Baselski problem

Tisanić, Valentina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Valentina Tisanić

BASELSKI PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima. Hvala što ste mi omogućili da studiram ono što volim. Najviše hvala na neizmjernoj ljubavi i podršci tijekom mog obrazovanja. ♡

Sadržaj

Uvod

Matematička analiza nam nudi mnogo zanimljivih i precizno dokazanih tvrdnji. Kao temu ovog rada izabrali smo Baselski problem koji su tijekom povijesti pokušali dokazati mnogi poznati, kao i manje poznati matematičari.

Što je to Baselski problem? Baselski problem svodi se na pitanje kolika je vrijednost sume svih recipročnih vrijednosti kvadrata prirodnih brojeva. Pokazat će se da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Na početku ovog diplomskog rada ćemo ukratko proći kroz povijest Baselskog problema, spomenuti istaknutije matematičare koji su se njime bavili te navesti nekoliko različitih dokaza. Krenut ćemo s Eulerovim dokazom Baselskog problema, a nakon njega navesti dokaze pomoću Fourierovih redova, teleskopskih redova, pomoću trigonometrije i algebre, dvostrukih integrala i na kraju, s matematičko-fizičke strane, dokaz koji ćemo interpretirati pomoću količine primljene svjetlosti u nekoj točki.

Mogli bismo se upitati zašto dokazivati već dokazano, što je praksa matematičara još od antike. Zašto dokazivati Baselski problem ponovno ako je Euler već objavio dokaz? Već kroz prvih nekoliko stranica ovog rada vidjet ćemo da iako je Euler došao do točne vrijednosti tražene sume, njegov dokaz je imao nedostataka jer su neke tvrdnje korištene bez preciznog dokaza. Stoga je ponovno dokazivanje već dokazanog korisno kako bi se ispravile greške ili popunile praznine u ranijem argumentiranju dokaza. Također, u matematici se teži pravilu minimalnosti, tako da novo dokazivanje može koristiti kako bismo eliminirali suvišne pretpostavke iz prvotnog dokaza. Ponekad se može proširiti područje za koje vrijede pojedini teoremi, pa time dobivamo jače rezultate. Noviji dokaz nekada je jasniji, može ga shvatiti veći broj ljudi, metodološki je ispravniji. Isto tako, može se provesti kroz pretpostavke i teoreme matematičkog područja uz koje ga nikad ne bismo povezali te potvrditi istu tvrdnju kroz potpuno različite pristupe. Ljudi iz različitih matematičkih disciplina imaju različita promišljanja te će dokaze u kojima se koriste istim pretpostavkama provesti na drugačije načine. Na kraju se utvrdi koji način je jednostavniji, kraći, brži i slično.

Bez obzira je li dokaz već dokazanog prijeko potreban zajednici ili nije, za matematičara je bitno razvijati sposobnost dokazivanja tvrdnji kako bi mogao kritički promišljati o tuđim dokazima, stvarati poveznice između matematičkih činjenica i utvrditi istinitost već dokazanog. To su neki od razloga zašto smo u ovom radu proučavali različite dokaze Baselskog problema.

Poglavlje 1

Prvi dokaz Baselskog problema

1.1 Početci Baselskog problema

Talijanski matematičar Pietro Mengoli rođen je 1626. godine u Bologni gdje je također i umro 1686. godine. Bio je profesor na sveučilištu u Bologni 39 godina. Izdao je nekoliko djela u području matematike, no nije ostao poznat velikom broju ljudi. Dokazao je, između ostalog, da harmonijski red ne konvergira te da je suma alternirajućeg harmonijskog reda jednaka $\ln 2$, no ono zbog čega je važan za ovaj rad jest da je postavio Baselski problem. On je među prvim matematičarima koji su se bavili sumom recipročnih kvadrata prirodnih brojeva te su prva Mengolijeva proučavanja tog problema zabilježena 1644. godine, a 1650. godine je Baselski problem predstavio u svojoj knjizi o sumi redova "*Novae quadraturae arithmetica*". Svoje metode za rješavanje Baselskog problema temeljio je na teleskopskim redovima, no bezuspješno.

Baselskim problemom bavili su se poznati matematičari Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Leibniz, Stirling, de Moivre, John Wallis i mnogi drugi, ali bezuspješno; bilo je teško izračunati točan rezultat jer red sporo konvergira. Naime, suma prvih 100 pribrojnika daje točnost na samo jednu decimalu, dok suma prvih 200 pribrojnika ne doseže vrijednost 1.64 što je točna aproksimacija na dvije decimale.

Problem je ostao otvoren 90 godina nakon što ga je Mengoli predstavio. Engleski matematičar John Wallis je 1655. godine tvrdio da zna rezultat u točnost na tri decimale. Švicarski matematičar Jacob Bernoulli pokušao je izračunati Baselsku sumu promatrajući nejednakost $2n^2 \geq n(n+1)$ jer je uočio da vrijedi $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$. Bernoulli je spoznao da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ konvergira prema broju 2, te iz toga zaključio da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$. Više od toga nije uspio dokazati pa je odustao od dokazivanja. Njegovi rođaci Johann i Daniel Bernoulli 1721. zaključili su kako Baselska suma iznosi približno $\frac{8}{5}$.

Konačno, švicarski matematičar Leonhard Euler je 1735. godine uspio dokazati da je Baselska suma jednaka $\frac{\pi^2}{6}$.

Slika 1.1: Leonhard Euler

Leonhard Euler rođen je 15. travnja 1707. godine u Baselu u Švicarskoj. U ranijim godinama ga je poučavao otac, a kasnije je pohađao Baselsko sveučilište. Privatne poduke iz matematike dobivao je od Johanna Bernoullija te se vjeruje da se preko njega zainteresirao za proučavanje Baselskog problema. Sam Euler je isticao da mu je Bernoulli puno pomogao u matematici te su zajedno radili na mnogim projektima. Euler je posvetio svoj život učenju matematike, jezika, filozofije i teologije. Suvremenici su ga opisivali kao čovjeka s odličnom memorijom, darom za jezike, čovjeka koji je izvodio aritmetičke izračune bez korištenja papira i olovke. Njegovo ime poznato je svima koji se bave matematikom, ali i mnogim drugima jer je uvelike unaprijedio matematičku znanost.

Imao je 28 godina kada je dokazao da je Baselska suma jednaka $\frac{\pi^2}{6}$ i tako postao poznat matematičkoj zajednici. On je 1731. godine izračunao prvih šest decimala Baselske sume i onda 1735. prvih 14 decimala. Iste godine došao je do rješenja Baselskog problema. Neki izvori tvrde da je problem dobio ime Baselski zbog toga što je Euler rođen u Baselu, dok drugi izvori govore kako naziv dolazi od lokacije gdje je Jacob Bernoulli izdao svoju knjigu "*Tractatus de seriebus infinitis*" u kojoj spominje Baselski problem.

Euler je do svog prvog dokaza došao proučavajući redom aproksimacije parcijalnih suma $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$, $k \in \mathbb{N}$. On je izračunao da je deseta parcijalna suma $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} \approx 1.54977$, stota parcijalna suma $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} \approx 1.63498$, tisućita parcijalna suma $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2} \approx 1.64393$ te se tako približavao točnom rezultatu. Euler je također dokazao da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Pored toga, promatrao je i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, no sume s neparnim eksponentima nije uspio izračunati. Umro je 18. rujna 1783. godine u Baselu kada je imao 76 godina. Tijekom života predstavio je tri različita dokaza Baselskog problema te od tada matematičari proučavaju nove, zanimljive pristupe ovom problemu.

Prije prelaska na dokaze, valja spomenuti i matematičara koji je poopćio Baselski problem. Slavni njemački matematičar 19. stoljeća Bernhard Riemann dao je svoj doprinos u gotovo svim granama matematike. Riemannova hipoteza je još i danas jedan od najvećih neriješenih problema matematike, a uz ovaj rad povezan je njegov doprinos u teoriji brojeva.

Slika 1.2: Bernhard Riemann

Funkcija kompleksne varijable s, naziva Riemannova zeta funkcija, definirana je kao

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Euler je prvi otkrio neka svojstva zeta funkcije, izveo formulu kojom se izračunava zeta funkcija za parne brojeve pomoću Bernoullijevih brojeva, no on je smatrao da je to funkcija isključivo realne varijable, dok je Riemann uzimao kompleksnu varijablu s.

Ta funkcija konvergira za sve realne $s > 1$, a divergira za sve realne $s \leq 1$. Primijetimo da nam je zeta funkcija za $s = 1$ dobro poznata

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

naime, radi se o harmonijskom redu koji divergira, te je njegova vrijednost $+\infty$. Za $s = 2$ dobivamo

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

i ovo je red koji konvergira. U prethodnoj sumi prepoznajemo da se radi o Baselskom problemu, te iz toga proizlazi da je Riemannova zeta funkcija ζ generalizacija Baselskog problema.

1.2 Eulerov dokaz

Prije samog dokaza iskazat ćemo nekoliko teorema i definicija koje će biti korištene u dokazu.

Teorem 1.2.1. *(D'Alembertov kriterij konvergencije) Neka je* (a_n) *niz kompleksnih brojeva tako da je* $a_n \neq 0$ *za sve* n.
(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \langle 0, 1\rangle$ *takvi da je* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$, $\forall n \geq m$, *tada red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira.*
(ii) Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ *takav da je* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, $\forall n \geq m$, *tada red* $\sum a_n$ *divergira.*

Korolar 1.2.2. *Neka je* (a_n) *niz kompleksnih brojeva različitih od* 0 *takav da postoji* $L = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. *Vrijedi sljedeće*

- *ako je* $L < 1$ *tada red* $\sum a_n$ *apsolutno konvergira,*
- *ako je* $L > 1$ *tada red* $\sum a_n$ *divergira.*

Teorem 1.2.3. *(i) Neka funkcija* f *ima derivaciju reda* $n + 1$ *na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Tada za proizvoljnu točku* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *i za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$ *vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

gdje je

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{n+1}(\theta)$$

za neki θ *koji leži između točaka* x *i* x_0.
(ii) Neka funkcija f *ima derivacije proizvoljnog reda na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Tada za proizvoljnu točku* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *i za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$ *vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.1}$$

ako i samo ako niz ostataka $(R_{n+1}(x))$ *teži k nuli za svaki* $x \in \langle a, b\rangle$.

Red potencija (1.1) naziva se Taylorov red ili Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0. Taylorov razvoj u točki $x_0 = 0$ zove se MacLaurinov razvoj,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle. \tag{1.2}$$

Euler je u svom pristupu Baselskom problemu krenuo od Maclaurinovog razvoja funkcije sinus

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Konvergencija ovog reda se lako provjeri pomoću D'Alembertovog kriterija konvergencije jer za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}}{\frac{|x^{2n-1}|}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = 0.$$

Euler je došao na ideju da bi mogao funkciju sinus interpretirati kao polinom beskonačnog stupnja. Poznato nam je da svaki polinom n-tog stupnja možemo na jedinstven način prikazati kao produkt n linearnih faktora. (Uzmimo kao primjer kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, gdje su r_1 i r_2 nultočke od f.) Stoga je Euler želio prikazati funkciju sinus kao polinom

$$\sin x = ax(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \ldots \tag{1.4}$$

gdje su $r_i = i\pi, i \in \mathbb{Z}$ nultočke funkcije sinus. Očito je $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = \infty$, kao i $\lim\limits_{i\to\infty}(x - r_i) = \infty$ što je kontradiktorno s (1.4). Slijedi da prikaz u obliku produkta linearnih faktora nije tako jednostavan, potrebno je preinačiti i nadograditi jednakost (1.4). Ukoliko podijelimo svaki faktor, osim r_0, s $-r_i$, dobivamo sljedeće

$$\sin x = ax\left(1 - \frac{x}{r_1}\right)\left(1 - \frac{x}{r_2}\right)\left(1 - \frac{x}{r_3}\right)\ldots$$

Ovakvim modificiranjem imamo $\lim\limits_{i\to\infty}(1 - \frac{x}{r_i}) = 1$, te će biti ispunjen nužan uvjet konvergencije. Uvrstimo li vrijednosti $r_i = i\pi, i \in \mathbb{Z}$, promatranu funkciju možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \sin x &= ax\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\ldots \\ &= ax \prod_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi n}\right). \end{aligned}$$

Promotrimo sada zasebno produkte $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x}{n\pi})$ i $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{x}{n\pi})$ i primijenimo formulu za razliku kvadrata, nakon čega imamo

$$\sin x = ax \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right). \tag{1.5}$$

Sada je izraz s desne strane jednakosti (1.5) prikaz funkcije sinus u obliku polinoma. Nadalje, treba odrediti faktor a. Ukoliko podijelimo obje strane izraza (1.5) sa x, imat ćemo

$$\frac{\sin x}{x} = a \prod_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right), \quad x \neq 0$$

odakle je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = a \lim_{x\to 0} \prod_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

pa je $a = 1$. Slijedi da je

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots = x\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 n^2} + \ldots\right)$$

Uspoređivanjem s (1.5) te izjednačavanjem izraza uz x^3 dobivamo

$$-x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 n^2} = -\frac{x^3}{3!}.$$

Odavde za $x = 1$ dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.6}$$

Jednakost (1.6) je upravo ono što tražimo, rješenje Baselskog problema. Ovaj dokaz je temeljen na Eulerovom pristupu, no nije identičan njegovom. Euler je prva osoba koja je uspjela dokazati da vrijedi formula (1.6). Kako se u Eulerovom dokazu koriste i nedokazane tvrdnje, matematičari su se njime bavili u godinama nakon objave. Ipak, njegov dokaz se uzima kao prvi valjani dokaz, gdje je kroz nekoliko (ne jako kompliciranih) koraka uspio doći do rješenja Baselskog problema, no nije potpun.

Osvrnimo se na još jedan način Eulerovog dokaza. U godinama nakon objave dokaza, najviše polemika vodilo se oko toga što je Euler red potencija interpretirao kao polinom beskonačnog stupnja. Danas je jasno da red potencija nije polinom i ne dijeli sva svojstva polinoma, no Euler svojedobno nije obraćao pažnju na to. Eulerove pretpostavke su bile točne, njemu intuitivno jasne, no za današnje pojmove "intuitivno" nije dovoljno.

U jednom od svojih dokaza, Euler je jednakost (1.3) podijelio s x te x zamijenio s $\sqrt{x}$ i dobio

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} - \ldots$$

Nultočke ove funkcije su $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$ Euler je primijenio svojstvo polinoma

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_n} = -\frac{a_1}{a_0}$$

i dobio

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots = \frac{1}{6}.$$

Zatim je pomnožio sve s π^2 i dobio traženo rješenje Baselskog problema.

Kako bismo pokazali da se ne može uvijek koristiti prikazano svojstvo, promotrimo pobliže funkciju

$$g(x) = 2 - \frac{1}{1-x}.$$

Očito, $x = \frac{1}{2}$ je jedina nultočka funkcije g. No, $g(x)$ možemo zapisati na sljedeći način

$$g(x) = 2 - \frac{1}{1-x} = 2 - (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = 1 - x - x^2 - x^3 - \ldots$$

Time smo razvili funkciju g u red potencija. Uočimo da ipak ne vrijedi svojstvo polinoma za red potencija jer $a_0 = 1, a_1 = -1$, a

$$2 = \frac{1}{r_1} \neq -\frac{a_1}{a_0} = 1.$$

Funkcija g je samo jedan od primjera koji pokazuju da pravilo ne možemo primjenjivati na bilo kojem redu potencija. Zašto smo ga onda mogli primijeniti na $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$? Razlika između f i g je u konvergenciji redova potencija. Kao što možemo primijetiti, funkcija f se razvije u red potencija koji konvergira za svaki x, a red potencija za g konvergira samo za $-1 < x < 1$. Općenito pravilo kojim bi mogli provjeriti možemo li primijeniti svojstva polinoma nije poznato.

Poglavlje 2

Još neki dokazi

2.1 Dokaz pomoću Fourierovih redova

Za početak, mali uvod u Fourierove redove. Fourierov red periodičnu funkciju pretvara u sumu jednostavnih oscilatornih funkcija, sinusa i kosinusa.

Definicija 2.1.1. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodom L. Fourierov red funkcije f je red oblika*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right),$$

gdje su

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\left(\frac{2n\pi y}{L}\right)dy, \quad n \geq 0,$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{2n\pi y}{L}\right)dy, \quad n \geq 1.$$

Brojeve a_n i b_n nazivamo Fourierovi koeficijenti funkcije f.

Za dokaz Baselskog problema krenimo od funkcije $f(x) = |x|$. Promotrimo je na intervalu od $-\pi$ do π. Zanima nas Fourierov red funkcije f. Prvo izračunajmo Fourierove koeficijente

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot 1 dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -x dx + \int_0^{\pi} x dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \pi,$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)dx \\
&= \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) = \left|nx = u, dx = \frac{du}{n}\right| \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left(-\int_0^{\pi}\sin(u)du\right) = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(u)\Big|_0^{\pi}) = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1) \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, \\ \frac{-4}{n^2\pi}, & n \text{ neparan}. \end{cases} \\
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin\left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right)dx = 0.
\end{aligned}
$$

Koeficijenti b_n su jednaki nuli jer se radi o integralu neparne funkcije na intervalu $[-\pi, \pi]$. Preostaje nam uvrstiti koeficijente u Fourierov red i vidjeti kako nam to može pomoći u rješavanju Baselskog problema. Prije svega, znamo da je $f(0) = 0$ i da je $a_n = 0$ za parne n-ove, pa će u raspisivanju Fourierovog reda članovi s parnim n-ovima biti jednaki nuli. Također, koristit ćemo vrijednost funkcije kosinus u nuli, $\cos(0) = 1$. Promotrimo

$$
\begin{aligned}
|x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{2\pi}\cdot x\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(a_{2k+1}\cos((2k+1)\cdot x)) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{n^2\pi}\cdot\cos((2k+1)\cdot x)\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots).
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo

$$
0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) \tag{2.1}
$$

odakle slijedi da suma recipročnih kvadrata neparnih cijelih brojeva iznosi

$$
\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.
$$

Preostaje odrediti zbroj recipročnih kvadrata parnih prirodnih brojeva

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}+\ldots &= \frac{1}{(2\cdot 1)^2}+\frac{1}{(2\cdot 2)^2}+\frac{1}{(2\cdot 3)^2}+\ldots+\frac{1}{(2\cdot n)^2}+\ldots\\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

odakle je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Fourierov red i slične sume

Pomoću Fourierovih redova se mogu riješiti mnogi slični problemi. Uzmimo za primjer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Navedena suma je poopćenje Baselskog problema. Da bismo izračunali točnu vrijednost sume, funkciju $f(x)=x^2$ za $-\pi\le x\le\pi$ razvijemo u Fourierov red.

Fourierove koeficijente izračunamo analogno kao za Baselski problem. Dobivamo

$$a_0=\frac{2\pi^2}{3},\quad a_n=\begin{cases}\frac{4}{n^2}, & n \text{ paran},\\ \frac{-4}{n^2}, & n \text{ neparan}\end{cases},\quad b_n=0.$$

Odavde slijedi

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\Big(\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x-\ldots\Big).$$

Uvrstimo $x=0$

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

te smo dobili točnu vrijednost sume $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Zanimljiv je još jedan sličan problem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Za potrebe ove sume ponovno promotrimo funkciju $f(x)=x^2$. Fourierov red bit će jednak kao za prethodnu sumu, stoga ovaj put nije dovoljan samo Fourierov red. Kod rješavanja takvih problema ponekad se koristi još i Parsevalov identitet. Ako su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti, onda vrijedi Parsevalov identitet

$$\frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Uvrstimo koeficijente a_n i b_n

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

iz čega slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2.2 Dokaz preko teleskopskih redova

Definicija 2.2.1. *Teleskopski red je red oblika*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}),$$

gdje je (b_k) *niz realnih brojeva.*

Ono što je važno uočiti za dokaz preko teleskopskih redova je da n-ta parcijalna suma iznosi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Prije dokaza Baselskog problema uvjerimo se na jednostavnijem primjeru da nam teleskopski redovi mogu pomoći kod određivanja vrijednosti beskonačne sume. Promotrimo red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots$$

Očito, $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Upotrebom parcijalnih razlomaka dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right).$$

Promotrimo n-tu parcijalnu sumu

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j+2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Zaključujemo da je red konvergentan i $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Dokaz Baselskog problema preko teleskopskih redova je malo kompliciraniji i ne sasvim analogan. Ideja ovog dokaza je promotriti dva niza te uočiti njihovu povezanost, a onda ih prikazati kao teleskopski red.

Neka su

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Za početak promotrimo relaciju između A_n i A_{n-1}. Na prvi pogled ne može se uočiti povezanost, no pokušajmo integrirati niz A_n. Koristit ćemo parcijalnu integraciju i identitet $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^{2n-1} x dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos^{2n-1} x & dv = \cos x dx \\ du = (2n-1)\cos^{2n-2} x \cdot (-\sin x) dx & v = \sin x \end{array} \right| \\ &= \cos^{2n-1} x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\cos^{2(n-1)} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{2(n-1)} x dx \\ &= (2n-1) \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \Big) \\ &= (2n-1)(A_{n-1} - A_n). \end{aligned}$$

Iz prethodnog računa možemo zaključiti da je

$$2nA_n = (2n-1)A_{n-1},$$

odnosno

$$\frac{A_n}{2n-1} = \frac{A_{n-1}}{2n}. \tag{2.2}$$

Nadalje, promotrimo A_n i B_n za $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \\
&= \begin{vmatrix} u = \cos^{2n} x & dv = dx \\ du = 2n\cos^{2n-1} x \cdot (-\sin x) dx & v = x \end{vmatrix} \\
&= x\cos^{2n} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx \\
&= \begin{vmatrix} u = \sin x \cos^{2n-1} x & dv = x dx \\ du = \cos^{2n} x - (2n-1)\sin^2 x \cdot \cos^{2n-2} x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} \\
&= 2n\Big[\frac{x^2}{2} \cdot \sin x \cdot \cos^{2n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2} \cdot \big((2n-1)\sin^2 x \cdot \cos^{2n-2} x - \cos^{2n} x\big) dx\Big] \\
&= 0 + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot (2n-1) \cdot (1-\cos^2 x) \cdot \cos^{2n-2} x dx - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos^{2n} x dx \\
&= 2n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2(n-1)} x dx - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2(n-1)} x dx - 2n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx + \\
&\quad n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx \\
&= -2n^2 n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx + n(2n-1)n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2(n-1)} x dx \\
&= -2n^2 B_n + n(2n-1) B_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dakle, za sve $n \geq 1$ imamo

$$A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2 B_n,$$

odakle dijeljenjem s $n^2 A_n$ dobivamo

$$\frac{1}{n^2} = \frac{(2n-1)B_{n-1}}{nA_n} - \frac{2B_n}{A_n}$$

te korištenjem jednakosti (2.2) imamo

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{2B_n}{A_n}. \tag{2.3}$$

Odavde slijedi da se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ može napisati kao teleskopski red $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ gdje je $b_k = \frac{2B_n}{A_n}$. Imamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2B_{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{2B_k}{A_k} \right) = \frac{2B_0}{A_0} - \frac{2B_n}{A_n}.$$

Izračunajmo A_0 i B_0

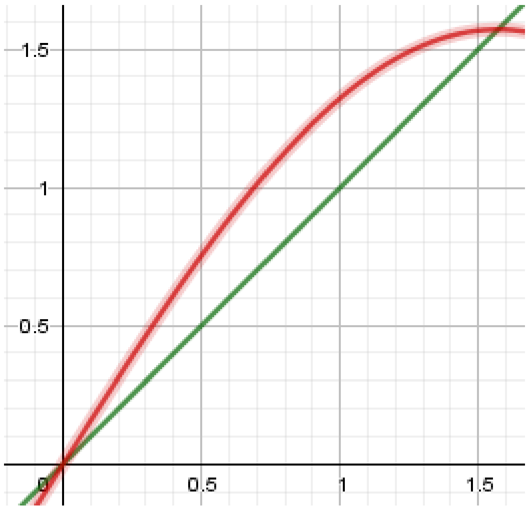
$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$B_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{8\cdot 3} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Sada za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2B_n}{A_n}, \tag{2.4}$$

odakle slijedi $\frac{\pi^2}{6} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, za sve $n \geq 1$.

Sada ćemo promotriti dvije funkcije kako bismo procijenili vrijednost izraza $\frac{2B_n}{A_n}$. Promatramo linearnu funkciju $f(x) = x$ i trigonometrijsku funkciju $g(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$. Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ one se sijeku samo u točkama $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$, funkcija g je konkavna (slika 2.1), pa vrijedi



Slika 2.1: Grafovi funkcija $f(x) = x$ i $g(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$

$$x \leq \frac{\pi}{2}\sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

i prema tome

$$x^2 \cos^{2n} x \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x \cos^{2n} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Odavde je

$$
\begin{aligned}
0 \le B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx \le \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n} x dx \\
&= \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)} x dx \right) = \frac{\pi^2}{4}(A_n - A_{n+1}) \\
&\overset{(2.2)}{=} \frac{\pi^2}{4}(A_n - \frac{2n+1}{2(n+1)} A_n) = \frac{\pi^2}{8(n+1)} A_n.
\end{aligned}
$$

Prethodna nejednakost i jednakost (2.4) daju sljedeće

$$
0 \le \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{2B_n}{A_n} \le \frac{\pi^2}{4(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},
$$

odakle slijedi

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) = 0,
$$

to jest $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.3 Dokaz pomoću trigonometrije i algebre

Ovaj dokaz pripada modernijim dokazima Baselskog problema. Temeljen je na posebnom trigonometrijskom identitetu koji će biti iskazan i dokazan prije samog dokaza Baselskog problema.

Lema 2.3.1. *Za zadani $m \in \mathbb{N}$ neka je $\omega = \frac{\pi}{2m+1}$. Tada vrijedi*

$$\operatorname{ctg}^2 \omega + \operatorname{ctg}^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 3\omega + \ldots + \operatorname{ctg}^2 m\omega = \frac{m(2m-1)}{3}. \tag{2.5}$$

Dokaz. Neka je $n = 2m+1$. Ako je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom n-tog stupnja, onda iz Vièteovih formula slijedi da je suma svih korijena polinoma jednaka negativnom kvocijentu koeficijenta uz x^n i koeficijenta uz x^{n-1}, to jest $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Krenimo od izraza za $\sin n\theta$:

$$\begin{aligned}\sin n\theta &= \binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta + \ldots \pm \sin^n\theta \\ &= \sin^n\theta \cdot \left(\binom{n}{1}\operatorname{ctg}^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\operatorname{ctg}^{n-3}\theta + \ldots \pm 1\right)\end{aligned}$$

dobivenog preko de Moivreove formule $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ tako da lijevu stranu navedene formule raspišemo binomnim poučkom te izjednačimo imaginarne dijelove obiju strana jednakosti. Ako je $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tada možemo prethodni izraz podijeliti sa $\sin^n\theta$, odakle dobijemo

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta} = \binom{n}{1}\operatorname{ctg}^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\operatorname{ctg}^{n-3}\theta + \ldots \pm 1. \tag{2.6}$$

Neka je $p(x) = \binom{n}{1}x^m - \binom{n}{3}x^{m-1} + \ldots \pm 1$. Tada je $p(\operatorname{ctg}^2\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta}$. Zato za $k = 1, \ldots, m$

$$p(\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^n\frac{k\pi}{n}} = 0, \quad k = 1, \ldots, m$$

što znači da su $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}, \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{n}, \ldots, \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{n}$ nultočke polinoma p. Kako su $\frac{k\pi}{n}, k = 1, \ldots, m$ nultočke, a $x \mapsto \operatorname{ctg}^2 x$ je strogo rastuća funkcija na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, slijedi da su $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}, \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{n}, \ldots,$ $\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{n}$ međusobno različite nultočke polinoma p. S obzirom da je p polinom stupnja m, ovo su sve nultočke od p. Prema Vièteovim formulama, suma svih nultočaka polinoma p jednaka je:

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{n} = -\frac{-\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}.$$

Kako je $n = 2m + 1$ i $\omega = \frac{\pi}{2m+1}$ slijedi

$$\operatorname{ctg}^2 \omega + \operatorname{ctg}^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 3\omega + \ldots + \operatorname{ctg}^2 m\omega = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

$\square$

Također, u dokazu ćemo koristiti Teorem o sendviču:

Teorem 2.3.2. *Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi realnih brojeva takvi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq m.$$

Ako (a_n) i (c_n) konvergiraju prema istom realnom broju $L \in \mathbb{R}$, onda je i (b_n) konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

Krenimo sada na dokaz Baselskog problema. Za sve $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijedi

$$0 < \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

Kvadriranjem dobijemo

$$\sin^2 x \leq x^2 \leq \operatorname{tg}^2 x,$$

odakle je

$$\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Kako je $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$ dobivamo

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x \geq \frac{1}{x^2} \geq \operatorname{ctg}^2 x.$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $\omega = \frac{\pi}{2m+1}$. Uvrstimo umjesto x redom $\omega, 2\omega, \ldots, m\omega$ i dobijemo niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}^2 \omega &\leq \frac{1}{\omega^2} \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 \omega, \\
\operatorname{ctg}^2 2\omega &\leq \frac{1}{(2\omega)^2} \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 2\omega, \\
\operatorname{ctg}^2 3\omega &\leq \frac{1}{(3\omega)^2} \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 3\omega, \\
&\cdots \\
\operatorname{ctg}^2 m\omega &\leq \frac{1}{(m\omega)^2} \leq 1 + \operatorname{ctg}^2 m\omega.
\end{aligned}$$

Sada zbrojimo te nejednakosti i primijenimo identitet (2.5)

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 3\omega + \ldots + \operatorname{ctg}^2 m\omega &\le \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{4\omega^2} + \frac{1}{9\omega^2} + \ldots + \frac{1}{m^2\omega^2} \\ &\le m\cdot 1 + \operatorname{ctg}^2\omega + \operatorname{ctg}^2 2\omega + \operatorname{ctg}^2 3\omega + \ldots + \operatorname{ctg}^2 m\omega,\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{m(2m-1)}{3} \le \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2}\right) \le m + \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Pomnožimo sve s ω^2, pritom imajući na umu da je $\omega = \frac{\pi}{2m+1}$, te dobijemo

$$\frac{m(2m-1)}{3}\cdot\omega^2 \le \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2} \le m\cdot\omega^2 + \frac{m(2m-1)}{3}\cdot\omega^2$$

odnosno

$$\frac{m(2m-1)}{3}\cdot\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} \le \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{m^2} \le m\cdot\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{m(2m-1)}{3}\cdot\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{(2m^2-m)\cdot\pi^2}{3\cdot(4m^2+4m+1)} &= \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{\pi^2}{6}, \\ \lim_{m\to\infty}\frac{(2m^2-m)\cdot\pi}{3\cdot(4m^2+4m+1)} + \lim_{m\to\infty}\frac{m\pi^2}{4m^2+4m+1} &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

to prema teoremu 2.3.2 slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.4 Dokaz preko dvostrukih integrala

Krenut ćemo od teorema koji će nam koristiti u dokazu:

Teorem 2.4.1. *Neka je zadan integral*

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

i neka je funkcija f neprekidna i integrabilna na skupu D. Neka je $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka su $\alpha, \beta : D' \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije za koje je preslikavanje $p : D' \to D$ definirano s

$$p(u,v) = (\alpha(u,v), \beta(u,v))$$

bijekcija. Ako je Jakobijan

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall (u,v) \in D',$$

onda je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\alpha(u,v), \beta(u,v))|J|dudv.$$

Teorem 2.4.2. *Neka je $f : P \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija definirana na pravokutniku $P = [a,b] \times [c,d]$. Tada je*

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx \Big) dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy \Big) dx.$$

U ovom pristupu Baselskom problemu kreće se od integrala

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dxdy. \tag{2.7}$$

Njega lako izračunamo primjenom teorema 2.4.2

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy = \int_0^1 y^{n-1}\left(\frac{x^n}{n}\bigg|_0^1 \right)dy = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{n-1}dy = \frac{1}{n}\left(\frac{y^n}{n}\bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{n^2}.$$

Promotrimo sumu prethodnog izraza pritom imajući na umu da $\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}$ konvergira za $|xy| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}y^{n-1}dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}dxdy.$$

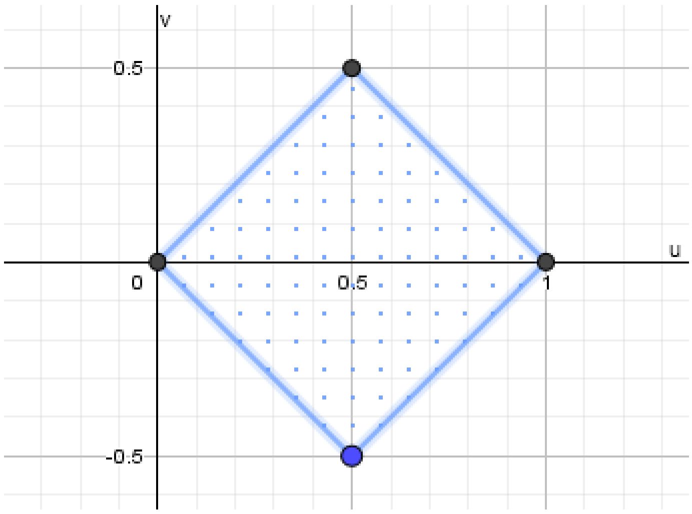
Označimo traženi integral s I. Sada ćemo uvesti supstituciju varijabli

$$(u, v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

odakle je

$$(x, y) = (u - v, u + v).$$

Pritom se prvotni kvadrat na kojem smo promatrali dvostruki integral transformira u kvadrat S s vrhovima u $(0,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (slika 2.2). Preostaje nam još izračunati



Slika 2.2: Područje integracije

Jakobijan kako bismo mogli primijeniti teorem 2.4.1. Imamo

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

pa je integral nakon supstitucije jednak

$$I = 2 \iint_S \frac{dudv}{1 - u^2 + v^2}.$$

Zbog simetrije kvadrata s obzirom na u-os te izraza podintegralne funkcije možemo promatrati dvostruku površinu ispod grafa funkcije koji se nalazi iznad u-osi. Izračunat ćemo integral dijela omeđenog s u-osi od 0 do $\frac{1}{2}$ te pravcem $v = u$ i površinu dijela omeđenog s u-osi od $\frac{1}{2}$ do 1 te pravcem $v = 1 - u$.

$$\begin{aligned}
I &= 2\Big(2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^u \frac{dvdu}{1-u^2+v^2} + 2\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{1-u}\frac{dudv}{1-u^2+v^2}\Big) \\
&= \left\{a = \sqrt{1-u^2}, \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right\} \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^u du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^{1-u} du \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}du.
\end{aligned}$$

Ako je $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$, tada je

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-u}{1+u}.$$

Nadalje, imamo

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{1-u}{1+u} = \frac{2}{1+u},$$

odakle je

$$u = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

to jest

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos u = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u.$$

Uz prethodno navedene jednakosti, koristit ćemo trigonometrijski identitet $\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin u}{2}\right)du \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du - 2\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du \\
&= \Big| x = \arcsin u, u = \sin x, du = \cos x dx \Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx + \pi \arcsin u\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\cos x}dx + \pi\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Big) - 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\cos x}dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} xdx + \frac{\pi^2}{3} - 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} xdx \\
&= 4\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi^2}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\cdot\frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{36} \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

Dakle, još jednom smo došli do rješenja Baselskog problema

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.5 Dokaz uz interpretaciju pomoću svjetlosti

Posljednji dokaz u ovom radu je dokaz uz interpretaciju koja pruža vizualni uvid u rješenje Baselskog problema, a temeljen je na spoznajama i objašnjenjima iz područja matematike i fizike.

Recipročni kvadrati javljaju se kod svjetlosti, osvjetljenost mjesta gledišta proporcionalna je recipročnom kvadratu svoje udaljenosti do zvijezde. Tvrdimo da vrijedi jednakost

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2.8}$$

Lako se vidi da je suma recipročnih kvadrata parnih brojeva jednaka četvrtini sume recipročnih kvadrata svih prirodnih brojeva odakle slijedi da suma recipročnih kvadrata neparnih brojeva iznosi tri četvrtine sume kvadrata svih prirodnih brojeva. Zato je dovoljno dokazati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

odnosno

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}. \tag{2.9}$$

Jednakost (2.9) je ekvivalentna s

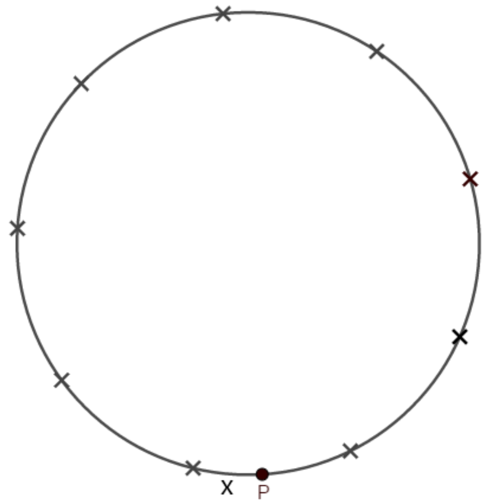
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = \pi^2, \tag{2.10}$$

Prema tome, da bismo riješili Baselski problem, dovoljno je dokazati jednakost (2.10). Zamijenimo li broj $\frac{1}{2}$ realnim brojem x, gdje x nije cijeli broj dobivamo generalizaciju jednakosti (2.10) te ćemo nju dokazati.

Teorem 2.5.1. *Ako je $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, onda vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2. \tag{2.11}$$

Vratimo se sada na ranije spomenutu svjetlost zvijezda. Promotrimo sustav od N zvijezda jednakog sjaja, jednoliko raspoređenih na kružnici kao na slici 2.3. Ako je udaljenost između susjednih zvijezda na kružnici 1, tada je opseg kružnice jednak N, a promjer $\frac{N}{\pi}$. Analogno, kada bi promatrali sustav od $2N$ zvijezda, tada bi imali kružnicu opsega $2N$ i promjera $\frac{2N}{\pi}$.



Slika 2.3: Kružni sustav od $N = 9$ zvijezda

Zanima nas količina svjetlosti koja dopire do proizvoljne točke P. Količina svjetlosti koja se prima u bilo kojoj točki kružnice jednaka je sumi recipročnih kvadrata udaljenosti do pojedinih zvijezda. Neka je x udaljenost točke P do jedne zvijezde mjerena duž kružnice, odnosno duljina kružnog luka od točke P do zvijezde. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je to najbliža zvijezda točki P, to jest, gledamo najkraću od svih udaljenosti točke P do zvijezda, pa vrijedi $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Definiramo funkciju $f_N(x)$ kao funkciju količine svjetlosti primljene u proizvoljnoj točki P u sustavu s N zvijezda, pri čemu je udaljenost najbliže zvijezde do točke P jednaka x. Želimo odrediti $f_N(x)$ za svaki N. Za potrebe ovog dokaza bit će dovoljno gledati N kao potenciju s bazom 2. Promotrimo prvo slučaj kada je $N = 1$, to jest, slučaj kada se nalazimo u sustavu s jednom zvijezdom.

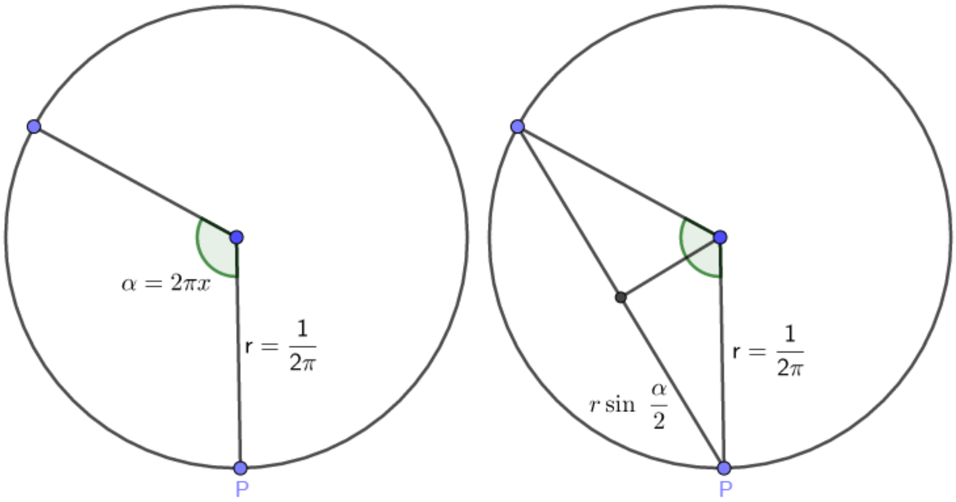
Lema 2.5.2. *Količina svjetlosti koju prima proizvoljna točka P kružnice u sustavu s jednom zvijezdom jednaka je*

$$f_1(x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2,$$

gdje je x duljina kraćeg kružnog luka od točke P do zvijezde.

Dokaz. Opseg kružnice je 1, a radijus $\frac{1}{2\pi}$. Slijedi da je duljina kružnog luka $x = r\alpha$ iz čega slijedi $\alpha = 2\pi x$. Udaljenost točke P do zvijezde duž ravne linije (slika 2.4) je

$$2r \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\pi} \sin \pi x,$$

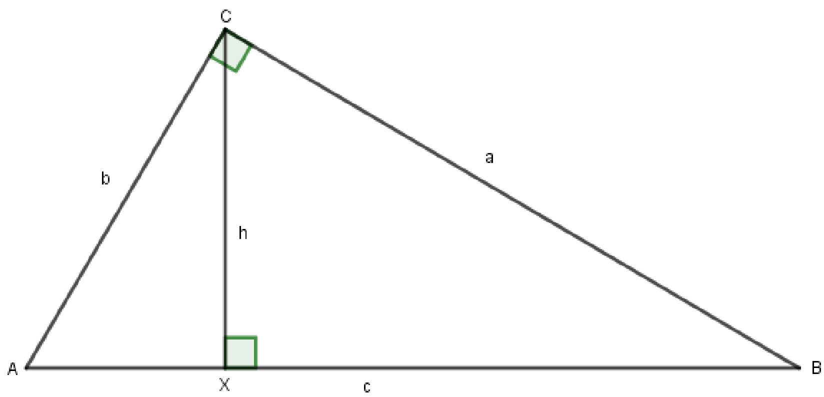


Slika 2.4: Kružni sustav od jedne zvijezde

pa slijedi $f_1(x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2$. □

Dalje ćemo koristiti inverzni Pitagorin teorem, no u terminima primljene svjetlosti zvijezda. On glasi:

Propozicija 2.5.3. *Ako su dvije zvijezde smještene u točkama A i B i točka C je takva da je $\measuredangle ACB$ pravi, onda je ukupna količina svjetlosti u točki C dobivena iz točaka A i B jednaka količini svjetlosti koja se dobiva iz zvijezde u točki X koja je projekcija točke C na pravac AB.*



Slika 2.5: Inverzni Pitagorin teorem

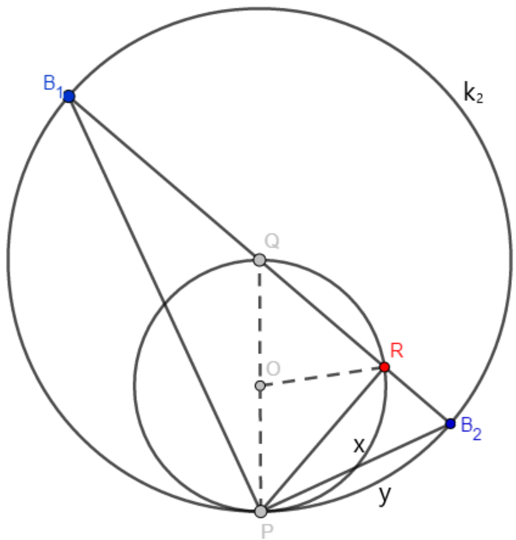
Dokaz. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta ABC i h udaljenost točke C do točke X. Površina trokuta ABC može se izračunati na dva načina $P = \frac{a \cdot b}{2}$ i $P = \frac{c \cdot h}{2}$, iz toga slijedi $a \cdot b = c \cdot h$. Iz Pitagorina teorema imamo $a^2 + b^2 = c^2$, stoga slijedi da je količina svjetlosti primljena u točki C jednaka

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{c^2 h^2} = \frac{1}{h^2}$$

što je jednako upravo količini svjetlosti primljene u točku C iz točke X. □

Koristeći Propoziciju 2.5.3 dokazat ćemo da je za fiksiranu duljinu kružnog luka x količina svjetlosti primljena u točku P u sustavu s 2 zvijezde jednaka količini svjetlosti primljene u točku P u sustavu s jednom zvijezdom.

Lema 2.5.4. *Neka je P točka na kružnici u sustavu s jednom zvijezdom i x duljina kraćeg kružog luka od točke P do zvijezde. Količina svjetlosti koju prima točka P u sustavu s jednom zvijezdom jednaka je količini svjetlosti koju prima točka u sustavu s dvije zvijezde, čija je udaljenost duž kružnice do najbliže zvijezde jednaka x, to jest, vrijedi $f_1(x) = f_2(x)$.*



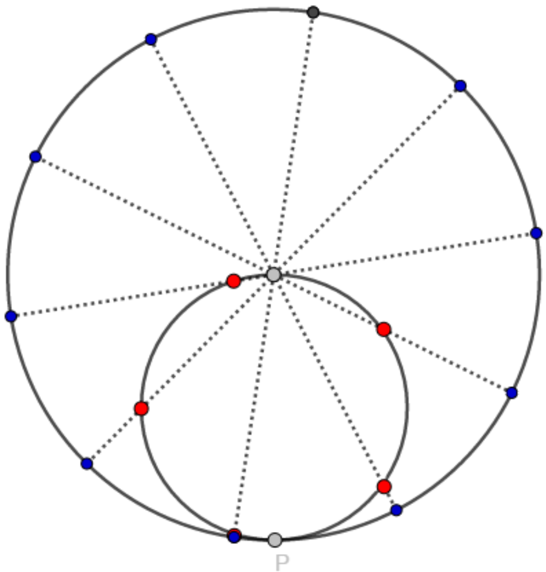
Slika 2.6: Zamjena jedne zvijezde dvjema zvijezdama

Dokaz. Neka je R položaj zvijezde u sustavu s jednom zvijezdom (crvena zvijezda, slika 2.6) i neka je Q točka dijametralno suprotna točki P u kružnici tog sustava. Neka je k_2 kružnica oko Q radijusa $|PQ|$. Povucimo promjer kružnice k_2 kroz točku R, neka su B_1, B_2 rubne točke. Očito, k_2 ima opseg 2 i kružni luk između točaka B_1 i B_2 je duljine 1.

Kutni pomak od P do B_2 u sustavu s dvije zvijezde jednak je kutu $PQB_2 = PQR = \alpha$ te iz teorema o obodnom kutu slijedi $\measuredangle PQB_2 = \frac{1}{2}\measuredangle POR$. Slijedi da je $x = \widehat{PR} = 2\alpha \cdot r$ i $y = \widehat{PB_2} = \alpha \cdot 2r$, te je očito $x = y$.

Nadalje, $\overline{PQ}$ je promjer manje kružnice, a $\overline{B_1B_2}$ veće, pa zaključujemo da su kutovi $\measuredangle QRP$ i $\measuredangle B_2PB_1$ pravi. Primijenimo propoziciju 2.5.3 i dobivamo da je količina svjetlosti koju prima točka P iz zvijezde R jednaka količini svjetlosti primljenoj iz zvijezda smještenih u točkama B_1 i B_2. □

Lema 2.5.5. *Za sve N i x vrijedi $f_N(x) = f_{2N}(x)$.*



Slika 2.7: Prelazak iz sustava s N zvijezda na sustav s $2N$

Dokaz. Zamijenimo svaku zvijezdu u sustavu s N zvijezda (crvene) s parom suprotnih zvijezda (plave) u sustavu s $2N$ zvijezda kao na slici 2.7. Nova kružnica ima dvostruko veći opseg nego početna te udaljenosti između plavih zvijezda iznose 1. Promotrimo li jednu crvenu zvijezdu, možemo vidjeti da na jednak način kao i u slučaju kad je $N = 1$, kutni pomak ostaje isti prelaskom na plavi model. Ponovnom primjenom propozicije 2.5.3, slijedi da svaki par suprotnih plavih zvijezda daje jednaku količinu svjetlosti u točku P kao i crvena zvijezda koju one zamjenjuju. Slijedi da sve plave zvijezde zajedno imaju istu svjetlost kao sve crvene zvijezde zajedno. □

Primjenjujemo li prethodnu lemu počevši od $N = 1$, možemo zaključiti da je $f_N(x)$ jednak desnoj strani jednakosti (2.11) kada je N potencija s bazom 2.

Propozicija 2.5.6. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$f_{2^N}(x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2.$$

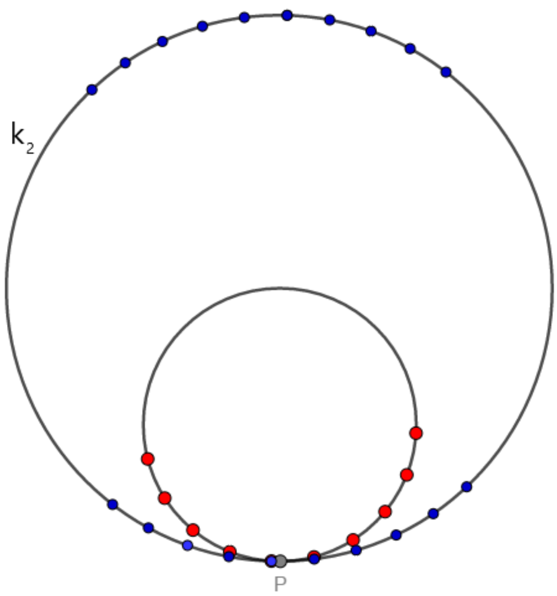
Zasad smo povezali $f_N(x)$ s desnom stranom jednakosti (2.11). Preostaje nam pokazati da je $f_N(x)$ funkcija bliska i lijevoj strani jednakosti (2.11). Počnimo sa sustavom od $2N$ zvijezda i fiksiranim kružnim lukom x te odredimo približnu vrijednost funkcije $f_{2N}(x)$.

Kružnica, odnosno kružna putanja na kojoj je $2N$ zvijezda, ima radijus $\frac{N}{\pi}$. Podijelimo kružnicu na dva jednaka kružna luka te ostavimo N zvijezda koje su bliže točki P, a ostalih N uklonimo. Sada će se kod procjene funkcije $f_N(x)$ pojaviti greška u točnoj procjeni vrijednosti zbog uklanjanja N zvijezda.

Svaka od tih zvijezda je bila na udaljenosti ne manjoj od $\frac{N\sqrt{2}}{\pi}$ od P , no nama je dovoljno uzeti grubu granicu od $\frac{N}{\pi}$, te će greška iznositi najviše

$$N \cdot \frac{1}{\left(\frac{N}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{N}.$$

Sada svaku od preostalih N zvijezda (slika 2.8, crvene zvijezde) zamijenimo parom su-



Slika 2.8: Zamjena crvenih zvijezda plavima

protnih zvijezda na kružnici k_2 dvostrukog radijusa. Nalazimo se u sustavu $4N$ zvijezda, ali imamo samo $2N$ zvijezda od kojih se N njih nalazi u četvrtini kružnice gdje je točka P, a preostalih N u četvrtini kružnice koja je najdalja točki P. Ponovimo postupak od prije, uklonimo ponovno N zvijezda, te će greška procjene sada biti najviše

$$N \cdot \frac{1}{\left(\frac{2N}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4N}$$

jer je radijus $r = \frac{2N}{\pi}$.

Zatim zamijenimo ponovno N zvijezda iz $4N$ sustava s $2N$ zvijezda u novom dvostruko većem sustavu. Ponavljamo postupak i u svakom idućem koraku imamo $2N$ zvijezda u $2^k \cdot (2N)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sustavu zvijezda, N zvijezda koje se nalaze u dijelu kružnice najdaljem od P i N u dijelu najbližem točki P. Uklanjanje N zvijezda uzrokuje grešku procjene približnu $\frac{\pi^2}{4^k N}$ s obzirom da radijus postaje $2^k \frac{N}{\pi}$.

Neka je t tangenta u točki P na sve kružnice. Kada $k \longrightarrow \infty$, N zvijezda najbližih točki P će se približiti točkama tangente, te će im koordinate biti na $n - x$ udaljenosti do točke P duž te tangente. Možemo zaključiti da će onda osvjetljenost točke P iz tih N zvijezda težiti k

$$\sum_{|n-x|<\frac{N}{2}} \frac{1}{(n-x)^2}.$$

Ukupna greška procjene iz postupaka bit će najviše

$$\frac{\pi^2}{N} + \frac{\pi^2}{4N} + \frac{\pi^2}{16N} + \ldots = \frac{\pi^2}{N} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{4\pi^2}{3N}.$$

S obzirom da vrijedi $f_N(x) = f_{2N}(x)$, zaključujemo da za svaki N vrijedi

$$f_N(x) = \sum_{|n-x|<\frac{N}{2}} \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{\theta}{N}, \tag{2.12}$$

gdje θ ovisi o N, ali zadovoljava $0 \leq \theta \leq \frac{4\pi^2}{3}$. Na kraju, znamo da je $f_{2^k N}(x) = f_N(x)$, pa primijenimo jednakost (2.12) za $2^k N$, dobivamo da za svaki N vrijedi

$$f_N(x) = \lim_{k\to\infty} f_{2^k N}(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{|n-x|<2^k \frac{N}{2}} \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{\theta}{2^k N} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

odnosno

$$f_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}. \tag{2.13}$$

S obzirom da znamo da je $f_1(x) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)^2$, uvrstimo li $N = 1$ i $x = \frac{1}{2}$ u jednakost (2.13) Baselski problem je dokazan. Primijetimo još na kraju kako jednakost (2.13) vrijedi za svaki N, pa je $f_N(x)$ neovisna o N, te Propozicija 2.5.3 vrijedi i bez pretpostavke da je N potencija s bazom 2.

Bibliografija

[1] D. Benko, *The Basel Problem as a telescoping series*, The College Mathematics Journal 43 (2012), 244.-250.

[2] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$ (1999/2003), https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/Curso/zeta2.pdf, (kolovoz, 2017.)

[3] D. Daners, *A short elementary proof of* $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (2006/2012), http://talus.maths.usyd.edu.au/u/daners/publ/abstracts/zeta2/zeta2.pdf, (kolovoz, 2017.)

[4] J. W. Dawson, *Why Prove it Again*, Birkhäuser, 2015.

[5] A. Emmell, *Leonhard Euler and The Basel Problem* (2013), http://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/hudson/Emmell,Amber_EulerTheBaselProblem.pdf, (veljača, 2018.)

[6] A. Eremenko, *How Euler found the sum of reciprocal squares* (2013), https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/euler.pdf, (studeni, 2017.)

[7] M. Freiberger, *The Basel Problem* (2016), https://plus.maths.org/content/basel-problem, (travanj, 2018.)

[8] Fourierovi redovi, *Convergence of Fourier Series and the Basel Problem*, https://artofproblemsolving.com/community/c1142h1100387_convergence_of_fourier_series_and_the_basel_problem, (kolovoz, 2017.)

[9] D. Kalman, *Six ways to sum a series*, The College Mathematics Journal 24 (1993), 402.-421.

[10] C. Martin, *Methods for Evaluating Infinite Series*, http://web.math.ucsb.edu/~cmart07/Evaluating20Series.pdf, (lipanj, 2018.)

[11] Matematika 2, predavanja,
http://lavica.fesb.hr/mat2/predavanja/, (kolovoz, 2017.)

[12] Mathonline, *Telescoping Series*,
http://mathonline.wikidot.com/telescoping-series-examples-1, (lipanj, 2018.)

[13] B. W. Sullivan, *The Basel Problem, Numerous Proofs* (2013),
http://math.cmu.edu/~bwsulliv/basel-problem.pdf, (travanj, 2018.)

[14] Slika *Leonhard Euler*,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg

[15] Slika *Bernhard Riemann*,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

[16] G. Šimić, *Riemannova zeta funkcija*, Diplomski rad, Osijek, 2011

[17] J. Wästlund, *Summing inverse squares by euclidean geometry*,
http://www.math.chalmers.se/~wastlund/Cosmic.pdf, (travanj, 2018.)

[18] Wikipedia, *Basel problem*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem, (kolovoz, 2017.)

[19] Wikipedia, *Pietro Mengoli*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Pietro_Mengoli, (kolovoz, 2017.)

Sažetak

U ovom radu sam predstavila Baselski problem. U uvodnom dijelu sam pisala o povijesti Baselskog problema i o prvom valjanom dokazu. Prvi dokaz napisao je Euler i njime ušao u svijet slavnih matematičara. Osim Eulerovog dokaza, navela sam i dokaze: pomoću Fourierovih redova, preko teleskopskih redova, pomoću trigonometrije i algebre, dokaz preko dvostrukih integrala i na kraju dokaz uz interpretaciju pomoću svjetlosti.

Summary

In this graduation thesis, I presented the Basel problem. First, I wrote about the history of the Basel problem and about first valid proof. First proof was written by Euler, by which he entered the world of famous mathematicians. Besides Euler's proof, I presented some other proofs of the same problem: by using Fourier series, by telescoping series, a proof by trigonometry, a proof with double integrals and finally, a proof with lights interpretation.

Životopis

Rođena sam 26. siječnja 1995. godine u Zaboku. U gradu Zaboku pohađala sam Osnovnu školu Ksavera Šandora Gjalskog (2001.-2009.) te opći smjer Gimnazije Antuna Gustava Matoša (2009.-2013.). Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja, 2013. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. stječem naziv prvostupnice edukacije matematike i nastavljam obrazovanje na diplomskom sveučilišnom studiju Matematike; smjer: nastavnički. Tokom studiranja držala sam demonstrature iz kolegija Konstruktivne metode u geometriji.