Topološki aspekti aksioma potpunosti

Volarić, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Volarić

TOPOLOŠKI ASPEKTI AKSIOMA POTPUNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Željela bih se prije svega zahvaliti svome mentoru prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na strpljenju i velikoj pomoći oko izrade diplomskog rada.
Također, zahvaljujem se svom dečku i svim prijateljima koji su uvijek bili uz mene, a najveću zahvalu dugujem svojim roditeljima i bratu koji su me strpljivo bodrili u svim teškim trenucima i bez kojih ovo što sam postigla ne bi bilo moguće.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat će se klasični teoremi vezani za neprekidne funkcije na segmentu te će se dati elementarni dokazi tih teorema, a također će se dati i dokazi koji uključuju topološke koncepte.

U prvom poglavlju proučavamo konvergenciju i gomilišta nizova u $\mathbb{R}$ te koristeći određene rezultate s tim u vezi dokazujemo da svaka neprekidna funkcija na segmentu poprima minimum i maksimum.

U drugom poglavlju proučavamo topološke prostore i kompaktne skupove u topološkim prostorima. Prvo definiramo pojmove topologije i baze topologije i dokazujemo neke rezultate s tim u vezi, a zatim proučavamo neprekidnost funkcija između topoloških prostora i pojam relativne topologije. Nakon toga slijedi proučavanje kompaktnih topoloških prostora i kompaktnih skupova u topološkim prostorima. Također, proučavamo zatvorene skupove i njihovu vezu s kompaktnim skupovima kako bismo na kraju dokazali da neprekidne realne funkcije na kompaknim prostorima poprimaju minimum i maksimum.

U trećem poglavlju prvo dokazujemo da neprekidna funkcija na segmentu koja mijenja predznak ima nultočku. Nakon toga proučavamo povezane skupove u topološkim prostorima te posebno dokazujemo da je svaki segment u $\mathbb{R}$ povezan skup. Dokazujemo da neprekidna realna funkcija na povezanom prostoru poprima međuvrijednosti te na kraju dokazujemo da je slika neprekidne funkcije na segmentu segment, a s tim u vezi dajemo i neke primjere.

Poglavlje 1

Neprekidne funkcije na segmentu

1.1 Konvergencija nizova

Definicija 1.1.1.
Neka je S skup. Svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \to S$ zovemo niz u skupu S.

Ako je $x : \mathbb{N} \to S$ niz u skupu S, onda za $n \in \mathbb{N}$ umjesto $x(n)$ pišemo i x_n, a niz x označavamo također sa (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.1.2.
Neka je (x_n) niz realnih brojeva (tj. niz u $\mathbb{R}$) te neka je $l \in \mathbb{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži (ili konvergira) prema l i pišemo $x_n \to l$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - l| < \epsilon$. U tom slučaju kažemo također da je l limes niza (x_n).

Primjer 1.1.3.
Neka je $a \in \mathbb{R}$. Definirajmo niz (x_n) sa $x_n = a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to a$. Naime, za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.4.
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to 0$.
Dokažimo to.

Neka je $\epsilon > 0$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. *Za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$, *dakle* $\frac{1}{n} < \epsilon$. *No za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $|x_n - 0| = \frac{1}{n}$ *pa zaključujemo da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|x_n - 0| < \epsilon$.
Time je tvrdnja dokazana.

Definicija 1.1.5.
Za niz realnih brojeva (x_n) *kažemo da je konvergentan ako postoji* $l \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to l$.

Propozicija 1.1.6.
Neka je (x_n) *niz realnih brojeva. Neka su* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *takvi da* $x_n \to l_1,\ x_n \to l_2$.
Tada je $l_1 = l_2$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $l_1 \neq l_2$. Neka je $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$.
Tada je $\epsilon > 0$ pa iz $x_n \to l_1$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - l_1| < \epsilon$. Isto tako iz $x_n \to l_2$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $|x_n - l_2| < \epsilon$.
Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$. Tada je $|x_n - l_1| < \epsilon$ i $|x_n - l_2| < \epsilon$ pa dobivamo:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - x_n + x_n - l_2| \leq |l_1 - x_n| + |x_n - l_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \tag{1.1}$$

Dakle, $|l_1 - l_2| < 2\epsilon$ pa je $\frac{|l_1 - l_2|}{2} < \epsilon$ što je u kontradikciji s definicijom broja ϵ.
Zaključak: $l_1 = l_2$. □

Primjer 1.1.7.
Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $(x_n) = (-1)^n$. *Niz* (x_n) *nije konvergentan.*
Dokažimo to.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $l \in \mathbb{R}$ *takav da* $x_n \to l$. *Neka je* $\epsilon = \frac{1}{2}$. *Tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|x_n - l| < \epsilon$. *Odaberimo bilo koji* $n \geq n_0$.
Imamo $|x_n - l| < \epsilon$ *i* $|x_{n+1} - l| < \epsilon$ *pa je*

$$|x_n - x_{n+1}| = |x_n - l + l - x_{n+1}| \leq |x_n - l| + |l - x_{n+1}| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Dakle, $|x_n - x_{n+1}| < 1$. *No iz definicije niza* (x_n) *je očito da je* $|x_n - x_{n+1}| = 2$.
Kontradikcija.
Dakle, niz (x_n) *nije konvergentan.*

1.2 Gomilišta i omeđenost

Definicija 1.2.1.
Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *te neka je* $a \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je a gomilište niza* (x_n) *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *i za svaki* $N \in \mathbb{N}$ *postoji* $n \geq N$ *takav da je* $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.

Propozicija 1.2.2.
Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$. *Pretpostavimo da je a limes niza* (x_n). *Tada je a gomilište niza* (x_n).

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ te neka je $N \in \mathbb{N}$. Budući da $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Neka je $n = \max\{N, n_0\}$. Očito je $n \geq N$. S druge strane iz $n \geq n_0$ slijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.
Zaključak: a je gomilište niza (x_n). □

Primjer 1.2.3.
Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $x_n = (-1)^n$. *Tvrdimo da je* 1 *gomilište ovog niza.*
Neka je $\epsilon > 0$ *te neka je* $N \in \mathbb{N}$. *Odaberimo neki paran broj n takav da je* $n \geq N$ *(npr.* $n = 2N$*). Tada je* $x_n = 1$ *pa je očito* $x_n \in \langle 1 - \epsilon, 1 + \epsilon \rangle$. *Prema tome,* 1 *je gomilište niza* (x_n).
Na isti način zaključujemo da je i -1 *gomilište ovog niza. Uočimo da* 1 *i* -1 *nisu limesi niza* (x_n)*, čak štoviše niz* (x_n) *nije konvergentan (primjer 1.1.7).*

Primjer 1.2.4.
Neka je (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $x_n = n$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tvrdimo da niz* (x_n) *nema gomilište.*
Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $a \in \mathbb{R}$ *takav da je a gomilište niza* (x_n). *Odaberimo bilo koji* $\epsilon > 0$. *Nadalje, odaberimo* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $N > a + \epsilon$. *Prema definiciji gomilišta tada postoji* $n \geq N$ *takav da je* $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$. *Slijedi* $x_n < a + \epsilon$*, tj.* $n < a + \epsilon$. *No, ovo je nemoguće jer je* $a + \epsilon < N \leq n$.
Prema tome, niz (x_n) *nema gomilište.*

Prethodni primjer pokazuje da ne mora svaki niz u $\mathbb{R}$ imati gomilište. Ono što ćemo kasnije dokazati jest da svaki *omeđen* niz u $\mathbb{R}$ ima gomilište. No, definirajmo prije svega potrebne pojmove.

Definicija 1.2.5.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $M \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je* M *gornja međa skupa* S *ako je* $x \leq M$, *za svaki* $x \in S$.

Definicija 1.2.6.
Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ *kažemo da je odozgo omeđen ako postoji bar jedna gornja međa za* S.

Definicija 1.2.7.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $a \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je* a *supremum skupa* S *ako je* a *najmanja gornja međa skupa* S, *tj. ako vrijedi sljedeće:*

1.) *a je gornja međa od S*

2.) *ako je M gornja međa od S, onda je $a \leq M$.*

Ako supremum skupa S postoji, onda je on jedinstven.
Naime, ako su a i b supremumi skupa S, onda je $a \leq b$ jer je a supremum skupa S i b gornja međa skupa S, a isto tako je i $b \leq a$ pa je $a = b$.
Supremum skupa S, ako postoji označavamo sa $\sup S$.

Definicija 1.2.8.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ *te neka je* $s_0 \in S$. *Kažemo da je* s_0 *maksimumm skupa* S *ako je* $x \leq s_0$, *za svaki* $x \in S$ *(tj. ako je* s_0 *gornja međa skupa* S*).*

Ako je s_0 maksimum skupa S, onda je s_0 i supremum skupa S. Naime, očito je s_0 gornja međa skupa S, a za svaku gornju među M skupa S vrijedi $s_0 \leq M$ jer je $s_0 \in S$.

Iz ovoga slijedi da je maksimum skupa, ako postoji, jedinstven.

Primjer 1.2.9.
Neka je $S = \langle -\infty, 1\rangle$. *Tada je* $\sup S = 1$.
Dokažimo to.
Očito je 1 *gornja međa skupa* S. *Neka je* M *bilo koja gornja međa skupa* S.
Želimo dokazati da je $1 \leq M$.
Pretpostavimo suprotno.
Tada je $M < 1$. *Odaberimo* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $M < x < 1$. *Tada je* $x \in S$ *pa mora vrijediti da je* $x \leq M$ *jer je* M *gornja međa skupa* S. *Ovo je u kontradikciji s odabirom broja* x. *Prema tome,* $1 \leq M$ *i time smo dokazali da je* $\sup S = 1$.

Uočimo da skup S nema maksimum.
Naime, kada bi ga imao onda bi on bio i supremum skupa pa bi bio jednak 1, ali $1 \notin S$.

AKSIOM POTPUNOSTI.
Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, za svaki $x \in A$, za svaki $y \in B$.

Podskupovi od $\mathbb{R}$ koji nisu odozgo omeđeni očito nemaju supremum. Nadalje, prazan skup također nema supremum. Naime, svaki realni broj je gornja međa praznog skupa pa stoga taj skup nema najmanju gornju među.

Sljedeća važna tvrdnja je posljedica aksioma potpunosti.

Propozicija 1.2.10.
Neka je S neprazan, odozgo omeđen skup. Tada S ima supremum.

Dokaz. Neka je B skup svih gornjih međa skupa S. Vrijedi $B \neq \emptyset$ jer je S odozgo omeđen. Nadalje, za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in B$ očito vrijedi $x \leq y$. Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $x \leq z \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in B$. Iz ovoga je jasno da je z najmanja gornja međa skupa S. Dakle, z je supremum skupa S. □

Definicija 1.2.11.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $m \in \mathbb{R}$. Kažemo da je m donja međa skupa S ako je $m \leq x$, za svaki $x \in S$.

Definicija 1.2.12.
Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozdo omeđen ako postoji bar jedna donja međa skupa S.

Definicija 1.2.13.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a infimum skupa S ako je a najveća donja međa skupa S to jest ako vrijedi sljedeće:

1.) a je donja međa od S

2.) ako je m donja međa od S, onda je $a \geq m$.

Slično kao kod supremuma vrijedi da infimum skupa ako postoji, mora biti jedinstven. Infimum skupa S, ako postoji, označavamo s $\inf S$.

Definicija 1.2.14.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $s_0 \in S$. Kažemo da je s_0 minimum skupa S ako je $s_0 \leq x$, za svaki $x \in S$ (tj. ako je s_0 donja međa skupa S).

Vrijedi sljedeće: ako je s_0 minimum skupa S, onda je on i infinum skupa S.

Propozicija 1.2.15.
Svaki neprazan, odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima infimum.

Dokaz. Neka je A skup svih donjih međa skupa S. Vrijedi $A \neq \emptyset$ jer je S odozdo omeđen. Nadalje, za svaki $y \in A$ i za svaki $x \in S$ očito vrijedi $y \leq x$. Iz aksioma potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $y \leq z \leq x$ za svaki $y \in A$ i za svaki $x \in S$. Iz ovoga je jasno da je z najveća donja međa skupa S. Dakle, z je infimum skupa S. □

Definicija 1.2.16.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S omeđen skup ako je S omeđen odozgo i odozdo.

Definicija 1.2.17.
Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je omeđen ako je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.

Definicija 1.2.18.
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je skup S gomilište niza (x_n) ako za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in S$.

Ako je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$, onda očito vrijedi sljedeće: točka a je gomilište niza (x_n) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi da je skup $\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ gomilište niza (x_n).

Napomena. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$.*

a) Ako je S gomilište niza (x_n) i $S \subseteq T$, onda je očito i T gomilište niza (x_n).

b) Pretpostavimo da je S gomilište niza (x_n) te da T nije gomilište niza (x_n). Tada je $S \setminus T$ gomilište niza (x_n).

Dokažimo to.
Budući da T nije gomilište od (x_n), postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_0$ vrijedi $x_n \notin T$. Neka je $N \in \mathbb{N}$. Budući da je S gomilište od (x_n), postoji $n \geq \max\{N, N_0\}$ takav da je $x_n \in S$. Vrijedi $n \geq N_0$ pa slijedi $x_n \notin T$. Prema tome, $x_n \in S \setminus T$, a očito je $n \geq N$.

Teorem 1.2.19.
Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}$ ima gomilište.

Dokaz. Neka je (x_n) omeđen niz u $\mathbb{R}$. Tada je skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je a donja međa tog skupa, a b gornja međa tog skupa. Dakle,

$$a \leq x_n \leq b, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Neka je

$$S = \{z \in \mathbb{R} \mid [z, \infty\rangle \text{ je gomilište od } (x_n)\}. \tag{1.3}$$

Prema (1.2) za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in [a, \infty\rangle$, stoga je $[a, \infty\rangle$ gomilište niza (x_n). Prema tome, $a \in S$.
Neka je $z \in S$. Tvrdimo da je $z \leq b$. Pretpostavimo suprotno: $b < z$.
Zbog $z \in S$ imamo da je $[z, \infty\rangle$ gomilište niza (x_n) pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in [z, \infty\rangle$. Slijedi $z \leq x_n$ što zajedno s $b < z$ daje $b < x_n$. Ovo je u kontradikciji s (1.2).
Prema tome, $z \leq b$, za svaki $z \in S$. Dakle, b je gornja međa skupa S. Budući da je S neprazan i odozgo omeđen skup prema propoziciji 1.2.10 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa S. Tvrdimo da je točka c gomilište niza (x_n).
Neka je $\epsilon > 0$. Dokažimo da je $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ gomilište niza (x_n). Skup $[c + \epsilon, \infty\rangle$ nije gomilište niza (x_n). Naime, kada bi bio imali bismo da je $c + \epsilon \in S$ što je u kontradikciji s činjenicom da je c supremum skupa S. Broj $c - \epsilon$ nije gornja međa skupa S (jer je c najmanja gornja međa skupa S). Stoga postoji $z \in S$ takav da je $c - \epsilon < z$. Iz ovoga slijedi da je $[z, \infty\rangle \subseteq \langle c - \epsilon, \infty\rangle$. No $[z, \infty\rangle$ je gomilište niza (x_n) (jer je $z \in S$) pa iz napomene (1.2) slijedi da je $\langle c - \varepsilon, \infty\rangle$ gomilište niza (x_n). Iz napomene (1.2) također slijedi da je $\langle c - \epsilon, \infty\rangle \setminus [c + \epsilon, \infty\rangle$ gomilište niza (x_n). No $\langle c - \epsilon, \infty\rangle \setminus [c + \epsilon, \infty\rangle = \langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$. Prema tome $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ je gomilište niza (x_n). Dakle, za svaki $\epsilon > 0$ skup $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ je gomilište niza (x_n). Prema tome točka c je gomilište niza (x_n). Time je tvrdnja teorema dokazana. □

1.3 Točke minimuma i maksimuma neprekidnih funkcija

Definicija 1.3.1.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te $x_0 \in S$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da
za svaki $x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi $f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle$.

Definicija 1.3.2.
Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je neprekidna ako je f neprekidna u x_0, za svaki $x_0 \in S$.

Definicija 1.3.3.
Neka je X skup te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f omeđena funkcija ako je $f(X)$ omeđen skup u $\mathbb{R}$.

Teorem 1.3.4.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f omeđena funkcija.

Dokaz. Treba dokazati da je $f([a, b])$ omeđen skup.
Dokažimo prvo da je $f([a, b])$ omeđen odozgo.
Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $u \in \mathbb{R}$ vrijedi da u nije gornja međa od $f([a, b])$ pa postoji $v \in f([a, b])$ takav da je $u < v$. Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in f([a, b])$ takav da je $n < y_n$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ iz $y_n \in f([a, b])$ slijedi da postoji $x_n \in [a, b]$ takav da $y_n = f(x_n)$. Imamo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in [a, b]$ pa je niz (x_n) očito omeđen. Prema teoremu 1.2.19 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c gomilište niza (x_n). Uočimo da je $c \in [a, b]$. Naime, kada bi vrijedilo $b < c$ onda bi za $\varepsilon = c - b$ vrijedilo da je $\varepsilon > 0$ pa bi postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \in \langle c - \varepsilon, c + \varepsilon\rangle$ a iz toga bi slijedilo $x_n \leq b = c - \varepsilon < x_n$ što je nemoguće. Dakle, $c \leq b$. Analogno zaključujemo da je $a \leq c$.
Budući da je f neprekidna u c, postoji $\delta > 0$ takav da

$$\forall x \in [a, b] \cap \langle c - \delta, c + \delta\rangle \text{ vrijedi } f(x) \in \langle f(c) - 1, f(c) + 1\rangle. \tag{1.4}$$

Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N > f(c) + 1$. Budući da je c gomilište niza (x_n), postoji $n \geq \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle$. Imamo

$$x_n \in [a, b] \cap \langle c - \delta, c + \delta \rangle$$

pa iz 1.4 slijedi

$$f(x_n) \in \langle f(c) - 1, f(c) + 1 \rangle.$$

Posebno $f(x_n) < f(c) + 1$. S druge strane vrijedi

$$f(c) + 1 < N \leq n < y_n = f(x_n).$$

Dakle, $f(c) + 1 < f(x_n)$.
Kontradikcija.
Zaključak: $f([a, b])$ je omeđen odozgo.
Analogno dobivamo da je $f([a, b])$ omeđen odozdo. Prema tome f je omeđena funkcija.

□

Definicija 1.3.5.
Neka je X skup te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da funkcija f poprima maksimum ako postoji $x_0 \in X$ takav da je $f(x) \leq f(x_0)$ za svaki $x \in X$. Kažemo da funkcija f poprima minimum ako postoji $x_0 \in X$ takav da je $f(x) \geq f(x_0)$ za svaki $x \in X$.

Neka je X skup te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada f poprima maksimum ako i samo ako skup $f(X)$ ima maksimum. Nadalje, funkcija f poprima minimum ako i samo ako skup $f(X)$ ima minimum.

Teorem 1.3.6.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada f poprima minimum i maksimum.

Dokaz. Prema prethodnom teoremu skup $f([a, b])$ je omeđen. Neka je $\mu = \sup f([a, b])$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo $\mu - \frac{1}{n} < \mu$ pa $\mu - \frac{1}{n}$ nije gornja međa skupa $f([a, b])$. Stoga postoji $y_n \in f([a, b])$ takav da je

$$\mu - \frac{1}{n} < y_n. \tag{1.5}$$

Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in [a, b]$ takav da je $y_n = f(x_n)$. Niz (x_n) je očito omeđen pa postoji gomilište c tog niza. Kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo da je $c \in [a, b]$.
Tvrdimo da je $f(c) = \mu$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $f(c) < \mu$. Slijedi $\mu - f(c) > 0$ pa postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{N} < \mu - f(c)$. Iz toga slijedi $f(c) < \mu - \frac{1}{N}$.
Definirajmo $\varepsilon = \left(\mu - \frac{1}{N}\right) - f(c)$. Tada je $\varepsilon > 0$ pa iz činjenice da je f neprekidna u c slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da

$$\forall x \in [a, b] \cap \langle c - \delta, c + \delta\rangle \text{ vrijedi } f(x) \in \langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon\rangle. \tag{1.6}$$

Budući da je c gomilište niza (x_n) postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$. Iz (1.6) slijedi

$$f(x_n) \in \langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon\rangle.$$

Posebno,

$$f(x_n) < f(c) + \varepsilon.$$

No, $f(c) + \varepsilon = \mu - \frac{1}{N}$ (prema definiciji od ε). Stoga je $f(x_n) < \mu - \frac{1}{N}$.
Iz $n \geq N$ slijedi $\mu - \frac{1}{N} \leq \mu - \frac{1}{n}$ pa je $f(x_n) < \mu - \frac{1}{n}$, to jest $y_n < \mu - \frac{1}{n}$.
To je u kontradikciji s (1.5).
Zaključak: $f(c) = \mu$.

Prema tome μ je maksimum skupa $f([a, b])$. Dakle funkcija f poprima maksimum.
Na sličan način dokazujemo da f poprima minimum.
Definirajmo $\mu = \inf f([a, b])$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da $\mu + \frac{1}{n}$ nije donja međa skupa $f([a, b])$ pa stoga postoji $x_n \in [a, b]$ takav da je $f(x_n) < \mu + \frac{1}{n}$. Neka je c gomilište niza (x_n). Imamo $c \in [a, b]$ te tvrdimo da je $f(c) = \mu$.
Pretpostavimo suprotno.
Tada je $\mu < f(c)$ pa postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu + \frac{1}{N} < f(c)$. Neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $\mu + \frac{1}{N} = f(c) - \varepsilon$. Budući da je funkcija f neprekidna u c postoji $\delta > 0$ takav da

$$\forall x \in [a, b] \cap \langle c - \delta, c + \delta\rangle \text{ vrijedi } f(x) \in \langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon\rangle.$$

Budući da je c gomilište niza (x_n) postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle$. Slijedi

$$f(x_n) \in \langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon \rangle \,.$$

Posebno,

$$f(c) - \varepsilon < f(x_n),$$

odnosno

$$\mu + \frac{1}{N} < f(x_n).$$

No iz $n \geq N$ slijedi

$$\mu + \frac{1}{n} \leq \mu + \frac{1}{N} \text{ pa je } \mu + \frac{1}{n} < f(x_n).$$

Time dolazimo do kontradikcije s činjenicom da je $\mu + \frac{1}{n} > f(x_n)$. Prema tome $f(c) = \mu$ i zaključujemo da f poprima minimum.

$\square$

Poglavlje 2

Topološki prostori i kompaktnost

2.1 Topologija i baza topologije

Definicija 2.1.1.
Neka su A, X skupovi te neka je $U : A \to \mathcal{P}(X)$ funkcija. Tada kažemo da je U indeksirana familija podskupova od X. Za $\alpha \in A$ umjesto $U(\alpha)$ pišemo i U_α, a funkciju označavamo sa $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Definicija 2.1.2.
Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X (to jest $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$) takva da vrijedi sljedeće:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$ za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup\limits_{\alpha \in a} U_\alpha \in \mathcal{T}$*
3. *Ako su $U, V \in \mathcal{T}$ onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je topologija na skupu X. Za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je topološki prostor.

Primjer 2.1.3.
Neka je X neprazan skup. Familija $\{\emptyset, X\}$ je očito topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je

indiskretna topologija na X. Familija $\mathcal{P}(X)$ je također topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je diskretna topologija na X.

Definicija 2.1.4.
Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

2. *Za svaki $U \in \mathcal{T}$, za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{T}$.

Uočimo sljedeće: ako je $\mathcal{T}$ topologija na X, onda je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Napomena. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na X, te neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Tada za svaki $U \in \mathcal{T}$ postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Naime, neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Slijedi $\bigcup_{x \in U} B_x = U$. Dakle, tražena indeksirana familija je funkcija $U \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto B_x$.*

Propozicija 2.1.5.
Neka su $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologije na skupu X te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ te da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$. Tada je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Prema napomeni postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi da je $B_\alpha \in \mathcal{B}$ pa zbog $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ vrijedi $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$.
Iz drugog svojstva definicije topologije slijedi da je $\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ to jest $U \in \mathcal{T}_2$. Time smo pokazali da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.
Analogno dobivamo $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ pa slijedi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Teorem 2.1.6.
Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X sa sljedećim svojstvima:

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

2. *Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Dokaz. Dokažimo da takva topologija postoji.Jedinstvenost slijedi iz prethodne propozicije.
Neka je $\mathcal{T} = \{U \subseteq X|$ za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U\}$. Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$.
Iz 1. slijedi da je $X \in \mathcal{T}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$.
Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Neka je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$.
Slijedi $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Time smo dokazali da je $\bigcup_{\alpha\in A} u_\alpha \in \mathcal{T}$.
Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. Želimo pokazati da je

$$U \cap V \in \mathcal{T}.$$

Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$ pa prema definiciji familije $\mathcal{T}$ postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Slijedi

$$x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V.$$

Prema pretpostavci teorema postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Slijedi $x \in B_3 \subseteq U \cap V$. Time smo dokazali da je $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Dakle, $\mathcal{T}$ je topologija na X. Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada za svaki $x \in B$ postoji $B' \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B' \subseteq B$. Naime, možemo uzeti $B' = B$. Prema tome $B \in \mathcal{T}$. Dakle $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Drugi uvjet iz definicije baze topologije je očito zadovoljen pa zaključujemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

Primjer 2.1.7.
Neka je $B = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Tvrdimo da postoji jedinstvena topologija na $\mathbb{R}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Da bismo to dokazali dovoljno je provjeriti da su zadovoljene pretpostavke prethodnog teorema.

Očito je $\mathcal{B}$ familija podskupova od $\mathbb{R}$. Vrijedi $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \mathbb{R}$, a s druge strane za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$x \in \langle x-1, x+1\rangle \; i \; \langle x-1, x+1\rangle \in B$$

pa je $x \in \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$. Prema tome $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = \mathbb{R}$.
Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te neka je $x \in B_1 \cap B_2$. Tada postoje $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$a_1 < b_1,\; a_2 < b_2,\; B_1 = \langle a_1, b_1\rangle, B_2 = \langle a_2, b_2\rangle.$$

Iz $x \in B_1$ i $x \in B_2$ slijedi

$$a_1 < x < b_1, a_2 < x < b_2.$$

Definirajmo $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$, $b_3 = \max\{b_1, b_2\}$. Tada je $a_3 < x < b_3$ pa je $x \in \langle a_3, b_3\rangle$. Definirajmo $B_3 = \langle a_3, b_3\rangle$. Imamo $B_3 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_3$. Dokažimo da je

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Neka je $y \in B_3$. Tada je $a_3 < y < b_3$ pa iz definicije od a_3 i b_3 slijedi

$$a_1 < y < b_1, a_2 < y < b_2,$$

to jest $y \in B_1$ i $y \in B_2$, dakle $y \in B_1 \cap B_2$. Prema tome $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Iz prethodnog teorema slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na $\mathbb{R}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Za $\mathcal{T}$ kažemo da je euklidska topologija na $\mathbb{R}$.

Definicija 2.1.8.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $U \in \mathcal{T}$. Za U kažemo da je otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 2.1.9.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $x \in X$ te neka je $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$. Tada za U kažemo da je otvorena okolina točke x u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

2.2 Neprekidnost funkcija i relativna topologija

Definicija 2.2.1.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaku otvorenu okolinu V od $f(x_0)$ u $(Y, \mathcal{S})$ postoji otvorena okolina U od x_0 u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $f(U) \subseteq V$. Kažemo da je funkcija f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako je f neprekidna u svakoj točki iz X.

Lema 2.2.2.
*Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $W \subseteq X$ skup sa sljedećim svojstvom:
za svaki $x \in W$ postoji $u \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq W$. Tada je $W \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Prema pretpostavci leme za svaki $x \in W$ postoji $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq W$. Slijedi $W = \bigcup\limits_{x \in W} U_x$ pa je $W \in \mathcal{T}$ prema drugom svojstvu iz definicije topologije. □

Propozicija 2.2.3.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je $V \in \mathcal{S}$.
Dokažimo da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Budući da je f neprekidna u x, postoji okolina U od x u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $f(U) \subseteq V$. Iz ovoga slijedi $U \subseteq f^{-1}(V)$.
Dakle, za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Iz prethodne leme slijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Dokažimo da je f neprekidna. Neka je $x \in X$. Dokažimo da je f neprekidna u x.
Neka je V otvorena okolina od $f(x)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je $V \in \mathcal{S}$ i $f(x) \in V$.
Slijedi $x \in f^{-1}(V)$, a prema pretpostavci vrijedi $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Definirajmo $U = f^{-1}(V)$. Dakle, U je otvorena okolina od x u $(X, \mathcal{T})$. Iz definicije od U je očito da je $f(U) \subseteq V$. Prema tome f je neprekidna u x. Dakle f je neprekidna funkcija. □

Definicija 2.2.4.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S} = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$. Kažemo da je $\mathcal{S}$ relativna topologija na Y određena topologijom $\mathcal{T}$. Za topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Pokažimo da je $\mathcal{S}$ topologija Y. Imamo $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $\emptyset \in \mathcal{T}$ te $Y = X \cap Y$ i $X \in \mathcal{T}$ pa zaključujemo da vrijedi $\emptyset, Y \in \mathcal{S}$.
Pretpostavimo da je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $V_\alpha \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Na taj način smo dobili indeksiranu familiju $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}$ topologija vrijedi $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Imamo

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y$$

pa je $\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$ (jer je $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$).
Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Tada je $V_1 = U_1 \cap Y$ i $V_2 = U_2 \cap Y$ gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$.
Slijedi da je

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y,$$

a znamo da je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Stoga je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. Prema tome, $\mathcal{S}$ je topologija na Y.

Definicija 2.2.5.
Neka je $Y \subseteq \mathbb{R}$, $Y \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{T}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$ te neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na Y. Tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je euklidska topologija na Y.

Lema 2.2.6.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.

Dokaz. Budući da je $x_0 \in \langle a, b \rangle$ vrijedi $a < x_0$ i $x_0 < b$ pa je $x_0 - a > 0$ i $b - x_0 > 0$.
Definirajmo $r = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$.Tada je $r > 0$. Iz $r \leq x_0 - a$ slijedi $a \leq x_0 - r$, a iz $r \leq b - x_0$ slijedi $x_0 + r \leq b$. Stoga je $\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. □

Propozicija 2.2.7.
Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u $x_0 \in S$. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija u $\mathbb{R}$ te

neka je $\mathcal{E}_S$ euklidska topologija na S. Tada je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{E}_S$ i $\mathcal{E}$.

Dokaz. Neka je V otvorena okolina od $f(x_0)$ u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada je $f(x_0) \in V$ i $V \in \mathcal{E}$. Neka $B = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Znamo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{E}$ pa postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je

$$f(x_0) \in B \subseteq V. \tag{2.1}$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $B = \langle a, b\rangle$. Dakle, $f(x_0) \in \langle a, b\rangle \subseteq V$. Prema prethodnoj lemi postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$\langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle \subseteq \langle a, b\rangle\,. \tag{2.2}$$

Budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da

$$\forall x \in S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{ vrijedi} f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle\,.$$

Neka je $U = S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Dakle za svaki $x \in U$ vrijedi

$$f(x) \in \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle$$

pa iz (2.2) i (2.1) slijedi da za svaki $x \in U$ vrijedi da je $f(x) \in V$. To znači da je $f(U) \subseteq V$. Očito je $x_0 \in U$. Nadalje, vrijedi $U \in \mathcal{E}_S$. Naime,

$$\mathcal{E}_S = \{W \cap S \mid W \in \mathcal{E}\}\,, U = S \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle\,,$$

a znamo da je

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \in \mathcal{E} \text{ jer je } \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \in \mathcal{B}.$$

Prema tome U je otvorena okolina točke x_0 u topološkom prostoru $(S, \mathcal{E}_S)$. Time smo dokazali da je f neprekidna u x_0 s obzirom na topologije $\mathcal{E}_S$ i $\mathcal{E}$. □

Korolar 2.2.8.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija

na $\mathbb{R}$ te neka je $\mathcal{E}_S$ euklidska topologija na S. Tada je funkcija f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{E}_S$ i $\mathcal{E}$.

2.3 Kompaktnost

Definicija 2.3.1.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Kažemo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako je $X = \cup\,\mathcal{U}$.

Definicija 2.3.2.
Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je kompaktan ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Primjer 2.3.3.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor pri čemu je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Tada zbog $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, imamo da je $\mathcal{U}$ konačan skup, dakle $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$. Iz $X = \cup\,\mathcal{U}$ slijedi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Prema tome, $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan.

Primjer 2.3.4.
Neka je X neprazan skup. Tada je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ kompaktan ako i samo ako je X konačan. Naime, ako je X konačan, onda je i $\mathcal{P}(X)$ konačan skup pa je $(X, \mathcal{P}(X))$ kompaktan prema prethodnom primjeru (primjer 2.3.3).
Obratno, pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ kompaktan. Neka je $\mathcal{U} = \{\,\{x\} \mid x \in X\}$. Sada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{P}(X))$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Budući da su $U_1, \dots, U_n$ konačni skupovi, tada je i njihova unija konačan skup pa je X konačan skup.

Primjer 2.3.5.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Tada topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ nije kompaktan.
Pretpostavimo suprotno.
Neka je $\mathcal{U} = \{\,\langle -x, x\rangle \mid x > 0\,\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Prema pretpostavci postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $\mathbb{R} = U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Dakle, postoje $x_1, \dots, x_n > 0$ takvi da je $\mathbb{R} = \langle -x_1, x_1\rangle \cup \ldots \cup \langle -x_n, x_n\rangle$. No to je očito nemoguće jer za

$m = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ vrijedi $m \in \mathbb{R}$ i $m \notin \langle -x_1, x_1\rangle \cup \ldots \cup \langle -x_n, x_n\rangle$. Dakle, prostor nije kompaktan.

Definicija 2.3.6.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $K \subseteq X$ te $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Kažemo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $K \subseteq \cup\mathcal{U}$.

Definicija 2.3.7.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač skupa K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Uočimo sljedeće:
Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, onda je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa X u $(X, \mathcal{T})$. Nadalje, $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan topološki prostor ako i samo ako je X kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Primjer 2.3.8.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor pri čemu je $\mathcal{T}$ konačan skup. Tada je svaki podskup od X kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Do tog zaključka dolazimo na isti način kao u primjeru 2.3.3.

Propozicija 2.3.9.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Tada je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Tada za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je

$$V = U_V \cap K. \tag{2.3}$$

Definirajmo $\mathcal{U} = \{ U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$. Očito je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ jer je $\mathcal{V} \neq \emptyset$ (a to slijedi iz $\cup\mathcal{V} = K$ i $K \neq \emptyset$). Neka je $x \in K$. Tada postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $x \in V$. Iz definicije od U_V očito je da je $V \subseteq U_v$. Stoga je $x \in U_V$. Prema tome, $x \in \cup\mathcal{U}$. Time smo dokazali da je $K \subseteq \cup\mathcal{U}$.

Zaključak: $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$.
Budući da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je $K \subseteq U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n}$.
Neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in U_{V_i}$. Iz (2.3) slijedi da je $x \in V_i$. Dakle, $x \in V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Time smo dokazali da je $K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Prema tome, $K = V_1 \cup \ldots \cup V_n$.
Zaključak: $(K, \mathcal{S})$ je kompaktan topološki prostor. □

2.4 Zatvoreni skupovi

Propozicija 2.4.1.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$, $K \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K. Pretpostavimo da je $(K, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. Tada je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Definirajmo $\mathcal{V} = \{ U \cap K \mid U \in \mathcal{U}\}$. Za svaki $U \in \mathcal{U}$ vrijedi da je $U \in \mathcal{T}$ pa je stoga $U \cap K \in \mathcal{S}$. Prema tome, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$.
Neka je $x \in K$.
Iz $K \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ slijedi da postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$. Očito je tada $x \in U \cap K$. Time smo dokazali da je

$$K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

S druge strane, očito je

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq K$$

pa je

$$K = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Zaključak: $\mathcal{V}$ je otvoreni pokrivač od $(K, \mathcal{S})$.
Budući da je topološki prostor $(K, \mathcal{S})$ kompaktan , postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je $K = V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Za svaki $i = \{1, \ldots, n\}$, iz $V_i \in \mathcal{V}$ slijedi da postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je $V_i = U_i \cap K$. Dakle,

$$K = (U_1 \cap K) \cup \ldots \cup (U_n \cap K)$$

što očito povlači da je $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.
Time smo dokazali da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Definicija 2.4.2.
Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova te neka je S skup. Kažemo da je S dobar skup za $\mathcal{F}$ ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $F_1, \ldots F_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $S \subseteq F_1 \cup \ldots \cup F_n$.

Uočimo sljedeće: ako su skupovi S i T dobri za $\mathcal{F}$, onda je i skup $S \cup T$ dobar za $\mathcal{F}$.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neke je $K \subseteq X$. Uočimo i da vrijedi i sljedeće:
K je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ vrijedi da je K dobar za $\mathcal{U}$.

Teorem 2.4.3.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Tada je $[a, b]$ kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $[a, b]$ u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Želimo dokazati je $[a, b]$ dobar za $\mathcal{U}$. Definirajmo

$$S = \{ x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ dobar za } \mathcal{U} \}.$$

Budući da je $[a, b] \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U$. Stoga je skup $\{a\}$ očito dobar za $\mathcal{U}$.
No, $[a, a] = \{a\}$ pa slijedi da je $a \in S$. Nadalje, iz definicije skupa S je očito da je $S \subseteq [a, b]$ pa zaključujemo da je S odozgo omeđen.
Prema propoziciji 1.2.10 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je c supremum skupa S. Budući da je c gornja međa od S te da je $a \in S$ vrijedi $a \leq c$. Nadalje, budući da je b gornja međa od S, a c je supremum od S vrijedi $c \leq b$. Prema tome $c \in [a, b]$. Stoga postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $c \in U$.
Budući da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$, imamo $U \in \mathcal{E}$ pa iz činjenice da je $\{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in \mathbb{R}, u < v\}$ baza topologije $\mathcal{E}$ slijedi da postoje $u, v \in \mathbb{R}, u < v$ takvi da je $c \in \langle u, v \rangle \subseteq U$. Imamo $u < c$ što znači da u nije gornja međa skupa S (jer je c najmanja gornja međa od S). Stoga, postoji $x \in S$ takav da je $u < x$. Tvrdimo da je

$$[a, v\rangle \subseteq [a, x] \cup \langle u, v \rangle\,. \tag{2.4}$$

Neka je $y \in [a, v\rangle$. Tada je $a \leq y < v$. Imamo dva slučaja:

1. $y \leq x$

   Tada je $y \in [a, x]$

2. $x < y$

   Tada zbog $u < x$ vrijedi $u < y$ pa iz toga slijedi da je $y \in \langle u, v\rangle$.

U svakom slučaju vrijedi da je $y \in [a, x] \cup \langle u, v\rangle$. Time smo dokazali (2.4).
Iz $\langle u, v\rangle \subseteq U$ i $U \in \mathcal{U}$ slijedi da je $\langle u, v\rangle$ dobar za $\mathcal{U}$.
Iz $x \in S$ slijedi da je $[a, x]$ dobar za $\mathcal{U}$. Stoga je $[a, x] \cup \langle u, v\rangle$ dobar za $\mathcal{U}$ pa iz (2.4) slijedi da je $[a, v\rangle$ dobar za $\mathcal{U}$. Iz $[a, c] \subseteq [a, v\rangle$ slijedi da je $[a, c]$ dobar za $\mathcal{U}$.
Preostaje dokazati da je $c = b$. Pretpostavimo suprotno.
Tada zbog $c \leq b$, vrijedi $c < b$. Očito vrijedi $c < \min\{v, b\}$. Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je

$$c < z < \min\{v, b\}.$$

Tada je $c < z$ te je $z < v$ i $z < b$. Iz $a \leq c$ slijedi $a < z$ pa je stoga $z \in [a, b]$. Nadalje, iz $z < v$ slijedi $[a, z] \subseteq [a, v\rangle$ pa iz činjenice da je $[a, v\rangle$ dobar za $\mathcal{U}$ slijedi da je $[a, z]$ dobar za $\mathcal{U}$. Zaključujemo da je $z \in S$.
No, ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $c < z$ te da je c supremum od S.
Prema tome, $c = b$ pa imamo da je $[a, b]$ dobar za $\mathcal{U}$ čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 2.4.4.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $[a, b]$.
Tada je $([a, b], \mathcal{E})$ kompaktan topološki prostor.

Dokaz. Neka je $\mathcal{E}'$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Prema definiciji (2.2.5) $\mathcal{E}$ je relativna topologija na $[a, b]$ s obzirom na topologiju $\mathcal{E}'$. Prema prethodnom teoremu skup $[a, b]$ je kompaktan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$ pa iz propozicije 2.3.9 slijedi da je $([a, b], \mathcal{E})$ kompaktan topološki prostor. □

Propozicija 2.4.5.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s

obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $f(K)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Definirajmo

$$\mathcal{U} = \left\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V} \right\}.$$

Za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \in \mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ jer je f neprekidna funkcija. To znači da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Tvrdimo da je $K \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$.
Neka je $x \in K$.
Tada je $f(x) \in f(K)$ pa postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$. Stoga je $x \in f^{-1}(V)$. Dakle, postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$. Time smo dokazali da je $K \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$. Prema tome, $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$ (vrijedi $\mathcal{U} \neq \emptyset$ jer je $\mathcal{V} \neq \emptyset$).
Budući da je K kompaktan skup, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $V_i \in \mathcal{V}$ takav da je $U_i = f^{-1}(V_i)$. Dakle,

$$K \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_n).$$

Neka je $x \in K$.
Tada je $x \in f^{-1}(V_i)$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Slijedi da je $f(x) \in V_i$ pa je $f(x) \in V_1 \cup \ldots \cup V_n$.
Dakle, $f(x) \in V_1 \cup \ldots \cup V_n$, $\forall x \in K$. To znači da je $f(K) \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$.
Time smo dokazali da je $f(K)$ kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Korolar 2.4.6.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kompaktan. Tada je $f(X)$ kompaktan skup u topološkom prostoru $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodne propozicije za $K = X$. □

Definicija 2.4.7.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ ako je $X \setminus F$ otvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ (tj. $X \setminus F \in \mathcal{T}$).

Primjer 2.4.8.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tada je $[a, b]$ zatvoren skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Naime, vrijedi $\mathbb{R} \setminus [a, b] = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, \infty\rangle$, a skupovi $\langle -\infty, a\rangle$ i $\langle b, \infty\rangle$ su otvoreni u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ jer je $\langle -\infty, a\rangle = \bigcup\limits_{x<a} \langle x, a\rangle$ i $\langle b, \infty\rangle = \bigcup\limits_{y>b} \langle b, y\rangle$.

Pokazat ćemo poslije da je svaki kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$, zatvoren. To će slijediti iz jedne općenitije tvrdnje, no uočimo prvo da kompaktan skup u topološkom prostoru općenito ne mora biti zatvoren.

Primjer 2.4.9.
Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Odaberimo podskup K od X takav da je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. Tada je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$. Nadalje, iz $K \neq X$ slijedi da je $X \setminus K \neq \emptyset$, a iz $K \neq \emptyset$ slijedi da je $X \setminus K \neq X$. Stoga $X \setminus K \notin \{\emptyset, X\}$ pa slijedi da K nije zatvoren u $(X, \{\emptyset, X\})$.

Definicija 2.4.10.
Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$ te $x \in U$ i $y \in V$.

Primjer 2.4.11.
Neka je X skup koji ima barem 2 točke. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ očito nije Hausdorffov. S druge strane, za svaki neprazan skup X topološki prostor $(X, \mathcal{P}(X))$ je Hausdorffov.

Primjer 2.4.12.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Tada je topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ Hausdorffov.
Dokažimo to.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$. Pretpostavimo da je $x < y$. Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x < z < y$. Nadalje, odaberimo $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a < x$ i $y < b$. Definirajmo $U = \langle a, z\rangle$, $V = \langle z, b\rangle$. Imamo $U, V \in \mathcal{E}, U \cap V = \emptyset$ te $x \in U$ i $y \in V$.

Propozicija 2.4.13.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor.
Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ vrijedi $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. □

Teorem 2.4.14.
*Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.
Tada je K zatvoren skup u prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$.
Neka je $x \in X \setminus K$.
Za svaki $y \in K$ vrijedi da je $x \neq y$ pa budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, postoje $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ takvi da je $U_y \cap V_y = \emptyset$ te $x \in U_y, y \in U_y$.
Tada je $\left\{ V_y \,|\, y \in K \right\}$ otvoreni pokrivač skupa K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}. \tag{2.5}$$

Imamo

$$U_{y_1} \cap V_{y_1} = \emptyset, \dots, U_{y_n} \cap V_{y_n} = \emptyset$$

pa iz toga slijedi

$$(V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}) \cap (U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}) = \emptyset.$$

Iz (2.5) slijedi

$$(U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}) \cap K = \emptyset$$

tj.

$$U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n} \subseteq X \setminus K.$$

Očito je $x \in U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$, a prema propoziciji (2.4.13) skup $U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ je otvoren u $(X, \mathcal{T})$.
Zaključak: za svaki $x \in X \setminus K$ postoji otvoren skup U u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $x \in U \subseteq X \setminus K$.
Iz leme 2.2.2 slijedi da je $X \setminus K \in \mathcal{T}$. Prema tome, K je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Korolar 2.4.15.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada je K zatvoren skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

2.5 Minimum i maksimum neprekidnih funkcija na kompaktnim prostorima

Propozicija 2.5.1.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je K kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada je K omeđen skup.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = \{\langle -x, x\rangle \mid x > 0\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Iz kompaktnosti skupa K slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n > 0$ takvi da je

$$K \subseteq \langle -x_1, x_1\rangle \cup \ldots \cup \langle -x_n, x_n\rangle .$$

Neka je $m = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Neka je $x \in K$. Tada je $x \in \langle -x_i, x_i\rangle$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Imamo $x_i \leq m$ te također $-m \leq -x_i$. Stoga je

$$-m \leq -x_i < x < x_i \leq m.$$

Dakle, $-m < x < m$, za svaki $x \in K$. Prema tome, $-m$ je donja međa skupa K, a m gornja međa skupa K.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.5.2.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je K neprazan i omeđen skup u $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je K zatvoren skup u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada K ima minimim i maksimum.

Dokaz. Budući da je K neprazan i omeđen skup, postoji supremum tog skupa. Označimo ga s a. Tvrdimo da je $a \in K$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $a \in K^c$. Budući da je K zatvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, tada je K^c otvoren, tj. $K^c \in \mathcal{E}$. Znamo da je

$$\{\langle u, v\rangle \mid u, v \in \mathbb{R}, u < v\}$$

baza topologije $\mathcal{E}$ pa postoje $u, v \in \mathbb{R}, u < v$ takvi da je $a \in \langle u, v\rangle \subseteq K^c$. Slijedi da je $u < a < v$.
Neka je $x \in K$. Tada je $x \leq a$ pa je $x < v$. Slijedi da je $x \leq u$ jer bismo u suprotnom imali $u < x < v$, tj. $x \in \langle u, v\rangle \subseteq K^c$ što je očito nemoguće.
Dakle, $x \leq u$, za svaki $x \in K$. To znači da je u gornja međa skupa K što je u kontradikciji s činjenicom da je a najmanja gornja međa skupa K.
Zaključak: $a \in K$. Stoga je a maksimum skupa K. Analogno dobivamo da K ima minimum. □

Teorem 2.5.3.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$. Tada funkcija f poprima minimum i maksimum.

Dokaz. Iz korolara (2.4.6) slijedi da je $f(X)$ kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada je $f(X)$ zatvoren i omeđen skup, a očito je i neprazan pa prema prethodnoj propoziciji ima minimum i maksimum.
Neka je $m = \min f(X)$ te $M = \max f(X)$. Posebno imamo $m, M \in f(X)$ pa postoje $x_0, x_1 \in X$ takvi da je $M = f(x_0)$ i $M = f(x_1)$. Za svaki $x \in X$ očito vrijedi $m \leq f(x) \leq M$ pa slijedi $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$.
Prema tome funkcija f poprima minimum i maksimum. □

Korolar 2.5.4.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada funkcija f poprima minimum i maksimum.

Dokaz. Neka je $\mathcal{E}'$ euklidska topologija na $[a, b]$ te neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$.
Prema propoziciji (2.2.7) funkcija f je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{E}'$ i $\mathcal{E}$.
Nadalje, prema korolaru (2.4.4) topološki prostor $([a, b], \mathcal{E}')$ je kompaktan. Sada, iz prethodnog teorema slijedi da funkcija f poprima minimum i maksimum. □

Propozicija 2.5.5.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te da je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od F u $(X, \mathcal{T})$. Promotrimo familiju $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$.
Imamo da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, a vrijedi da je $X \setminus F \in \mathcal{T}$ jer je F zatvoren skup. Prema tome, $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\} \subseteq \mathcal{T}$.
Neka je $x \in K$. Ako je $x \in F$, onda je $x \in U$ za neki $U \in \mathcal{U}$, a ako $x \notin F$, onda je $x \in X \setminus F$. Zaključujemo da u svakom slučaju postoji $U \in \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ takav da je $x \in U$. Prema tome, $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Iz $F \subseteq K$ slijedi

$$F \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Iz ovoga se lako vidi da je $F \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.
Time je dokazano da je F kompaktan skup. □

Propozicija 2.5.6.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je K omeđen skup u $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je K zatvoren skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Tada je K kompaktan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Dokaz. Iz činjenice da je K omeđen skup slijedi da postoji donja međa a skupa K i gornja međa b skupa K.
Možemo pretpostaviti da je $a < b$. Slijedi da je $K \subseteq [a, b]$. Prema teoremu 2.4.3 skup $[a, b]$ je kompaktan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ pa iz prethodne propozicije slijedi da je K kompaktan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. □

Poglavlje 3

Neprekidne funkcije i povezanost

3.1 Nultočke neprekidnih funkcija na segmentu

Lema 3.1.1.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0.

1. *Pretpostavimo da je $f(x_0) > 0$.*

   Tada postoji $r > 0$ takav da je $f(x) > 0$, za svaki $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap S$.

2. *Pretpostavimo da je $f(x_0) < 0$.*

   Tada postoji $r > 0$ takav da je $f(x) < 0$, za svaki $x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \cap S$.

Dokaz. 1.
Neka je $\epsilon = f(x_0)$. Tada je $\epsilon > 0$ pa postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \Rightarrow f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle .$$

Dakle , za svaki $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \cap S$ vrijedi

$$f(x_0) - \epsilon < f(x), \text{ tj. } 0 < f(x) \text{ (jer je} f(x_0) - \epsilon = 0).$$

Time je prva tvrdnja dokazana.
Analogno dokazujemo drugu tvrdnju. □

Teorem 3.1.2.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada postoji $x_0 \in [a, b]$ takav da je $f(x_0) = 0$.

Dokaz. Definirajmo
$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

Imamo $a \in S$ pa je $S \neq \emptyset$. Nadalje iz $S \subseteq [a, b]$ slijedi da je S omeđen skup. Stoga postoji supremum skupa S. Označimo ga s c. Imamo $a \leq c$ jer je $a \in S$ te $c \leq b$ jer je b gornja međa od S. Prema tome, $c \in [a, b]$. Dokažimo da je $f(c) = 0$.
Pretpostavimo da je $f(c) < 0$. Tada prema prethodnoj lemi postoji $r > 0$ takav da za svaki

$$x \in \langle c - r, c + r\rangle \cap [a, b] \text{ vrijedi } f(x) < 0. \tag{3.1}$$

Uočimo da je $c \neq b$ (jer je $f(c) < 0$ i $f(b) > 0$). Stoga je $c < b$.
Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $c < x < \min\{c + r, b\}$. Slijedi da je

$$a \leq c < x < b \text{ pa je } x \in [a, b].$$

Nadalje, $c < x < c + r$ pa je $x \in \langle c - r, c + r\rangle$.
Prema tome, $x \in \langle c - r, c + r\rangle \cap [a, b]$ pa iz (3.1) slijedi da je $f(x) < 0$. Stoga je $x \in S$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $c < x$ te da je c supremum skupa S.
Pretpostavimo da je $f(c) > 0$. Prema prethodnoj lemi postoji $r > 0$ takav da za svaki

$$x \in \langle c - r, c + r\rangle \cap [a, b] \text{ vrijedi } f(x) > 0. \tag{3.2}$$

Imamo $a \neq c$ (jer je $f(a) < 0$ i $f(c) > 0$). Stoga je $a < c$. Slijedi da je $\max\{a, c - r\} < c$. Budući da je c najmanja gornja međa skupa S, broj $\max\{a, c - r\}$ nije gornja međa skupa S pa postoji $x \in S$ takav da je $\max\{a, c - r\} < x$. Očito je $x \leq c$. Slijedi da je

$$a < x \leq c \leq b \text{ pa je } x \in [a, b].$$

Nadalje, $c - r < x \leq c$ pa je $x \in \langle c - r, c + r\rangle$. Dakle, $x \in \langle x - r, x + r\rangle \cap [a, b]$ pa iz (3.2) slijedi da je $f(x) > 0$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x \in S$.
Zaključak: $f(c) = 0$. □

3.2 Povezani skupovi u topološkim prostorima

Definicija 3.2.1.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$. Tada za uređeni par (U, V) kažemo da je separacija topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 3.2.2.
Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je povezan ako ne postoji separacija od $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 3.2.3.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Kažemo da je A povezan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je topološki prostor $(A, \mathcal{S})$ povezan pri čemu je $\mathcal{S}$ relativna topologija na A.

Propozicija 3.2.4.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Tada je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako ne postoje skupovi $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$A \subseteq U \cup V,\ A \cap U \cap V = \emptyset,\ A \cap U \neq \emptyset,\ A \cap V \neq \emptyset. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na A. Pretpostavimo da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da vrijedi (3.3). Tvrdimo da je $(A \cap U, A \cap V)$ separacija topološkog prostora $(A, \mathcal{S})$.
Iz $U, V \in \mathcal{T}$ slijedi da je $A \cap U, A \cap V \in \mathcal{S}$. Nadalje,

$$(A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) = A \text{ jer je } A \subseteq (U \cup V).$$

Vrijedi

$$(A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Prema pretpostavci je $A \cap U \neq \emptyset$ i $A \cap V \neq \emptyset$. Dakle, $(A \cap U, A \cap V)$ je separacije od $(A, \mathcal{S})$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $(A, \mathcal{S})$ povezan topološki prostor (to vrijedi jer je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$).
Prema tome, ne postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da vrijedi (3.3).

Pretpostavimo sada da ne postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da vrijedi (3.3). Dokažimo da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.
Pretpostavimo suprotno. Tada topološki prostor $(A, \mathcal{S})$ nije povezan pa postoji separacija (W_1, W_2) od $(A, \mathcal{S})$. Imamo $W_1, W_2 \in \mathcal{S}$ pa postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$W_1 = A \cap U, W_2 = A \cap V.$$

Iz $A = W_1 \cup W_2$ slijedi da je $A = A \cap (U \cup V)$ pa je očito $A \subseteq (U \cup V)$.
Iz $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ slijedi $A \cap U \cap V = \emptyset$. Vrijedi $W_1 \neq \emptyset$, $W_2 \neq \emptyset$, tj. $A \cap U \neq \emptyset$ i $A \cap V \neq \emptyset$. Dakle, U, V zadovoljavaju (3.3) što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, A je povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Propozicija 3.2.5.
Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je A povezan skup u topološkom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ te neka su $x, y \in A$, $x < y$. Tada je $[x, y] \subseteq A$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $z \in [x, y]$ takav da $z \notin A$.
Očito je $z \neq x$ i $z \neq y$ pa je $x < z < y$. Definirajmo $U = \langle -\infty, z\rangle$ i $V = \langle z, \infty\rangle$. Imamo $\langle z, \infty\rangle = \bigcup\limits_{\substack{v \in \mathbb{R} \\ z < u}} \langle z, v\rangle$ pa zaključujemo da je $\langle z, \infty\rangle \in \mathcal{E}$.
Analogno zaključujemo da je $\langle -\infty, z\rangle \in \mathcal{E}$. Dakle, $U, V \in \mathcal{E}$.
Očito je $U \cap V = \emptyset$ pa posebno vrijedi $U \cap V \cap A = \emptyset$. Imamo $U \cup V = \mathbb{R} \setminus \{z\}$ pa iz $z \notin A$ slijedi da je $A \subseteq U \cup V$. Imamo dalje da je $x \in A \cap U$ i $y \in A \cap V$ pa je $A \cap U \neq \emptyset$ i $A \cap V \neq \emptyset$. Iz propozicije (3.2.4) slijedi da skup A nije povezan što je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Prema tome, $[x, z] \subseteq A$. □

Propozicija 3.2.6.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(A)$ povezan skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada prema propoziciji (3.2.4) postoje $U, V \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$f(A) \subseteq U \cup V, \tag{3.4}$$

$$f(A) \cap U \cap V = \emptyset, \tag{3.5}$$

$$f(A) \cap U \neq \emptyset \text{ i} \tag{3.6}$$

$$f(A) \cap V \neq \emptyset. \tag{3.7}$$

Budući da je f neprekidna, vrijedi $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Tvrdimo da je

$$A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Neka je $x \in A$.
Tada je $f(x) \in f(A)$ pa iz (3.4) slijedi da je $f(x) \in U$ ili $f(x) \in V$. Stoga je $x \in f^{-1}(U)$ ili $x \in f^{-1}(V)$, u svakom slučaju je $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Dakle, vrijedi da je $A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
Tvrdimo da je

$$A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset.$$

Pretpostavimo da postoji $x \in A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Tada je $x \in A$, $x \in f^{-1}(U)$ i $x \in f^{-1}(V)$ pa slijedi da je $f(x) \in f(A)$, $f(x) \in U$ i $f(x) \in V$, no ovo je u kontradikciji s (3.5). Prema tome vrijedi $A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$.
Tvrdimo da je

$$A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Iz (3.6) slijedi da postoji $x \in A$ takav da je $f(x) \in U$. Stoga je $x \in f^{-1}(U)$, dakle $x \in A \cap f^{-1}(U)$. Prema tome vrijedi da je $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Analogno dobivamo da je $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$.
Sada iz prethodne propozicije te iz tvrdnji

$$A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset, A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset, A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$$

slijedi da A nije povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. To je u kontradikciji s pretpostavkom propozicije.
Zaključak: $f(A)$ je povezan skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Korolar 3.2.7.
Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan. Tada je $f(X)$ povezan skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na X. Imamo

$$\mathcal{S} = \{U \cap X \mid U \in \mathcal{T}\} = \{U \mid U \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T},$$

dakle $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, tj. $(X, \mathcal{S}) = (X, \mathcal{T})$ pa je očito da je $(X, \mathcal{S})$ povezan topološki prostor.
Prema tome, skup X je povezan u $(X, \mathcal{T})$.
Iz prethodne propozicije slijedi da je $f(X)$ povezan skup u $(Y, \mathcal{S})$. $\square$

Korolar 3.2.8.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$. Pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan te da postoje $a, b \in X$ takvi da je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
Tada postoji $c \in X$ takav da je $f(c) = 0$.

Dokaz. Prema prethodnom korolaru, $f(X)$ je povezan skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Imamo

$$f(a), f(b) \in f(X), f(a) < 0 < f(b).$$

Iz propozicije (3.2.5) slijedi da je $[f(a), f(b)] \subseteq f(X)$. Iz $0 \in [f(a), f(b)]$ slijedi da je $0 \in f(X)$.
Prema tome, postoji $c \in X$ takav da je $f(c) = 0$. $\square$

3.3 Povezanost segmenata

Lema 3.3.1.
Neka su X, Y skupovi takvi da je $Y \subseteq X$. Neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ takvi da je

$$B = Y \cap A. \tag{3.8}$$

Tada je $Y \setminus B = Y \cap (X \setminus A)$.

Dokaz. Neka je $b \in Y \setminus B$. Tada je $b \in Y$ i $b \notin B$. Kada bi vrijedilo da je $b \in A$, onda bismo imali $b \in Y \cap A$, tj. $b \in B$, a to je nemoguće. Dakle, $b \notin A$ pa imamo da je $b \in X \setminus A$. Prema tome je $b \in Y \cap (X \setminus A)$. Time smo dokazali da je

$$Y \setminus B \subseteq Y \cap (X \setminus A).$$

Obratno, pretpostavimo da je $b \in Y \cap (X \setminus A)$. Dakle, $b \in Y$ i $b \in X \setminus A$. Slijedi da $b \notin A$. Kada bi vrijedilo da je $b \in B$ tada bi prema (3.8) vrijedilo da je $b \in A$ što je nemoguće. Prema tome, $b \notin B$ pa je $b \in Y \setminus B$. Time smo dokazali da je

$$Y \cap (X \setminus A) \subseteq Y \setminus B.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 3.3.2.
Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

1. *Neka je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$.*

   Tada postoji zatvoren skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = Y \cap G$.

2. *Neka je G zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.*

   Tada je $Y \cap G$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz.

1. Imamo $Y \setminus F \in \mathcal{S}$ pa je $Y \setminus F = Y \cap U$, za neki $U \in \mathcal{T}$. Iz leme slijedi da je $Y \setminus (Y \setminus F) = Y \cap (X \setminus U)$, tj. $F = Y \cap (X \setminus U)$. Time je prva tvrdnja dokazana.

2. Označimo $F = Y \cap G$. iz leme slijedi da je $Y \setminus F = Y \cap (X \setminus G)$. Imamo $X \setminus G \in \mathcal{T}$ pa je $Y \cap (X \setminus G) \in \mathcal{S}$. Dakle, $Y \setminus F \in \mathcal{S}$ pa je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Time je druga tvrdnja dokazana.

□

Korolar 3.3.3.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$ takav da je Y zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Iz prve tvrdnje prethodne propozicije slijedi da postoji zatvoren skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = Y \cap G$. Stoga je F kao presjek dvaju zatvorenih skupova, zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Napomena. *Pretpostavimo da je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te da je* (U, V) *separacija od* $(X, \mathcal{T})$. *Tada je* $U^c = V$ *i* $V^c = U$ *pa zaključujemo da su* U *i* V *zatvoreni skupovi.*
Obratno, ako su F *i* G *zatvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{T})$ *takvi da je* $F \cup G = X$, $F \cap G = \emptyset$, $F \neq \emptyset$ *i* $G \neq \emptyset$, *onda je* (F, G) *separacija od* $(X, \mathcal{T})$. *Naime, vrijedi* $F^c = G$ *i* $G^c = F$ *pa zaključujemo da su* F *i* G *otvoreni.*

Teorem 3.3.4.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $[a, b]$. *Tada je* $([a, b], \mathcal{E})$ *povezan topološki prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da topološki prostor $([a, b], \mathcal{E})$ nije povezan. Tada postoje zatvoreni skupovi F, G u $([a, b], \mathcal{E})$ takvi da je

$$F \cap G = \emptyset, F \cup G = [a, b], F \neq \emptyset \text{ i } G \neq \emptyset.$$

Imamo $a \in F$ ili $a \in G$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \in F$. Neka je $\mathcal{E}'$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Imamo da je $([a, b], \mathcal{E})$ potprostor od $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$ te da je $[a, b]$ zatvoren skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$. Iz prethodnog korolara slijedi da su F i G zatvoreni skupovi u $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$. Dakle, G je neprazan, zatvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$ i omeđen (jer je $G \subseteq [a, b]$) pa prema propoziciji (2.5.2) postoji minimum skupa G. Označimo ga s m.
Imamo da je $m \in G$ pa je $m \in [a, b]$, no $m \neq a$ jer je $a \in F$ pa slijedi $a < m$.
Promotrimo skup $[a, m] \cap F$. Taj skup je zatvoren u $(\mathbb{R}, \mathcal{E}')$, kao presjek dva zatvorena skupa, neprazan jer sadrži a i očito je omeđen. Neka je

$$M = \max([a, m] \cap F). \tag{3.9}$$

Slijedi da je $M \in [a, m]$ pa je $M \leq m$, no također imamo $M \in F$ pa je $M \neq m$ jer je $m \in G$. Dakle, $M < m$. Prema tome vrijedi

$$a \leq M < m \leq b.$$

Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $M < x < m$. Slijedi da je $x \in [a, b]$ pa je $x \in F$ ili $x \in G$. Zbog $x < m$, a $m = \min G$ imamo $x \notin G$. Stoga je $x \in F$. Iz načina na koji smo odabrali x, slijedi da je $x \in [a, m]$. Stoga je $x \in [a, m] \cap F$ pa je $x \leq M$ zbog (3.9). No ovo je u kontradikciji s odabirom broja x.
Zaključak: topološki prostor $([a, b], \mathcal{E})$ je povezan. □

3.4 Međuvrijednosti neprekidnih funkcija

Teorem 3.4.1.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Tada postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = 0$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $[a, b]$ te neka je $\mathcal{E}'$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Prema prethodnom teoremu, topološki prostor $([a, b], \mathcal{E})$ je povezan. Prema propoziciji 2.2.7 funkcija f je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$. Tvrdnja teorema slijedi iz korolara 3.2.8. □

Propozicija 3.4.2.
Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{E}$.
Pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan te da postoje $a, b \in X$ i $y \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(a) < y < f(b)$ ili $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $c \in X$ takav da je $f(c) = y$.

Dokaz. Prema korolaru (3.2.8) skup $f(X)$ je povezan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Imamo

$$f(a) < y < f(b) \text{ ili } f(b) < y < f(a)$$

pa iz propozicije (3.2.5) slijedi da je

$$y \in [f(a), f(b)] \subseteq f(X) \text{ ili } y \in [f(b), f(a)] \subseteq f(X).$$

U svakom slučaju vrijedi da je $y \in f(X)$ pa slijedi tvrdnja propozicije. □

Korolar 3.4.3.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) < y < f(b)$ ili $f(a) > y > f(b)$. Tada postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$.

Dokaz. Koristeći prethodnu propoziciju, tvrdnja ovog korolara dokazuje se posve analogno kao tvrdnja prethodnog korolara. □

3.5 Slike neprekidnih funkcija na segmentu

Napomena. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u $x_0 \in S$. Neka je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Tada je $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0. Naime, neka je $\epsilon > 0$.*
Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{3.10}$$

Posebno, za svaki $x \in T$ vrijedi (3.10). Dakle, za svaki $x \in T$ vrijedi:

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta \text{ onda je } \left| f|_T (x) - f|_T (x_0) \right| < \epsilon. \tag{3.11}$$

Dakle, $f|_T$ je neprekidna u x_0.
Posebno, ako je $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $T \subseteq S$, $T \neq \emptyset$, onda je $f|_T : T \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.

Teorem 3.5.1.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoje $c, d \in \mathbb{R}, c \leq d$ takvi da je $f([a, b]) = [c, d]$.

Dokaz. Prema korolaru (2.5.4) funkcija f poprima minumum i maksimum.
Dakle, postoje $x_m, x_M \in [a, b]$ takvi da je

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in [a, b] .$$

Označimo sa $c = f(x_m), d = f(x_M)$. Za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $c \leq f(x) \leq d$ pa je $f(x) \in [c, d]$. Prema tome je $f([a, b]) \subseteq [c, d]$.

Neka je $y \in [c, d]$. Želimo dokazati da je $y \in f([a, b])$. To je jasno ako je $y = c$ ili $y = d$. Pretpostavimo da je $y \neq c$ i $y \neq d$. Dakle, $c < y < d$. Slijedi $c \neq d$ pa je stoga $x_m \neq x_M$. Imamo dva slučaja.

1. slučaj: $x_m < x_M$.

   Vrijedi: $[x_m, x_M] \subseteq [a, b]$ pa je prema prethodnoj napomeni funkcija $f|_{[x_m, x_M]} : [x_m, x_M] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Imamo

   $$f|_{[x_m,x_M]}(x_m) = f(x_m) = c < y < d = f(x_M) = f|_{[x_m,x_M]}.$$

   Iz korolara 3.4.3 slijedi da postoji $x \in [x_m, x_M]$ takav da je $f|_{[x_m,x_M]}(x) = y$. Dakle, $x \in [a, b]$ i $f(x) = y$. Prema tome je $y \in f([a, b])$.

2. slučaj: $x_M < x_m$.

   Posve analogno dobivamo da postoji $x \in [x_M, x_m]$ takav da je $f(x) = y$.

Dakle, $y \in f([a, b])$. Dokazali smo da je $[c, d] \subseteq f([a, b])$.
Prema tome je $f([a, b]) = [c, d]$ □

Primjer 3.5.2.
Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Vrijedi

$$f([0, 1]) = \{-1\} \cup [1, \infty\rangle . \tag{3.13}$$

Naime, ako je $x \in \langle 0, 1]$, onda je $1 \leq \frac{1}{x}$ tj. $1 \leq f(x)$. Prema tome je

$$f([0, 1]) \subseteq \{-1\} \cup [1, \infty\rangle .$$

Obratno, ako je $y \in [1, \infty\rangle$, onda je $\frac{1}{y} \in \langle 0, 1]$ pa je $f\left(\frac{1}{y}\right) = y$, dakle $y \in f(\langle 0, 1])$.
Prema tome je

$$\{-1\} \cup [1, \infty\rangle \subseteq f([0, 1]) .$$

Dakle (3.13) vrijedi. Iz ovoga zaključujemo da funkcija f nije omeđena. Nadalje, imamo $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, ali ne postoji $x \in [0,1]$ takav da je $f(x) = 0$.
Zaključak: tvrdnje korolara 2.5.4 i teorema 3.4.1 ne vrijede ako se izostavi pretpostavka da je f neprekidna funkcija.
Neka je $x_0 \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da je f neprekidna u točki x_0. Pretpostavimo da je $x_0 < 1$. Neka je $\epsilon > 0$. Imamo $1 < \frac{1}{x_0}$ pa je $0 < \frac{1}{x_0} - 1$.
Odaberimo $r > 0$ takav da je $0 < r < \frac{1}{x_0} - 1$.
Neka je $\epsilon' = \min\{\epsilon, r\}$.
Slijedi $0 < \epsilon' < \frac{1}{x_0} - 1$ pa je $\frac{1}{x_0} - \epsilon' > 1$. Dakle, $1 < \frac{1}{x_0} - \epsilon' < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{x_0} + \epsilon'$ pa je

$$\frac{1}{\frac{1}{x_0} + \epsilon'} < x_0 < \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \epsilon'} < 1. \tag{3.14}$$

Prema lemi 2.2.6 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \subseteq \left\langle \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \epsilon'}, \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \epsilon'} \right\rangle. \tag{3.15}$$

Uočimo da je $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \subseteq \langle 0, 1\rangle$. Neka je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Tada je

$$x \in \left\langle \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \epsilon'}, \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \epsilon'} \right\rangle, \text{ tj. } \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \epsilon'} < x < \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \epsilon'} \tag{3.16}$$

pa je

$$\frac{1}{x_0} - \epsilon' < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \epsilon', \text{ tj. } \frac{1}{x} \in \left\langle \frac{1}{x_0} - \epsilon', \frac{1}{x_0} + \epsilon' \right\rangle. \tag{3.17}$$

No,

$$\left\langle \frac{1}{x_0} - \epsilon', \frac{1}{x_0} + \epsilon' \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{1}{x_0} - \epsilon, \frac{1}{x_0} + \epsilon \right\rangle \text{ jer je } \epsilon' \leq \epsilon. \tag{3.18}$$

Dakle,

$$\forall x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \text{ vrijedi } f(x) \in \langle f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon\rangle.$$

Promotrimo sada slučaj kada je $x_0 = 1$. Neka je $\epsilon > 0$. Imamo da je $1 < 1 + \epsilon$ pa je $\frac{1}{1+\epsilon} < 1$.

Prema lemi 2.2.6 postoji $\delta > 0$ *takav da je*

$$\langle 1-\delta, 1+\delta\rangle \subseteq \left\langle \frac{1}{1+\epsilon}, 2\right\rangle.$$

Neka je $x \in [0,1]$ *takav da je* $x \in \langle 1-\delta, 1+\delta\rangle$. *Tada je* $\frac{1}{1+\epsilon} < x$, *posebno imamo* $x > 0$ *pa slijedi* $f(x) = \frac{1}{x} < 1+\epsilon$. *Slijedi*

$$1-\epsilon < 1 \leq f(x) < 1+\epsilon,$$

dakle

$$f(x) \in \langle 1-\epsilon, 1+\epsilon\rangle .$$

Prema tome, za svaki $x \in [0,1]$ *takav da je* $x \in \langle 1-\delta, 1+\delta\rangle$ *vrijedi* $f(x) \in \langle f(1)-\epsilon, f(1)+\epsilon\rangle$.
Zaključak: funkcija f *je neprekidna u* x_0, *za svaki* $x_0 \in \langle 0,1]$.

Ako su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija onda je prema teoremu 3.5.1 $f([a,b])$ segment. Obratno, ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f([a,b])$ segment, onda funkcija f ne mora biti neprekidna što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3.5.3.
Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Tada je $f([0,1]) = [0,1]$. *No, funkcija* f *nije neprekidna. Dokažimo da* f *nije neprekidna u točki* 0.
Pretpostavimo suprotno.
Tada za $\epsilon = \frac{1}{2}$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in [0,1] \cap \langle 0-\delta, 0+\delta\rangle$ *vrijedi*

$$f(x) \in \langle 1-\epsilon, 1+\epsilon\rangle . \tag{3.20}$$

Imamo $0 < \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}$ *pa odaberimo* $x \in \mathbb{R}$ *takav da* $0 < x < \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}$.

Slijedi $0 < x < \delta$ *i* $0 < x < \frac{1}{2}$ *pa je*

$$x \in [0, 1] \cap \langle 0 - \delta, 0 + \delta \rangle .$$

Stoga je prema (3.20) $f(x) \in \langle 1 - \epsilon, 1 + \epsilon \rangle$.
Posebno, $1 - \epsilon < f(x)$ *tj.* $\frac{1}{2} < f(x)$ *(jer je* $\epsilon = \frac{1}{2}$*). S druge strane, iz* $0 < x < \frac{1}{2}$ *slijedi da je* $f(x) = x$ *pa je* $f(x) < \frac{1}{2}$ *što je kontradikcija s činjenicom da je* $\frac{1}{2} < f(x)$.
Dakle, f *nije neprekidna u* 0.

Bibliografija

[1] C. O. Christenson and W. L. Voxman. *Aspects of Topology*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[2] S. Kurepa. *Matematička analiza I*. Školska Knjiga, Zagreb, 1997.

[3] S. Mardešić. *Matematička analiza I*. Školska Knjiga, Zagreb, 1991.

[4] W. A. Sutherland. *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford University Press, 1975.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo neprekidne funkcije na segmentu, ali i topološke prostore i koncepte s tim u vezi pomoću kojih možemo dokazati neke klasične rezultate vezane za neprekidne funkcije na segmentu.

U prvom poglavlju koristeći gomilište nizova dokazujemo da svaka neprekidna funkcija na segmentu poprima minimum i maksimum. U drugom poglavlju proučavamo pojmove topologije, baze topologije, neprekidnosti funkcije između topoloških prostora i relativne topologije. Također, proučavamo kompaktne skupove u topološkim prostorima te dokazujemo da neprekidne realne funkcije na kompaktnim prostorima poprimaju minimum i maksimum.

U trećem poglavlju proučavamo povezanost u topološkim prostorima te dokazujemo da neprekidna realna funkcija na povezanom prostoru poprima međuvrijednosti.

Summary

In this thesis we have studied continuous functions on segment, topological spaces and related concepts which we use to prove some classical results related to continuous functions on a segment.

In the first chapter we use that each continuous function on a segment attains its minimum and maximum. In the second chapter we study topological spaces, continuous functions between topological spaces and relative topologies.

We also study compact sets in topological spaces and we prove that each continuous real function on a compact space attains its minimum and maximum.

In the third chapter we examine connectedness in topological spaces and we prove that each continuous real function on a connected space attains intermediate values.

Životopis

Rođena sam u gradu Varaždinu 12.05.1990. godine. Živim u Novom Marofu s roditeljima i bratom, a tu i završavam osnovnu školu 2005. godine. Zatim upisujem prirodoslovno - matematički smjer u Prvoj gimnaziji Varaždin koji završavam 2009. godine. Iste te godine upisujem se na studij matematike - nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu. Godine 2013. odlazim u Rijeku gdje dovršavam studij matematike te time stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike (univ. bacc. math.). Diplomski studij matematike, smjer nastavnički, upisujem 2016. godine na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.