Robusne metode u optimizaciji portfelja

Šutić, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Šutić

ROBUSNE METODE U OPTIMIZACIJI PORFELJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Marko Vrdoljak, izv. prof.

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Predmet istraživanja ovog rada je optimizacija financijskog portfelja pomoću robusne optimizacije. Promatrat ćemo problem maksimiziranja povrata portfelja, pod uvjetima koji se nameću za nekoliko mjera rizika tog portfelja, uvažavajući pretpostavku da neki elementi modela optimizacije mogu biti neodređeni. Rezultati ovog rada omogućuju nam da istražimo kako se u financijskim sredstvima mogu primijeniti matematički modeli optimizacije. Struktura rada je sljedeća: Poglavlje 1 čitatelju daje kratak pregled teorije optimizacije portfelja, objašnjavajući konceptualnu stranu problema koji se istražuju. Optimizacija portfelja razmatra problem izgradnje "optimalnog" portfelja sastavljenog od raspoloživih sredstava. Ukoliko investitor ima mogućnost odabira između više opcija portfelja s jednako očekivanim prinosom, tada će on odabrati onu opciju za koju znamo da ima najmanji rizik.

Prvu tehniku za rješavanje problema odabira portfelja razvio je Harry Markowitz 1952. godine. Markowitz je formulirao model za odabir portfelja ulaganja kao i koncept odabira portfelja i to s ciljem minimizacije odnosa rizika i očekivanog prinosa. U svojem modelu, očekivani prinos modelira statističkim očekivanjem, a rizik varijancom prinosa. Varijanca je statistička mjera disperzije koja mjeri prosječno kvadratno odstupanje mogućeg od očekivanog prinosa. Dakle, imovina sa većim prinosom od onog očekivanog se smatra jednako rizičnom kao i imovina s manjim prinosom u odnosu na očekivani. Upravo zato je varijanca dobra mjera rizika samo onda kada je povrat portfelja distribuiran simetrično. Stoga, predložene su alternativne mjere rizika za zamjenu varijance, kao što je rizična vrijednosti (Value at Risk - VaR). VaR predstavlja najveći gubitak portfelja koji se može očekivati u promatranom razdoblju (npr. dan) uz danu razinu pouzdanosti (npr. 95%). Ova vrijednost je jednostavan, lako razumljiv broj, koji predstavlja rizik kojem je institucija izložena na financijskom tržištu. U okviru postupka upravljanja rizicima definiran je minimalni zahtijevani kapital neophodan za zaštitu od rizika. Princip računanja spomenutog kapitala se zasniva upravo na VaR metodologiji.

Iako je popularna mjera rizika, VaR može imati nedostatke i neželjena matematička svojstva koja ograničavaju njegovu upotrebu. Na primjer to što ne uzima u obzir veličinu gubitaka kad oni premašuju vrijednost VaR. VaR također ne ispunjava svojstvo subaditivnosti, odnosno rizik portfelja u smislu VaR-a može biti veći od zbroja rizika svojih dije-

lova. Korištenje VaR kao mjere rizika može ne poticati diversifikaciju zbog svoje karakteristike da ne ispunjava uvjet subaditivnosti te VaR daje procjenu gubitka distribucije do određene točke. Izračun VaR ne daje nikakvu informaciju o gubicima u repu distribucije koji premašuju VaR. Informacije o neočekivanim događajima za tvrtku (mala vjerojatnost, veliki gubici) nisu obuhvaćeni s VaR modelom. Povijest i globalna financijska previranja su pokazali da takvi događaji predstavljaju pravu opasnost bankarskom sustavu.
Artzner i dr. [10] predložili su alternativnu mjeru rizika definiranu kao očekivana vrijednost gubitaka iznad VaR-a. Ova nova mjera rizika ima bolja teoretska svojstva npr. ispunjava uvjet subaditivnosti te se obično naziva uvjetna rizična vrijednosti (Conditional Value at Risk - CVaR). Iz navedenih razloga CVaR postaje u posljednje vrijeme iznimno popularna metoda za mjerenje tržišnog i kreditnog rizika. U kontekstu kontinuirane distribucije, za danu razinu pouzdanosti i razdoblje držanja, CVaR se definira kao uvjetno očekivanje gubitaka koji premašuju VaR. Stoga, za razliku od VaR, CVaR pruža dodatne informacije o gubicima u repu distribucije koji premašuju VaR. Numerički rezultati pokazuju da minimalni CVaR često dovodi do optimalnih rješenja blizu minimalnog VaR-a, jer VaR nikada nije veći od CVaR-a.

Poglavlje 2 čitatelja uvodi u osnove robusne optimizacije. Vrlo često u stvarnom životu, suočeni smo s potrebom za optimizacijom nekog poslovnog rješenja ili dizajna nekih uređaja s brojnim ograničenjima (uvjetima). Međutim, na sam proces optimizacije može utjecati neodređenost parametara potrebnih u optimizaciji. U financijskom okruženju ključna je uloga neodređenost raspodjele povrata imovine. Kako bi se suočili s rješavanjem problema koji uključuju neodređenost parametara, razvijena je metoda robusne optimizacije. Robusna optimizacija predstavlja način izlaženja na kraj s neodređenošću parametara u problemima optimizacije. U skladu s robusnim pristupom, za svako dopustivo rješenje promatra se njegovo ponašanje na svakom od mogućih scenarija. Kao robusno rješenje bira se ono čije je najgore ponašanje, mjereno na skupu svih scenarija, najbolje moguće. Ovaj kratki uvod u robusnu optimizaciju temelji se na [1]. Jednostavan problem optimizacije portfelja može se formulirati kao problem optimizacije u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ g_i(x) \quad & \leq 0, \; i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Dakle, želimo maksimizirati funkciju $f(x)$, gdje je x varijabla odlučivanja (vektor raspodjele našeg portfelja na različite vrste imovine) pod određenim uvjetima, gdje vrijednosti funkcije g_i moraju biti manji ili jednaki 0. U gore navedenom problemu, funkcije mogu ovisiti o nekom parametru čija bi vrijednost bila neodređena, a u primjeni se nekada želi zadržati nepozitivnost tih funkcija bez obzira na vrijednost tog parametra. Ovdje ulazi robusna optimizacija. Ako pretpostavimo da funkcije g_i ovise o parametru p i pretpostavljaju da stvarna vrijednost parametra p pripada nekom skupu U, tada je robusna varijanta inicijalnog problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ g_i(x,p) \quad & \leq 0, \ \forall p \in U, \ i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Kao što je vidljivo u gornjem izrazu, zahtijevamo da su uvjeti zadovoljeni za sve moguće vrijednosti parametra p u skupu neodređenosti U. Uvažavajući te uvjete, oblik dopustivog područja može biti znatno drugačiji nego u problemu 1, ovisno o strukturi skupa neodređenosti U. Dva glavna problema vezana za rješavanje problema robusne optimizacije 2 su sljedeća:

1. Skup neodređenosti U može sadržavati beskonačno mnogo elemenata, što stvara potrebu za preoblikovanjem uvjeta

2. Struktura skupova neodređenosti ne mora biti poznata te taj skup možda moramo aproksimirati jedostavnijim skupom.

Upravo ti razlozi su uzrok tome što se numerički efikasno mogu rješiti robusni problemi samo za određene funkcije $g_i(x, p)$ i skupove neodređenosti U. Budući da se u ovom radu robusna optimizacija primjenjuje u teoriji portfelja, naše funkcije $g_i(x, p)$ bit će mjere rizika portfelja koje želimo zadržati ispod neke potrebne razine. Poglavlje 3 predstavlja izvode robusnih problema optimizacije portfelja primjenjenih na maksimalan povrat i na nekoliko mjera rizika.

Poglavlje 1

Teorija optimizacije portfelja

1.1 Optimizacija portfelja

Pretpostavimo da raspolažemo s n vrsta imovina sa slučajnim stopama povrata $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Očekivanu stopu povrata označavamo s $\mu_1 = \mathbb{E}[\xi_1], \mu_2 = \mathbb{E}[\xi_2], \ldots, \mu_n = \mathbb{E}[\xi_n]$. Neka se naš portfelj sastoji od n imovina $S_1, S_2, \ldots, S_n$ i sa w_i označimo udio imovine i u portfelju tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \tag{1.1}$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Tada je $\xi_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \xi_i$ **povrat portfelja** te $E = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i$ **očekivani povrat portfelja**. Rizik investicije mjerimo pomoću varijance povrata $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, gdje je varijanca definirana s

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= \mathbb{E}[(\xi_i - \mu_i)^2] \\
&= \mathbb{E}(\xi_i^2) - 2\mathbb{E}(\xi_i)\mu_i + (\mu_i)^2 \\
&= \mathbb{E}(\xi_i^2) - (\mu_i)^2.
\end{aligned}$$

Neka je σ_i^2 varijanca imovine i te $V = \sigma_p^2$ varijanca portfelja. Tada se varijanca portfelja računa na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathbb{E}\left[(\xi_p - \mu)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i\xi_i - \sum_{i=1}^n w_i\mu_i\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i(\xi_i - \mu_i)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i(\xi_i - \mu_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i(\xi_i - \mu_i)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i,j=1}^n w_iw_j(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n w_iw_j\sigma_{ij}.
\end{aligned}$$

Neka je sada x vektor udijela pojedinačnih imovina u portfelju i $\Sigma = (\sigma_{ij})$ matrica kovarijanci ($n \times n$ simetrična matrica s $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ i $\sigma_{ii} = \sigma_i^2, i, j = 1, 2, \dots, n$):

$$x = (w_1, \dots, w_n)^T \tag{1.3}$$

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \tag{1.4}$$

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Sada dobijemo kompaktan zapis očekivanog povrata portfelja E i varijance porftelja V kao

$$E = \mu^T x \tag{1.6}$$

$$V = x^T \Sigma x. \tag{1.7}$$

1.1.1 Maksimizacija očekivanog povrata

Za investitora koji želi postići maksimum očekivanog povrata, sljedeći problemi maksimiziraju očekivani povrat portfelja.

$$\max \quad \sum_{i=1}^n w_i\mathbb{E}[\xi_i] \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

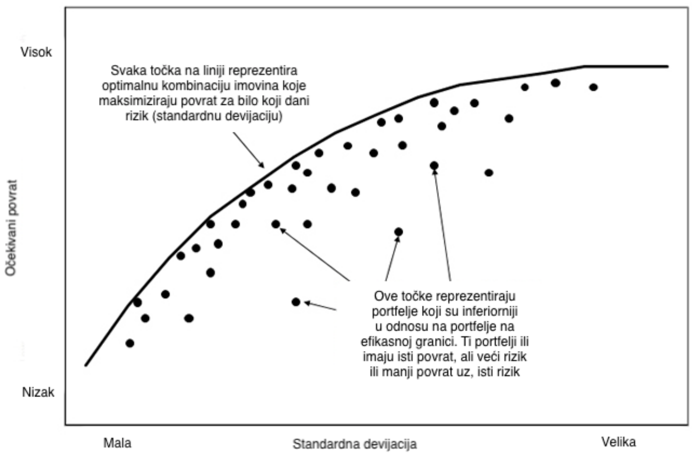
1.1.2 Portfelj s minimalnom varijancom

Model maksimizacije dan u (2.2) ne uzima u obzir rizik portfelja. Oni investitori koji nisu skloni riskiranju željet će minimizirati rizik (varijancu) portfelja, umjesto maksimizacije povrata. Sljedeći model nam daje porfelj s minimalnom varijancom.

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{1.9}$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

1.1.3 Efikasna granica

Efikasna granica svih portfelja ostvarivih linearnim kombiniranjem rizičnih imovina definirana je kao skup svih dopustivih portfelja, a imaju najmanju varijancu za dani iznos očekivanog prinosa portfelja. Prema Markowitz-u [4], za svaku točku na efikasnoj granici postoji barem jedan portfelj koji možemo izgraditi koristeći sve investicije s očekivanom rizikom i povratom te točke. Nakon što pronađemo sve optimalne portfelje i nakon što ih prikažemo na (rizik - povrat) grafu, dobivamo efikasnu granicu (poznata kao Markowitz-ova granica).



Slika 1.1: Efikasna granica[14]

Efikasna granica je krivulja koja predstavlja one portfelje koji maksimiziraju očekivani povrat, uzimajući u obzir dani rizik. Drugim rječima, efikasna granica predstavlja portfelje koji minimiziraju rizik za dani očekivani prinos. Postupak pronalaženja efikasne granice se temelji na minimizaciji rizika za unaprijed zadani očekivani povrat portfelja. Pritom moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

i) očekivani povrat mora biti fiksan i unaprijed određen

$$\mu^T x = E, \tag{1.10}$$

ii) ukupna vrijednost portfelja mora biti jednaka količini novca R koju imamo na raspolaganju

$$e^T x = R. \tag{1.11}$$

Budući da želimo konstruirati portfelj koji će imati minimalnu varijancu uz dani povrat portfelja, promatramo minimizacijski problem oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T \Sigma x \\ & e^T x = R \\ & \mu^T x = E. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Rješavanjem problema 1.12 Lagrageovom metodom dobijemo eksplicitnu formulu za računanje efikasne granice:

$$V = \sigma_p^2 = \frac{1}{D}(CV^2 - 2BRE + AR^2), \tag{1.13}$$

gdje je:

$$A = \mu^T \Sigma^{-1} \mu, b = \mu^T \Sigma^{-1} e, C = e^T \Sigma^{-1} e, D = AC - B.$$

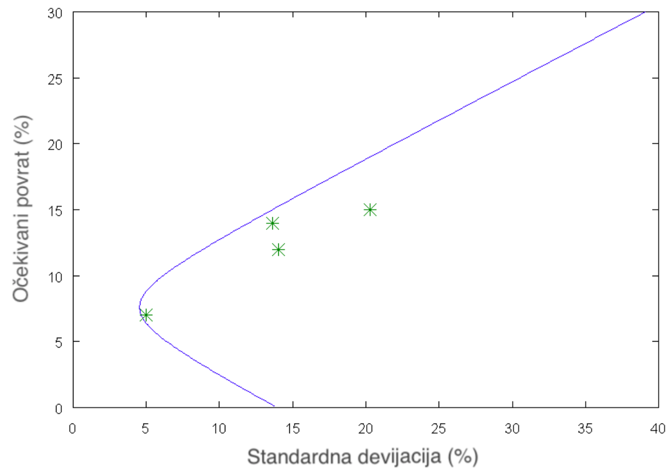
Primjer 1.1.1. *Pretpostavimo da imamo 4 obveznice s očekivanim povratom od* 14%, 12%, 15%, 7%. *Tada je vektor očekivanog povrata*

$$\mu = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Uzmimo da je matrica kovarijanci jednaka

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 185 & 86.5 & 80 & 20 \\ 86.5 & 196 & 76 & 13.5 \\ 80 & 76 & 411 & -19 \\ 20 & 13.5 & -19 & 25 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da se na dijagonali nalaze varijance naših obveznica. Dakle, kada bismo uzeli korijen dijagonalnim elemanata izračunali bismo standardne devijacije naših obveznica. Na sljedećoj slici je prikazana efikasna granica na našem primjeru.



Slika 1.2: Efikasna granica za 4 obveznice uz očekivani povrat

1.1.4 Efikasan portfelj

Postoji nekoliko alternativnih formulacija problema optimizacije portfelja. Najprimjenjivije 3 formulacije su: minimizacija rizika, maksimizacija povrata i averzija prema riziku. S jedne strane se razlikuju ukoliko imaju različite ciljeve ulaganja, dok su s druge strane ekvivalentni obzirom na efikasnu granicu dobivenu koristeći očekivani povrat i varijancu portfelja. Portfelj s maksimalnim povratom i portfelj s minimalnom varijancom nam zapravo daju dva ekstrema povrata i rizika. Mnogi investitori žele postići balans između portfelja s maksimalnim povratom i minimalnom varijancom te je minimizacija rizika poželjna u takvim situacijama. Želimo formulirati problem u smislu zadaće kvadratičnog programiranja[1] koji se može definirati kao

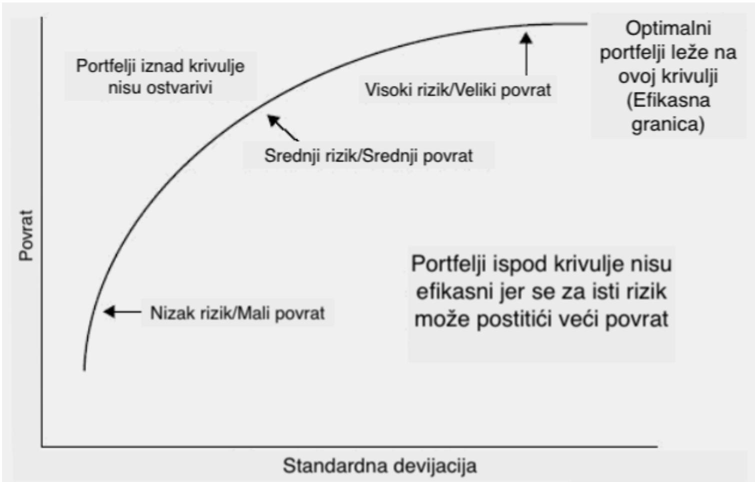
$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& \sum_{i,j=1}^{n} w_i \mu_i = R.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

[1] Problem kvadratičnog programiranja je zapravo problem minimizacije kvadratične funkcije uz linearne uvjete (tipa jednakosti i/ili nejednakosti).

Alternativno, 1.14 možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T \Sigma x \\ & e^T x = 1 \\ & \mu^T x = R, \end{aligned} \tag{1.15}$$

gdje je $e^T = (1, 1, \dots, 1)$. Formulacija u 1.14 će nam dati optimalan portfelj (s minimalnim rizikom) za ulog (budžet) R. Drugim riječima, ni sa jednim drugim portfeljem ne možemo postići isti povrat s manjim rizikom.



Slika 1.3: Efikasan portfelj[13]

Maksimizacija očekivanog povrata se može koristiti kada želimo investirati pod zadanom razinom rizika. Zato dobivamo optimizacijski problem maksimizacije očekivanog povrata uz dani rizik σ_0.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[\xi_i] \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ & \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma_0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Kao i ranije, 1.16 možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x^T\mu \\ & e^T x = 1 \\ & x^T\Sigma x = \sigma_0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Formulacija optimizacije portfelja uz averziju prema riziku je bazirana na nalaženju kompromisa između očekivanog povrata i rizika portfelja tako da uvedemo koeficijent[2] α averzije prema riziku:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & x^T\mu - \alpha x^T\Sigma x \\ & e^T x = 1. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ako je averzija prema riziku mala, tada je i koeficijent α mali i to nas dovodi do riskantnijeg portfelja s većim očekivanim povratom. Analogno, ako je averzija prema riziku velika, koeficijent α je veliki te će rezultat optimizacijskog problema dati manje riskantan portfelj s manjim očekivanim povratom.

1.2 Mjere rizika

Investitori se stalno suočavaju s pronalaskom kompromisa između prilagodbe potencijalnih prinosa za veći rizik. Međutim, događaji globalne kreditne krize i financijske krize pokazale su nužnost adekvatnog mjerenja rizika. Loše mjerenje rizika može dovesti do stečajeva i prouzročiti kolaps cijelog financijskog sektora. Mjerenje rizika od presudne je važnosti za npr. trgovanje industrijom derivata od više trilijuna dolara, a nedovoljna analiza rizika može biti pogrešna cijena derivata. Osim navedenog, netočno mjerenje rizika može značajno podcijeniti određene vrste rizika, npr. tržišni rizik, kreditni rizik itd.
Iako se u literaturi rizik često definira u smislu promjena vrijednosti između dva vremenska razdoblja, ovdje tvrdimo da je zbog varijabilnost rizika buduće vrijednosti pozicije, tržišnih promjena ili (općenitije) nepredvidivih događaja, bolje promatrati samo buduće vrijednosti. Napominjemo da nema potrebe za početnim troškovima komponenata pozicije koji će se odrediti iz univerzalno definiranih tržišnih cijena (tzv. transakcije bez transakcije). Osnovni objekti koje koristimo su slučajne varijable na skupu svih scenarija za koje predviđamo da se mogu ostvariti u budućnosti, tumačene kao moguće buduće vrijednosti pozicija ili portfelja koji se trenutno drže. Prvenstveno će mjerenje rizika pozicije biti temeljeno na tome pripada li njezina buduća vrijednost ili ne pripada podskupu prihvatljivih rizika, ovisno o odluci

[2] α je multiplikator iz Karush–Kuhn–Tucker (KKT) uvjeta te nam daje vezu između problema (1.15) i (1.17)

(a) regulatora koji uzima u obzir nepovoljna stanja kada dopušta rizičnu poziciju koja može privući resurse vlade, na primjer kao jamac posljednjeg mjesta;

(b) poduzeća za razmjenu koja mora ostvariti dobit svim stranama

(c) investicijskog menadžera koji zna da je njegova tvrtka u osnovi dala svojim dioničarima opciju izlaska (prodaje) gdje će se cijena izvršenja uključiti u slučaju velikih gubitaka u trgovanju na njihovoj poziciji.

U svakom od gore navedenih slučajeva dolazi do kompromisa između ozbiljnosti mjerenja rizika i razine aktivnosti na nadziranoj domeni. Aksiomi i karakterizacije koje ćemo navesti ne definiraju jedinstvenu mjeru rizika, već cijelu klasu mjera rizika, a dodatna ekonomska razmatranja moraju igrati ulogu u konačnom odabiru mjere. Zbog neprihvatljivog rizika (tj. položaja s neprihvatljivom budućom neto vrijednošću), jedan način može biti promjena položaja. Drugi način je potražiti neke opće prihvaćene instrumente koji, dodavanjem trenutnog položaja, čine njegovu buduću vrijednost prihvatljivim za regulatora, odnosno nadzornika.
Kada se bavimo tržišnim rizikom, stanje na tržištu se može opisati popisom cijena svih vrijednosnih papira i svih deviznih tečajeva, a pretpostavljamo da je skup svih mogućih takvih popisa poznat. Naravno, ovo pretpostavlja da su tržišta na dan T likvidna; ako nisu, potrebni su složeniji modeli, gdje možemo razlikovati rizike pozicija i buduće neto vrijednosti, budući da, s nelikvidnim tržištima, mapiranje s prve na drugu možda nije linearno. Neka je $\mathcal{G}$ skup svih rizika, tj. neka je to skup svih realnih funkcija definiranih na Ω, konačnom skupu svih mogućih scenarija. Kako je Ω konačan skup, $\mathcal{G}$ možemo indetificirati sa skupom $\mathbb{R}^n$, gdje je $n = |\Omega|$. Skupovi prihvatljive buduće neto vrijednosti su objekti koji se trebaju razmotriti kako bi se opisalo prihvaćanje ili odbijanje rizika. Ovdje navodimo da postoji prirodan način definiranja mjera rizika opisujući koliko je pozicija prihvatljiva (tj. koliko je pozicija blizu prihvaćanja, odnosno koliko je udaljena od prihvaćanja).

Definicija 1.2.1. *Mjera rizika je preslikavanje s $\mathcal{G}$ u $\mathbb{R}$.*

Kada je pozitivan, broj $\rho(X)$ opisan mjerom ρ prema riziku X bit će tumačen kao minimalni dodatni novčani iznos koji investitor mora dodati rizičnoj poziciji X i ulagati "oprezno". Ako je negativan, iznos novca $-\rho(X)$ može se povući iz pozicije ili primiti kao povrat. Navodimo nekoliko svojstava za mjeru rizika ρ definiranu na $\mathcal{G}$. Prvi zahtjev osigurava da je mjera rizika navedena u istim jedinicama kao i konačna neto vrijednost, osim korištenja referentnog instrumenta. Ova se imovina temelji na početnoj cijeni 1 i strogo pozitivnoj cijeni r (ili ukupnom prinosu) u bilo kojem scenariju. Sljedeća lema nam govori da dodavanje (odnosno oduzimanje) početnog iznosa α na početnu poziciju i ulaganje u referentni instrument jednostavno smanjuje (odnosno povećava) mjeru rizika za α.

Lema 1.2.2 (Invarijantnost na translacije)**.** *Za svaki $X \in \mathcal{G}$ i za svaki realan broj α vrijedi $\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha$.*

Napomena 1.2.3. *Invarijantnost na translacije osigurava da je za svaki X, $\rho(X+\rho(X)\cdot r) = 0$.*

Lema 1.2.4 (Subaditivnost)**.** *Za svaki $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$ vrijedi $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.*

Tvrdimo da je ovo svojstvo prirodni uvjet:

(a) ukoliko mjera rizika razmjene ne uspije zadovoljiti ovu imovinu, onda primjerice, pojedinac koji želi riskirati $X_1 + X_2$ može otvoriti dva računa, jedan za rizik X_1, a drugi za rizik X_2, stvarajući manju graničnu vrijednost $\rho(X_1) + \rho(X_2)$

(b) ako je tvrtka bila prisiljena ispuniti zahtjev za dodatnim kapitalom koji nije zadovoljio ovu imovinu, tvrtka bi mogla biti motivirana da se razbije u dvije odvojene podružnice, što je zabrinjavajuće za regulatora;

(c) ako pretpostavimo da dvije osobe neovisno, jedna od drugoj, izračunavaju mjere rizika $\rho(X_1)$ i $\rho(X_2)$ koje su poduzeli. Ako je funkcija ρ subaditivna, nadzornik tih osoba može računati na činjenicu da je $\rho(X_1) + \rho(X_2)$ dopustivo jamstvo u odnosu na globalni rizik $X_1 + X_2$. Ako doista ima novčani iznos gotovine za svoje zajedničko poslovanje, zna da mu nametanje limita m_1 i m_2 s $m = m_1 + m_2$ omogućuje decentraliziranje gotovinskog ograničenja u dva ograničenja - po jedan po radnom mjestu. Slično tome, tvrtka može dodijeliti svoj kapital među menadžerima.

Lema 1.2.5 (Pozitivna homogenost)**.** *Za svaki $\lambda \geq 0$ i za svaki $X \in \mathcal{G}$, vrijedi $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.*

Napomena 1.2.6. *Ako veličina pozicije izravno utječe na rizik (na primjer, ako su pozicije dovoljno velike da vrijeme potrebno za njihovo likvidiranje ovisi o njihovoj veličini) onda bismo trebali razmotriti posljedice nedostatka likvidnosti pri računanju buduće neto vrijednosti pozicije. Imajući to na umu, svojstva iz Leme 1.2.4 i Leme 1.2.5, o mapiranju slučajnih varijabli u skup realnih brojeva, ostaju razumni.*

Napomena 1.2.7. *Lema 1.2.4 podrazumijeva da je $\rho(nX) \leq n\rho(X)$, $n = 1, 2, \ldots$. U Lemi 1.2.5 nametnuli smo obrnutu nejednakost (i zahtijevamo jednakost za sve pozitivne λ) da modeliramo ono što vlada ili razmjena može nametnuti u situaciji u kojoj se ne događa diverzifikacija, osobito zato što vlada ne sprječava pozicioniranje poduzeća.*

Napomena 1.2.8. *Lema 1.2.2 i 1.2.5 podrazumijevaju da je za svaki α, $\rho(\alpha \cdot (-r)) = \alpha$.*

Lema 1.2.9 (Monotonost)**.** *Za svaki $X, Y \in \mathcal{G}$ takve da je $X \leq Y$ vrijedi $\rho(X) \leq \rho(Y)$.*

Definicija 1.2.10. *Mjera rizika ρ koja zadovoljava svojstva iz Lema 1.2.2 - 1.2.9 naziva se koherentna mjera rizika.*

Koherentna mjera rizika se smatra dobrom mjerom zbog svoja četiri svojstva. U nastavku ovog rada ćemo navesti različite mjere rizika koje se koriste u potimizaciji portfelja, a koje nisu nužno koherentne. Posebice nam je zanimljiv VaR te CVaR.
Razvoj teorije mjera rizika može se svrstati u četiri glavne faze:

1. Mjere rizika prije Markowitz-a
2. Mjere rizika temeljene na teoriji Markowitz-a
3. VaR i povezane mjere rizika
4. Mjere rizika temeljene na teoriji koherentnog mjerenja rizika.

1.2.1 Mjere rizika prije Markowitza

Iako postoji razlika između rizika (kao slučajnost s poznatim vjerojatnostima - npr. vjerojatnost dobivanja 6-ice na simetričnoj kockici) i neodređenosti podataka (kao slučajnost s nepoznatim vjerojatnostima - npr. vjerojatnost kišnog vremena), u literaturi o financijskom riziku ova se razlika rijetko provodi. Posebno važan aspekt rizika i mjerenja rizika je diversifikacija portfelja. Diversifikacija je koncept koji može smanjiti ukupni rizik bez žrtvovanja mogućeg povrata. To je moguće jer ne utječu svi rizici na svu imovinu, primjerice, nova Vladina uredba o troškovima telefonskog poziva u roamingu utjecala bi na telekomunikacijski sektor, a možda i za neke druge koji ostvaruju znatne prihode ili troškove putem telefonskih poziva, ali ne i za svaki sektor ili tvrtku. Stoga je, ulaganjem u više od jednog sredstva, tvrtka manje izložena takvim rizicima. Imajte na umu da postoje i rizici koji se ne mogu ublažiti diverzifikacijom, na primjer, porast kamatnih stopa utjecat će na sve tvrtke jer svi uštede ili troše novac. Možemo konceptualno kategorizirati sve rizike u diferencijalni i nediferencijalni rizik (također poznat kao "sustavni rizik" ili "tržišni rizik"). Suprotno popularnom mišljenju, mjerenje rizika i diversifikacija rizika istraživani su prije Markowitzove teorije portfelja. Bernoulli je 1738. godine raspravljao o poznatom paradoksu St. Petersburga da se rizičnost odluke može procijeniti na temelju očekivane dobiti. Bernoulli je prepoznao diverzifikaciju; da ulaganje u portfelj imovine smanjuje rizik bez smanjenja povrata. Prije Markowitza, nekoliko je ekonomista koristilo varijancu kao mjeru rizika portfelja. Mjerenje rizika bilo je prvenstveno tema temeljena na analizi vrijednosnih papira. Nadalje, analiza vrijednosnih papira sama po sebi bila je tek u začetku u prvoj polovici dvadesetog stoljeća. Benjamin Graham, koji se široko smatrao ocem moderne analize sigurnosti, predložio je ideju margine sigurnosti kao mjere rizika. Graham je također preporučio diverzifikaciju portfelja radi smanjenja rizika. Grahamova metodologija ulaganja (poznata kao ulaganje vrijednosti) nije bila provedena od strane financijske matematičke zajednice, dijelom zbog oslanjanja na vrijednosne papire umjesto na matematičku analizu.

1.2.2 Doprinos Markowitza razvoju teorije mjera rizika

Markowitz je bio prvi koji formalizira portfeljni rizik, diversifikaciju i odabir imovine u matematički dosljednom okviru. Sve što je bilo potrebno, bilo je naći način za povrat sredstava, varijance i kovarijance. U tom smislu je Markowitzeva teorija bila značajna inovacija u mjerenju rizika, za koju je Markowitz osvojio Nobelovu nagradu. Markowitz je predložio da je rizik portfelja jednak varijanci povrata portfelja. Markowitzova teorija portfelja bila je prva koja je eksplicitno objasnila diversifikaciju portfelja kao korelaciju (ili kovarijanciju) između imovina. Također je uveo ideju optimizacije odabira portfelja odabirom imovine koja leži na efikasnoj granici. Stoga, takvi portfelji pružaju najbolji povrat za minimalni rizik.

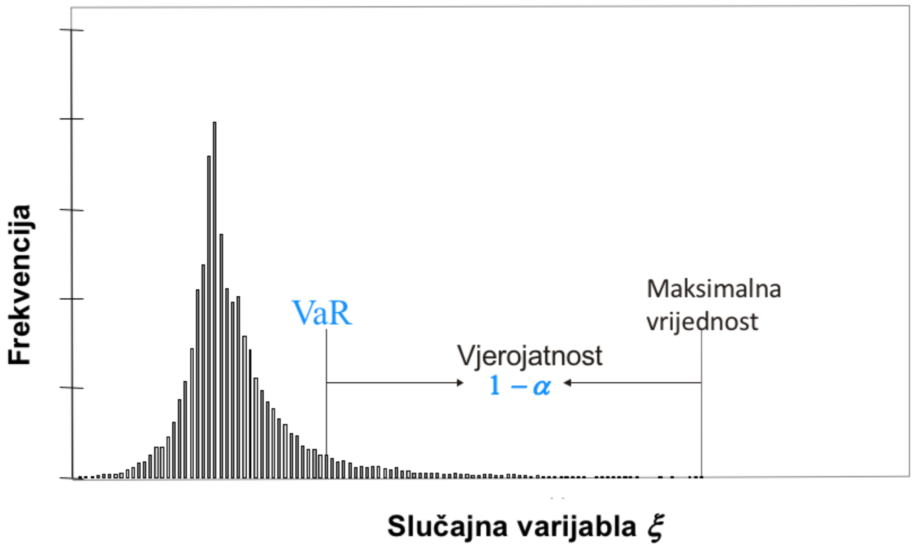
1.2.3 Rizična vrijednost (VaR)

U Markowitzevom pristupu optimizaciji portfelja u [4], korištena je varijanca portfelja kao mjera rizika. Varijanca je mjera disperzije distribucije vjerojatnosti numeričke varijable koja nam daje prosječno kvadratno odstupanje mogućih vrijednosti numeričke varijable od očekivane vrijednosti. Pritom, tretira povećanje i smanjenje isplate simetrično. Alternativna mjera rizika je rizična vrijednost (eng. Value at Risk), u daljnjem tekstu ćemo koristiti skraćenicu VaR. Svrha VaR-a je jednostavno odgovoriti na pitanje "Koliki gubitak možemo očekivati, s danom vjerojatnosti ζ, za određeni vremenski period T?". Iako je poprilično nestabilna, a numerička primjena je nezahvalna kada gubitak nema normalnu distribuciju, VaR je jedna od najučestalijih mjera rizika. Osim navedenih nedostataka, ne može se kontrolirati opseg gubitka koji se može dogoditi. Drugim rječima, nije moguće razlikovati situacije u kojima je gubitak malo lošiji i kada je on ogroman. VaR se definira kao najmanja vrijednost takva da je vjerojatnost da je slučajna varijabla manja ili jednaka toj vrijednosti veća ili jednaka stupnju pouzdanosti $\alpha \in [0, 1]$ (uobičajeno je to broj veći od 0.9). Precizije, Var se definira na sljedeći način

Definicija 1.2.11. *VaR_α definiramo s x*

$$VaR_\alpha = \inf\{\zeta : \mathbb{P}(\xi \leq \zeta) \geq \alpha\}. \tag{1.19}$$

U [10] je pokazano kako VaR nije koherenta rizična mjera jer nije subaditivna. VaR tako stvara ozbiljne agregacijske probleme te ne potiče, štoviše, ponekad zabranjuje diverzifikaciju. Također, nekonveksnost VaR-a znači da imamo više lokalnih minimuma što otežava minimizaciju jer moramo naći globalni minimum. Upravo iz tog razloga koristimo uvjetnu rizičnu vrijednost (CVaR).



Slika 1.4: Rizična vrijednost

1.2.4 Uvjetna rizična vrijednost (CVaR)

Procjena rizika se vrši tako da uzmemu težinski prosjek između VaR-a i gubitka koji premašuje VaR. Neka je $f(x, y)$ funkcija gubitka, pri čemu portfelj x odaberemo iz skupa dopustivih portfelja, i y je vektor povrata n imovina. Tada je

$$f(x, y) = -y^T x = -(y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n). \tag{1.20}$$

Pretpostavimo da slučajan vektor y ima funkciju gustoće $p(y)$.

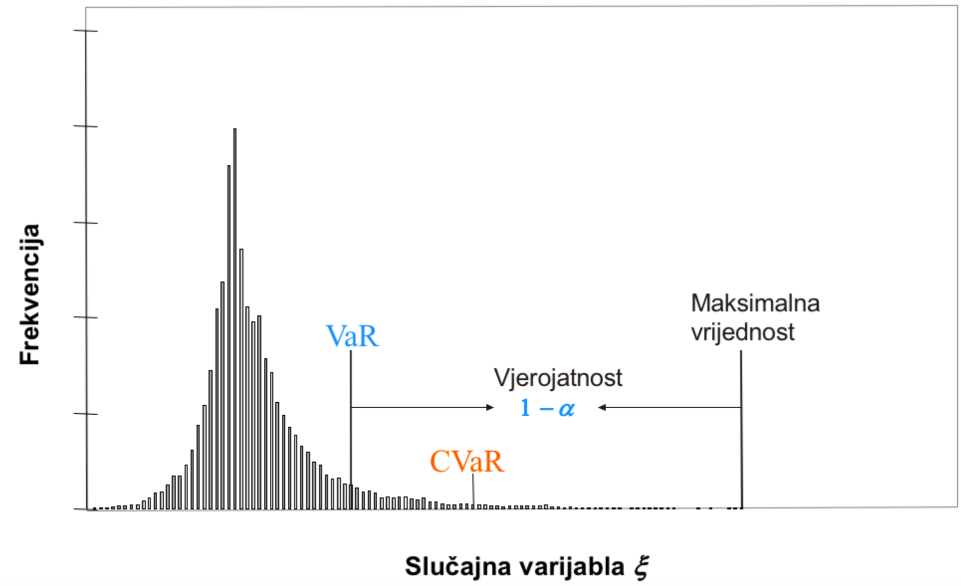
Definicija 1.2.12. *CVaR definiramo kao*

$$CVaR_\alpha(\xi) \quad = \quad \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(x,y) \geq VaR_\alpha(\xi)} f(x, y) p(y) dy. \tag{1.21}$$

Jednakost (1.21) se može aproksimirati na sljedeći način

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(x, \gamma) \quad &= \quad \gamma + (1-\alpha)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \gamma} [f(x, y) - \gamma]^+ p(y) dy \\ &\approx \quad \gamma + ((1-\alpha)m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} [f(x, y_i) - \gamma]^+ \end{aligned}$$

gdje je y_i, $i = 1, \ldots, m$, broj scenarija koji koristimo pri aproksimaciji, umjesto funkcije gustoće $p(y)$.



Slika 1.5: Uvjetna rizična vrijednost

Napomena 1.2.13. *U prethodnoj definiciji koristimo*

$$a^+ = \max\{a, 0\}.$$

Za $i = 1, \dots, m$, $(f(x, y_i) - \gamma)^+$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} (f(x, y_i) - \gamma)^+ &= z_i, \\ z_i &\geq f(x, y_i) - \gamma \\ z_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Sada možemo formulirati minimizacijski problem CVaR-a kao problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma + ((1-\alpha)m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} z_i \\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, i = 1, \dots, m \\ & z_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Za razliku od VaR-a, CVaR je koherentna mjera rizika [10].

Prednost minimizacije CVaR-a je u tome što možemo formulirati optimizacijski problem kao problem linearnog programiranja. Dobro je napomenuti kako se u primjeni često pokušava optimizirati mjeru rizika kada je očekivani povrat veći od zadane granice. U tom slučaju imamo sljedeći model

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma + ((1-\alpha)m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} z_i \\ & \mu^T x \geq R, \\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, i = 1, \ldots, m \\ & z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Poglavlje 2

Robusna optimizacija

U mnogim optimizacijskim problemima ulazni podaci nam nisu sasvim poznati ili nisu točno izračunati. Obzirom na to da dobivena rješenja ovise o ulaznim parametrima, velika je mogućnost da zapravo rješavamo krivi problem, baš kao i da će rješenje biti daleko od optimalnog rješenja problema koji trebamo riješiti.

Robusna optimizacija predstavlja jedan način rješavanja problema s neodređenim vrijednostima parametara u optimizacijskom problemu. Za svako dopustivo rješenje promatra se njegovo ponašanje na svakom od mogućih scenarija te na skupu svih mogućih scenarija biramo robusno rješenje čije je najgore ponašanje - najbolje moguće. Upravo u ovom smislu se robusna optimizacija razlikuje u odnosu na stohastičku optimizaciju gdje je pretpostavka da su neodređeni podaci nasumično odabrani. Neodređenost parametara opisujemo pomoću skupova koji sadrže sve (ili gotovo sve) moguće vrijednosti neodređenih parametara. Veličinu neodređenog skupa dobivamo ovisno o željenoj robusnosti. Razlikujemo nekoliko tipova robusne optimizacije, od kojih su dvije najčešće: robusnost uvjeta i robusnost funkcije cilja. Glavna razlika je u tome što u prvom slučaju neodređenost podataka dovodi u pitanje dobivanje potencijalnih rješenja, dok je u drugom slučaju dopustiv skup poznat (precizno zadan), ali se u funkciji cilja javljaju parametri koji nisu precizno zadani. I robusnost uvjeta i robusnost funkcije cilja imaju mogućnost dobivanja najgoreg mogućeg scenarija. Drugim rječima, pokušavamo optimizirati ponašanje rješenja pod najnepovoljnijim uvjetima. Takva ješenja nazivamo *apsolutno rubusna rješenja*. Iako je ovakav pristup potreban u nekim optimizacijskim problemima, u nekima on nije uvijek poželjan. Apsolutna robusnost nije uvijek u skladu s logičko-teoretskim pristupom i pomoćnim funkcijama. Alternativni pristup jest tražiti robusnost u relativnom smislu. Ljudi čija se izvedba ocjenjuje u odnosu na vršnjake, htjet će donositi odluke kojima neće zaostajati za konkurentima, a ne s ciljem zaštite od onog najgoreg scenarija. Na primjer, menadžer će se smatrati uspješnim sve dok gubi manje od svojih konkurenata ili nametnutih standarda. Upravo nas ta razmatranja motiviraju za koncept relativne robusnosti koju razmatramo kasnije u ovom poglavlju. Još jedna varijanta modela robusne optimizacije je *prilagodljiva robusna optimizacija*. Pretpostavimo da podskup varijabli odluka možemo odabrati nakon što promotrimo optimalnost odluka s manje informacija u prethodnim koracima. Svaka različita interpretacija robusnosti i svaki različiti opis nedoređenosti parametara nam daje različitu formulaciju robusne optimizacije. Problemi robusne optimizacije su često, ili se barem čine teži nego li je to slučaj s problemima nerobusne optimizacije. Na sreću, većina njih se može preformulirati u razumljiv problem. Metode konusne optimizacije se često pojavljuju u problemima robusne optimizacije. Neke od njih ćemo spomenuti na kraju poglavlja.

2.1 Skupovi neodređenosti

Jedan od ozbiljnijih problema u mnogim optimizacijskim problemamima je točnost podataka s kojima raspolažemo. Ponekada su podaci s kojima raspolažemo u trenutku rješavanja optimizacijskog problema nisu točno izračunati ili su jednostavno neodređeni, a rezultati optimizacije su vrlo osjetljivi na te ulazne podatke. Upravo zato će nam optimizacijski problem dati rješenje koje će biti daleko od onog optimalnog. Neodređenost podataka se može jednostavno modelirati uvodeći skup neodređenosti U. On može predstavljati ili se sastojati od različitih predviđanja određenih parametara u budućnosti, predviđanja generirana koristeći statističke tehnike dobivene iz povijesnih podataka i slično. Tu postoji ograničenje za svaki parametar neodređenosti $p \in U$ kako bismo se osigurali da je izvorno ograničenje dano u optimizacijskom problemu zadovoljeno u najgorem mogućem scenariju skupa neodređenosti U. Uobičajene vrste skupova neodređenosti koje susrećemo u robusnoj optimizaciji su:

1. Skup koji predstavlja konačan broj generiranih scenarija za moguće vrijednosti parametara:
$$\mathcal{U} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}.$$

2. Skup koji predstavlja interval za svaki neodređeni parametar:
$$\mathcal{U} = \{p : l \leq p \leq u\}.$$

3. Elipsoidni skupovi:
$$\mathcal{U} = \{p : p = p_0 + Mu, \|u\| \leq 1\},$$
gdje je M n-dimenzionalna matrica, a p_0 inputi. Ukoliko je

   - M=I, onda je skup neodređenosti zapravo sfera,
   - M=0, onda nemamo neodređenost jer je tada $p = p_0$ fiksiran.

Ova vrsta skupova se može pojaviti koristeći statističke procjene, i to u obliku intervala pouzdanosti. Elipsoidni skupovi neodređenosti imaju lijepo svojstvo izglađivanja optimalne vrijednosti.

Općenito, oblik skupova neodređenosti će ovisiti o izvoru neodređenosti, kao i osjetljivost rješenja na te neodređenosti. Kao što smo naveli iznad, najčešći oblici skupova neodređenosti su intervali, elipsoidni skupovi pa i presjeci elipsoidnih skupova. Schottle [11] je ispitivao utjecaj intervala i elipsoidnih skupova neodređenosti na neprekidnost optimalnog rješenja. Rezultati koje je prikazao pod određenim uvjetima su pokazali da elipsoidni skupovi neodređenosti izglađuju optimalno rješenje te u primjeni, u najvećem broju slučajeva, korištenje ovih skupova rezultira dobivanjem jedinstvenog optimalnog rješenja neprekidnog s obzirom na parametar neodređenosti. Veličina tih skupova će često biti birana ovisno o željenoj robusnoti optimizacijskog problema kojeg rješavamo. Ben-Tal i ostali [1] koriste linearne probleme kako bi pokazali da se stabilnost optimizacijskog problema sa skupovima neodređenosti može mjeriti promatrajući povećanje optimalne vrijednosti u odnosu na originalnu i to povećanje optimalne vrijednosti je linearno. Upravo taj rezultat je pokazao i Schottle [11] promatrajući konveksne konusne probleme. Calafiore i Campi [6] su predložili korištenje scenarija s nekoliko ograničenja s kojim kontroliraju neodređenosti u optimizacijskom problemu. U ovoj metodologiji, skupovi neodređenosti su definirani kao kolekcija scenarija parametara neodređenosti i postoji jedno ograničenje u svakom scenariju. Upravo zato će rezultati modificiranog optimizacijskog problema biti prilagođeni svakom ograničenju u odgovarajućim scenarijima.

2.2 Robusnost uvjeta

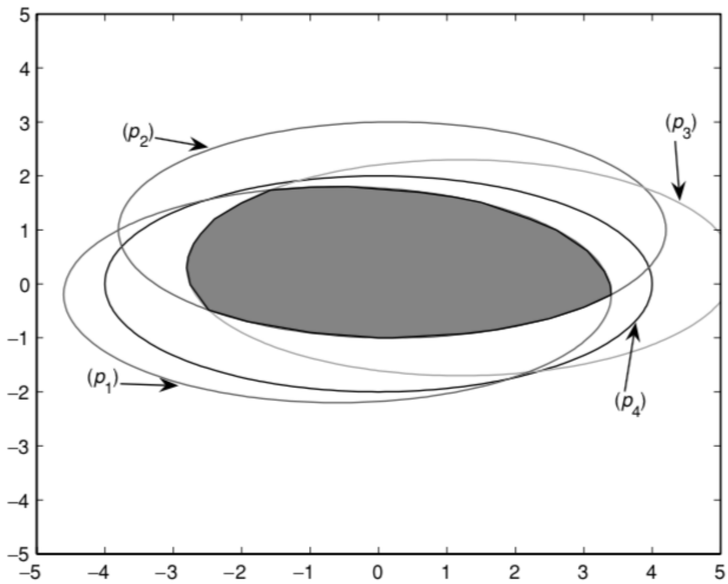
Jedan od najvažnijih koncepata u robusnoj optimizaciji je robusnost uvjeta i odnosi se na one situacije u kojima imamo neodređene parametre s određenim ograničenjima. Upravo se tip rješenja takvih problema traži u mnogim primjenama. Najčešći slučajevi uključuju višekoračne probleme gdje je rezultat neodređenosti prethodnih koraka ima utjecaj na rezultat u onim kasnijim koracima. Varijable odluke moraju biti odabrane tako da zadovoljavaju određena ravnotežna ograničenja (npr. broj inputa u određenom koraku ne smije biti veći od broja outputa prethodnog koraka) bez obzira na to što će se dogoditi s parametrima neodređenosti promatranog problema. Iz navedenog razloga, naše rješenje mora biti robusno ograničeno uzimajući u obzir parametre neodređenosti. Matematički model za pronalaženje ograničeno-robusnog rješenja je optimizacijski problem oblika

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ & G(x,p) \in K, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje je x varijabla odluke, f funkcija cilja, G i K strukturni elementi ograničenja uz pretpostavku određenosti te p su neodređeni parametri zadanog problema. Neka je $\mathcal{U}$ skup neodređenosti koji sadrži sve moguće vrijednosti neodređenih parametara p. Tada se ograničeno-robusno optimalno rješenje može pronaći rješavajući problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ & G(x,p) \in K, \forall p \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Uočimo da je prema (2.2) robusno dobustiv skup zapravo presjek dopustivih skupova $S(p) = \{x : G(x,p) \in K\}$ indeksiran po skupu neodređenosti $\mathcal{U}$. To je prikazano na sljedećoj slici za elipsoidni skup $\mathcal{U} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, gdje p_i, $i = 1,2,3,4$, odgovaraju centru neodređenosti elipse.



Slika 2.1: Robusnost uvjeta

Ne postoje parametri neodređenosti funkcije cilja problema (2.2). Optimizacijski problem s parametrima neodređenosti funkcije cilja i uvjeta možemo lako preformulirati tako da odgovara optimizacijskom problemu (2.2). Doista, problem

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x,p) \\ & G(x,p) \in K, \end{aligned} \tag{2.3}$$

ekvivalentan je problemu

$$\begin{aligned} \min_{t,x} \quad & t \\ & t - f(x,p) \geq 0 \\ & G(x,p) \in K. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Problem (2.4) sadrži sve neodređenosti u svojim uvjetima.

2.3 Robusnost funkcije cilja

Robusnost funkcije cilja je još jedan važan koncept u robusnoj optimizaciji i odnosi se na ona rješenja koja su dovoljno blizu onom optimalnom za sve moguće ishode neodređenih parametara promatranog problema. Obzirom na to da je teško dobiti takva rješenja, posebice kada su skupovi neodređenosti veliki, alternativno možemo naći optimalna rješenja u najgorem mogućem scenariju. Ponašanje rješenja u najgorem mogućem scenariju odgovara vrijednosti funkcije cilja u najgorem mogućem scenariju neodređenih podataka za to partikularno rješenje. Matematički model objektivne robusnosti je sljedeći optimizacijski problem

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x,p) \\ & x \in S, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdje je S dopustiv skup i f funkcija cilja koja ovisi o parametrima neodređenosti p. Kao i ranije, $\mathcal{U}$ je skup neodređenosti koji sadrži sve moguće vrijednosti parametara neodređenosti p. Tada se robusno rješenje može dobiti rješavanjem problema

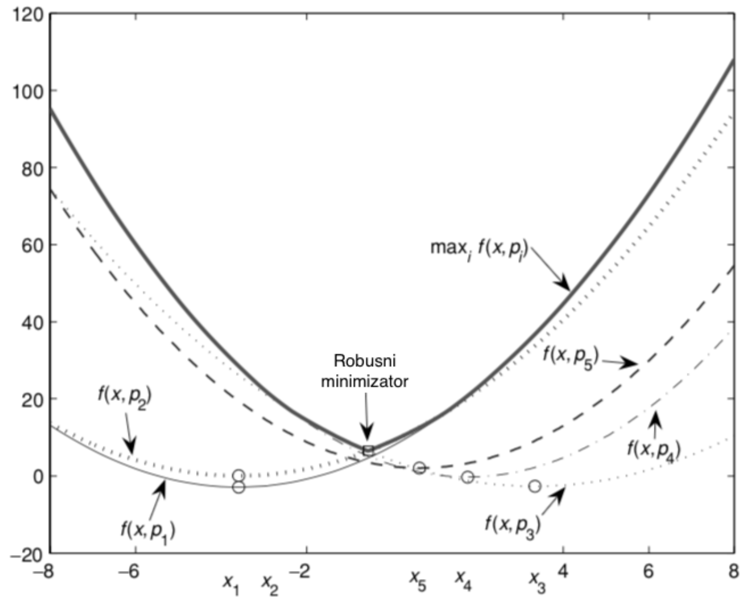
$$\min_{x \in S} \max_{p \in \mathcal{U}} f(x,p). \tag{2.6}$$

Problem objektivne robusnosti prikazan je na sljedećoj slici. U tom je primjeru dobiven skup S je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, skup neodređenosti $\mathcal{U} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ te $f(x, p_i)$ funkcija cilja je konveksna kvadratna funkcija gdje parametri p_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, određuju izgled funkcije f. Uočimo, robusni optimizator nije isto što i minimizator svake $f(x, p_i)$ (na slici u oznaci x_i^*). Štoviše, niti jedan od x_i^* nije blizu robusnom optimizatoru.

Robusnost funkcije cilja se može shvatiti kao poseban slučaj robusnosti ograničenja, ali ih je bitno razlikovati jer nas dovode do dvije različite optimizacijske formulacije, polubeskonačnog i min-max optimizacijskog problema respektivno.

2.4 Pronalaženje rješenja

Prikazat ćemo nekoliko tehnika pronalaženja rješenja problema robusne optimizacije. Alate koje navodimo su zapravo preformulirane strategije za probleme robusne optimizacije, tako



Slika 2.2: Robusnost funkcije cilja

da se mogu zapisati kao klasični optimizacijski problem - bez neodređenosti. U preformuliranim problemima tražimo ekonomičnost u smislu da nova formulacija nije mnogo veća od izvornog, problema neodređenosti, s ciljem učinkovitog rješavanja koristeći se standardnim metodama optimizacije. Iako nam varijacije modela robusnosti i vrsta setova neodređenosti ne daju jedinstveni pristup, možemo kombinirati različite tehnike kako bismo došli do rješenja danog problema u smislu robusne optimizacije.

2.4.1 Uzorkovanje

Jedan od najlakših načina postizanja robusnosti kod neodređenosti je uzeti nekoliko scenarija parametara neodređenosti iz skupa neodređenosti. Uzorke možemo uzeti sa i bez korištenja distribucijskih pretpostavki na parametre i dobiti formulaciju robusne optimizcije s konačnim skupom neodređenosti. Ukoliko se parametri neodređenosti pojavljuju unutar ugraničenja, kopiramo svako ograničenje obzirom na svaki scenarij. Neodređenost funkcije cilja se može dobiti na sličan način. Promotrimo općeniti optimizacijski problem neodređenosti (3.3). Tada, za skup neodređenosti $\mathcal{U} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ dobijemo formulaciju

$$
\begin{aligned}
\min_{t,x} \quad & t \\
& t - f(x, p_i) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k, \\
& G(x, p_i) \in K, i = 1, 2, \ldots, k \quad .
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Uočimo kako ovdje nije potrebno preformulirati problem te kako dvostruko ograničenje čuva linearnost, konveksnost i osnovna strukturna svojstva početnog ograničenja. Za posljedicu imamo, za konačan skup neodređenosti je robusni problem optimizacije veći, ali teoretski nije teži za riješiti. Situacija je slična kao i kod problema stohastičkog programiranja.

2.4.2 Konusna optimizacija

Ukoliko promatramo, umjesto konačnih skupova neodređenosti, neprekidne intervale ili eliptične skupove, nailazimo na izazove u teoriji. Robusna varijanta ograničenja neodređenosti koja mora biti zadovoljena za sve vrijednosti parametara neodređenosti u neprekidnom skupu nam daje polubeskonačnu optimizacijsku formulaciju. Ovakvi problemi se nazivaju polubeskonačni obzirom na to da postoji beskonačno mnogo ograničenja, indeksiranih po skupu neodređenosti, ali imamo konačno mnogo varijabli. Srećom, moguće je preformulirati polubeskonačni optimizacijski problem koristeći konačan skup uvjeta konusnog oblika. Robusna formulacija za problem linearnog programiranja

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
& a^T x + b \geq 0,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

gdje su parametri neodređenosti a, b iz elipsoidnog skupa neodređenosti

$$
\mathcal{U} = \{(a^0, b^0) + \sum_{j=1}^{k} u_j(a^j, b^j), \|u\| \leq 1\},
$$

je ekvivalentna problemu konusnog programiraja drugog reda

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
& a_j^T x + b_j = z_j, \quad j = 1, \ldots, k, \\
& (z_1, \ldots, z_k) \in C,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

gdje je C konus drugog reda definiran s $C := \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \geq \|(x_2, \ldots, x_k)\|\}$.

Napomena 2.4.1. *U prethodnoj definiciji konusa C, $\|\cdot\|$ označava Euklidsku normu.*

2.4.3 Sedlaste točke

Ukoliko izvorni problem zadovoljava određene pretpostavke konveksnosti, robusno rješeje se može okarakterizirati koristeći uvjete sedlastih točaka. Prednost ovakve karakterizacije je što možemo koristiti algoritme za probleme sedlastih točaka. Neka je dana robusna formulacija problema

$$\min_{x\in S} \max_{p\in\mathcal{U}} f(x,p). \tag{2.10}$$

Dualni problem navedenog robusnog optimizacijskog problema je

$$\max_{p\in\mathcal{U}} \min_{x\in S} f(x,p). \tag{2.11}$$

Iz konveksne analize imamo sljedeći rezultat

Lema 2.4.2. *Neka je $f(x,p)$ konveksna funkcija po varijabli x i konkavna po varijabli p. Ako su S i $\mathcal{U}$ neprazni i barem jedan od njih je ograničen skup, tada se problemi (2.10) i (2.11) podudaraju i postoji sedlasta točka (x^*, p^*) takva da je*

$$f(x^*,p) \leq f(x^*,p^*) \leq f(x,p^*), \forall x \in S, p \in \mathcal{U}.$$

Ova karakterizacija je baza za algoritme robusne optimizacije.

Poglavlje 3

Modeli robusne optimizacije u optimizaciji portfelja

3.1 Skupovi neodređenosti u robusnoj optimizaciji portfelja

Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, u robusnoj optimizaciji radimo s problemima uz neodređenost parametara. S obzirom na to da mnogi financijski optimizacijski problemi sadrže prognozirane cijene, tečajeve valuta, kamatne stope itd., takvi problemi se savršeno uklapaju u okvire robusne optimizacije. Markowitzev model je poznat kao model koji omogućuje investitorima odabrati onaj portfelj kojemu je očekivani povrat najveći uz dani rizik. Metodologija alociranja imovine je poznata i korištena u mnogim investicijama, bez obzira na nedostatke Markowitzevog modela koje smo pokazali u poglavlju 1. Postoji mnogo prijedloga kako smanjiti ili u potpunosti eliminirati korištenje netočnih podataka u optimizacijskim problemima. Neki od prijedloga je koristiti procijenitelje parametara kao ulazne podatke s ciljem smanjivanja osjetljivosti optimalnog portfelja. Također, još jedan prijedlog je ponovno prikupljanje podataka iz intervala pouzdanosti i zatim uzeti prosjek svih portfelja dobivenih za svaki par prvobitno prikupljenih podataka. Glavna ideja ovog prijedloga je u tome da ako dovoljno puta ponovno prikupimo podatke, tada će prosječni optimalni portfelj biti stabilniji i manje osjetljiv na perturbacije ulaznih podataka. Problem koji nastaje jest da ovaj prijedlog nije efikasan kada radimo s velikom količinom imovine. Označimo s $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vektor povrata jednog razdoblja, uz interpretaciju da je povrat imovine i jednak $(1 + r_i)$ kuna za svaku kunu koju uložimo. Povrati imovina u različitim trenucima su neovisni i pretpostavimo da je povrat jednog razdoblja $\mathbf{r}$ slučajna varijabla dana s

$$\mathbf{r} = \mu + V^T f + \epsilon, \tag{3.1}$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}^n$ vektor očekivanih povrata, $f \sim \mathcal{N}(0, F) \in \mathbb{R}^m$ vektor povrata faktora koji pokreću tržište, $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica faktora koji utječu na n imovina i ϵ vektor rezidualnih povrata.

Napomena 3.1.1. *Oznaka $f \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ nam govori da je f normalna slučajna varijabla s očekivanim povratom μ i matricom kovarijanci Σ.*

Također, pretpostavimo da je vektor rezidualnih povrata neovisan o vektoru povrata faktora, matrica kovarijanci $F \succ 0$ i matrica kovarijanci $D = diag(d) \succ 0$, npr. $d_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$. Sada je vektor povrata imovine $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(\mu, V^T F V + D)$. Pretpostavka je da je matrica kovarijanci F faktora povrata f stabilna i dana egzaktno. Dijagonalni elementi d_i matrice D leže u intervalu $[a, b]$ gdje je skup neodređenosti U_d za matricu D dan s

$$U_d = \{D_D = diag(d), d_i \in [\underline{d}_i, \overline{d}_i], i = 1, \ldots, n\}. \tag{3.2}$$

Stupci matrice V su poznate aproksimacijske vrijednosti. Točnije, V pripada elipsoidnom skupu neodređenosti U_v danim s

$$U_v = \{V : V = V_0 + W, \|W_i\|_G \leq \rho_i\}, \tag{3.3}$$

gdje je W_i i-ti stupac od W i $\|w\|_G = \sqrt{w^T G w}$ je norma od w uz simetričnu, pozitivno definitnu matricu G. Vektor očekivanog povrata μ leži u skupu neodređenosti U_m

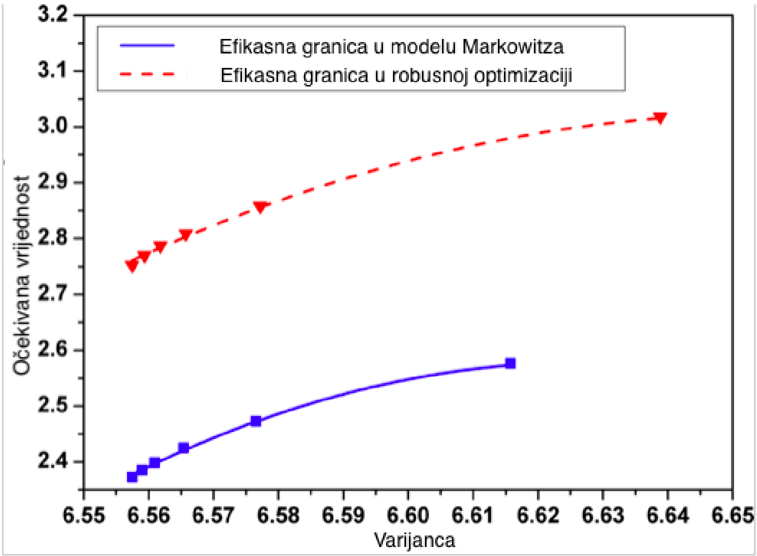
$$U_m = \{\mu : \mu = \mu_0 + p, |p_i| \leq \gamma_i, i = 1, \ldots, n\}. \tag{3.4}$$

Na primjer, svaka komponenta vektora μ je po pretpostavci iz intervala pouzdanosti. Izbor skupa neodređenosti je motiviran činjenicom da su udjeli imovine i očekivani povrat aproksimirani linearnom regresijom. Struktura skupova neodređenosti motivirana je intervalima pouzdanosti. Naime, na danom uzorku tržišnih podataka koji se sastoji od vektora povrata i pripadnog faktora povrata, linearna regresija nam daje aproksimaciju najmanjih kvadrata (μ_0, V_0) para (μ, V). Na taj način dobivamo višedimenzionalne intervale pouzdanosti, oko tih aproksimacija, sa svojstvom da se originalne vrijednosti parametara nalaze u tim intervalima, s određenim stupnjem puzdanosti. Način odabira matrice G, kao i granica, $\rho_i, \gamma_i, a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$, opisali su Goldfarb i Iyengar [12].

Neka je pozicija investitora na tržištu opisana portfeljom $\phi \in \mathbb{R}^n$ gdje je i-ta komponenta ϕ_i udio cjelokupnog bogatstva u imovini i. Povrat r_ϕ portfelja ϕ dan je s

$$r_\phi = r^T \phi = \mu^T \phi + f^T V \phi + \epsilon^T \phi \sim \mathcal{N}(\phi^T \mu, \phi^T (V^T F V + D)\phi). \tag{3.5}$$

Cilj investitora je odabrati portfelj koji maksimizira povrat investicije uzimajući u obzir ograničenja na rizik investicije. Matematički model odabira porfelja koji je predložio



Slika 3.1: Efikasna granica portfelja dobivenog modelom Markowitza, u usporedbi s efikasnom granicom portfelja dobivenog robusnom optimizacijom

Markowitz [4] pretpostavlja da su očekivani povrat $\mathbb{E}[r]$ i varijanca $\mathrm{Var}[r]$ poznati sa sigurnošću. U tom modelu je povrat investicije očekivani povrat portfelja $\mathbb{E}[r_\phi]$, a pripadni rizik varijanca $\mathrm{Var}[r_\phi]$. Stoga je cilj investitora odabrati portfelj $\phi*$ koji ima minimalnu varijancu među svim portfeljima koji imaju očekivani povrat minimalno α. Dakle, ϕ^* je optimalno rješenje problema kvadratičnog programiranja

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{Var}[r_\phi] \\ & \mathbb{E}[r_\phi] \geq \alpha \\ & e^T\phi = 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Kao što smo već napomenuli, primarna mana Markowitzevog modela je u tome što je optimalni portfelj preosjetljiv na tržišne podatke $(\mathbb{E}[r], \mathrm{Var}[r])$. Uvođenjem mjera rizika u tržišne modele, pokušavamo ispraviti osjetljivost na perturbacije. Skupovi neodređenosti U_m, U_v i U_d predstavljaju neodređenost naših ograničenih podataka o tržištu i želimo odabrati one portfelje koji se ponašaju dobro za sve one parametre koji zadovoljavaju ograničenja. Takvi portfelji su rješenja dobro definiranih min-max optimizacijskih problema poznatih pod nazivom *robusni problemi odabira portfelja*.

Robusni analogon Markowitzevog optimizacijskog modela (3.6) je dan s

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{V\in U_v, D\in U_d} \operatorname{Var}[r_\phi] \\ & \min_{\mu\in U_m} \mathbb{E}[r_\phi] \geq \alpha \\ & e^T\phi = 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cilj robusnog problema odabira portfelja s minimalnom varijancom 3.7 je minimizirati varijancu portfelja u najgorem scenariju s obzirom na ograničenje da je očekivani povrat u tom slučaju barem α. Naravno, očekujemo da je osjetiljivost tog optimalnog rješenja znatno manja u odnosu na ono u (3.6). Dualni problem problema (3.7) je *robusni problem maksimizacije povrata*. Cilj ovog problema je maksimizirati očekivani povrat portfelja u najgorem scenariju s obzirom na ograničenje na varijancu u najgorem scenariju. Dakle, treba riješiti problem

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{\mu\in U_m} \mathbb{E}[r_\phi] \\ & \max_{V\in U_v, D\in U_d} \operatorname{Var}[r_\phi] \leq \lambda \\ & e^T\phi = 1. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nadalje, cilj robusnog problema odabira portfelja koristeći ograničenja na VaR je maksimizirati očekivani povrat u najgorem scenariju obzirom na to da je vjerojatnost da je povrat r_ϕ manji od praga α manja od propisanog praga β. Dakle, cilj je riješiti sljedeći problem

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{\mu\in U_m} \mathbb{E}[r_\phi] \\ & \max_{V\in U_v, D\in U_d} \mathbb{P}(r_\phi \leq \alpha) \leq \beta \\ & e^T\phi = 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definicija 3.1.2. *Neka je $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ zatvoreni konveksni konus tako da je $Int\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathcal{X}$ zatvoren konveksni skup u $\mathbb{R}^n$, tako da je $Int\mathcal{X} \neq \emptyset$ i $\mathcal{A}$ zatvoren konveksni skup u $\mathbb{R}^n$, tako da je $Int\mathcal{A} \neq \emptyset$. Funkcija $F(x, p) : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^N$ je $\mathcal{K}$- konkavna ako vrijedi*

$$\forall(x_1, x_2 \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{A})\forall(\lambda \in [0, 1]) : F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, p) \geq_{\mathcal{K}} \lambda F(x_1, p) + (1-\lambda)F(x_2, p), \tag{3.10}$$

gdje je $b \geq_{\mathcal{K}} a$ označava $b - a \in \mathcal{K}$.

Svi spomenuti optimizacijski problemi pripadaju skupini rubusnih konveksnih optimizacijskih problema i mogu se zapisati općenito kao

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & F(x, p) \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m, \forall p \in U, \end{aligned} \tag{3.11}$$

gdje je p parametar neodređenosti, $x \in \mathbb{R}^n$ vektor odluke, $\mathcal{K}$ konveksni konus te je fiksiran $p \in U$ funkcija $F(x, p)$ $\mathcal{K}$-konkavna.

3.2 Robusna varijanta efikasnog portfelja

Ovdje ćemo prikazati detaljnu analizu robusnog problema minimizacije varijance (3.7). Pokazat ćemo da se za skupove neodređenosti definirane u (3.2) ovaj problem, kao i problem maksimizacije portfelja (3.8), može svesti na efikasno rješiv problem konusnog programiranja drugog reda.

3.2.1 Robusni problem optimizacije portfelja

S obzirom na to da je $r_\phi \sim \mathcal{N}(\mu^T\phi, \phi^T(V^T FV + D)\phi)$, robusni problem optimizacije portfelja je dan s

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{V \in U_v}(\phi^T V^T F V \phi) + \max_{D \in U_d}(\phi^T D \phi) \\ & \min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi \geq \alpha \\ & e^T \phi = 1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Granice $\underline{d}_i \leq d_i \leq \overline{d}_i$ povlače da je $\phi^T D\phi \leq \phi^T \overline{D}\phi$, gdje je $\overline{D} = \operatorname{diag}(\overline{d})$. Također, kako je po pretpostavci matrica kovarijanci F faktora f pozitivno definitna, funkcija $\|x\|_F : x \mapsto \sqrt{x^T F x}$ je norma na $\mathbb{R}^m$. Stoga je 3.12 ekvivalentan kvadratičnom problemu

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{V \in U_v} \|V\phi\|_F^2 + (\phi^T \overline{D}\phi) \\ & \min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi \geq \alpha \\ & e^T \phi = 1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Uvođenjem pomoćnih varijabli ν i δ, robusni problem 3.13 se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \min \quad & \nu + \delta \\ & \max_{V \in U_v} \|V\phi\|_F^2 \leq \nu \\ & \phi^T \overline{D}\phi \leq \delta \\ & \min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi \geq \alpha \\ & e^T \phi = 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

U slučaju konačnosti skupova U_v i U_m, na primjer $U_v = \{V_1, \dots, V_s\}$ i $U_m = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$, tada se (3.14) može zapisati u obliku konveksnog kvadratičnog problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda + \delta \\ & \|V_k\phi\|_F^2 \leq \lambda, \text{ za sve } k = 1, \dots, s \\ & \phi^T \overline{D} \phi \leq \delta \\ & \phi^T \mu_k \geq \alpha, \text{ za sve } k = 1, \dots, r \\ & e^T \phi = 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ovaj problem se može lako preformulirati u problem konusnog programiranja drugog reda za skup

$$U_v = \{V : V = V_0 + W, \|W\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(W^T W)} \leq \rho\}.$$

Kada je neodređnost u V i μ opisana s (3.3) i (3.4), očekivani povrat portfelja ϕ u najgorem mogućem scenariju je dan s

$$\min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi = \mu_0^T \phi - \gamma^T |\phi|, \tag{3.16}$$

dok je varijanca u najgorem mogućem scenariju dana s

$$\begin{aligned} \max \quad & \|(V_0 + W)\phi\|_F^2 \\ & \|W_i\|_G \leq \rho_i, \ i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Kako je $\|W_i\|_G \leq \rho_i$, $i = 1, \dots, n$, slijedi

$$\|W\phi\|_G = \|\sum_{i=1}^n \phi_i W_i\|_G \leq \sum_{i=1}^n |\phi_i| \|W_i\|_G \leq \sum_{i=1}^n \rho_i |\phi_i|. \tag{3.18}$$

Za $r = \rho^T |\phi| = \sum_{i=1}^n \rho_i |\phi_i|$ problem

$$\begin{aligned} \max \quad & \|V_0\phi + w\|_F^2 \\ & \|w\|_G \leq r \end{aligned} \tag{3.19}$$

ima veću ili jednaku optimalnu vrijednost nego problem (3.17).

Funkcija cilja u (3.19) je konveksna pa je optimalno rješenje w^* na rubu dopustivog skupa, tj. $\|w^*\|_G = r$. Za $i = 1, \dots, n$ definirajmo

$$W_i^* = \begin{cases} \frac{\phi_i}{|\phi_i|} \frac{\rho_i}{r} w^*, & \phi_i \neq 0, \\ \frac{\rho_i}{r} w^*, & \text{inače} \end{cases} \tag{3.20}$$

W^* je dopustiva za 3.17 i $W^*\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i W_i^*$ pa je $\|W_i^*\|_G = \rho_i$. Upravo zato su optimalna rješenja od (3.17) i (3.19) zapravo jednaka. Dakle, za fiksni portfelj ϕ, varijanca u najgorem scenariju manja je od v ako i samo ako je

$$\max_{y : \|y\|_G \leq r} \|y_0 + y\|_F^2 \leq v, \tag{3.21}$$

gdje je $y_0 = V_0\phi$ i $r = \rho^T|\phi|$. Sljedeća lema nam opisuje kako ovaj uvjet možemo pretvoriti u više linearnih uvjeta i ograničene hiperboličke uvjete (u smislu: $z^T z \leq xy, z \in \mathbb{R}^n, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$). U dokazu sljedeće leme će nam trebati pojam Schurovog komplementa pa navodimo definiciju

Definicija 3.2.1. *Neka je M $(n+m)\times(n+m)$ blok matrica takva da je*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

gdje je A $n\times n$, B $n\times m$, C $m\times n$ i D $m\times m$ matrica. Ako A nije singularna matrica, Schurov komplement matrice M obzirom na matricu A se definira kao

$$M/A = D - CA^{-1}B. \tag{3.23}$$

Ako D nije singularna matrica, Schurov komplement se definira kao

$$M/D = A - BD^{-1}C. \tag{3.24}$$

Lema 3.2.2. *Neka su $r, \nu > 0$, $y_0, y \in \mathbb{R}^m$ i $F, G \in \mathbb{R}^{m\times m}$ pozitivno defintine matrice. Tada je uvjet*

$$\max_{y:\|y\|_G \leq r} \|y_0 + y\|_F^2 \leq \nu, \tag{3.25}$$

ekvivalentan sljedećim uvjetima

(i) Postoje $\tau, \sigma \geq 0$ i $t \in \mathbb{R}^m_+$ tako da je

$$\begin{aligned} \nu &\geq \tau + e^T t \\ \sigma &\leq \frac{1}{\lambda_{\max}(H)} \\ r^2 &\leq \sigma\tau \\ w_i^2 &\leq (1 - \sigma\lambda_i)t_i\,,\ i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{3.26}$$

gdje je $Q\Lambda Q^T$ spektralna dekompozicija od $H = G^{-\frac{1}{2}}FG^{-\frac{1}{2}}$, $\Lambda = diag(\lambda_i)$ i $w = Q^T H^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} y_0$.

(ii) Postoji $\tau \geq 0$ i $s \in \mathbb{R}^m_+$ tako da je

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \tau(\nu - e^T s) \\ u_i^2 &\leq (1 - \tau\theta_i)s_i,\ ,\ i = 1, \ldots, m, \\ \tau &\leq \frac{1}{\lambda_{\max}(K)}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

gdje je $P\Theta P^T$ spektralna dekompozicija od $K = F^{\frac{1}{2}}G^{-1}F^{\frac{1}{2}}$, $\Theta = diag(\theta_i)$ i $u = P^T F^{\frac{1}{2}} y_0$.

Dokaz. Stavimo $y = r\overline{y}$. Sada je (3.25) ekvivalentno

$$(\nu - y_0^T F y_0) - 2r y_0^T F \overline{y} - r^2 \overline{y}^T F \overline{y} \geq 0, \tag{3.28}$$

za sve $\overline{y}$ takve da je $1 - \overline{y}^T G \overline{y} \geq 0$. Prije nastavka dokaza, potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 3.2.3. *Neka je $F_i(x) = x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i$, $i = 0, 1, \ldots, p$ kvadratična fukncija. Tada je $F_0(x) \geq 0$ za sve x takve da je $F_i(x) \geq 0$, $i = 1, \ldots, p$, ako postoji $\tau_i \geq 0$ takav da je*

$$\begin{bmatrix} c_0 & b_0^T \\ b_0 & A_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \begin{bmatrix} c_i & b_i^T \\ b_i & A_i \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.29}$$

Nadalje, ako je $p = 1$, tada vrijedi obrat ako postoji x_0 tako da je $F_1(x_0) > 0$.

Kako je $\overline{y} = 0$ dopustiv za $1 - \overline{y}^T G \overline{y} \geq 0$, prethodna lema implicira da (3.28) vrijedi za sve $1 - \overline{y}^T G \overline{y} \geq 0$ ako i samo ako postoji $\tau \geq 0$ takav da je

$$M = \begin{bmatrix} \nu - \tau - y_0^T F y_0 & -r y_0^T F \\ -r F y_0 & \tau G - r^2 F \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.30}$$

Neka je spektralna dekompozicija od $H = G^{-\frac{1}{2}} F G^{-\frac{1}{2}}$ dana s $Q \Lambda Q^T$ gdje je $\Lambda = diag(\lambda_i)$ i definirajmo $w = Q^T H G^{\frac{1}{2}} y_0 = \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T G^{\frac{1}{2}} y_0$. Uočimo da je $y_0^T F y_0 = w^T w$ pa slijedi da je matrica $M \geq 0$ ako i samo ako je

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & Q^T G^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & G^{\frac{1}{2}} Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu - \tau - w^T w & -r w^T \Lambda^{\frac{1}{2}} \\ -r \Lambda^{\frac{1}{2}} w & \tau I - r^2 \Lambda \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.31}$$

Za matricu $\overline{M}$ vrijedi $\overline{M} \geq 0$ ako i samo ako $\tau \geq r^2 \lambda_i$ i Shurov komplement od $\tau I - r^2 \Lambda$ je

$$\nu - \tau - w^T w - r^2 \Big(\sum_{i:\tau \neq r^2 \lambda_i} \frac{\lambda_i w_i^2}{\tau - r^2 \lambda_i} \Big) = \nu - \tau - \sum_{i:\sigma \lambda_i \neq 1} \frac{w_i^2}{1 - \lambda_i} \geq 0, \tag{3.32}$$

gdje je $\sigma = \frac{r^2}{\tau}$. Slijedi

$$\max_{y:\|y\|_G \leq r} \|y_0 + r y\|_F^2 \leq \nu, \tag{3.33}$$

ako i samo ako postoje $\tau, \sigma \geq 0$ i $t \in \mathbb{R}_+^m$ tako da je

$$\begin{aligned} \nu &\geq \tau + e^T t, \\ r^2 &= \sigma \tau, \qquad\qquad (3.34) \\ w_i^2 &= (1 - \sigma \lambda_i) t_i, \ i =, 1, \ldots, m, \\ \sigma &\leq \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}. \qquad\qquad (3.35) \end{aligned}$$

Nadalje, uočimo kako (3.25) vrijedi ako i samo ako

$$y^T G y \geq r^2, \tag{3.36}$$

i to za sve y takve da je $\|y_0 + y\|_F^2 \geq \nu$. Kako je za dovoljno velike ν, $\|y_0 + y\|_F^2 > \nu$, pomoćna lema implicira (3.36) vrijedi za sve $\|y_0 + y\|_F^2 \geq \nu$ ako i samo ako postoji $\tau \geq 0$ takav da je

$$M = \begin{bmatrix} -r^2 - \tau(y_0^T F y_0 - \nu) & -\tau y_0^T F \\ -\tau F y_0 & G - \tau F \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.37}$$

Neka je sada $P\Theta P^T$ spektralna dekompozicija od K. Tada je $M \geq 0$ ako i samo ako

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & P^T G^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & G^{-\frac{1}{2}} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 - \tau(u^T u - \nu) & -\tau u^T \\ -\tau u & \Theta^{-1} - \tau I \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.38}$$

Također, $\overline{M} \geq 0$ ako i samo ako je $\tau \leq \frac{1}{\theta_i}$, na primjer za $\tau \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(K)}$, $u_i = 0$ za sve i takve da je $\tau\theta_i = 1$. Schurov komplement od $\Theta^{-1} - \tau I$ je

$$r^2 - \tau(u^T u - \nu) - \tau^2 \Big(\sum_{i:\tau\theta_i \neq 1} \frac{u_i^2}{\theta_i^{-1} - \tau} \Big) = r^2 + \tau \Big(\nu - \sum_{i:\tau\theta_i \neq 1} \frac{u_i^2}{1 - \tau\theta_i} \Big) \geq 0. \tag{3.39}$$

Stoga, vrijedi

$$\max_{y:\|y\|_G \leq r} \|y_0 + ry\|_F^2 \leq \nu, \tag{3.40}$$

ako i samo ako postoji $\tau \geq 0$ i $s \in \mathbb{R}_+^m$ tako da je

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \tau(\nu - e^t s), \\ u_i^2 &= (1 - \tau\theta_i)s_i, \; i = 1, \ldots, m, \\ \tau &\leq \frac{1}{\lambda_{\max}(K)}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Analogno kao u dokazu prvog dijela leme, postoje $\tau \geq 0$ i $s \in \mathbb{R}_+^m$ tako da zadovoljavaju (3.41) ako i samo ako postoje $\tau \geq 0$ i $s \in \mathbb{R}_+^m$ tako da zadovoljavaju (3.27). Time smo pokazali drugu tvrdnju. □

Kako bismo ilustrirali ekvivalenciju (3.26) i (3.27) uočimo da ako je $F = \kappa G$, tada je $K = H = \kappa I$ i $w = u$. Dakle, ako (τ, s) zadovoljavaju (3.27), tada $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, \tilde{t}) = (\tau, \nu - e^T s, s)$ zadovoljava (3.26). Ograničenja hiperboličkog tipa mogu se zapisati kao konusni uvjeti drugog reda:

$$z^T z \leq xy \Leftrightarrow 4z^T z \leq (x+y)^2 - (x-y)^2 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y. \tag{3.42}$$

Definicija 3.2.4. *Neka je* $V_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $F, G \in \mathbb{R}^{m\times m}$*. Definiramo skup* $\mathcal{H}(V_0, F, G)$ *svih vektora* $(r, v, \delta, \theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *tako da* $(r, v, y_0 = V_0\phi)$ *zadovoljava 3.26, tj.*

(i) postoje $\sigma, \tau \geq 0$ *i* $t \in \mathbb{R}^m_+$ *takvi da je*

$$\begin{aligned} \tau + e^T t &\leq v \\ \sigma &\leq \frac{1}{\lambda_{\max}(H)} \\ \left\| \begin{bmatrix} 2r \\ \sigma - \tau \end{bmatrix} \right\| &\leq \sigma + \tau \\ \left\| \begin{bmatrix} 2w_i \\ 1 - \sigma\lambda_i - t_i \end{bmatrix} \right\| &\leq 1 - \sigma\lambda_i + t_i,\ i = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

gdje je $Q\Lambda Q^T$ *spektralna dekompozicija od* $H = G^{-\frac{1}{2}} F G^{-\frac{1}{2}}$*,* $\Lambda = diag(\lambda_i)$ *i* $w = Q^T H^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} V_0 \phi$*,*

(ii) i $\phi^T \overline{D}\phi \leq \delta$*, ili ekvivalentno*

$$\left\| \begin{bmatrix} 2\overline{D}^{\frac{1}{2}}\phi \\ 1 - \delta \end{bmatrix} \right\| \leq 1 + \delta.$$

Sada iz (3.16), (3.21) i prethodne definicije slijedi da se optimizacijski problem (3.14) može formulirati kao

$$\begin{aligned} \min\quad & v + \delta \\ & \mu_0^T \phi - \gamma^T |\phi| \geq \alpha \\ & \rho^T |\phi| \leq r \\ & e^T \phi = 1 \\ & (r, v, \delta, \phi) \in \mathcal{H}(V_0, F, G). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Uočimo, iako je (3.43) konveksni optimizacijski problem, to nije problem konusnog programiranja drugog reda, što zapravo želimo postići. Ukoliko zamijenimo varijablu $|\phi|$ s novom varijablom $\psi \in \mathbb{R}^n$ i ako dodamo $2n$ linearnih uvjeta, $\psi_i \geq |\phi_i|$, $i = 1, \ldots, n$, dobivamo traženi optimizacijski problem konusnog programiranja drugog reda za robusnu optimizaciju portfelja s minimalnom varijancom

$$\begin{aligned} \min \quad & \nu + \delta \\ & \mu_0^T \phi - \gamma^T |\phi| \geq \alpha \\ & r \geq \rho^T \psi \\ & \psi_i \geq \phi_i, \ i = 1, \dots, n, \\ & \psi_i \geq -\phi_i, \ i = 1, \dots, n, \\ & e^T \phi = 1 \\ & (r, \nu, \delta, \phi) \in \mathcal{H}(V_0, F, G). \end{aligned} \tag{3.44}$$

U nastavku rada ćemo, radi jednostavnosti, pretpostaviti da je $\phi \geq 0$.

3.2.2 Robusni problem maksimalnog povrata

Robusni problem maksimizacije povrata portfelja je dan s

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi \\ & \max_{V \in U_v, D \in U_d} \phi^T (V^T F V + D) \phi \leq \lambda \\ & e^T \phi = 1 \\ & \phi \geq 0. \end{aligned}$$

Iz (3.16) slijedi da je prethodni problem ekvivalentan s

$$\begin{aligned} \max \quad & (\mu - \gamma)^T \phi \\ & \max_{V \in U_v} \phi^T V^T F V \phi \leq \lambda - \delta \\ & \phi^T \overline{D} \phi \leq \delta \\ & e^T \phi = 1 \\ & \phi \geq 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Iz Definicije 3.2.4 slijedi da je robusni problem maksimizacije povrata ekvivalentan problemu konusnog programiranja drugog reda

$$\begin{aligned} \max \quad & (\mu - \gamma)^T \phi \\ & e^T \phi = 1 \\ & \phi \geq 0 \\ & (\rho^T \phi, \lambda - \delta, \delta, \phi) \in \mathcal{H}(V_0, F, G). \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.3 Robusni odabir portfelja pomoću VaR-a

Robusni problem odabira portfelja uz zadanu rizičnu vrijednost dan je s

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{\mu \in U_m} \mathbb{E}[r_\phi] \\ & \max_{\mu \in U_m, V \in U_v, D \in U_d} \mathbb{P}(r_\phi \leq \alpha) \leq \beta \\ & e^T \phi = 1 \\ & \phi \geq 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Ovaj optimizacijski problem maksimizira očekivani povrat s obzirom na uvjet $\mathbb{P}(r_\phi \leq \alpha) \leq \beta$. Kao i prije, za fiksirani (μ, V, D) pretpostavljamo da je povrat $r_\phi \sim \mathcal{N}(\mu^T \phi, \phi^T (V^T F V + D)\phi)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_\phi \leq \alpha) \leq \beta \quad & \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\mu^T \phi + \mathcal{Z} \sqrt{\phi^T (V^T F V + D)\phi} \leq \alpha) \leq \beta \\ & \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\mathcal{Z} \leq \frac{\alpha - \mu^T \phi}{\sqrt{\phi^T (V^T F V + D)\phi}}) \leq \beta \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha - \mu^T \phi}{\sqrt{\phi^T (V^T F V + D)\phi}} \leq \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1}(\beta), \end{aligned} \tag{3.48}$$

gdje je $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ normalna slučajna varijabla i $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ pripadna funkcija gustoće. U primjeni je najčešće $\beta << 1$ pa je $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1} < 0$. Stoga je vjerojatnosni uvjet, za fiksan (μ, V, D) ekvivalentan konusnom uvjetu drugog reda

$$- \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1}(\beta) \sqrt{\left\| F^{\frac{1}{2}} V \phi \right\|^2 + \left\| D^{\frac{1}{2}} \phi \right\|^2} \leq \mu^T \phi - \alpha. \tag{3.49}$$

Uvažavajući (3.50), problem (3.47) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \max \quad & \min_{\mu \in U_m} \mu^T \phi \\ & \max_{\mu \in U_m, V \in U_v, D \in U_d} \{ -\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1}(\beta) \sqrt{\left\| F^{\frac{1}{2}} V \phi \right\|^2 + \left\| D^{\frac{1}{2}} \phi \right\|^2} - \mu^T \phi \} \leq \alpha \\ & e^T \phi = 1 \\ & \phi \geq 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Uz pretpostavku da su skupovi neodređenosti U_d, U_v i U_m dani s (3.2) - (3.4), (3.50) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \max(\mu_0 - \gamma)^T\phi & & \\ -\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1}(\beta)\left\|\begin{bmatrix} \nu \\ \delta \end{bmatrix}\right\| &\leq (\mu_0 - \gamma)^T\phi - \alpha \\ \left\|\overline{D}^{\frac{1}{2}}\phi\right\| &\leq \delta \\ \max_{V\in U_v}\left\|F^{\frac{1}{2}}V\phi\right\| &\leq \nu \\ e^T\phi &= 1 \\ \phi &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Iz drugog uvjeta Leme 3.2.2 slijedi

$$\max_{V\in U_v}\left\|F^{\frac{1}{2}}V\phi\right\| \leq \nu$$

ako i samo ako postoji $\overline{\tau} \geq 0$ i $\overline{s} \in \mathbb{R}_+^m$ takvi da je

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \overline{\tau}(\nu^2 - e^T\overline{s}) \\ u_i^2 &\leq (1 - \overline{\tau}\theta_i)\overline{s}_i,\ i = 1,\ldots,m \\ \lambda_{\max}(K)\tau &\leq 1, \end{aligned} \tag{3.52}$$

gdje je $K = P\Theta P^T$ spektralna dekompozicija od $K = F^{\frac{1}{2}}G^{-1}F^{\frac{1}{2}}$, $\Theta = \mathrm{diag}(\theta_i)$ i $u = P^TF^{\frac{1}{2}}V_0\theta$. Zamjenom varijabli $\tau = \nu\overline{\tau}$ i $s = \frac{1}{\nu}\overline{s}$, (3.52) se sada može zapisati kao

$$\begin{aligned} r^2 &\leq \tau(\nu - e^Ts) \\ u_i^2 &\leq (\nu - \tau\theta_i)s_i,\ i = 1,\ldots,m \\ \lambda_{\max}(K)\tau &\leq \nu. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Dakle, robusni VaR problem odabira portfelja (3.47) ekvivalentan je problemu konusnog programiranja drugog reda

$$
\begin{aligned}
\max(\mu_0 - \gamma)^T \phi & \\
u &= P^T F^{\frac{1}{2}} V_0^T \phi \\
-\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}^{-1}(\beta) \left\| \begin{bmatrix} \nu \\ \delta \end{bmatrix} \right\| &\leq (\mu_0 - \gamma)^T \phi - \alpha \\
\left\| D^{\frac{1}{2}} \phi \right\| &\leq \delta \\
\left\| \begin{bmatrix} 2\rho^T \phi \\ (\tau - \nu + e^T s) \end{bmatrix} \right\| &\leq \tau + \nu - e^T s \\
\left\| \begin{bmatrix} 2u_i \\ (\nu - \tau\theta_i - s_i) \end{bmatrix} \right\| &\leq \nu - \tau\theta_i + s_i, \; i = 1, \ldots, m \\
\nu - \tau\lambda_{\max}(K) &\geq 0 \\
e^T \phi &= 1 \\
\phi &\geq 0 \\
\tau &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Kao i u problemu s minimalnom varijancom, alternativna formulacija problema konusnog programiranja drugog reda za robusni VaR problem slijedi iz prvog dijela Leme 3.2.2.

3.4 Robusni odabir portfelja pomoću CVaR-a

Jedan od parametara neodređenosti u modelu CVaR odabira portfelja je μ i koristeći procjenjenu vrijednost ovog parametra dovodi nas do rizika u procjeni odabira portfelja. Naime, male razlike u procjeni μ mogu dovesti do velikih promjena u kreiranju optimalnog portfelja. Jedan od načina kako smanjiti osjetljivost na procjenu parametara je koristiti robusnu optimizaciju kako bismo odredili optimalni portfelj u najgorem mogućem scenariju iz skupa neodređenosti očekivanog povrata.

Sada predstavljamo robusni CVaR odabira portfelja s elipsoidnim skupovima neodređenosti gdje je rizik mjeren mjerom CVaR. U ovom modelu, CVaR se koristi za mjerenje rizika povrata portfelja kao i ranije. Osim toga, uzet ćemo u obzir neodređenost očekivanog povrata koji se može smatrati rizikom procjene i koristit ćemo CVaR kao mjeru rizika. Dakle, uzimajući u obzir problem (1.23), optimalan portfelj bit će određen kao rješenje sljedećeg problema optimizacije:

$$\begin{aligned}\min \quad & CVaR_\beta(-\mu^T x) + \lambda(\gamma + ((1-\alpha)m)^{-1}\sum_{i=1}^{m} z_i)\\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, i = 1, \ldots, m\\ & z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m.\end{aligned}$$

gdje je λ parametar averzije prema riziku koji balansira vrijednost $CVaR(x)$ i očekivani povrat. U našem slučaju s n imovina, $\mu \in \mathbb{R}^n$ je slučajan vektor očekivanih povrata imovine s vjerojatnosnom funkcijom gustoće $p(\mu)$. Kako bismo odredili gubitak portfelja, definiramo funkciju gubitka $f(x,\mu) = -\mu^T x = -[\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n]$. Dakle, za interval pouzdanosti β, $CVaR_\beta(-\mu^T x)$ možemo definirati kao

$$CVaR_\beta(-\mu^T x) = \min_\eta(\eta + \frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}([f(x,\mu) - \eta]^+)). \tag{3.55}$$

Uvažavajući definiciju $CVaR_\beta$ i optimizacijskog problema (3.55), uočavamo kako se $CVaR_\beta$ povećava proporcionalno s povećanjem vrijednosti β. Radi jednostavnosti izvoda modela, uvedimo pomoćnu funkciju

$$F_\beta(x,\eta) = \eta + \frac{1}{1-\beta}\int_{\mu\in\mathbb{R}^n}(f(x,\mu) - \eta)^+ p(\mu) d\mu, \tag{3.56}$$

i koristimo sljedeću aproksimaciju funkcije $F_\beta(x,\eta)$:

$$\overline{F}_\beta(x,\eta) = \eta + \frac{1}{(1-\beta)k}\sum_{i=1}^{k}(-\mu_i^T x - \eta)^+, \tag{3.57}$$

gdje $\mu_1, \ldots, \mu_k$ predstavljaju k nezavisnih uzoraka za μ baziranih na funkciji gustoće $p(\mu)$. U [3] je pokazano da vrijedi

$$\min_x CVaR_\beta(-\mu^T x) = \min_{x,\eta} \overline{F}_\beta(x,\eta). \tag{3.58}$$

Zamjenom $(f(x,\mu) - \eta)^+$ u $\overline{F}_\beta(x,\eta)$ s v_i, dodavanjem uvjeta $v_i \geq 0$ i $v_i \geq f(x,\mu_i) - \eta$, CVaR problem odabira portfelja sada postaje

$$\begin{aligned}\min \quad & \eta + ((1-\beta)k)^{-1}\sum_{i=1}^{k} v_i + \lambda(\gamma + ((1-\beta)m)^{-1}\sum_{i=1}^{m} z_i)\\ & z_i \geq f(x, y_i) - \gamma, i = 1, \ldots, m\\ & z_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\\ & v_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\\ & v_i \geq f(x, \mu_i) - \eta,\ i = 1, \ldots, k.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Umjesto ove metode, možemo puno efikasnije odrediti CVaR robusni portfelj koristeći metodu izglađivanja. U [3] je pokazano da sljedeća funkcija aproksimira funkciju $\overline{F}_\beta(x,\eta)$

$$\hat{F}_\beta(x,\eta) = \eta + ((1-\beta)k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_\varepsilon(-\mu_i^T x - \eta), \tag{3.60}$$

gdje je p_ε definiran kao $p_\varepsilon(a) = \begin{cases} a, & a \geq \varepsilon \\ \frac{a^2}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\varepsilon, & -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Za dani parametar $\varepsilon > 0$, p_ε je neprekidno diferencijabilna i aproksimira po djelovima linearnu funkciju $\max\{a, 0\}$.

Koristeći metodu izglađivanja, model CVaR odabira portfelja sada glasi

$$\min_{x,\gamma,\eta} \eta + ((1-\beta)k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} p_\varepsilon(-\mu_i^T x - \eta) + \lambda(\gamma + ((1-\alpha)m))^{-1} \sum_{i=1}^{m} p_\varepsilon(-y_i^T x - \gamma) \tag{3.61}$$

3.5 Struktura skupova neodređenosti

Autori u [12], koristeći statističku teoriju linearne regresije više varijabli, su opravdali odabir navedenih skupova neodređenosti U_d, U_v i U_m, navedenih na početku ovog poglavlja. Također, predložen je prirodan odabir matrice G definirajući eliptičku normu $\|\cdot\|_G$ i granice $\rho_i, \gamma_i, \overline{d}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Nakon što odredimo skupove neodređenosti za μ i V, sve što preostaje za ustanoviti je granica $\overline{d}_i$. Analiza u [12] pokazuje da je prirodan odabir granica dan s intervalima pouzdanosti oko aproksimacije s_i^2 greške varijance σ_i^2. Nažalost, regresijom dobivamo samo jedan nepristrani uzorak s_i^2 greške varijance. Obzirom na to da robusni problemi optimizacije zahtijevaju jedino aproksimaciju greške varijance u najgorem scenariju, upravo nam se ta greška nameće kao granica $\overline{d}_i$. Ono što bi trebalo napomenuti jest da je potreban oprez prilikom odabira ω. Naime, ukoliko odaberemo ω vrlo velik, skupovi neodređenosti će postati vrlo veliki. Tako dobiven portfelj će biti loš, a ponašanje skupa parametara (μ_0, V_0) će biti znatno lošije u odnosu na portfelj dobiven za taj skup podataka. S druge strane, ako odaberemo ω mali, odabir portfelja ne će biti dovoljno robusan. Najčešće, ω je između 0.95 i 0.99. U primjeni koristimo pretpostavku da je matrica kovarijanci F stabilna i da je dobivena iz velikog broja podataka. Uvažavajući sve rezultate navedene u [12], možemo rezimirati način rješavanja robusnih problema odabira portfelja:

1. Prikupite podatke povrata imovine r i podatke faktora povrata f.

2. Metodom najmanjih kvadrata dobivamo aproksimacije μ_0 vektora povrata μ i V_0 matrica faktora V.

3. Odaberite prag pouzdanosti ω.

   (a) Odaberite bilo koju aproksimaciju greške varijance u najgorem mogućem scenariju.

   (b) Definirajte U_m i U_v koristeći (3.4) i (3.3), respektivno.

4. Riješite robusni problem.

Bibliografija

[1] A. Ben-Tal, L. Ghaoui, A. Nemirovski, *Robust optimization*, Princeton University Press, 2009.

[2] G. Cornuejols, R. Tutuncu, *Optimization methods in finance*, Cambridge University Press, 2007.

[3] M. Salahi, F. Mehrdoust, F. Piri, *CVaR Robust Mean-CVaR Portfolio Optimization*, ISRN Applied Mathematics, vol. 2013, Article ID 570950, 9 pages, 2013. doi:10.1155/2013/570950

[4] H. Markowitz, *Portfolio selection*, Journal of Finance,7: 77-91, 1952.

[5] L. El Ghaoui, M. Oks, F. Oustry, *Worst-Case Value-At-Risk and Robust Portfolio Optimization: A Conic Programming Approach*, Oper. Res., 51(4): 543–556, 2003.

[6] G.C. Calafiore, M. C. Campi, *The Scenario Approach to Robust Control Design*, IEEE transactions on automatic control, 51(5), May 2006

[7] N. Gulpinar, B. Rustem, *Worst-case robust decisions for multi-period mean-variance portfolio optimization*, European Journal of Operational Research, 127(3): 981–1000, 2007.

[8] A. G. Quaranta, A. Zaffaroni, *Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection*, Journal of Banking and Finance, 32: 2046–2056, 2008.

[9] J. Mina and J.Y. Xiao, *Return to riskmetrics: The evolution of a standard*, Technical report, RiskMetrics, 2001.

[10] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9: 203–228, 1999.

[11] K. Schottle, *Robust optimization with Application in Asset Management*, PhD thesis, Teshnische Universitat Munchen, Department of Mathematics, 2007.

[12] D. Goldfarb, G. Iyengar, *Robust portfolio selection problems*, Mathematics of Operations Research, 4-22, 2001.

[13] M. Lee, *Portfolio Optimization in Python*, http://1ifbylan2ifbyc.github.io/portfolio, 2018,

[14] InvestigatingAnswers, *Efficient Frontier*, http://www.investinganswers.com/financial-dictionary/investing/efficient-frontier-1010, 2018.

Sažetak

U ovome radu su navedeni osnovni rezultati teorije robusne optimizacije portfelja. Robusna optimizacija predstavlja način rješavanja optimizacijskih problema gdje parametri nisu zadani egzaktno. U skladu s robusnim pristupom, za svako dopustivo rješenje promatra se njegovo ponašanje na svakom od mogućih scenarija. Kao robusno rješenje bira se ono čije je najgore ponašanje, mjereno na skupu svih scenarija, najbolje moguće. S obzirom na to da parametri neodređenosti mogu poprimiti vrijednosti u danom skupu neodređenosti, definirane su pogodne strukture za te skupove.

Također, izvedeni su modeli robusne optimizacije portfelja pomoću najčešće korištenih mjera rizika, kao što su varijanca, rizična vrijednost (VaR) i uvjetna rizična vrijednost (CVaR). Izračun VaR ne daje nikakvu informaciju o gubicima u repu distribucije koji premašuju VaR. S obzirom na to da informacije o neočekivanim događajima za tvrtku nisu obuhvaćeni s VaR modelom, predložena je alternativna mjera rizika CVaR. CVaR ima bolja teoretska svojstva te iz tog razloga postaje iznimno popularna metoda za mjerenje tržišnog i kreditnog rizika. Za razliku od VaR, CVaR pruža dodatne informacije o gubicima u repu distribucije koji premašuju VaR.

Na kraju rada, naveden je "recept" za rješavanje robusnih problema odabira portfelja.

Summary

In this thesis it is showed how to formulate and solve robust portfolio selection problems. Robust optimization refers to the modeling of optimization problems with data uncertainty to obtain a solution that is guaranteed to be the one with the best posssible behavior for all posssible relizations of the uncertain parameters. Uncertainty in the parameters is described through uncertainty sets that contain many possible values that may be realized for the uncertain parameters.

We introduce main results in portfolio theory. Different risk measures used in portfolio management, such as variance, VaR, and CVaR, are introduced and the corresponding robust portfolio optimization problems are formulated. VaR may have drawbacks and undesirable properties that limit its use, such as lack of subadditivity. Also, VaR is nonconvex and nonsmooth and has multiple local minimum, while we seek the global minimum. So alternative risk measures were introduced such as CVaR — the conditional expected value of loss, under the condition that it exceeds the VaR. Moreover, we show that uncertainty structures correspond to confidence regions associated with the statistical procedures employed to estimate the market parameters.

Finally, we demonstrate a simple recipe for efficiently computing robust portfolios given raw market data and a desired level of confidence.

Životopis

Rođen sam 28.10.1992. godine u Zagrebu. Završio sam Osnovnu školu Stenjevec u Zagrebu, a zatim opći smjer Gimnazije Lucijana Vranjanina u Zagrebu. 2011. godine sam upisao preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Prediplomski studij sam završio 2015. godine čime sam stekao akademski naziv sveučilišnog prvostupnika matematike (bacc. univ. math). Iste godine sam upisao diplomski studij Primijenjene matematike.