gamma$.*

Sjetimo se da je $||\cdot||_F$ Frobeniusova matrična norma ($||M||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2}$). Ovaj izraz možemo opravdano nazivati okolinom centralnog puta jer točka na centralnom putu zadovoljava $SX = \mu I_n$, a to povlači $X^{1/2}SX^{1/2} = \mu I_n$, pa je ta točka u svim okolinama.

Napisat ćemo opći korak algoritma:

1. S obzirom na trenutačnu iteraciju $X^{(i)}, y^{(i)}, S^{(i)}$, definiramo
$\mu_i := \frac{S^{(i)} \cdot X^{(i)}}{n}$.
(Ako je $(X^{(i)}, y^{(i)}, S^{(i)})$ točka centralnog puta, onda $X^{(i)} = X^*(\mu_i)$.)
2. Provedimo jedan korak Newtonove metode s obzirom na $F_\mu^{X^{(i)}}$, gdje je
$\mu := \sigma\mu_i$, i $\sigma := 1 - \frac{0.3}{\sqrt{n}}$.
To znači, izračunamo $\Delta X, \Delta y, \Delta S$ i stavimo
$X^{(i+1)} := X^{(i)} + \Delta X$
$y^{(i+1)} := y^{(i)} + \Delta y$
$S^{(i+1)} := S^{(i)} + \Delta S$

Teorem 6.2. *Neka je $\gamma := 0.3$, pretpostavimo da je $(X^{(i)}, y^{(i)}, S^{(i)})$ unutrašnja točka u γ-okolini centralnog puta. Tada je*

$$(X^{(i+1)}, y^{(i+1)}, S^{(i+1)})$$

opet unutrašnja točka u γ-okolini centralnog puta i vrijedi

$$S^{(i+1)} \cdot X^{(i+1)} = \sigma S^{(i)} \cdot X^{(i)}.$$

Glavna vrlina metoda unutrašnjih točaka za semidefinitne programe je da se oni lako implementiraju i dobro rade u praksi. Općenito ih nije lako analizirati. Specifični algoritmi s poznatim scenarijima najgoreg slučaja su često spori u praksi i zamijenjeni su drugim varijantima koje su očito brže, ali je njihova teorijska podloga nepoznata.
Za kraj možemo zaključiti da, koristeći se metodom unutrašnje točke, semidefinitni programi se mogu učinkovito riješiti u teoriji i praksi.

Bibliografija

[1] Lavoslav Čaklović. *Geometrija linearnog programiranja*. Element, Zagreb, 2010.

[2] Etienne de Klark. *Aspects of semidefinite programming: Interior Point Algorithms and Selected Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] Bernd Gartner i Jiri Matoušek. *Approximation Algorithms and Semidefinite Programming*. Springer, 2012.

[4] Anupam Gupta i Ryan O'Donnell. *Lecture notes for CMU's course on Linear Programming and Semidefinite Programming*. 2013.

[5] Johannes Jahn. *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Springer, 1994.

Sažetak

Semidefinitno programiranje je dio optimizacije kod kojeg na skupu simetričnih pozitivno semidefinitnih matrica optimiziramo linearnu funkciju uz linearne uvjete. Semidefinitno programiranje možemo promatrati kao poopćenje linearnog programiranja. Zbog toga smo se u radu kratko osvrnuli na linearno programiranje. Opisali smo jednu od metoda za rješavanje problema linearnog programiranja, metodu unutrašnje točke. Upravo se ta metoda može generalizirati i na semidefinitno programiranje pa je zbog toga dosta zanimljiva. Centralni dio ovog rada bila nam je teorija dualnosti u semidefinitnom programiranju i njezin glavni rezultat - teorem jake dualnosti. On tvrdi da ako primarna zadaća semidefinitnog programiranja ima konačnu vrijednost i neko pozitivno definitnu točku, tada njezina dualna zadaća ima istu tu vrijednost. Dokaz smo proveli u općenitijem području konusnog programiranja. Konusno programiranje i linearno programiranje imaju jako sličnu teoriju dualnosti. Bitna razlika je u tome što zadaće konusnog programiranja mogu imati graničnu dopustivost, što znači da zadaća koja nije dopustiva može proizvoljno malom perturbacijom ograničenja postati dopustiva. Slično tome, zadaće konusnog programiranja imaju graničnu vrijednost koja se može razlikovati od vrijednosti. Krenuli smo s teoremom separacije za zatvorene konveksne konuse, a pomoću njega dokazali Farkasevu lemu. Pomoću Farkaseve leme smo dokazali regularnu dualnost za konusne probleme, pa onda i jaku dualnost uz određene dodatne uvjete. Nakon što smo zaključili da vrijedi $(\mathrm{Sym}_n^+)^* = \mathrm{Sym}_n^+$, teorem jake dualnosti za semidefinitno programiranje je slijedio iz konusne verzije.

Summary

Semidefinite programming is class of optimization problems in which we optimize a linear function over the set of symmetric positive semidefinite matrices. Semidefinite programming can be considered as an extension of linear programming. Because of that in this paper we first took a short review of linear programming. We described one of the methods of solving linear programs, interior point method. This method can be successfully generalized to semidefinite programming. The central part of this paper is the duality theory in semidefinite programming and its main result - a strong duality theorem. It asserts that if the primal semidefinite program has a finite value and some positive solution, then the dual also has the same optimal value. The proof is done in the more general framework of cone programming. Cone programming and linear programming have very similar duality theory. The essential difference is that cone programs may exhibit limit feasibility, meaning that an infeasible program may become feasible under an arbitrarily small perturbation of the constraints. Similarly, a cone program has a limit value, which may differ from its value. We started with the separation theorem for closed convex cones, and by using it we proved Farkas lemma. With Farkas lemma we proved a regular duality for cone programs, then strong duality with some additional conditions. Since cone Sym_n^+ is a self-dual cone, the strong duality theorem for semidefinite programming followed easily.

Životopis

Rođen sam dana 3.9.1993. u Zadru. Srednju školu "Gimnazija Franje Petrića" upisao sam 2008. godine u Zadru, maturirao sam 2012. godine. Te iste godine upisujem se na Prirodoslovno-Matematički fakultet u Zagrebu, smjer Preddiplomski sveučilišni studij Matematika. 2015. godine završavam Preddiplomski studij i upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.