Konveksne funkcije i njihova poopćenja u realnoj analizi

Vranar, Viktor

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Viktor Vranar

KONVEKSNE FUNKCIJE I NJIHOVA POOPĆENJA U REALNOJ ANALIZI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Jadranka Mićić Hot

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

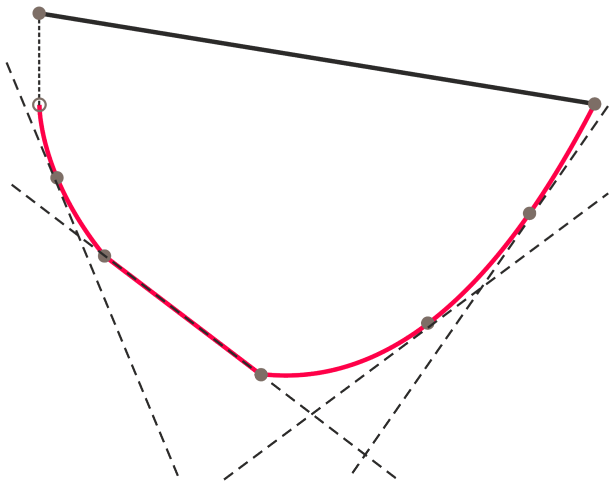
Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Konveksne funkcije imaju mnoge primjene u raznim granama znanosti. Jedno od važnih svojstava konveksnih funkcija je da je svaki minimum ujedno globalni minimum. To znači da je dovoljno pronaći bilo koji lokalni minimum, a to je onda i minimum funkcije na njezinoj čitavoj domeni. Ovo svojstvo posebno je važno u optimizaciji gdje je jedan od ciljeva pronaći ekstreme funkcija. Koristi se i u matematičkom modeliranju, dizajniranju nekih objekata i sl. Nadalje, njihova svojstva koriste se za dokazivanje mnogih nejednakosti. Posebno, tzv. Jensenova nejednakost primjenjuje se u teoriji vjerojatnosti, direktno povlači takozvanu aritmetičko-geometrijsku nejednakost itd.



Slika 0.1: Geometrijska interpretacija konveksne funkcije

Kao što je J.L.W.V. Jensen anticipirao još 1906. g. pojam konveksne funkcije zaista je našao važno mjesto u suvremenoj matematici, što se se može vidjeti u velikom broju istraživačkih članaka i knjiga posvećenih ovoj temi. U tom kontekstu možemo reći da je Hermite-Hadamardova nejednakost prvi temeljni rezultat za konveksne funkcije s prirodnom geometrijskom interpretacijom i mnogim primjenama, koji je privukao i nastavlja privlačiti veliki interes među matematičarima. Mnogi matematičari su naporno radili da bi generalizirali, profinili i proširiti tu nejednakost za različite klase funkcija kao što su neke koje se navode u ovom diplomskom radu.

Hermite–Hadamardova nejednakost, nazvana po francuskim matematičarima Charlesu Hermiteu (1822.-1901.) i Jacquesi Salomon Hadamardu (1865.–1963.), tvrdi:

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda vrijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1}$$

Hermite je 22. studenog 1881. g. poslao pismo u časopis Mathesis, u kojem je dao nejednakost (1) . Njegov rezultat je objavljen u broju Mathesis 3 (1883., p. 82). Interesantno je spomenuti da se ova kratka Hermiteova nota nigdje ne spominje u matematičkoj literaturi, te da ove njegove važne nejednakosti nisu bile poznate kao Hermiteov rezultat. Edwin Ford Beckenbach (1906-1982), vodeći stručnjak za povijest i teoriju kompleksnih funkcija, napisao je da je prvu nejednakost u (1) dokazao Hadamard 1893. g., a da očito nije bio svjestan Hermiteovog rezultata.

Jensenova nejednakost, nazvana po danskom matematičaru Johanu Ludwigu William Valdemar Jensenu (1859.-1925.), poznatom kao Johan Jensen, uspoređuje vrijednost konveksne funkcije od integrala i integrala konveksne funkcije. Jensen ju je dokazao 1906. godine u članku: *"Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes"*, Acta Mathematica, 30 (1) 1906.

Elementarna diskretna verzija ove nejednakosti tvrdi:

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $x_i \in [a, b]$ ($i = 1, 2, \dots n$), $t_i \in [0, 1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, onda vrijedi:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \tag{2}$$

Uzimajući u račun i sekantu, može se dobiti sljedeća simetrična forma Jensenove nejednakosti (vidjeti primjerice [13, Theorem 4.2]):

Neka je $a < b$ za $a, b \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka je $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ konveksna kombinacija točaka $x_i \in \operatorname{conv}\{a, b\}$ i $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = \alpha a + \beta b$ njezina jedinstvena konveksna kombinacija krajnjih točaka a i b.

Tada svaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zadovoljava niz nejednakosti:

$$f\,(\alpha\, a + \beta\, b) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \leq \alpha\, f(a) + \beta\, f(b). \tag{3}$$

U diplomskom su razmatrane konveksne funkcije i njihove generalizacije. Pokazane su verzije Hermite-Hadamardove nejednakosti za svaku od razmatranih klasa funkcija.

Diplomski je podijeljen na dva poglavlja.

U prvom poglavlju uvest ćemo pojam konveksne funkcije, njezinu geometrijsku interpretaciju te jednu tvrdnju te njezin dokaz ekvivalentnosti s definicijom konveksne funkcije. Zatim ćemo iskazati Hermite-Hadamardovu nejednakost te njezin dokaz. Na kraju ćemo iskazati još neka zanimljiva svojstva konveksnih funkcija bez dokaza.

U drugom poglavlju bavit ćemo se generalizacijama konveksnih funkcija. Za svaku od generalizacija navest ćemo i dokazati novu nejednakost koja proizlazi iz Hermite-Hadamardove nejednakosti. One su redom: logaritamski konveksne funkcije, eksponencijalno konveksne funkcije, superkvadratne funkcije, preinveksne funkcije, h-konveksne funkcije, r-konveksne te jako konveksne funkcije. Navest ćemo i neka osnovna svojstva svake od njih iskazane kroz razne leme, propozicije, teoreme i korolare. Dat ćemo i neke jednostavnije primjere za navedene klase funkcija.

Poglavlje 1

Konveksne funkcije

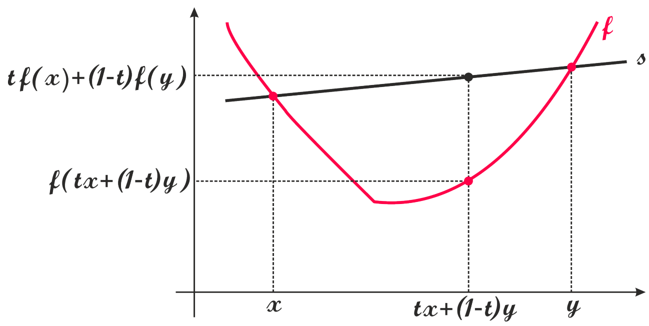
Rezultati ovog poglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz knjige [8] te članka [9].

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za svaki izbor točaka $x, y \in I$ i svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.1}$$

Ako u (1.1) vrijedi obrnuta nejednakost, tada je f konkavna funkcija.



Slika 1.1: Konveksna funkcija na intervalu

Teorem 1.1.2. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0, \tag{1.2}$$

za svaki izbor $x, y, z \in I$ takvih da je $x < y < z$.

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je f konveksna funkcija. Tada za nju po definiciji vrijedi nejednakost (1.1). Neka su x, y i z proizvoljni brojevi iz I takvi da vrijedi $x < y < z$. Tada je $\frac{z-y}{z-x} \in [0,1]$. Sada možemo uvrstiti u izraz (1.1): $x = x$, $y = z$ i $t = \frac{z-y}{z-x}$. Tada vrijedi: $1 - t = 1 - \frac{z-y}{z-x} = \frac{y-x}{z-x}$ pa slijedi

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z).$$

Sada tu nejednakost pomnožimo s izrazom $z - x$ koji je očito uvijek strogo veći od 0 te dobivamo:

$$(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z). \tag{1.3}$$

Moramo još provjeriti je li to ekvivalentno izrazu (1.2). Koristeći Laplaceov razvoj determinante po trećem stupcu dobivamo:

$$f(x)(z-y) - f(y)(z-x) + f(z)(y-x) \geq 0$$

pa slijedi:

$$(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z),$$

a to je upravo (1.3)

$\Leftarrow$ Neka su x, $z \in I$ i $t \in (0,1)$. Bez smanjenja općenitosti stavimo da je $x < z$. Definiramo broj y na način: $y = tx + (1-t)z$. Iz toga direktno slijedi: $t = \frac{z-y}{z-x}$, $1 - t = \frac{y-x}{z-x}$. Iz $x < z$ dobivamo $tx < tz$, $tx - tz < 0$, $tx + z - tz < z$, $tx + (1-t)z < z$, tj. $y < z$. Slično se dokaže da je $x < y$. Dakle, x, y i z su takvi da je $x < y < z$ pa na njih primijenimo nejednakost (1.2).

Laplaceovim razvojem determinante po 3. stupcu dobivamo:

$$f(x)(z-y) - f(y)(z-x) + f(z)(y-x) \geq 0,$$

iz čega slijedi:

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z). \tag{1.4}$$

Uvrštavanjem u (1.4) $t = \frac{z-y}{z-x}$, $1 - t = \frac{y-x}{z-x}$ dobivamo:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ako je $t = 0$ ili $t = 1$, tada nejednakost (1.1) očito vrijedi. Dakle, dobili smo da (1.1) vrijedi za sve $t \in [0,1]$ pa je f konveksna funkcija.

□

Spomenimo tu još neka korisna svojstva koja nećemo ovdje dokazivati:

Svaka konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$ dobija se iz neprekidne konveksne funkcije čije krajnje točke se mijenjaju (pomicanjem gore). Ovo je posljedica sljedećeg elementarnog rezultata:

Teorem 1.1.3. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda vrijedi:*

a) f je neprekidna na (a, b) i $f(a) \geq f(a_+)$, $f(b) \geq f(b_-)$,

b) derivacija f' postoji skoro svuda na (a, b),

b) lijeva i desna derivacija f'_+ i f'_- postoje i monotono rastu na (a, b).

Korolar 1.1.4. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Onda je ili f monotona ili postoji točka $c \in (a, b)$ takva da $f|_{[a,c]}$ monotono pada i $f|_{[c,b]}$ monotono raste. Prema tome, za svaku takvu funkciju f, limesi $f(a_+)$ i $f(b_-)$ postoje i funkcija*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a_+), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b) \\ f(a_-), & x = b, \end{cases}$$

je neprekidna i konveksna.

Teorem 1.1.5. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija. Tada je f konveksna ako i samo ako je $f'' \geq 0$.*

Primjer 1.1.6. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$. Tada je f konveksna ako je $a \geq 0$.*

Dokaz. Pogledajmo drugu derivaciju funkcije f kako bismo mogli primijeniti Teorem 1.1.5

$$f''(x) = 2a.$$

Vidimo da je $f'' \geq 0$ ako i samo ako je $a \geq 0$. □

Primjer 1.1.7. *Funkcija $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ je konveksna.*

Dokaz. Izračunajmo drugu derivaciju:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $x \geq 0$ pa je f konveksna funkcija. □

Sljedećih nekoliko propozicija govori o algebarskoj strukturi familije konveksnih funkcija.

Propozicija 1.1.8. *Ako su f i g konveksne funkcije na I, tada je $f + g$ konveksna na I.*

Dokaz. f je konveksna pa slijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

g je konveksna pa slijedi

$$g(tx + (1 - t)y) \leq tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo

$$f(tx + (1 - t)y) + g(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + tg(x) + (1 - t)f(y) + (1 - t)g(y),$$

iz čega po definiciji zbroja funkcija slijedi

$$(f + g)(tx + (1 - t)y) \leq t(f + g)(x) + (1 - t)(f + g)(y),$$

što je definicija konveksnosti funkcije $f + g$. □

Propozicija 1.1.9. *Ako je f konveksna, a pozitivan realan broj, tada je af konveksna funkcija.*

Dokaz. f je konveksna pa slijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Pomnožimo posljednju nejednakost pozitivnim realnim brojem a i dobivamo f je konveksna pa slijedi

$$af(tx + (1 - t)y) \leq taf(x) + (1 - t)af(y),$$

što je definicija konveksnosti funkcije af. □

Propozicija 1.1.10. *Ako su f i g konveksne i ako je uz to g i rastuća, tada je $g \circ f$ konveksna.*

Dokaz. f je konveksna pa slijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

g je konveksna pa slijedi

$$g(tx + (1 - t)y) \leq tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Sad imamo

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(tx + (1 - t)y) &= g(f(tx + (1 - t)y) \\
&\leq g(tf(x) + (1 - t)f(y)) \quad (g \text{ je rastuća, a } f \text{ konveksna}) \\
&\leq tg(f(x)) + (1 - t)gf(x) \quad (g \text{ je konveksna}) \\
&= t(g \circ f)(x) + (1 - t)(g \circ f)(x),
\end{aligned}$$

što znači da je funkcija $g \circ f$ konveksna. □

Propozicija 1.1.11. *Funkcija je istovremeno i konveksna i konkavna ako i samo ako je afina.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je f konveksna i konkavna funkcija. Po definiciji konveksne i konkavne funkcije direktno slijedi da za svaki $x, y \in [a, b]$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f((1-t)tx + ty) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Sad definirajmo funkciju afinu $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kroz točke $(a,\ f(a))$ i $(b,\ f(b))$. Slijedi

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Dokažimo da vrijedi $f(x) = g(x)$, za svaki $x \in [a, b]$.
Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljan. Tada postoji jedinstveni $t \in [0, 1]$ takav da vrijedi $x = (1-t)a + tb$. Iz toga slijedi

$$f(x) = f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

Sada izračunajmo vrijednost funkcije f u danoj točki x:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g((1-t)a + tb) \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((1-t)a + tb - a) + f(a) \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}t(b - a) + f(a) \\
&= (f(b) - f(a))t + f(a) \\
&= (1-t)f(a) + tf(b) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $f \equiv g$, što znači da je f afina funkcija.
$\Leftarrow$ Neka je f afina funkcija. Tada postoje $c, d \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = cx + d$. Neka su $x, y \in [a, b]$ i $t \in [0, 1]$ proizvoljni. Slijedi

$$\begin{aligned}
f((1-t)x + ty) &= c((1-t)x + ty) + d \\
&= (1-t)cx + tcy + d \\
&= (1-t)cx + tcy + ((1-t)d + td) \\
&= (1-t)(cx + d) + t(cy + d) \\
&= (1-t)f(x) + tf(y).
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je f konveksna i konkavna. $\square$

Ovdje navodimo još jednu važnu nejednakost koju ćemo koristiti i generalizirati u ostatku rada.

Teorem 1.1.12. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $a, b \in I$, $a < b$ i $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.5}$$

Ta se nejednakost naziva Hermite-Hadamardova nejednakost.

Dokaz. Dokažimo prvo desnu nejednakost, odnosno

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Za bilo koji $x \in [a, b]$ postoji $\alpha \in [0, 1]$ takav da vrijedi $x = \alpha a + \bar{\alpha} b$, $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$. Iz definicije konveksnosti funkcije imamo

$$f(\alpha a + \bar{\alpha} b) \leq \alpha f(a) + \bar{\alpha} f(b),$$

$$f(\bar{\alpha} a + \alpha b) \leq \bar{\alpha} f(a) + \alpha f(b).$$

Zbrajanjem posljednjih dviju nejednakosti i integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(\alpha a + \bar{\alpha} b)d\alpha + \int_0^1 f(\bar{\alpha} a + \alpha b)d\alpha \\
&\leq \int_0^1 [\alpha f(a) + \bar{\alpha} f(b) + \bar{\alpha} f(a) + \alpha f(b)]d\alpha \\
&= \int_0^1 f(a)[\alpha + \bar{\alpha}] + f(b)[\bar{\alpha} + \alpha]d\alpha \\
&= \int_0^1 (f(a) + f(b))d\alpha \\
&= (f(a) + f(b))\int_0^1 d\alpha \\
&= f(a) + f(b)
\end{aligned}$$

Izračunajmo posebno dva integrala na lijevoj strani posljednje nejednakosti. Uvedimo za prvi supstituciju: $t = \alpha a + (1 - \alpha)b$. Tada je $dt = (a - b)d\alpha$, odnosno $d\alpha = \dfrac{dt}{a-b}$. Granice 0 i 1 postaju b i a. Slijedi

$$\int_0^1 f(\alpha a + \bar{\alpha} b)d\alpha = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Analogno se dokaže da je integral $\int_0^1 f(\bar{\alpha}a + \alpha b)d\alpha$ jednak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

pa je desna strana u nejednakosti (1.5) dokazana.

Dokažimo sad lijevu nejednakost u (1.5), odnosno

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Po definiciji konveksnosti mora vrijediti za svaki $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha x + \bar{\alpha}y) \leq \alpha f(x) + \bar{\alpha}f(y),$$

gdje je $\bar{\alpha} = 1-\alpha$. Neka je sada $\alpha = \frac{1}{2}$, $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$. Tada dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb),$$

pa integriranjem po t na $[0,1]$ slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 (\frac{1}{2}(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(ta + (1-t)b)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)a + tb)dt. \end{aligned}$$

Izračunajmo posebno dva integrala s desne strane posljednje nejednakosti. Za prvi uvedimo supstituciju $u = ta + (1-t)b$ pa je $du = (a-b)dt$, odnosno $dt = \dfrac{1}{a-b}du$, a granice prelaze iz 0 i 1 u b i a. Slijedi

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{2(a-b)}\int_b^a f(u)du = \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)du.$$

Analogno dobivamo da je i drugi integral s desne strane posljednje nejednakosti jednak

$$\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)du.$$

Dakle, posljednja nejednakost postaje

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 (\frac{1}{2}(f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(ta+(1-t)b)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)a+tb)dt \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)du + \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(u)du \\
&= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du,
\end{aligned}
$$

što je lijeva nejednakost u (1.5). □

Propozicija 1.1.13. *Prva nejednakost u* (1.5) *jača je od druge nejednakosti u* (1.5) *za konveksnu funkciju, odnosno vrijedi*

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{1.6}
$$

Dokaz. Primijenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na intervalima $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ i $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ dobivamo:

$$
\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\right]
$$

$$
\frac{1}{b-\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].
$$

Budući da je $\dfrac{a+b}{2}-a = \dfrac{b-a}{2}$ i $b-\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$, zbrajanjem ove dvije nejednakosti dobivamo:

$$
\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{2}\Big[f(a)+f(b)\Big] + f\left(\frac{a+b}{2}\right),
$$

odakle pogodnim transformiranjem dobivamo (1.6). □

Definicija 1.1.14. *Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo konveksnom u Jensenovom smislu ili J-konveksnom na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.7}$$

Funkcija f je strogo J-konveksna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.8}$$

Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo konkavnom u Jensenovom smislu ili J-konkavnom na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.9}$$

Funkcija f je strogo J-konkavna ako za sve $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.10}$$

Teorem 1.1.15. *[6] Ako je funkcija f neprekidna i J-konveksna, tada je ona konveksna funkcija.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je funkcija f konveksna. Tada za $t = \frac{1}{2}$ iz definicije konveksnosti slijedi J-konveksnost.

$\Leftarrow$ Neka je f neprekidna i J-konveksna funkcija. Pretpostavimo suprotno, tj. da funkcija f nije konveksna funkcija. Iz toga slijedi da postoji podinterval $[a, b]$ takav da funkcija $f|_{[a,b]}$ nije ispod dužine koja spaja točke $(a, f(a))$ i $b, f(b)$. Zbog toga funkcija definirana s

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),\ x \in [a, b]$$

poprima i pozitivne vrijednosti. Očito je funkcija h neprekidna i vrijedi $h(a) = h(b) = 0$. Prema pretpostavci je f J-konveksna pa dokažimo da je i h J-konveksna:

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{x+y}{2} - a\right) - f(a) \\
&\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{x-a+y-a}{2}\right) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a) \\
&= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-a) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a) \\
&= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-a) - \frac{1}{2}f(a) \\
&= \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(y).
\end{aligned}$$

Kako je funkcija h neprekidna, tada ona na segmentu $[a, b]$ postiže svoj maksimum γ, $\gamma > 0$. Označimo s $c = \min\{x \in [a, b] \,|\, h(x) = \gamma\}$. Po definiciji od c, za svaki $m > 0$ za koji je $m \pm c \in [a, b]$ imamo

$$h(c - m) < h(c) \quad \text{i} \quad h(c + m) \leq h(c).$$

Zbrajanjem nejednakosti dobivamo

$$h(c) \geq \frac{h(c - m) + h(c + m)}{2},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je h J-konveksna. Drugim riječima, funkcija f je konveksna funkcija.

□

1.2 Ekvivalentnost konveksnosti i Hermite-Hadamardove nejednakosti

U prethodnom smo poglavlju dokazali da ukoliko je f konveksna funkcija da tada vrijedi Hermite-Hadamardova nejednakost. U ovom ćemo poglavlju dokazati da vrijedi i obratno. Dokaz se provodi u nekoliko koraka koje ćemo ovdje dokazati kroz nekoliko propozicija.

Propozicija 1.2.1. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako za bilo koje x, y takve da je $a < x < y < b$ postoji $t \in (0, 1)$ takav da vrijedi*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

tada je f konveksna na (a, b).

Dokaz. Neka su x,$y \in (a, b)$ proizvoljni takvi da vrijedi $a < x < y < b$. Definirajmo skup

$$A_{x,y} := \{t \in [0, 1] \,|\, f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)\}.$$

Po pretpostavci je taj skup neprazan. S obzirom da je f neprekidna na (a, b), $A_{x,y}$ je zatvoren u $[0, 1]$. Pretpostavimo da je $A_{x,y}$ pravi podskup od $[0, 1]$. Tada postoji otvoreni interval $(u, v) \subset [0, 1] \setminus A_{x,y}$ takav da vrijedi $u, v \in A_{x,y}$. Definirajmo:

$$\alpha := ux + (1 - u)y,\ \beta := vx + (1 - v)y \tag{1.11}$$

Budući da su u,$v \in [0, 1]$, slijedi da su α,$\beta \in [x, y]$, tj. α i β su iz (a, b). Tada iz pretpostavke propozicije slijedi da postoji $s \in (0, 1)$ takav da je

$$f(s\alpha + (1-s)\beta) \le sf(\alpha) + (1-s)f(\beta) \tag{1.12}$$

Očito je $su + (1-s)v \in (u, v)$ jer je $s \in (0, 1)$. Iz (1.11) i iz toga da su $u, v \in A_{x,y}$ slijedi

$$f(\alpha) \le uf(x) + (1-u)f(y) \ i \ f(\beta) \le vf(x) + (1-v)f(y). \tag{1.13}$$

Za ove u,v definirajmo $r := su + (1-s)v \notin A_{x,y}$ za koje vrijedi

$$\begin{aligned} &s\alpha + (1-s)\beta = s(ux + (1-u)y) + (1-s)(vx + (1-v)y) \\ &= [su + (1-s)v]x + [s(1-u) + (1-s)(1-v)]y = rx + (1-r)y. \end{aligned}$$

Zbog toga što vrijedi $r \notin A_{x,y}$, iz (1.12) i (1.13) slijedi

$$\begin{aligned} &f(rx + (1-r)y) > rf(x) + (1-r)f(y) \\ &= [su + (1-s)v]f(x) + [s(1-u) + (1-s)(1-v)]f(y) \\ &= s[uf(x) + (1-u)f(y)] + (1-s)[vf(x) + (1-v)f(y)] \\ &\ge sf(\alpha) + (1-s)f(\beta) \ge f(s\alpha + (1-s)\beta) \\ &= f(rx + (1-r)y), \end{aligned}$$

što je nemoguće. Došli smo do kontradikcije pa je $A_{x,y} = [0, 1]$. S obzirom da su $x, y \in (a, b)$, $x < y$ proizvoljni, slijedi da je f konveksna na (a, b). □

Propozicija 1.2.2. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi*

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y), \tag{1.14}$$

za sve $x, y \in (a, b)$, $x \ne y$.
Tada je f konveksna na (a, b).

Dokaz. Pretpostavimo da f nije konveksna na (a, b). Tada prema Propoziciji 1.2.1. postoje $x, y \in (a, b)$, $x < y$ takvi da vrijedi

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$$

za sve $0 < t < 1$.
Za takve x i y vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt &= \int_0^1 [f(tx+(1-t)y]dt \\
&> \int_0^1 [tf(x)+(1-t)f(y)]dt \\
&= f(x)\int_0^1 tdt + f(y)\int_0^1 dt - f(y)\int_0^1 tdt \\
&= \frac{1}{2}f(x)+f(y)-\frac{1}{2}f(y) \\
&= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y),
\end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle, f je konveksna na (a,b). □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi $f(a)=f(b)=0$ i $f(u)>0$ za neki $u\in(a,b)$. Tada postoji $z\in(a,b)$ takav da je*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \max_{a\le x\le b} f(x), \\
f(z) &> f(x) \quad \text{za sve } a\le x<z.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Dokaz. S obzirom da je f neprekidna na $[a,b]$ i $[a,b]$ je kompaktan skup, slijedi da f postiže maksimum m na $[a,b]$. Po pretpostavci vrijedi $m\ge f(u)>0$. Neka je

$$A:=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)=m\}.$$

Budući da je f neprekidna, A je neprazan kompaktan podskup skupa $[a,b]$ i $a,b\notin A$. Označimo sa z minimalni element skupa A. Tada je $a<z<b$ pa vrijedi (1.15). □

Propozicija 1.2.4. *Neka je $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za bilo koje $z\in(a,b)$ i $\delta>0$ postoje $x,y\in(z-\delta,z+\delta)\cap(a,b)$, $x<z<y$ i $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ za neki $0<\lambda<1$ takvi da je*

$$f(z)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Tada je f konveksna na (a,b).

Dokaz. Pretpostavimo da f nije konveksna. Tada, prema Propoziciji 1.2.1 postoje $x_0,y_0\in(a,b)$, $x_0<y_0$ takvi da vrijedi

$$f(tx_0+(1-t)y_0)>tf(x_0)+(1-t)f(y_0).$$

Definirajmo $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ sa

$$g(x):=f(x)-f(x_0)-\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}(x-x_0).$$

Funkcija g je neprekidna na (a, b), $g(x_0) = g(y_0) = 0$ za sve $0 < t < 1$. Tada iz Propozicije 1.2.3 slijedi da postoji $z \in (a, b)$ takav da vrijedi

$$g(z) = \max_{a \leq x \leq b} g(x)$$

i

$$g(z) > g(x) \quad \text{za sve } x_0 \leq x < z.$$

Tada je $z = sx_0 + (1 - s)y_0$ za neki $0 < s < 1$. Neka su x_1,$y_1 \in [x_0, y_0]$ proizvoljni takvi da vrijedi $x_0 \leq x_1 < z < y_1 \leq y_0$. Tada za svaki $t \in (0, 1)$ vrijedi

$$g(z) = tg(z) + (1 - t)g(z) > tg(x_1) + (1 - t)g(y_1).$$

Dakle, vrijedi

$$f(z) = tf(z) + (1 - t)f(z) > tf(x_1) + (1 - t)f(y_1),$$

za sve $0 < t < 1$. S obzirom da su x_1,y_1 i t proizvoljni, to je kontradikcija s pretpostavkom pa je f konveksna na (a, b). □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za bilo koje $z \in (a, b)$ i $\delta > 0$ postoji $r \in (0, \delta)$ takav da vrijedi*

$$f(z) \leq \frac{1}{2} f(z - r) + \frac{1}{2} f(z + r).$$

Tada je f konveksna na (a, b).

Dokaz. Dokaz direktno slijedi iz Propozicije 1.2.4. ako uzmemo $\lambda := \frac{1}{2}$, $x := z - r$ i $y := z + r$. □

Propozicija 1.2.6. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako za bilo koji $z \in (a, b)$ i $\delta > 0$ postoji $r \in (0, \delta)$ takav da vrijedi*

$$f(z) \leq \frac{1}{2r} \int_{z-r}^{z+r} f(t)dt, \tag{1.16}$$

tada je f konveksna na (a, b).

Dokaz. Pretpostavimo da f nije konveksna na (a, b). Tada, prema Propoziciji 1.2.5 postoje $z \in (a, b)$ i $\delta > 0$ takvi da je $a < z - \delta < z + \delta < b$ i

$$f(z) > \frac{1}{2} f(z - u) + \frac{1}{2} f(z + u),$$

za sve $0 < u < \delta$.

Integriranjem obje strane nejednakosti s obzirom u r na intervalu $(0, r)$ imamo za svaki $r \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned}
2rf(z) &= 2\int_0^r f(z)du \\
&> \int_0^r f(z-u)du + \int_0^r f(z+u)du \\
&\text{(u prvom integralu stavimo supstituciju t=z-u, a u drugom t=z+u)} \\
&= \int_z^{z-r} f(t)(-dt) + \int_z^{z+r} f(t)dt \\
&= \int_{z-r}^{z} f(t)dt + \int_z^{z+r} f(t)dt \\
&= \int_{z-r}^{z+r} f(u)du.
\end{aligned}$$

To je kontradikcija s pretpostavkom (1.16) pa je f konveksna na (a, b). □

U nastavku slijedi glavni rezultat o ekvivalentnosti konveksnosti i Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Teorem 1.2.7. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $a, b \in I$, $a < b$ i $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na danom intervalu. Tada je f konveksna na (a, b) ako i samo ako vrijedi Hermite-Hadamardova nejednakost, odnosno*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.17}$$

Dokaz. $\Rightarrow$ Ovaj smjer smo već dokazali u Teoremu 1.1.12 .
$\Leftarrow$ Pokazat ćemo da konveksnost slijedi i iz lijeve nejednakosti (1.17) i iz desne nejednakosti. Pretpostavimo da vrijedi lijeva strana Hermite-Hadamardove nejednakosti, odnosno

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{1.18}$$

Tada očito za bilo koji $z \in (a, b)$ i $\delta > 0$ postoji $r \in (0, \delta)$ takav da vrijedi

$$f(z) \leq \frac{1}{2r}\int_{z-r}^{z+r} f(t)dt.$$

Time su zadovoljeni uvjeti iz Propozicije 1.2.6 pa je f konveksna funkcija na (a, b).

Pretpostavimo sada da vrijedi desna strana Hermite-Hadamardove nejednakosti, odnosno

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.19}$$

Tada prema Propoziciji 1.2.2 slijedi da je f konveksna funkcija na (a, b).

□

Poglavlje 2

Poopćenja konveksnih funkcija

U ovom ćemo poglavlju razmatrati nekoliko klasa funkcija koje su ili direktna generalizacija konveksnih funkcija ili su im analogoni. Za svaku od tih klasa dokazat ćemo nejednakost Hermite-Hadamardovog tipa.

2.1 Logaritamski konveksne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz knjige [8] te članaka [7] i [14].

Definicija 2.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Kažemo da je funkcija $f : I \to (0, +\infty)$ logaritamski konveksna ili log-konveksna ili multiplikativno konveksna ako je $\ln f$ konveksna ili, ekvivalentno, ako za svaki izbor točaka $x, y \in I$ i svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}. \tag{2.1}$$

Ako u (2.1) vrijedi obrnuta nejednakost, onda kažemo da je f logaritamski konkavna ili log-konkavna funkcija.

Znamo da vrijedi da ako su f i g konveksne funkcije i g je rastuća funkcija, onda je kompozicija $g \circ f$ konveksna.
Budući da je eksponencijalna funkcija exp konveksna i rastuća, ako je komponiramo s logaritamski konveksnom funkcijom, tj. s konveksnom funkcijom $\ln f$, dobit ćemo konveksnu funkciju. Dakle, logaritamski konveksna funkcija je konveksna funkcija. Obrat općenito ne vrijediti. Primjerice, $f : x \mapsto x^2$ je konveksna funkcija, ali $\ln \circ f : x \mapsto \ln x^2 = 2 \ln |x|$ nije konveksna, što znači da f nije logaritamski konveksna.

Propozicija 2.1.2. *Ako su f i g log-konveksne funkcije, tada je funkcija fg log-konveksna.*

Dokaz. f je log-konveksna pa slijedi

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t[f(y)]^{1-t}.$$

g je log-konveksna pa slijedi

$$g(tx + (1-t)y) \leq [g(x)]^t[g(y)]^{1-t}.$$

Obje nejednakosti sadrže samo nenegativne realne brojeve na objema stranama pa ih pomnožimo te dobivamo nejednakost

$$f(tx + (1-t)y)g(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t[g(x)]^t[f(y)]^{1-t}[g(y)]^{1-t},$$

iz čega slijedi

$$(fg)(tx + (1-t)y) \leq [(fg)(x)]^t[(fg)(x)]^{1-t}$$

pa je funkcija fg log-konveksna. □

Neka je sada $f : I \to (0, +\infty)$ logaritamski konveksna funkcija na intervalu I, $a, b \in I$, $a < b$. Tada je, po definiciji, $\ln f$ konveksna pa primijenimo Hermite-Hadamardovu nejednakost i dobivamo

$$\ln\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))dx \leq \frac{\ln(f(a)) + \ln(f(b))}{2},$$

iz čega potenciranjem po bazi prirodnog logaritma e dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))dx\Big) \leq \sqrt{f(a) \cdot f(b)}, \tag{2.2}$$

što je nejednakost Hermite-Hadamardovog tipa za log-konveksne funkcije.

Napomena 2.1.3. *Uočimo poveznicu između klase logaritamski konveksnih i konveksnih funkcija. U nejednakosti* (1.1) *za konveksne funkcije na desnoj strani nalazi se aritmetička sredina brojeva* $f(x)$ *i* $f(t)$*, tj.* f *je konveksna ako za sve x,y* $\in I$ *i* $t \in [0,1]$ *vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq A(t, f(x), f(y)),$$

gdje je A oznaka za aritmetičku sredinu, tj. $A(t, x, y) = tx + (1-t)y$*.*
Ukoliko aritmetičku sredinu zamijenimo geometrijskom sredinom $G(t, f(x), f(y)) = [f(x)]^t[f(y)]^{1-t}$*, dobivamo upravo definicijsku nejednakost za logaritamski konveksne funkcije.*

Sada ćemo navesti poznatu A-G nejednakost.

Lema 2.1.1. *Za pozitivne brojeve a,b > 0 i $t \in [0,1]$ vrijedi A-G nejednakost*

$$A(t,a,b) \geq G(t,a,b). \tag{2.3}$$

Dokaz. Kako za $y = \ln x$ vrijedi da je $y'' = -\frac{1}{x^2}$, to je funkcija prirodnog logaritma konkavna, pa vrijedi

$$\ln(ta + (1-t)b) \geq t\ \ln a + (1-t)\ \ln b = \ln\left(a^t \cdot b^{1-t}\right),$$

što daje (2.3) □

Označimo s $A(a,b)$ aritmetičku sredinu nenegativnih realnih brojeva a i b, $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$, a s $G(a,b)$ geometrijsku sredinu tih istih realnih brojeva, $G(a,b) := \sqrt{a \cdot b}$. Tada, koristeći tu notaciju, dobivamo oblik Hermite-Hadamardove nejednakosti dan u sljedećem teoremu.
Primijetimo da vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

Teorem 2.1.4. *Neka je $f : I \to (0,+\infty)$ log-konveksna funkcija na I, $a,b \in I$, $a < b$. Tada vrijedi nejednakost*

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \leq G(f(a), f(b)). \tag{2.4}$$

Dokaz. S obzirom da je f log-konveksna, vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}$$

i

$$f((1-t)a + tb) \leq [f(a)]^{1-t} [f(b)]^t,$$

za sve $t \in [0,1]$.
Ako zadnje dvije nejednakosti pomnožimo i na njih djelujemo kvadratnim korijenom, dobivamo:

$$G(f(ta + (1-t)b), f((1-t)a + tb)) \leq G(f(a), f(b)),$$

za sve $t \in [0,1]$.
Integriranjem na segmentu $[0,1]$ po t dobivamo:

$$\int_0^1 G(f(ta + (1-t)b), f((1-t)a + tb))dt \leq G(f(a), f(b)).$$

Sada uvodeći supstituciju $x := ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$ dobivamo

$$\int_0^1 G(f(ta+(1-t)b), f((1-t)a+tb))dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx$$

i time je dokazana druga nejednakost u (2.4).

Nejednakost (2.2) daje:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x)f(y)},$$

za sve $x, y \in I$. Ako uzmemo $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$, dobivamo nejednakost:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq G(f(ta+(1-t)b), f((1-t)a+tb)),$$

za sve $t \in [0,1]$.

Integriranjem na segmentu $[0,1]$ po t dobivamo prvu nejednakost u (2.4). □

Korolar 2.1.5. *Uz iste pretpostavke kao u prethodnom teoremu, $a \geq 0$ i f rastuću funkciju na I, imamo nejednakost:*

$$f(G(a,b)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \leq G(f(a), f(b)). \tag{2.5}$$

Dokaz. Znamo da je aritmetička sredina veća ili jednaka geometrijskoj sredini pa za ovaj konkretan slučaj vrijedi:

$$A(a,b) \geq G(a,b).$$

S obzirom da je f rastuća funkcija, slijedi

$$f(G(a,b)) \leq f(A(a,b))$$

pa iz toga prema Teoremu 2.1.2. slijedi

$$\begin{aligned} f(G(a,b)) &\leq f(A(a,b)) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \\ &\leq G(f(a), f(b)). \end{aligned}$$

Iz tranzitivnosti relacije " $\leq$ " slijedi (2.5). □

Sljedeći rezultat daje nam još jednu nejednakost Hermite-Hadamardovog tipa za konveksne funkcije.

Korolar 2.1.6. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $a,b \in I$, $a < b$. Tada vrijede nejednakosti*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\left(\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\right)dx\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : I \to (0,+\infty)$, $g(x) = \exp(f(x))$, koja je očito log-konveksna na I. Primjenom Teorema 2.1.4. na g dobivamo

$$\begin{aligned} &\exp\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{\exp(f(x))\cdot\exp(f(a+b-x))}\,dx \leq \sqrt{\exp(f(a))\cdot\exp(f(b))}\,, \end{aligned}$$

iz čega slijedi nejednakost (2.6). □

Primjer 2.1.7. *Afina funkcija $f(x) = ax + b$ je log-konkavna na $\{x \in \mathbb{R} \mid ax + b > 0\}$.*

Dokaz. Dokažimo da je afina funkcija log-konkavna. Neka je $f(x) = ax+b$ i $x, y \in \{x \in \mathbb{R} \mid ax + b > 0\}$.

Imamo:

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &= a(tx+(1-t)y)+b \\ &= a(tx+(1-t)y)+b(t+(1-t)) \\ &= t(ax+b)+(1-t)(ay+b) \\ &= tf(x)+(1-t)f(y) \end{aligned} \tag{2.7}$$

i A-G nejednakost (koristeći Lemu 2.3)

$$tf(x)+(1-t)f(y) \geq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}. \tag{2.8}$$

Iz (2.7) i (2.8) slijedi

$$f(tx+(1-t)y) \geq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t},$$

što znači da je f log-konkavna.

□

Primjer 2.1.8. *Opća potencija $f(x) = x^a$ na $(0,+\infty)$ je log-konkavna za $a \leq 0$ i log-konveksna za $a \geq 0$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ s $g(x) = a \ln x$. Treba dokazati da je funkcija g konveksna. Neka su $x,y \in (0, +\infty)$ i $t \in [0, 1]$. Prema nejednakosti (2.8)

$$tx + (1-t)y \geq x^t \cdot f(y)^{1-t}$$

Funkija $h(x) = \ln x$ je rastuća pa slijedi

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq \ln(x^t \cdot y^{1-t}).$$

Ako je $a \leq 0$, slijedi

$$a \ln(tx + (1-t)y) \leq a \ln(x^t \cdot y^{1-t}),$$

odnosno

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

a to znači da je g konkavna pa je f log-konkvana.
Analogno se dobiva da je za $a \geq 0$ f log-konveksna. □

Primjer 2.1.9. *Eksponencijalna funkcija $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ je log-konkavna i log-konveksna na $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Dokažimo da je funkcija $\ln f = ax$ konveksna. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ afina funkcija. Neka su $x,y \in \mathbb{R}$ i $t \in [0, 1]$ proizvoljni. Slijedi

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &= a(tx + (1-t)y) \\ &= t(ax) + (1-t)(ay) \\ &= tg(x) + (1-t)g(y). \end{aligned}$$

Izraz $g(tx + (1-t)y)$ je jednak $tg(x) + (1-t)g(y)$, što zadovoljava obje tražene nejednakosti, odnosno

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

i

$$g(tx + (1-t)y) \geq tg(x) + (1-t)g(y),$$

što je trebalo i dokazati. □

2.2 Eksponencijalno konveksne funkcije

Rezultati ovog poglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz članka [2] te disertacije [14].

Definicija 2.2.1. *Neka je $I \subseteq R$ otvoren interval. Za neprekidnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je eksponencijalno konveksna ako je uvjet*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j f(x_i + x_j) \geq 0 \tag{2.9}$$

zadovoljen za svaki $k \in \mathbb{N}$ te sve nizove $(\alpha_i)_k$ i $(x_i)_k$ realnih brojeva za koje je $x_i + x_j \in I$, $1 \leq i, j \leq k$.

Neka je f eksponencijalno konveksna. Tada iz (2.9) za $k = 1$, dobivamo da je funkcija f nenegativna, a za $k = 2$, dobivamo da je f konveksna funkcija. Navedimo i dokažimo jednu propoziciju:

Propozicija 2.2.2. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ strogo pozitivna eksponencijalno konveksna funkcija, tada je f log-konveksna.*

Dokaz. Napišimo definicijsku nejednakost (2.9) za $k = 2$:

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \alpha_i \alpha_j f(x_i + x_j) = \alpha_1^2 f(2x_1) + 2\alpha_1 \alpha_2 f(x_1 + x_2) + \alpha_2^2 f(2x_2) \geq 0.$$

Podijelimo li zadnju nejednakost sa $\alpha_2^2 \neq 0$ dobivamo

$$f(2x_1) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 + 2f(x_1 + x_2) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + f(2x_2) \geq 0.$$

Ovo je kvadratna nejednakost u varijabli $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ koja mora vrijediti za svaki izbor α_1 i α_2, tj. za svaki realni broj $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. To znači da je diskriminantna ove kvadratne funkcije zapisane na lijevoj strani nepozitivna, tj.

$$4f^2(x_1 + x_2) - 4f(2x_1)f(2x_2) \leq 0,$$

što transformirano daje

$$f^2(x_1 + x_2) \leq f(2x_1)f(2x_2).$$

Uvrstimo li u tu nejednakost: $x = 2x_1$, $y = 2x_2$, tada je $x_1 + x_2 = \frac{x+y}{2}$ i vrijedi

$$f^2 \left(\frac{x + y}{2} \right) \leq f(x)f(y),$$

što logaritmirano daje

$$\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\ln f(x) + \frac{1}{2}\ln f(x_2).$$

Dakle, neprekidna funkcija $\ln f$ je konveksna u Jensenovom smislu (tj. samo za težine $\frac{1}{2}$), a odatle slijedi da je funkcija $\ln f$ i konveksna, tj. f je log-konveksna. □

Obrat općenito ne vrijedi. Primjerice, $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-x}$ je logaritamski konveksna na $(0,1)$, ali nije eksponencijalno konveksna na $(0,1)$.

Propozicija 2.2.3. *Neka su f i g eksponencijalno konveksne funkcije te c realan pozitivan broj. Tada su funkcije cf i $f+g$ eksponencijalno konveksne funkcije.*

Dokaz. Funkcija f je eksponencijalno konveksna pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j f(x_i+x_j) \geq 0,$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ i za sve nizove $(\alpha_i)_k$ i $(x_i)_k$ realnih brojeva za koje je $x_i + x_j \in I$, $1 \leq i, j \leq k$. Pomnožimo tu nejednakost s $c > 0$ i dobivamo

$$c\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j f(x_i+x_j) \geq 0,$$

iz čega slijedi

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j cf(x_i+x_j) \geq 0,$$

što povlači da je funkcija cf eksponencijalno konveksna.

Funkcija g je eksponencijalno konveksna pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j g(x_i+x_j) \geq 0,$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ i za sve nizove $(\alpha_i)_k$ i $(x_i)_k$ realnih brojeva za koje je $x_i + x_j \in I$, $1 \leq i, j \leq k$. Sad zbrojimo nejednakosti koje slijede iz konveksnosti funkcija f i g te dobivamo

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j f(x_i+x_j) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j g(x_i+x_j) \geq 0.$$

Imamo zbroj konačnih suma te grupiramo odgovarajuće članove s istim indeksima te dobivamo

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j(f(x_i+x_j)+g(x_i+x_j)),$$

što daje

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j(f+g)(x_i+x_j).$$

Dakle, funkcija $f+g$ je eksponencijalno konveksna.

$\square$

Primjer 2.2.4. *Neki jednostavni primjeri su:*

- *Konstantna funkcija* $f(x)=c$ *je eksponencijalno konveksna na* $\mathbb{R}$ *za svaki* $c\geq 0$.
- *Eksponencijalna funkcija* $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ *je eksponencijalno konveksna na* $\mathbb{R}$ *za svaki* $a\in\mathbb{R}$.
- *Opća potencija* $f(x)=x^{-a}$ *je eksponencijalno konveksna na* $(0,+\infty)$ *za svaki* $a>0$.
- *Eksponencijalna funkcija* $f(x)=\mathrm{e}^{-a\sqrt{x}}$ *je eksponencijalno konveksna na* $(0,+\infty)$ *za svaki* $a>0$.

Razmatraju se i n-eksponencijalne funkcije.

Definicija 2.2.1. *Neka je* $I\subseteq\mathbb{R}$ *otvoren interval i* $n\in\mathbb{N}$. *Za neprekidnu funkciju* $f:I\to\mathbb{R}$ *kažemo da je* n*-eksponencijalno konveksna ako je uvjet*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j f(x_i+x_j)\geq 0 \tag{2.10}$$

zadovoljen za sve nizove $(\alpha)_n$ *i* $(x)_n$ *realnih brojeva za koje je* $x_i+x_j\in I$, $1\leq i,j\leq n$.

Nadalje se razmatra nova klasa konveksnih funkcija koju ćemo nazvati "exp-konveksne funkcije".

Definicija 2.2.2. *Za funkciju $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je* exp-*konveksna ako*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)\,\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{\alpha x}} + t\,\frac{f(y)}{\mathrm{e}^{\alpha y}} \tag{2.11}$$

vrijedi za sve $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Ako vrijedi obrnuta nejednakost u (2.11)*, onda kažemo da je f* exp-*konkavna.*

Uzimajući da je $\alpha = 0$ vidimo da klasa exp-konveksnih fukcija sadrži klasu konveksnih funkcija. Obrat općenito ne vrijediti. Primjerice, identična funkcija $f : x \mapsto x$ je konveksna, ali nije exp-konveksna na $(0, +\infty)$ za $\alpha > 0$. Sljedeći rezultat daje nam nejednakost Hermite-Hadamardovog tipa za exp-konveksne funkcije.

Teorem 2.2.5. *Neka je $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabilna exp-konveksna funkcija. Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du \leq \frac{e^{-\alpha a}f(a) + e^{-\alpha a}f(b)}{2}. \tag{2.12}$$

Dokaz. Neka je f exp-konveksna funkcija. Tada vrijedi

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} + \frac{f(y)}{e^{\alpha y}}.$$

Neka je $x = (1-t)a + tb$ i $y = ta + (1-t)b$. Tada imamo

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f((1-t)a+tb)}{e^{\alpha(1-t)a+tb}} + \frac{f(ta+(1-t)b)}{e^{\alpha ta+(1-t)b}}.$$

Sada integriranjem po t na segmentu $[0,1]$ te primjenom metode supstitucije dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du,$$

što je lijeva nejednakost u (2.12). Iskoristimo opet činjenicu da je f eksp-konveksna. Tada vrijedi

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)\,\frac{f(a)}{\mathrm{e}^{\alpha a}} + t\,\frac{f(b)}{\mathrm{e}^{\alpha b}}.$$

Integriranjem po t na segmentu $[0,1]$ dobivamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du \leq \frac{e^{-\alpha a}f(a) + e^{-\alpha a}f(b)}{2},$$

što je desna nejednakost u (2.12). $\square$

2.3 Superkvadratne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz disertacija [14] i [4] te članka [1].

Definicija 2.3.1. *Kažemo da je funkcija f definirana na intervalu $I = [0, l]$ ili $[0, +\infty)$ superkvadratna ako za svaki $x \in I$ postoji konstanta $C(x) \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi*

$$f(y) - f(x) \geq C(x)(y - x) + f(|y - x|), \tag{2.13}$$

za sve $y \in I$. Ako je $-f$ superkvadratna, tada kažemo da je funkcija f subkvadratna.

Definicija i mnogi rezultati o superkvadratnoj funkciji nalaze se u literaturi [4] odakle su i preuzeti osnovni teoremi dani u ovom radu, ali uz modificirane dokaze.

Pogledajmo sada kako bi izgledala Hermite-Hadamardova nejednakost primjenjena na superkvadratne funkcije.

Za dokaz teorema u kojem iznosimo nejednakosti Hermite-Hadamardovog tipa trebat će nam dvije leme:

Lema 2.3.1. *Neka je ϕ superkvadratna integrabilna funkcija na intervalu I i f nenegativna integrabilna funkcija na I. Tada za $a, b \in I$ i $a < b$ vrijedi*

$$\begin{aligned} &\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \\ \leq\ & \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|\right)dt. \end{aligned}$$

Dokaz. U nejednakost (2.13), odnosno

$$\phi(y) \geq \phi(x) + C(x)(y - x) + \phi(|y - x|)$$

uvrstimo: $y = f(t) \geq 0$, za $t \in [a, b]$, $x = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(s)ds$ te dobivamo

$$\begin{aligned} \phi(f(t)) \geq\ & \phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right) \\ & + C(x)\left(f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right) + \phi\left(\left|f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|\right). \end{aligned}$$

Sada dobivenu nejednakost podijelimo s $b - a$ te integriramo u granicama od a do b po t

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}\phi(f(t))dt \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right)dt$$
$$+ C(x)\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b f(s)dsdt\right)$$
$$+ \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|\right)dt.$$

Iz gornje nejednakosti slijedi:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))dt \geq \phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|\right)dt$$

pa iz toga direktno slijedi:

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|\right)dt.$$

□

Ova nejednakost je profinjenje kontinuirane verzije klasične Jensenove nejednakosti:

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\,dt.$$

Lema 2.3.2. *Neka je $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ superkvadratna funkcija. Tada za sve $x, y_1, y_2 \geq 0$ takve da je $y_1 < x < y_2$ vrijedi nejednakost*

$$\phi(x) \leq \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1}\left(\phi(y_1) - \phi(x - y_1)\right) + \frac{x - y_1}{y_2 - y_1}\left(\phi(y_2) - \phi(y_2 - x)\right) \tag{2.14}$$

ili, ekvivalentno,

$$\frac{\phi(y_1) - \phi(x) - \phi(x - y_1)}{y_1 - x} \leq \frac{\phi(y_2) - \phi(x) - \phi(y_2 - x)}{y_2 - x}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Neka je φ superkvadratna funkcija, tj. neka vrijedi (2.13). Neka su x, y_1, y_2 takvi da je $y_1 < x < y_2$. Tada postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da je $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. Umjesto y stavimo u (2.13) y_1, a umjesto x stavimo x. Dobivamo

$$\varphi(y_1) \geq \varphi(x) + C(x)(y_1 - x) + \varphi(|y_1 - x|).$$

Kad stavimo y_2 umjesto y dobivamo

$$\varphi(y_2) \geq \varphi(x) + C(x)(y_2 - x) + \varphi(|y_2 - x|).$$

Prvu nejednakost pomnožimo s λ, a drugu s $1 - \lambda$. Dobivamo

$$\lambda\varphi(y_1) \geq \lambda\varphi(x) + \lambda C(x)(y_1 - x) + \lambda\varphi(|y_1 - x|),$$

$$(1-\lambda)\varphi(y_2) \geq (1-\lambda)\varphi(x) + (1-\lambda)C(x)(y_2 - x) + (1-\lambda)\varphi(|y_2 - x|).$$

Zbrojimo li te dvije nejednakosti uz korištenje jednakosti $\lambda + (1-\lambda) = 1$, dobit ćemo

$$\lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2) \geq \varphi(x) + \lambda\varphi(|y_1 - x|) + (1-\lambda)\varphi(|y_2 - x|).$$

Prebacimo li na lijevu stranu $\varphi(x)$ i zatim izrazimo λ pomoću y_1, y_2 i x dobivamo

$$\varphi(x) \leq \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2) - \lambda\varphi(x - y_1) - (1-\lambda)\varphi(y_2 - x), \text{ tj.}$$

$$\varphi(x) \leq \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1}\varphi(y_1) + \frac{x - y_1}{y_2 - y_1}\varphi(y_2) - \frac{y_2 - x}{y_2 - y_1}\varphi(x - y_1) - \frac{x - y_1}{y_2 - y_1}\varphi(y_2 - x),$$

što je upravo ekvivalentno sa (2.14).

$\square$

Teorem 2.3.2. *Ako je $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna superkvadratna funkcija, $0 \leq a < b$, onda je*

$$\begin{aligned} &\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)dt \\ &\leq \frac{\phi(a)+\phi(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b [(b-t)\phi(t-a) + (t-a)\phi(b-t)]dt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dokaz. Dokažimo prvo lijevu nejednakost u (2.16), odnosno

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)dt.$$

U nejednakost iz Leme 2.3.1. stavimo $f(t) = t$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}&\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b t dt\right)\\&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|t - \frac{1}{b-a}\int_a^b s\, ds\right|\right)dt,\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(\left|t - \frac{a+b}{2}\right|\right)dt.$$

Dokažimo sada desnu nejednakost u (2.16). ϕ je superkvadratna pa stavimo u nejednakost (2.14): $x = t$, $y_1 = a$ i $y_2 = b$ te dobivamo

$$\phi(t) \leq \frac{b-t}{b-a}(\phi(a) - \phi(t-a)) + \frac{t-a}{b-a}(\phi(b) - \phi(b-t)),$$

za sve $t,a,b \geq 0$ takve da vrijedi $a < t < b$. Integriranjem posljedne nejednakosti po segmentu $[a, b]$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi(t)dt \leq &\frac{1}{b-a}\int_a^b [b\phi(a) - a\phi(b) + t(\phi(b) - \phi(a))]dt\\ &- \frac{1}{b-a}\int_a^b [(b-t)\phi(t-a) + (t-a)\phi(b-t)]dt\end{aligned}$$

pa dijeljenjem posljednje nejednakosti s $b - a > 0$ dobivamo desnu nejednakost (2.16). □

Primjer 2.3.3. *Funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ je superkvadratna za $p \geq 2$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da uz $C(x) = px^{p-1}$ vrijedi definicijska nejednakost (2.13). Dakle, trebamo dokazati da za sve nenegativne x i y vrijedi

$$y^p \geq x^p + px^{p-1}(y - x) + |y - x|^p.$$

Neka je x fiksan nenegativan broj. Definiramo funkciju h kao razliku lijeve i desne strane te nejednakosti:

$$h(y) = y^p - x^p - px^{p-1}(y - x) - |y - x|^p.$$

Prvo promatramo slučaj kad je $y \geq x$. Derivacija funkcije h glasi:

$$h'(y) = p[y^{p-1} - x^{p-1} - (y - x)^{p-1}].$$

Derivirajmo još jednom:

$$h''(y) = p(p - 1)[y^{p-2} - (y - x)^{p-2}].$$

Budući da je $x \geq 0$, tada je i $y \geq y - x$, a kako je $p - 2 > 0$ slijedi da je

$$y^{p-2} \geq (y - x)^{p-2}$$

.

Dakle, $h''(y) \geq 0$, tj. h' raste. Ujedno je i $h'(x) = 0$ pa to znači da je $h' \geq 0$ za svaki $y \geq x$.

Dakle, i h raste i vrijedi da je $h(x) = 0$ pa je $h(y) \geq 0$ za svaki $y \geq x$.

Promotrimo slučaj kad je $y \leq x$. Derivacija funkcije h glasi:

$$h'(y) = p[y^{p-1} - x^{p-1} + (x - y)^{p-1}].$$

Derivirajmo još jednom:

$$h''(y) = p(p - 1)[y^{p-2} - (x - y)^{p-2}].$$

Stacionarna točka za h'' je $y = \frac{x}{2}$ i za $y \geq \frac{x}{2}$ funkcija h'' je nenegativna, a lijevo od $\frac{x}{2}$ je nepozitivna. Dakle, h' pada na intervalu $(0, \frac{x}{2})$ od nule do neke negativne vrijednosti, a onda na $(\frac{x}{2}, x)$ raste od te negativne vrijednosti do 0. Drugim riječima, h' je nepozitivna, tj. h pada na $(0, x)$. Budući da je $h(x) = 0$ slijedi da je $h(y) \geq 0$ za svaki $y \leq x$.
Time smo dokazali da je h nenegativna funkcija, tj. f je superkvadratna.

□

2.4 Preinveksne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz članaka [12] i [13].

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je skup $K \subseteq \mathbb{R}$ inveksan s obzirom na vektorsku funkciju $v : K \times K \to \mathbb{R}$ ako vrijedi inkluzija*

$$x + tv(y, x) \in K, \tag{2.17}$$

za sve točke $x, y \in K$ i za sve koeficijente $t \in [0, 1]$.

Svaki konveksan skup je inveksan s obzirom na preslikavanje $v(y, x) = y - x$. Sljedeći primjer pokazuje da obrat ne mora vrijediti.

Primjer 2.4.2. *Skup $K = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \subset \mathbb{R}$, gdje je $a \geq 0$, je inveksan s obzirom na preslikavanje $v(y, x) = x$ jer sadrži kombinacije*

$$x + tv(y, x),$$

za sve točke $x, y \in K$ i sve koeficijente $t \in [0, 1]$.

Definicija 2.4.3. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$ inveksan skup s obzirom na vektorsku funkciju $v : K \times K \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ preinveksna s obzirom na v ako vrijedi nejednakost*

$$f(x + tv(y, x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y), \tag{2.18}$$

za sve točke $x, y \in K$ i za sve koeficijente $t \in [0, 1]$.

Svaka konveksna funkcija f na konveksnom skupu K je preinveksna s obzirom na preslikavanje $v(y, x) = y - x$.

Navedimo sada kako bi izgledala Hermite-Hadamardova za preinveksne funkcije. Najprije navedimo definiciju uvjeta C i lemu, odnosno nejednakost koja će nam trebati u dokazu sljedećeg teorema.

Definicija 2.4.4. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$ inveksan skup s obzirom na vektorsku funkciju $v : K \times K \to \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija v zadovoljava uvjet C ako vrijede nejednakosti*

$$v(x, x + tv(y, x)) = -tv(y, x), \tag{2.19}$$

$$v(y, x + tv(y, x)) = (1 - t)v(y, x), \tag{2.20}$$

za sve $x,y \in K$ i sve koeficijente $t \in [0, 1]$.

Lema 2.4.1. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$ inveksan skup s obzirom na preslikavanje v i $f : K \to \mathbb{R}$ preinveksna funkcija s obzirom na funkciju v koja zadovoljava uvjet C. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ koeficijenti za koje vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Neka su $t_1, t_2, ..., t_n \in [0,1]$ i neka je $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i$. Tada vrijedi:*

$$f(a + tv(b,a)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a + t_i v(b,a)) \leq (1-t)f(a) + tf(a + v(b,a)), \tag{2.21}$$

za sve a,b $\in K$.

Lema se dokazuje primjenom nejednakosti (2.18) i matematičkom indukcijom. Ispustit ćemo detalje.

Teorem 2.4.5. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$ inveksan skup s obzirom na preslikavanje v koje zadovoljava uvjet C i neka je $f : K \to \mathbb{R}$ preinveksna funkcija s obzirom na v. Tada vrijedi nejednakost*

$$f\left(a + \frac{v(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{|v(b,a)|} \int_a^{a+v(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(a + v(b,a))}{2}, \tag{2.22}$$

za sve a,b $\in K$ takve da vrijedi $v(b,a) \neq 0$.

Dokaz. Primijenimo nejednakost (2.21) sa sljedećim elementima. Neka je n prirodan broj i neka su koeficijenti $\lambda_{ni} = \frac{1}{n}$ i $t_{ni} = \frac{i}{n}$. Tada je koeficijent

$$t_n = t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ni} t_{ni} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2n},$$

a srednji je član izraza u (2.21)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(a + \frac{i}{n} v(b,a)\right) = \frac{1}{|v(b,a)|} \sum_{i=1}^{n} \frac{|v(b,a)|}{n} f\left(a + i\frac{v(b,a)}{n}\right).$$

Puštajući da n teži u beskonačno dobivamo da t_n teži u $\frac{1}{2}$, početna točka segmenta $x_{n1} = a + \frac{v(b,a)}{n}$ teži u a, a krajnja točka segmenta $x_{nn} = a + v(b,a)$ teži u $a + v(b,a)$. Zbog toga modificirana verzija nejednakosti (2.21) teži u Hermite-Hadamardovu nejednakost, (2.22). $\square$

2.5 h-konveksne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz članaka [15] i [5].

U ovoj sekciji I i J su intervali u $\mathbb{R}$, $[0,1] \subseteq J$ i funkcije h i f su realne nenegativne funkcije definirane na J i I, respektivno.

Definicija 2.5.1. *Neka je $h : J \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija, $h \not\equiv 0$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ h-konveksna funkcija ili da f pripada klasi $SX(h, I)$ ako je f nenegativna za sve $x, y \in I$, $\alpha \in [0,1]$ i vrijedi*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y). \tag{2.23}$$

Ako umjesto (2.23) *vrijedi obrnuta nejednakost, tada kažemo da je f h-konkavna funkcija, odnosno $f \in SV(h, I)$.*
Očito, ako je $h(\alpha) = \alpha$, tada sve nenegativne konveksne funkcije pripadaju klasi $SX(h, I)$ i sve nenegativne konkavne funkcije pripadaju klasi $SV(h, I)$.

Napomena 2.5.2. *Neka je h nenegativna funkcija za koju vrijedi*

$$h(t) \geq t,$$

za sve $t \in [0,1]$. Primjerice funkcija $h_k(x) = x^k$ za $k \leq 1$ i $0 \leq x \leq 1$ ima to svojstvo. Ako je f nenegativna konveksna funkcija na I, tada za sve $x, y \in I$ i $\alpha \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

pa je $f \in SX(h, I)$.

Primjer 2.5.3. *Neka je h_k, $k < 0$ funkcija definirana kao u Napomeni 2.5.2 i funkcija f na sljedeći način:*

$$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \neq \frac{a+b}{2} \\ 2^{1-k} & \text{ako je } x = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Tada f nije konveksna funkcija, ali je h_k-konveksna.

Primjer 2.5.4. *Neka su dane funkcije f i h_k definirane redom pravilima pridruživanja: $h_k(x) = x^k$, $f(x) = x^\lambda$, $x > 0$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Uzimajući u obzir Napomenu 2.5.2 i ispitujući funkciju $F(t) = \alpha^k t^\lambda + (1-\alpha)^k - (\alpha t + 1 - \alpha)^\lambda$, $t > 0$, $0 < 1 < \alpha$, možemo zaključiti sljedeće:*

- *Funkcija f je h_k konveksna ako vrijedi*
(1) $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ i $k \leq 1$
(2) $\lambda \in [0,1]$ i $k \geq \lambda$.
- *Funkcija f je h_k konkavna ako vrijedi*
(1) $\lambda \in [0,1]$ i $k \geq 1$
(2) $\lambda > 1$ i $k \geq \lambda$.

Teorem 2.5.5. *Neka su h_1 i h_2 nenegativne funkcije definirane na intervalu J sa svojstvom*

$$h_2(t) \leq h_1(t), \qquad t \in [0,1].$$

Ako je $f \in SX(h_2, I)$, tada je $f \in SX(h_1, I)$. Ako je $f \in SV(h_1, I)$, tada je $f \in SV(h_2, I)$.

Dokaz. Ako je $f \in SX(h_2, I)$, tada za za bilo koje $x, y \in I$ i $\alpha \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h_2(\alpha)f(x) + h_2(1-\alpha)f(y) \leq h_1(\alpha)f(x) + h_1(1-\alpha)f(y),$$

odnosno, $f \in SX(h_1, I)$ □

Teorem 2.5.6. *Ako su $f, g \in SX(h, I)$ i $\lambda > 0$, tada su $f + g$, $\lambda f \in SX(h, I)$. Ako su $f, g \in SV(h, I)$ i $\lambda > 0$, tada su $f + g$, $\lambda f \in SV(h, I)$.*

Dokaz. Dokaz je očit zbog definicija klasa $SX(h, I)$ i $SV(h, I)$ □

Teorem 2.5.7. *Neka su f i g slično uređene funkcije na I, tj. neka vrijedi*

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \tag{2.24}$$

za sve $x, y \in I$. Ako je $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$ i $h(\alpha) + h(1-\alpha) \leq c$, za sve $\alpha \in (0,1)$, gdje je $h(t) = \max\{h_1(t), h_2(t)\}$, a c je fiksan pozitivan realan broj, tada funkcija fg pripada klasi $SX(ch, I)$.
Ako su f i g suprotno uređene, $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$ i $h(\alpha) + h(1-\alpha) \leq c$, za sve $\alpha \in (0,1)$, gdje je $h(t) = \min\{h_1(t), h_2(t)\}$, $c > 0$, tada produkt funkcija fg pripada klasi $SX(ch, I)$.

Dokaz. Iz (2.24) imamo

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

Neka su α i β pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $\alpha + \beta = 1$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&fg(\alpha x + \beta y) \\
&\leq (h_1(\alpha)f(x) + h_1(\beta)f(y))(h_2(\alpha)g(x) + h_2(\beta)f(y)) \\
&\leq h(\alpha)^2(fg)(x) + h(\alpha)h(\beta)f(x)g(x) + h(\alpha)h(\beta)f(y)g(y) + h(\beta)^2(fg)(y) \\
&= (h(\alpha) + h(\beta))(h(\alpha)(fg)(x) + h(\beta)(fg)(y)) \\
&\leq ch(\alpha)(fg)(x) + ch(\beta)(fg)(y).
\end{aligned}$$

□

Pogledajmo kako bi izgledala Hermite-Hadamardova nejednakost za h-konveksne funkcije. Dva dijela nejednakosti iskazat ćemo kroz dva teorema:

Teorem 2.5.8. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-konveksna funkcija. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)dt \tag{2.25}$$

Ako je f h-konkavna funkcija, tad u (2.25) *vrijedi obrnuta nejednakost.*

Dokaz. Za bilo koji $x \in [a,b]$ postoji $\alpha \in [0,1]$ takav da vrijedi $x = \alpha a + \bar{\alpha} b$, $\bar{\alpha} = 1-\alpha$. Iz definicije h-konveksnosti funkcije imamo

$$f(\alpha a + \bar{\alpha} b) \leq h(\alpha)f(a) + h(\bar{\alpha})f(b),$$

$$f(\bar{\alpha} a + \alpha b) \leq h(\bar{\alpha})f(a) + h(\alpha)f(b).$$

Zbrajanjem posljednjih dviju nejednakosti i integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(\alpha a + \bar{\alpha} b)d\alpha + \int_0^1 f(\bar{\alpha} a + \alpha b)d\alpha \\
&\leq \int_0^1 [h(\alpha)f(a) + h(\bar{\alpha})f(b) + h(\bar{\alpha})f(a) + h(\alpha)f(b)]d\alpha \\
&= \int_0^1 \{f(a)[h(\alpha) + h(\bar{\alpha})] + f(b)[h(\bar{\alpha}) + h(\alpha)]\}d\alpha \\
&= 2f(a)\int_0^1 h(t)dt + 2f(b)\int_0^1 h(t)dt \\
&= 2[f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)dt.
\end{aligned}$$

Uz pogodnu supstituciju zaključujemo da su oba integrala na lijevoj strani nejednakosti jednaki $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ pa je nejednakost (2.25) dokazana. □

Teorem 2.5.9. *Neka je h funkcija definirana na $[0, \max\{1, b-a\}]$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-konveksna funkcija. Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(t)dt. \tag{2.26}$$

Dokaz. Neka je f h-konveksna funkcija. Ako je $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $x = ta+(1-t)b$, $y = (1-t)a+tb$, po definiciji h-konveksnosti mora vrijediti

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\Big(f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)\Big).$$

Sada gornju nejednakost integriramo po t na segmentu $[0, 1]$ i dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2h\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a} \int_a^b f(t)dt,$$

što je trebalo dokazati. $\square$

2.6 r-konveksne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz knjige [8].

Prisjetimo se da je funkcija f log-konveksna na $I = [a, b]$ ako za svaki izbor točaka $x, y \in I$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{(1-\lambda)} \tag{2.27}$$

Ako vrijedi obrnuta nejednakost, tada kažemo da je funkcija log-konkavna.
Nadalje, potencijalna sredina $M_r(x, y; \lambda)$ reda r pozitivnih brojeva x,y je definirana sa:

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{1/r} & \text{ako je } r \neq 0 \\ x^{\lambda} y^{1-\lambda} & \text{ako je } r = 0. \end{cases}$$

U specijalnom slučaju $\lambda = \frac{1}{2}$ pišemo skraćenu notaciju $M_r(x, y)$.

Definirajmo još ovdje i logaritamsku sredinu pozitivnih realnih brojeva x i y sa:

$$L(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & \text{ako je } x \neq y \\ x & \text{ako je } x = y. \end{cases}$$

Logaritamsku sredinu možemo i generalizirati. Logaritamska sredina reda r pozitivnih realnih brojeva x i y definiramo sa:

$$L_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & \text{ako je } r \neq 0, -1, \quad x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & \text{ako je } r = 0, \quad x \neq y \\ \frac{\ln x - \ln y}{x-y} & \text{ako je } r = -1, \quad x \neq y \\ x & \text{ako je } x = y. \end{cases}$$

Sada uvodimo prirodno pojam r-konveksnosti.

Definicija 2.6.1. *Pozitivna funkcija f je r-konvesna na $[a, b]$ ako za sve x,$y \in [a, b]$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda) \tag{2.28}$$

Ako u (2.28) vrijedi obrnuta nejednakost, tada je funkcija f r-konkavna. Vidimo da su 0-konveksne funkcije zapravo log-konveksne funkcije, a 1-konveksne funkcije su obične konveksne funkcije.

Pogledajmo sada kako bi izgledala verzija Hermite-Hadamardove nejednakosti na r-konveksne funkcije.

Teorem 2.6.2. *Neka je f r-konveksna funkcija na $[a,b]$. Tada vrijedi:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq L_r(f(a), f(b)). \tag{2.29}$$

Ako je f r-konkavna funkcija, tada vrijedi obrnuta nejednakost.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $r \neq 0,-1$. Prvo pretpostavimo da je $f(a) \neq f(b)$. Prema (2.28) slijedi

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t)dt = (b-a)\int_0^1 f(sb+(1-s)a)ds \\
&\leq (b-a)\int_0^1 (sf^r(b)+(1-s)f^r(a))^{\frac{1}{r}}ds \\
&= (b-a)\int_{f^r(a)}^{f^r(b)} \frac{t^{\frac{1}{r}}dt}{f^r(b)-f^r(a)} \\
&= (b-a)\frac{r}{r+1}\frac{f^{r+1}(b)-f^{r+1}(a)}{f^r(b)-f^r(a)} \\
&= (b-a)L_r(f(a), f(b)).
\end{aligned}$$

Za $f(a) = f(b)$ imamo slično:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\int_0^1 (sf^r(b)+(1-s)f^r(a))^{\frac{1}{r}}ds \\
&= (b-a)f(a) \\
&= (b-a)L_r(f(a), f(b)).
\end{aligned}$$

Neka je sada $r = -1$. Za $f(a) \neq f(b)$ ponovno imamo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &\leq (b-a)\int_0^1 \{sf^{-1}(b)+(1-s)f^{-1}(a)\}^{-1}ds \\
&= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)}-\frac{1}{f(a)}}\int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} t^{-1}dt \\
&= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)}-\frac{1}{f(a)}}(\ln\frac{1}{f(b)} - \ln\frac{1}{f(a)}) \\
&= (b-a)f(a)f(b)\frac{\ln f(a)-\ln f(b)}{f(a)-f(b)} \\
&= (b-a)L_{-1}(f(a), f(b)).
\end{aligned}$$

Dokaz za $f(a) = f(b)$ se izvodi slično.

Dokažimo još i za $r = 0$. Koristeći činjenicu da je f 0-konveksna imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt &= \int_0^1 f(sb + (1-s)a)ds \\
&\leq \int_0^1 f^s(b)f^{1-s}(a)ds \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^s f(a)ds \\
&= f(a)\frac{1}{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^s \Big|_0^1 \\
&= \frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{f(b)}{f(a)}} \\
&= L_0(f(a), f(b)).
\end{aligned}$$

□

2.7 Jako konveksne funkcije

Rezultati ovog potpoglavlja su obrađeni na temelju rezultata iz članaka [3] i [10].

Definicija 2.7.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i c pozitivan realan broj. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ jako konveksna s modulom c ako vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \tag{2.30}$$

za sve $x, y \in I$ i sve $t \in [0,1]$.

Kad bismo uzeli $c = 0$, dobili bismo definiciju konveksnosti. Zbog toga je pojam jake konveksnosti poopćenje pojma konveksnosti.

Za poopćenje i dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti za jako konveksne funkcije navedimo prvo jednu lemu i dokaz iste.

Lema 2.7.1. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je jako konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija definirana sa $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - cx^2$ konveksna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f jako konveksna i promotrimo razliku $g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y)$ gdje su $x, y \in I$ i $t \in [0,1]$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
&g(tx + (1-t)y) - tg(x) - (1-t)g(y) \\
&= f(tx + (1-t)y) - c(tx + (1-t)y)^2 - t(f(x) - cx^2) - (1-t)(f(y) - cy^2) \\
&= f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) - c(t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 - tx^2 \\
&- (1-t)y^2) \\
&\leq -ct(1-t)(x-y)^2 - c(x^2t(t-1) + 2t(1-t)xy - y^2(1-t)(1-t-1)) \\
&= -ct(1-t)(x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2) = 0,
\end{aligned}$$

a to znači da je g konveksna. Dokažimo i drugi smjer. Pretpostavimo da je g konveksna, tj. da za svaki $x, y \in I$ i $t \in [0,1]$ vrijedi

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

Uvrstimo li u tu nejednakost definiciju za g, nakon nekoliko transformacija dobivamo definicijsku nejednakost za jako konveksnu funkciju f. □

Primjer 2.7.2. *Neka je f konveksna dva puta derivabilna funkcija čija je druga derivacija ograničena odozdo s brojem m, tj. $f'' \geq m$ na I. Tada je funkcija $\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}mx^2$ jako konveksna. Naime, vrijedi: $\varphi'(x) = f'(x) - mx$, $\varphi''(x) = f''(x) - m \geq 0$. Dakle, φ je konveksna pa je prema Lemi 2.7.1. f jako konveksna.*
Dakle, skup jako konveksnih funkcija obuhvaća sve konveksne dva puta derivabilne funkcije s odozdo ograničenom drugom derivacijom.

Teorem 2.7.3. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ jako konveksna s modulom c, tada vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(x-y)^2 \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2, \qquad (2.31)$$

za sve $x,y \in I$ takve da je $x < y$.
Vrijedi i obrat: ako je f neprekidna funkcija i zadovoljava nejednakosti (2.31)*, tada je f jako konveksna s modulom c.*

Dokaz. Desna nejednakost u (2.31) slijedi direktno integriranjem nejednakosti (2.30) po t na segmentu $[0, 1]$.

Kao što znamo, u svakoj točki $s_0 \in I$ za konveksnu funkciju g postoji potporni pravac, tj. postoji realni broj k takav da je

$$g(s) \leq k(s - s_0) + g(s_0), \forall s \in I.$$

Štoviše, taj broj k je broj iz segmenta $[g'_-(s_0), g'_+(s_0)]$. Pokazat ćemo da za jako konveksnu funkciju postoji potporna parabola. Ako je f jako konveksna funkcija, tada je $g(x) = f(x) - cx^2$ konveksna funkcija pa za točku s_0 postoji $k \in [g'_-(s_0), g'_+(s_0)] = [f'_-(s_0) - 2cs_0, f'_+(s_0) - 2cs_0]$ takav da je $g(s) \leq k(s-s_0) + g(s_0)$. Uvrstimo li $g(s) = f(s) - cs^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(s) - cs^2 &\leq k(s - s_0) + f(s_0) - cs_0^2 \\ &= (k' - 2cs_0)(s - s_0) + f(s_0) - cs_0^2, \end{aligned}$$

pri čemu je $k = k' - 2cs_0$. Tada je

$$f(s) \leq k'(s-s_0) + c(s^2 - 2s_0(s-s_0) - s_0^2) + f(s_0) = c(s-s_0)^2 + k'(s-s_0) + f(s_0) = p(s),$$

tj. na desnoj smo strani dobili tzv. potpornu parabolu p i uz to vrijedi $f(s_0) = p(s_0)$.

Za dokaz lijeve strane nejednakosti (2.31) stavimo $s_0 = \dfrac{x+y}{2}$ te definirajmo funkciju $p : I \to \mathbb{R}$ s $p(s) = c(s - s_0)^2 + a(s - s_0) + f(s_0)$ koja je potporna parabola u $\dfrac{x+y}{2}$. Integriranjem obje strane nejednakosti $f(s) \leq p(s)$ po s na intervalu $[x, y]$ dobivamo lijevu nejednakost u (2.31).

Ako je f neprekidna i zadovoljava lijevu ili desnu nejednakost u (2.31), tada je funkcija

$g : I \to \mathbb{R}$ definirana s $g(x) = f(x) - cx^2$, $x \in I$ također neprekidna i zadovoljava lijevu ili desnu stranu Hermite-Hadamardove nejednakosti, respektivno. U oba slučaja slijedi da je g konveksna. Prema Lemi 2.7.1. slijedi da je f jako konveksna s modulom c. □

Navedimo i dokažimo još jedan teorem za jako konveksne funkcije definirane na segmetnu.

Teorem 2.7.4. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako konveksna funkcija s modulom c. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] + \frac{c}{48}(b-a)^2 \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{c}{24}(b-a)^2 \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2. \end{aligned}$$

Dokaz. Primijenimo Hermite-Hadamardovu nejednakost za jako konveksne funkcije, odnosno nejednakost (2.31) na svakom od intervala $[a, \frac{a+b}{2}]$ i $[\frac{a+b}{2}, b]$. Dobivamo

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{c}{48}(b-a)^2 \le \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \le \frac{f(a)+f(\frac{a+b}{2})}{2} - \frac{c}{24}(b-a)^2$$

i

$$f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{c}{48}(b-a)^2 \le \frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \le \frac{f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{2} - \frac{c}{24}(b-a)^2.$$

Zbrajanjem tih dviju nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{2c}{48}(b-a)^2 \\ &\le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2c}{24}(b-a)^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Sada, koristeći strogu konveksnost funkcije f i (2.32) dobivamo

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{c}{12}(b-a)^2 &= f\left(\frac{\frac{3a+b}{4}+\frac{a+3b}{4}}{2}\right)+\frac{c}{12}(b-a)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]-\frac{c}{4}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{c}{12}(b-a)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]+\frac{c}{48}(b-a)^2 \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Slično, primijenimo još jednom (2.31) i jaku konveksnost funkcije f te dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{c}{24}(b-a)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{4}(b-a)^2\right]-\frac{c}{24}(b-a)^2 \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(b-a)^2,
\end{aligned}
$$

čime je dokaz gotov. □

Bibliografija

[1] Sh. Abramovich, J. Barić, J. Pečarić, *Fejér and Hermite–Hadamard type inequalities for superquadratic functions*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 1048—1056.

[2] M. U. Awan, M. A. Noor and K. I. Noor, *Hermite-Hadamard inequalities for exponentially convex functions*, Appl. Math. Inf. Sci. **12**, No. 2 (2018), 405–409.

[3] A. Azócar, K. Nikodem, G. Roa, *Fejér-type inequalities for strongly convex functions*, Ann. Math. Sil. **26** (2012), 43–54.

[4] S. Banić, *Superkvadratne funkcije*, doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel (2007).

[5] M. Bombardelli, S. Varošanec, *Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities*, Comput. Math. Appl. 58 (2009), 1869–1877.

[6] K. Bošnjak, M. R. Penava, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list **16** (2016), 15–25.

[7] S. S. Dragomir, *New inequalities of Hermite-Hadamard type for log-convex functions*, Khayyam J. Math. **3** (2017), no. 2, 98–115.

[8] S. S. Dragomir, Charles E.M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA monographs, Victoria University, Melbourne City, 2000.

[9] Y.- C. Li, C.- C. Yeh, *Some characterizations of convex functions*, Comput. Math. Appl. **59** (2010), 327–337.

[10] N. Merentes, K. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequat. Math. **80** (2010), 193—199.

[11] C. P. Niculescu, L.- E. Persson, *Convex functions and their applications- A contemporary approach*, Springer, (2004).

[12] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, S. Khan, *Hermite-Hadamard inequalities for s-Godunova-Levin preinvex functions*, J. Adv. Math. Stud. **7** (2014), No. 2, 12–19.

[13] Z. Pavić, *Important inequalities for preinvex functions*, J. Nonlinear Sci. Appl. **9** (6) (2016), 3570–3579.

[14] D. Pokaz, *Boasov funkcional i s njim povezane nejednakosti*, doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel (2011).

[15] S. Varošanec, *On h-convexity*, J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 303–311.

Sažetak

Pojam i svojstva konveksnih funkcija relativno su mladi u području matematike. Tek u 19. stoljeću danski matematičar J.L.W.V. Jensen počeo je pisati radove koji sadrže konveksne funkcije kao zasebnu ideju. Jensena zato nazivamo začetnikom toga područja. Navedimo ovdje osnovnu definiciju konveksne funkcije.

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za svaki izbor točaka $x, y \in I$ i svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

U prvom poglavlju uveli smo pojam konveksnih funkcija te jednu ekvivalentnu karakterizaciju. Zatim smo naveli nekoliko karakterizacija konveksnih funkcija te najvažniji rezultat vezan uz konveksne funkcije- Hermite-Hadamardovu nejednakost. Pokazali smo i da je njezina lijeva nejednakost jača od desne. Zatim smo dokazali ekvivalentnost konveksnosti i Hermite-Hadamardove nejednakosti. Vidjeli smo da čak i samo lijeva ili samo desna strana Hermite-Hadamardove nejednakosti povlače konveksnost.

U drugom poglavlju bavili smo se poopćenjima pojma konveksnosti funkcije. Najprije smo uveli pojam logaritamski konveksnih funkcija te oblik Hermite-Hadamardove nejednakosti za logaritamski konveksne funkcije. Zatim smo definirali i dokazali neka svojstva i Hermite-Hadamardov tip nejednakosti za log-konveksne funkcije. Slično smo nastavili redom za ova poopćenja konveksnih funkcija: eksponencijalno konveksne funkcije, superkvadratne funkcije, preinveksne funkcije, h-konveksne funkcije, r-konveksne funkcije te naposljetku jako konveksne funkcije.

Summary

Definition and properties of convex functions are relatively new in mathematics. Only in 19th century a Danish mathematican J.L.W.V. Jensen started doing research and publishing works that contained convex functions as a new concept. For that reason we call Jensen the originator of this area. Let us define convex functions.

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval. We say that a function $f : I \to \mathbb{R}$ is convex if for every x, $y \in I$ and every $t \in [0, 1]$ holds inequality

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

In the first chapter we've introduced a concept of convex functions and one equivalent statement. Then we've introduced few characterizations of convex functions as well as the most important result in the area, which is the Hermite-Hadamard inequality. We have also showed that its left side is stronger than its right one. We have then proved equivalence of convex and the Hermite-Hadamard inequality. We have also seen that either left or right side implies convexity.

In the second chapter we have been studying generalisations of convex functions. First we have introduced a term of logarithmically convex functions. Then we have defined and proved some properties and Hermite-Hadamard type inequality for log-convex functions. We have continued in similar order for: exponentially convex functions, superquadratic functions, preinvex functions, h-convex functions, r-convex functions and, at last, strongly convex functions.

Životopis

Zovem se Viktor Vranar i rođen sam 30.9.1992. godine u Koprivnici. Završio sam Osnovnu školu "Antun Nemčić-Gostovinski" te 2007. godine upisao Gimnaziju "Fran Galović"-opći smjer. 2011. godine upisao sam Prirodoslovno-matematički fakultet-Matematički odsjek u Zagrebu. Prve tri godine pohađao sam inženjerski smjer te sam shvatio da želim biti profesor pa sam promijenio usmjerenje. 2016. godine stekao sam zvanje sveučilišnog prvostupnika (baccalaureus) edukacije matematike, univ. bacc. educ. math. Diplomski studij, odnosno specijalizaciju u području matematike, odlučio sam završiti također na nastavničkom smjeru.

Školujući se za budućeg profesora matematike bavio sam se mnogobrojnim izvannastavnim i izvanškolskim aktivnostima. Završio sam osnovnu glazbenu školu za smjerove klavir i solopjevanje. U osnovnoj školi bavio sam se intenzivno šahom te jedne godine sudjelovao na europskom prvenstvu. Tijekom studija me više impresionirala kineska igra go (drugi nazivi: weiqi, baduk). U osnovnoj i srednjoj školi pohađao sam dodatne grupe iz matematike i fizike. Iz matematike sam u 4. razredu srednje sudjelovao na državnom natjecanju.

Od ostalih vještina naveo bih odlično znanje engleskog jezika u govoru, pisanju i čitanju te vješto korištenje programskog jezika C i rada s bazama podataka.