Primjeri egzaktnih rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi

Reščec, Lana

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:654247

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-21**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lana Reščec

PRIMJERI EGZAKTNIH RJEŠENJA NAVIER-STOKESOVIH JEDNADŽBI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Eduard Marušić-Paloka

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 O problemu **2**

2 Formulacija Navier-Stokesovog sustava **5**

3 Primjeri egzaktnih rješenja **9**
3.1 Couette-Poiseuilleov tok 9
3.2 Beltramijevi tokovi 11
3.3 Tokovi sa stacionarnom točkom 15
3.4 Tokovi u kanalu 22
3.5 3D tokovi 25

Bibliografija **28**

Uvod

Navier-Stokesove jednadžbe su nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju gibanje Newtonovog fluida. Do ove verzije jednadžbi došlo se kroz razne varijacije, neke od prijašnjih verzija dali su Navier[1], Poisson[2], Saint-Venant[3] i Stokes[4]. Zatim je Stokes 1846. uzevši u obzir radove svih navedenih napravio izvod. Ove jednadžbe služe kao model gibanja većine fluida i kao takve su korištene u mnogim područjima.
Drugi pojam u naslovu teme je *egzaktno rješenje*. Iako bi intuitivno to predstavljalo izraze za brzinu i tlak pod ovim pojmom se podrazumijeva nešto drugo. Naime, egzaktno rješenje je zapravo rješenje izraženo preko dobro poznatih funkcija u eksplicitnom obliku. Ono nužno ne predstavlja rješenje početne parcijalne diferencijalne jednadžbe nego u većini slučajeva rješenje obične diferencijalne jednadžbe koja je izvedena iz početne. Ne radi se o približnom rješenju, već rješenjima modificiranog početnog problema koja čine podskup skupa rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi. Prednost ovakvih rješenja je njihova jednostavnost, u matematičkom i fizikalnom smislu, i ovakva rješenja čine dobar prvi korak ka nalaženju rješenja promatrane početne jednadžbe. Ovako je i počeo razvoj matematičkih teorija o gibanju viskoznog fluida i sve do pojave numeričkih rješenja su bila jedina konkretnija razmatranja. Naravno da je tehnološkim razvojem fokus prelazio na traženje aproksimativnih rješenja, međutim ona i dalje daju slabiji uvid u fizikalni aspekt, pa egzaktna rješenja ne gube na značaju.
U ovom radu pri biranju primjera koje ćemo obraditi ograničiti ćemo se samo na stacionarne tokove ograničene ravninama i one primjere čije rješenje nam daje uvid u dinamiku viskoznih fluida. U prvom poglavlju dajemo uvod u pojmove koji su nam potrebni u ovom radu, iako se određeno poznavanje područja podrazumijeva, te neke teoreme koje kasnije prešutno koristimo. U drugom poglavlju dajemo matematičku formulaciju Navier-Stokesovog sustava, te konačno u trećem poglavlju prolazimo kroz odabrane primjere podijeljene u kategorije.
Rad se najviše oslanja na teoriju obrađenu u knjigama [6] i [3].

[1] Claude-Louis Navier (1785.-1836.), francuski inženjer i fizičar
[2] Siméon Denis Poisson (1781.-1840.), francuski inženjer, matematičar i fizičar
[3] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797.-1886.), francuski matematičar
[4] George Gabriel Stokes (1819.-1903.), irski matematičar i fizičar

Poglavlje 1

O problemu

Ovdje ćemo napraviti kratki uvod u glavne pojmove područja koje proučavamo u nekom općenitom obliku, preuzete iz [2] i [7], a kasnije ćemo ih prilagoditi temi koju obrađujemo. *Fluid* je definiran kao supstanca koja se deformira neprekidno kada na nju djeluje sila smicanja. Pretpostavljamo da se sve karakteristike fluida (tlak, brzina i slično) mijenjaju neprekidno kroz fluid, pa ga stoga smatramo kontinuumom. Svi fluidi se u određenoj mjeri *lijepe* za čvrste granice. Viskoznost je upravo mjera toga i daje nam vezu između sile smicanja i gibanja fluida. Newtonovi fluidi koje mi ovdje promatramo su oni kojima je sila smicanja linearno zavisna o mjeri naprezanja uslijed smicanja.
Sada ćemo nešto reći o jednadžbama očuvanja, a najprije jednadžbi kontinuiteta. *Referentna gustoća mase kontinuuma* Ω je polje

$$\rho_{ref} : \Omega \to \mathbb{R}^+,$$

pa je masa materijalnog područja $\mathcal{P}$

$$\int_{\mathcal{P}} \rho_{ref} dV.$$

Neka je φ gibanje kontinuuma Ω. *Eulerova gustoća mase* je funkcija

$$\rho : \mathcal{T}_\varphi \to \mathbb{R}^+.$$

Kažemo da je zadovoljen zakon očuvanja mase ako za svako materijalno područje $\mathcal{P}$ i svako $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\mathcal{P}_1} \rho dV = \int_{\mathcal{P}_2} \rho_{ref} dV. \tag{1.1}$$

Teorem 1.0.1. *Ako je zadovoljen zakon očuvanja mase, onda vrijedi jednadžba kontinuiteta*

$$\dot{\rho} + \rho div(\mathbf{v}) = 0 \tag{1.2}$$

ili

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad u \quad \mathcal{T}. \tag{1.3}$$

Obratno, ako vrijedi jednadžba kontinuiteta i ako je

$$\Omega = \Omega_0, \quad \rho(*, 0) = \rho_0 = \rho_{ref} \quad u \quad \Omega, \tag{1.4}$$

onda je zadovoljen zakon očuvanja mase.

Kontaktno polje na području $O \subset \mathbb{E}$ je funkcija

$$(x, \mathbf{k}) \to q(x, \mathbf{k}), \quad x \in O, k \in S_1,$$

gdje S_1 označava jediničnu sferu u $\mathbb{E}$.
Neka je φ gibanje kontinuuma Ω. *Gustoća kontaktne sile* je Eulerovo vektorsko kontaktno polje

$$\mathbf{q}(x, t; \mathbf{k}), \quad (x, t) \in \mathcal{T}, \mathbf{k} \in S_1.$$

Kažemo da je zadovoljen zakon očuvanja impulsa ako za svako materijalno područje $\mathcal{P}$ i svako $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) dV = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{q}(x, t; \mathbf{n}(x)) dS + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}(x, t) dV. \tag{1.5}$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial \mathcal{P}_t$, a $\mathbf{b}$ gustoća volumne sile.
Tenzor naprezanja je Eulerovo polje $\mathbf{T}$ definirano formulom

$$T_{ij}(x, t) = q_i(x, t, \mathbf{e}_j), \quad (x, t) \in \mathcal{T}. \tag{1.6}$$

Teorem 1.0.2. *Ako je zadovoljen zakon očuvanja mase, onda je zakon očuvanja impulsa zadovoljen ako i samo ako vrijede jednadžbe gibanja*

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} &= div(\mathbf{T}) + \mathbf{b} \quad u \quad \mathcal{T} \\ \mathbf{q}(x, t; \mathbf{b}) &= \mathbf{T}(x, t)\mathbf{k}, \quad (x, t) \in \mathcal{T}, \mathbf{k} \in S_1. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Gustoća momenta impulsa u odnosu na pol $O \in \mathbb{E}$ je moment polja $\rho \mathbf{v}$. Kažemo da je zadovoljen zakon očuvanja momenta impulsa ako za svako materijalno područje $\mathcal{P}$ i svako $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}_t} (x - O, \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t)) dV = \int_{\partial \mathcal{P}_t} (x - O, \mathbf{q}(x, t; \mathbf{n}(x))) dS + \int_{\mathcal{P}_t} (x - O, \mathbf{b}(x, t)) dV. \tag{1.8}$$

Teorem 1.0.3. *Ako su zadovoljeni zakoni očuvanja mase i impulsa, onda je zakon očuvanja momenta impulsa zadovoljen ako i samo ako je tenzor naprezanja simetričan, tj.*

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad u \quad \mathcal{T} \tag{1.9}$$

Teorem 1.0.4. *Ako su zadovoljeni zakoni očuvanja mase, impulsa i momenta impulsa, onda je zadovoljen i zakon očuvanja mehaničke energije koji glasi: za materijalno područje $\mathcal{P}$ i $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{P}_t}\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 dV + \int_{\mathcal{P}_t}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}dV = \int_{\partial\mathcal{P}_t}\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}dS + \int_{\mathcal{P}_t}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV. \tag{1.10}$$

Za svaki promatrani problem u dinamici fluida, rubni i počeni uvjeti moraju biti dani. Oni specificiraju problem kojem tražimo rješenje, međutim, ponekad za određivanje egzaktnog rješenja zadani uvjeti nisu u skladu sa stvarnim problemom koji promatramo, jer u protivnom do rješenja ne bismo mogli doći. Za fluide u dodiru s čvrstom granicom vrijedi uvjet ne proklizavanja, što bi značilo da je nema kretanja između granice i fluida.

Poglavlje 2

Formulacija Navier-Stokesovog sustava

Navier-Stokesove jednadžbe možemo prikazati u obliku

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{F} + div(\mathbf{T}), \tag{2.1}$$

gdje je $\rho(\mathbf{x}, t)$ gustoća fluida, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ vektor brzine, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ vektor gustoće vanjske sile po jedinici mase, a $\mathbf{T}$ tenzor naprezanja fluida. Navedena jednadžba predstavlja zakon očuvanja impulsa.
Materijalna derivacija $\dot{\mathbf{u}}$ definirana je kao

$$\dot{\mathbf{u}} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \tag{2.2}$$

Tenzor naprezanja se u slučaju Newtonovog fluida može se izraziti u obliku

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda div(\mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu sym(\nabla\mathbf{v}), \tag{2.3}$$

odnosno po komponentama

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.4}$$

gdje su λ i μ koeficijenti viskoznosti koji određuju vrstu fluida, za koje od ovog trenutka, jednostavnosti radi, pretpostavljamo da su uniformni u prostoru i konstantni u vremenu, iako to općenito ne mora biti tako.
Zatim imamo zakon očuvanja mase izražen u obliku jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{1}{\rho}\dot{\rho} + div(\mathbf{v}) = 0. \tag{2.5}$$

Kako bismo dobili zatvoren problem, moramo definirati i jednadžbu stanja. Od sada pa nadalje ćemo promatrati samo uniformne inkompresibilne fluide, dakle one kojima je gustoća konstantna, što nas dovodi do posljedice da se jednadžba kontinuiteta svodi na uvjet inkompresibilnosti

$$div(\mathbf{v}) = 0, \tag{2.6}$$

nadalje tenzor naprezanja ovisi samo o jednom koeficijentu viskoznosti μ.
Zakon očuvanja impulsa možemo zapisati i u terminima vektora vrtložnosti $\boldsymbol{\omega}$ koji je definiran kao $\boldsymbol{\omega} = rot(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla\Big(p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\Big) + \mathbf{F} - \nu\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2.7}$$

gdje je $\nu = \mu/\rho$ koeficijent kinematičke viskoznosti.
Ako sada na gornju jednadžbu primijenimo *rot* operator dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{\rho}\nabla \times \Big(\nabla\Big(p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2\Big)\Big) + \nabla \times \mathbf{F} - \nu\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}). \tag{2.8}$$

Koristeći sljedeće identitete za skalarno polje Φ i vektorska polja $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla\Phi) &= \mathbf{0}, \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0, \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}, \\
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B},
\end{aligned}$$

raspišemo drugi član na lijevoj strani i zadnji na desnoj, dok nam je prvi na desnoj nula, pa dobivamo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{F} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}, \tag{2.9}$$

odnosno

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{F} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{2.10}$$

U izvodu smo koristili svojstvo $div(rot(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$, odnosno da je vektor vrtložnosti solenoidan vektor. Intuicije radi, vrtložnost je mjera kutne brzine, odnosno rotacija fluida u točki. Za tokove kojima je vrtložnost $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$ kažemo da su bezvrtložni.
Idealan fluid bez početne vrtložnosti će uvijek imati vrložnost jednaku nuli. To nam govori Lagrangeov teorem. Međutim, za viskozan fluid to ne vrijedi. Čak i u slučaju kada nema nekonzervativnih vanjskih sila (primjerice trenja) vrtložnost se može proširiti s ruba područja. Samo širenje ne može uzrokovati vrtložnost, ali rub može, pa se ona može pojaviti čak iako je inicijalno nije bilo (vidi [4]).

Konačno, zapišimo Navier-Stokesove jednadžbe i jednadžbu kontinuiteta za inkompresibilan fluid u obliku u kojemu ćemo s njima i raditi i najprije u kartezijevim koordinatama

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu\Delta u,\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu\Delta v,\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu\Delta w,\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

gdje je brzina $\mathbf{v} = (u, v, w)$, $\nu = \mu/\rho$ kinematička viskoznost, a vanjska sila $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$. U dvodimenzinalnom slučaju, uz pretpostavku neovisnosti o z-koordinati, jednadžba kontinuiteta će biti zadovoljena uvođenjem *funkcije toka* ψ definirane tako da je

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.12}$$

a vektor vrtložnosti je onda oblika

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\Delta\psi). \tag{2.13}$$

Napravimo isto i za slučaj cilindričnih koordinata, dakle (r, θ, z) su definirane kao

$$\begin{aligned}
x &= rcos\theta,\\
y &= rsin\theta,\\
r &\geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

a brzina je označena kao $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$, vektor vrtložnosti kao $\boldsymbol{\omega} = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)$ i vanjska sila kao $\mathbf{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$.
Onda Navier-Stokesove jednadžbe i jednadžba kontinuiteta za inkompresibilan fluid glase

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r + \nu\Big(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\Big),\\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta + \nu\Big(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\Big),\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \nu\Delta v_z,\\
\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Komponente vektora vrtložnosti dane su s

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \\ \omega_\theta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \\ \omega_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

U ovom slučaju imamo posebnu *funkciju toka* ψ, za rotacijski simetričan tok, odnosno tok neovisan o θ, koju je prvi uveo Stokes, takvu da

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{2.17}$$

čime je zadovoljena jednadžba kontinuiteta.

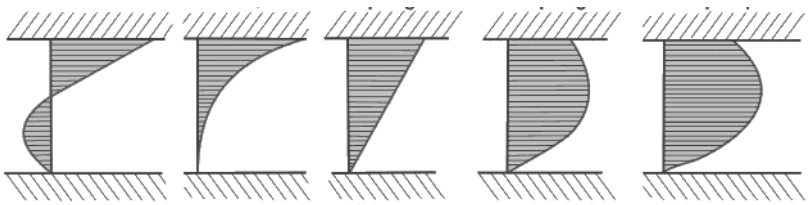
Poglavlje 3

Primjeri egzaktnih rješenja

3.1 Couette-Poiseuilleov tok

Poiseuilleovi[1] tokovi su tokovi koji su određeni samo gradijentom tlaka, dakle bez prisutnosti vanjske sile, dok se Couette[2] bavio tokovima određenim pomicanjem granica ili trenjem između fluida i granice, dakle općenito tokovima vezanim uz međudjelovanja fluida i čvrste granice.
Promatramo tok u *dovoljno* dugačkoj pruzi paralelnih granica širine h, od kojih se jedna pomiče u pozitivnom smjeru x-osi, određen gradijentom tlaka smjera paralelnog s granicama. Na slici 3.1 vidimo kako promjena tlaka utječe na profil brzine u Couetteovom toku u kojem se gornja granica pomiče.
Uzmimo da je tok razvijen, odnosno da nam profil brzine ovisi samo o y-koordinati. Razvijen tok se postiže kada se *dovoljno* udaljimo od početka i kraja pruge. Pretpostavljamo da fluid ima uniformnu konstantnu ulaznu i izlaznu brzinu na kontrolnom području. Dakle,

[1] Jean Léonard Marie Poiseuille (1797.-1869.), francuski fizičar i fiziolog
[2] Maurice Marie Alfred Couette (1858.-1943.), francuski fizičar



Slika 3.1: S lijeva, slike prikazuju respektivno $\partial p/\partial x \gg 0, \partial p/\partial x > 0, \partial p/\partial x = 0, \partial p/\partial x < 0, \partial p/\partial x \ll 0$

brzina nam je oblika $\mathbf{v} = (u, v, 0)$ i zbog razvijenosti toka $u = u(y)$, $v = v(y)$. Za rubne uvjete brzine uzimamo

$$\begin{array}{lll} za & y = 0: & u = 0, v = V, \\ za & y = h: & u = U, v = V. \end{array} \tag{3.1}$$

Zbog inkompresibilnosti $(2.11)_4$ imamo $\partial v/\partial t = 0$ pa je uz rubne uvjete očito $v \equiv V$. U $(2.11)_2$ lijeva strana je jednaka nuli, a na desnoj ostaje samo član s tlakom pa nam vrijedi $\partial p/\partial y = 0$, odnosno tlak ovisi samo o x-koordinati $p = p(x)$. Sada iz $(2.11)_1$, budući da na lijevoj strani ostane samo član uz v, imamo jednadžbu

$$V\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.2}$$

odnosno

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho V\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Lijeva strana jednadžbe ovisi samo o varijabli y, a desna samo o varijabli x, pa da bi ta jednakost mogla vrijediti moraju obje strane biti jednake nekoj konstanti $-P$. Time smo došli do sustava

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -P, \\ \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho V\frac{\partial u}{\partial y} &= -P. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Rješenje jednadžbe $(3.3)_1$ je oblika $p(x) = -Px + C$ gdje je C konstanta. Rješenje jednadžbe $(3.3)_2$ je oblika

$$u(y) = \frac{P}{\rho V}y + \frac{D\nu}{V}\mathrm{e}^{Vy/\nu} + E,$$

gdje je $E = const.$, a uzimajući još i rubne uvjete (3.1)

$$\begin{aligned} u(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = \frac{D\nu}{V} + E \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{D\nu}{V}, \\ u(h) = U \quad &\Rightarrow \quad U = \frac{P}{\rho V}h + \frac{D\nu}{V}\mathrm{e}^{Vh/\nu} - \frac{D\nu}{V} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{V}{\nu}(U - \frac{P}{\rho V}h)(\mathrm{e}^{Vh/\nu} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Konstantu C određujemo iz početnih uvjeta na tlak u kontrolnom području. Dakle konačno rješenje za propusne granice (vidi (3.1)) je

$$\begin{aligned} p(x) &= -Px + C, \\ u(y) &= \frac{P}{\rho V}y + U(1 - \frac{Ph}{\rho VU})(1 - \mathrm{e}^{Vy/\nu})(1 - \mathrm{e}^{R})^{-1}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

gdje je $R = Vh/\nu$ Reynoldsov broj.
Ako pak promatramo slučaj s nepropusnom granicom, tj. $V \to 0$ tada u jednadžbi (3.2) lijeva strana teži k 0 pa dolazimo do

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3.5}$$

pa opet do sustava

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -P, \\ \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -P. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Za prvu jednadžbu $(3.6)_1$ odmah znamo da je rješenje oblika $p(x) = -Px + C$ gdje je $C = const$. Jednadžbu $(3.6)_2$ dva puta integriramo i dobijemo rješenje oblika $u(y) = -Py^2/2\mu + Dy + E$ gdje su D, E konstante. Uzimajući u obzir još rubne uvjete dobijemo potrebne konstante

$$\begin{aligned} 0 = u(0) = E \quad &\Rightarrow \quad E = 0, \\ U = u(h) = -\frac{P}{2\mu}h^2 + Dh \quad &\Rightarrow \quad D = -\frac{U}{h} + \frac{P}{2\mu}h, \end{aligned} \tag{3.7}$$

pa je konačno rješenje za slučaj nepropusne granice oblika

$$\begin{aligned} p(x) &= -Px + C, \\ u(y) &= \frac{U}{h}y + \frac{1}{2}\frac{Ph^2}{\mu}\left(\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Promotrimo maseni protok za ovaj slučaj. Označimo s Q maseni protok kroz poprečni presjek pruge. Tada je

$$Q = \int_0^h \rho u \, dy = \frac{1}{2}\rho U h\left(1 + \frac{Ph^2}{6\mu U}\right). \tag{3.9}$$

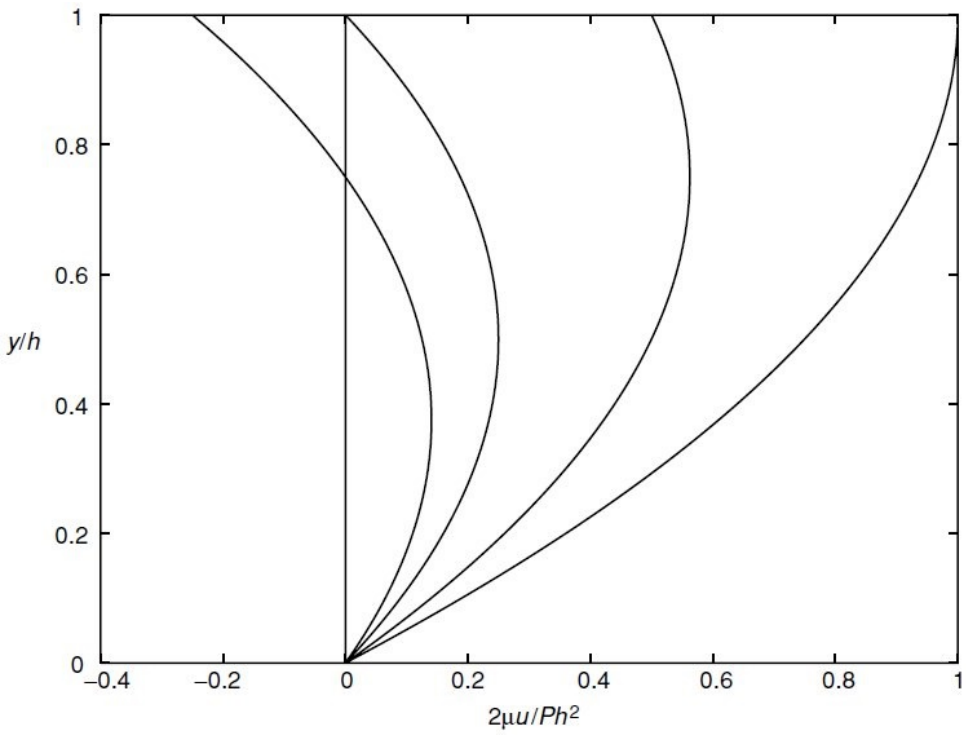
Za $U < 0$ postoji područje u okolini $y = h$ u kojem je tok reverzibilan. Ako je $U = Ph^2/2\mu$ tada je $\partial u/\partial y = 0$ na $y = h$ što bi značilo da je ta granica slobodna. To najbolje možemo vidjeti na slici 3.2.

3.2 Beltramijevi tokovi

Beltrami[3] je proučavao i bavio se tokovima kod kojih je $\mathbf{v} \times \omega = \mathbf{0}$ što znači da vektori brzine i vrtložnosti imaju isti smjer $\boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{v}$ za neku skalarnu funkciju α.
Jednadžba gibanja (2.10) uz gornji uvjet se svodi na oblik

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{F} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \tag{3.10}$$

[3]Eugenio Beltrami (1835.-1900.), talijanski matematičar



Slika 3.2: Profili brzine Couette-Poiseuilleovog toka za $2\mu U/Ph^2 = -1/4, 0, 1/4, 1$ s lijeva respektivno

Vidimo odmah da u odsustvu nekonzervativne sile vrtložnost zadovoljava jednadžbu difuzije, dakle raspršuje se. Pa nam je prisutnost vanjske sile nužna za održavanje toka, osim naravno u trivijalnom bezvrtložnom slučaju.
U dvodimenzionalnoj verziji toka zahtjevamo pak uvjet $\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ što nam zapravo znači da je $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$. Uz taj uvjet nam jednadžba (2.10), ako nema nekonzervativne sile daje

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

Kako bismo zadovoljili jednadžbu kontinuiteta, uvodimo *funkciju toka* definiranu kao u (2.12) i (2.13). Označimo treću komponentu vektora vrtložnosti s $\zeta = -\Delta\psi$. U ovim novim terminima, integriranjem uvjeta $\nabla\times(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ dobivamo $\zeta = -f(\psi)$, a uvjet $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ nam daje $\Delta\zeta = 0$.
Rješenje Navier-Stokesove jednadžbe će biti potpuno kada navedena tri uvjeta

$$\zeta = -\Delta\psi, \quad \zeta = -f(\psi), \quad \Delta\zeta = 0,$$

budu zadovoljena, odnosno u tom slučaju imamo egzaktno rješenje.
Rješenja su razvijana najprije u specijalnim slučajevima, a tek je 1991. Wang dao generalizirano rješenje ovog problema oblika

$$\zeta = \psi + B(x, y), \tag{3.12}$$

gdje se za B pretpostavlja da je linearan $B(x, y) = ax + by$.
Iz jednadžbe vrtložnosti onda slijedi

$$\Delta\psi = \frac{1}{\nu}\Big(a\frac{\partial\psi}{\partial y} + b\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big). \tag{3.13}$$

Rješenja gornje jednakosti sada dobivamo separacijom varijabli. Ona će obuhvatiti veliki broj poznatih egzaktnih rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi. Stavimo da je ψ oblika $\psi(x, y) = F(x)G(y)$, tada nam (3.13) donosi

$$\begin{aligned} F'' + \frac{b}{\nu}F' - CF &= 0, \\ G'' - \frac{a}{\nu}G' + CG &= 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

gdje je C pripadna konstanta separacije. Rješenja će naravno ovisiti o parametrima, konstantama a, b i C, koji određuju o kakvom toku se radi.
Navest ćemo nekoliko primjera tokova.
Uzmimo najprije $a = 0$, $b = -U$ te konstantu $C = \lambda^2$, tada je

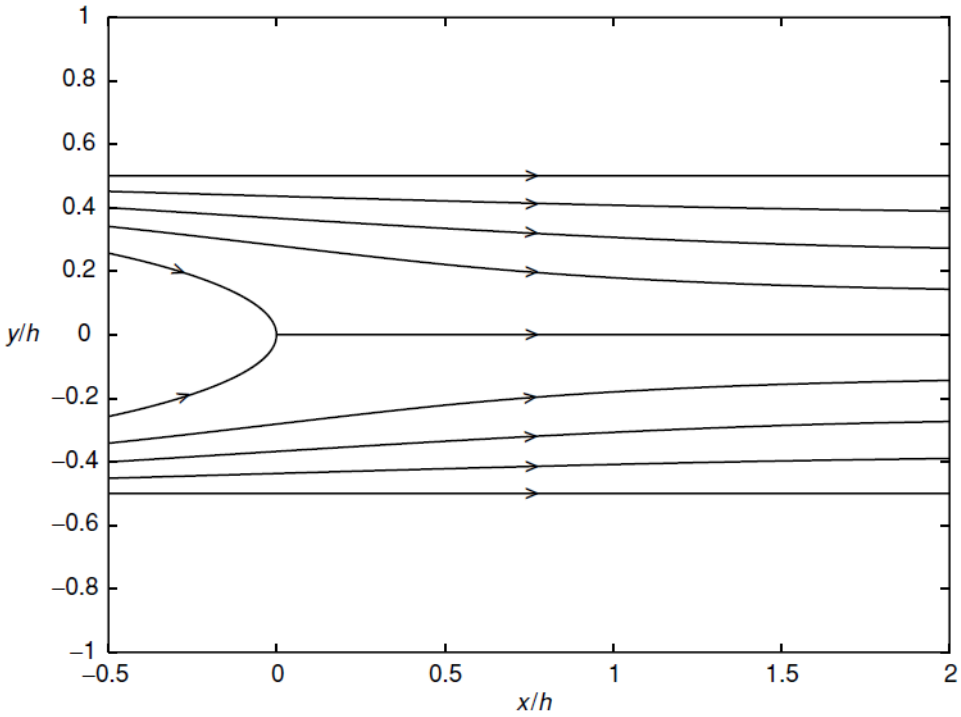
$$\begin{aligned} G &= A sin(\lambda y), \\ F &= exp\Big\{\Big(\frac{U}{\nu\lambda} \pm \sqrt{\Big(\frac{U^2}{\nu^2\lambda^2} + 4\Big)}\Big)\lambda x/2\Big\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Za funkciju F očito imamo dva rješenja, uzet ćemo ono koje trne kada x teži u beskonačnost.
Uz to, postavimo vrijednost $\lambda = 2\pi/h$.
Sada imamo rješenje

$$\psi = Uy + A sin(2\pi y/h)\mathrm{e}^{R-\sqrt{(R^2+16\pi^2))}x/2h}, \tag{3.16}$$

gdje je $R = Uh/\nu$ Raynoldsov broj.
Do ovog rješenja je došao Kovasznay 1948. godine, te prema njemu ono opisuje tok nizvodno po dvodimenzionalnoj mreži koraka h. Strujnice možemo vidjeti na slici 3.3.
Ako pak uzmemo $C = -\lambda^2$ s istom λ, slučaj koji su proučavali Lin i Tobak 1986. godine, rješenje je tada dano s

$$\psi = Uy + A\mathrm{e}^{-2\pi y/h+(R+\sqrt{(R^2-16\pi^2)})x/2h}. \tag{3.17}$$



Slika 3.3: Strujnice toka nizvodno po dvodimenzionalnoj mreži koraka h

Ovaj slučaj Lin i Tobak su interpretirali kao tok kroz propusnu ravninu $y = 0, x < 0$ na kojoj postoji usisna brzina. Ovo rješenje neće zadovoljavati uvjet ne proklizavanja na toj ravnini, te za *dovoljno* velike vrijednosti A/U imamo reverzibilan tok.
Općenitiju verziju rješenja (3.17)

$$\psi = Uy - A sinh(2\pi y/h)\mathrm{e}^{R+\sqrt{(R^2-16\pi^2)x/2h}}, \tag{3.18}$$

dao je Wang 1966. godine i prema njemu ono opisuje uniformni tok koji nailazi na vrtložni, divergentni tok suprotnog smjera.
Sada uzmimo $a = -U$, $b = 0$ i konstantu $C = 0$. Uz te parametre dobivamo rješenje

$$\psi = Ux + (-Ux + k_1)(k_2 + k_3\mathrm{e}^{-Uy/\nu}). \tag{3.19}$$

Ako još uvedemo rubne uvjete $\partial\psi/\partial x = 0$ na granici $y = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$ na $x = 0$ te $\partial\psi/\partial x \to -U$ kada $y \to \infty$, tada rješenje izgleda

$$\psi = Ux(1 - \mathrm{e}^{-Uy/\nu}), \tag{3.20}$$

odnosno u terminima komponenti brzine

$$\begin{aligned} u &= (U^2 x/\nu)\mathrm{e}^{-Uy/\nu}, \\ v &= U(\mathrm{e}^{-Uy/\nu} - 1), \end{aligned} \tag{3.21}$$

što bi značilo da imamo tok u pozitivnoj y-poluravnini brzine $U^2 x/\nu$ na granici $y = 0$. Navedeno rješenje je s takvom interpretacijom otkrio 1924. Riabouchinsky[4]. Međutim, to nije jedina interpretacija ovog rješenja. Crane je 1970. ovo rješenje interpretirao kao tok induciran istezanjem granice $y = 0$. Ta brzina koja nastaje na granici koja se rasteže je naime ograničena na područje $O(\nu/U)$, a izvan njega se radi o uniformnom toku prema toj ravnini.
Dokazana je i jedinstvenost ovog rješenja od strane McLeoda i Rajagopala 1987. godine.
Sljedeći primjer biti će nam za $a = -U$, $b = U$ i konstantom $C = 0$. Ovaj slučaj će nam opet zadovoljavati uvjet ne proklizavanja na granicama $x = y = 0$ i promatrat ćemo tok na području omeđenom $x, y \geq 0$ kada $x \to \infty$ i $y \to \infty$. Rješenje je u ovom slučaju

$$\psi = U(x - y) + \nu(\mathrm{e}^{-Ux/\nu} - \mathrm{e}^{-Uy/\nu}), \tag{3.22}$$

odnosno komponente brzine su dane s

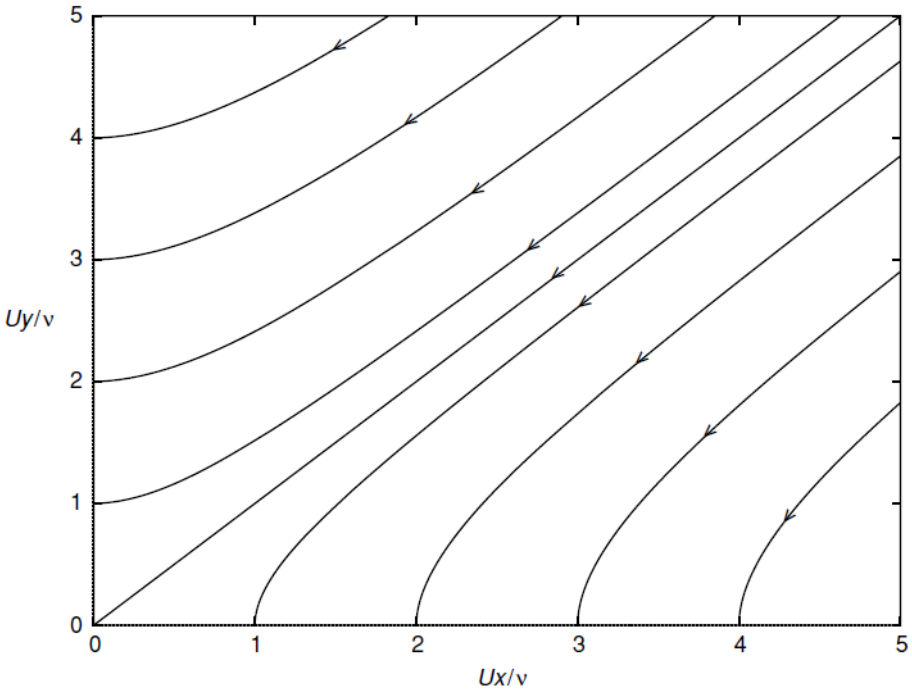
$$\begin{aligned} u &= -U(1 - \mathrm{e}^{-Uy/\nu}), \\ v &= -U(1 - \mathrm{e}^{-Ux/\nu}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Vidimo odmah da je uvjet ne proklizavanja zadovoljen, te da ujedno na obje granice, koje su propusne, postoji usisna brzina. Ako se dovoljno udaljimo od samih granica, strujnice su opisane pravcima $y = x + C$, gdje je C konstanta. Možemo ih vidjeti na slici 3.4.

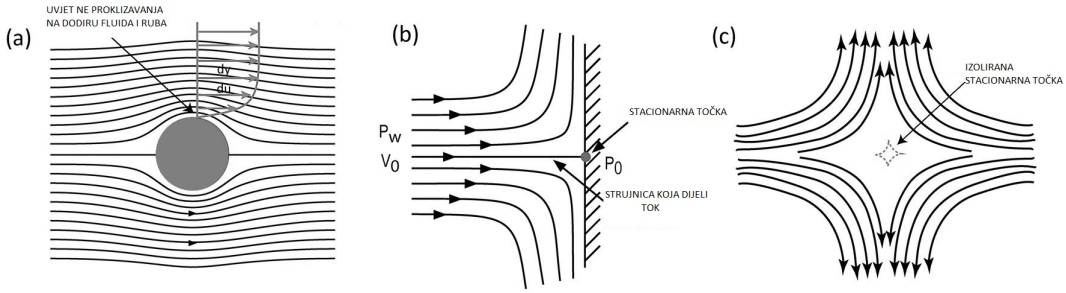
3.3 Tokovi sa stacionarnom točkom

Tokovi sa stacionarnom točkom odnose se na tok fluida u neposrednoj blizini čvrste površine u kojoj se fluid koji prilazi dijeli na dvije različite struje ili tokove dva fluida u suprotnim smjerovima. Mi ćemo se najprije baviti ovim prvima. Na slici 3.5 možemo vidjeti strujnice ovih tokova.
Zbog uvjeta ne proklizavanja, fluid zapravo miruje u svim točkama doticaja s nepropusnom površinom, pa onda stacionarnu točku definiramo u kontekstu neviskoznog (Eulerovog) fluida, tj. kao točku u kojoj se fluid spaja ili odvaja od nepropusne granice. Tok se u toj neposrednoj blizini stacionarne točke modelira kao slučaj toka prema beskonačnoj ravnoj plohi.
Primjer ovakvog toka je klasičan Hiemenzov tok. Radi se o toku viskoznog fluida u oko-

[4]Dimitri Pavlovitch Riabouchinsky (1882.-1962.), ruski fizičar



Slika 3.4: Strujnice toka prema kutu



Slika 3.5: Strujnice toka sa stacionarnom točkom

lini čvrstog stacionarnog cilindra. Prema [5] znamo da bezvrtložni tok neviskoznog fluida prema ravnoj plohi ($y = 0$) je dan s $u = kx$, $v = -ky$ gdje je k konstanta. Također znamo i da je pripadna *funkcija toka* oblika $\psi = kxy$.
Za viskozne fluide, budući da i dalje mora vrijediti da je u proporcionalan s x (za sve y i za male x), možemo pretpostaviti oblik

$$u = kxF(y).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu kontinuiteta $(2.11)_4$ dobivamo

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -kF(y).$$

Sada nam je logično uzeti komponente brzine ovog oblika

$$\begin{aligned} u &= kxf'(Ay), \\ v &= -Bf(Ay). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ponovno iz jednadžbe kontinuiteta $(2.11)_4$ dobivamo da je zapravo $BA = k$, pa nam jednadžbe gibanja (2.11) poprimaju oblik

$$\begin{aligned} k^2x(f')^2 - k^2xf''f &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu kxA^2f''', \\ Bkff' &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu kAf''. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Vidimo da prethodnu prvu jednadžbu možemo preformulirat u oblik

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = k^2x[(f')^2 - f''f - \frac{\nu}{k}A^2f''']$$

i da onda izraz u uglatoj zagradi ne ovisi o varijabli x pa pojednostavimo i stavimo da je

$$(f')^2 - f''f - \frac{\nu}{k}A^2f''' = 1. \tag{3.26}$$

Sada integriranjem te jednadžbe dobivamo

$$-\frac{1}{\rho}p = \frac{1}{2}k^2x^2 + C(y). \tag{3.27}$$

Prethodni izraz iskoristimo u $(3.25)_2$ i integriramo pa dobivamo

$$C(y) = \frac{1}{2}B\frac{k}{A}f^2 + \nu kf' - C_0,$$

čime smo preformulirali jednadžbu (3.27) koja sada glasi

$$-\frac{1}{\rho}p = \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{2}B\frac{k}{A}f^2 + \nu k f' - C_0. \tag{3.28}$$

Kako bismo nadalje pojednostavili stvar, uzimamo i da je koeficijent $f''' = 1$ čime dobivamo $A = \sqrt{k/\nu}$ i onda $B = \sqrt{\nu k}$ pa uz $C_0 = p_0/\rho$, gdje je p_0 tlak za $y \to \infty$, imamo izraz za tlak (3.28) oblika

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{2}B\frac{k}{A}f^2 + \nu k f'. \tag{3.29}$$

Dodajmo još da nam se *funkcija toka* za ovaj slučaj može zapisati kao

$$\psi = (\nu k)^{1/2} x f(\eta), \tag{3.30}$$

gdje je $\eta = (k/\nu)^{1/2}y$. Pripadni rubni uvjeti za ovaj slučaj su

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) &= 0, \\ f'(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Ovo nam je slučaj gdje rješenje, za razliku od primjera u prethodnom poglavlju, opisuje tok s linearnom difuzijom brzine, ali nelinearnom konvekcijom brzine. Rješenje jednadžbe (3.26) s gore navedenim uvjetima numerički su odredili Hiemenz[5] i Howarth[6] .
Rott[7] je proširio Hiemenzovo rješenje za slučaj u kojem se jedna od čvrstih granica pomiče u smjeru x-osi. *Funkcija toka* će biti oblika

$$\psi = (\nu k)^{1/2} x f(\eta) + u_0(\nu/k)^{1/2} \int_0^\eta g d\eta, \tag{3.31}$$

gdje je u_0 brzina translacije ravnine. Izraz za tlak se neće promijeniti pa koristeći (3.28) i $(2.11)_1$ dobivamo izraz

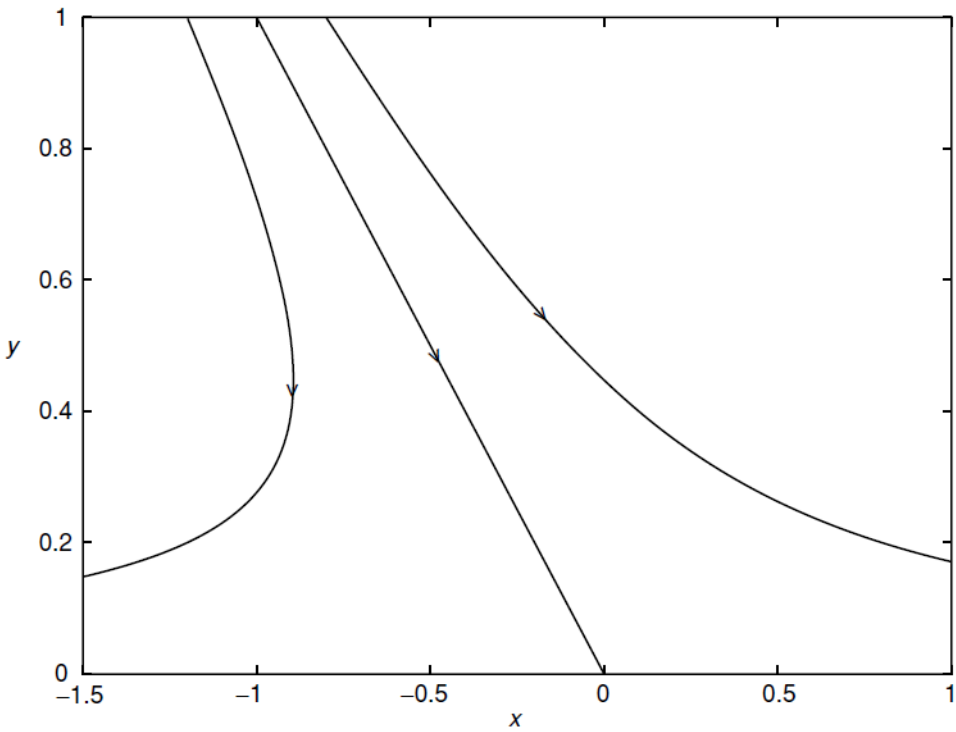
$$g'' + fg' - f'g = 0, \tag{3.32}$$

uz uvjete

$$g(0) - 1 = g(\infty) = 0.$$

Prema Rottu rješenje prethodne jednadžbe je dano s $g = f''(\eta)/f''(0)$.
U dva prethodna navedena primjera radilo se o klasičnom toku sa stacionarnom točkom, gdje je strujnica koja dijeli tok na dvije struje okomita na površinu $y = 0$ kojoj prilazi, no što ako je ta strujnica pod nekim drugim kutem u odnosu na površinu $y = 0$, što možemo vidjeti na slici 3.6.

[5]Karl Hiemenz (1911.), njemački matematičar
[6]Leslie Howarth (1911.-2001.), britanski matematičar
[7]Nikolaus Rott (1945.), švicarski matematičar



Slika 3.6: Fluid prilazi prepreci pod kutem različitim od 90°

Funkcija toka za slučaj neviskoznog fluida je dana s

$$\psi = kxy + \frac{1}{2}\zeta_0 y^2, \tag{3.33}$$

što vidimo da je kombinacija klasičnog rješenja stacionarne točke i tok uniformnog smicanja. Pritom je $-\zeta_0$ konstanta vrtložnosti.
Zadovoljene su nam i Eulerove i Navier-Stokesove jednadžbe, ali nije zadovoljen uvjet ne proklizavanja. Ovdje nam je strujnica koja dijeli tok $y = -2(k/\zeta_0)x$ što vidimo direktno iz (3.33). Viskoznu verziju ovog slučaja razmatrali su Stuart[8], Tamada i Dorrepaal.
Funkcija toka će biti, poštujući (3.31) i (3.33),

$$\psi = (\nu k)^{1/2} x f(\eta) + \zeta_0(\nu/k) \int_0^\eta g d\eta. \tag{3.34}$$

[8]John Trevor Stuart (1929.-), britanski matematičar

Analogno prethodnom slučaju dobivamo obične diferencijalne jednadžbe za f i g čijim integriranjem dolazimo do izraza (3.26) za f, a za g

$$g'' + fg' - f'g = const. \tag{3.35}$$

uz uvjete

$$g(0) = g'(\infty) - 1 = 0.$$

Funkcija f ima svojstvo da, kada $\eta \to \infty$, $f \sim \eta - A$, gdje je $A = 0.6479$ efekt viskoznog otklona. Za g pak vrijedi $g \sim \eta - B$ gdje je B nepoznanica i nadalje će vrijediti

$$g'' + fg' - f'g = B - A. \tag{3.36}$$

Iz jednadžbi gibanja (2.11), na analogan način kao (3.29), dobivamo izraz za tlak

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{2}\nu k f^2 + \nu k f' - \zeta_0(\nu k)^{1/2}(B - A)x. \tag{3.37}$$

Zadnji član u izrazu nam određuje otklon uslijed smicanja u smjeru x-osi. Preostaje nam odrediti rješenje jednadžbe (3.36), pa stavimo uvjet $g'(0) = D$, gdje je D poznat jednom kad je B određen, te $f''(0) = C = 1.2326$. Rješenje jednadžbe je tada dano s

$$g(\eta) = (A - B)f'(\eta) + C(D - C(A - B))f''(\eta) \int_0^\eta (f''(t))^{-2} \mathrm{e}^{-\int_0^t f(s)ds} dt. \tag{3.38}$$

Stuart i Tamada su u svojim razmatranjima uzimali $B = A$, dok je Dorrepaal uzimao $B = 0$. Ove slučajeve možemo vidjeti na slici 3.7 .

Strujnica koja razdvaja tok siječe x-os u

$$x = x_s = -\zeta_0(\nu/k^3)^{1/2}(D/C)$$

i pritom ima nagib

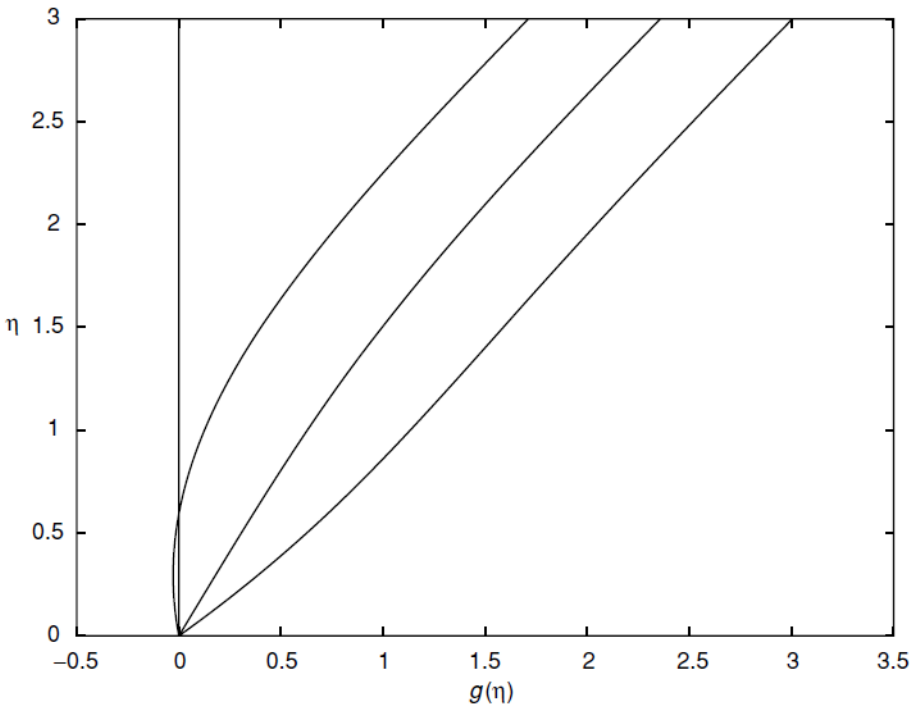
$$\frac{-3kC^2}{\zeta_0((B - A)C + D)},$$

koji vidimo da je neovisan o koeficijentu kinematičke viskoznosti. Omjer ovog nagiba i onog kada se *dovoljno* udaljimo od granice da su nam efekti viskoznosti zanemarivi je

$$\frac{3C^2}{2((B - A)C + D)}$$

i vidimo da smo izgubili i ovisnost o konstantama ζ_0 i k.

Na početku ove cjeline smo rekli da ćemo promatrati i tok fluida koji nailazi na drugi fluid koji teče u suprotnom smjeru. Taj slučaj je promatrao Wang (1985.).



Slika 3.7: Tok uniformnog smicanja za, počevši s lijeva respektivno, $B - A = 0.6479, 0, -0.6479$

Za sučelje ta dva fluida pretpostavljamo da je ravno kako bismo onda mogli govoriti o velikoj napetosti površine, odnosno o velikoj razlici u gustoćama ta dva fluida.
Za slučaj prvog fluida stvar se ne mijenja u odnosu na klasični Hiemenzov tok, dakle *funkcija toka* mu je dana s (3.30) i f je rješenje (3.26). No, ovdje nije zadovoljen uvjet ne proklizavanja i imamo $f'(0) = \lambda$.
Za drugi fluid, čiju gustoću označimo s $\overline{\rho}$ i koeficijent viskoznosti s $\overline{\nu}$, *funkcija toka* je dana s

$$\overline{\psi} = -(\overline{\nu} k \lambda)^{1/2} x \overline{f}(\overline{\eta}), \tag{3.39}$$

gdje je $\overline{\eta} = -(k\lambda/\overline{\nu})^{1/2} y$. Jednadžba za $\overline{f}$ će u ovom slučaju biti

$$\overline{f}''' + \overline{f}\overline{f}'' - (\overline{f}')^2 = 0, \tag{3.40}$$

uz uvjete

$$\overline{f}(0) = \overline{f}'(0) - 1 = \overline{f}'(\infty) = 0,$$

koji osiguravaju neprekidnost brzine na sučelju.
Rješenje jednadžbe (3.40) je oblika

$$\overline{f}(\overline{\eta}) = 1 - \mathrm{e}^{-\overline{\eta}}. \tag{3.41}$$

Rješenje ovog tipa smo već imali kod primjera Beltramijevih tokova (3.20) gdje je bio interpretiran kao tok induciran istezanjem granice. Ovdje ga ne možemo tako fizikalno shvatiti, ali poveznica postoji. Naime, ovdje se to istezanje granice pojavljuje u obliku slobodne površine na kojoj se brzina linearno povećava s udaljenošću. Parametar λ koji nam preostaje odrediti za potpunost rješenja se dobiva numerički iz neprekidnosti napetosti na sučelju.

3.4 Tokovi u kanalu

Promatrat ćemo tokove u kanalu otvorenog tipa, dakle one koji su određeni gravitacijom za razliku od onih zatvorenog tipa određenih tlakom (vidi [1]). Proučit ćemo dva slučaja ovakvog toka, onaj u kanalu paralelnih strana, te slučaj u kojem strane nisu paralelne.
Najjednostavniji primjer prvoga je klasični Couette-Poisseuilleov tok. Međutim stvar ovdje nije toliko jednostavna jer više ne možemo zanemariti nelinearne članove niti ih linearizirati.
Promotrimo kanal s ravnim propusnim granicama $y = \pm h$ širine $2h$. Brzina na granicama je konstantna s iznosom V. Ovakav tok prvi je promatrao Berman 1953. godine. Uzmimo oznake $\overline{x} = x/h$, $\overline{y} = y/h$, pa pripadnu *funkciju toka* možemo zapisati kao

$$\psi = h(U_0 - V\overline{x})f(\overline{y}),$$

gdje nam je U_0 proizvoljna brzina. Koristeći jednadžbe gibanja i kontinuiteta (2.11) dobivamo, analogno prethodnom poglavlju, uz pojednostavljenje uvjetom

$$f''' + R((f')^2 - ff'') = \lambda, \tag{3.42}$$

gdje je $R = Vh/\nu$ i za neki λ, izraz za tlak

$$\overline{p} = f' - \frac{1}{2}Rf^2 - \frac{1}{2}\lambda\overline{x}^2 + \frac{U_0\lambda}{V}\overline{x}. \tag{3.43}$$

Radimo slučaj toka koji je simetričan obzirom na os x s rubnim uvjetima

$$f(0) = f''(0) = f(1) - 1 = f'(1) = 0.$$

Konstanta λ se ne određuje *a priori*.
Berman je dao rješenje jednadžbe (3.42) za slučaj $|R| < 1$. Osim njega, ovim problemom

bavili su se i mnogi drugi, pa je tako Yuan par godina kasnije, 1956., ponudio svoje rješenje za $|R| \gg 1$. Međutim, Terrill je pokazao da je rješenje točno samo za $R < 0$, te je ujedno onda i ispravio Yuanovo rješenje za ostale vrijednosti R. Proširio je i Bermanovo rješenje za $R = O(1)$.
Daljnja istraživanja, s najvećim doprinosom od strane Robinsona 1971., dovela su do određivanja tri tipa rješenja. Za $R < 12.165$ vrijedilo je rješenje koje je Terrill ponudio, ali za veće Raynoldsove brojeve pojavljivala su se još dva tipa rješenja. Rješenje tipa dva za $R > 13.119$ i rješenje tipa tri za $12.165 < R < 13.119$. Rješenje tipa dva karakterizira svojstvo $f'(\overline{y}) > 0$ i maksimalna mu je brzina negdje između centralne linije kanala i njegova ruba, dok za rješenje tipa tri vrijedi $f'(0) < 0$ i postoji područje reverzibilnog toka. Rješenja tipa jedan i dva se za dovoljno velike Raynoldsove brojeve zanemarivo razlikuju. Rješenja su za većinu ovih slučajeva poduprijeta numeričkim rješenjima.
Daljnja promatranja su otišla u smjeru slučajeva u kojima je jedna od strana kanala nepropusna i slučajeva strana koje se kreću nekom početnom brzinom, no u ovom radu nećemo ulaziti detaljnije u to.
Jedan od najznačajnijih egzaktnih rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi je upravo sljedeći: tok u kanalu sa stranama koje nisu paralelne (vidi [8]). Mi ćemo promatrati slučaj u kojem su stranice pod kutem od 2α i sjecištem u ishodištu koje igra ulogu ili izvora ili ponora ovisno o kojem smjeru toka se radi. Ovaj slučaj su najprije promatrali Jeffery[9] i Hamel[10], zatim su se nekim specijalnijim slučajevima posvetili Harrison, von Kármán[11], Tollmien[12] , Noether[13] i Dean[14]. Značajniji napredak u ovom slučaju dali su Rosenhead[15], Millsaps i Pohlhausen, Berker i konačno Whitham[16] na čija ćemo se razmatranja mi fokusirati.
Najprije označimo sa Q volumni protok po jedinici širine, bilo pozitivan ili negativan, koji je izražen u L^2/T gdje je L karakteristična linearna dimenzija (primjerice metri), T dimenzija vremena. Sada vidimo da onda Raynoldsov broj možemo uzeti kao $R = Q/\nu$. Komponente brzine će u ovom slučaju bit dane s

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\nu F(\theta)}{r}, \\ v_\theta &= \frac{\nu G(\theta)}{r}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

[9]George Barker Jeffery (1891.-1957.), britanski matematičar
[10]Georg Karl Wilhelm Hamel (1877.-1954.), njemači matematičar
[11]Theodore von Kármán (1881.-1963.), mađarsko-američki matematičar, inženjer zrakoplovstva i fizičar
[12]Walter Tollmien (1900.-1968.), njemački matematičar i fizičar
[13]Amalie Emmy Noether (1882.-1935.), njemačka matematičarka
[14]William Reginald Dean (1896.-1973.), britanski matematičar
[15]Louis Rosenhead (1906.-1984.), britanski matematičar
[16]Gerald Beresford Whitham (1927.-2014.), britansko-američki matematičar

a razlika tlakova s

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{\nu^2 P(\theta)}{r^2}. \tag{3.45}$$

Jednadžba kontinuiteta $(3.20)_4$ nam sada daje $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$, odnosno $G(\theta) = const$. Međutim, ta konstanta nam je i poznata zbog uvjeta ne proklizavanja, $v_\theta = 0$ za $\theta = \pm\alpha$, pa je $G(\theta) \equiv 0$. Spomenimo odmah da za zadovoljavanje uvjeta ne proklizavanja je potrebno i $F(\theta) = 0$ za $\theta = \pm\alpha$. Jednadžba gibanja $(3.20)_1$ i $(3.20)_2$ nam sada daju $P' = 2F'$, odnosno $P = 2F + C_1$, i $P = -(F^2 + F'')/2$ što bi značilo da F zadovoljava jednadžbu

$$F'' + F^2 + 4F + 2C_1 = 0. \tag{3.46}$$

Ako prethodnu jednadžbu pomnožimo s F' i zatim integriramo, dolazimo do oblika

$$\frac{1}{2}(F')^2 + \frac{1}{3}F^3 + 2C_1 F = C_2, \tag{3.47}$$

ili u drugačijem zapisu

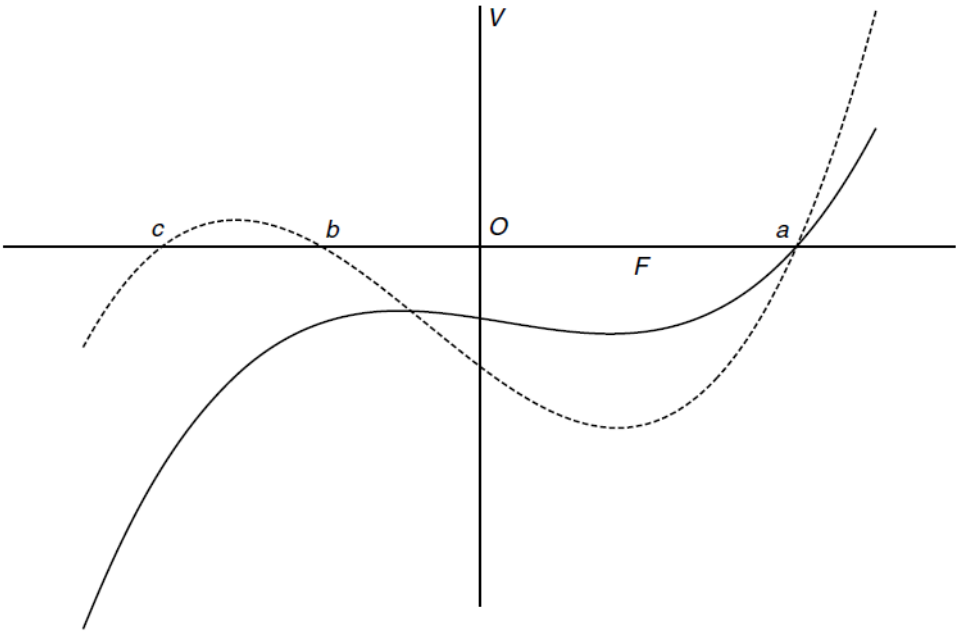
$$\frac{1}{2}(F')2 - \frac{1}{3}(a - F)(F - b)(F - c) = 0, \tag{3.48}$$

gdje konstante a, b i c ovise o C_1 i C_2 i zadovoljavaju jednadžbu $a + b + c = -6$.
Jednadžbu (3.48) možemo dinamički interpretirati kao jednadžbu očuvanja energije za česticu jedinične mase, koja se kreće po ravnoj liniji, čija je potencijalna energija

$$V(F) = -\frac{1}{3}(a - F)(F - b)(F - c). \tag{3.49}$$

gdje smo θ interpretirali kao vrijeme, a F kao pomak. Primijetimo da čestica kreće iz $F = 0$ za $\theta = -\alpha$, a završava opet u $F = 0$ za $\theta = \alpha$, pa imamo dvije moguće situacije za konstante a, b i c, što možemo vidjeti na slici 3.8.

Prvi je slučaj gdje je $a > 0$, a b i c su međusobno kompleksno konjugirani. Drugi je slučaj u kojem su svi realni i vrijedni odnos $c < b < 0 < a$. U prvom slučaju, čestica kreće u $F = 0$ s pozitivnom brzinom, dolazi do $F = a$ kada brzina pada na 0, ali ubrzanje $F'' = -dV/dF$ je negativno, pa se vraća natrag u $F = 0$. Što se nakon 0 događa nama nije od važnosti. Vidimo da nam je tok simetričan obzirom na $\theta = 0$, a ovaj slučaj, $0 < F < a$ opisuje odljev fluida, budući da je $F > 0$.
Drugi slučaj će za kretanje čestice od $F = 0$ do $F = a$ i natrag u $F = 0$ također opisivati odljev, dok kretanje od $F = 0$ preko $F = b$ do $F = 0$, budući da je $F < 0$, opisuje priljev također simetričan obzirom na $\theta = 0$. Međutim, čestica sada može oscilirati između b i a, odnosno odljeva i priljeva fluida, pri čemu nemamo više nužno simetričnost oko $\theta = 0$.
Vrijednosti konstanti a, b i c mogu se odrediti numeričkim metodama, ali rješenje možemo



Slika 3.8: Dva slučaja za konstante a, b i c

izraziti transformacijama na sljedeći način. Za prvi slučaj kada imamo moguć samo odljev fluida, rješenje je dano s

$$F(\theta) = a - \frac{3M^2}{2}\frac{1 - cn(M\theta, \kappa)}{1 + cn(M\theta, \kappa)}, \tag{3.50}$$

gdje je $M^2 = 2((a-b)(a-c))^{1/2}/3$, a $2\kappa^2 = 1 + (a+2)/M^2$. U drugom slučaju, izraz za odljev fluida je

$$F(\theta) = a - 6k^2m^2sn^2(m\theta, k), \tag{3.51}$$

a za priljev

$$F(\theta) = a - 6k^2m^2sn^2(K(k^2) - m\theta, k), \tag{3.52}$$

gdje su $m^2 = (a-c)/6$, $k^2 = (a-b)/(a-c)$, a K je potpuni eliptički integral prve vrste.

3.5 3D tokovi

Promatrat ćemo slučaj u kojem više nije treća komponenta brzine trivijalna, odnosno tok više nije smješten samo u xy-ravninu. Ovakvim tokovima bavio se Stuart, on je promatrao

trodimenzionalne tokove s komponentama brzine oblika $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, gdje ϕ predstavlja potencijal brzine sa svojstvom $\Delta\phi = 0$, a treća komponenta brzine je $w = w(x, y)$. Izraz za tlak dan je s

$$\frac{1}{\rho}p = -\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{2}, \tag{3.53}$$

čime su zadovoljene jednadžbe gibanja $(2.11)_1$ i $(2.11)_2$. Kako bi $(2.11)_3$ bila zadovoljena, za treću komponentu brzine mora vrijediti

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{3.54}$$

odnosno mora biti oblika

$$w = A + B\mathrm{e}^{\phi/\nu}. \tag{3.55}$$

pa za potpunost rješenja preostaje još odrediti ϕ. Međutim, za slučaj u kojem je $w = 0$ na nekoj čvrstoj granici, tada će tamo biti $\phi = \nu ln(-A/B) = const.$, ali ako je $\phi = const.$ tada na toj granici vrijedi općenito $\partial\phi/\partial n \neq 0$. To pak znači da je promatrana granica propusna i da je na njoj prisutna usisna brzina. Ako $\phi \to -\infty$, *dovoljno* daleko od čvrste granice, vidimo iz (3.55) da $w \to A =: W_0$.
Najjednostavniji ovakav primjer je $\phi = -Vy$ s uvjetom $w = 0$ na granici $y = 0$, gdje je onda $w = W_0(1 - exp(-Vy/\nu))$.
Drugi primjer je dao Stuart uzevši $\phi = -kxy$, pa je $u = -ky$, $v = -kx$ i $w = W_0(1 - exp(-kxy/\nu))$ koji je on interpretirao kao uniforman tok prema kutu određenom s $x = 0$, $y \geq 0$ i $y = 0$, $x \geq 0$. Kako bi se ovaj tok realizirao, potrebno je da se usisavanje linearno povećava s udaljenošću od krutih granica.
Klasičan tok s točkom stagnacije kojeg smo već spominjali, može se razmatrati i u trodimenzionalnom slučaju, pritom je cilindar smješten okomito na smjer toka. Ako tok ponese cilindar ili ako je cilindar postavljem pod nekim drugim kutem, rješenje problema će biti isto (3.30) uz treću komponentu $w = w_0 g(\eta)$ pa nas $(2.11)_3$ dovodi do

$$g'' + fg' = 0, \tag{3.56}$$

uz uvjete

$$g(0) = g(\infty) - 1 = 0,$$

čije je rješenje

$$g(\eta) = \frac{\int_0^\eta exp(-\int_0^t fds)dt}{\int_0^\infty exp(-\int_0^t fds)dt}. \tag{3.57}$$

Prethodni primjer i njegova dvodimenzionalna verzija zapravo su specijalni slučaji trodimenzionalnog toka sa stagnacijskom točkom kojeg je prvi promatrao Howarth. Radi se o

slučaju određenom

$$\begin{aligned} u &= kxf'(\eta), \\ v &= kyg'(\eta), \\ w &= -(\nu k)^{1/2}(f(\eta) + g(\eta)), \end{aligned} \tag{3.58}$$

gdje je η u ovom slučaju definirana kao $\eta = (k/\nu)^{1/2}z$.
Ako uvrstimo (3.58) u jednadžbu gibanja (2.11), tada dobivamo u terminima f i g jednadžbe

$$f''' + (f + g)f'' + 1 - (f')^2 = 0, \tag{3.59}$$

te

$$g''' + (f + g)g'' + r^2 - (g')^2 = 0, \tag{3.60}$$

gdje je $r = l/k$, te tlak dan s

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{1}{2}(k^2x^2 + l^2y^2) + \nu k(f' + g') + \frac{1}{2}\nu k(f + g)2. \tag{3.61}$$

Pritom su rubni uvjeti sljedeći

$$f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = f'(\infty) - 1 = g'(\infty) - r = 0. \tag{3.62}$$

Interpretacija navedenog primjera je ta da rješenje opisuje tok u neposrednoj blizini nodalne točke spoja koja se primjerice može naći kod asimetrične izbočine na tijelu u uniformnom toku paralelnom s z-osi. Howarth je riješio jednadžbe (3.59) i (3.60) za razne vrijednosti r u rasponu $0 \leq r \leq 1$. Rješenje je nadopunio Davey za $-1 \leq r < 0$. Ona pak opisuju sedlastu točku spoja koja se može naći u primjeru neposredne blizine geometrijske sedlaste točke na površini tijela koje se nalazi između dvije izbočine. On je također pokazao da za $r < -1$ rješenje neće postojati.

Bibliografija

[1] *Difference between pipe flow and free surface flow*, https://nptel.ac.in/courses/105106114/pdfs/Unit2/2_29.pdf.

[2] Ibrahim Aganović, *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, 2003.

[3] George Keith Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge university press, 2000.

[4] Robert A Brown, *Fluid mechanics of the atmosphere*, sv. 47, Academic Press, 1991.

[5] K. P. Burr, T. R. Akylas i C. C. Mei, *Two-dimensional laminar boundary layers*, http://web.mit.edu/fluids-modules/www/highspeed_flows/ver2/bl_Chap2/node13.html.

[6] Philip G Drazin i Norman Riley, *The Navier-Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*, br. 334, Cambridge University Press, 2006.

[7] Bruce R Munson, Donald F Young, Theodore H Okiishi i Wade W Huebsch, *Fundamentals of fluid mechanics. Hoboken*, John Wiley & Sons, Inc **69** (2006), 520.

[8] L. Rosenhead, *The steady two-dimensional radial flow of viscous fluid between two inclined plane walls*, Proc. R. Soc. Lond. A **175**, 436–467.

Sažetak

Ovaj rad daje pregled nekih egzaktnih rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi, dakle jednažbi koje opisuju kretanje viskoznog fluida. Promatrani su isključivo stacionarni tokovi omeđeni ravninskim granicama, koje bilo miruju ili se gibaju. Tokovi su podijeljeni u pet kategorija prema tipu (Couette-Poiseuilleovi tokovi, Beltramijevi tokovi, tokovi s točkom stagnacije, tokovi u kanalu i trodimenzionalne verzije tokova)i u svakoj je dan jedan ili više primjera. Primjeri su birani tako da daju neki uvid u dinamiku fluida. Iako egzaktna rješenja više nisu fokus istraživanja matematičara koji se bave ovim područjem, čine bitan segment razvoja teorije mehanike fluida.

Summary

This paper gives an overview of some of the exact solutions to Navier-Stokes equations, i.e. equations describing the movement of viscous fluid. Only stationary flows bounded by plane boundaries are observed, which could be fixed or moving. The flows are divided into five categories by type (Couette-Poiseuille flows, Beltrami flows, stagnation-point flows, channel flows and three-dimensional flows) and for each is given one or more examples. Examples are chosen to give some insight into fluid dynamics. Although exact solutions are no longer the focus of mathematicians involved in this area, they form an essential segment of the theory of fluid mechanics.

Životopis

Lana Reščec rođena je 1993. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Jordanovac, upisuje XV. gimnaziju. Godine 2011. upisuje preddiplomski studij na Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, na Matematičkom odsjeku. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2015. upisuje diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.