Položaj realnih nultočaka polinoma

Vinceljak, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Vinceljak

POLOŽAJ REALNIH NULTOČAKA POLINOMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić

Zagreb, rujan, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Važnu ulogu u matematici imaju jednostavne realne funkcije koje se zovu polinomi. Njihova je uloga značajna kako u matematici, tako i u primjenama. Nultočke polinoma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ rješenja su algebarske jednadžbe $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. One se prvi puta detaljnije proučavaju u drugom razredu srednjih škola. Tada se na temelju diskriminante određuje ima li dan polinom drugog stupnja dvije različite realne nultočke, jednu dvostruku realnu nultočku ili nema realnih nultočaka, odnosno ima konjugirano kompleksne nultočke. Općenito, svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku, dok polinom parnog stupnja ne mora imati realnih nultočaka. Nultočke polinoma do četvrtog stupnja možemo odrediti direktno pomoću danih formula, ali zbog njihove složenosti one se rijetko koriste. Općenito, određivanje nultočaka polinoma realne varijable $n-$tog stupnja sastoji se od dvije faze.

1. Izolacija jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala unutar kojeg se nalazi bar jedna nultočka.

2. Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost.

Tema ovog rada je upravo prva točka određivanja nultočaka polinoma, tj. određivanje intervala u kojem leže sve realne nultočke polinoma. Krajevi takvog intervala zovu se *granice nultočaka*. Također je potrebno znati i razdvojiti nultočke, tj. odrediti intervale u kojima polinom ima jedinstvenu realnu nultočku.
Rad je podijeljen u dva poglavlja.

U prvom poglavlju uvodi se pojam polinoma. Obrađuju se svojstva djeljivosti polinoma te najveća zajednička mjera dvaju polinoma. Dokazuje se Bézoutov teorem, a u točki 1.6 pokazujemo da polinom s realnim koeficijentima može imati realne nultočke i/ili parove konjugirano kompleksnih nultočaka. U točki 1.7 dajemo neke granice realnih nultočaka polinoma.

U drugom poglavlju ovog rada proučavamo tri korisne metode razdvajanja realnih nultočaka polinoma, kojima se određuje koliko (najviše) realnih nultočaka može imati polinom u zadanom intervalu. Najboljom od tih metoda smatra se ona koju je otkrio švicarski matematičar Jacques Sturm. Jednostavnije za primjenu su metoda razdvajanja multočaka polinoma korištenjem samo njegovih derivacija, a koju je pronašao francuski matematičar

Joseph Fourier, te Descartesovo pravilo predznaka za određivanje pozitivnih (ili negativnih) nultočaka polinoma. Mnogim primjerima potkrijepit ćemo primjenu tih teorema.

Poglavlje 1

Nultočke polinoma

1.1 Pojam polinoma

Definicija 1.1.1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kojoj je $\mathbb{R}$ domena i kodomena, zadana formulom*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

gdje su a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, realni brojevi, $a_n \neq 0$, n prirodan broj, zove se ***polinom n-tog stupnja****. Brojeve a_i zovemo* ***koeficijenti*** *polinoma f. Koeficijent $a_n \neq 0$ zove se* ***vodeći ili najstariji koeficijent*** *polinoma f. Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, tada se prirodni broj n zove* ***stupanj*** *polinoma.*

Da polinom f ima stupanj n, zapisujemo ovako: $\mathrm{st}\, f = n$. Dakle, stupanj polinoma f je najveća potencija od x koja se pojavljuje u izrazu (1.1) uz koeficijente različite od nule.

Zapis (1.1) zove se *kanonski zapis* polinoma f.

Funkcija $x \mapsto ax^k$, gdje su $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, zove se *monom k-tog stupnja*. Uočimo da je svaki polinom jednak zbroju monoma.

Definicija 1.1.2. *Polinom*

$$0(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$$

zovemo ***nulpolinomom*** *i označavamo ga s* 0.

Nulpolinom je jedini polinom za koji se stupanj ne definira.

Polinom f zadan formulom $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zove se *konstantni polinom* ili kraće, *konstanta*.

Definicija 1.1.3. *Ako je vodeći koeficijent polinoma f jednak jedan, onda kažemo da je f* ***normiran*** *polinom.*

Dakle, normiran polinom ima oblik

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ .$$

Skup svih polinoma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označavamo sa $\mathbb{R}[x]$ i zovemo *prstenom polinoma*.

Objasnimo značenje tog pojma.

Definicija 1.1.4. *Skup $\mathcal{P}$ zove se* ***prsten*** *ako su na $\mathcal{P}$ definirane dvije algebarske operacije, zbrajanje $+$ i množenje $\cdot$, i ako one imaju sljedeća svojstva:*

1. *Za sve $a, b \in \mathcal{P}$ je $a + b \in \mathcal{P}$.*
2. *Zbrajanje je asocijativno, tj. za sve $a, b, c \in \mathcal{P}$ vrijedi*
$$(a + b) + c = a + (b + c) \ .$$
3. *Postoji element $0 \in \mathcal{P}$ tako da za svaki $a \in \mathcal{P}$ vrijedi $a + 0 = 0 + a = a$. 0 se zove neutralni element za zbrajanje u $\mathcal{P}$.*
4. *Za svaki $a \in \mathcal{P}$ postoji $-a \in \mathcal{P}$ takav da je*
$$a + (-a) = 0 \ .$$
Element $(-a)$ zove se suprotni element od a.
5. *Zbrajanje je komutativno, tj. za sve $a, b \in \mathcal{P}$ vrijedi*
$$a + b = b + a \ .$$
6. *Za sve $a, b \in \mathcal{P}$ je $a \cdot b \in \mathcal{P}$.*
7. *Množenje je asocijativno, tj. za sve $a, b, c \in \mathcal{P}$ vrijedi*
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ .$$
8. *Množenje je distributivno s obje strane u odnosu prema zbrajanju, tj. za sve $a, b, c \in \mathcal{P}$ vrijedi:*
$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \quad (distribucija\ slijeva) \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \quad (distribucija\ zdesna) \ . \end{aligned}$$

Prsten $\mathcal{P}$ je prsten s jedinicom ako postoji element $e \in \mathcal{P}$ takav da je $a \cdot e = e \cdot a = a$ za svaki $a \in \mathcal{P}$. e se zove jedinica u $\mathcal{P}$. Prsten $\mathcal{P}$ zovemo komutativnim ako je i množenje komutativno, tj. ako je $a \cdot b = b \cdot a$ za sve $a, b \in \mathcal{P}$.

$\mathbb{R}[x]$ je komutativni prsten, uz operacije *zbrajanje* i *množenje* polinoma koje se definiraju na sljedeći način.

Definicija 1.1.5. *Za dva polinoma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad i \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

zbroj i produkt su redom

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

i

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = d_s x^s + d_{s-1} x^{s-1} + \cdots + d_1 x + d_0$$

gdje su

$$c_k = a_k + b_k \quad (0 \leq k \leq \max\{n, m\})$$

i

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad (0 \leq k \leq n + m) .$$

Pritom smatramo da je $a_j = 0$ za $j > n$ i $b_j = 0$ za $j > m$.

$\mathbb{R}[x]$ je prsten s jedinicom. Ulogu jedinice ima polinom $e \in \mathbb{R}[x]$ definiran sa $e(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomenimo još da za nenul polinome $f, g \in \mathbb{R}[x]$ vrijedi

$$\mathrm{st}\,(fg) = \mathrm{st}\, f + \mathrm{st}\, g .$$

Također, ako je $f + g \neq 0$, tada je

$$\mathrm{st}\,(f + g) \leq \max\{\mathrm{st}\, f, \mathrm{st}\, g\} .$$

Polinomi $f, g \in \mathbb{R}[x]$ su *jednaki* ako i samo ako je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada pišemo $f = g$.

Kriterij za jednakost dvaju polinoma može se iskazati u terminima njihovih koeficijenata, o čemu govori sljedeći rezultat čiji dokaz se može pronaći npr. u [4, teorem 2, str. 9].

Teorem 1.1.6. *Polinomi*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad i \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, *su jednaki ako i samo ako je* $m = n$ *i vrijedi* $a_k = b_k$ *za svaki* $k = 0, 1, \ldots, n$, *tj. kada su istoga stupnja i u njihovim kanonskim zapisima se koeficijenti uz iste potencije od* x *podudaraju.*

1.2 Djeljivost polinoma

Za potrebe ovog rada, uvest ćemo u prsten polinoma $\mathbb{R}[x]$ pojam djeljivosti.

Definicija 1.2.1. *Za polinom* f *kažemo da je djeljiv polinomom* $g \neq 0$ *ako postoji polinom* h, $\operatorname{st} h > 0$, *takav da je* $f = g \cdot h$.

Teorem 1.2.2. *Za svaka dva polinoma* f *i* $g \neq 0$ *iz* $\mathbb{R}[x]$ *postoje jedinstveni polinomi* q *i* r *iz* $\mathbb{R}[x]$ *takvi da vrijedi*

$$f = g \cdot q + r \,. \tag{1.2}$$

Pri tome, ako je $r \neq 0$ *vrijedi* $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$.

Dokaz. Pretpostavimo da su f i g stupnja n i m, redom, i da su

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \,.$$

Ako je $n < m$ ili $f = 0$, tada izraz (1.2) vrijedi za $q = 0$ i $r = f$. Pretpostavimo zato da je $n \geq m$.

Promotrimo polinom

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) \,,$$

čiji je stupanj očito manji od n. Označimo s n_1 i s $a_{n_1}^{(1)}$ redom stupanj i vodeći koeficijent polinoma f_1. Ako je $n_1 \geq m$ dalje imamo

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m} x^{n_1 - m} g(x)$$

i s n_2 i $a_{n_2}^{(2)}$ redom označimo stupanj i vodeći koeficijent ovog polinoma. Proces nastavljamo ako je $n_2 \geq m$.

Očito je kako stupnjevi polinoma $f_1,\ f_2, \ldots$ padaju i da nakon konačnog broja koraka dobivamo jednakost

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m} x^{n_{k-1} - m} g(x) \,,$$

u kojoj je f_k nulpolinom ili polinom stupnja $n_k < m$. U tom slučaju proces prekidamo, a f_k se, korištenjem prethodnih jednakosti, može zapisati kao $f_k = f - gq$, gdje je

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}x^{n_{k-1}-m} .$$

Dakle, polinomi q i $r = f_k$ zadovoljavaju jednakost (1.2), pri čemu je r nulpolinom ili je njegov stupanj manji od stupnja polinoma g.

Za dokaz jedinstvenosti polinoma q i r pretpostavimo da postoje polinomi q' i r' koji zadovoljavaju jednakost

$$f = g\,q' + r' ,$$

pri čemu je $r' = 0$ ili je st $r' <$ st g. Tada je

$$(q - q')g = r' - r , \tag{1.3}$$

pri čemu je polinom na desnoj strani ove jednakosti nulpolinom ili je njegov stupanj manji od stupnja polinoma g. S druge strane, ako je $q - q' \neq 0$, tada je polinom na lijevoj strani jednakosti (1.3) manjeg stupnja od stupnja polinoma g. Prema tome, jednakost (1.3) je moguća samo ako je

$$q' = q, \quad r' = r .$$

Time je teorem dokazan. □

Suglasno svojstvima iz prethodnog teorema 1.2.2, definirajmo sad *dijeljenje* polinoma s *ostatkom*.

Definicija 1.2.3. *Ako je za polinome f i g pripadni polinom $r \neq 0$ iz teorema 1.2.2 o dijeljenju, onda se polinom q zove* ***nepotpuni kvocijent*** *polinoma f i g, a polinom r* ***ostatak*** *pri dijeljenju polinoma f sa g.*

Ako je $r = 0$, onda se q zove ***kvocijent*** *polinoma f i g, a piše se $q = \dfrac{f}{g}$. Polinom f djeljiv je polinomom g ako i samo ako je $r = 0$. Polinom g zovemo još* ***mjerom*** *ili* ***djeliteljem*** *polinoma f.*

Činjenicu da je g djelitelj polinoma f označavamo sa $g|f$. Neka svojstva djeljivosti navest ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 1.2.4. *Za proizvoljne polinome $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ vrijede sljedeće tvrdnje.*

(*i*) *$f|f$.*

(*ii*) *Ako $g|f$ i $f|g$, tada je $f = \alpha g$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(*iii*) *Ako $h|g$ i $g|f$, tada $h|f$.*

(*iv*) *Ako $h|f$ i $h|g$, tada $h|(\alpha f + \beta g)$ za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

1.3 Najveća zajednička mjera dvaju polinoma

Neka su f i g dva polinoma iz $\mathbb{R}[x]$, $f \neq 0,\ g \neq 0$.

Definicija 1.3.1. *Polinom h zove se* ***zajednička mjera*** *polinoma f i g ako su f i g djeljivi sa h.*

Definicija 1.3.2. *Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$ nenul polinomi. Polinom $d \in \mathbb{R}[x]$ je* ***najveća zajednička mjera*** *polinoma f i g ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) *$d|f$ i $d|g$,*

(ii) *ako $d'|f$ i $d'|g$, tada $d'|d$.*

Primjetimo da ako je d najveća zajednička mjera od f i g, tada je i polinom αd, ($\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$) također najveća zajednička mjera polinoma f i g. Stoga se dogovorom uzima da je najveća zajednička mjera *normiran* polinom, tj. polinom kojem je vodeći koeficijent jednak 1. U tom je slučaju ona jednoznačno određena. Za polinome f i g tako definirana najveća zajednička mjera označava se sa $M(f, g)$.

Sada nam preostaje dokazati da za svaka dva polinoma f i g postoji njihova najveća zajednička mjera.

Teorem 1.3.3. *Za svaka dva polinoma $f \neq 0$ i $g \neq 0$ postoji najveća zajednička mjera $M(f, g)$, koja je jednoznačno određena.*

Dokaz. U dokazu teorema koristit ćemo **Euklidov algoritam**, koji se sastoji od uzastopne primjene teorema 1.2.2. Pri tome su za određivanje najveće zajedničke mjere dva polinoma bitni samo ostaci r_i, a ne i količnici q_i, $i = 1, 2, \ldots$. Imajući na umu jednoznačnost mjere, u svakom koraku Euklidovog algoritma moguće je množiti ostatke r_i pogodnim konstantama različitim od nule u cilju dobivanja jednostavnijih izraza pri dijeljenju.

Pretpostavimo da je $\operatorname{st} f \geq \operatorname{st} g$. Označimo s q_1 i r_1 redom količnik i ostatak pri dijeljenju polinoma f sa g. Ako je $r_1 = 0$, tada je g (do na multiplikativnu konstantu) najveća zajednička mjera polinoma f i g. Međutim, ako je $r_1 \neq 0$, tada dijelimo polinom g s r_1, te odgovarajući količnik i ostatak pri dijeljenju redom označimo s q_2 i r_2. Ako je $r_2 = 0$, tada je r_1 (do na multiplikativnu konstantu) najveća zajednička mjera polinoma f i g. Doista, iz

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1, \\ g &= r_1 q_2 + r_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

slijedi $f = (q_1q_2 + 1)r_1$ i $g = q_2 r_1$, tj. $r_1|f$ i $r_1|g$. Da bismo dokazali da je r_1 najveća zajednička mjera od f i g, dovoljno je pretpostaviti da ovi polinomi imaju zajedničku mjeru h i primijetiti da iz (1.4) slijedi $h|r_1$. Doista, iz (1.4) imamo $r_1 = f - gq_1$ pa kako $h|f$ i $h|g$ zaključujemo da $h|(f - gq_1)$ odnosno $h|r_1$.

Međutim, ukoliko je $r_2 \neq 0$, prethodni postupak se nastavlja, suglasno sljedećim jednakostima:

$$\begin{aligned} r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ r_2 &= q_4 r_3 + r_4, \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + r_{k+1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

sve do ispunjenja uvjeta $r_{k+1} = 0$. Tada je r_k (do na multiplikativnu konstantu) najveća zajednička mjera polinoma f i g. To zaključujemo sa sličnim obrazloženjem kao u slučaju $k = 1$.

Preostaje pokazati da je $M(f, g)$ jednoznačno određena. U tu svrhu pretpostavimo da su r_k i r_k' (do na multiplikativne konstante) dvije najveće zajedničke mjere od f i g. Tada $r_k|r_k'$ i $r_k'|r_k$ pa stoga postoje nenul polinomi q i q' takvi da je

$$r_k = r_k' q', \quad r_k' = r_k q.$$

Odavde slijedi $\operatorname{st} r_k' \leq \operatorname{st} r_k$ i $\operatorname{st} r_k \leq \operatorname{st} r_k'$ pa je $\operatorname{st} r_k = \operatorname{st} r_k'$. No, tada su q i q' brojevi pa je $r_k = r_k'$ (do na multiplikativnu konstantu). □

Napomena 1.3.4. *Dokaz prethodnog teorema daje nam i efektivni postupak određivanja najveće zajedničke mjere polinoma f i g. Ako je $\operatorname{st} f \geq \operatorname{st} g$, tada najprije podijelimo f sa g i dobijemo ostatak r_1. Zatim podijelimo g sa r_1 i dobijemo ostatak r_2. Nakon toga podijelimo r_1 sa r_2 i dobijemo ostatak r_3 te postupak nastavljamo sve dok ne dobijemo prvi k za koji je $r_{k+1} = 0$. Tada je ostatak r_k (do na multiplikativnu konstantu) najveća zajednička mjera polinoma f i g.*

Definicija 1.3.5. *Ako je najveća zajednička mjera od f i g jednaka* 1*, kažemo da su polinomi f i g **relativno prosti**.*

Navedimo još neka svojstva najveće zajedničke mjere polinoma.

Teorem 1.3.6. *Za polinome $f \neq 0, g \neq 0$ i $h \neq 0$ vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Ako je polinom h normiran, onda je $M(f\,h, g\,h) = h\, M(f, g)$.*

(ii) *Ako je polinom f normiran, onda je $M(f, g) = f$ ako i samo ako $f \mid g$.*

(iii) *$M(f, g) = M(g, r)$ ako je $f = gq + r$.*

Dokaz. (i) Neka je $d = M(f, g)$. Tada $d|f$ i $d|g$ te stoga $dh|fh$ i $dh|gh$ pa zaključujemo da $dh|M(fh, gh)$. Sada je $M(fh, gh) = dhk$ za neki normirani polinom $k \in \mathbb{R}[x]$. Odavde slijedi $hk|M(fh, gh)$ pa stoga $hk|fh$ i $hk|gh$. Prema tome, $k|f$ i $k|g$ pa $k|M(f, g)$, tj. $k|d$. Pokažimo sada induktivno da $k^n|d$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena. Pretpostavimo da $k^n|d$ i dokažimo da tada $k^{n+1}|d$. Iz $k^n|d$ slijedi da je $d = k^n s$ za neki nenul polinom $s \in \mathbb{R}[x]$. Tada je $M(fh, gh) = dhk = k^{n+1}sh$. Dakle, $hk^{n+1}|M(fh, gh)$ pa stoga $hk^{n+1}|fh$ i $hk^{n+1}|gh$. Zaključujemo da $k^{n+1}|f$ i $k^{n+1}|g$ te stoga $k^{n+1}|M(f, g)$, tj. $k^{n+1}|d$. Time smo matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ pokazali da $k^n|d$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. To je moguće samo ako je $k = 1$. Prema tome, $M(fh, gh) = dhk = dh = hM(f, g)$.

(ii) Neka je $f = M(f, g)$. Tada očito vrijedi $f|f$ i $f|g$. U suprotnom smjeru, ako $f|g$, tada možemo zapisati g kao $g = kf$ gdje je $k \in \mathbb{R}[x]$ nenul polinom. Očito vrijedi $M(f, g) = M(f, kf) = f$.

(iii) Neka je $d = M(g, r)$. Tada $d|g$ i $d|(gq + r)$. Stoga $d|g$ i $d|f$, tj. uvjet (i) iz definicije 1.3.2 je zadovoljen. Pretpostavimo $d'|f$ i $d'|g$. Tada $d'|(f - gq)$. Prema tome $d'|g$, $d'|r$. Budući da je $d = M(g, r)$, mora vrijediti $d'|d$, tj. uvjet (ii) iz defincije 1.3.2 je također zadovoljen. Stoga je $d = M(f, g)$. □

1.4 Bézoutov teorem

Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Tada je

$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$$

jedan element u polju $\mathbb{R}$. Za $f(a)$ kažemo da je *vrijednost* polinoma u točki $x = a$.

Za element $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je *nultočka* polinoma $f \in \mathbb{R}[x]$ ako je vrijednost polinoma u toj točki jednaka nuli, tj. $f(a) = 0$. U tom slučaju, za polinom prvog stupnja $x - a$ kažemo da je *linearni faktor*.

Teorem 1.4.1. *Ako je a nultočka polinoma $f \in \mathbb{R}[x]$, tada je f djeljiv linearnim faktorom $x - a$.*

Dokaz. Kako je

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a)\ ,$$

imamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n) \\ &= [a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})](x - a) \\ &= g(x)(x - a)\ , \end{aligned}$$

gdje je g polinom stupnja $n - 1$. S druge strane, prema pretpostavci je $f(a) = 0$ pa imamo da je $f(x) = g(x)(x - a)$, što znači da je polinom f djeljiv linearnim faktorom $x - a$. □

Sljedeća tvrdnja poznata je kao *Bézoutov teorem*.

Teorem 1.4.2 (Bézoutov teorem). *Ostatak pri dijeljenju polinoma f sa $x-a$ jednak je $f(a)$.*

Dokaz. Kako je $q(x) = x - a$ polinom prvog stupnja, na osnovi teorema 1.2.2, postoji jedinstveni polinom g i konstanta r (polinom stupnja nula) tako da je

$$f(x) = g(x)(x - a) + r. \tag{1.6}$$

Za $x = a$ u (1.6) dobivamo $r = f(a)$. □

Primjenom prethodnih teorema, svaki polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ stupnja n možemo na jedinstven način rastaviti po potencijama od $x - a$, tj.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n \tag{1.7}$$

gdje su $a_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, realni brojevi. Zaista, na osnovi (1.6) imamo

$$f(x) = a_0 + f_1(x)(x - a) \tag{1.8}$$

gdje je $a_0 = r = f(a)$ i $f_1 = g$. Ako je f_1 polinom nultog stupnja traženi razvoj (1.7) je dobiven. U suprotnom, polinom f_1 dijelimo sa $x - a$ i dobivamo

$$f_1(x) = a_1 + f_2(x)(x - a), \tag{1.9}$$

gdje je $a_1 = f_1(a)$. Na ovaj način, kombinirajući (1.8) i (1.9), dobivamo

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + f_2(x)(x - a)^2 .$$

Nastavljajući ovaj postupak dobit ćemo razvoj (1.7).

Definicija 1.4.3. *Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ proizvoljan polinom iz $\mathbb{R}[x]$, tada polinom*

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

nazivamo (prvom) ***derivacijom*** *polinoma f. Ako je f konstantni polinom, onda je $f' = 0$. Preslikavanje $f \to f'$ zovemo* ***deriviranje*** *u prstenu $\mathbb{R}[x]$.*

Derivacije $f^{(k)}$ višeg reda definiraju se rekurzivno; npr. derivaciju polinoma f' nazivamo *drugom derivacijom* polinoma f i označavamo s f'' ili $f^{(2)}$. Dakle, $f^{(2)} = f'' = (f')'$. Općenito, *k-ta derivacija* polinoma f definira se kao $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$, $k \in \mathbb{N}$, gdje je prema definiciji, $f^{(0)} = f$.

Napomenimo još da, ako je f polinom stupnja $n \geq 1$, onda je f' polinom stupnja $n - 1$, tj. st f' =st $f - 1$. Također, za svaki $k > n =$ st f imamo da je $f^{(k)}$ nulpolinom.

Vidjeli smo (izraz (1.7)) da se svaki polinom može razviti po potencijama od $x - a$. Postoji eksplicitna formula koja daje razvoj polinoma $f \in \mathbb{R}[x]$ po potencijama od $x - a$. Ona ima oblik

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n . \tag{1.10}$$

Prema tome, koeficijenti a_k u rastavu (1.7) mogu se izraziti pomoću derivacija funkcije f, tj. vrijedi

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.11}$$

Formulu (1.10) nazivamo *Taylorovom formulom*.

Napomena 1.4.4. *Mi smo promatrali polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, ali svi ovi rezultati vrijede i u slučaju polja $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, tj. sve što smo pokazali da vrijedi za polinome nad poljem $\mathbb{R}$ vrijedi i za polinome nad poljem $\mathbb{C}$.*

1.5 Osnovni teorem algebre i faktorizacija polinoma

Osim nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva, polinome možemo definirati nad bilo kojim poljem $\mathbb{K}$, kao funkcije $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementi polja $\mathbb{K}$.

Skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{K}$ označavamo s $\mathbb{K}[x]$. Pokazuje se da je $\mathbb{K}[x]$, uz operacije zbrajanja i množenja polinoma (definicija 1.1.5) komutativni prsten s jedinicom.

Ovu točku započinjemo promatranjem polinoma nad tzv. *algebarski zatvorenim* poljima.

Definicija 1.5.1. *Za polje $\mathbb{K}$ kažemo da je* ***algebarski zatvoreno*** *ako svaki polinom $f \in \mathbb{K}[x]$, različit od konstante, ima bar jednu nultočku u $\mathbb{K}$.*

Da sva polja nisu algebarski zatvorena pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.5.2. *Promotrimo polinom $f(x) = 1 + x^2$ nad poljem $\mathbb{K}$. Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f nema ni jednu nultočku u $\mathbb{K}$. Međutim, nad poljem $\mathbb{C}$ ovaj polinom ima dvije nultočke $x = i$ i $x = -i$.*

Sljedeći teorem o algebarskoj zatvorenosti polja kompleksnih brojeva naziva se *osnovni teorem algebre*.

Teorem 1.5.3 (Osnovni teorem algebre)**.** *Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ ima bar jednu nultočku u $\mathbb{C}$.*

Postoji više različitih dokaza ovog teorema. Jedan kratak dokaz može se dati uz pomoć metoda kompleksne analize. Korištenje elementarnih matematičkih znanja zahtjeva komplicirani dokaz pa ćemo ga ovdje zbog toga izostaviti.

Teorem 1.5.3 se često formulira i u obliku:

Teorem 1.5.4. *Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ može se prikazati u obliku produkta n linearnih faktora.*

Očito je da iz teorema 1.5.4 slijedi teorem 1.5.3. Obratno, ako je x_1 nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ koja postoji na osnovi teorema 1.5.3, tada je, prema teoremu 1.4.1, f djeljiv linearnim faktorom $x - x_1$, tj. vrijedi

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x) ,$$

gdje je f_1 polinom stupnja $n - 1$. Ako je $n \geq 2$, tada ponovno primjenom teorema 1.5.3, zaključujemo da f_1 ima bar jednu nultočku, recimo x_2, tako da je

$$f_1(x) = (x - x_2)f_2(x), \quad \text{st } f_2 = n - 2 .$$

Dakle,

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)f_2(x) .$$

Nastavljajući ovakav postupak dolazimo do faktorizacije

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)f_n(x) ,$$

gdje je st $f_n = 0$, tj. f_n je vodeći koeficijent polinoma f.

Dakle, polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1.12}$$

s kompleksnim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $a_n \neq 0$ ima n nultočaka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ i vrijedi

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) . \tag{1.13}$$

Među kompleksnim brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može biti i jednakih. U sljedećoj definiciji uvodimo pojam *višestruke nultočke* polinoma f.

Definicija 1.5.5. *Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Za nultočku $x_1 \in \mathbb{K}$ polinoma $f \in \mathbb{K}[x]$ kažemo da je* ***višestruka nultočka kratnosti k*** *(ili* ***k-terostruka nultočka****)* $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$ *ako postoji polinom $g \in \mathbb{K}[x]$ takav da je*

$$f(x) = (x - x_1)^k g(x), \quad g(x_1) \neq 0. \tag{1.14}$$

Ako je $k = 1$ kažemo da je nultočka x_1 ***prosta*** *ili* ***jednostruka****.*

Teorem 1.5.6. *Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ako je $x = x_1$ višestruka nultočka kratnosti $k > 1$ polinoma $f \in \mathbb{K}[x]$, tada je ona nultočka kratnosti $k-1$ polinoma $f' \in \mathbb{K}[x]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x = x_1$ višestruka nultočka kratnosti $k > 1$ polinoma f. Na temelju prethodne definicije postoji polinom g takav da vrijedi (1.14). Tada je

$$f'(x) = k(x-x_1)^{k-1}g(x) + (x-x_1)^k g'(x) = (x-x_1)^{k-1}g_1(x)\,,$$

gdje je $g_1(x) = kg(x) + (x-x_1)g'(x)$. Kako je $g_1(x_1) = kg(x_1) \neq 0$, zaključujemo da je $x = x_1$ višestruka nultočka kratnosti $k-1$ polinoma f'. □

Teorem 1.5.7. *Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tada je x_1 k-terostruka nultočka polinoma $f \in \mathbb{K}[x]$ ako i samo ako je*

$$f(x_1) = f'(x_1) = \cdots = f^{(k-1)}(x_1) = 0, \quad f^{(k)}(x_1) \neq 0. \tag{1.15}$$

Posebno, x_1 je jednostruka nultočka polinoma f ako i samo ako je $f(x_1) = 0$ i $f'(x_1) \neq 0$.

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $x = x_1$ višestruka nultočka kratnosti k polinoma f. Tada, uzastopnom primjenom teorema 1.5.6 na $f, f', \ldots, f^{(k-2)}$, dobivamo

$$f(x_1) = f'(x_1) = \cdots = f^{(k-1)}(x_1) = 0,$$

pri čemu je x_1 jednostruka nultočka polinoma $f^{(k-1)}$. Tada je $f^{(k-1)}(x) = (x-x_1)g(x)$ za neki polinom g takav da je $g(x_1) \neq 0$. Odavde imamo

$$f^{(k)}(x) = g(x) + (x-x_1)g'(x)$$

pa je $f^{(k)}(x_1) = g(x_1) \neq 0$. Ako je $x = x_1$ jednostruka nultočka od f, onda je $f(x) = (x-x_1)g(x)$ za neki polinom g takav da je $g(x_1) \neq 0$. Tada je $f'(x) = g(x) + (x-x_1)g'(x)$ odakle slijedi $f'(x_1) = g(x_1) \neq 0$. Time smo pokazali da vrijedi (1.15).

Obratno, ako pretpostavimo da vrijedi (1.15), tada se Taylorova formula za polinom f u točki $x = x_1$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_1)^n$$

svodi na

$$f(x) = (x-x_1)^k\left[\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!}(x-x_1) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-x_1)^{n-k}\right],$$

tj. $f(x) = (x-x_1)^k g(x)$, gdje je $g(x_1) = \dfrac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \neq 0$, što znači da je x_1 nultočka kratnosti k polinoma f. □

Kao očitu posljedicu teorema 1.5.7 imamo sljedeći rezultat.

Korolar 1.5.8. *Neka je* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Neka je* x_1 *nultočka polinoma* $f \in \mathbb{K}[x]$. *Tada je* x_1 k*-terostruka nultočka polinoma* f *ako i samo ako je* x_1 $(k-1)$*-terostruka nultočka polinoma* f'.

Korolar 1.5.9. *Neka je* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Neka je* $d = M(f, f')$. *Tada je* x_1 $k-$*terostruka nultočka od* $f \in \mathbb{K}[x]$ *ako i samo ako* x_1 *je* $(k-1)$*-terostruka nultočka od* d.

Dokaz. Ako je x_1 k-terostruka nultočka od f, onda je prema teoremu 1.5.6 x_1 $(k-1)$-terostruka nultočka od f'. Prema tome, $f(x) = (x - x_1)^k g(x)$ i $f'(x) = (x - x_1)^{k-1} h(x)$ za neke polinome g i h takve da je $g(x_1) \neq 0$ i $h(x_1) \neq 0$. Kako je $M(f, f') = d$, sada je jasno da je polinom $x \mapsto (x - x_1)^{k-1}$ djelitelj polinoma d dok $x \mapsto (x - x_1)^k$ to nije. Dakle x_1 je $(k-1)$-terostruka nultočka polinoma d.

Obratno, ako je x_1 $(k-1)$-terostruka nultočka od d, onda je $d(x) = (x-x_1)^{k-1} g(x)$ za neki polinom g takav da je $g(x_1) \neq 0$. Kako je $M(f, f') = d$ slijedi da je polinom $x \mapsto (x-x_1)^{k-1}$ djelitelj od f pa je x_1 nultočka polinoma f kratnosti $r \geq k-1$. Prema prvom dijelu dokaza, tada je x_1 $(r-1)$-terostruka nultočka polinoma d. Dakle $r - 1 = k - 1$, tj. $r = k$. Time je tvrdnja dokazana. □

Direktna posljedica korolara 1.5.9 je sljedeći rezultat.

Korolar 1.5.10. *Neka je* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Ako je* $M(f, f') = 1$, *tj.* f *i* f' *su relativno prosti, tada polinom* $f \in \mathbb{K}[x]$ *može imati samo jednostruke nultočke u polju* $\mathbb{K}$.

Kao direktnu posljedicu teorema 1.5.4 imamo sljedeći rezultat.

Teorem 1.5.11. *Neka su* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *međusobno različite nultočke polinoma* $f \in \mathbb{C}[x]$ *stupnja* m *s kratnošću redom* $k_1, k_2, \ldots, k_m$. *Tada vrijedi faktorizacija*

$$f(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} , \tag{1.16}$$

gdje je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, *a* a_n *je vodeći koeficijent polinoma* f.

Faktorizacija (1.16) naziva se *kanonski rastav polinoma* f *na faktore*.

Teorem 1.5.12. *Kanonski rastav* (1.16) *polinoma* f *na faktore je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da uz kanonski rastav (1.16), postoji drugi kanonski rastav

$$f(x) = a_n (x - y_1)^{l_1} (x - y_2)^{l_2} \cdots (x - y_r)^{l_r}$$

gdje je $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$. Tada mora vrijediti jednakost

$$(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} = (x - y_1)^{l_1} (x - y_2)^{l_2} \cdots (x - y_r)^{l_r} . \tag{1.17}$$

Nije teško vidjeti kako se skupovi nultočaka

$$X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \quad \text{i} \quad Y_r = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$$

moraju poklapati. Naime, ako to nije slučaj, tada jednakost (1.17) nije moguća za svaki $x \in \mathbb{C}$. Na primjer, ako je $x_1 \notin Y_r$, tada za $x = x_1$ lijeva strana jednakosti u (1.17) postaje nula, dok je pri tome desna strana jednakosti različita od nule. Prema tome, ako postoje dva kanonska rastava, onda je jednakost (1.17) moguća samo kada je $X_m = Y_r$, tj. kada je

$$(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} = (x - x_1)^{l_1}(x - x_2)^{l_2} \cdots (x - x_m)^{l_m} . \tag{1.18}$$

Pretpostavimo sada da je, npr. $k_1 \neq l_1$ i neka je $k_1 > l_1$. Dijeljenjem (1.18) s faktorom $(x - x_1)^{l_1}$ dobivamo

$$(x - x_1)^{k_1 - l_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} = (x - x_2)^{l_2} \cdots (x - x_m)^{l_m} ,$$

odakle, stavljajući $x = x_1$, zaključujemo da mora biti $k_1 = l_1$ jer bi u protivnom slučaju lijeva strana bila nula, a desna različita od nule. Na ovaj način dokazujemo da mora biti $k_i = l_i$ za svaki $i = 1, \ldots, m$ što znači da je kanonski rastav (1.16) jedinstven. □

Napomena 1.5.13. *Na kraju ove točke, ukažimo još na mogućnost reduciranja polinoma s višestrukim nultočkama, čiji je rastav dan sa* (1.16)*, na polinom sa samo jednostrukim nultočkama* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Pretpostavimo da je d najveća zajednička mjera polinoma f i f', tj. $d = M(f, f')$. Ukoliko je d konstanta, polinomi f i f' su relativno prosti, što znači da oni nemaju zajedničkih faktora, tj. polinom f ima samo jednostruke nultočke. Međutim, ukoliko je $\operatorname{st} d \geq 1$*, polinom f ima višestruke nultočke jer su tada faktori polinoma d zajednički faktori polinoma f i f'. Stoga dijeljenje polinoma f s d daje kao količnik polinom koji ima iste nultočke kao i polinom f, ali su one sve jednostruke. Dakle, taj polinom ima faktorizaciju*

$$\frac{f(x)}{d(x)} = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) ,$$

gdje je c neka konstanta.

1.6 Nultočke polinoma s realnim koeficijentima

Neka je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 , \tag{1.19}$$

gdje su koeficijenti a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, realni brojevi i $a_n \neq 0$. Tako definirani polinom f nazivamo polinom s realnim koeficijentima. Nultočke polinoma f su, u općem slučaju, kompleksni brojevi. Dokazat ćemo da se one javljaju kao par konjugirano kompleksnih brojeva.

Teorem 1.6.1. *Ako je x_v kompleksna nultočka kratnosti k_v polinoma f s realnim koeficijentima, tada je i $\overline{x}_v$ također njegova kompleksna nultočka iste kratnosti.*

Dokaz. Na osnovi (1.19) imamo

$$\overline{f(x)} = a_n\overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{x} + a_0 = f(\overline{x}) \, .$$

S druge strane, na osnovi faktorizacije (1.16), tj.

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} \quad (k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n) \, ,$$

zaključujemo da je

$$\overline{f(x)} = f(\overline{x}) = a_n(\overline{x} - x_1)^{k_1}(\overline{x} - x_2)^{k_2} \cdots (\overline{x} - x_m)^{k_m} \, ,$$

tj.

$$f(x) = a_n(x - \overline{x}_1)^{k_1}(x - \overline{x}_2)^{k_2} \cdots (x - \overline{x}_m)^{k_m}$$

odakle neposredno slijedi tvrdnja teorema. Time je dokaz završen. □

Na osnovi prethodno izloženog možemo zaključiti da polinom s realnim koeficijentima može imati realne nultočke i/ili parove konjugirano kompleksnih nultočaka.

Pretpostavimo da polinom f ima realne nultočke $x_1, \ldots, x_m$ kratnosti redom $k_1, \ldots, k_m$, i parove konjugirano kompleksnih nultočaka $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, redom kratnosti $s_1, \ldots, s_l$. Naravno, mora vrijediti

$$\sum_{v=1}^{m} k_v + 2\sum_{v=1}^{l} s_v = \operatorname{st} f \, .$$

Kako je

$$(x - \alpha_v - i\beta_v)(x - \alpha_v + i\beta_v) = (x - \alpha_v)^2 + \beta_v^2 = x^2 + p_v x + q_v \quad (p, q \in \mathbb{R}) \, ,$$

parovima konjugiranih kompleksnih nultočaka odgovaraju kvadratni faktori

$$x^2 + p_v x + q_v \quad (p_v = -2\alpha_v, \; q_v = \alpha_v^2 + \beta_v^2)$$

odgovarajuće kratnosti s_v.

Prema tome, polinom f s realnim koeficijetima može se faktorizirati u obliku

$$f(x) = a_n \prod_{v=1}^{m}(x - x_v)^{k_v} \prod_{v=1}^{l}(x^2 + p_v x + q_v)^{s_v} \, , \tag{1.20}$$

gdje je a_n vodeći koeficijent polinoma f.

Primjer 1.6.2. *Neka je* $f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$. *Kako je*

$$f(x) = (x-2)(x^2+1)^2,$$

polinom f *ima jednostruku realnu nultočku* $x_1 = 2$ *i par konjugirano kompleksnih nultočaka* $x_2 = i$, $x_3 = -i$ *čija je kratnost dva.*

Primjer 1.6.3. *Jedna nultočka polinoma* $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12$ *je* $-2i$. *Naći ostale nultočke.*

Rješenje. Kako je ovo polinom s realnim koeficijentima, on mora imati i konjugiranu nultočku $2i$. Dakle polinom f je djeljiv faktorom $(x+2i)(x-2i) = x^2 + 4$. Kako je

$$(4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12) : (x^2 + 4) = 4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

faktorizirani oblik polinoma f je

$$f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + 4\right) .$$

Njegove nultočke su redom $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = -2i, x_4 = 2i$.

1.7 Granice realnih nultočaka polinoma

Neka je dan polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

s realnim koeficijentima a_i, $i \in \mathbb{N}$. Prilikom određivanja realnih nultočaka polinoma f korisno je znati interval u kojem bi se one mogle pojaviti. Drugim riječima, želimo odrediti gornju granicu U takvu da realni broj s neće biti nultočka polinoma f ako je $s > U$, i donju granicu L takvu da s neće biti nultočka od f ako je $s < L$. Za neke polinome takve granice se mogu lako naći. Npr. ako su svi koeficijenti nenegativni, tada je 0 gornja granica, a ako se predznaci koeficijenata izmjenjuju, tada će 0 biti donja granica.

Vodeći član

Proučimo algebarsku jednadžbu

$$f(x) = 2x^4 + 12x^3 - 36x^2 - 38x - 48 = 0.$$

Polinom f je zbroj svojih članova, $2x^4, 12x^3, -36x^2, -38x$ i -48. Članovi su, kao i sam polinom f, funkcije jedne varijable. Među članovima polinoma f, vodeći član se ističe kao funkcija s najbržim rastom, kao što je prikazano u donjoj tablici.

x	$2x^4$	$12x^3$	$-36x^2$	$-38x$	-48	$f(x)$
0	0	0	0	0	−48	−48
1	2	12	−36	−38	−48	−108
10	20000	12000	−3600	−380	−48	27972
20	320000	96000	−14400	−760	−48	400792

U početku, za male vrijednosti varijable x, vrijednost člana $2x^4$ je manja od nekih ostalih članova, ali s porastom x njegova vrijednost nadmašuje ostale. Reći ćemo da je vodeći član dominantan za velike vrijednosti varijable x. Nadalje, primjetimo da za $x > 10$, član $2x^4$ i polinom f imaju isti predznak. Stoga je 10 gornja granica realnih korijena jednadžbe $f(x) = 0$. Slično nalazimo da je -10 donja granica. Može se provjeriti da je $f(x) = 2(x-3)(x+8)(x^2+x+1)$. Kako jednadžba $f(x) = 0$ ima samo dva realna korijena, 3 i -8, vidimo da se oni nalaze unutar tih granica.

Sada razmotrimo jednadžbu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

s općim koeficijentima i $a_n \neq 0$. Možemo napisati polinom f kao

$$f(x) = a_n x^n \left\{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right\}.$$

Kada x teži u beskonačnost, izrazi $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ će težiti u nulu. Stoga će izraz u zagradi težiti u 1. To također znači da će polinom f i vodeći član $a_n x^n$ imati otprilike istu vrijednost kada je $|x|$ dovoljno velik.

Sada ćemo iskoristiti dominantnost vodećeg člana kako bi pronašli par granica za realne korijene jednadžbe $f(x) = 0$. U ovu svrhu dovoljno je pronaći pozitivan broj K takav da za sve $|s| > K$ vrijedi

$$|a_n s^n| > |a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0|.$$

Iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} |f(s)| &= |a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0| \\ &\geq |a_n s^n| - |a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0| > 0. \end{aligned}$$

Prema tome je $f(x) \neq 0$ ako je $s > K$ ili $s < -K$. Dakle realni korijeni od $f(x) = 0$ se mogu pojaviti jedino u segmentu $[-K, K]$. Sljedeći teorem daje jednu takvu vrijednost K.

Teorem 1.7.1. *Neka je dan polinom* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. *Neka je* $k = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$ *i* $K = \dfrac{k}{|a_n|} + 1$. *Tada je*

$$|a_n s^n| > |a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0|$$

ako je $|s| > K$, *pa se stoga realne nultočke polinoma* f *nalaze unutar segmenta* $[-K, K]$.

Dokaz. Neka su k i K vrijednosti dane u teoremu, te neka je s realni broj. Ako je $|s| > K$, tada je $|s| > 1$ te vrijedi $\dfrac{k}{|s|-1} \leq |a_n|$. Stoga je

$$\begin{aligned} |a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0| &\leq |a_{n-1}s^{n-1}| + \cdots + |a_1 s| + |a_0| \\ &\leq k\,(|s|^{n-1} + \cdots + |s| + 1) \\ &= \frac{k}{|s|-1}\,(|s|^n - 1) \\ &\leq |a_n|\,(|s|^n - 1) \\ &< |a_n s^n|. \end{aligned}$$

Dakle, $|a_n s^n| > |a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0|$ pa se prema prethodnim razmatranjima realne nultočke polinoma f nalaze unutar segmenta $[-K, K]$. □

Primjenjujući teorem1.7.1 na jednadžbu $2x^4 + 12x^3 - 36x^2 - 38x - 48 = 0$, dobivamo $k = 48$ i $K = 25$. Tako se granice 25 i -25 lako pronalaze pomoću ove metode. Za usporedbu sa starijim parom granica 10 i -10, koje smo dobili za isti polinom ranije, novi par se lakše procijeni, ali je manje precizan.

Konstantan član

Slično kao i za vodeći član, za koji smo vidjeli da je dominantan za velike vrijednosti varijable x, konstantan član postaje dominantan za male vrijednosti varijable x. Kako bismo to uočili, zapišimo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$, kao

$$f(x) = a_0 \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_0}x + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_n}{a_0}x^n \right\}.$$

Kada x teži u nulu, svi izrazi $x, x^2, \ldots, x^n$ teže u nulu. Stoga, kada je $0 < |x|$ dovoljno malen, vrijednost $f(x)$ malo će se razlikovati od konstante a_0. Ova dominantnost konstantnog člana može se koristiti za određivanje donje granice pozitivnih korijena i gornje granice negativnih korijena od $f(x) = 0$. U ovu svrhu dokazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem 1.7.2. *Neka je dan polinom $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i neka je $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Neka je $g = \max\{\,|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\,\}$ i $H = \dfrac{|a_0|}{|a_0| + g}$. Tada je*

$$|a_0| > |a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n|$$

ako je $|s| < H$, pa se stoga realne nultočke polinoma f nalaze unutar $\langle -\infty, -H] \cup [H, \infty\rangle$.

Dokaz. Razmotrimo polinom $h(y) = y^n f\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Tada je

$$h(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n\ .$$

Između danog polinoma f i njegove transformacije h, postoji formalna veza: ako je $r \neq 0$ nultočka od f, tada je $\dfrac{1}{r}$ nultočka od h, i obratno. Štoviše, ako primijenimo teorem 1.7.1 na polinom h, nalazimo da vrijednost k koja odgovara polinomu h iznosi g, a vrijednost K iznosi $\dfrac{1}{H}$ jer je

$$\frac{1}{H} = \frac{|a_0| + g}{|a_0|} = \frac{g}{|a_0|} + 1 = \frac{k}{|a_0|} + 1 = K\ .$$

Stoga, ako je $|s| < H$, tada je $\left|\dfrac{1}{s}\right| > K$ pa primjenom teorema 1.7.1 dobivamo

$$\left|a_0 \frac{1}{s^n}\right| > \left|a_1 \frac{1}{s^{n-1}} + a_2 \frac{1}{s^{n-2}} + \cdots + a_n\right|\ .$$

Dakle $|a_0| > |a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n|$. □

Prethodni teorem daje H kao donju granicu pozitivnih nultočaka i $-H$ kao gornju granicu negativnih nultočaka polinoma f. Ovdje primjećujemo da je vrijednost $H = \dfrac{|a_0|}{|a_0| + g}$ između 0 i 1. Općenito, teorem daje prilično lošu procjenu granica realnih korijena jednadžbe $f(x) = 0$. U nekim slučajevima, ovakva procjena može čak biti beskorisna. Uzmimo, na primjer, jednadžbu $x^2 - 50x + 5000 = (x - 100)(x + 50) = 0$ koja ima pozitivan korijen 100 i negativan korijen -50. Donja granica pozitivnih korijena koju daje teorem je manja od 1 i gornja granica je veća od -1. Stoga nam teorem daje samo neke korisne informacije za određivanje korijena koji leže između -1 i 1. Međutim, bez obzira na činjenicu da nam za pojedine polinome teoremi 1.7.1 i 1.7.2 mogu pružiti prilično grube procjene granica, postojanje takvih granica od neizmjerne je važnosti za proučavanje određenih analitičkih svojstava polinomnih funkcija.

Iz prethodnih razmatranja slijedi rezultat koji ćemo u daljnjem radu često koristiti.

Korolar 1.7.3. *Neka je dan polinom* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *takav da je* $a_n \neq 0$ *i* $a_0 \neq 0$. *Tada za dovoljno veliki pozitivan c,* $f(c)$ *i* a_n *će imati isti predznak, dok će za dovoljno mali h,* $f(h)$ *i* a_0 *imati isti predznak.*

Ostale granice realnih nultočaka polinoma

Teoremi 1.7.1 i 1.7.2 nam pružaju procjene vrijednosti granica H i K realnih nultočaka polinoma f čiji je konstantni član različit od nule. Nultočke se mogu naći u segmentima $[H, K]$ i $[-K, -H]$. No, u nekim slučajevima vrijednosti K i H mogu biti suviše grube kako bi bile stvarno korisne. Uzmimo, na primjer, $f(x) = x^3 + 20x^2 + 75x - 1000$. U ovom je slučaju $K = 1001$. Dijeljenjem polinoma f polinomom $g(x) = x - 5$ dobivamo da je $f(x) = (x-5)(x^2 + 25x + 200)$. Može se provjeriti da je $x = 5$ jedina realna nultočka polinoma f. Jasno je da za $x > 5$ ovaj polinom poprima pozitivne vrijednosti. Zato polinom f nema pozitivne nultočke veće od 5. Stoga, kao gornja granica nultočaka, $K = 1001$ je prevelik da bi bio koristan. Ako pažljivije pročitamo dokaz teorema 1.7.1, uočit ćemo da nismo uzeli u obzir predznake i eksponente članova $a_i x^i$ polinoma f i time smo precijenili K.

Sada ćemo dati preciznije procjene vrijednosti granica realnih nultočaka polinoma f. Primjećujemo da ako su svi koeficijenti od f nenegativni, tada jednadžba $f(x) = 0$ nema pozitivnih korijena i 0 može poslužiti kao donja granica. Stoga je dovoljno uzeti u obzir samo polinome koji imaju neke koeficijente negativne.

Teorem 1.7.4. *Neka je dan polinom* $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *koji ima neke koeficijente negativne i vodeći koeficijent jednak je* 1. *Neka je* a_r *prvi negativan koeficijent (tj.* $a_r < 0$ *i* $a_{r+1} \geq 0,\ a_{r+2} \geq 0, \ldots,\ a_{n-1} \geq 0$*) i neka je* $-G = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. *Tada je* $f(s) > 0$ *za bilo koji realni broj* $s \geq 1 + \sqrt[n-r]{G}$.

Dokaz. Proizlazi iz definicije G i r da je

$$\begin{aligned} f(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \\ &\geq s^n + a_r s^r + \cdots + a_1 s + a_0 \\ &\geq s^n - G(s^r + \cdots + s + 1) \\ &= s^n - G\,\frac{s^{r+1} - 1}{s - 1}\,. \end{aligned}$$

Stoga je dovoljno pokazati da ako je

$$s \geq 1 + \sqrt[n-r]{G}$$

tada je

$$G(s^{r+1} - 1) < s^n(s - 1).$$

Neka je $s \geq 1 + \sqrt[n-r]{G}$. Budući da polinom f ima neke negativne koeficijente, zaključujemo da je $0 < G \leq (s-1)^{n-r}$ i $1 < s$. Tada je

$$G(s^{r+1} - 1) < Gs^{r+1} \leq s^{r+1}(s-1)^{n-r} = s^{r+1}(s-1)(s-1)^{n-r-1} \leq s^{r+1}(s-1)s^{n-r-1} = s^n(s-1).$$

Time je dokaz završen. □

Izraz $1 + \sqrt[n-r]{G}$ naveden u gornjem teoremu u terminima koeficijenata polinoma f je stoga gornja granica svih pozitivnih korijena jednadžbe $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ s nekim negativnim koeficijentima. Za jednadžbu $x^3 + 20x^2 + 75x - 1000 = 0$, razmatranu ranije u ovoj točki, dobivamo gornju granicu $1 + \sqrt[3-0]{1000} = 11$ što je daleko bolje od vrijednosti 1001 koju daje teorem 1.7.1. Isto tako za jednadžbu $2x^4 + 12x^3 - 36x^2 - 38x - 48 = 0$ koju smo promatrali ranije u točki 1.7, dobivamo $1 + \sqrt[4-2]{24} \approx 5,9$. Tako se 6 može uzeti kao gornja granica pozitivnih korijena jednadžbe koja je također preciznija od prethodnih vrijednosti 10 i 25. U stvari 6 je prilično blizu 3, jedinom pozitivnom korijenu jednadžbe.

Sljedeći primjeri će pokazati da je teorem 1.7.4 vrlo prikladan za primjenu.

Primjer 1.7.5. *Pokazati da jednadžba* $x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 24 = 0$ *ima 9 kao gornju granicu svojih realnih korijena.*

Rješenje. Koristeći notaciju teorema 1.7.4 imamo $n = 4,\ r = 3,\ G = 8$. Stoga je $1 + \sqrt[n-r]{G} = 9$. Po teoremu 1.7.4, $f(s) > 0$ za sve $s \geq 9$. Stoga svi korijeni od $f(x) = 0$ moraju biti manji od 9, tj. 9 je gornja granica realnih korijena.

Primjer 1.7.6. *Naći gornju granicu realnih korijena jednadžbe* $3x^5 + 9x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 153x + 54 = 0$.

Rješenje. Dijeljenjem jednadžbe s 3 dobivamo

$$x^5 + 3x^4 + x^3 - 8x^2 - 51x + 18 = 0.$$

Stoga je $n = 5,\ r = 2,\ G = 51$. Prema tome je $1 + \sqrt[3]{51} \approx 4,71$ gornja granica realnih korijena.

Odgovarajućom transformacijom jednadžbe $f(x) = 0$, teorem 1.7.4 nam može poslužiti za određivanje donje granice realnih nultočaka polinoma f. Neka je

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

polinom s realnim koeficijentima. Promotrimo transformirani polinom

$$g(y) = (-1)^n f(-y) = (-1)^n \left\{(-y)^n + a_{n-1}(-y)^{n-1} + \cdots + a_1(-y) + a_0\right\}.$$

Tada je odnos između jednadžbi $f(x) = 0$ i $g(y) = 0$ takav da je realni broj $-r$ korijen jednadžbe $f(x) = 0$ ako i samo ako je r korijen jednadžbe $g(y) = 0$ i obratno. Stoga, ako je $K > 0$ gornja granica pozitivnih korijena od $g(y) = 0$, tada je $-K$ donja granica negativnih korijena od $f(x) = 0$.

Donje granice dobivene primjenom teorema 1.7.4 preciznije su od onih dobivenih primjenom teorema 1.7.1. Uzmimo ponovo polinom $f(x) = x^3 + 20x^2 + 75x - 1000$ koji ima samo jednu realnu nultočku 5. Donja granica prema teoremu 1.7.1 je -1001. Primjenom teorema 1.7.4, dobivamo jednadžbu $g(y) = (-1)^3 f(-y) = y^3 - 20y^2 + 75y + 1000 = 0$ koja ima gornju granicu realnih korijena 21. Stoga je -21, kao donja granica realnih korijena za danu jednadžbu $f(x) = 0$, daleko bolja ocjena od -1001.

Primjer 1.7.7. *Pokazati da jednadžba* $x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 24 = 0$ *nema negativnih korijena.*

Rješenje. Zamjenimo li x s $-y$ u danoj jednadžbi dobivamo $y^4 + 5y^3 + 40y^2 + 8y + 24 = 0$. Ova jednadžba nema negativnih koeficijenata i stoga nema pozitivnih korijena. Dakle, dana jednadžba nema negativnih korijena.

Primjer 1.7.8. *Naći donju granicu realnih korijena jednadžbe* $3x^5 + 9x^4 + 3x^3 - 24x^2 - 153x + 54 = 0$ *iz primjera 1.7.6.*

Rješenje. Zamjenom x s $-y$ u danoj jednadžbi te dijeljenjem dobivene jednadžbe s -3, dobivamo $y^5 - 3y^4 + y^3 + 8y^2 - 51y - 18 = 0$. Po teoremu 1.7.4 dobivamo $1 + 51 = 52$ kao gornju granicu pozitivnih korijena posljednje jednadžbe po y. Dakle -52 je donja granica negativnih korijena dane jednadžbe po x.

Na polinom f iz teorema 1.7.4 možemo primijeniti i neke druge prikladne transformacije te tako dobiti nove granice korijena jednadžbe $f(x) = 0$. Neka je opet

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinom s realnim koeficijentima. Promotrimo transformirani polinom

$$h(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Tada je odnos između jednadžbi $f(x) = 0$ i $h(z) = 0$ takav da je realni broj različit od nule $\frac{1}{r}$ korijen od $f(x) = 0$ ako i samo ako je r korijen od $h(z) = 0$ i obratno. Dakle, ako je

$K > 0$ gornja granica pozitivnih korijena od $h(z) = 0$, tada je $\dfrac{1}{K}$ donja granica pozitivnih korijena od $f(x) = 0$.

Primjer 1.7.9. *Pokazati da svi realni korijeni jednadžbe $x^4 - 5x^3 + 40x^2 - 8x + 24 = 0$ pripadaju otvorenom intervalu $\langle \frac{3}{4}, 9\rangle$ realnog pravca.*

Rješenje. Prema primjeru 1.7.7 i činjenici da konstantan član nije nula, jednadžba može imati samo pozitivne korijene. Prema primjeru 1.7.5 svi korijeni jednadžbe manji su od 9. Da pronađemo donju granicu, zamjenjujemo x s $\dfrac{1}{z}$ i množimo dobivenu jednadžbu sa z^4 te dobivamo

$$1 - 5z + 40z^2 - 8z^3 + 24z^4 = 0.$$

Podijelimo ovu jednadžbu s 24 kako bi vodeći koeficijent imao vrijednost 1 te dobivamo

$$z^4 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{5}{3}z^2 - \frac{5}{24}z + \frac{1}{24} = 0.$$

Sada je $n = 4$, $r = 3$ i $G = \dfrac{1}{3}$. Dakle, prema teoremu 1.7.4, korijeni ove jednadžbe moraju biti manji od $1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$. Prema tome, pozitivni korijeni početne jednadžbe moraju biti veći od $\dfrac{3}{4}$. Stoga oni pripadaju intervalu $\langle \frac{3}{4}, 9\rangle$.

1.8 Bolzanov teorem

Kao neprekidna funkcija, polinom f ima mnogo zanimljivih i korisnih svojstva. Za proučavanje raspodjele nultočaka polinoma potrebno je sljedeće svojstvo neprekidnih funkcija koje je otkrio Bernard Bolzano (1781. – 1848.). Dokaz tog teorema može se pronaći npr. u [1, teorem 4, str. 31].

Teorem 1.8.1. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ te ako su $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog predznaka, onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ tako da je $f(c) = 0$.*

U geometrijskoj interpretaciji, teorem navodi da graf neprekidne funkcije f između točaka $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, gdje su $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog predznaka, mora sjeći os x.

Napišimo opći teorem srednje vrijednosti 1.8.1 u obliku koji se lako primjenjuje u teoriji jednadžbi. Zbog nedostatka boljeg opisa i jednostavnijeg referiranja, nazvat ćemo ga Bolzanov teorem za polinome.

Teorem 1.8.2 (Bolzanov teorem za polinome)**.** *Neka je f polinom u $\mathbb{R}[x]$. Ako su za $a < b$, $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog predznaka, tada postoji neparan broj nultočaka od f između a i b, svaka $k-$teorostruka nultočka brojana je kao k nultočaka. Ako su $f(a)$ i $f(b)$ istog predznaka, tada između a i b, f ili nema nultočaka ili ima paran broj nultočaka od kojih je svaka $k-$terostruka nultočka brojana kao k nultočaka.*

Dokaz. Razmotrimo najprije slučaj kada su $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog predznaka. Tada, prema teoremu 1.8.1, f ima barem jednu nultočku između a i b. Pretpostavimo da postoji paran broj nultočaka od f između a i b. Označavanjem tih nultočaka s $r_1, \dots, r_{2m}$ možemo zapisati f kao

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_{2m})g(x)$$

gdje g nema nultočku između a i b. Oba izraza

$$(a - r_1)(a - r_2)\cdots(a - r_{2m}) \quad \text{i} \quad (b - r_1)(b - r_2)\cdots(b - r_{2m})$$

su pozitivna. Tada su $f(a)$ i $g(a)$ istog predznaka, te također $f(b)$ i $g(b)$ su istog predznaka. Stoga su $g(a)$ i $g(b)$ suprotnih predznaka i prema teoremu 1.8.1 g ima barem jednu nultočku između a i b. Ali to je besmisleno. Stoga f može imati samo neparan broj nultočaka između a i b. Ovime je dokazana prva tvrdnja teorema. Koristeći sličan argument možemo dokazati i drugu tvrnju teorema □

Očigledan način primjene Bolzanovog teorema je formiranje tablice

x	c_1	c_2	$\dots$	c_{r-1}	c_r
$f(x)$					

gdje je gornji red strogo rastući niz realnih brojeva, a donji red je ispunjen predznacima + i − ili nulama, ovisno je li $f(c_i)$ pozitivan, negativan ili nula. Takva će nam tablica pružiti neku grubu predodžbu o raspodjeli realnih nultočaka polinoma f. Naime, između c_i i c_{i+1} bit će barem jedna nultočka od f ako su $f(c_i)$ i $f(c_{i+1})$ suprotnog predznaka. Međutim, Bolzanov teorem ništa ne govori o postojanju nultočaka u intervalima $\langle c_j, c_{j+1}\rangle$ gdje su $f(c_j)$ i $f(c_{j+1})$ istog predznaka. Zbog ograničenja metode, imat ćemo samo neprecizne i nepotpune informacije o raspodjeli realnih nultočaka polinoma f. U drugom poglavlju proučit ćemo Sturmovu metodu koja daje preciznije informacije o raspodjeli nultočaka, a sada ćemo iznijeti još samo dva jednostavna korolara pomoću kojih se mogu dobiti brze informacije.

Korolar 1.8.3. *Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima te $a_n > 0$, tada f ima realnu nultočku suprotnog predznaka od a_0.*

Dokaz. Zbog praktičnosti označimo s $f(\infty)$ i $f(-\infty)$ vrijednosti za $f(a)$ i $f(-a)$ za dovoljno velike pozitivne vrijednosti a takve da vodeći član od f postaje dominantan. Tada tablica predznaka za vrijednosti funkcije f ima oblik

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	$-$	$+ \ (a_0 > 0)$ $- \ (a_0 < 0)$	$+$

.

Dakle prema teoremu 1.8.2, ako je a_0 negativan, tada f ima pozitivnu nultočku budući da $f(0)$ i $f(\infty)$ imaju suprotne predznake. Ako je a_0 pozitivan, tada $f(-\infty)$ i $f(0)$ imaju suprotne predznake pa zaključujemo da f ima negativnu nultočku.

□

Korolar 1.8.4. *Polinom f parnog stupnja ima pozitivnu i negativnu nultočku ako su vodeći koeficijent i konstantan član od f suprotnog predznaka.*

Dokaz. Tablica predznaka za vrijednosti funkcije f ima oblik

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	$-$ $+$	$+ \ (a_0 > 0)$ $- \ (a_0 < 0)$	$-$ $+$

.

Dakle korolar vrijedi. □

Primjer 1.8.5. *Jednadžba* $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ *ima pozitivan korijen.*
Jednadžba $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$ *ima pozitivan i negativan korijen.*

Poglavlje 2

Razdvajanje realnih nultočaka polinoma

U ovom poglavlju, proučit ćemo tri korisne metode razdvajanja realnih nultočaka polinoma, od kojih se najboljom smatra ona koju je otkrio švicarski matematičar Jacques Sturm (1803. – 1855.).

2.1 Sturmov niz

Podsjetimo se da za dana dva pozitivna broja a i b možemo odrediti njihov najveći zajednički djelitelj $D(a,b)$ primjenom standardnog algoritma za dijeljenje:

$$\begin{array}{rcll} a &=& b\,q_1 + r_1 & \quad 0 \le r_1 < b \\ b &=& r_1\,q_2 + r_2 & \quad 0 \le r_2 < r_1 \\ & \vdots & & \\ r_{m-1} &=& r_m\,q_{m+1} & \\ r_m &=& D\,(a,b). & \end{array}$$

Slično, za dana dva polinoma f i g, $f \neq 0$, $g \neq 0$, st $f \geq$ st g, možemo provesti niz uzastopnih Euklidovih algoritama:

$$\begin{array}{rll} f = gq_1 + r_1, & \qquad r_1 = 0 \text{ ili st } r_1 < \text{st } g \\ g = r_1q_2 + r_2, & \qquad r_2 = 0 \text{ ili st } r_2 < \text{st } r_1 \\ & \vdots & \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}, & \qquad r_{k+1} = 0 \text{ ili st } r_{k+1} < \text{st } r_k \\ & \vdots & \end{array}$$

Zbog uzastopnih ostataka r_k koji imaju strogo padajuće stupnjeve, algoritam se mora prekinuti nakon konačnog broja koraka kod kojih dobivamo

$$r_{m-1} = r_m \, q_{m+1}$$

s ostatkom koji nestaje, tj. $r_{m+1} = 0$.
S druge strane, iz teorema 1.3.6(iii) proizlazi da za svaki korak postupka imamo

$$M(r_{k-1}, r_k) = M(r_k, r_{k+1}).$$

Stoga dobivamo

$$\begin{aligned} & M(f, g) \\ = \; & M(g, r_1) = M(r_1, r_2) = \cdots \\ = \; & M(r_{m-2}, r_{m-1}) = M(r_{m-1}, r_m) \\ = \; & \frac{1}{\alpha_m} r_m \, , \end{aligned}$$

gdje je α_m vodeći koeficijent polinoma r_m.

Primijenimo taj proces na dani polinom f i njegovu prvu derivaciju f'. Prvi korak algoritma daje

$$f = f' q + r$$

gdje je ostatak r ili nulpolinom ili je st $r <$ st f'. Prema shemi koju je predložio Sturm, svaki korak algoritma preinačimo promjenom predznaka ostatka:

$$f = f' q - (-r).$$

Također umjesto r, negativan ostatak $-r$ koristit ćemo kao djelitelj u sljedećem koraku. Rezultat svakog dijeljenja bit će zapisan kao djeljenik je jednak umnošku djelitelja i kvocijenta umanjen za negativan ostatak. Označimo tako f s f_0, f' s f_1, q s q_1, $-r$ s f_2 i zapišimo prva dva koraka kao:

$$f_0 = f_1 \, q_1 - f_2$$

$$f_1 = f_2 \, q_2 - f_3$$

gdje je $-f_3$ ostatak drugog dijeljenja. Slično dobivamo u sljedećem koraku

$$f_2 = f_3 \, q_3 - f_4$$

i općenito

$$f_{k-1} = f_k \, q_k - f_{k+1} \, .$$

Ovaj neznatno preinačen postupak naizmjeničnih dijeljenja provodimo dok ne dobijemo $-f_{m+1} = 0$. Tako na kraju imamo niz polinoma različitih od nule

$$f_0, \; f_1, \; f_2, \; \ldots, \; f_m$$

strogo padajućih stupnjeva za koje je

$$f_0 = f, \quad f_1 = f' \quad \text{i} \quad f_m = \alpha_m M(f, f') ,$$

gdje je α_m vodeći koeficijent polinoma f_m.
Ovaj niz naziva se *Sturmov niz* ili *niz Sturmovih funkcija* od f.

Primjer 2.1.1. *Naći niz Sturmovih funkcija polinoma* $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8$.

Rješenje. Primjena gornjeg postupka na $f_0(x) = f(x) = x^3+4x^2-8$ i $f_1(x) = f'(x) = 3x^2+8x$ daje

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 8 &= (3x^2 + 8x)\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \left(\frac{32}{9}x + 8\right) \\ 3x^2 + 8x &= \left(\frac{32}{9}x + 8\right)\left(\frac{27}{32}x + \frac{45}{128}\right) - \left(\frac{45}{16}\right). \end{aligned}$$

Stoga imamo sljedeći Sturmov niz:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 8 \\ f_1(x) &= 3x^2 + 8x \\ f_2(x) &= \frac{32}{9}x + 8 \\ f_3(x) &= \frac{45}{16} . \end{aligned}$$

Osim toga $M(f, f') = 1$ pa prema korolaru 1.5.10, polinom f nema višestruke nultočke.

Primjer 2.1.2. *Naći niz Sturmovih funkcija polinoma* $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$.

Rješenje. $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$. Tada je

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x)\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) \\ f'(x) &= \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)(16x - 24) . \end{aligned}$$

Stoga imamo sljedeći niz Sturmovih funkcija

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \\ f_1(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 \\ f_2(x) &= \frac{1}{4}(x^2 - 3x + 2) . \end{aligned}$$

Kako je $M(f, f') = 4f_2(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, prema korolaru 1.5.9 uočavamo da su 1 i 2 dvostruke nultočke polinoma f. Stoga je

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1)^2(x - 2)^2.$$

2.2 Sturmov teorem

Vidjeli smo u točki 2.1 da iz danog polinoma $f \in \mathbb{R}[x]$ možemo izvesti Sturmov niz $f_0, f_1, \ldots, f_m$ postupkom naizmjeničnog dijeljenja:

$$\begin{aligned}
&f_0 = f \\
&f_1 = f' \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&f_{k-1} = f_k\, q_k - f_{k+1} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&f_{m-1} = f_m\, q_m\ .
\end{aligned}$$

Bilo koja vrijednost c za x dat će niz vrijednosti ovih funkcija:

$$f_0(c),\ f_1(c), \ldots,\ f_m(c)\ .$$

Međutim, u svrhu izoliranja realnih nultočaka polinoma f, naš jedini interes u ovom nizu vrijednosti leži u njihovim predznacima, točnije, u broju promjena uzastopnih predznaka. Uzmimo na primjer niz Sturmovih funkcija

$$f_0(x) = x^3 + 4x^2 - 8,\ f_1(x) = 3x^2 + 8x,\ f_2(x) = \frac{32}{9}x + 8,\ f_3(x) = \frac{45}{16}$$

polinoma $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8$ iz primjera 2.1.1. Za $x = 0$ ovaj niz Sturmovih funkcija ima sljedeće predznake

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x = 0$	$-$	0	$+$	$+$

Zanemarujući nulu na drugom mjestu, brojimo jednu promjenu predznaka od $f_0(0)$ $(-)$ do $f_2(0)$ $(+)$. Označimo s V_0 ovaj broj promjena. Ovdje indeks 0 označava vrijednost x za koju promatramo broj promjena predznaka. Prema tome $V_0 = 1$. Za $x = 1$ također dobivamo jednu promjenu predznaka pa je $V_1 = 1$.

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x = 1$	$-$	$+$	$+$	$+$

Za $x = 2$ nemamo nikakvih promjena pa je $V_2 = 0$.

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$x = 2$	$+$	$+$	$+$	$+$

Iz gore navedenog vidimo da se V_1 i V_2 razlikuju za jedan, a između V_0 i V_1 nema razlike. Prema Sturmovom teoremu, koji ćemo sada navesti, broj $1 = V_1 - V_2$ upravo je broj nultočaka polinoma f koje leže između $x = 1$ i $x = 2$, a broj $0 = V_0 - V_1$ je broj nultočaka polinoma f koje leže između $x = 0$ i $x = 1$. Daljnja ispitivanja istog niza Sturmovih funkcija donijet će sljedeću tablicu:

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0
1	$-$	$+$	$+$	$+$	1
0	$-$	0	$+$	$+$	1
-1	$-$	$-$	$+$	$+$	1
-2	0	$-$	$+$	$+$	
-3	$+$	$+$	$-$	$+$	2
-4	$-$	$+$	$-$	$+$	3

Red koji odgovara $x = -2$ počinje s 0. To znači da je -2 nultočka polinoma f. U svrhu brojanja ovaj red treba zanemariti; zbog toga je praznina na odgovarajućem mjestu u posljednjem stupcu. Razlika $V_{-3} - V_{-1} = 1$ se također uzima u obzir zbog prisutnosti nultočke $x = -2$. Kako je $V_{-4} - V_{-3} = 1$, također postoji i realna nultočka od f u intervalu između -4 i -3.

Dana jednadžba $x^3 - 4x^2 - 8 = 0$ je kubna, koja se može lako riješiti. Pronalazimo $x^3 - 4x^2 - 8 = (x + 2)(x^2 + 2x - 4) = (x + 2)(x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})$. Doista se nultočka $-1 + \sqrt{5}$ nalazi između 1 i 2, nultočka -2 između -3 i -1 te nultočka $-1 - \sqrt{5}$ između -4 i -3.

Teorem 2.2.1 (Sturmov teorem)**.** *Neka je $f_0, f_1, \ldots, f_m$ niz Sturmovih funkcija polinoma f. Tada za bilo koja dva realna broja a i b, $a < b$, od kojih ni jedan nije nultočka polinoma f, broj različitih nultočaka od f koje leže između a i b jednak je razlici $V_a - V_b$ između promjena predznaka Sturmovih funkcija za $x = a$ i $x = b$.*

Za sada, više smo zainteresirani za primjenu Sturmovog teorema od dokaza njegove valjanosti. Dokaz ovog teorema temelji se na nekoliko lema i kompliciranim klasifikacijama slučajeva, a obradit ćemo ga u točki 2.5.

Primjena Sturmovog teorema sastoji se od tri odvojena dijela. Prvi dio je nalaženje niza Sturmovih funkcija. Drugi dio je postavljanje tablice predznaka i brojanje V_x promjena predznaka. Treći dio je određivanje intervala $\langle a, b\rangle$ u kojima je $V_a - V_b \neq 0$. Očito s posljednja dva dijela neće biti nepotrebnih poteškoća. S druge stane, naizmjenična dijeljenja u prvom dijelu mogu postat vrlo naporna pa je stoga važno obratiti pozornost na moguća pojednostavljenja.

Prvo, kako bi izbjegli razlomke u dijeljenju, možemo pomnožiti bilo koju od funkcija f_k *pozitivnom* konstantom prije dijeljenja s f_{k+1}. Očito je kako ovo neće utjecati na tablicu predznaka.

Drugo, prije nego što iskoristimo f_{k+1} kao djelitelja pri dijeljenju prethodnog f_k, iz f_{k+1} možemo maknuti bilo koji faktor g koji je ili pozitivna konstanta ili polinom koji za svaki x poprima pozitivne vrijednosti. Na primjer, možemo zamijeniti $f_{k+1} = gh_{k+1}$ s h_{k+1} kao $(k+1)-$tu Sturmovu funkciju ako je polinom g oblika, 7, x^2+x+1, $2x^6-4x+5$, x^4+x^2+3, i tako dalje. Vidjet ćemo u točki 2.5 kako ovo uklanjanje, koje dovodi do različitih nizova funkcija, neće utjecati na konačni rezultat tablice predznaka.

Ilustrirajmo primjenu teorema na nekim primjerima.

Primjer 2.2.2. *Primjenom Sturmovog teorema analizirati jednadžbu*

$$x^5 + 3x^3 + 5x - 10\,.$$

Rješenje. Za $f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x - 10$, dobivamo $f_1(x) = f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 5$ što je uvijek pozitivno. Stoga možemo uzeti $f_1(x) = 1$ i prekidamo postupak. Štoviše, kako f' nema realnih nultočaka, prema teoremu 1.5.7 zaključujemo kako su sve realne nultočke polinoma f jednostruke, ako postoje. Sada možemo primjeniti Sturmov teorem na dani polinom f. Iz donje tablice možemo uočiti da jednadžba $x^5 + 3x^3 + 5x - 10 = 0$ ima samo jedan realni korijen, koji je pozitivan.

x	f_0	f_1	V_x
∞	+	+	0
0	−	+	1
$-\infty$	−	+	1

Iz daljih provjera slijedi

x	f_0	f_1	V_x
2	+	+	0
1	−	+	1

.

Prema tome f ima samo jednu jednostruku nultočku u intervalu $\langle 1, 2\rangle$ i četiri kompleksne nultočke.

Uočimo da prema korolaru 1.8.3 polinom f ima barem jednu pozitivnu realnu nultočku. Ovaj rezultat, koji je posljedica Bolzanovog teorema, ne daje nam nikakve daljnje informacije o postojanju još nekih, pozitivnih ili negativnih, nultočaka polinoma f. Sturmov teorem nam daje precizne i potpune informacije da polinom ima samo jednu realnu nultočku i da ta nultočka leži između 1 i 2.

Primjer 2.2.3. *Primjenom Sturmovog teorema analizirati jednadžbu*

$$2x^4 - 13x^2 - 10x - 19 = 0\,.$$

Rješenje. Neka je $f_0(x) = f(x) = 2x^4 - 13x^2 - 10x - 19$. Tada je $f'(x) = 8x^3 - 26x - 10$. Dijeljenjem polinoma f' s 2 možemo uzeti $f_1(x) = 4x^3 - 13x - 5$. Iz

$$2f_0(x) = xf_1(x) - (13x^2 + 15x + 38)$$

proizlazi da možemo uzeti $f_2(x) = 1$, pošto je negativan ostatak $g(x) = 13x^2 + 15x + 38$ kvadratni polinom s pozitivnim vodećim koeficijentom i negativnom diskriminantom pa stoga poprima samo pozitivne vrijednosti. Kako $M(f', g) \mid g$ i g nema realnih nultočaka, to je $M(f', g) = g$ ili $M(f', g) = 1$. Međutim, $M(f', g) = g$ bi povlačilo da $g \mid f'$ što nije istina. Prema tome, $M(f', g) = 1$. Prema teoremu 1.3.6(iii) imamo $M(f, f') = M(f', g)$. Stoga je $M(f, f') = 1$ pa prema korolaru 1.5.10 polinom f nema višestrukih nultočaka. Brza provjera

x	f_0	f_1	f_2	V_x
∞	+	+	+	0
0	−	−	+	1
$-\infty$	+	−	+	2

pokazuje nam da polinom f ima jednu pozitivnu i jednu negativnu nultočku, obje jednostruke. Bolje razdvajanje u intervale dano je u tablici

x	f_0	f_1	f_2	V_x
4	+	+	+	0
3	−	+	+	1
−2	−	−	+	1
−3	+	−	+	2

.

Prema tome dva realna korijena dane jednadžbe leže u intervalima $\langle 3, 4\rangle$ i $\langle -3, -2\rangle$. Osim toga, jednadžba ima par konjugirano kompleksih korijena.

Primjer 2.2.4. *Analizirati jednadžbu*

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0\ .$$

Rješenje. Neka je $f_0(x) = f(x) = x^3 + 11x^2 - 102x + 181$. Tada je $f_1(x) = f'(x) = 3x^2 + 22x - 102$. Dijeljenjem $9f_0(x)$ s $f_1(x)$ dobivamo

$$9f_0(x) = (3x + 11)f_1(x) - (854x - 2751).$$

Izrazimo $f_2(x) = \dfrac{854x - 2751}{854}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom,

$$f_1(x) = q_2(x)f_2(x) + f_1\left(\frac{2751}{854}\right),$$

pa možemo staviti $f_3(x) = -f_1\left(\frac{2751}{854}\right)$. Uočimo da je f_3 (pozitivni) konstantni polinom. Stoga je $M(f, f') = 1$ pa su prema korolaru 1.5.10 sve realne nultočke polinoma f jednostruke. Tablica

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	+	+	+	+	0
4	+	+	+	+	0
3	+	−	−	+	2
−17	+	+	−	+	2
−18	−	+	−	+	3
$-\infty$	−	+	−	+	3

prikazuje da su dvije jednostruke nultočke polinoma f u $\langle 3, 4\rangle$ i jedna jednostruka nultočka u $\langle -18, -17\rangle$.

Primjer 2.2.5. *Analizirati jednadžbu*

$$x^3 - 2x - 5 = 0\ .$$

Rješenje. Neka je $f_0(x) = f(x) = x^3 - 2x - 5$. Tada je $f_1(x) = f'(x) = 3x^2 - 2$, a $3f_0(x) = xf_1(x) - (4x + 15)$. Stoga možemo uzeti $f_2(x) = x + \frac{15}{4}$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom,

$$f_1(x) = q_2(x)f_2(x) + f_1\left(-\frac{15}{4}\right).$$

Dobivamo $f_3(x) = -f_1\left(-\frac{15}{4}\right) < 0$. Stoga je $M(f, f') = 1$ pa su sve realne nultočke polinoma f jednostruke. Iz tablice

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	1
0	$-$	$-$	$+$	$-$	2
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2

vidimo da polinom f ima samo jednu pozitivnu realnu nultočku. Uvrštavanjem 2 i 3 iz intervala $\langle 0, \infty\rangle$ dobivamo

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
3	$+$	$+$	$+$	$-$	1
2	$-$	$+$	$+$	$-$	2

.

Dakle polinom f ima jednu jednostruku nultočku između 2 i 3 i par konjugirano kompleksnih nultočaka.

Primijetimo da su u prethodna četiri primjera zadnje funkcije Sturmovog niza ili konstante različite od nule ili polinomi koji nemaju realne nultočke. Stoga dane jednadžbe nisu imale višestruke realne korijene. Ista metoda (bez izmjena) može se primijeniti na jednadžbe s višestrukim realnim korijenima. Zapravo u svim slučajevima, *razlika $V_a - V_b$ je broj realnih nultočaka danog polinoma između a i b, svaka višestruka nultočka broji se samo jednom.* Stoga je $V_a - V_b$ broj *različitih* realnih nultočaka između a i b.

Primjer 2.2.6. *Analizirati jednadžbu*

$$x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0 .$$

Rješenje. Za $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ imamo $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ pa je

$$\begin{aligned} 4^2 f(x) &= (4x-5)f'(x) - 3(x^2 - 2x + 1) \\ f'(x) &= (4x-7)(x^2 - 2x + 1) . \end{aligned}$$

Stoga funkcije

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 \\ f_1(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 18x - 7 \\ f_2(x) &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

formiraju Sturmov niz. Početni test pokazuje

x	f_0	f_1	f_2	V_x
∞	$+$	$+$	$+$	0
0	$+$	$-$	$+$	2
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	2

.

Prema Sturmovom teoremu jednadžba $f(x) = 0$ treba imati dva različita pozitivna korijena. Doista je $f_2(x) = M(f, f') = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ i $f(x) = (x-1)^3(x-2)$. Dakle, jednadžba ima trostruki korijen $x = 1$ i jednostruki korijen $x = 2$. Budući da nam tablica daje broj različitih realnih korijena dane jednadžbe, ne postoji nesigurnost o tome je li neko rješenje izostavljeno.

Primjer 2.2.7. *Razdvojiti korijene jednadžbe*

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0\,.$$

Rješenje. Za $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0$ imamo $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$ te vidimo da

$$\begin{aligned}
4^2 f(x) &= (4x-3)f'(x) - (19x^2 - 6x - 64) \\
19^2 f'(x) &= (76x - 147)(19x^2 - 6x - 64) - 4704(-x + 2) \\
19x^2 - 6x - 64 &= (-19x - 32)(-x + 2)
\end{aligned}$$

daje sljedeći niz Sturmovih funkcija:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 \\
f_1(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 2x \\
f_2(x) &= 19x^2 - 6x - 64 \\
f_3(x) &= -x + 2\,.
\end{aligned}$$

Prema tome $M(f, f') = -f_3(x) = x - 2$. Stoga je, prema korolaru 1.5.9, 2 dvostruka nultočka polinoma f. Stupanj polinoma f je 4 pa je potrebno provjeriti ima li još realnih nultočaka. Iz tablice

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	+	+	+	−	1
$-\infty$	+	−	+	+	2

uočavamo da polinom f ima samo jednu realnu nultočku, i to je (već pronađena) dvostruka nultočka 2. Stoga su preostala rješenja dane jednadžbe par konjugirano kompleksnih brojeva.

Primijetimo da graf od $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ u potpunosti leži u gornjoj poluravnini koordinatnog sustava. Stoga bi bilo veoma teško pronaći raspodjelu njegovih realnih nultočaka samo Bolzanovom metodom.

Za zaključak ove točke promotrimo opću kubnu jednadžbu u svjetlu Sturmovog teorema. Opći oblik algebarske jednadžbe trećeg stupnja glasi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Supstitucijom $x = y - \frac{a}{3}$ ona poprima oblik

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2.1}$$

gdje je

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Jednadžba (2.1), u kojoj nema kvadratnog člana, zove se *kanonski oblik* jednadžbe trećeg stupnja. Prema tome, svaka jednadžba trećeg stupnja može se svesti na kanonski oblik.

Primjer 2.2.8. *Dana je kubna jednadžba u kanonskom obliku*

$$x^3 + px + q = 0\ .$$

Naći uvjet na koeficijente p i q tako da korijeni jednadžbe budu realni i različiti.

Rješenje. Stavimo $f_1(x) = x^2 + \frac{1}{3}p$. Tada je

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= x\left(x^2 + \frac{1}{3}p\right) + \left(\frac{2}{3}px + q\right) \\ \frac{4}{9}p^2\left(x^2 + \frac{1}{3}p\right) &= \left(-\frac{2}{3}px + q\right)\left(-\frac{2}{3}px - q\right) + \left(\frac{4}{27}p^3 + q^2\right)\ . \end{aligned}$$

Stoga

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x^3 + px + q \\ f_1(x) &= 3x^2 + p \\ f_2(x) &= -(2px + 3q) \\ f_3(x) &= -(4p^3 + 27q^2) \end{aligned}$$

čine Sturmov niz za $f(x) = x^3 + px + q$. Kako bi jednadžba $f(x) = 0$ imala tri različita korijena, nužan i dovoljan uvjet je da je polinom f_3 konstanta različita od nule, tj. $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Stoga moramo razmotriti sljedeća dva slučaja.

(1) $4p^3 + 27q^2 > 0$. Ako je $p > 0$ tada Sturmovom metodom dobivamo

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	2

Ako je $p < 0$ tada Sturmovom metodom dobivamo

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	1
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2

.

Stoga u oba slučaja dobivamo samo jednu realnu nultočku umjesto tri.

(2) $4p^3 + 27q^2 < 0$. Tada je $p < 0$ i

x	f_0	f_1	f_2	f_3	V_x
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3

.

Stoga jednadžba $f(x) = 0$ ima tri različita realna korijena.

Dakle, nužan i dovoljan uvjet da jednadžba $x^3 + 3p + q = 0$ ima tri različita realna korijena je $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Kako se kompleksni korijeni jednadžbe s realnim koeficijentima uvijek pojavljuju kao konjugirani par, jednadžba $x^3 + px + q = 0$ ne može imati višestruke kompleksne nultočke. Stoga slučaj (1) u dokazu iznad kaže da jednadžba ima samo jedan realni korijen i par konjugiranih kompleksnih korijena ako i samo ako je $4p^3 + 27q^2 > 0$. Preostali slučaj kada je $4p^3 + 27q^2 = 0$, recimo slučaj (3), nastupa ako i samo ako dana jednadžba ima tri realna korijena od kojih su barem dva jednaka.

2.3 Fourierov teorem

Iako Sturmova metoda omogućuje razdvajanje svih realnih nultočaka danog polinoma, ona ima nedostatak u tome što Sturmove funkcije nalazimo algoritmom koji uključuje niz napornih dijeljenja. Doista za jednadžbu stupnja većeg od 5, koeficijente od $f_2, f_3, \ldots$ često je teško računati. Prije Sturmovog otkrića, francuski matematičar Joseph Fourier (1768. – 1830.) pronašao je metodu razdvajanja realnih nultočaka polinoma koristeći samo njegove derivacije.

Neka je f polinom stupnja n i neka su

$$f',\ f'', \ldots,\ f^{(k)}, \ldots,\ f^{(n)}$$

njegove uzastopne derivacije. Za bilo koji broj a koji nije korijen jednadžbe $f(x) = 0$, označimo s W_a broj promjena predznaka za niz vrijednosti

$$f(a),\ f'(a), \ldots,\ f^{(n-1)}(a),\ f^{(n)}(a)$$

nakon što su članovi niza jednaki nuli izbrisani.

Teorem 2.3.1 (Fourierov teorem)**.** *Neka su a i b, $a < b$, dva realna broja, od kojih ni jedan nije nultočka polinoma f. Tada je $W_a - W_b$ ili broj nultočaka od f u intervalu $\langle a, b\rangle$ ili premašuje broj nultočaka u tom intervalu za paran broj. Pritom se nultočka višestrukosti m broji kao m nultočaka.*

Teorem je također nazvan po francuskom liječniku F.D. Budanu, suvremeniku Fouriera, iako ga zapravo nije dokazao. Dat ćemo dokaz teorema u točki 2.5. U međuvremenu imajmo na umu da, osim u slučajevima kada je $W_a - W_b$ jednako 1 ili 0, nema načina da kažemo koji od brojeva $W_a - W_b$, $W_a - W_b - 2$, $W_a - W_b - 4, \ldots$ je točan broj nultočaka od f u $\langle a, b\rangle$. Posebno ako je $W_a - W_b$ paran i različit od nule, postojanje nultočaka u $\langle a, b\rangle$ je neizvjesno. S druge strane, ako je $W_a - W_b$ neparan, tada znamo da je barem jedna nultočka u intervalu $\langle a, b\rangle$. U svakom slučaju, iznos $W_a - W_b$ nam daje maksimalan broj nultočaka u intervalu $\langle a, b\rangle$.

Primjer 2.3.2. *Primijeniti Fourierov teorem na jednadžbu*

$$x^3 - 7x - 7 = 0 .$$

Rješenje. Imamo

$$f(x) = x^3 - 7x - 7,\ f'(x) = 3x^2 - 7,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6 .$$

Prema korolaru 1.8.3 zaključujemo da polinom f ima barem jednu pozitivnu nultočku. Primijenimo sada Fourierov test kako bi provjerili ima li f samo jednu pozitivnu nultočku.

x	f	f'	f''	f'''	W
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0
4	$+$	$+$	$+$	$+$	0
3	$-$	$+$	$+$	$+$	1
0	$-$	$-$	0	$+$	1

Test potvrđuje da postoji točno jedna pozitivna nultočka koja leži između 3 i 4. Za negativne vrijednosti varijable x ne možemo dobiti nikakav podatak iz korolara 1.8.3, ali nalazimo

x	f	f'	f''	f'''	W
0	$-$	$-$	0	$+$	1
-1	$-$	$-$	$-$	$+$	1
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3

.

Prema Fourierovom teoremu 2.3.1 postoje dvije nultočke ili nema nultočke između -2 i -1. Prvi slučaj nastupa ako se niz predznaka $+\ +\ -\ +$ ili $+\ -\ -\ +$ dobiva za neku vrijednost između -2 i -1, budući da je $f'' < 0$ i $f''' > 0$ na cijelom intervalu $\langle -2, -1\rangle$. Sada $f'(x) = 3x^2 - 7$ ima nultočku $-\sqrt{7/3} \approx -1,53$. Za $x = -1,6$ dobivamo

x	f	f'	f''	f'''	W
$-1,6$	$+$	$+$	$-$	$+$	2

.

Stoga je jedan korijen dane jednadžbe između -2 i $-1,6$ a drugi između $-1,6$ i -1.

2.4 Descartesovo pravilo predznaka

Puno prije otkrića Fouriera i Sturma u 19. stoljeću, francuski filozof i matematičar René Descartes (1596. – 1650.), kojem inače pripisujemo otkriće analitičke geometrije, dao je pravilo predznaka za određivanje pozitivnih i negativnih nultočaka polinoma. Pravilo je sadržano u njegovoj slavnoj knjizi *La géométrie* objavljenoj 1637. godine. Opisao je pravilo za samo jedan slučaj pomoću jednadžbe 4. stupnja. Pravilo je proširio Isaac Newton (1642. – 1727.) i kasnije dokazao Jean Paul de Gua (1713. – 1785.). U sljedećem obliku ga konačno daje i dokazuje Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.).

Teorem 2.4.1 (Descartesovo pravilo)**.** *Broj pozitivnih nultočaka polinoma $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ili je jednak broju V promjena predznaka u nizu njegovih koeficijenata $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_1,\ a_0$ ili je manji od V za paran broj. Nultočka višestrukosti m ovdje se računa kao m nultočaka.*

Dokaz. Neka je $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ i neka je V broj promjena predznaka u nizu $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_1,\ a_0$. Razmotrimo prvo slučaj kada je $a_0 \neq 0$. Tada za dovoljno veliku pozitivnu vrijednost b, sve funkcijske vrijednosti $f(b),\ f'(b), \ldots, f^{(n-1)}(b),\ f^{(n)}(b)$ imaju isti predznak kao i vodeći koeficijent a_n. Dakle $W_b = W_\infty = 0$. S druge strane, predznaci niza $f(0),\ f'(0),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0),\ f^{(n)}(0)$ isti su predznacima $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$. Dakle $W_0 = V$ i $W_0 - W_\infty = V$ što je prema teoremu 2.3.1 jednako broju pozitivnih nultočaka od f ili premašuje taj broj za paran broj. Time smo pokazali da Descartesovo pravilo vrijedi ako je $a_0 \neq 0$. Ako je $a_0 = 0$, tada možemo napisati $f(x) = x^mg(x)$ gdje polinom g ima konstantan član različit od nule. Sada polinomi g i f imaju jednak broj pozitivnih nultočaka. Također, broj promjena predznaka u nizu koeficijenata od g jednak je kao i od f. Pravilo dakle vrijedi i za slučaj kada je $a_0 = 0$. □

Korolar 2.4.2. *Broj negativnih nultočaka polinoma $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ili je jednak broju promjena predznaka koeficijenata od $f(-x) = (-1)^na_nx^n + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 - a_1x + a_0$ ili je manji od tog broja za paran broj.*

Primjer 2.4.3. *Jednadžba* $x^3 - 3x + 2 = 0$ *ima jedan negativan i dva pozitivna korijena.*

Rješenje. Neka je $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tada je $f(-x) = -x^3 + 3x + 2$ i predznaci njegovih koeficijenata su $- \ + \ +$. Stoga je $V = 1$ i $f(x) = 0$ ima jedan negativni korijen. Predznaci koeficijenata od f su $+ \ - \ +$. Kako je $V = 2$ nemamo konačnu informaciju od Descartesovog pravila, tj. prema tom pravilu dana jednadžba ili nema pozitivnih korijena ili ima dva pozitivna korijena. Međutim $f(1) = f'(1) = 0$. Stoga je 1 pozitivan dvostruki korijen jednadžbe $f(x) = 0$.

Primjer 2.4.4. *Jednadžba* $x^3 + a^2x + b^2 = 0$ *ima dva kompleksna korijena ako je* $b \neq 0$.

Rješenje. Prema Descartesovom pravilu ova kubna jednadžba ima jedan negativni korijen i nijedan pozitivan korijen. Stoga preostala dva korijena moraju biti par konjugirano kompleksnih brojeva.

2.5 Dokazi Sturmovog i Fourierovog teorema

U prethodnim točkama koristili smo Sturmov teorem i Fourierov teorem kako bi razdvojili realne nultočke polinoma bez dokazivanja njihove valjanosti. U ovoj točki ćemo ispraviti taj propust.

Kako bi dokazali Sturmov teorem, trebamo pomoćne rezultate koji se odnose na predznake vrijednosti polinoma i njegove derivacije u okolini određene točke.

Lema 2.5.1. *Ako c nije nultočka polinoma f, tada vrijednosti $f(x)$ imaju isti predznak za sve točke x iz dovoljno male okoline točke c.*

Dokaz. Taylorova formula daje

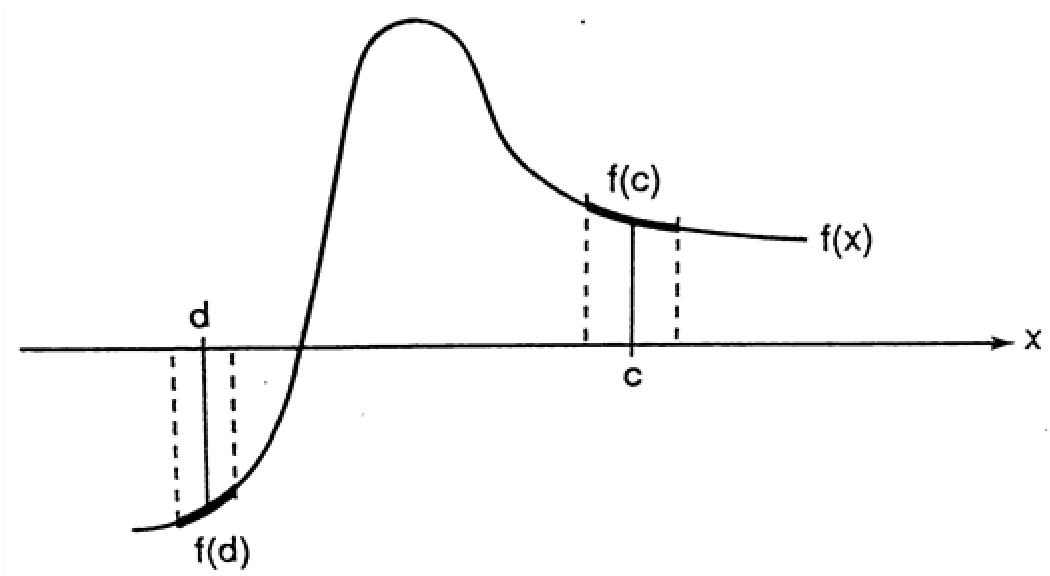
$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \cdots,$$

što je polinom u varijabli h s konstantnim članom $f(c) \neq 0$. Prema teoremu 1.7.2 nalazimo pozitivan broj H takav da za sve h, $|h| < H$ vrijedi

$$|f(c)| > \left| f'(c)h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \cdots \right|.$$

To znači da će za sve točke d iz okoline $\langle c - H, c + H \rangle$ od c, $f(d)$ i $f(c)$ imati isti predznak. Ovime je lema dokazana. □

Lema se može interpretirati i geometrijski. Ako c nije nultočka od f, tada postoji okolina od c u kojoj cijeli dio grafa od $y = f(x)$ nad tom okolinom leži ili iznad ili ispod x−osi:



Lema 2.5.2. *Neka je c nultočka polinoma f. Tada s padom vrijednosti x, vrijednosti $f(x)$ i $f'(x)$ imaju isti predznak neposredno prije i suprotne predznake neposredno nakon prolaska točkom c.*

Dokaz. Moramo dokazati da za dovoljno male pozitivne vrijednosti od h, $f(c+h)$ i $f'(c+h)$ imaju isti predznak dok $f(c-h)$ i $f'(c-h)$ imaju suprotne predznake.

Razmotrimo prvo slučaj kada je c jednostruka nultočka polinom f. U ovom slučaju $f(c) = 0$ i $f'(c) \neq 0$. Tada prema Taylorovoj formuli imamo

$$\begin{aligned}
f(c+h) &= h\left\{f'(c) + \frac{f''(c)}{2!}h + \cdots\right\} \\
f'(c+h) &= f'(c) + f''(c)h + \frac{f'''(c)}{2!}h^2 + \cdots \\
f(c-h) &= -h\left\{f'(c) - \frac{f''(c)}{2!}h + \cdots\right\} \\
f'(c-h) &= f'(c) - f''(c)h + \frac{f'''(c)}{2!}h^2 - \cdots .
\end{aligned}$$

Zaključak leme slijedi iz teorema 1.7.2.

Za slučaj kada je c $m-$terostruka nultočka polinoma f, prema teoremu 1.5.7 imamo $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0$ i $f^{(m)}(c) \neq 0$. Tada ova četiri izraza iznad postaju

$$
\begin{aligned}
f(c+h) &= h^m \left\{ \frac{f^{(m)}(c)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h + \cdots \right\} \\
f'(c+h) &= h^{m-1} \left\{ \frac{f^{(m)}(c)}{(m-1)!} + \frac{f^{(m+1)}(c)}{m!} h + \cdots \right\} \\
f(c-h) &= (-h)^m \left\{ \frac{f^{(m)}(c)}{m!} - \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h + \cdots \right\} \\
f'(c-h) &= (-h)^{m-1} \left\{ \frac{f^{(m)}(c)}{(m-1)!} - \frac{f^{(m+1)}(c)}{m!} h + \cdots \right\} .
\end{aligned}
$$

Stoga slijedi isti zaključak.

□

Lemu 2.5.2 možemo interpretirati i shematski, kako ćemo sada prikazati. Ako je c nultočka polinoma f, tada za dovoljno mali pozitivan h, predznaci vrijednosti od $f(x)$ i $f'(x)$ imat će jednu od sljedećih konfiguracija:

x	f	f'	V_x
$c+h$	$+$	$+$	0
$c-h$	$+$	$-$	1

x	f	f'	V_x
$c+h$	$+$	$+$	0
$c-h$	$-$	$+$	1

.

x	f	f'	V_x
$c+h$	$-$	$-$	0
$c-h$	$+$	$-$	1

x	f	f'	V_x
$c+h$	$-$	$-$	0
$c-h$	$-$	$+$	1

Prvo se prisjetimo definicije Sturmove funkcije. Neka je f polinom s realnim koeficijentima i f' njegova derivacija. U početku stavimo $f_0 = f$ i $f_1 = f'$, i zatim izvršimo uzastopne Euklidove algoritme:

$$f_{k-1} = q_k f_k - f_{k+1}$$

da dobijemo niz Sturmovih funkcija

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_m$$

gdje je $f_m = \alpha_m M(f, f')$ i α_m vodeći koeficijent polinoma f_m. Stoga polinom f ima sve realne jednostruke nultočke ako i samo ako je f_m konstanta različita od nule. Sljedeća lema o Sturmovim funkcijama je također potrebna u dokazu Sturmovog teorema.

Lema 2.5.3. *Ako dvije uzastopne Sturmove funkcije f_j i f_{j+1} imaju zajedničku nultočku c, tada je c višestruka nultočka polinoma f.*

Dokaz. Pretpostavimo da f_j i f_{j+1} imaju zajedničku nultočku c. Tada je $x - c$ zajednički faktor ova dva polinoma. S druge strane, iz definicije Sturmovih funkcija slijedi

$$M(f_j, f_{j+1}) = \frac{1}{\alpha_m} f_m,$$

gdje je α_m vodeći koeficijent polinoma f_m. Stoga je $x - c$ faktor i od $f_m = M(f, f')$. Prema tome c je višestruka nultočka od f. □

Neka je f polinom i neka polinomi

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_m$$

čine Sturmov niz od f. Za bilo koji realni broj c, s V_c označavamo broj promjena predznaka u nizu

$$f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_m(c),$$

pri čemu ne uzimamo u obzir članove niza koji su jednaki nuli.

Teorem 2.5.4 (Sturmov teorem)**.** *Za bilo koja dva realna broja a i b, $a < b$, od kojih ni jedan nije nultočka polinoma f, broj različitih nultočaka od f koje leže između a i b jednak je razlici $V_a - V_b$.*

Dokaz. Želimo pokazati da kako se vrijednost varijable x smanjuje od b prema a, svaki put kad x prolazi kroz nultočku od f, broj promjena predznaka u nizu

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_m$$

poveća se za jedan. Očito je da teorem vrijedi ukoliko dokažemo istinitost ove tvrdnje.

Neka je c bilo koja točka između a i b. Zanima nas broj promjena predznaka niza neposredno prije nego x prođe kroz c i broj promjena predznaka neposredno nakon prolaska x kroz c. Drugim riječima, želimo odrediti brojeve V_{c+h} i V_{c-h} za dovoljno male pozitivne vrijednosti $h > 0$, i njihovu razliku $D_c = V_{c-h} - V_{c+h}$. Za ovu svrhu razlikujemo četiri moguća slučaja ovisno o tome koje se od Sturmovih funkcija poništavaju u točki c.

(1) $f_j(c) \neq 0$ za $j = 0, 1, \ldots, m$.

(2) $f_0(c) \neq 0$ i $f_j(c) = 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(3) $f_0(c) = 0$ i $f_1(c) \neq 0$.

(4) $f_0(c) = f_1(c) = 0$.

Odredit ćemo vrijednost razlike D_c za sva četiri slučaja.

Neka je c točka za koju vrijedi (1). Tada prema lemi 2.5.1, ni jedna Sturmova funkcija f_j ne mijenja predznak kada x prijeđe kroz c. Stoga je $V_{c+h} = V_{c-h}$ i $D_c = 0$.

Neka je c točka za koju vrijedi (2), tj. $f(c) \neq 0$ i $f_j(c) = 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, m\}$. Kako c nije nultočka od f, iz leme 2.5.3 slijedi da $f_{j-1}(c) \neq 0$ i $f_{j+1}(c) \neq 0$. S druge strane, iz definicije Sturmovih funkcija slijedi

$$f_{j-1}(x) = q_j(x)f_j(x) - f_{j+1}(x) .$$

Stoga je $f_{j-1}(c) = -f_{j+1}(c) \neq 0$. Prema lemi 2.5.1 imamo jednu od sljedećih konfiguracija:

x	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}
$c+h$	$+$		$-$
$c-h$	$+$		$-$

ili

x	f_{j-1}	f_j	f_{j+1}
$c+h$	$-$		$+$
$c-h$	$-$		$+$

.

Na bilo koja prazna mjesta u ovim tablicama možemo staviti ili + ili − bez utjecanja na povećanje ili smanjenje broja promjena predznaka. Stoga u svim dijelovima f_{j-1}, f_j, f_{j+1} niza

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_m$$

u kojima je $f_j(c) = 0$, nema povećanja niti smanjenja broja promjena predznaka kada x prijeđe preko c. Prema lemi 2.5.1 nijedno povećanje ni smanjenje broja promjena predznaka nije zabilježeno na drugim dijelovima Sturmovog niza. Stoga je $D_c = 0$ za sve točke c za koje vrijedi (2).

Kombinirajući gore navedeno vidimo da je $D_c = 0$ za svaku točku c koja nije nultočka od f. Preostaje nam dokazati da je $D_c = 1$ za svaku nultočku od f.

Točka c za koju vrijedi (3) je jednostruka nultočka polinoma f. Promotrimo prvo početni dio niza f_0, f_1. Zbog $f_1(c) \neq 0$, $f_1(x)$ ne mijenja predznak prema lemi 2.5.1 kada x prolazi kroz c, tj. $f_1(c+h)$ i $f_1(c-h)$ imaju isti predznak. S druge strane, prema lemi 2.5.2, $f_0(c+h)$ i $f_1(c+h)$ imaju isti predznak dok $f_0(c-h)$ i $f_1(c-h)$ imaju suprotne predznake. Dakle na dijelu f_0, f_1 imamo jednu promjenu predznaka više kada x prijeđe kroz c. Kako je c jednostruka nultočka od f, prema lemi 2.5.3 nikoje dvije uzastopne Sturmove funkcije f_j i f_{j+1} se istovremeno ne poništavaju u točki c. Stoga se primjenjuje argument o točkama iz slučaja (2); na preostalom dijelu niza neće biti zabilježen ni porast niti smanjenje broja promjena predznaka. Dakle $D_c = 1$ ako je c jednostruka nultočka od f.

Na posljetku, točka c za koju vrijedi (4) je višestruka nultočka polinoma f. Prema lemi 2.5.2, na početnom dijelu f_0, f_1 broj promjena predznaka kada x prelazi c uvećan je za 1. Kako bi zaključili $D_c = 1$, dostatno je pokazati da za preostali dio $f_1, \ldots, f_m$ neće biti zabilježen ni porast ni smanjenje broja promjena predznaka. Pretpostavimo da je c $t-$terostruka nultočka od f za $t \geq 2$. Tada je $(x-c)^{t-1}$ faktor posljednje Sturmove funkcije f_m i stoga je to faktor svih Sturmovih funkcija $f_1, \ldots, f_m$. Dakle možemo zapisati $f_j(x) = (x-c)^{t-1} g_j(x)$ gdje je g_j polinom za koji je $g_j(c) \neq 0$. Primjenjujući lemu 2.5.1 na novi niz

$$g_1,\ g_2, \ldots,\ g_m$$

vidimo da nema ni porasta ni smanjenja broja promjena predznaka kako x prolazi kroz c. Sada za svaki $j = 1, 2, \ldots, m$ imamo

$$\begin{aligned} f_j(c+h) &= h^{t-1} g_j(c+h) \\ f_j(c-h) &= (-h)^{t-1} g_j(c-h)\,. \end{aligned}$$

Stoga prolaskom x kroz točku c, broj promjena predznaka u Sturmovom nizu $f_1, \ldots, f_m$ ostaje nepromijenjen. Dakle $D_c = 1$ za sve višestruke nultočke polinoma f.

Budući da je za svaku točku c između a i b zadovoljen jedan od ova četiri navedena slučaja te da se porast za jednu promjenu predznaka u Sturmovom nizu $f_0, f_1, \ldots, f_m$ bilježi kad god x prolazi kroz nultočku polinoma f, možemo zaključiti da je broj različitih nultočaka od f između a i b jednak $V_a - V_b$. Time je Sturmov teorem u potpunosti dokazan. □

Neposredno prije primjera 2.2.2 primjetili smo da kod svakog koraka određivanja Sturmovih funkcija, možemo pomnožiti djeljenik f_k pozitivnom konstantom b_k i možemo kod djelitelja f_{k+1} maknuti bilo koji faktor g_{k+1} koji je ili pozitivna konstanta ili polinomna funkcija koja poprima pozitivne vrijednosti za svaki x. Kako bi pokazali da Sturmov teorem ostaje važeći kada se ove izmijenjene funkcije $F_0,\ F_1, \ldots, F_m$ koriste umjesto funkcija $f_0, f_1, \ldots, f_m$, razmotrimo niz jednakosti

$$\begin{aligned} f_0 &= F_0, \qquad f_1 = g_1 F_1 \\ b_0 F_0 &= q_1 F_1 - g_2 F_2 \\ b_1 F_1 &= q_2 F_2 - g_3 F_3 \\ &\vdots \\ b_{m-1} F_{m-1} &= q_m F_m \end{aligned}$$

gdje je svaki b_k pozitivna konstanta i svaki g_{k+1} je ili pozitivna konstanta ili pozitivan polinom. Možemo primijeniti na $F_0,\ F_1, \ldots, F_m$ isti argument korišten u dokazu Sturmovog teorema kako bi pokazali da je $D_c = 1$ ako je c nultočka od f i $D_c = 0$ ako c nije nultočka of f. Dakle pojednostavljenje korišteno u primjerima iz točke 2.2 je opravdano.

U točki 2.3 koristili smo još jedan niz funkcija kako bi izbrojali broj nultočaka polinoma f. Niz se sastoji od uzastopnih derivacija polinoma f:

$$f,\ f', \ldots,\ f^{(n-1)},\ f^{(n)}\,.$$

Za bilo koji broj c, s W_c označavamo broj promjena predznaka u nizu

$$f(c),\ f'(c), \ldots,\ f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c)$$

pri čemu ne uzimamo u obzir članove niza koji su jednaki nuli.

Teorem 2.5.5 (Fourierov teorem)**.** *Za bilo koja dva realna broja a i b, $a < b$, od kojih ni jedan nije nultočka polinoma f, $W_a - W_b$ je ili broj nultočaka od f u intervalu $\langle a, b\rangle$ ili premašuje broj nultočaka u tom intervalu za paran broj. Pritom se $m-$terostruka nultočka broji m puta.*

Dokaz. Kao i u dokazu Sturmovog teorema, promatrat ćemo promjenu u W_x kako se vrijednost x smanjuje od b do a. Očito prema lemi 2.5.1, nema potrebe uzeti u obzir one točke c u kojima se nijedna od funkcija $f,\ f', \ldots$ ne poništava. Pretpostavimo da je c točka u kojoj se barem jedna od funkcija $f,\ f', \ldots$ poništava. Tada možemo prvo razmotriti početni dio niza $f, f', \ldots, f^{n-1}, f^n$ i pretpostaviti da je

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0,\ f^{(m)}(c) \neq 0$$

za neki $m \geq 1$. Prema teoremu 1.5.7, to znači da je c $m-$terostruka nultočka od f. Podsjetimo se da je $f^{(i)}$ derivacija od $f^{(i-1)}$ za sve $i = 1, 2, \ldots$ i primijenimo lemu 2.5.2 na svaki par $f^{(i-1)}$ i $f^{(i)}$ polinoma iz niza $f,\ f', \ldots,\ f^{(m-1)}$. Zaključujemo da polinomi

$$f,\ f', \ldots,\ f^{(m-1)},\ f^m$$

imaju isti predznak neposredno prije ali izmjenjujući predznak neposredno nakon što x prođe c. S druge strane prema lemi 2.5.1, posljednji polinom f^m ne mijenja predznak tijekom prelaska kroz točku c. Stoga na početnom dijelu niza broj promjena predznaka poraste za m kada x prelazi kroz $m-$terostruku nultočku od f.

Preostaje nam promotriti promjene na ostatku niza. Pretpostavimo da za neki $i \geq 1$

$$f^{(i-1)}(c) \neq 0,\ f^{(i)}(c) = \cdots = f^{(i+t-1)}(c) = 0,\ f^{(i+t)}(c) \neq 0$$

tj. c je $t-$terostruka nultočka od $f^{(i)}$ ali nije nultorčka od $f^{(i-1)}$. (Uočimo da je ovdje za $i = 1$ uključen i slučaj kada c nije nultočka funkcije f.) Onda možemo razlikovati sljedeća dva slučaja:

(a) $f^{(i-1)}(c)$ i $f^{(i+t)}(c)$ imaju isti predznak,

(b) $f^{(i-1)}(c)$ i $f^{(i+t)}(c)$ imaju različite predznake.

Isti argument korišten u prvom dijelu dokaza možemo primijeniti najprije na polinome $f^{(i)}, \ldots,\ f^{(i+t-1)}$, a zatim na polinome $f^{(i-1)}, \ldots,\ f^{(i+t)}$. Tada u oba slučaja, kako x prelazi kroz c, dobiva se porast za paran broj promjena predznaka u ovom dijelu niza. Npr. kada je $t = 2$ imamo sljedeće moguće kombinacije predznaka u nizu $f^{i-1}, f^i, f^{i+1}, f^{i+2}$:

(a)

$$\begin{array}{ccc} + + ++ & & - - -- \\ + + -+ & ; & - - +- \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} + - -- & & - + ++ \\ + - +- & ; & - + -+ \end{array}$$

i sve pokazuju porast za paran broj promjena predznaka.
Za $t = 1$ također dobivamo četiri moguće kombinacije predznaka u nizu f^{i-1}, f^i, f^{i+1} :

(a)

$$\begin{array}{ccc} + + + & & - - - \\ + - + & ; & - + - \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} + - - & & - + + \\ + + - & ; & - - + \end{array}$$

i sve pokazuju porast za paran broj promjena predznaka.

Konačno za polinome $f, f', \ldots, f^{(n)}$ postoji samo konačan broj točaka u kojima se neke od tih funkcija poništavaju. Stoga, $W_a - W_b$ je ukupna suma porasta broja promjena predznaka u nizu $f, f', \ldots, f^{n-1}, f^n$ zabilježenih na tim točkama pri prolasku x od b do a. Vidjeli smo da ako promatrana točka nije nultočka od f, možemo dobiti porast za paran broj promjena predznaka u tom nizu, a ako je promatrana točka $m-$terostruka nultočka od f, tada broj promjena predznaka poraste za m na početnom dijelu nizu te još može porasti za paran broj promjena predznaka na ostaku niza. Time je dokaz završen.

$\square$

Bibliografija

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza* 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[2] K.T. Leung, I.A.C. Mok, S.N. Suen, *Polynomials and equations*, Hong Kong University Press, Hong Kong, 1993.

[3] G.V. Milovanović, R.Ž. Đorđević, *Linearna algebra*, Fakultet elektrotehnike, Niš, 2004.

[4] B. Pavković, B. Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Sažetak

Tema ovog rada je određivanje položaja realnih nultočaka polinoma, tj. određivanje granica u kojima se pojavljuju nultočke danih polinoma.

U prvom poglavlju uvodimo pojam polinoma te dajemo neka svojstva djeljivosti polinoma. Definiramo najveću zajedničku mjeru dvaju polinoma i primjenom Euklidova algoritma dokazujemo kako je ona jednoznačno određena. Definiramo kratnost nultočaka te pokazujemo da polinom s realnim koeficijentima može imati realne nultočke i/ili parove konjugirano kompleksnih nultočaka. Promatramo kako vodeći i konstantan član utječu na vrijednost polinoma te kako se koriste pri određivanju granica nultočaka. Dajemo i dokaz Bolzanovog teorema za polinome koji je potreban za proučavanje raspodjele nultočaka polinoma.

U drugom poglavlju proučavamo tri korisne metode razdvajanja realnih nultočaka polinoma. Opisujemo metodu, koju dugujemo Sturmu, za nalaženje Sturmovog niza funkcija potrebnog za određivanje broja različitih realnih nultočaka polinoma koje se nalaze u nekom intervalu. Primjenom Fourierovog teorema razdvajamo realne nultočke polinoma korištenjem samo njegovih derivacija. Primjenom Descartesovog pravila predznaka određujemo pozitivne i negativne nultočke. U posljednjoj točki drugog poglavlja dani su dokazi Sturmovog i Fourierovog teorema. U radu je dano nekoliko primjera kojima se ilustrira primjena navedenih teorema i metoda.

Summary

The topic of this thesis is to determine the position of the real roots of polynomials, i.e. to determine the bounds in which the real roots of polynomials might occur.

In the first chapter we introduce the term polynomial and give some properties of polynomial divisibility. We define the highest common factor of the two polynomials and using Euclidean algorithm we prove that it is uniquely determined. We define the multiplicity of roots and show that the polynomial with real coefficients can have real roots and / or pairs of conjugated complex roots. We observe how the leading and constant term influence the value of the polynomial and can be used to determine the boundaries of the roots. We also give the proof of Bolzano's theorem for polynomials needed to study the distribution of polynomial roots.

In the second chapter we study three useful methods of separation the real roots of a polynomial. We describe a method, due to Sturm, for finding Sturm's sequence of functions needed to determine the number of distinct real roots of a polynomial located in an interval. Using Fourier's theorem we separate the real roots of a polynomial using only its derivatives. By applying the Descartes rule of signs, we determine positive and negative roots. In the last section of the second chapter, the proofs of Sturm's and Fourier's theorems are given. The paper presents a few examples illustrating the application of the aforementioned theorems and methods.

Životopis

Rođena sam 24. kolovoza 1990. u Ptuju, u Republici Sloveniji. Odrasla sam u Jazvinama, malom mjestu nadomak Krapine u kojima sam završila prva četiri razreda osnovne škole. U trećem razredu osnovne škole upisujem prvi razred Osnovne glazbene škole pri OŠ Augusta Cesarca u Krapini za klavir. Od petog do osmog razreda pohađala sam Osnovnu školu "Ljudevit Gaj" u Krapini. Godine 2005. završavam osmi razred osnovne škole i osnovnoškolsko glazbeno školovanje za klavir. Godine 2005. upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi Krapina u kojoj sam maturirala 2009. godine. Iste godine dobivam i Njemačku jezičnu diplomu - Deutsches Sprachdiplom II der Deutschen Kultusministerkonferenz. Godine 2009. upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2014. godine upisujem na istom fakultetu Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Kroz dvije godine studiranja na diplomskom sveučilišnom studiju radila sam u Osnovnoj školi "Ljudevit Gaj" u Krapini kao zamjena.