Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Martina Varga

Pitagorine trojke i neke slične diofantske jednadžbe

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Veliku zahvalu dugujem mentoru, prof. dr. sc. Vedranu Krčadincu, na izrazitoj kolegijalnosti, strpljivosti i profesionalnosti.

Prijateljima, mojima najdražima i najbližima iz obitelji najveća HVALA. Znat ćete i sami za što sve!

Posebno zahvaljujem svojim roditeljima Marici i Stevi koji su mi dali mogućnost studiranja i bili moja podrška cijelo vrijeme.

Sadržaj

1 Uvod

Pitagorin teorem je svima poznat: *zbroj kvadrata duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze.* Kroz povijest ovaj teorem i trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = z^2$ zanimali su razne narode. O tome pišemo u drugom poglavlju ovog rada. Moglo bi se reći kako je ovaj teorem jedan od ljepših matematičkih dostignuća. U prilog tome svjedoče razni geometrijski, algebarski te vizualni dokazi kojih do današnjeg dana ima preko 400. Rad je iz područja teorije brojeva.

Glavni cilj ovog diplomskog rada je dokazati Euklidovu formulu za generiranje primitivnih Pitagorinih trojki te prikazati posljedice i rezultate koji slijede iz nje. Stoga se u trećem poglavlju nalaze tri različita dokaza Euklidove formule za generiranje primitivnih Pitagorinih trojki. Prvi dokaz je iz područja elementarne teorije brojeva, drugi iz područja analitičke geometrije te treći iz područja algebre.

Dalje, osim Pitagorinih trojki, promatramo neke slične diofantske jednadžbe. U četvrtom poglavlju proučavamo diofantsku jednadžbu $x^2+y^2+z^2 = w^2$ za koju ćemo prikazati izvod formule analogne Euklidovoj iz prethodnog poglavlja pomoću analitičke geometrije. Četvorke brojeva koje zadovoljavaju diofantsku jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ nazivamo Pitagorine četvorke. Glavni rezultat u ovom poglavlju je parametrizacija primitivnih Pitagorinih četvorki, što i dokazujemo pomoću algebre.

Zatim u petom poglavlju proučavamo diofantske jednadžbe oblika $x^2+y^2 = z^2 \pm 1$. Rješenja (x, y, z) koja zadovoljavaju ove diofantske jednadžbe nazivamo skoro i blizu Pitagorine trojke. Reći ćemo nešto o njihovoj povezanosti s jednadžbama iz prethodnih poglavlja, parametrizirati njihova rješenja, prikazati postupak generiranja skoro Pitagorinih trojki te dati neke povezane rezultate.

Na kraju rada dati ćemo popis 60 Pitagorinih trojki, 60 Pitagorinih četvorki, 60 blizu Pitagorinih trojki te 60 skoro Pitagorinih trojki kako bismo čitatelju olakšali vizualiziranje uređenih parova brojeva koje opisujemo kroz diplomski rad.

2 Pitagorine trojke kroz povijest

S područja Mezopotamije potječu Babilonci, koji su oko 2000. godine prije Krista apsorbirali narod Sumerana. Bogat babilonski doprinos matematici sačuvan je na glinenim pločicama koje su sadržavale razne zadatke i tablice, pisane klinastim pismom slijeva udesno. Babilonci su koristili seksagezimalni brojevni sustav s bazom 60 [4].

Slika 2.1: Plimpton 322.
Izvor: [13]

Ploča Plimpton 322 duljine je 13 cm, visine 9 cm te širine 2 cm. Potječe iz Larse, a danas je pohranjena kao dio matematičke kolekcije Georgea Arthura Plimptona na Sveučilištu Columbia pod kataloškim brojem 322. Ploča je iz doba između 1900. i 1600. godine prije Krista. Na slici 2.1 vidi se oštećenje ploče na lijevoj strani gdje su pronađeni tragovi modernog ljepila pa se sumnja kako je ploča bila sastavni dio još veće ploče te da je preostali dio ili izgubljen ili ukraden. Zbog stila pisanja, smatralo se da je jedna od pločica s pisarskim zapisima vezanima uz žitarice ili poreze sve do 1945. godine kada su povijesničari Otto Neugebauer i Abraham Sachs dešifrirali njen sadržaj u knjizi *Mathematical Cuneiform Texts*. Ploča sadrži 4 stupca, svaki ima zaglavlje u kojem je tekst te 15 numeričkih redova. Prvi stupac nije vidljiv u potpunosti zbog oštećenja, a preostala tri su očuvana. Neugebauer je utvrdio da su Babilonci na ploči prikazali Pitagorine trojke koje su predstavljale duljine stranica trokuta. U tablici 2.1 prikazan je sadržaj Plimptona 322 u bazi 10, pri čemu su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta. Detaljniji opis i analiza sadržaja ploče može se pročitati u [5] i [6].

$\frac{b^2}{a^2}$	širina b	dijagonala c	
0.9834028	119	169	1
0.9491586	3367	4825	2
0.9188021	4601	6649	3
0.8862479	12709	18541	4
0.8150077	65	97	5
0.7851929	319	481	6
0.7199837	2291	3541	7
0.6927094	799	1249	8
0.6426694	481	769	9
0.5861226	4961	8161	10
0.5625	45	75	11
0.4894168	1679	2929	12
0.4500174	161	289	13
0.4302388	1771	3229	14
0.3871605	56	106	15

Tablica 2.1: Transkripcija Plimptona 322 u dekadski sustav.

Na kraju prikažimo jedan od babilonskih zadataka s glinene pločice naveden u [4] te [6]:

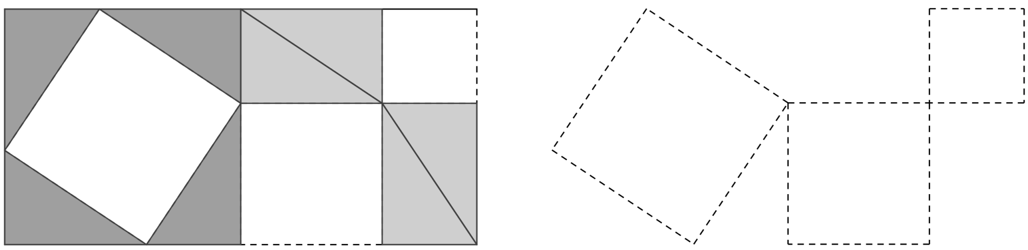
4 je duljina i 5 dijagonala.
Kolika je širina?
Nije poznata.
4 puta 4 je 16.
5 puta 5 je 25.

Oduzmeš 16 od 25 i ostaje 9.
Što da uzmem da dobijem 9?
3 puta 3 je 9.
3 je širina.

U ovom primjeru vidimo kako su Babilonci koristili Pitagorin teorem. Duljinu stranice, tj. "širinu" pravokutnika određivali su preko poznate duljine druge stranice i poznate duljine dijagonale. Konkretno u ovom zadatku vidimo da su poznavali Pitagorinu trojku (3, 4, 5).

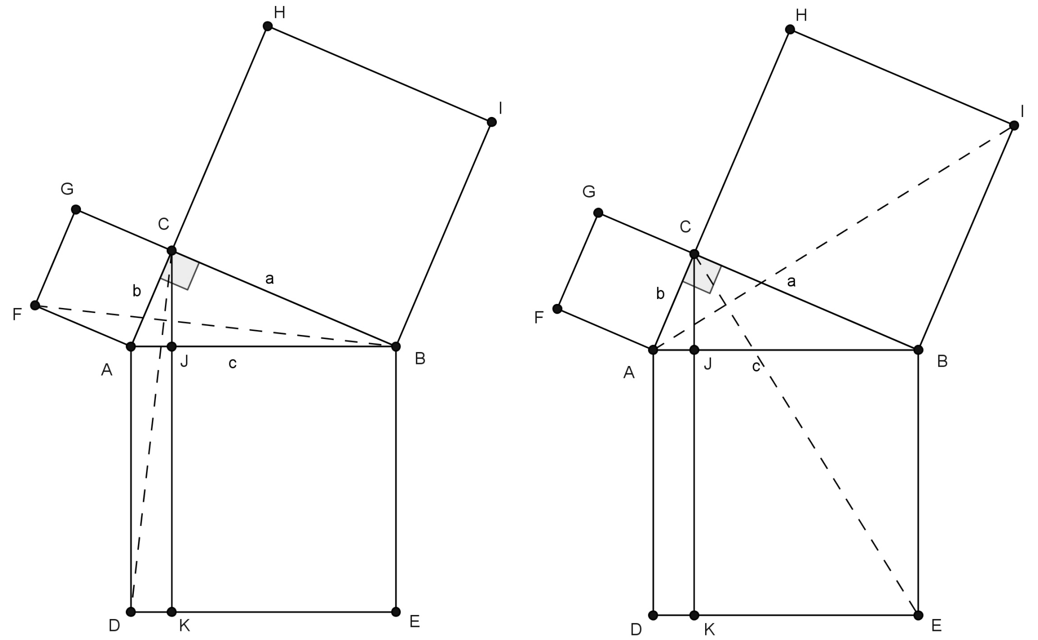
Pitagora s grčkog otoka Samosa rođen je oko 570. godine prije Krista. U Krotonu je osnovao filozofsko-vjersku pitagorejsku školu. Njegova djela nisu sačuvana, a sva svoja matematička otkrića Pitagorejci su pripisivali njemu. Pitagorejci su proučavali takozvane Pitagorine trojke, a Pitagora je prvi dao matematički iskaz i dokaz teorema koji nosi njegovo ime, iako su ga Babilonci poznavali preko tisuću godina prije [4].

Na slici 2.2 prikazan je vizualan dokaz za koji se smatra da ga je koristio i sam Pitagora.



Slika 2.2

Euklid je grčki matematičar koji je djelovao od oko 330.–275. godine prije Krista. Njegovo najbitnije djelo su *Elementi*, trinaest knjiga skupa dotadašnjih matematičkih otkrića. Manji dio otkrića pripadao je i samom Euklidu. U prvoj knjizi 47. i 48. propozicija bio je dokaz Pitagorina teorema i njegov obrat. Dokaz je prikazan u [6], a zasniva se na slici 2.3 te se smatra da je ovaj doprinos upravo Euklidov.



Slika 2.3

Diofant Aleksandrijski djelovao je u 3. stoljeću kada je napisao djelo *Aritmetika* sačinjeno od trinaest knjiga iz područja algebre i jednadžbi. Šest knjiga je sačuvano. Kao jedan od jednostavnijih primjera diofantske jednadžbe možemo navesti traženje Pitagorinih trojki. S obzirom na sačuvana djela, smatra se da je Diofant pomoću dva parametra generirao Pitagorine trojke. Detaljnije o ovome može se pronaći u [6].

3 Euklidova formula i njezine posljedice

Uvedimo najprije osnovne pojmove. Reći ćemo da su cijeli brojevi a i b relativno prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj $(a, b) = 1$. Za cijele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kažemo da su relativno prosti ako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, a da su u parovima relativno prosti ako je $(a_i, a_j) = 1$ za sve $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$.

Kažemo da je prirodan broj a (potpun) kvadrat ako se može zapisati u obliku $a = n^2, n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.1. *Uređenu trojku prirodnih brojeva (x, y, z) zovemo* Pitagorinom trojkom *ako su x, y katete, a z hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi*

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{3.1}$$

Dovoljno je promatrati slučaj kada su x, y i z relativno prosti brojevi. U slučaju da posjeduju zajednički faktor $d > 1$, onda jednadžbu (3.1) možemo podijeliti sa d^2. Konkretno, ako znamo da je jedno rješenje jednadžbe na primjer $(3, 4, 5)$, onda možemo generirati beskonačno mnogo drugih rješenja $(d \cdot 3,\ d \cdot 4,\ d \cdot 5)$ jer vrijedi:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = d^2(x^2 + y^2) = d^2 z^2 = (dz)^2.$$

Definicija 3.2. *Ako su x, y, z relativno prosti prirodni brojevi koji zadovoljavaju $x^2 + y^2 = z^2$, onda kažemo da je (x, y, z)* primitivna Pitagorina trojka. *Takav trokut zovemo (primitivni) Pitagorin trokut.*

Bitno je naglasiti da je (3.1) diofantska jednadžba. Cilj nam je naći formulu koja daje sva rješenja navedene diofantske jednadžbe. Pitagora je zaključio da za neparni $d > 1$ brojevi

$$x = d, \quad y = \frac{d^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{d^2 + 1}{2}$$

zadovoljavaju jednadžbu (3.1). Dok je Platon zaključio da za $d > 1$ jednadžbu (3.1) zadovoljavaju i brojevi

$$x = 2d, \quad y = d^2 - 1, \quad z = d^2 + 1.$$

No, prethodno navedene formule ne određuju sve Pitagorine trojke, primjerice (40, 42, 58). Općeniti zapis Pitagorinih trojki prvi put je dan u Diofantovom djelu *Aritmetika* te Euklidovom djelu *Elementi.* [6]

Da bismo odredili općeniti zapis Pitagorinih trojki, prvo ćemo karakterizirati sve primitivne Pitagorine trojke. Uočimo da je u svakoj primitivnoj

Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva x, y neparan. Doista, ako bi x i y bili parni, onda trojka ne bi bila primitivna, a ako bi x i y bili neparni, onda bi iz $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$ i $z^2 \equiv 0 \pmod 4$ dobili kontradikciju.

Kroz sljedeća dva teorema prikazat ćemo Euklidovu formulu za generiranje Pitagorinih trojki.

Teorem 3.3. *Ako su $m > n$ relativno prosti brojevi različite parnosti, onda je formulama*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \tag{3.2}$$

dana primitivna Pitagorina trojka (x, y, z).

Dokaz. Lako se provjeri da brojevi x, y i z definirani sa (3.2) zadovoljavaju jednadžbu (3.1). Zaista,

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 = m^4+2m^2n^2+n^4 = (m^2+n^2)^2.$$

Preostaje još provjeriti da su x, y i z doista relativno prosti. Pretpostavimo da brojevi x i z imaju zajednički faktor $d > 1$. Tada je d neparan i

$$d \mid (m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2,$$

$$d \mid (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2.$$

No, ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su m i n relativno prosti, odnosno s tim da su m^2 i n^2 relativno prosti. $\square$

S obzirom da su m i n različite parnosti i relativno prosti, uočavamo da je u prethodnom teoremu x uvijek neparan.

Teorem 3.4. *Sve primitivne Pitagorine trojke (x, y, z) u kojima je y paran, dane su formulama:*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

gdje je $m > n$ i m, n su relativno prosti brojevi različite parnosti.

Iz teorema slijedi da su sve Pitagorine trojke dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2.$$

Teorem ćemo dokazati na tri različita načina. Prvi dokaz preuzet je iz [9] i koristi samo elementarnu teoriju brojeva.

Dokaz 1. Jednadžbu (3.1) možemo zapisati u obliku $y^2 = z^2 - x^2$, odnosno

$$y^2 = (z + x)(z - x). \tag{3.3}$$

Neka je $y = 2c$, $c \in \mathbb{N}$. Brojevi $z + x$ i $z - x$ su parni, pa postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $z + x = 2a$, $z - x = 2b$. Uvrštavanjem dobivamo da je

$$4c^2 = y^2 = (z + x)(z - x) = 4ab,$$

pa je

$$c^2 = ab. \tag{3.4}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem $z+x = 2a$ i $z-x = 2b$ dobivamo $z = a+b$ i $x = a-b$. Pretpostavimo da a i b nisu relativno prosti. Tada postoji zajednički djelitelj $d > 1$ takav da vrijedi $x = kd$, $z = ld$, za neke prirodne brojeve k i l. Dobivamo da je $y^2 = z^2 - x^2 = (l^2 - k^2)d^2$, što je u kontradikciji s primitivnosti od x, y, z. Slijedi da su a i b relativno prosti brojevi.
S obzirom na to da su a i b relativno prosti te im je produkt (3.4) potpun kvadrat, zaključujemo da a i b moraju biti potpuni kvadrati. Dakle, postoje relativno prosti prirodni brojevi m i n takvi da je $a = m^2$, $b = n^2$. Tada je

$$x = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \quad y = 2mn.$$

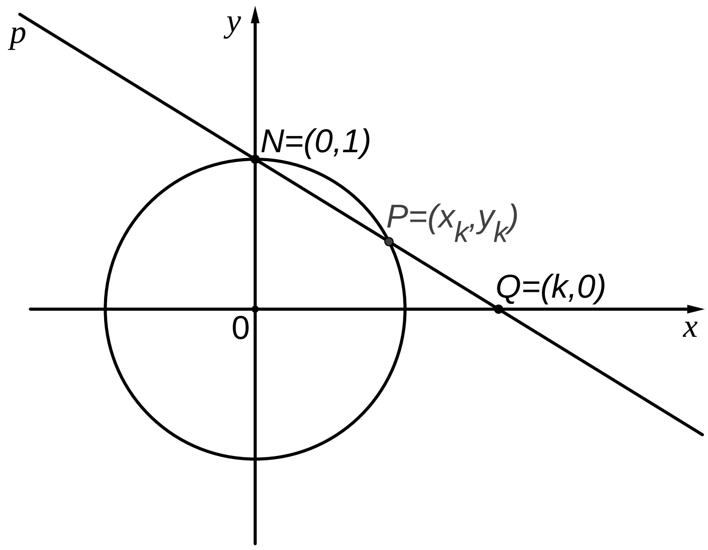
Brojevi m i n ne mogu biti oba parna jer su relativno prosti te ne mogu biti oba neparna jer je broj $x = m^2 - n^2$ neparan. Slijedi da su brojevi m i n različite parnosti. □

Drugi dokaz teorema 3.4 je analitičko geometrijski i prilagođen je iz dokaza u [14].

Dokaz 2. Neka je (a, b, c) Pitagorina trojka za koju vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Dijeljenjem prethodne jednadžbe sa c^2 dobivamo $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Neka je $\frac{a}{c} = x$ i $\frac{b}{c} = y$. Dobivamo jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.5}$$

koja predstavlja jednadžbu jedinične kružnice.



Neka je p pravac koji prolazi točkama $N = (0, 1)$ i $Q = (k, 0)$. Njegova jednadžba je:

$$p \ldots y = -\frac{1}{k}x + 1. \tag{3.6}$$

Drugo sjecište pravca p i jedinične kružnice je točka $P = (x_k, y_k)$. Njene koordinate dobivamo uvrštavanjem (3.6) u (3.5):

$$(k^2 + 1)x^2 - 2kx = 0.$$

Odavde dobivamo

$$x_k = \frac{2k}{k^2 + 1}, \quad y_k = -\frac{1}{k} \cdot \frac{2k}{k^2 + 1} + 1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \tag{3.7}$$

Za racionalne k, rješenja jednadžbe (3.5) su racionalna. Obratno, ako je (x_0, y_0) racionalno rješenje jednadžbe (3.5) i P_0 odgovarajuća točka na kružnici, onda je koeficijent smijera pravca kroz N i P_0 jednak $k = \frac{x_0}{1-y_0}$ što je racionalan broj. Slijedi da je (x_0, y_0) rješenje oblika (3.7). Ovime smo dokazali da su sva racionalna rješenja od (3.5) dana formulom (3.7) s racionalnim k. Stavimo li $k = \frac{m}{n}$, onda (3.7) postaje

$$x_k = \frac{2\left(\frac{m}{n}\right)}{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad y_k = \frac{\frac{m^2}{n^2} - 1}{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.$$

Iz ovoga zaključujemo da su sve cjelobrojne Pitagorine trojke dane kao $(2dmn, d(m^2 - n^2), d(m^2 + n^2))$ za $m, n, d \in \mathbb{Z}$. Slično kao u prvom dokazu vidimo da primitivne Pitagorine trojke dobivamo kada je $d = 1$, a $m > n$ relativno prosti brojevi različite parnosti. $\square$

Treći dokaz teorema 3.4 je algebarski i zasniva se na prstenu Gaussovih cijelih brojeva. Navedimo najprije neke osnovne činjenice.

Definicija 3.5. *Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Element $r \in R$ je ireducibilan ako vrijede sljedeća dva uvjeta:*

(i) *r je nenul element koji nije invertibilan,*

(ii) *ako je $r = ab$, onda je ili a ili b invertibilan element.*

Element $p \in R$ je prost ako vrijede sljedeća dva uvjeta:

(i) *p je nenul element koji nije invertibilan,*

(ii) *ako $p \mid ab$, onda $p \mid a$ ili $p \mid b$.*

Definicija 3.6. *Neka je R komutativan prsten s jedinicom. Kažemo da su elementi $a, b \in R$ asocirani i označavamo s $a \sim b$, ako postoji invertibilan element $x \in R$ takav da vrijedi $a = xb$.*

Definicija 3.7. *Podskup $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ definiran kao $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ zovemo* skup Gaussovih cijelih brojeva.

Navedeni skup ima sljedeća svojstva:

- $\mathbb{Z}[i]$ je prsten,
- $\mathbb{Z}[i]$ je integralna domena,
- jedinice su ± 1 te $\pm i$ (jedini invertibilni elementi),
- faktorizacija je jedinstvena do na množenje jedinicom:
  (i) svaki nenul element $z \in \mathbb{Z}[i]$ koji nije invertibilan možemo zapisati kao $z = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_n$, pri čemu su $\pi_1, \ldots, \pi_n$ ireducibilni,
  (ii) ako je $z = \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_n$ i $z = \pi'_1 \cdot \ldots \cdot \pi'_m$ pri čemu su π_k, π'_k ireducibilni, onda je $n = m$ i postoji neka permutacija $\sigma \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $\pi_k \sim \pi'_{\sigma(k)}$ za svaki k.

Za $z = a + bi$, definiramo normu $N(z) = z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Norma je paran broj ako i samo ako je dani Gaussov cijeli broj višekratnik od $1 + i$.

Gaussovi prosti brojevi su ireducibilni elementi prstena $\mathbb{Z}[i]$. Prost broj $p \in \mathbb{N}$ je Gaussov prost broj ako i samo ako je $p \equiv 3 \pmod 4$. Ostali prosti brojevi iz $\mathbb{N}$ nisu Gaussovi prosti brojevi, ali su produkt dva kompleksno konjugirana Gaussova prosta broja. Dakle, Gaussov cijeli broj $z = a + bi$ je Gaussov prost broj ako i samo ako vrijedi jedan od sljedećih slučajeva:

(i) ako je $a = 0$ i $|b|$ prost broj kongruentan $3 \pmod 4$ ili obrnuto, ako je $b = 0$ i $|a|$ prost broj kongruentan $3 \pmod 4$;

(ii) ako su $a, b \neq 0$ te je $a^2 + b^2$ prost broj kongruentan $1 \pmod 4$;

(iii) ako je z oblika $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ ili $-1 - i$.

Iz (i) vidimo da su Gaussovi prosti brojevi oni Gaussovi cijeli brojevi koji su produkt jedinice skupa $\mathbb{Z}[i]$ $(\pm 1, \pm i)$ te prostog broja oblika $4n+3$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Dok iz (ii) vidimo da su to oni brojevi kojima je norma prost broj oblika $4n + 1$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Zaseban slučaj u Gaussovim cijelim brojevima je prost broj $p = 2$ za koji vrijedi $2 = (1 + i)(1 - i) = -i(1 + i)^2$.

Dokazi tvrdnji o $\mathbb{Z}[i]$ mogu se naći u [8], od kuda je ujedno preuzet i treći dokaz.

Dokaz 3. Prvo zapišimo jednadžbu $a^2 + b^2 = c^2$ kao

$$(a + bi)(a - bi) = c^2. \tag{3.8}$$

Pokažimo da su $a + bi$ i $a - bi$ relativno prosti. Znamo da su a i b relativno prosti brojevi te c neparan. Neka je d zajednički djelitelj brojeva $a+bi$ i $a-bi$ u skupu $\mathbb{Z}[i]$. Slijedi da d dijeli i njihov zbroj i razliku: $d \mid 2a$, $d \mid 2bi$, odnosno vrijedi

$$d \mid 2a \quad \text{i} \quad d \mid 2b \tag{3.9}$$

s obzirom da je i jedinica. Pokažimo da su brojevi d i 2 relativno prosti u skupu $\mathbb{Z}[i]$. Znamo da je $2 = -i(1 + i)^2$ i da je $1 + i$ prost. Dakle, dovoljno je pokazati da d nije djeljiv s $1 + i$. Dalje, $1 + i$ dijelit će d ako i samo ako je $N(d)$ paran broj. S obzirom da d dijeli c^2, iz toga slijedi $N(d)^2 \mid c^4$, a zbog neparnosti c^4 zaključujemo da je i $N(d)$ neparan broj. Slijedi da $1 + i$ ne dijeli d.

Budući da smo pokazali da su d i 2 relativno prosti u $\mathbb{Z}[i]$, (3.9) možemo pojednostaviti kao

$$d \mid a, \quad d \mid b.$$

U skupu cijelih brojeva a i b su relativno prosti brojevi, iz čega slijedi da su relativno prosti i u $\mathbb{Z}[i]$. Stoga su njihovi zajednički djelitelji u $\mathbb{Z}[i]$ jedinice, pa zaključujemo da je d također jedinica.

Promotrimo jednadžbu (3.8). Na lijevoj strani imamo relativno proste Gaussove cijele brojeve dok je na desnoj strani potpuni kvadrat. S obzirom da skup $\mathbb{Z}[i]$ ima jedinstvenu faktorizaciju do na množenje jedinicom, da su dani Gaussovi brojevi relativno prosti i umnožak im je kvadrat, tada zaključujemo da su i ta dva faktora kvadrati do na množenje jedinicom. Jedinice skupa $\mathbb{Z}[i]$ su ± 1 i $\pm i$. Ovdje je -1 potpuni kvadrat pa ga možemo dodati kao i^2 bilo kojem faktoru koji je kvadrat. Stoga za (3.8) vrijedi

$$a + bi = (m + ni)^2 \quad \text{ili} \quad a + bi = i(m + ni)^2$$

za neki $m + ni \in \mathbb{Z}[i]$. Iz ovoga dobivamo

$$a + bi = (m^2 - n^2) + (2mn)i \quad \text{ili} \quad a + bi = (-2mn) + (m^2 - n^2)i.$$

Neka je a neparan, a b paran broj. U drugom slučaju, $a + bi = (-2mn) + (m^2 - n^2)i$ dobivamo da je a paran broj što je kontradikcija. Sada slijedi da mora vrijediti prvi slučaj, odnosno da je

$$a + bi = (m + ni)^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)i. \tag{3.10}$$

Dakle, $a + bi$ je potpuni kvadrat, a pri izjednačavanju realnog i imaginarnog dijela dobivamo

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn.$$

Sada imamo $c^2 = a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$. Zbog $c > 0$ vrijedi $c = m^2 + n^2$. Iz $b > 0$ i $b = 2mn$ zaključujemo da m i n moraju imati jednak predznak. Neka su m i n pozitivnog predznaka (u suprotnom možemo negirati oba pri čemu ne mijenjamo vrijednosti brojeva a, b i c). Zbog $a > 0$ i a neparan slijedi da je $m > n$ te da su različite parnosti. U slučaju da m i n imaju zajednički faktor, onda imamo i zajednički faktor u a, b i c. Odavde zaključujemo da primitivnost trojke (a, b, c) povlači da su m i n relativno prosti brojevi. □

Koristeći prethodni dokaz, za bilo koji Gaussov cijeli broj kojem su realan i imaginaran dio različiti od nule, možemo generirati Pitagorinu trojku. Neka je $z \in \mathbb{Z}[i]$ i zapišimo njegov kvadrat kao $z^2 = a + bi$. Tada je $(|a|, |b|, N(z))$ Pitagorina trojka. Primjerice, za $z = 13 + 5i$ imamo $(13 + 5i)^2 = 144 + 130i$ i $13^2 + 5^2 = 194$ iz čega slijedi da je $(144, 130, 194)$ Pitagorina trojka. Uistinu, vrijedi $144^2 + 130^2 = 194^2$. Štoviše, 13 i 5 su relativno prosti brojevi pa je stoga dobivena primitivna Pitagorina trojka.

Na kraju ovog poglavlja dokazujemo neke teoreme koji slijede iz Euklidove formule.

Teorem 3.8. *Jednadžba* $x^4 + y^4 = z^2$ *nema rješenja u prirodnim brojevima. Drugim riječima, ne postoji pravokutni trokut kojem su duljine kateta kvadrati prirodnih brojeva.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji takav trokut. Uzmimo onaj s najmanjom hipotenuzom. Pri tome dobivamo Pitagorinu trojku (x^2, y^2, z). Pretpostavimo da vrijedi $x = a \cdot d$, $y = b \cdot d$, $d > 1$. Tada bi iz $z^2 = d^4(a^4 + b^4)$ slijedilo da postoji prirodan broj c takav da je $z = d^2 \cdot c$, te bi dobili Pitagorinu trojku (a^2, b^2, c) s hipotenuzom manjom od z što je kontradikcija. Slijedi da x i y moraju biti relativno prosti.

Stoga je (x^2, y^2, z) primitivna Pitagorina trojka, pa po teoremu 3.3 za paran y postoje relativno prosti brojevi različite parnosti m i n tako da vrijedi

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad z = m^2 + n^2.$$

Iz $x^2 + n^2 = m^2$ slijedi da je n paran, a m neparan. Neka je $n = 2k$, $y = 2l$, pa dobivamo

$$l^2 = mk.$$

Zbog toga što su m i k relativno prosti, slijedi da postoje prirodni brojevi r i s takvi da je $m = r^2$ i $k = s^2$. S obzirom da je (x, n, m) primitivna Pitagorina trojka, po teoremu 3.4 postoje relativno prosti u, v takvi da je $n = 2uv$, $m = u^2 + v^2$. Iz $n = 2s^2$ slijedi da je $s^2 = uv$, pa postoje prirodni brojevi a, b takvi da je $u = a^2$, $v = b^2$. Vrijedi $a^4 + b^4 = r^2$, pa je (a^2, b^2, r) Pitagorina trojka za čiju hipotenuzu vrijedi:

$$r < r^2 = m < m^2 + n^2 = z,$$

što je u kontradikciji s minimalnosti od z. □

Kao posljedicu teorema 3.8 navest ćemo sljedeći korolar:

Korolar 3.9. *Jednadžba* $x^4 + y^4 = z^4$ *nema rješenja u prirodnim brojevima.*

Korolar 3.9 je specijalni slučaj tzv. velikog Frematovog teorema koji kaže da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ nema rješenja u prirodnim brojevima za $n \geq 3$.

Teorem 3.10. *Ne postoji Pitagorin trokut u kojem su hipotenuza i jedna kateta kvadrati prirodnih brojeva, tj. jednadžba $x^4 + y^2 = z^4$ nema rješenja u prirodnim brojevima.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji takav trokut. Uzmimo onaj s najmanjom hipotenuzom z^2. Pri tome dobivamo Pitagorinu trojku (x^2, y, z^2). Pretpostavimo da vrijedi $x = a \cdot d$, $z = b \cdot d$, $d > 1$. Tada bi iz $y^2 = d^4(b^4 - a^4)$ slijedilo da postoji prirodan broj c takav da je $y = d^2 \cdot c$, te bi dobili Pitagorinu trojku (a^2, c, b^2) s hipotenuzom manjom od z^2 što je kontradikcija. Slijedi da x i z moraju biti relativno prosti. Stoga je (x^2, y, z^2) primitivna Pitagorina trojka.

Ako je y paran, onda po teoremu 3.4 slijedi da postoje prirodni brojevi m, n takvi da je

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z^2 = m^2 + n^2.$$

Dalje dobivamo da je $(xz)^2 = m^4 - n^4$, pa je u Pitagorinoj trojki (n^2, xz, m^2) hipotenuza $m^2 < z^2$ što je kontradikcija s minimalnosti od z^2.

Slijedi da y mora biti neparan, odnosno x mora biti paran. Iz $y^2 = z^4 - x^4 = (z^2 - x^2)(z^2 + x^2)$, zaključujemo da postoje prirodni brojevi r, s takvi da je

$$z^2 - x^2 = r^2, \quad z^2 + x^2 = s^2.$$

Zbrajanjem dobivamo $2z^2 = s^2 + r^2$, odnosno $z^2 = (\frac{s+r}{2})^2 + (\frac{s-r}{2})^2$. Slijedi da postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$\frac{s \pm r}{2} = m^2 - n^2, \quad \frac{s \mp r}{2} = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

pa je $2x^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m - n)(m + n)$. S obzirom da su m i n relativno prosti brojevi različite parnosti, slijedi da su brojevi m, n, $m - n$ i $m + n$ u parovima relativno prosti. Stoga postoje prirodni brojevi k, l, p i q takvi da je

$$m = k^2, \quad n = l^2, \quad m - n = p^2, \quad m + n = q^2.$$

Odavde je $k^4 - l^4 = (pq)^2$ te dobivamo Pitagorinu trojku (l^2, pk, k^2) s hipotenuzom $k^2 = m < m^2 + n^2 = z < z^2$, što je kontradikcija s minimalnosti od z^2. □

Korolar 3.11. *Ne postoji Pitagorin trokut čija je površina potpun kvadrat.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji Pitagorina trojka (x, y, z) za koju vrijedi tvrdnja. Tada za stranice tog pravokutnog trokuta vrijedi sljedeće:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad i \quad xy = 2P.$$

Po pretpostavci, postoji prirodan broj k takav da je $P = k^2$, odnosno $2xy = (2k)^2$. Uvrštavanjem dobivamo

$$z^2 + (2k)^2 = (x + y)^2, \quad z^2 - (2k)^2 = (x - y)^2.$$

Odnosno

$$z^2 = (x + y)^2 - (2k)^2, \quad z^2 = (x - y)^2 + (2k)^2.$$

Množenjem dobivamo $z^4 = (x^2 - y^2)^2 + (2k)^4$. Slijedi da smo dobili Pitagorin trokut čija je hipotenuza z^2 te jedna kateta $(2k)^2$ što je u kontradikciji s tvrdnjom teorema 3.10. $\square$

4 Diofantska jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$

U ovom poglavlju bavimo se diofantskom jednadžbom

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2. \tag{4.1}$$

Definicija 4.1. *Ako su x, y, z, w relativno prosti prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu* (4.1)*, onda kažemo da je* (x, y, z, w) primitivna Pitagorina četvorka.

Prvo proučimo parnost brojeva x, y, z, w kod primitivnog rješenja jednadžbe (4.1). Uočimo da su u svakoj primitivnoj Pitagorinoj četvorki točno dva broja od x, y, z parna te w neparan. Doista, ako bi x, y, z bili parni, četvorka ne bi bila primitivna. Ako su x, y, z neparni, onda dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 4$ što je u kontradikciji s $w^2 \equiv 1 \pmod 4$. Ako pretpostavimo da su točno dva broja od x, y, z neparna, tada dobivamo $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod 4$ što je u kontradikciji s $w^2 \equiv 0 \pmod 4$. Primitivnost vrijedi samo kada su točno dva broja od x, y, z parna te w neparan.

Cilj nam je dokazati formulu analognu Euklidovoj za parametrizaciju cjelobrojnih rješenja jednadžbe (4.1). U [2] navedeno je sljedećih šest identiteta, danih od različitih matematičara, koji daju beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja jednadžbe (4.1):

1. $(4mp)^2 + [(m^2 - 1)(p^2 +)]^2 + [2m(p^2 - 1)]^2 = [(m^2 + 1)(p^2 + 1)]^2$,
2. $q^2 + (q + 1)^2 + [q(q + 1)]^2 = (q^2 + q + 1)^2$,
3. $[2qr(m^2 - n^2)]^2 + [(m^2 - n^2)(q^2 - r^2)]^2 + [2mn(q^2 + r^2)]^2 = [(m^2 + n^2)(q^2 + r^2)]^2$,
4. $(2pr)^2 + (2qr)^2 + (p^2 + q^2 - r^2)^2 = (p^2 + q^2 + r^2)^2$,
5. $[p(p + q)]^2 + [q(p + q)]^2 + (pq)^2 = (p^2 + pq + q^2)^2$,
6. $(4m^2n^2)^2 + (m^4 - n^4)^2 + [2mn(m^2 - n^2)]^2 = [(m^2 + n^2)^2]^2$.

No, niti jedan od navedenih identiteta ne generira sva rješenja početne jednadžbe, stoga pokušajmo jednom formulom obuhvatiti sve prethodne identitete.

Kad podijelimo (4.1) sa w^2 dobivamo

$$\left(\frac{x}{w}\right)^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^2 = 1.$$

Ako su x, y, z i w pozitivni cijeli brojevi, slijedi da su $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$ i $\frac{z}{w}$ racionalni brojevi. Sada se naš problem svodi na pronalaženje uređene trojke racionalnih brojeva (x', y', z') koja je rješenje jednadžbe

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \tag{4.2}$$

U analitičkoj geometriji prostora jednadžba (4.2) predstavlja jediničnu sferu sa središtem u ishodištu. Znamo da za $m, n \in \mathbb{Z}$ točka

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2}, 0 \right) \tag{4.3}$$

pripada sferi i predstavlja rješenje jednadžbe (4.2). Prema geometrijskom dokazu Euklidove formule, znamo da je

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2} \right)$$

rješenje jednadžbe $x'^2 + y'^2 = 1$.

Nadalje, neka je dan pravac trodimenzionalnog euklidskog prostora koji prolazi točkom (4.3) i vektorom smjera (r, p, q). Parametarske jednadžbe ovog pravca su:

$$x' = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} + rt, \quad y' = \frac{2mn}{m^2 + n^2} + pt, \quad z' = qt,$$

za $r, p, q \in \mathbb{Z}$ i parametar t. Uvrštavanjem x', y' i z' u (4.2) dobivamo

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} + rt \right)^2 + \left(\frac{2mn}{m^2 + n^2} + pt \right)^2 + (qt)^2 = 1.$$

Odavde dobivamo da je $t = 0$ ili

$$t = \frac{-2r(m^2 - n^2) - 4mnp}{(m^2 + n^2)(p^2 + q^2 + r^2)}. \tag{4.4}$$

Ako je $t = 0$, dobivamo točku (4.3). U suprotnom, za parametar t oblika (4.4) dobivamo drugu točku presjeka pravca i sfere. Ako iskoristimo zapis parametra t iz (4.4) te označimo njegov nazivnik sa z, dobivamo novo rješenje jednadžbe (4.1):

$$\begin{aligned} x &= (m^2 - n^2)(p^2 + q^2 - r^2) - 4mnpr \\ y &= 2mn(r^2 - p^2 + q^2) - 2rp(m^2 - n^2) \\ z &= -2qr(m^2 - n^2) - 4mnpq \\ w &= (m^2 + n^2)(p^2 + q^2 + r^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ovo rješenje dao je A. B. Ayoub 1984. godine u članku [2]. Nadalje, sa sljedećim supstitucijama u (4.5) dobivamo početnih šest identiteta:

(1) $r = 0, \quad n = q = 1.$

(2) $m = p = 1, \quad n = 0, \quad r = 1 + q.$

(3) $p = 0.$

(4) $m = 1, \quad n = 0.$

(5) $m = 1, \quad n = 0, \quad r = p + q.$

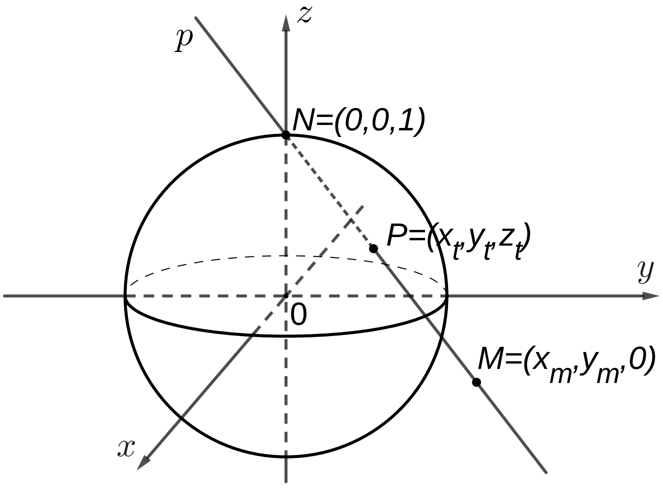
(6) $r = 0, \quad p = m, \quad q = n.$

Ayoubov identitet izveden odavde pruža više rješenja jednadžbe (4.1) nego bilo koji od šest početnih identiteta, no i dalje ne generira sva rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + w^2 = z^2$. Primjerice, $w = 27$ možemo prikazati kao $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2 + r^2)$ na dva načina: $m = 1$, $n = 0$, $p = q = r = 3$ ili $m = 3$, $n = 0$, $p = q = r = 1$. Rješenje (4.5) jednadžbe (4.1) u oba slučaja daje $18^2 + 18^2 + 9^2 = 27^2$. No postoje i druga rješenja jednadžbe (4.1) za $w = 27$:

$$\begin{aligned} 23^2 + 14^2 + 2^2 &= 27^2 \\ 26^2 + 7^2 + 2^2 &= 27^2 \\ 22^2 + 7^2 + 14^2 &= 27^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pokušajmo izvesti parametrizaciju rješenja jednadžbe (4.1), analogno kao drugi dokaz teorema 3.4. Neka je (a, b, c, d) četvorka brojeva za koju vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Dijeljenjem prethodne jednadžbe sa d^2 dobivamo $\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 1$. Neka je $\frac{a}{d} = x$, $\frac{b}{d} = y$ i $\frac{c}{d} = z$. Dobivamo jednadžbu jedinične sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{4.7}$$



Neka je p pravac koji prolazi točkama $N = (0, 0, 1)$ i $M = (x_m, y_m, 0)$. Njegov parametarski oblik jednadžbe je

$$p \ldots \begin{cases} x = tx_m \\ y = ty_m \\ z = 1 - t \end{cases} . \tag{4.8}$$

Drugo sjecište pravca p i jedinične sfere je točka $P = (x_t, y_t, z_t)$. Njene koordinate dobivamo uvrštavanjem (4.8) u (4.7):

$$\begin{gathered} (x_m t)^2 + (y_m t)^2 + (1 - t)^2 = 1 \\ {x_m}^2 t^2 + {y_m}^2 t^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \\ ({x_m}^2 + {y_m}^2 + 1)t^2 - 2t = 0. \end{gathered}$$

Odavde dobivamo da je

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2}{{x_m}^2 + {y_m}^2 + 1}.$$

Uvrštavanjem t_1 u (4.8) dobivamo točku N. Uvrstimo li t_2 u (4.8) dobivamo sljedeće:

$$x = \frac{2x_m}{{x_m}^2 + {y_m}^2 + 1},$$
$$y = \frac{2y_m}{{x_m}^2 + {y_m}^2 + 1},$$
$$z = 1 - \frac{2}{{x_m}^2 + {y_m}^2 + 1} = \frac{{x_m}^2 + {y_m}^2 - 1}{{x_m}^2 + {y_m}^2 + 1}.$$

Neka je $x_m = \frac{p}{q}$ te $y_m = \frac{r}{s}$. Uvrštavanjem dobijemo

$$x = \frac{2\frac{p}{q}}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}^2 + 1} = \frac{2pqs^2}{p^2s^2 + r^2q^2 + q^2s^2},$$
$$y = \frac{2\frac{r}{s}}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}^2 + 1} = \frac{2rq^2s}{p^2s^2 + r^2q^2 + q^2s^2},$$
$$z = \frac{\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2} - 1}{\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}^2 + 1} = \frac{p^2s^2 + r^2q^2 - q^2s^2}{p^2s^2 + r^2q^2 + q^2s^2}.$$

Ako se vratimo u supstituciju za x, y, z, onda vidimo da je

$$\begin{aligned} a &= 2pqs^2 \\ b &= 2rq^2s \\ c &= p^2s^2 + r^2q^2 - q^2s^2 \\ d &= p^2s^2 + r^2q^2 + q^2s^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

No, ovi identiteti također ne generiraju sva rješenja jednadžbe (4.1). Primjerice, za $d = 27$ ne dobivamo prethodno navedena tri rješenja (4.6) već dobivamo samo $(18, 18, 9, 27)$ za $p = q = 1$ i $r = s = 3$.

Raspišimo primjer za prvu jednakost u (4.6). Neka je $2 = a = 2pqs^2$. Tada je $b = 14$ te $c = 23$. Sada zaključujemo da je $pqs^2 = 1$, odnosno da vrijedi $p = q = s = 1$. Ako te parametre uvrstimo u $14 = 2rq^2s$, dobivamo da je $r = 7$. Tada dobivamo da je $c = p^2s^2 + r^2q^2 - q^2s^2 = 1 + 7^2 - 1 = 49$ no to je u kontradikciji s $c = 23$. Ovime smo pokazali da formule (4.9) ne daju sva rješenja jednadžbe (4.1). Slično bismo dobili i za preostale jednakosti u (4.6).

Potpuno rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ otkrio je francusko-belgijski matematičar Eugène Charles Catalan [7]:

$$\begin{aligned} x &= 2(ps - qr) \\ y &= 2(pr + qs) \\ z &= p^2 + q^2 - r^2 - s^2 \\ w &= p^2 + q^2 + r^2 + s^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Teorem 4.2. *Za sve cijele brojeve p, q, r, s, Catalanove formule*

$$x = 2(ps - qr),\ y = 2(pr + qs),\ z = p^2 + q^2 - r^2 - s^2,\ w = p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

daju rješenje diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$.

Dokaz. Direktnim uvrštavnjem dobivamo

$$\begin{aligned} &[2(ps - qr)]^2 + [2(pr + qs)]^2 + (p^2 + q^2 - r^2 - s^2)^2 = \\ &= 4(ps - qr)^2 + 4(pr + qs)^2 + (p^2 + q^2 - r^2 - s^2)(p^2 + q^2 - r^2 - s^2) = \\ &= 4(p^2s^2 - 2pqrs + q^2r^2 + p^2r^2 + 2pqrs + q^2s^2) + p^4 + p^2q^2 - p^2r^2 - p^2s^2 + \\ &\quad + q^2p^2 + q^4 - q^2r^2 - q^2s^2 - r^2p^2 - r^2q^2 + r^4 + r^2s^2 - s^2p^2 - s^2q^2 + s^2r^2 + s^4 = \\ &= 4s^2p^2 + 4s^2q^2 + 4r^2p^2 + 4r^2q^2 + p^4 + q^4 + r^4 + s^4 + \\ &\quad + 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2p^2s^2 - 2r^2q^2 - 2q^2s^2 + 2s^2r^2 = \\ &= p^4 + p^2q^2 + p^2r^2 + p^2s^2 + q^2p^2 + q^4 + q^2r^2 + q^2s^2 + \\ &\quad + r^2p^2 + r^2q^2 + r^4 + r^2s^2 + s^2p^2 + q^2s^2 + s^2r^2 + s^4 = \\ &= p^2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) + q^2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) + \\ &\quad + r^2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) + s^2(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = \\ &= (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^2. \end{aligned}$$

□

Teorem 4.3. *Za svako primitivno rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ s neparnim z postoje cijeli brojevi p, q, r, s takvi da je*

$$x = 2(ps - qr),\ y = 2(pr + qs),\ z = p^2 + q^2 - r^2 - s^2 \text{ i } w = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

Ovaj teorem dokazat ćemo algebarski, pomoću prstena Gaussovih cijelih brojeva. Dokaz je prilagođen iz [15].

Dokaz. Neka je $x = 2x_1$ i $y = 2y_1$. Tada vrijedi

$$
{x_1}^2 + {y_1}^2 = \left(\frac{w+z}{2}\right)\left(\frac{w-z}{2}\right). \tag{4.11}
$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su x_1 i y_1 relativno prosti. Neka je $z_1 = \frac{w+z}{2}$ i $z_2 = \frac{w-z}{2}$. Zatim umnožak u (4.11) zapišemo kao $z_1 \cdot z_2$. Ako faktoriziramo $x_1 + iy_1$ u skupu Gaussovih cijelih brojeva, dobivamo sljedeće:

$$
x_1 + iy_1 = \prod_{j=1}^{n} \pi_j.
$$

Uočimo da $x_1 + iy_1$ nije djeljiv prostim brojem $u \in \mathbb{N}$. U suprotnom bi za u vrijedilo $\frac{x_1+iy_1}{u} = a + ib$, odnosno $x_1 = ua$, $y_1 = ub$ što je u kontradikciji s $(x_1, y_1) = 1$. Stoga niti jedan od π_j nije prost broj iz $\mathbb{N}$. Nadalje vrijedi

$$
x_1 - iy_1 = \prod_{j=1}^{n} \overline{\pi}_j.
$$

Sada zapišimo (4.11) na sljedeći način:

$$
z_1 \cdot z_2 = \prod_{j=1}^{n} N(\pi_j) = \prod_{j=1}^{n} (\pi_j \overline{\pi}_j),
$$

što možemo raspisati kao

$$
z_1 = \prod_{j=1}^{m} (\pi_j \overline{\pi}_j) \quad \text{i} \quad z_2 = \prod_{j=m+1}^{n} (\pi_j \overline{\pi}_j).
$$

Neka je

$$
\prod_{j=1}^{m} \pi_j =: p + iq \quad \text{i} \quad \prod_{j=1+m}^{n} \pi_j =: s + ir.
$$

Sada imamo

$$
x_1 + iy_1 = (p + iq)(s + ir) = ps - qr + i(pr + qs),
$$

tj. $x_1 = ps - qr$, $y_1 = pr + qs$. Iz početne supstitucije dobivamo

$$
x = 2(ps - qr) \quad \text{i} \quad y = 2(pr + qs).
$$

Dalje vrijedi $z_1 = \frac{w+z}{2} = N(p + iq) = p^2 + q^2$, $z_2 = \frac{w-z}{2} = N(s + ir) = s^2 + r^2$.

Kada zbrojimo i oduzmemo prethodno, dobivamo

$$z = p^2 + q^2 - r^2 - s^2, \quad w = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

Time smo dobili željene jednadžbe (4.10). □

Bitno je naglasiti da Catalanove formule daju sva četiri rješenja jednadžbe (4.1) za $w = 27$. Ilustrirajmo rješenje prve jednadžbe u (4.6) pomoću Catalanovih formula. Neka je $x = 2$, $y = 14$ te $z = 23$. Kada uvrstimo vrijednosti u (4.10), dobivamo

$$\begin{aligned} 1 &= ps - qr \\ 7 &= pr + qs \\ 23 &= p^2 + q^2 - r^2 - s^2 \\ 27 &= p^2 + q^2 + r^2 + s^2. \end{aligned}$$

Ako zbrojimo i oduzmemo zadnja dva reda, dobivamo $25 = p^2 + q^2$ i $2 = r^2 + s^2$. Odavde zaključujemo da mora vrijediti $r = s = 1$ te iz $p + q = 7$ i $p^2 + q^2 = 25$ dobivamo da je $p = 4$, $q = 3$. Druga dva rješenja iz (4.6) dobivamo za $p = 4$, $q = 1$, $r = 3$, $s = 1$ i $p = 4$, $q = -1$, $r = 3$, $s = 1$.

Teorem 4.4. *Ako parametri* p, q, r, s *iz formule* (4.10) *zadovoljavaju sljedeće uvjete:*

(a) $ps > qr$,

(b) $p^2 + q^2 > s^2 + r^2$,

(c_1) $p \geq 1$, $q \geq 0$, (c_2) $s \geq 1$, $r \geq 0$, (c_3) $r + q \geq 1$,

(d) $p + q + s + r \equiv 1 \pmod 2$,

(e) $(p^2 + q^2, s^2 + r^2, pr + qs) = 1$,

(f) $r = 0 \Rightarrow p \leq q$,

(g) $q = 0 \Rightarrow s \leq r$,

onda se svako primitivno rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ *dobiva samo jednom.*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [15].

5 Diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$

U prethodnom poglavlju parametrizirali smo rješenja diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ za $x, y, z, w \in \mathbb{N}$. U ovom poglavlju promotrit ćemo slične diofantske jednadžbe i rezultate vezane uz njih.

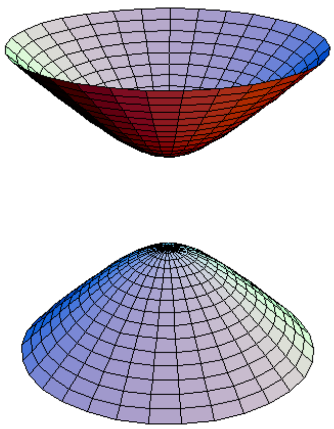
Definicija 5.1. *Uređenu trojku prirodnih brojeva* (x, y, z) *zovemo* blizu Pitagorinom trojkom *ako vrijedi*

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1. \tag{5.1}$$

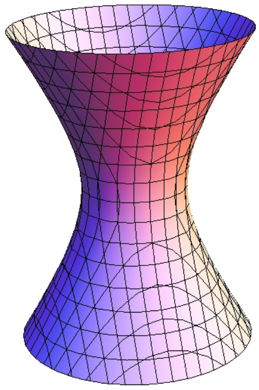
Definicija 5.2. *Uređenu trojku prirodnih brojeva* (x, y, z) *zovemo* skoro Pitagorinom trojkom *ako vrijedi*

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1. \tag{5.2}$$

U analitičkoj geometriji jednadžba $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ predstavlja dvoplohni hiperboloid prikazan na slici 5.1, dok jednadžba $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ predstavlja jednoplohni hiperboloid prikazan na slici 5.2.



Slika 5.1: Dvoplohni hiperboloid. Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HyperboloidOfTwoSheets.png`



Slika 5.2: Jednoplohni hiperboloid. Izvor: `http://canacopegdl.com/single.php?id=http://www.georgehart.com/skewers/hyperboloid-surface.jpg`

Nadalje, svaka skoro Pitagorina trojka određuje blizu Pitagorinu trojku i obrnuto, o čemu govori teorem iz [11]:

Teorem 5.3. *Ako je (x, y, z) skoro Pitagorina trojka, onda je $(2xz, 2yz, 2z^2+1)$ blizu Pitagorina trojka. Obratno, ako je (x, y, z) blizu Pitagorina trojka, onda je $(2x^2+1, 2xy, 2xz)$ skoro Pitagorina trojka.*

Dokaz. Neka je (x, y, z) skoro Pitagorina trojka za koju vrijedi $x^2+y^2=z^2+1$. Uvrštavanjem $2xz$, $2yz$ dobijemo:

$$\begin{aligned}(2xz)^2+(2yz)^2 &= 4x^2z^2+4y^2z^2 = 4z^2(x^2+y^2) = 4z^2(z^2+1)\\ &= 4z^4+4z^2 = 4z^4+4z^2+1-1 = (2z^2+1)^2-1.\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $(2xz, 2yz, 2z^2+1)$ blizu Pitagorina trojka.

Obratno, neka je (x, y, z) blizu Pitagorina trojka za koju vrijedi $x^2+y^2=z^2-1$. Uvrštavanjem $2x^2+1$, $2xy$ dobijemo:

$$\begin{aligned}(2x^2+1)^2+(2xy)^2 &= 4x^4+4x^2+1+4x^2y^2 = 4x^2(x^2+1+y^2)+1\\ &= 4x^2z^2+1 = (2xz)^2+1.\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $(2x^2+1, 2xy, 2xz)$ skoro Pitagorina trojka. □

Dalje, želimo pronaći racionalne blizu Pitagorine trojke $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ takve da je $a^2+b^2=c^2-1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da imaju jednak nazivnik te stavimo da je $a=\frac{x}{z}$, $b=\frac{y}{z}$ i $c=\frac{w}{z}$. Uvrštavanjem dobivamo

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=\left(\frac{w}{z}\right)^2-1,$$

iz čega sređivanjem dobivamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

S obzirom na to da smo već dokazali Catalanovu parametrizaciju za x, y, z, w koja generira sve Pitagorine četvorke, teorema 4.3 zaključujemo sljedeće:

Teorem 5.4. *Sve racionalne blizu Pitagorine trojke su oblika*

$$x = \frac{2(ps - qr)}{p^2 + q^2 - r^2 - s^2}, \quad y = \frac{2(pr + qs)}{p^2 + q^2 - r^2 - s^2}, \quad z = \frac{p^2 + q^2 + r^2 + s^2}{p^2 + q^2 - r^2 - s^2}.$$

Iz jednadžbe $x^2 + y^2 + w^2 = z^2$ za $w = 1$ dobivamo jednadžbu (5.1). Dakle, vrijedi da je $w = 1 = p^2 + q^2 - r^2 - s^2$. Ako stavimo da je $p^2 + q^2 = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, tada iz $1 = n + 1 - (r^2 + s^2)$ slijedi $r^2 + s^2 = n$. Daljnjim uvrštavanjem dobijemo da je $z = 2n + 1$, odnosno da je rješenje jednadžbe (5.1) dano s $(2(ps - qr), 2(pr + qs), 2n + 1)$. Konačno zaključujemo da blizu Pitagorinu trojku možemo generirati svaki put kada imamo dva uzastopna cijela broja n, $n+1$ pri čemu je svaki od njih kvadrat ili suma dva potpuna kvadrata [11].

Nadalje, želimo pronaći racionalne skoro Pitagorine trojke (a, b, c) takve da je $a^2 + b^2 = c^2 + 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da imaju jednak nazivnik te stavimo da je $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$ i $c = \frac{w}{z}$. Uvrštavanjem dobivamo

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \left(\frac{w}{z}\right)^2 + 1,$$

iz čega sređivanjem dobivamo

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2.$$

Dakle skoro Pitagorine trojke vode na diofantsku jednadžbu $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$, čija su parametarska rješenja dana u [3]:

$$\begin{aligned} x &= ps - qr \\ y &= pr + qs \\ z &= pr - qs \\ w &= ps + qr. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5.5. *Sve racionalne skoro Pitagorine trojke su oblika*

$$x = \frac{ps - qr}{ps + qr}, \quad y = \frac{pr + qs}{ps + qr}, \quad z = \frac{pr - qs}{ps + qr}.$$

U [11] Frink opisuje kako je promatrao ponašanje niza brojeva pri kvadriranju te uočio pravilnosti vezane uz diofantsku jednadžbu $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ čija rješenja imenuje upravo on. Kao rezultat njegova istraživanja, navedimo sljedeći teorem o generiranju skoro Pitagorinih trojki.

Teorem 5.6. *Ako je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka i ako je (p, q, r) skoro Pitagorina trojka, onda su trojke*

$$(x, y, z) = (at + p, bt + q, ct + r) \tag{5.3}$$

i

$$(x', y', z') = (at + p', bt + q', ct + r') \tag{5.4}$$

skoro Pitagorine trojke, za $t \in \mathbb{N}$ i $p, q, r, p', q', r' \in \mathbb{Z}$ za koje vrijedi $p + p' = a$, $q + q' = b$ i $r + r' = c$.

U [1] naglašavaju da su sve skoro Pitagorine trojke oblika (5.3) i (5.4). Osim toga, u [1] su dani sljedeći koraci za lakše generiranje skoro Pitagorinih trojki:

I. Uzmemo primitivnu Pitagorinu trojku (a, b, c).

II. Koristeći vrijednosti (a, b, c) te $t = 1$ generiramo sljedeći sustav šest jednadžbi:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = r^2 + 1 \\ (a + p)^2 + (b + q)^2 = (c + r)^2 + 1 \\ (a + p')^2 + (b + q')^2 = (c + r')^2 + 1 \\ p + p' = a \\ q + q' = b \\ r + r' = c \end{cases}.$$

III. Riješimo sustav iz prethodnog koraka po varijablama p, q, r, p', q', r'.

IV. Uvrštavanjem vrijednosti $a, b, c, p, q, r, p', q', r'$ u formule (5.3) i (5.4) dobivamo skoro Pitagorine trojke.

Sljedeći teorem iz [1] omogućava još lakše generiranje skoro Pitagorinih trojki nego teorem 5.6. Prije toga, prisjetimo se primitivnih Pitagorinih trojki. Znamo da su sve primitivne Pitagorine trojke dane formulama $(x, y, z) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ za $m > n$ i m, n relativno proste brojeve različite parnosti. Pri tome dakle vrijedi $m \not\equiv n \pmod 2$. Neka je $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Tada su $m_k = k$ i $n_k = k - 1$ relativno prosti za svaki k te vrijedi $m_k \not\equiv n_k \pmod 2$. Odavde uvrštavanjem dobivamo primitivne Pitagorine trojke oblika $(2k - 1, 2k^2 - 2k, 2k^2 - 2k + 1)$.

Teorem 5.7. *Trojke brojeva dane s*

$$(x, y, z) = (at + 1, bt + (2k - 1), ct + (2k - 1))$$

i

$$(x', y', z') = (at + (2k - 2), bt + (2k^2 - 4k + 1), ct + (2k^2 - 4k + 2)),$$

pri čemu je $(a, b, c) = (2k-1, 2k^2-2k, 2k^2-2k+1)$, $k \geq 2$, *su skoro Pitagorine trojke za svaki* $t \in \mathbb{Z}^+$.

Dokaz ovog rezultata može se pronaći u [1].

Bitno je naglasiti da formule iz teorema 5.7 generiraju beskonačno mnogo skoro Pitagorinih trojki, ali ne i sve jer smo uzeli samo one primitivne Pitagorine trojke koje su oblika $(a, b, c) = (2k - 1, 2k^2 - 2k, 2k^2 - 2k + 1)$.

Osim navedenih rezultata, Frink u [11] napominje da rješavanjem Pellove jednadžbe

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

možemo pronaći sve jednakokračne skoro Pitagorine trojke, primjerice $(29, 29, 41)$.

Dodatak

Neke Pitagorine trojke

(3, 4, 5)	(21, 28, 35)	(40, 42, 58)	(21, 72, 75)	(57, 76, 95)
(6, 8, 10)	(12, 35, 37)	(36, 48, 60)	(30, 72, 78)	(65, 72, 97)
(5, 12, 13)	(15, 36, 39)	(11, 60, 61)	(48, 64, 80)	(60, 80, 100)
(9, 12, 15)	(24, 32, 40)	(39, 52, 65)	(18, 80, 82)	(28, 96, 100)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(25, 60, 65)	(51, 68, 85)	(20, 99, 101)
(12, 16, 20)	(27, 36, 45)	(16, 63, 65)	(40, 75, 85)	(48, 90, 102)
(15, 20, 25)	(30, 40, 50)	(33, 56, 65)	(13, 84, 85)	(40, 96, 104)
(7, 24, 25)	(14, 48, 50)	(32, 60, 68)	(36, 77, 85)	(63, 84, 105)
(10, 24, 26)	(24, 45, 51)	(42, 56, 70)	(60, 63, 87)	(56, 90, 106)
(20, 21, 29)	(20, 48, 52)	(48, 55, 73)	(39, 80, 89)	(60, 91, 109)
(18, 24, 30)	(28, 45, 53)	(24, 70, 74)	(54, 72, 90)	(66, 88, 110)
(16, 30, 34)	(33, 44, 55)	(45, 60, 75)	(35, 84, 91)	(36, 105, 111)

Neke Pitagorine četvorke

(1, 2, 2, 3)	(1, 70, 70, 99)	(2, 16, 64, 66)	(2, 44, 92, 102)
(1, 4, 8, 9)	(2, 3, 6, 7)	(2, 18, 39, 43)	(2, 49, 86, 99)
(1, 6, 18, 19)	(2, 4, 4, 6)	(2, 18, 81, 83)	(2, 54, 63, 83)
(1, 8, 32, 33)	(2, 5, 14, 15)	(2, 19, 34, 39)	(2, 59, 94, 111)
(1, 10, 50, 51)	(2, 6, 9, 11)	(2, 20, 100, 102)	(2, 61, 62, 87)
(1, 12, 12, 17)	(2, 7, 26, 27)	(2, 21, 42, 47)	(2, 66, 99, 119)
(1, 12, 72, 73)	(2, 8, 16, 18)	(2, 22, 59, 63)	(2, 68, 76, 102)
(1, 14, 98, 99)	(2, 9, 42, 43)	(2, 24, 24, 34)	(3, 4, 12, 13)
(1, 18, 30, 35)	(2, 10, 11, 15)	(2, 26, 29, 39)	(3, 6, 6, 9)
(1, 22, 46, 51)	(2, 10, 25, 27)	(2, 26, 83, 87)	(3, 6, 22, 23)
(1, 28, 76, 81)	(2, 11, 62, 63)	(2, 29, 82, 87)	(3, 8, 36, 37)
(1, 32, 100, 105)	(2, 12, 36, 38)	(2, 31, 94, 99)	(3, 10, 54, 55)
(1, 34, 38, 51)	(2, 13, 86, 87)	(2, 34, 53, 63)	(3, 12, 24, 27)
(1, 44, 68, 81)	(2, 14, 23, 27)	(2, 36, 60, 70)	(3, 12, 76, 77)
(1, 68, 80, 105)	(2, 14, 49, 51)	(2, 43, 46, 63)	(3, 14, 18, 23)

Neke blizu Pitagorine trojke

(2, 2, 3)	(22, 46, 51)	(32, 100, 105)	(58, 334, 339)	(82, 670, 675)
(4, 8, 9)	(22, 242, 243)	(32, 512, 513)	(60, 132, 145)	(86, 278, 291)
(6, 18, 19)	(24, 288, 289)	(34, 38, 51)	(62, 382, 387)	(88, 772, 777)
(8, 32, 33)	(26, 338, 339)	(34, 578, 579)	(64, 112, 129)	(92, 844, 849)
(10, 50, 51)	(20, 200, 201)	(36, 648, 649)	(68, 80, 105)	(96, 348, 361)
(12, 12, 17)	(22, 46, 51)	(38, 142, 147)	(68, 460, 465)	(98, 274, 291)
(12, 72, 73)	(22, 242, 243)	(38, 722, 723)	(70, 70, 99)	(98, 958, 963)
(14, 98, 99)	(24, 288, 289)	(40, 800, 801)	(70, 182, 195)	(104, 172, 201)
(16, 128, 129)	(26, 338, 339)	(42, 174, 179)	(72, 144, 161)	(92, 844, 849)
(18, 30, 35)	(28, 76, 81)	(44, 68, 81)	(72, 516, 521)	(96, 348, 361)
(18, 162, 163)	(28, 392, 393)	(48, 228, 233)	(78, 606, 611)	(98, 274, 291)
(20, 200, 201)	(30, 450, 451)	(52, 268, 273)	(82, 122, 147)	(98, 958, 963)

Neke skoro Pitagorine trojke

(1, n, n)	(20, 200, 201)	(36, 648, 649)	(68, 80, 105)	(96, 348, 361)
(2, 2, 3)	(22, 46, 51)	(38, 142, 147)	(68, 460, 465)	(98, 274, 291)
(4, 8, 9)	(22, 242, 243)	(38, 722, 723)	(70, 70, 99)	(98, 958, 963)
(6, 18, 19)	(24, 288, 289)	(40, 800, 801)	(70, 182, 195)	(104, 172, 201)
(8, 32, 33)	(26, 338, 339)	(42, 174, 179)	(72, 144, 161)	(106, 322, 339)
(10, 50, 51)	(28, 76, 81)	(44, 68, 81)	(72, 516, 521)	(112, 476, 489)
(12, 12, 17)	(28, 392, 393)	(48, 228, 233)	(78, 606, 611)	(114, 138, 179)
(12, 72, 73)	(30, 450, 451)	(52, 268, 273)	(82, 122, 147)	(118, 266, 291)
(14, 98, 99)	(32, 100, 105)	(58, 334, 339)	(82, 670, 675)	(122, 566, 579)
(16, 128, 129)	(32, 512, 513)	(60, 132, 145)	(86, 278, 291)	(128, 268, 297)
(18, 30, 35)	(34, 38, 51)	(62, 382, 387)	(88, 772, 777)	(132, 192, 233)
(18, 162, 163)	(34, 578, 579)	(64, 112, 129)	(92, 844, 849)	(132, 336, 361)

Literatura

[1] J. R. M. Antalan, M. D. Tomenes, *A Note on Generating Almost Pythagorean Triples*, International Journal of Mathematics and Scientific Computing 5 (2015), 100–102.
`https://arxiv.org/pdf/1508.07562.pdf`

[2] A. B. Ayoub, *Integral solutions to the equation $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$: a geometric approach*, Mathematics Magazine 57 (1984), 222–223.
`https://www.maa.org/sites/default/files/Ayoub09270.pdf`

[3] C. Y. Bradley, *82.7 Equal Sums of Squares*, The Mathematical Gazette 82 (1998), 80–85.
`https://www.jstor.org/stable/3620159`

[4] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2014.

[5] R. C. Buck, *Sherlock Holmes in Babylon*, The American Mathematical Monthly 87 (1980), 335–345.
`https://www.jstor.org/stable/2321200?seq=1#page_scan_tab_contents`

[6] D. Burton, *The History od Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, 2007.

[7] E. Catalan, Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique (3), 9 (1885), 531–534.

[8] K. Conrad, *The Gaussian integers*, University of Connecticut, 2012.
`http://www.math.uconn.edu/~kconrad/math5230f12/handouts/Zinotes.pdf`

[9] A. Dujella, *Pitagorine trojke*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike mentore, Crikvenica, 1994.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/pitagorine.pdf`

[10] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, 2009.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[11] O. Frink, *Almost Pythagorean Triples*, Mathematics Magazine 60 (1987), 234–236.
`https://www.maa.org/sites/default/files/Orrin_Frink01279.pdf`

[12] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[13] D. F. Mansfield, N. J. Wildberger, *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry*, Historia Mathematica 44 (2017), 395–419. https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001

[14] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[15] R. Spira, *The Diophantine equation* $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$, The American Mathematical Monthly 69 (1962), 360–365. https://www.jstor.org/stable/2312125?seq=1#page_scan_tab_contents

[16] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta, 2009. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf

Sažetak

Pitagorine trojke su rješenja diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$. Nakon kratkog povijesnog pregleda, u radu obrađujemo tri dokaza Euklidove formule za generiranje primitivnih Pitagorinih trojki. Osim navedene, proučavamo neke slične diofantske jednadžbe. Pitagorine četvorke su rješenja diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$. Zatim prikazujemo parametrizirane formule za generiranje primitivnih Pitagorinih četvorki. Blizu Pitagorine trojke su rješenja diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, dok su skoro Pitagorine trojke rješenja diofantske jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Pokazujemo vezu blizu i skoro Pitagorinih trojki s prethodnim jednadžbama te njihov međusobni odnos. Osim toga, u radu navodimo korake za generiranje skoro Pitagorinih trojki.

Summary

Pythagorean triples are solutions of the Diophantine equation $x^2 + y^2 = z^2$. After a short historical review, we elaborate three proofs of Euclid's formula for generating primitive Pythagorean triples. In addition, we study some similar Diophantine equations. Pythagorean quadruplets are solutions of the Diophantine equation $x^2+y^2+z^2 = w^2$. We present parameterized formulas for generating primitive Pythagorean quadruplets. Nearly Pythagorean triples are solutions of the Diophantine equation $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, while almost Pythagorean triples are solutions of the Diophantine equation $x^2+y^2 = z^2+1$. We show a close relationship between nearly and almost Pythagorean triples and their relation with the previous equations. In addition, we outline the steps for generating almost Pythagorean triples.

Životopis

Rođena sam u Bjelovaru 16. siječnja 1992. godine. Nakon završene osnovne škole u Velikoj Trnovitici, 2006. godine upisala sam opći smjer Gimnazije Bjelovar. Zahvaljujući izvrsnim profesoricama matematike u mom školskom obrazovanju, odlučila sam proširiti svoje znanje i ljubav prema matematici te 2010. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika na zagrebačkom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Nakon stečene titule sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike, 2014. godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.