Sangaku - geometrija japanskih hramova

Rotim, Ana-Maria

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana-Maria Rotim

SANGAKU-GEOMETRIJA JAPANSKIH HRAMOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Julije Jakšetić
Suvoditelj:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, studeni, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentorima na vodstvu i savjetima.
Hvala mojim matematičarkama jer bez njih studiranje ne bi bilo ovako lijepo.
Zahvaljujući studiju, našla sam u vama doživotne prijateljice.
Zahvaljujem stričevima na pomoći i podršci.
Hvala mojim Rotimima i Rakasima, a i onima koji, nažalost, nisu više s nama.
Bili ste mi najvjerniji navijači, hvala vam na žrtvama, brizi i savjetima koje ste mi pružili.
Naposljetku, hvala mome dragom Mihaelu što mi je bio najstrpljivija i najveća potpora.
Znam da ti nije bilo lako sa mnom; vječno sam ti zahvalna na ljubavi, razumijevanju,
poticajima i za svaku gestu kojom si mi olakšao put.
Hvala ti i na svim lijepim uspomenama koje ću zauvijek čuvati u srcu.

Sadržaj

Uvod

Geometrija japanskih hramova odnosi se na rezbarenje geometrijskih problema, teorema i oblika na drvene ploče postavljene u svetištima i hramovima. Japanski profesor matematike Hidetoshi Fukagawa, otkrio je ploče dok je proučavao kako bi mogao unaprijediti nastavu. Budući da se zainteresirao za ovu, dosta nepoznatu, temu, krenuo je u potragu Japanom te je detaljnije proučavao ploče. Otkriveno je da ih je 900 sačuvano do danas.
Tradicija je započela u vrijeme perioda Edoa. Tijekom tog razdoblja, 1603.-1868., Japanom je vladala vojna diktatura Tokugawa šogunata, a karakterizira ju stroga politika izolacije. U to vrijeme u Japanu dolazi do kulturne renesanse, a jedna od mnogih umjetnosti koja je cvjetala je jedinstvena vrsta japanske matematike kojom se bavimo u ovom diplomskom radu. Zanimljivo je da je tada i haiku poezija, umjetnost oduzimanja i izostavljana svakog ukrasa i neophodne riječi, postala raširena po cijeloj zemlji te je i danas najpoznatija umjetnost Japana.
Iz ove tradicije potječe sangaku, gdje "san" znači račun, a "gaku" znači ploča. Pretpostavlja se da je na ovu tradiciju utjecala prethodna u kojoj su u svetištima vješali naslikane konje. U drevna vremena, ritualno su se žrtvovali konji bogovima, no radi troškova, vjernici su počeli žrtvovati naslikane konje na drvenim pločama u zamjenu za žive. Sangaku su bile postavljene na zidovima svetišta, a neke su postavljene i na stropove.
Ploče su napisane na kanbunu, to je stari oblik japanskog jezika koji se sastoji od kineskih znakova i gramatike uz napomene koje su omogućavale čitatelju lakše čitanje. U tom razdoblju taj jezik korišten je za sve dokumente vezane uz znanost. Prikaz konstrukcija je raznolik, no dosta ih je prikazano u trodimenzionalnom obliku te su neke ploče sadržavale i dokaze. Najviše je bilo geometrije ravnine, dok negdje nalazimo i algebarske probleme. Iako su knjige s rješenjima sangaku problema objavljene pred mnogo godina, neki teoremi su i dalje neriješeni.
Iako je sangaku sličan starim, već spomenutim ritualima, njegova točna svrha ostaje tema nagađanja. Između ostalog, svrha sangakua je bila pokazati matematičko umijeće, zahvaliti se božanstvu i zamoliti ga za još spoznaja. Isto tako, sangaku je bio izazov vjernicima da riješe matematički problem.
Sangaku možemo pojasniti tako da zamislimo da je Isaac Newton odlučio objesiti svoje monografije u lokalnoj crkvi umjesto da ih objavi u knjigama. Tijekom 17. stoljeća mate-

matiku su mijenjali znanstvenici poput Newtona, no Japan je bio izoliran od ostatka svijeta i razvio je svoje matematičke tradicije. Tada je samostalno otkriveno mnogo matematičkih teorema.
Nagađa se da su samuraji, japanska elita, bili jedni od prvih koji su stvarali sangaku. U razdoblju Tokugawa režima nisu više bili potrebni vojsci te su mnogi bili na dužnostima vlasti uz koje su imali dosta slobodnog vremena. Zajednička znanost samurajima bila je matematika jer je poučavana u školama u kojima su djelovali. Također su ga postavljali i ljudi raznih klasa i zanimanja; trgovci, poljoprivrednici itd. Moglo se zaključiti da razina problema i složenost matematičkog jezika odgovara tome koliko je obrazovana osoba koja je zadala problem. Ploče su dizajnirane s namjerom da privuku i zainteresiraju ljude koji nisu matematičari; položaj na stropu i šareni dizajn su inspirirali i poticali ostale vjernike na rješavanje matematičkih problema. Moderni matematički računi i metode mogu pojednostaviti sangaku problem koji možda zahtjeva dosta računa, ali s druge strane, prednost matematike korištene u sangaku problemima je da je toliko jednostavna da su ju i djeca razumjela i koristila. Na taj način su sangaku problemi prikladni svim uzrastima.
Sangaku je prestao biti popularan kada je matematika zapadnog svijeta došla u Japan, posebno nakon propasti Tokugawa. Tada kao da je uloga samuraja u japanskom društvu, pa i uz to popularnost i stvaranje sangakua, počela blijediti.
Zanimljivo je da su sangaku ploče vjerojatno jedinstvene u svjetskom kulturnom stvaralaštvu posebno jer su istovremeno umjetnička djela, religiozni artefakti i zapisi nečega što možemo nazvati matematika za razonodu.
Prije nego krenemo na sangaku probleme, objasnimo što su japanske prefekture. Prefekture predstavljaju najvišu jedinicu administrativne podjele Japana. Ukupno ih je 47, a najpoznatije su metropola Tokyo, okrug Hokkaido, dvije gradske prefekture Osaka i Kyoto. One predstavljaju višu razinu državne uprave od gradova, manjih gradova i sela.
U ovom radu ćemo se otisnuti na povijesno, duhovno, kulturno i matematičko putovanje prefekturama Japana te ćemo rješavanjem nekih od poznatih nam problema bolje upoznati duh onog vremena.

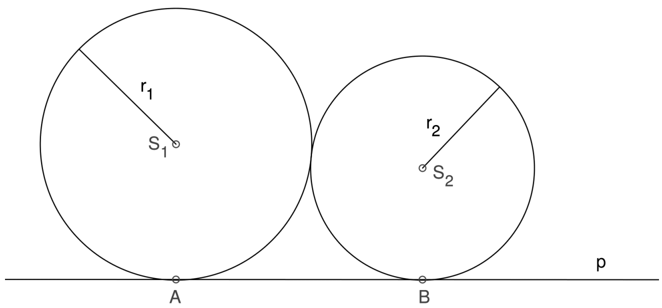
Poglavlje 1

Miyagi prefektura

Miyagi prefektura nalazi se na sjeveroistoku Honshua, u brdovitoj regiji Tohoku.

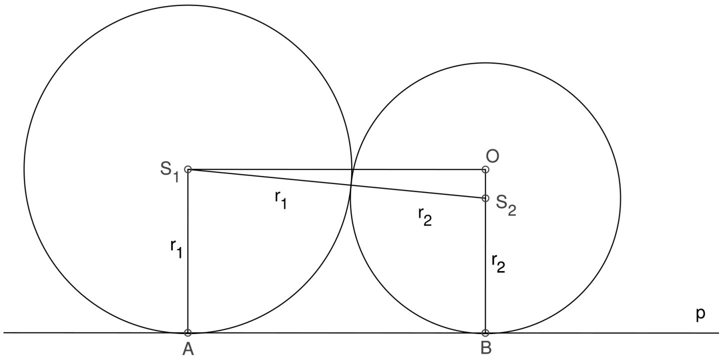
Godine 1892. nađena je pločica iz perioda Edo koja sadrži rezultat klasične japanske matematike, poznat pod nazivom wasanska. Ovaj problem prethodno je objavljen u knjizi Shinpeki Sanpo, što je u doslovnom prijevodu Sveta matematika, a objavio ju je Fujita Kagen uz pomoć svog oca matematičara Fujita Sadasuke.

Problem 1.1. *Zadane su dvije kružnice; jedna sa središtem u* S_1 *i polumjerom duljine* r_1*, a druga sa središtem u* S_2 *i polumjerom duljine* r_2*, dodiruju se izvana i obje dodiruju pravac* p *redom u točkama* A *i* B*. Dokažite da je udaljenost među diralištima kružnica na zajedničkoj tangenti jednaka* $2\sqrt{r_1 r_2}$.



Slika 1.1:

Rješenje.
Neka je kružnica k_1 kružnica sa središtem u S_1 i polumjerom r_1, a k_2 kružnica sa središtem u S_2 i polumjerom r_2.



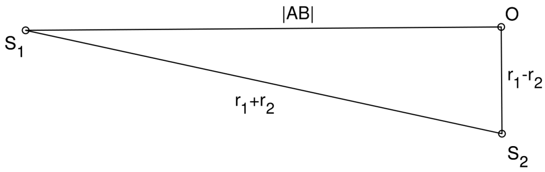
Slika 1.2:

Označimo dirалište kružnice k_1 i pravca p slovom A, diralište kružnice k_2 i pravca p slovom B, a udaljenost među diralištima kružnica s $|AB|$.

Budući da spojnica S_1 i S_2 prolazi dirалištem obiju kružnica, bit će po Pitagorinom poučku (vidi sliku 1.3):

$$|AB|^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2,$$

pri čemu je iz slike 1.2 jasno da je: $|S_1O| = |AB|$.



Slika 1.3:

Sređivanjem se dobije:

$$|AB|^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2,$$

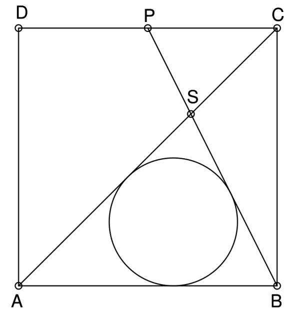
odnosno

$$|AB|^2 = 4r_1r_2.$$

□

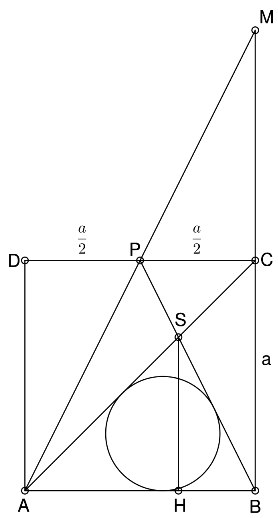
Sljedeći problem iz Miyagi prefekture je postavljen 1877. godine.

Problem 1.2. *Zadan je kvadrat $ABCD$. Neka je P polovište stranice DC,a točka S sjecište dijagonale AC i dužine BP. Odredi radijus upisane kružnice trokuta ABS.*



Slika 1.4:

Rješenje.
Neka je duljina stranice kvadrata a, a r radijus upisane kružnice trokutu SAB.
Produžimo stranicu $\overline{BC}$ do točke M tako da je $|BC| = |CM| = a$, zatim $|AP| = |PM|$ i na kraju povucimo visinu $|SH|$ trokuta ASB (vidi sliku 1.5).



Slika 1.5:

Sada, budući da je $|BC| = |CM|$, zaključujemo da je C polovište stranice $\overline{BM}$, a jer je $|AP| = |PM|$, zaključujemo da je P polovište stranice $\overline{AM}$.

Promotrimo trokut ABM, sada nam je jasno da su $\overline{AC}$ i $\overline{BP}$ težišnice, a S težište.
Stoga vrijedi, $|AS| = \frac{2}{3}|AC|$, a budući da je $\overline{AC}$ dijagonala kvadrata stranice, znamo da je $|AC| = a\sqrt{2}$, tj. $|AS| = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$.
Također je i $|BS| = \frac{2}{3}|BP|$. Budući da je BCP pravokutan trokut, po Pitagorinom poučku vrijedi:

$$|BP|^2 = |BC|^2 + |CP|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4},$$

dakle: $|BP| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ pa je i $|BS| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.
Budući da je S težišnica trokuta ABM, a $|BM| = 2a$, zaključujemo da je $|SH| = \frac{2a}{3}$.
Računamo površinu trokuta ASB: $P = \frac{|AB| \cdot |SH|}{2}$ te je i $P = r \cdot \frac{(|AS| + |BS| + |AB|)}{2}$.
Izjednačimo li te izraze i uvrstimo poznato dobijemo:

$$\frac{2a}{3} \cdot a = r \cdot (\frac{2}{3}a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{5}}{3} + a),$$

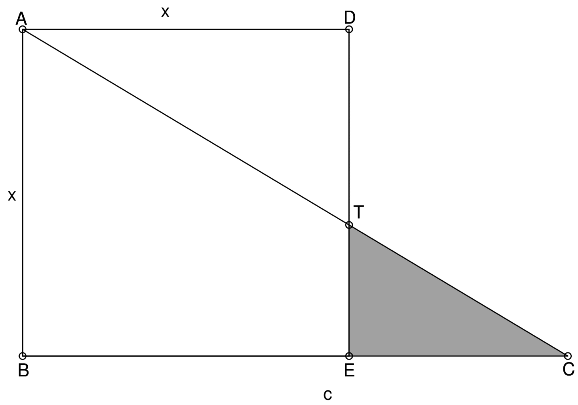
sada sredimo izraz:

$$2a^2 = ra \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3).$$

Konačno, $r = \frac{2a}{3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$. □

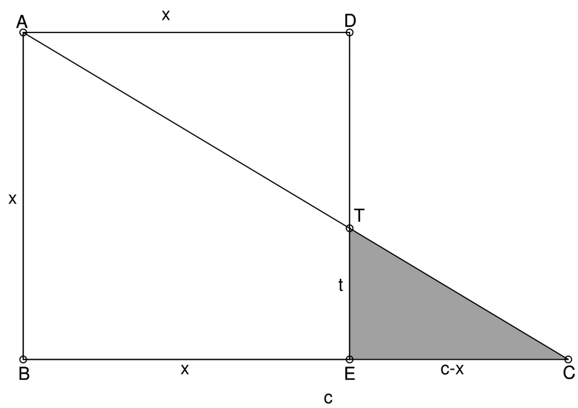
Kojima Yokichi postavio je ovaj problem 1909. godine, u gradu Kakuda, na pločici dimenzija 72cm × 162cm.

Problem 1.3. *Zadan je kvadrat duljine stranice x $ABED$ kojeg siječe pravokutni trokut ABC u točki T. Ako je $c = |BC|$, odredite vrijednost x u oznaci c tako da je površina trokuta TEC maksimalna.*



Slika 1.6:

Rješenje.
Neka je $|TE| = t$, iz slike 1.7 je jasno da je $|EC| = c - x$.



Slika 1.7:

Budući da su oba trokuta ABC i TEC pravokutna te imaju zajednički kut pri vrhu C, zaključujemo da su slični te vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|TE|}{|EC|},$$

tj.

$$\frac{x}{c} = \frac{t}{c - x}.$$

Iz toga slijedi: $t = \dfrac{x(c - x)}{c}$.

Budući da je TEC pravokutan trokut, njegova površina P iznosi:

$$P = \frac{t(c-x)}{2} = \frac{\frac{x(c-x)}{c} \cdot (c-x)}{2} = \frac{x(c-x)^2}{2c} = \frac{c^2x - 2cx^2 + x^3}{2c}.$$

Tražimo maksimalnu površinu, stoga računamo prvu derivaciju po x.

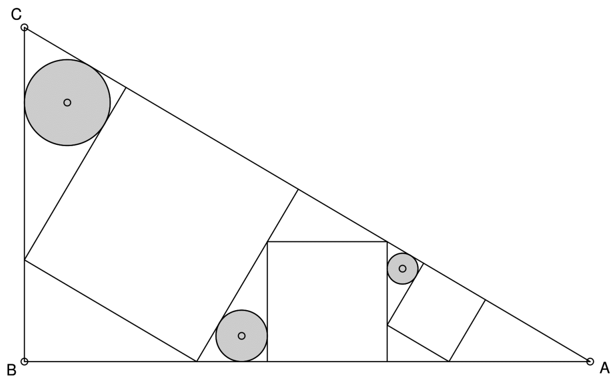
$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2c} \cdot (c^2 - 4cx + 3x^2) = \frac{(3x-c)(x-c)}{2c}.$$

Dobili smo dva rješenja: $x_1 = \frac{c}{3}$ i $x_2 = c$. No, ako je $x = c$, tada je i $t = 0$, stoga to rješenje odbacujemo.
Konačno, za $x = \frac{c}{3}$ površina trokuta TEC je maksimalna.

□

Ovo je jedan od "mlađih" problema koji datira iz 1913. godine.

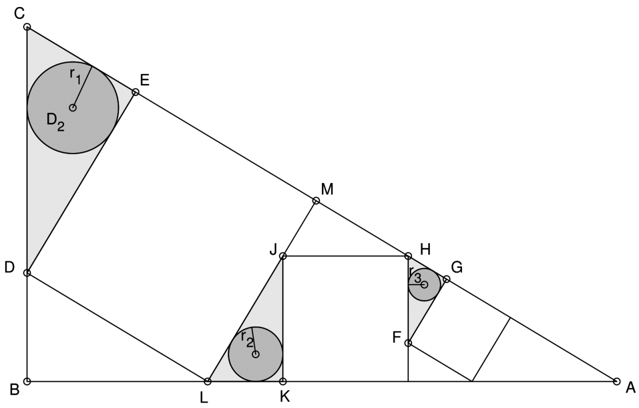
Problem 1.4. *U zadani pravokutni trokut CBA upisani su tri kvadrata i tri kružnice. Polumjer najveće kružnice je r_1, srednje r_2, a najmanje r_3. Dokažite da vrijedi: $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$.*



Slika 1.8:

Rješenje.
Uz oznake kao na slici 1.9 i pretpostavki problema slijedi da su CBA, CED, LKJ i HGF pravokutni trokuti. Dalje, vrijedi da je trokutima CBA i CED zajednički kut pri vrhu C pa su oni slični po K-K-K poučku.
BDE je vanjski kut kuta EDC i vrijedi:

$$\angle BDE = \angle BDL + \angle LDE = \angle BDL + 90^\circ = \angle ECD + 90^\circ.$$



Slika 1.9:

Dakle, $\angle BDL \simeq \angle ECD$.
Sada promatramo trokute KLJ i BDL: ponovno imamo $\angle KLD$ vanjski kut $\angle DLB$:

$$\angle KLD = \angle KLJ + 90^\circ = \angle BDL + 90^\circ,$$

Dakle, $\angle KLJ \simeq \angle BDL$.
Analogno, iz trokuta KLJ i MJH zaključujemo da je $\angle KLJ \simeq \angle MJH$, a iz trokuta MJH i GFH zaključujemo da je $\angle MJH \simeq \angle GFH$. Dakle, sada vrijedi:

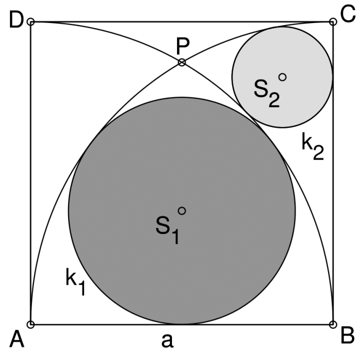
$$\angle BCA \simeq \angle ECD \simeq \angle KLJ \simeq \angle GFH.$$

Budući da su CBA, CED, LKJ i HGF pravokutni trokuti te im je jedan kut sukladan, zaključujemo da su im sva tri kuta sukladna te da su ti trokuti slični po K-K-K poučku. Iz međusobne sličnosti slijedi da su omjeri polumjera upisanih kružnica tim trokutima $\frac{r_2}{r_1}$ te $\frac{r_3}{r_2}$ međusobno jednaki, tj. vrijedi: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2}$, tj. $r_2^2 = r_1 r_3$ iz čega slijedi $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$, što smo upravo i trebali dokazati.

□

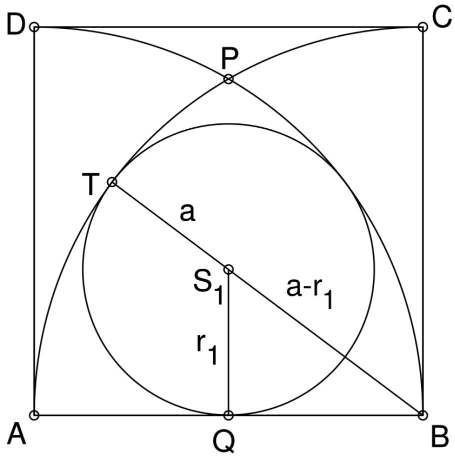
Ovaj sangaku je bio oštećen pa nije vremenski preciziran.

Problem 1.5. *Zadan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice a. U kvadratu su nacrtana dva luka $\widehat{AC}$ i $\widehat{BD}$ te kružnice sa središtima u točkama B i A. Presjek lukova je točka P. Točke APB i dijelovi lukova određuju gotički luk. U krivocrtnim trokutima APB i BPC upisane su kružnice k_1 i k_2 s polumjerima r_1 i r_2. Odredite omjere $\frac{r_1}{a}$ i $\frac{r_2}{a}$.*



Slika 1.10:

Rješenje.
Neka je S_1 središte kružnice k_1, a S_2 središte kružnice k_2. Povučemo pravac kroz točke B i S_1 te označimo sjecište tog pravca i kružnog luka (kao na slici 1.11) točkom T.



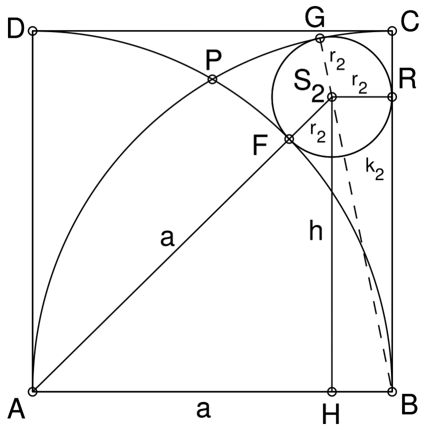
Slika 1.11:

Sada je očito da vrijedi $|BC| = |BT| = a$, a neka je Q nožište okomice iz S_1 na $\overline{AB}$. Uočavamo pravokutan trokut S_1QB; $|S_1B| = a - r_1$, $|S_1Q| = r_1$ te $|QB| = \frac{a}{2}$,. Po Pitagorinom poučku vrijedi:

$$(a - r_1)^2 = r_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 .$$

Sređivanjem dobijemo:

$$a^2 - 2ar_1 + r_1^2 = r_1^2 + \frac{a^2}{4},$$



Slika 1.12:

a i toga imamo: $r_1 = \dfrac{3a}{8}$.
Dalje, neka je H nožište okomice iz S_2 na $\overline{AB}$. Povučemo pravac kroz točke A i S_2 te označimo sjecište tog pravca i kružnog luka (kao na slici 1.12) točkom F.
Sada je očito da vrijedi: $|AD| = |AF| = a$ te uz oznake kao na slici 1.12 uočavamo pravokutne trokute AHS_2 i BRS_2.
Sada je

$$|AS_2|^2 = |AH|^2 + |S_2H|^2,$$

tj.

$$(a + r_2)^2 = (a - r_2)^2 + h^2. \tag{1.1}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut BRS_2 imamo:

$$|BS_2|^2 = |S_2R|^2 + |BR|^2,$$

onda

$$(a - r_2)^2 = r_2^2 + h^2. \tag{1.2}$$

Oduzmemo li (1.2) od (1.1) dobili smo:

$$(a + r_2)^2 - (a - r_2)^2 = (a - r_2)^2 - r_2^2.$$

Sređivanjem se dobije:

$$4ar_2 = a^2 - 2ar_2,$$

tj. $a^2 = 6ar_2$, iz toga slijedi: $r_2 = \dfrac{a}{6}$.
Dakle, $\dfrac{r_1}{a} = \dfrac{3}{8}$, a $\dfrac{r_2}{a} = \dfrac{1}{6}$. □

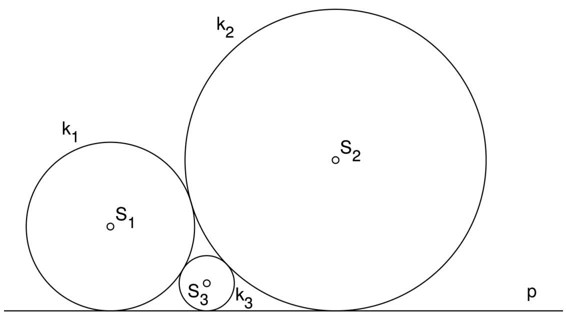
Poglavlje 2

Gunma prefektura

Ova prefektura nalazi se u središnjem dijelu otoka Honshua, a 14% površine prefekture čine nacionalni parkovi.

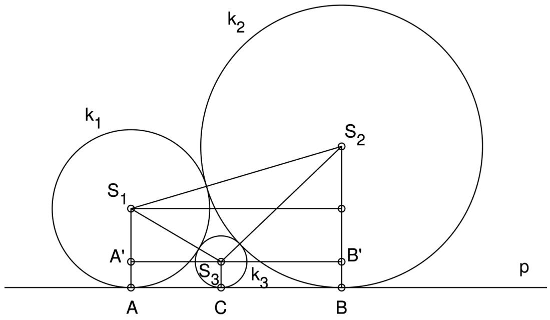
Sljedeći problem smatra se najpoznatijim sangaku problemom. Nađen je na pločici koja datira iz 1824. godine.

Problem 2.1. *Tri kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$ i $k_3(S_3, r_3)$ diraju pravac p tako da se k_1 i k_2 dodiruju međusobno izvana, a kružnica k_3 izvana dodiruje i k_1 i k_2. Dokažite da je* $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$.

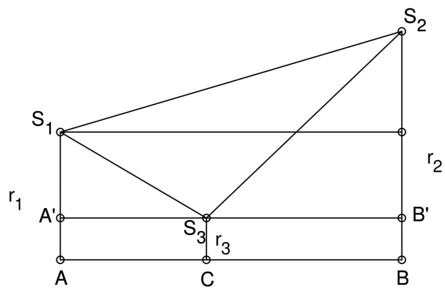


Slika 2.1:

Rješenje.
Označimo diralište kružnice sa središtem u S_1 i pravca p slovom A, kružnice sa središtem u S_2 i pravca p slovom B te kružnice sa središtem u S_3 i pravca p slovom C. Paralelan pravac s p kroz S_3 siječe $\overline{AS_1}$ i $\overline{BS_2}$ u točakama A' i B'.



Slika 2.2:



Slika 2.3:

Tada je prema rješenju Problema 1.1:

$$|AC| = |A'S_3| = 2\sqrt{r_1 r_3}, \; |CB| = |S_3 B'| = 2\sqrt{r_2 r_3}.$$

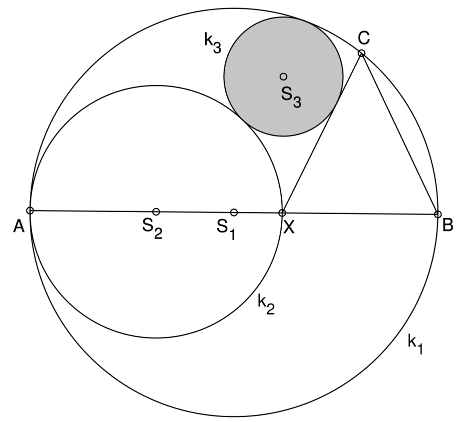
Budući da je $|AC| + |CB| = |AB| = 2\sqrt{r_1 r_2}$, odnosno $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$, pa dijeljenjem s $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

□

Sangaku iz 1803. godine i danas izložen.

Problem 2.2. *Zadana je kružnica* $k_1\left(S_1, \frac{|AB|}{2}\right)$. *Na promjeru* $\overline{AB}$ *nalazi se središte* S_2 *kružnice* k_2 *promjera* $\overline{AX}$. *Dužina* $\overline{XB}$ *osnovica je jednakokračnog trokuta* XBC *čiji je vrh* C *na kružnici* k_1. *Koliki je polumjer kružnice* k_3 *koja dodiruje kružnice* k_1 *i* k_2 *te krak* $\overline{XC}$, *ako je* $2r_1 = 1$ *i* $0 < 2r_2 < 1$?



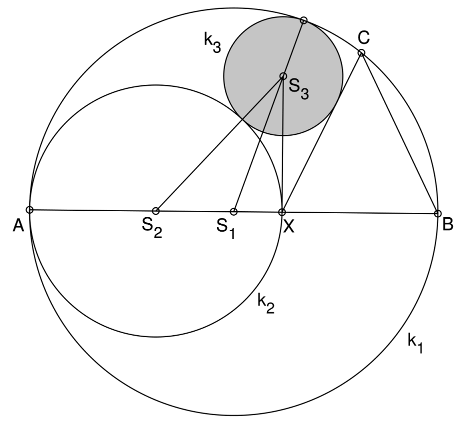
Slika 2.4:

Rješenje.
Neka je S_3 središta kružnice k_3. Iz 2.5 slike vidimo da je:

$$|S_2S_3| = r_2 + r_3$$

te

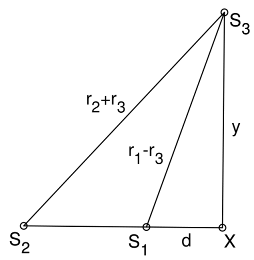
$$|S_1S_3| = r_1 - r_3.$$



Slika 2.5:

Uz oznaku $|S_1X| = d$, vidimo da je

$$d = |AX| - |AS_1| = 2r_2 - r_1.$$



Slika 2.6:

Promotrimo slike 2.5 i 2.6 i na njima pravokutne trokute S_3XS_2 i S_3XS_1 Za trokut S_3XS_2 vrijedi:

$$|S_3X|^2 = |S_3S_2|^2 - |S_2X|^2 = (r_2 + r_3)^2 - r_2^2 = 2r_2r_3 + r_3^2.$$

Analogno za trokut S_3XS_1 dobivamo:

$$|S_3X|^2 = |S_3S_1|^2 - |S_1X|^2 = (r_1 - r_3)^2 - (2r_2 - r_1)^2 = r_3^2 - 4r_2^2 - 2r_1r_3 + 4r_2r_1.$$

Izjednačavanjem prethodnih relacija slijedi

$$r_3^2 + 2r_2r_3 = r_3^2 - 4r_2^2 - 2r_1r_3 + 4r_2r_1,$$

odnosno

$$r_2r_3 + r_1r_3 = 2r_2r_1 - 2r_2^2.$$

Otuda je

$$r_3 = \frac{2r_2(r_1 - r_2)}{r_2 + r_1}.$$

Ako je $2r_1 = 1$, tada je

$$r_3 = \frac{2r_2(1 - 2r_2)}{1 + 2r_2}.$$

□

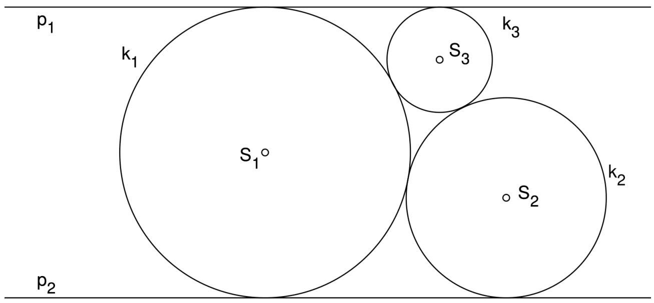
Poglavlje 3

Ibaraki prefektura

Prefektura koja se nalazi na istočnoj obali središnjeg dijela otoka Honshua, a glavni grad je Mito.

Ovaj problem se nalazi na pločici iz 1881. godine koja je izložena u okrugu Ibaraki, no isti je problem objavljen na jednom starijem panou. Mnogi panoi su bili kopirani i mogu se naći u različitim mjestima od različitih autora.

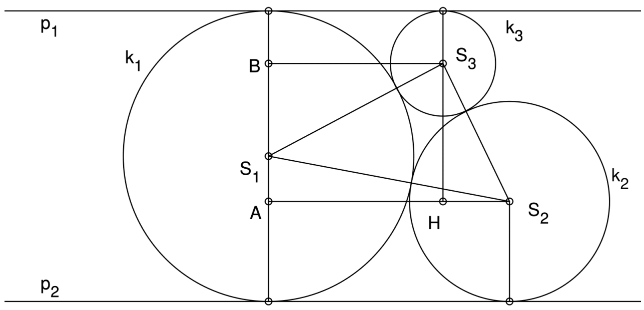
Problem 3.1. *Zadana su dva paralelna pravca p_1 i p_2, kružnica k_1 koja ih dodiruje, kružnice k_2 i k_3 koje se međusobno dodiruju, a svaka od njih dodiruje kružnicu k_1 te jedan od zadanih pravaca. Ako je r_i polumjer kružnice k_i, treba dokazati da vrijedi:* $r_1^2 = 4r_1r_2$.



Slika 3.1:

Rješenje.
Neka je $r_1 > r_2 > r_3$. Označimo li točke kao na slici 3.2, vrijedi:

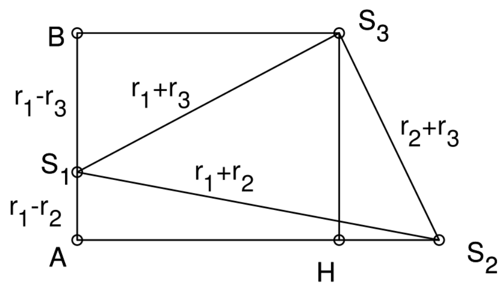
$$|S_1B| = r_1 - r_3 \text{ i } |S_1A| = r_1 - r_2.$$



Slika 3.2:

Očito je:

$$|S_1S_2| = r_1 + r_2,$$
$$|S_1S_3| = r_1 + r_3.$$



Slika 3.3:

Primjenom Pitagorinog poučka ne pravokutne trokute S_1BS_3 i S_1AS_2 sa slike 3.3 dobivamo:

$$|S_3B| = \sqrt{(r_1+r_3)^2 - (r_1-r_3)^2} = 2\sqrt{r_1r_3},$$
$$|S_2A| = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

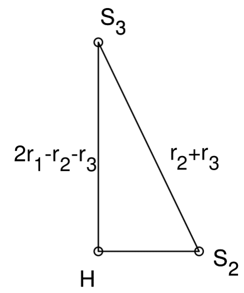
Na slici 3.4 je izdvojen pravokutan trokut S_2HS_3. Za duljine njegovih stranica vrijedi:

$$|S_2S_3| = r_2 + r_3, |S_3H| = |BA| = r_1 - r_3 + r_1 - r_2 = 2r_1 - r_2 - r_3$$

te

$$|S_2H| = |S_2A| - |HA| = |S_2A| - |S_3B| = 2\sqrt{r_1r_2} - 2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}).$$

Primjenjujemo Pitagorin poučak na trokut S_2HS_3:



Slika 3.4:

$$(r_2 + r_3)^2 = 4r_1(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2.$$

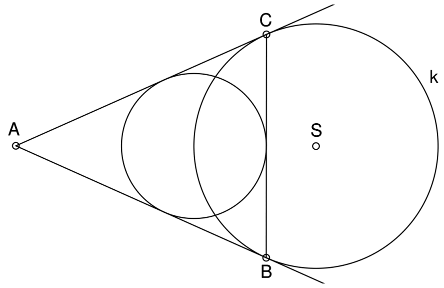
$$r_2^2 + 2r_2r_3 + r_3^2 = 4r_1(r_2 - 2\sqrt{r_2r_3} + r_3) + 4r_1^2 - 4r_1r_2 + r_2^2 - 4r_1r_3 + 2r_2r_3 + r_3^2,$$

sređivanjem se dobije: $r_1 = 2\sqrt{r_2r_3}$, odnosno $r_1^2 = 4r_2r_3$, što je i trebalo dokazati.

□

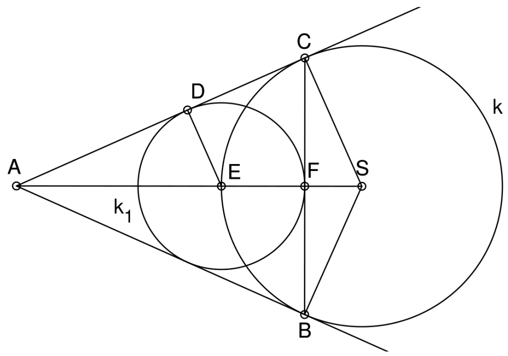
Sljedeći problem datira iz 1896. godine. Originalna pločica na kojoj je bio zadan je izgubljena.

Problem 3.2. *Zadana je kružnica k sa središtem u S te tangentama iz točke A koje dodiruju kružnicu u B i C. Dokaži da zadana kružnica prolazi kroz središte upisane kružnice trokuta ABC.*



Slika 3.5:

Rješenje.
Označimo točke kao na slici 3.6 te kružnicu upisanu trokutu ABC s k_1, njen radijus sa r, a radijus kružnice k sa R.



Slika 3.6:

Trokuti ADE i ACS su slični jer im je zajednički kut pri vrhu A te su oba pravokutna, stoga vrijedi:

$$\frac{|CS|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AD|}.$$

Supstitucijom s poznatim veličinama i korištenjem svojstva jednakih omjera imamo:

$$\frac{R}{|AC|} = \frac{r}{|AD|} = \frac{R-r}{|AC|-|AD|} = \frac{R-r}{|DC|}.$$

Budući da su CD i CF tangente na kružnicu k_1 iz C, vrijedi: $|CD| = |CF|$.
Sada je:

$$\frac{R-r}{|CD|} = \frac{R-r}{|CF|}.$$

U trokutu ACF promatramo $\angle ACF$ i vidimo da iznosi $90^\circ - \angle CAF$. Isto tako, promatramo pravokutan trokut CFS te uočavamo da je $\angle FCS = \angle SAC$ jer je

$$\angle FCS = 90^\circ - \angle ACF = 90^\circ - 90^\circ + \angle CAF.$$

Sada su trokuti ACS i CSF slični te je:

$$\frac{|CS|}{|AC|} = \frac{|FS|}{|CF|} = \frac{R-r}{|CF|}.$$

Stoga je $|FS| = R - r$. Znamo da je $|ES| = |EF| + |FS|$,

$$|EF| = |ES| - |FS| = R - (R - r) = r.$$

Konačno, $|EF| = r$ što je i trebalo dokazati. Dakle, zadana kružnica k prolazi središtem kružnice k_1. □

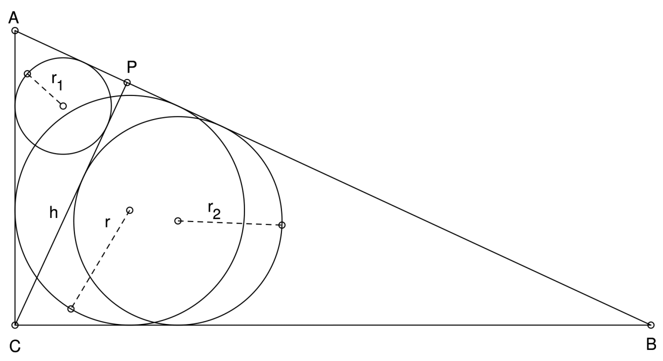
Poglavlje 4

Iwate prefektura

Nalazi se na sjeveroistočnom dijelu otoka Honshua, geografski specifična kao prefektura s najistočnijom točkom otoka te najmanjom gustoćom naseljenosti.

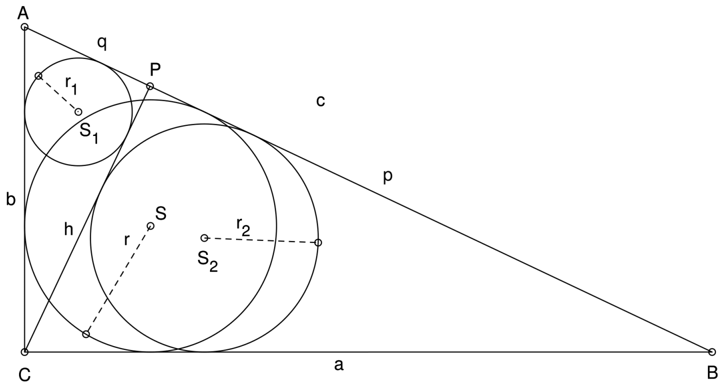
Ovaj problem je izložen u okrugu Iwate, no nije poznato iz koje godine potječe.

Problem 4.1. *Zadan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C. Neka je r duljina polumjera tome trokutu upisane kružnice, a točka P nožište visine iz vrha C. Ako je $h = |CP|$, a r_1 i r_2 duljine polumjera kružnica upisanih redom u trokute ACP i BCP, dokažite da vrijedi $h = r + r_1 + r_2$.*



Slika 4.1:

Rješenje.
Iz zadatka je jasno da su trokuti ACB, APC i CPB pravokutni. Uz uobičajene oznake: $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$, označimo $|AP| = q$ te $|BP| = p$, pri čemu je $p + q = c$. Općenito, u pravokutnom trokutu s pravim kutem pri vrhu C za duljine polumjera r



Slika 4.2:

upisanih kružnica vrijedi:

$$r = \frac{a+b-c}{2}. \tag{4.1}$$

Sada imamo:

$$r_1 = \frac{q+h-b}{2}, \; r_2 = \frac{p+h-a}{2}.$$

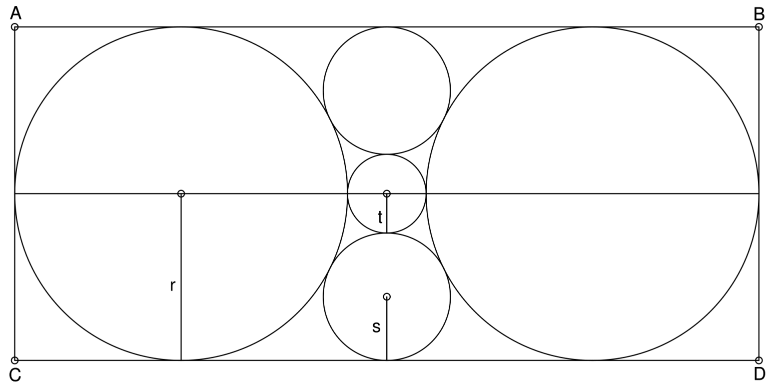
Uvrštavanjem dobijemo:

$$r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c}{2} + \frac{q+h-b}{2} + \frac{p+h-a}{2} = \frac{2h}{2} = h,$$

što je i trebalo dokazati. □

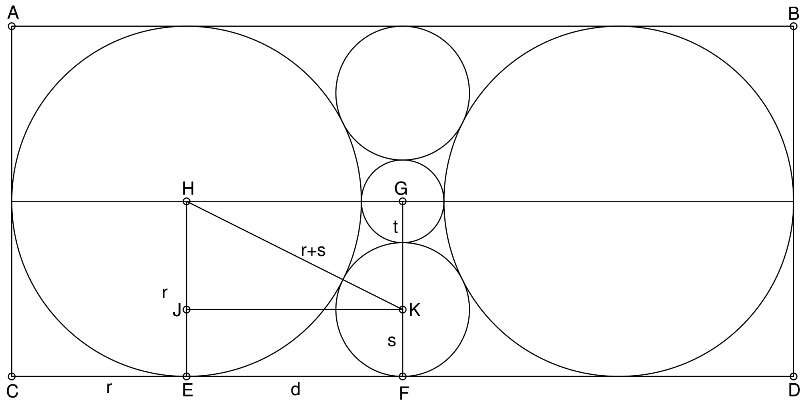
Problem iz 1820. godine.

Problem 4.2. *Pravokutniku ABCD upisane su dvije velike kružnice radijusa r, dvije manje radijusa s te najmanja radijusa t kao na slici 4.3. Dokažite da vrijedi* $|AB| = |AC|\sqrt{5}$.



Slika 4.3:

Rješenje.
Označimo s H središte kružnice radijusa r, s G radijusa t, a s K središte kružnice radijusa s. Označimo s d dužinu $\overline{EF}$.



Slika 4.4:

Iz slike 4.4 je jasno da je $|AB| = |CD| = 2r + 2d$.
Isto tako je $d = |EF| = |JK| = |HG| = r + t$, a $r = |HE| = |GF| = t + 2s$.

$$d = r + t,$$

$$t = d - r, \tag{4.2}$$

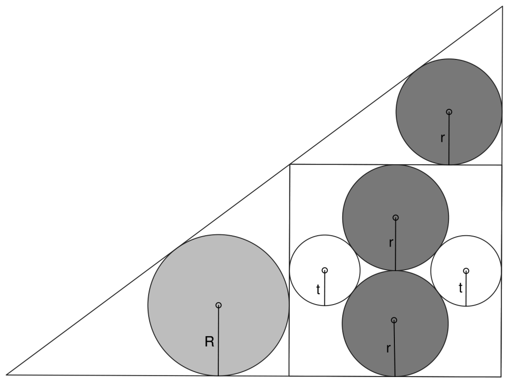
$r = 2s + t$ pa iz (4.2) slijedi $r = 2s + d - r$ te je

$$d = 2r - 2s. \tag{4.3}$$

Kvadrirajmo sada izraz (4.3):
$$d^2 = 4r^2 - 8rs + 4s^2. \tag{4.4}$$
Trokut HJK je pravokutan pa je
$$|HK|^2 = |HJ|^2 + |JK|^2,$$
tj.
$$(r+s)^2 = (r-s)^2 + d^2.$$
$$d^2 = r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + 2rs - s^2,$$
dakle
$$d^2 = 4rs. \tag{4.5}$$
Izjednačimo (4.4) i (4.5), sada je
$$4r^2 - 8rs + 4s^2 = 4rs.$$
Sređivanjem dobijemo:
$$r^2 - 3rs + s^2 = 0.$$
Sada je $r_1 = \dfrac{s \cdot (3+\sqrt{5})}{2}$ i $r_2 = \dfrac{s \cdot (3-\sqrt{5})}{2}$.
Dakle,
$$s = \frac{2r}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2r \cdot (3+\sqrt{5})}{4} = \frac{r \cdot (3+\sqrt{5})}{2}.$$
Uvrstimo s u (4.3) pa je
$$d = 2r - r \cdot (3+\sqrt{5}) = r(\sqrt{5}-1).$$
Već smo zaključili da je
$$|AB| = 2r + 2d = 2r + 2r(\sqrt{5}-1) = 2r\sqrt{5} = |AC|\sqrt{5}.$$
Konačno, $|AB| = |AC|\sqrt{5}$, što je i trebalo dokazati. □

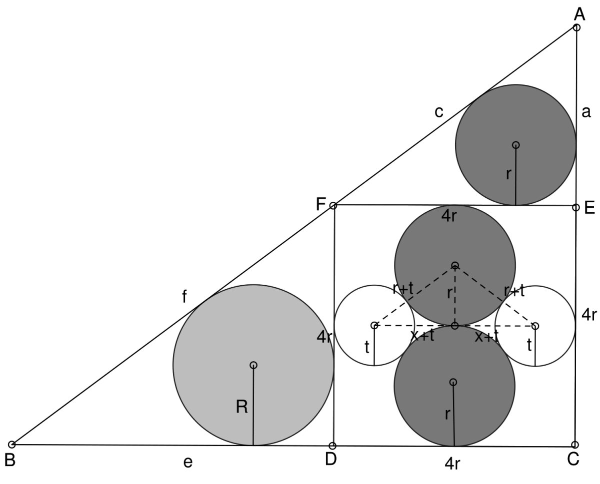
Problem je zadao trinaestogodišnji dječak 1847. godine u gradu Ichinoseki.

Problem 4.3. *Zadana su dvije kružnice radijusa r i dvije kružnice radijusa t te su upisani u kvadrat, kako je prikazano na slici 4.5. Kvadrat je upisan pravokutnom trokutu, a u dvije kružnice radijusa R i r su upisane u manje pravokutne trokute izvan kvadrata. Pokažite da je $R = 2t$.*



Slika 4.5:

Rješenje.
Označimo vrhove pravokutnog trokuta s A, B i C, a sjecišta kvadrata i stranica redom s D, E i F.
Iz slike 4.6 vidimo da je kvadrat duljine stranice $4r$. Dalje, uočavamo dva sukladna pravokutna trokuta duljina kateta r i $x + t$, a hipotenuze $r + t$. Budući da je duljina stranice kvadrata $4r$, a nas zanima koliki je x, promatrajući sliku zaključujemo da vrijedi:
$4r = 2t + 2x + 2t$, tj. $4r = 4t + 2x$, iz čega imamo: $x = 2r - 2t$.



Slika 4.6:

Sada možemo primjeniti Pitagorin poučak na pravokutni trokut duljina kateta r i $x + t = 2r - 2t + t = 2r - t$ te hipotenuze $r + t$.

$$(r + t)^2 = r^2 + (2r - t)^2,$$

$$r^2 + 2rt + t^2 = r^2 + 4r^2 - 4rt + t^2,$$

$$6rt = 4r^2, \text{ tj. } r = \frac{3}{2}t.$$

Sada promatramo pravokutni trokut AEF kojemu je upisana kružnica duljine radijusa r.
Iz slike je očito da mu je jedna kateta $4r$, označimo drugu s a, a hipotenuzu s c. Budući da su nam nepoznate duljine druge katete i hipotenuze, nećemo koristiti Pitagorin poučak, nego ćemo koristiti formule za površinu pravokutnog trokuta.
Od prije nam je poznato da se površina pravokutnog trokuta računa kao polovina umnoška kateta, no znamo i da se računa kao umnožak upisane mu kružnice i poluopsega. Stoga imamo:

$$P = rs = r\frac{a + 4r + c}{2}, \ 2P = r(a + 4r + c),$$

$$P = \frac{1}{2}(4r)a, \ 2P = 4ra.$$

Nadalje, iz

$$r(a + 4r + c) = 4ra$$

slijedi

$$c = 3a - 4r.$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut AEF dobivamo redom

$$(3a - 4r)^2 = a^2 + 16r^2,$$

$$9a^2 - 24ar + 16r^2 = a^2 + 16r^2,$$

$$8a^2 = 24ar,$$

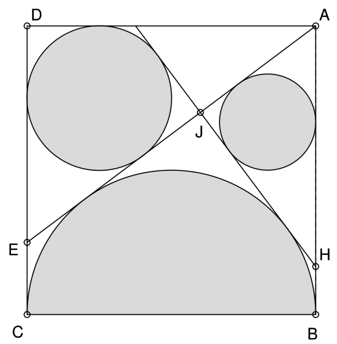
a iz toga slijedi: $a = 3r$.Sada je $c = 3a - 4r = 9r - 4r = 5r$.
Dakle, budući da su katete duljina $3r$ i $4r$, a hipotenuza duljine $5r$, uočavamo Pitagorinu trojku i to upravo $(3, 4, 5)$.
Također, pravokutni trokuti ACB i FDB su slični po K-K-K poučku jer imaju zajednički kut pri vrhu B te pravi kut, stoga im je i treći kut sukladan (to su kutovi na paralelnim pravcima pa i tako znamo da su sukladni). Pravokutni trokuti ACB i AEF su slični po K-K-K poučku jer imaju zajednički kut nad vrhom A, oba imaju pravi kut te im je treći kut sukladan (znamo i da su sukladni jer su kutovi na paralelnim pravcima). Dakle,trokuti FDB i AEF su slični.
Svi elementi sličnih trokuta (težišnice, simetrale kutova, visine, polumjera opisane i upisane kružnice) proporcionalne su odgovarajućim elementima trokuta, uz isti koeficijent sličnosti. Iz toga slijedi:

$$\frac{r}{R} = \frac{|AE|}{|FD|} = \frac{3r}{4r} = \frac{3}{4}.$$

Sada je: $3R = 4r$, tj. $R = \frac{4}{3}r$, a izračunali smo da je $r = \frac{3}{2}t$.
Uvrštavanjem imamo: $R = \frac{4}{3}r = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}t = 2t$, što je i trebalo dokazati. □

Problem datira iz 1883. godine, nalazio se u prefekturi Iwate, no ploča nije sačuvana do danas.

Problem 4.4. *U kvadratu $DCBA$ neka je stranica $\overline{CB}$ ujedno i promjer polukružnice. Iz vrha A nacrtana je tangenta na tu polukružnicu. Ona siječe stranicu $\overline{CD}$ kvadrata u točki E. U trokut AED upisana je kružnica radijusa r_1. Druga zajednička vanjska tangenta ove kružnice i polukružnice siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki H, a dužinu $\overline{AE}$ u točki J. U trokut AHJ upisana je kružnica radijusa r_2. Dokažite da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$.*

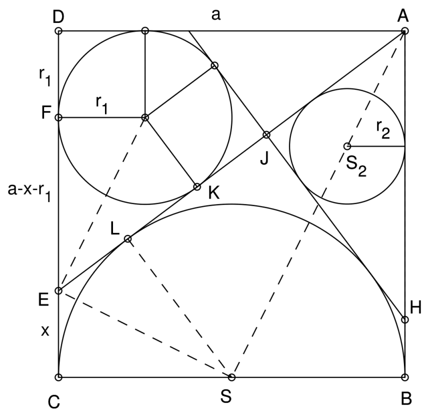


Slika 4.7:

Rješenje.
Označimo duljinu stranice kvadrata s a, s r_1 polumjer prve, a s r_2 polumjer druge kružnice. Budući da su AE i AB tangente iz vrha A na polukružnicu sa središtem u S (vidi sliku 4.8), trokuti ALS i ABS su sukladni po S-S-K poučku, stoga je i $|AL| = |AB| = a$.
Neka je $|EC| = x$. EC i EL su tangente iz vrha E na polukružnicu sa središtem u S (slika 4.8), stoga su trokuti ECS i ELS sukladni po S-S-K poučku pa vrijedi i $|EC| = |EL| = x$.
Promotrimo pravokutni trokut ADE, vidimo da je $|DE| = a - x$, $|DA| = a$ i $|EA| = a + x$.
Sada imamo, po Pitagorinom poučku,

$$(a + x)^2 = a^2 + (a - x)^2.$$

Raspisivanjem dobijemo:



Slika 4.8:

$$a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = a^2.$$

Sređivanjem dobijemo: $x = \dfrac{a}{4}$.

Polumjer r_1 upisane kružnice pravokutnom trokutu ADE je:

$$r_1 = \frac{a + a - x - (a + x)}{2} = \frac{a - 2x}{2}.$$

Uvrštavanjem $x = \dfrac{a}{4}$ dobijemo $r_1 = \dfrac{a}{4}$.

Iz svojstva udaljenosti dirališta na vanjskim tangentama dviju kružnica slijedi: $|JE| = |FC|$, a znamo da je $|FC| = a - r_1 = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3a}{4}$, dakle i $|JE| = \dfrac{3a}{4}$.

Sada je

$$|AJ| = |AE| - |JE| = a + \frac{a}{4} - \frac{3a}{4} = \frac{a}{2}.$$

Dakle,

$$\frac{|JE|}{|AJ|} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Iz toga slijedi:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}.$$

□

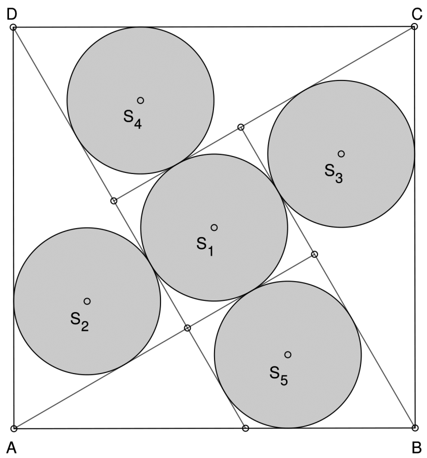
Poglavlje 5

Nagano prefektura

Nalazi se na središnjem dijelu otoka Honshua, a najveći grad je Nagano. Osim prirodne ljepote i bogate povijesti, poznata je i po tome što je 1998. godine bila domaćin Zimskih olimpijskih igara.

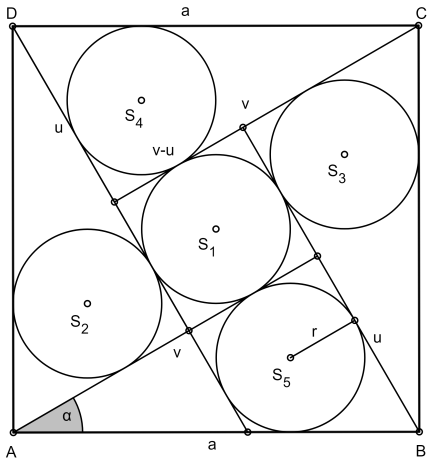
Sangaku iz 1811. godine. Ovo je šesti zadani zadatak od sedam različitih geometrijskih zadataka na ploči.

Problem 5.1. *Pet sukladnih kružnica sa središtima S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 polumjera r upisane su u kvadrat $DABC$ duljine stranice a. Odredite omjer $\frac{r}{a}$.*



Slika 5.1:

Rješenje.
Uz oznake kao na slici 5.2 uočavamo četiri sukladna pravokutna trokuta kojima su upisane kružnice sa središtima u S_2, S_3, S_4 i S_5 te kvadrat kojemu je upisana kružnica sa središtem u S_1. Neka su katete tih pravokutnih trokuta u i v, a hipotenuza a.
Vrijedi da je $r = \frac{u+v-a}{2}$.
Promotrimo kvadrat kojem je upisana kružnica sa središtem u S_1, uočavamo da je duljina njegove stranice $v-u$, dakle polumjer svih kružnica je $\frac{v-u}{2}$.
Izjednačimo li poznato imamo $r = \frac{u+v-a}{2} = \frac{v-u}{2}$, tj. $a = 2u$.



Slika 5.2:

Budući da su u i v katete pravokutnog trokuta imamo: $\sin\alpha = \frac{u}{a} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}$.
Dakle, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
Nadalje, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{v}{a}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v}{a}$, tj. $v = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Sada slijedi:

$$r = \frac{\frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2} - a}{2} = \frac{\frac{1}{2}a(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

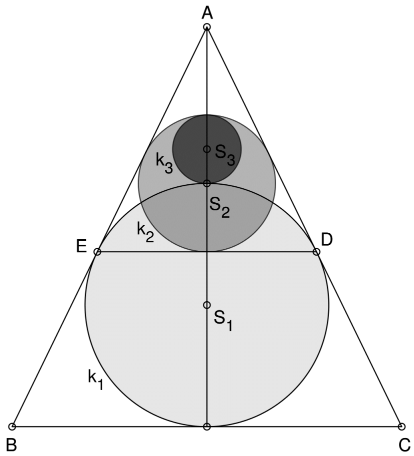
Iz toga vrijedi:

$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

□

Ovaj sangaku je iz 1872. godine, ploča na kojoj je zadan ima dimenzije 58cm $\times$ 238cm, a sadrži sedam problema, a ovaj je posljednji na ploči.

Problem 5.2. *Zadan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AB| = |AC|$ te upisana kružnica $k_1(S_1, r_1)$ koja dodiruje krakove u točkama D i E. Dana je kružnica $k_2(S_2, r_2)$ upisana u trokut AED te kružnica $k_3(S_3, r_3)$ koja izvana dodiruje kružnicu k_1, a iznutra kružnicu k_2. Središte kružnice k_3 je na visini trokuta iz vrha A. Koliki je omjer polumjera r_3 i r_2?*



Slika 5.3:

Rješenje.
Neka je h_1 visina trokuta ABC, a h_2 visina trokuta AED. Promotrimo sliku 5.4 i vidimo da je $|BH| = |HC| = a$.
Budući da su BH i BE tangente kružnice k_1, prema rješenju problema 4.4 slijedi:
$|BE| = |BH| = a$, a zatim slijedi:

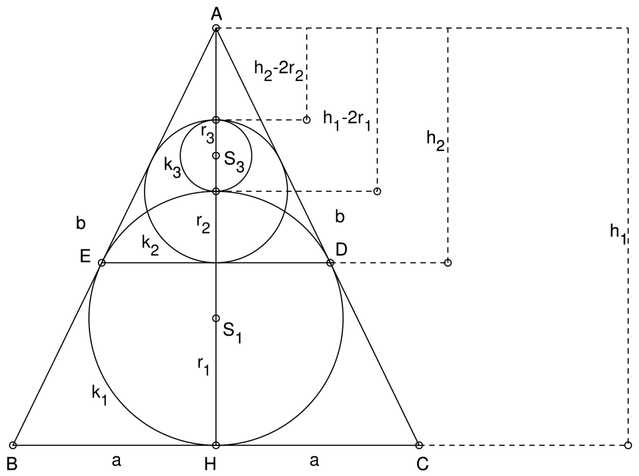
$$|AE| = |AB| - |EB| = b - a.$$

Dalje iz slike je očito da je:

$$r_3 = h_1 - 2r_1 - (h_2 - 2r_2) = h_1 - h_2 - 2(r_1 - r_2). \tag{5.1}$$

Također, trokuti ABC i AED su slični po K-K-K poučku, a onda su i kružnice k_1 i k_2 homotetične (središta su im na istom pravcu i upisane su sličnim trokutima).
Koeficijent sličnosti trokuta ABC i AED je:

$$k = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{b-a}{b},$$



Slika 5.4:

a to je ujedno i koeficijent homotetije.
Dakle, sada je

$$h_2 = h_1 \frac{b-a}{b}, \; r_2 = r_1 \frac{b-a}{b}.$$

Iz toga slijedi:

$$h_1 - h_2 = \frac{a}{b} h_1, \; r_1 - r_2 = \frac{a}{b} r_1.$$

Sada to uvrstimo u (5.1) i sredimo izraz pa imamo: $2r_3 = r_2$, odnosno

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{2}.$$

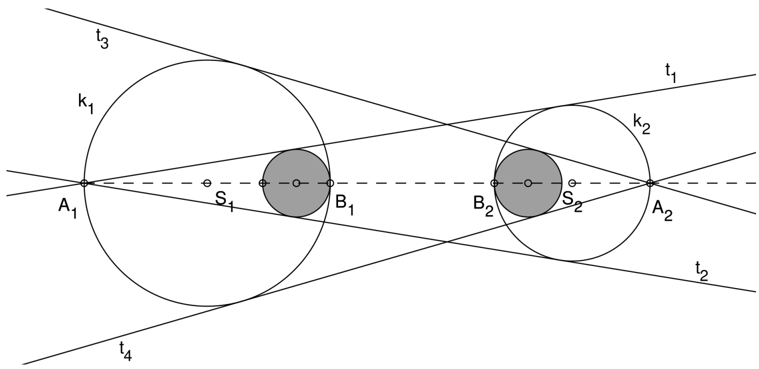
□

Poglavlje 6

Aichi prefektura

Nalazi se na južnoj obali središnjeg dijela otoka Honshua, a glavni grad je Nagoya.
Sangaku iz 1842., nalazio se u prefekturi Aichi, no njegova pločica više ne postoji.

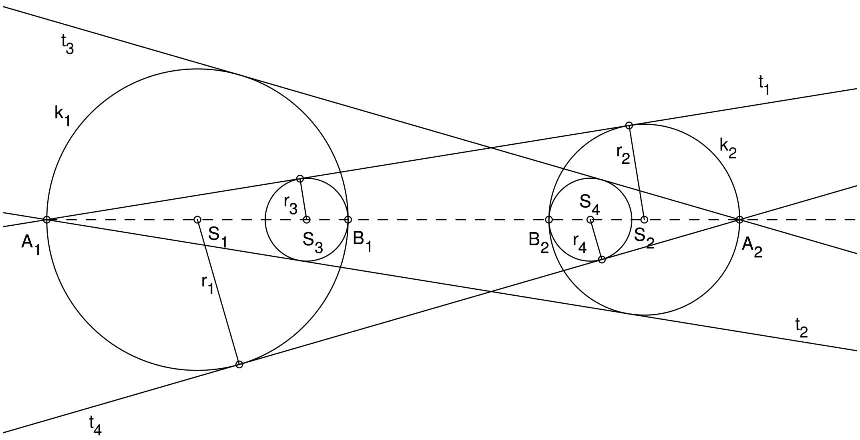
Problem 6.1. *Zadane su dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima S_1 i S_2, koje se ne sijeku. Pravac S_1S_2 siječe kružnice redom u točkama A_1, B_1, B_2 i A_2. Iz točke A_1 povučene su tangente t_1 i t_2 na kružnicu k_2, a iz točke A_2 povučene su tangente t_3 i t_4 na kružnicu k_1. Kružnica upisana u kut $t_1A_1t_2$, koja iznutra dodiruje kružnicu k_1, ima polumjer jednak r_3, a takva u kružnici k_2 ima polumjer r_4. Dokažite da vrijedi: $r_3 = r_4$.*



Slika 6.1:

Rješenje.
Budući da su r_2 i r_3 okomiti na tangentu t_1 (vidi sliku 6.2), zaključujemo da su r_2 i r_3 paralelni te prema Talesovom poučku vrijedi da je:

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{|A_1S_3|}{|A_1S_2|} = \frac{2r_1 - r_3}{|A_1S_2|}.$$



Slika 6.2:

Sređivanjem se dobije: $r_3|A_1S_2| + r_2r_3 = 2r_1r_2$, a iz toga slijedi:

$$r_3 = \frac{2r_1r_2}{|A_1S_2| + r_2}.$$

Sada tražimo koliki je r_4. Budući da su r_1 i r_4 okomiti na tangentu t_4 (vidi sliku 6.2), zaključujemo da su r_1 i r_4 paralelni te prema Talesovom poučku vrijedi da je:

$$\frac{r_4}{r_1} = \frac{|S_4A_2|}{|S_1A_2|} = \frac{2r_2 - r_4}{|S_1A_2|}.$$

Sređivanjem se dobije: $r_4|S_1A_2| + r_1r_4 = 2r_1r_2$, a iz toga slijedi:

$$r_4 = \frac{2r_1r_2}{|S_1A_2| + r_1}.$$

Budući da dokazujemo $r_3 = r_4$, a brojnici dobivenih izraza su jednaki, izjednačimo i nazivnike:

$$|A_1S_2| + r_2 = |S_1A_2| + r_1. \tag{6.1}$$

Iz slike 6.2 je očito:

$$|A_1S_2| = 2r_1 + |B_1B_2| + r_2 \text{ te } |S_1A_2| = r_1 + |B_1B_2| + 2r_2.$$

Uvrstimo li to u (6.1) imamo:

$$2r_1 + |B_1B_2| + 2r_2 = 2r_1 + |B_1B_2| + 2r_2.$$

Dakle, $r_3 = r_4$. □

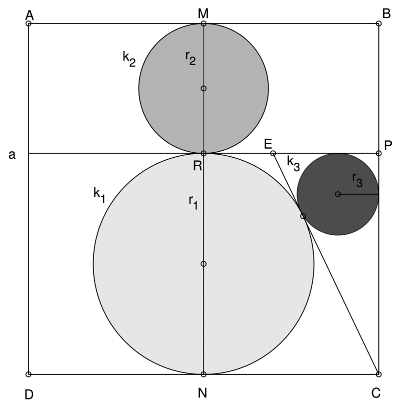
Poglavlje 7

Kyoto prefektura

Nalazi se na središnjem dijelu otoka Honshua, a 21% površine zauzimaju nacionalni parkovi. Glavni grad prefekture je Kyoto, stari glavni carski grad.

Sangaku iz 1853. godine glasi:

Problem 7.1. *Zadan je kvadrat $ADCB$ duljine stranice a. Točke M i N su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka je točka P na stranici $\overline{BC}$. Točkom P nacrtana je paralela sa stranicom $\overline{AB}$ i siječe dužinu $\overline{MN}$ u točki R. Nad promjerima $\overline{NR}$ i $\overline{MR}$ nacrtane su kružnice k_1 i k_2 polumjera r_1 i r_2. Iz vrha kvadrata C nacrtana je tangenta na kružnicu k_1 koja siječe dužinu $\overline{PR}$ u točki E. U trokut CEP upisana je kružnica k_3 polumjera r_3. Dokažite da vrijedi:* $\dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

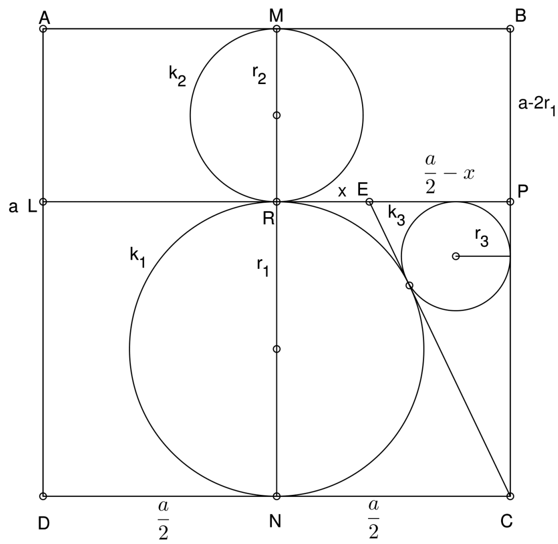


Slika 7.1:

Rješenje.
Na slici 7.2 smo označili $|ER| = x$, jasno je da je $|LE| = \frac{a}{2} + x$, a budući da je iz točke E povučena tangenta na k_1, vrijedi

$$|LE| = |EC| = \frac{a}{2} + x.$$

Dalje je $|PC| = |RN| = 2r_1$ te $|EP| = \frac{a}{2} - x$. Još vidimo da je $a - 2r_1 = 2r_2$.



Slika 7.2:

EPC je pravokutan trokut pa po Pitagorinom poučku vrijedi:

$$|PC|^2 = |EC|^2 - |EP|^2,$$

tj.

$$(2r_1)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Dalje je:

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 + ax + x^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 + ax - x^2 = 4r_1^2,$$

a odavde je: $x = \dfrac{2r_1^2}{a}$.
Za radijus upisane kružnice pravokutnom trokutu EPC vrijedi:

$$r_3 = \frac{|EP| + |PC| - |EC|}{2} = \frac{\frac{a}{2} - x + 2r_1 - \frac{a}{2} - x}{2} = \frac{2r_1 - 2x}{2} = r_1 - x,$$

$$r_3 = r_1 - \frac{2r_1^2}{a} = r_1 \frac{a - 2r_1}{a}.$$

Imamo:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{a}{r_1(a - 2r_1)} = \frac{2r_1 + 2r_2}{r_1(2r_2)} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}.$$

Dakle, $\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. □

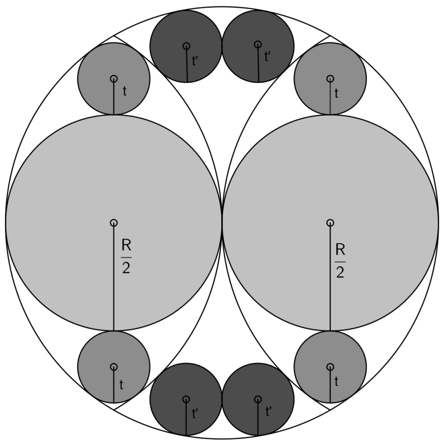
Poglavlje 8

Okayama prefektura

Nalazi se na južnoj obali otoka Honshua, a glavni grad nosi isti naziv kao i prefektura.

Okuda Tsume zadala je ovaj problem 1865. godine.

Problem 8.1. *U kružnici promjera* $2R$ *upisana su dva tangentna luka polumjera* R*, a potom 10 kružnica; dvije polumjera* $\frac{R}{2}$*, 4 polumjera* t*, a 4 polumjera* t'*. Pokažite da je* $t = t' = \frac{R}{6}$.



Slika 8.1:

Rješenje.
Iz slike 8.2 uočavamo više pravokutnih trokuta.
Promotrimo lijevi: očito je da mu je jedna kateta duljine polumjera veće upisane kružnice, tj. $\frac{R}{2}$, a druga je dugačka $\frac{R}{2} + t$. Hipotenuza je na pravcu koji je polumjer kružnog luka, no vidimo da ne završava na kružnom luku, nego u središtu kružnice polumjera t.
Dakle, hipotenuza je dugačka $R - t$. Primjenimo Pitagorin poučak:

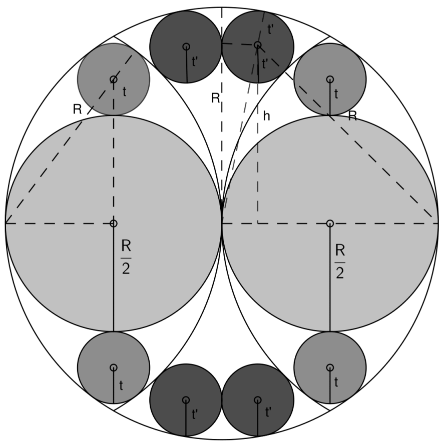
$$(R-t)^2 = \left(\frac{R}{2} + t\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

$$R^2 - 2Rt + t^2 = \frac{R^2}{4} + Rt + t^2 + \frac{R^2}{4},$$

$$\frac{R^2}{2} = 3Rt,$$

dakle:

$$t = \frac{R}{6}.$$



Slika 8.2:

Desno su pravokutni trokut i pravokutnik duljine stranica h i t'. Promatramo pravokutne trokute sa zajedničkom katetom h. Veći trokut ima hipotenuzu duljine $R + t'$, a katete duljine h i $R - t'$, dok manji trokut ima hipotenuzu duljine $R - t'$, a katete duljina h i t'.
Primjenimo Pitagorin poučak:

$$(R + t')^2 = h^2 + (R - t')^2, \tag{8.1}$$

a u drugom je:

$$(R - t') = h^2 + t'^2. \tag{8.2}$$

Budući da iz (8.1) i (8.2) slijedi:

$$h^2 = (R + t')^2 - (R - t')^2$$

te

$$h^2 = (R - t')^2 - t'^2,$$

izjednačimo ta dva izraza:

$$(R + t')^2 - (R - t')^2 = (R - t')^2 - t'^2,$$

raspišemo li to dobijemo:

$$R^2 + 2Rt' + t'^2 - R^2 + 2Rt' - t'^2 = R^2 - 2Rt' + t'^2 - t'^2.$$

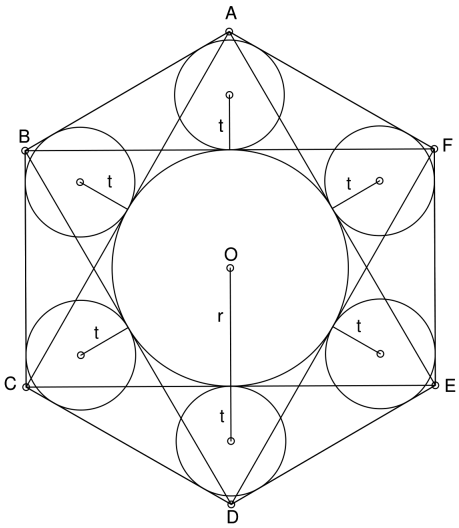
Sada imamo:

$$6Rt' = R^2, \text{ tj. } t' = \frac{R}{6}.$$

Dakle, $t = t' = \frac{R}{6}$, što je i trebalo dokazati. □

Problem zadan u Katayamahiko hramu.

Problem 8.2. *Pravilnom šesterokutu $ABCDEF$ upisana su dva jednakostranična trokuta ACE i BDF kojima je zajednička upisana kružnica radijusa r. Šest manjih kružnica radijusa t upisano je u trokute kojima su stranice stranice upisanih trokuta i danog šesterokuta. Odredite t pomoću r.*



Slika 8.3:

Rješenje.

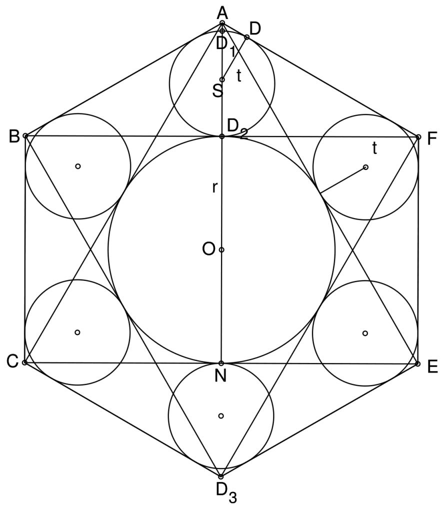
Budući da je trokut ACE jednakostraničan, njegova visina je $v = \dfrac{|CE|\sqrt{3}}{2}$. Radijus upisane kružnice trokuta ACE, kako znamo iz zadatka, je r, a površina je $\dfrac{|CE|^2\sqrt{3}}{4}$. Znamo i da je površina $P = rs$, pri čemu je s poluopseg. Dakle, $s = \dfrac{3|CE|}{2}$.
Sada je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{|CE|^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3|CE|}{2}} = \frac{2|CE|^2\sqrt{3}}{12|CE|} = \frac{|CE|\sqrt{3}}{6},$$

$$|CE| = \frac{6r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6r\sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}.$$

Dakle, $v = \dfrac{|CE|\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3r$.
Iz slike 8.4 je očito da je $v = |OA| + r$, tj. $3r = |OA| + r$. Dakle, $|OA| = 2r$.
Neka su točke D_1 i D_2 sjecišta kružnice radijusa t i pravca AO te neka je D diralište kružnice upisane trokutu ABF.
Uočavamo potenciju točke A, tj. da je

$$|AD_1| \cdot |AD_2| = |AD|^2. \tag{8.3}$$



Slika 8.4:

Budući da smo već zaključili da je $|AO| = 2r$, dobivamo

$$|AD_1| = |AO| - |D_1O| = 2r - (2t + r) = r - 2t. \tag{8.4}$$

$$|AD_2| = |AO| - |D_2O| = 2r - r = r. \tag{8.5}$$

Trokut ASD je polovica jednakostraničnog trokuta, stoga kut uz vrh S iznosi 30°.
Kako je $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|AD|}{t}$, tj. $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|AD|}{t}$, slijedi: $|AD| = \frac{t\sqrt{3}}{3}$.
Uvrstimo li dobiveni $|AD|$, (8.4) i (8.5) u (8.3) imamo:

$$(r - 2t) \cdot r = \frac{t^2}{3}.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 + 6rt - 3r^2 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = (-3 + 2\sqrt{3})r$ i $t_2 = (-3 - 2\sqrt{3})r$, no rješenje t_2 odbacujemo jer duljina mora biti pozitivna. Konačno, $t = (2\sqrt{3} - 3)r$. $\square$

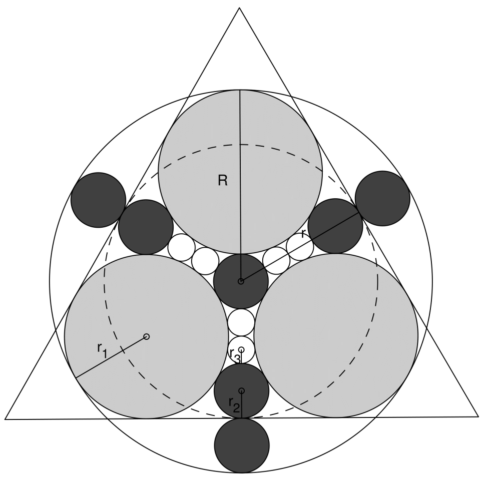
Poglavlje 9

Gifu prefektura

Nalazi se u središnjem dijelu otoka Honshua. Ima veliku prometna važnost u povezivanju istoka i zapada otoka.

Ovaj problem je zadao petnaestogodišnjak 1865. godine.

Problem 9.1. *Jednakostraničnom trokutu upisane su tri kružnice radijusa r_1, četiri kružnice radijusa r_2 i šest kružnica radijusa r_3 koje dodiruju kružnice radijusa r_1 i r_2 kao na slici. Ako je R radijus veće kružnice koja siječe trokut, a r je radijus upisane kružnice trokutu odredite radijus r_3 pomoću radijusa r.*



Slika 9.1:

Rješenje.
Lako se vidi iz slike 9.2 da je

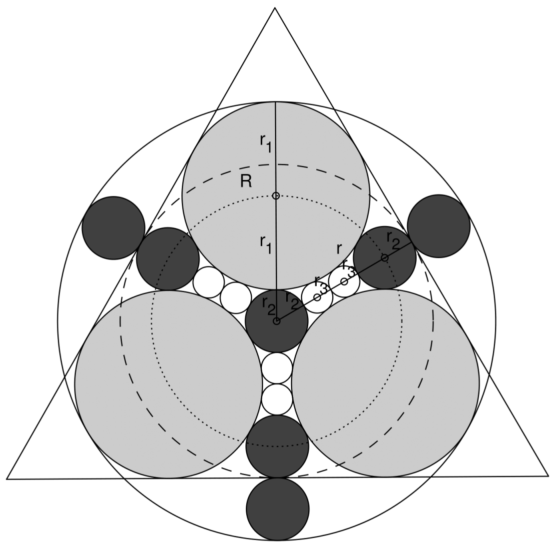
$$r = 3r_2 + 4r_3, \tag{9.1}$$

$$R = 2r_1 + r_2. \tag{9.2}$$

Isto tako je i

$$R = 5r_2 + 4r_3. \tag{9.3}$$

Nacrtamo li još jednu koncentričnu kružnicu koja je radijusa $r_1 + r_2$, uočavamo da je



Slika 9.2:

$$r_1 + r_2 = 2r_2 + 4r_3. \tag{9.4}$$

Sada izjednačimo (9.2) i (9.3) te dobijemo

$$4r_2 = 2r_1 - 4r_3. \tag{9.5}$$

Iz (9.4) vidimo da je

$$r_1 = r_2 + 4r_3. \tag{9.6}$$

te uvrstimo li to u (9.5) dobijemo:

$$4r_2 = 2r_2 + 8r_3 - 4r_3. \tag{9.7}$$

Sada je $r_2 = 2r_3$, a iz (9.6) slijedi da je $r_1 = 6r_3$.
Dakle, iz (9.1) slijedi: $r = 10r_3$. □

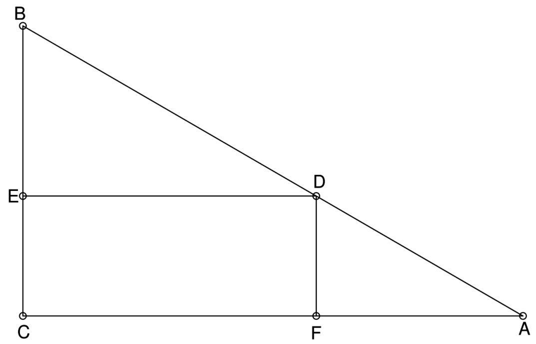
Poglavlje 10

Hokkaido prefektura

Ranije poznata pod nazivom Ezo, Yezo, Yeso ili Yesso, drugi je po veličini japanski otok,a najveća i najsjevernija prefektura. Glavni grad je Sapporo.

Problem je postavio Hotta Sensuke, student, 1806. godine u gradu Niikappu.

Problem 10.1. *Zadan je pravokutan trokut BCA, a neka je D proizvoljna točka na hipotenuzi $\overline{BA}$. Paralela s $\overline{CA}$ kroz D siječe $\overline{BC}$ u E, a paralela s $\overline{BC}$ kroz D siječe $\overline{CA}$ u F. Odredite duljinu $\overline{ED}$ i $\overline{DF}$ tako da je maksimalna površina četverokuta $ECFD$.*



Slika 10.1:

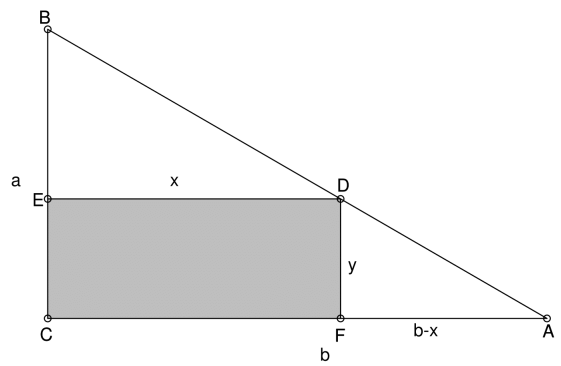
Rješenje.
Rješavamo slično kao problem 1.3.
Neka je $|ED| = x$, $|DF| = y$, $|CA| = b$ i $|BC| = a$ (vidi sliku 10.2).
Uočavamo da su trokuti BCA i DFA slični jer su oba pravokutna te imaju zajednički kut pri vrhu A.
Sada vrijedi: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{b-x}$, tj. $y = \dfrac{a(b-x)}{b}$.

Površina P zadanog četverokuta $ECFD$ je

$$P = xy = x \cdot \frac{a(b-x)}{b} = \frac{ax(b-x)}{b}.$$

Budući da nas zanima maksimalna površina, derivirajmo P po x:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{b} \cdot (ab - 2ax).$$



Slika 10.2:

Izjednačimo dobiveno s nulom kako bismo dobili maksimum: $\frac{ab-2ax}{b} = 0$, tj. $ab - 2ax = 0$.
Iz toga slijedi da je $x = \frac{b}{2}$, a onda je

$$y = \frac{a(b-x)}{b} = \frac{a(b-\frac{b}{2})}{b} = \frac{a}{2}.$$

Dakle, za $|DE| = \frac{|CA|}{2}$ i $|DF| = \frac{|BC|}{2}$ površina $ECFD$ je maksimalna. $\square$

Bibliografija

[1] V. Devide, *Čudesna matematika: pogled iznutra i izvana*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2010.

[2] H. Fukagawa, T. Rothman, *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, Princeton, Sjedinjene Američke Države, 2008.

[3] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, dostupna na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf (rujan 2018.)

[4] P. Mladinić, *Sangaku*, Matka **67-80.** (2009.-2012.)

[5] J. Marshall Unger, *A Collection of 30 Sangaku Problems*, dostupno na: https://cpb-us-w2.wpmucdn.com/u.osu.edu/dist/8/3390/files/2014/04/Sangaku-12zn2jo.pdf (lipanj 2018.)

[6] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[7] Cut the Knot: 3-4-5 Triangle by a Kid https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/KidsSangaku.shtml#Solution (rujan 2018.)

[8] Cut the Knot: Peacock's Tail Sangaku https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FanSangaku.shtml (rujan 2018.)

[9] Cut the Knot: Sangaku in a Square http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/SangakuInSquare.shtml (rujan 2018.)

Sažetak

Tijekom dva stoljeća japanski matematičari, djeca i ostali zaljubljenici u matematiku stvarali su sangaku - drvene ploče u hramovima ukrašene geometrijskim problemima koje su ujedno bile umjetnička djela, religiozni artefakti i zapisi takozvane hramske, narodne matematike. Dakle, sangaku je primjer geometrije u izrazito japanskom stilu. U ovom radu ćemo se upoznati, naučiti cijeniti i rješavati sangaku probleme koristeći matematičke metode kao što su sličnost, homotetija, potencija točke...

Summary

For two centuries Japanese mathematicians, children and other mathematic lovers created sangaku - wooden tablets in temples decorated with geometrical problems, which were simultaneously works of art, religious offerings, and a record of what we might call folk mathematics. Therefore, sangaku is an example of geometry in a distinctly Japanese style. In this paper you will be invited not only to encounter sangaku, but to appreciate it. Also, we will solve them using mathematical methods such as similarity, homothety, power of a point...

Životopis

Rođena sam 18.07.1992. godine u Požegi. Završila sam Osnovnu školu Mladost u Jakšiću, a 2007.-2011. godine bila sam učenica Katoličke klasične gimnazije s pravom javnosti u Požegi. Od petog osnovne do kraja srednje škole uspješno sam sudjelovala na županijskim natjecanjima iz matematike, geografije i hrvatskog jezika, a također sam i sudionica državnog natjecanja iz matematike. 2011. godine upisujem Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, a 2012. godine prebacujem se na nastavnički smjer matematike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2016. godine stječem zvanje univ. bacc. educ. math, a te godine nastavljam i školovanje na diplomskom studiju istog smjera.