Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Ban

Konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Ban

Konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Sanja Rukavina

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Sara Ban

Construction of Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:
Professor Sanja Rukavina, PhD

Zagreb, 2019.

Ova disertacija je predana na ocjenu Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematičkom odsjeku, Sveučilišta u Zagrebu, u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora znanosti iz područja prirodnih znanosti, znanstvenog polja matematika.

Izjava o izvornosti rada

Ja, Sara Ban, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom: Konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, lipanj 2019.

Sara Ban

Sažetak

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije je konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II, odnosno samodulanih $\mathbb{Z}_4$-kodova kod kojih su euklidske težine svih riječi djeljive sa 8 i koji imaju najveću moguću minimalnu euklidsku težinu. Ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II konstruiramo iz postojećih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II i iz binarnih kodova s određenim svojstvima. Cilj je konstrukcija novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II.

Pri konstrukcijama, osim teorijskih rezultata, koristimo programe napisane za uporabu u programskim paketima GAP ([40]) i Magma ([6]).

Polazeći od poznate metode konstrukcije ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II za duljine $24, 32$ i 40, koja je prikazana u [8], razvijamo metodu konstrukcije ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II za duljine $48, 56$ i 64. Primjenom razvijene metode te otprije poznatih metoda iz [35] i [8], pokušavamo konstruirati nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II.

Također, ispitujemo svojstva binarnih kodova pridruženih Hadamardovim matricama te njihovu podobnost za korištenje u konstrukciji ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II. Na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II dobivene polazeći od Hadamardovih matrica primjenjujemo poznate metode iz [8] te u disertaciji razvijene metode s ciljem dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II.

Konstruirani su novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljina 32 i 40.

Iz dobivenih novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 konstruiramo kombinatoričke dizajne i grafove koristeći nosače riječi određenih težina te ispitujemo svojstva dobivenih kombinatoričkih struktura.

Summary

The main subject of this dissertation is the construction of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes. The aim is to construct new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes.

We constructed extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes using known methods and methods developed in this dissertation starting from existing extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes. We also constructed Type II $\mathbb{Z}_4$-codes from certain binary codes and examined the extremality of obtained codes.

We have been using GAP and Magma software packages.

Some necessary concepts from coding theory, design theory, graph theory and basic facts about lattices are introduced in the first chapter.

Second chapter of the dissertation contains the classification of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 8, 16 and 24 and information about numbers of known extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of larger lengths. It also contains constructions of self-dual $\mathbb{Z}_4$-codes and Type II $\mathbb{Z}_4$-codes from binary codes with certain properties. We have been trying to construct new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 56 and 64 starting from some binary codes.

Third chapter of the dissertation contains three constructions of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes from existing extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes. We corrected errors in the first construction and obtained new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of length 32 in that way. Starting from known methods for construction of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths $24, 32$ and 40 we developed a method for construction of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths $48, 56$ and 64. We have been trying to construct new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes using this method. The second construction was used to get new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of length 40. We tried to construct new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 56 and 64 starting from certain existing extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 56 and 64 using the first and the third construction in this chapter. We showed that new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 56 and 64 cannot be obtained in this way.

In the next part of the dissertation we looked at the binary codes associated with Hadamard matrices. Their properties were analyzed. We proved their suitability for construction of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes introduced in the second chapter of the dissertation.

New extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 32 and 40 were obtained with the use of Hadamard matrices.

The last, fifth chapter, is devoted to constructing combinatorial designs and graphs using supports of codewords with specific weights of the obtained new extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of length 32. Properties of the constructed structures were analyzed. We tried to construct new designs and distance-regular or strongly-regular graphs. Parameters of all obtained designs are known. We obtained some regular graphs which are not distance-regular.

Ključne riječi

$\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II, ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II, binarni kodovi, Hadamardove matrice, kombinatoričke strukture

Sadržaj

Popis tablica

Uvod

Predmet istraživanja ove doktorske disertacije je konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II.

Teorija kodiranja je grana matematike koja se bavi problemom prijenosa informacija od pošiljatelja do primatelja putem komunikacijskog kanala sa smetnjama te detekcijom i ispravljanjem pogrešaka nastalih prilikom prijenosa. Bitan doprinos teoriji kodiranja je rad [37] C. E. Shannona iz 1948. godine. Uz C. E. Shannona, začetnikom teorije kodiranja se smatra i R. W. Hamming. Razvoj teorije kodiranja pratio je intenzivni razvoj računalne tehnologije, koji je omogućio razvoj i implementaciju algoritama primjenjivih za konstrukciju kodova.

U poglavlju 1 nalaze se osnovni pojmovi o binarnim kodovima, $\mathbb{Z}_4$-kodovima, rešetkama, dizajnima, Hadamardovim matricama i grafovima.

Kodovi nad prstenom $\mathbb{Z}_4$ su zanimljivi zbog svojih svojstava i povezanosti s binarnim kodovima. Iz $\mathbb{Z}_4$-kodova se mogu konstruirati neki poznati nelinearni binarni kodovi. Veza $\mathbb{Z}_4$-kodova i binarnih kodova se prvi put spominje u [16]. Samodualni $\mathbb{Z}_4$-kodovi su opisani u [26], a klasifikacija određenih tipova samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova je dana u [19], [25] i [35]. Samodualni $\mathbb{Z}_4$-kodovi su posebno proučavani zbog svoje povezanosti s unimodularnim rešetkama ([14]). Od posebnog interesa su ekstremalni kodovi - kodovi koji postižu najveću moguću težinu. Za $\mathbb{Z}_4$-kodove su definirane Hammingova, Leejeva i euklidska težina (vidi [26]).

Samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod u kojem su euklidske težine svih riječi djeljive sa 8 se naziva $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II. Ova klasa samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova je povezana s parnim unimodularnim rešetkama. $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n postoji ako i samo ako je n djeljiv sa 8, a minimalna euklidska težina takvog koda je manja ili jednaka od broja $8\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 8$ ([23]). $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n čija minimalna euklidska težina dostiže ovu granicu zovemo ekstremalnim.

Klasifikacija $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 8 i 16 je dana u [10] i [35]. Ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 24 su klasificirali R. Betty i A. Munemasa 2014. godine ([31]). Poznat je velik broj ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 32 i 40 ([8], [17] i [21]). Poznata su dva međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 48 ([5], [22]) i tri međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 56 ([18], [20]).

Poznat je samo jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64, do na ekvivalenciju ([18]). Pitanje o postojanju ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II većih duljina je otvoreno.

U [35] je dana metoda za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz binarnih dvostruko parnih kodova duljine djeljive sa 8 koji sadrže riječ čije su sve komponente jednake 1. U poglavlju 4 istražujemo mogućnost konstrukcije binarnih kodova s navedenim svojstvima iz Hadamardovih matrica reda djeljivog sa 8.

V. D. Tonchev je u [43] dao metodu za konstrukciju binarnih samodualnih dvostruko parnih kodova duljine $2n$ iz Hadamardovih matrica reda $n = 8t + 4$. U [28] je korištenjem metode iz [43] pokazano da se iz Hadamardovih matrica reda 28 može dobiti točno pet međusobno neekvivalentnih binarnih dvostruko parnih $[56, 28, 12]$ kodova. Iz ovih kodova konstruiramo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 koristeći metodu iz [35]. Ekstremalnost dobivenih kodova provjeravamo koristeći karakterizaciju iz [18] pomoću svojstava rešetki dobivenih konstrukcijom A_4 (opisano u [26]). Metodu iz [35] ćemo primijeniti i na binarni $[64, 32, 8]$ kod naveden u poglavlju 2.

U [8] je opisana metoda udvostručavanja - metoda za konstrukciju novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine n iz danog ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine n, gdje je $n = 24, 32$ ili 40. Kao polazne kodove za ovu konstrukciju koristimo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 dobivene metodom iz [35] koristeći binarne kodove iz Hadamardovih matrica reda 32 te ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 iz [36]. Na temelju metode udvostručavanja za duljine $n = 24, 32, 40$, u poglavlju 3 razvijamo metodu udvostručavanja za duljine $n = 48, 56, 64$.

Metoda nadogradnje, dana u [8], je metoda za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine $n+8$ iz danog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine n. Ovu metodu ćemo koristiti na dobivenim novim ekstremalnim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa II duljine 32, kao i na poznatim ekstremalnim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa II duljine 56. Rezultati su prikazani u poglavljima 3 i 4.

M. Harada je u [19] dao metodu kojom se iz postojećeg $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II dobiva klasa $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II. U poglavlju 3 opisujemo pokušaje da se uzastopnom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode iz [8] dobiju novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 56 i 64. Generaliziranu Haradinu metodu također primjenjujemo na $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 koje smo dobili metodom nadogradnje. Ekstremalnost dobivenih kodova provjeravamo koristeći konstrukciju A_4.

U [15] je pokazano da skupovi nosača riječi Hammingove težine 10 u određenim ekstremalnim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa II duljine 24 formiraju 5-$(24, 10, 36)$ dizajne. U [24] su iz riječi s nosačima veličine 6 različitih tipova u Preparata kodu $\mathcal{P}_m$, gdje je m neparan, konstruirane različite familije 3-dizajna. U poglavlju 5 iz dobivenih novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32, koristeći nosače riječi minimalne Leejeve težine, konstruiramo kombinatoričke strukture te proučavamo njihova svojstva.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju se nalaze osnovni pojmovi i činjenice o binarnim kodovima, dizajnima, Hadamardovim matricama i grafovima potrebne za razumijevanje preostalih poglavlja. Ovdje definiramo $\mathbb{Z}_4$-kodove te navodimo neka njihova svojstva. Od posebnog interesa će nam biti $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II, a posebno ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II, definirani u ovom poglavlju. Također, navodimo osnovne pojmove o rešetkama i njihovu vezu sa $\mathbb{Z}_4$-kodovima.

1.1 Binarni kodovi

Definicija 1.1. **Kod** C duljine n nad alfabetom Q je podskup $C \subseteq Q^n$. Elementi koda nazivaju se **riječima koda**.

Neka je p potencija prostog broja. Kod C naziva se p-narnim **linearnim kodom** dimenzije k ako je $Q = \mathbb{F}_p$ i ako je C k-dimenzionalan potprostor vektorskog prostora $\mathbb{F}_p^n$. **Generirajuća matrica** linearnog koda C je matrica G čiji retci čine bazu za C.

Posebno, za $Q = \mathbb{F}_2$, linearni kod duljine n dimenzije k se naziva **binarnim** $[n, k]$ **kodom**.

Riječ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n$ ćemo označavati s $x = x_1 \cdots x_n$. Kažemo da je riječ $x = x_1 \cdots x_n$ **nenula riječ** ako joj je barem jedna od komponenti x_i različita od nule, gdje je $i = 1, \ldots, n$.

Definicija 1.2. Dva su linearna koda **ekvivalentna** ako se jedan može dobiti iz drugoga permutacijom komponenti u svim riječima koda i množenjem pojedine komponente s nekim nenula elementom polja.

Dva su linearna koda **izomorfna** ako se jedan može dobiti iz drugoga permutacijom komponenti.

Automorfizam koda C je izomorfizam sa C u C.

Skup svih automorfizama linearnog koda C čini grupu koju nazivamo **puna grupa automorfizama** koda i označavamo s $Aut(C)$.

Definicija 1.3. **Težina** riječi $x \in \mathbb{F}_p^n$ je broj nenula komponenti od x. **Minimalna težina** linearnog koda C je najmanja težina među težinama svih nenula riječi iz C.

Ako je d minimalna težina binarnog $[n, k]$ koda C, kažemo da je C binarni $[n, k, d]$ kod.

Definicija 1.4. Kažemo da je linearni kod **paran** ako su težine svih riječi u tom kodu parne.

Kažemo da je linearni kod **dvostruko paran** ako su težine svih riječi u tom kodu djeljive sa četiri.

Kažemo da je linearni kod **trostruko paran** ako su težine svih riječi u tom kodu djeljive sa osam.

Definicija 1.5. **Dualni kod** p-narnog koda C duljine n je kod

$$C^{\perp} = \{y \in \mathbb{F}_p^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in C\},$$

gdje je $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ standardni (euklidski) skalarni produkt vektora $x = x_1 \cdots x_n$ i $y = y_1 \cdots y_n$.
Ako je $C \subseteq C^{\perp}$, kažemo da je C **samoortogonalan**. Ako je $C = C^{\perp}$, kažemo da je C **samodualan**.

Dualni kod $C^{\perp}$ binarnog $[n, k]$ koda C je binarni $[n, n-k]$ kod. Ako je C samodualan, tada je $k = \frac{n}{2}$.

U nastavku rada, od linearnih kodova promatramo samo binarne kodove.

Definicija 1.6. Neka je C binarni kod duljine n. **Težinski enumerator** koda C je polinom

$$P(x_0, x_1) = \sum_{w=0}^{n} A_w x_0^{n-w} x_1^w,$$

gdje je A_w broj riječi težine w u C.

Primjer 1.1. **Prošireni Hammingov** $[8, 4]$ **kod** je binarni kod s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njegov težinski enumerator je

$$P(x_0, x_1) = x_0^8 + 14x_0^4x_1^4 + x_1^8.$$

Ovaj kod je dvostruko paran samodualan binarni $[8, 4, 4]$ kod.

Sljedeći teorem se može pronaći u [26].

Teorem 1.1. *Neka je C binarni kod.*

(i) Neka je C samoortogonalan s generirajućom matricom G takvom da svaki redak od G ima težinu djeljivu sa četiri. Tada je C dvostruko paran kod.

(ii) Neka je C dvostruko paran. Tada je C samoortogonalan kod.

Sljedeći je teorem dokazan u [30].

Teorem 1.2. *Dvostruko paran samodualni binarni kod duljine n postoji ako i samo ako je n djeljiv sa 8. Za minimalnu težinu d takvog koda vrijedi:*

$$d \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4.$$

Definicija 1.7. Ako je C binarni dvostruko paran samodualni kod duljine n s minimalnom težinom $d = 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4$, kažemo da je C **ekstremalan**.

Prošireni Hammingov $[8, 4]$ kod je ekstremalan.

1.2 $\mathbb{Z}_4$-kodovi

U ovom potpoglavlju definiramo $\mathbb{Z}_4$-kodove i navodimo neke osnovne činjenice o njima koje se mogu pronaći u [26]. Također, uvodimo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II kojima ćemo se baviti u narednim poglavljima.

U nastavku ćemo za $\mathbb{Z}_4$-kod koristiti oznaku C, a za binarni kod oznaku C_1.

Definicija 1.8. Neka je $(R, +_R, \cdot_R)$ prsten s jedinicom 1. R**-modul** je Abelova grupa $(M, +)$ uz operaciju $\cdot : R \times M \to M$ koja za sve elemente $a, b \in R$ i $m, n \in M$ zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$,

2. $(a +_R b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$,

3. $(a \cdot_R b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$,

4. $1 \cdot m = m$.

$(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ je prsten s jedinicom 1, gdje je $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. $(\mathbb{Z}_4^n, +)$, gdje je

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_4 y_1, \dots, x_n +_4 y_n),$$

za sve $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_4^n$, je $\mathbb{Z}_4$-modul uz operaciju $\cdot : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4^n \to \mathbb{Z}_4^n$ definiranu s

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (a \cdot_4 x_1, \dots, a \cdot_4 x_n),$$

za sve $a \in \mathbb{Z}_4, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_4^n$.

U nastavku rada ćemo s $+$ označavati i operaciju $+_4$ u $\mathbb{Z}_4$, a s $\cdot$ operaciju $\cdot_4$ u $\mathbb{Z}_4$.

Definicija 1.9. Za N podskup od R-modula M kažemo da je **R-podmodul** od M ako je N aditivna podgrupa grupe M takva da je $R \cdot N \subseteq N$.

Definicija 1.10. $\mathbb{Z}_4$-kod C duljine n je $\mathbb{Z}_4$-podmodul $\mathbb{Z}_4$-modula $\mathbb{Z}_4^n$. Elemente $\mathbb{Z}_4$-koda C zovemo **riječima koda**.

Riječ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_4^n$ ćemo označavati s $x = x_1 \cdots x_n$.

Ukoliko je neka komponenta x_i, gdje je $i = 1, \dots, n$, u riječi x jednaka 0 ili 2, kažemo da je x_i **parna komponenta**, a ukoliko je komponenta x_i jednaka 1 ili 3, kažemo da je ta komponenta **neparna komponenta** .

Riječ x čije su sve komponente x_i, $i = 1, \dots, n$, parne nazivamo **parnom riječju**.

Primjer 1.2. Neka je $C = \{0000, 0022, 0101, 0123, 0202, 0220, 0303, 0321, 1013, 1031, 1110, 1132, 1211, 1233, 1312, 1330, 2022, 2000, 2123, 2101, 2220, 2202, 2321, 2303, 3031, 3013, 3132, 3110, 3233, 3211, 3330, 3312\}$. C je $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 4.

Riječi $0000, 0022, 0202, 0220, 2022, 2000, 2220$ i 2202 su parne riječi $\mathbb{Z}_4$-koda C.

Definicija 1.11. Neka su C i C' $\mathbb{Z}_4$-kodovi duljine n. Kažemo da su C i C' **permutacijski ekvivalentni** ako postoji permutacijska matrica P reda n takva da je $C' = CP = \{cP \mid c \in C\}$. Kažemo da su C i C' **(monomijalno) ekvivalentni** ako postoji monomijalna matrica M reda n s nenula elementima ± 1 takva da je $C' = CM = \{cM \mid c \in C\}$.

Dva $\mathbb{Z}_4$-koda su ekvivalentna ako se jedan iz drugog može dobiti permutacijom komponenti i zamjenom elemenata 1 i 3 na nekim komponentama.

Primjer 1.3. Neka je $C' = \{0000, 0022, 1003, 1021, 2002, 2020, 3001, 3023, 0133, 0111, 1132, 1110, 2131, 2113, 3130, 3112, 0222, 0200, 1221, 1203, 2220, 2202, 3223, 3201, 0311, 0333, 1310, 1332, 2313, 2331, 3312, 3330\}$. C' je $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 4.

$\mathbb{Z}_4$-kod C iz primjera 1.2 i C' su ekvivalentni jer je $C' = CM$, za

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.12. **Grupa automorfizama** $\mathbb{Z}_4$-koda C, u oznaci $\mathrm{Aut}(C)$, je grupa svih monomijalnih matrica s nenula elementima ± 1 koje fiksiraju C skupovno.

Definicija 1.13. Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n. Neka su $x = x_1 \cdots x_n$ i $y = y_1 \cdots y_n$ riječi iz C. **Skalarni produkt** $\langle x, y \rangle$ tih dviju riječi x i y određen je sa:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Definicija 1.14. Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n. **Dualni kod** $\mathbb{Z}_4$-koda C je

$$C^{\perp} = \{y \in \mathbb{Z}_4^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in C\}.$$

Ako je $C \subseteq C^{\perp}$, kažemo da je C **samoortogonalan**. Ako je $C = C^{\perp}$, kažemo da je C **samodualan**.

Ako je C $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n, $C^{\perp}$ je $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n.

Primjer 1.4. $\mathbb{Z}_4$-kod C iz primjera 1.2 nije samoortogonalan jer je $\langle 0022, 0101 \rangle = 2$.

Aditivna Abelova grupa reda p^m, gdje je p prost broj, a $m \in \mathbb{N}$, je izomorfna direktnoj sumi m_1 cikličkih grupa reda p^{e_1},..., m_r cikličkih grupa reda p^{e_r}, gdje je $e_1 > \cdots > e_r \geq 1$ i $m_1, e_1, \ldots, m_r, e_r \in \mathbb{N}$ su jedinstveno određeni brojevi (vidi npr. [29], Teorem 8.2). Kažemo da je ta grupa **tipa** $(p^{e_1})^{m_1} \cdots (p^{e_r})^{m_r}$. Očito je $m = m_1 e_1 + \cdots + m_r e_r$.

Aditivna Abelova grupa $\mathbb{Z}_4^n$ je reda 2^{2n} i jednaka je direktnoj sumi n cikličkih podgrupa reda 2^2 :

$$\{x0\ldots0 \mid x \in \mathbb{Z}_4\} \oplus \{0x\ldots0 \mid x \in \mathbb{Z}_4\} \oplus \cdots \oplus \{0\ldots0x \mid x \in \mathbb{Z}_4\}.$$

Dakle, grupa $\mathbb{Z}_4^n$ je tipa $(2^2)^n$.

Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n. Kako je C podgrupa od $\mathbb{Z}_4^n$, C je reda 2^m, za neki $m \in \mathbb{N}_0, m \leq 2n$. Ako je $m \geq 1$, grupa C je tipa 2^m, $(2^2)^{m_1}$, za neki $m_1 \in \mathbb{N}, m = 2m_1$ ili $(2^2)^{m_1} 2^{m_2}$, za neke $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m = 2m_1 + m_2$.

Dakle, $\mathbb{Z}_4$-kod C duljine n se sastoji od $4^{k_1} 2^{k_2}$ riječi za jedinstveno određene brojeve $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0, 2k_1 + k_2 \leq 2n$. Kažemo da je C **tipa** $4^{k_1} 2^{k_2}$. Ako je netrivijalan, C sadrži skup riječi $\{c_1, \ldots, c_{k_1}, c_{k_1+1}, \ldots, c_{k_1+k_2}\}$ takav da svaku riječ iz C možemo na jedinstveni način izraziti u obliku

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_i c_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} a_i c_i,$$

pri čemu za $1 \leq i \leq k_1$ riječ c_i ima barem jednu neparnu komponentu i $a_i \in \mathbb{Z}_4$, dok je za $k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2$ riječ c_i parna riječ i $a_i \in \mathbb{Z}_2$.

Matricu G s retcima c_i, $1 \leq i \leq k_1 + k_2$ zovemo **generirajućom matricom** $\mathbb{Z}_4$-koda C.

Primjer 1.5. Svaka riječ iz C iz primjera 1.2 se može na jedinstven način zapisati u obliku

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3,$$

gdje je $c_1 = 1013, c_2 = 0101, c_3 = 0022, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_4, a_3 \in \mathbb{Z}_2$.
Matrica

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

je generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$-koda C. C je tipa $4^2 2^1$.

Definicija 1.15. Kažemo da je generirajuća matrica G $\mathbb{Z}_4$-koda C u **standardnoj formi** ako je

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \end{bmatrix},$$

pri čemu je I_{k_i} jedinična matrica reda k_i za $i = 1, 2$, matrice A, B_1, B_2 i D su matrice s elementima iz $\mathbb{Z}_2$, a O je nulmatrica reda $k_2 \times k_1$.

Generirajuća matrica G iz primjera 1.5 je u standardnoj formi.

Vrijedi sljedeći teorem (vidi [44], propozicija 1.1).

Teorem 1.3. *Svaki netrivijalni $\mathbb{Z}_4$-kod je permutacijski ekvivalentan $\mathbb{Z}_4$-kodu čija je generirajuća matrica u standardnoj formi.*

Također, vrijedi (vidi [44], propozicija 1.2) da $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ ima dualni kod tipa $4^{n-k_1-k_2}2^{k_2}$. Iz te činjenice slijedi da se samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n sastoji od 2^n riječi.

Definicija 1.16. Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n. **Rezidualni kod** koda C je binarni kod

$$C^{(1)} = \{c \pmod 2 \mid c \in C\}.$$

Torzijski kod koda C je binarni kod

$$C^{(2)} = \{c \in \mathbb{Z}_2^n \mid 2c \in C\}.$$

Primjer 1.6. Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod iz primjera 1.2. Tada je

$$C^{(1)} = \{0000, 0101, 1011, 1110\},$$

$$C^{(2)} = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1000, 1011, 1101, 1110\}.$$

Ako $\mathbb{Z}_4$-kod C ima generirajuću matricu G u standardnoj formi, binarni kodovi $C^{(1)}$ i $C^{(2)}$ imaju generirajuće matrice:

$$G_{C^{(1)}} = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 \end{bmatrix}, \; G_{C^{(2)}} = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 \\ O & I_{k_2} & D \end{bmatrix}.$$

Vrijedi: $C^{(1)} \subseteq C^{(2)}$.

Napomena 1.1. Ekvivalentni $\mathbb{Z}_4$-kodovi imaju ekvivalentne rezidualne i torzijske kodove.

Sljedeća tvrdnja se može pronaći u [26].

Teorem 1.4. *Ako je C samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod, tada je $C^{(1)}$ dvostruko paran i vrijedi*

$$C^{(1)} = C^{(2)\perp}.$$

Posljedica prethodnog teorema je sljedeći korolar čiji se dokaz može pronaći u [26].

Korolar 1.1. *Neka je C samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod s generirajućom matricom u standardnoj formi. Tada C ima generirajuću matricu oblika:*

$$G' = \begin{bmatrix} F & I_k + 2B \\ 2H & O \end{bmatrix},$$

gdje su B, F i H matrice s elementima iz $\mathbb{Z}_2$, a generirajuće matrice kodova $C^{(1)}$ i $C^{(2)}$ su

$$G'_{C^{(1)}} = \begin{bmatrix} F & I_k \end{bmatrix}, \; G'_{C^{(2)}} = \begin{bmatrix} F & I_k \\ H & O \end{bmatrix}.$$

Definicija 1.17. Neka je $x \in \mathbb{Z}_4^n$. Označimo s $n_i(x)$ broj komponenti od x jednakih i za $i \in \mathbb{Z}_4$. Tada je

1. **Hammingova težina** riječi x broj $wt_H(x) = n_1(x) + n_2(x) + n_3(x)$,
2. **Leejeva težina** riječi x broj $wt_L(x) = n_1(x) + 2n_2(x) + n_3(x)$,
3. **euklidska težina** riječi x broj $wt_E(x) = n_1(x) + 4n_2(x) + n_3(x)$.

Definicija 1.18. Minimalna Hammingova težina d_H $\mathbb{Z}_4$-koda C je najmanja Hammingova težina među Hammingovim težinama svih nenula riječi iz C.

Minimalna Leejeva težina d_L $\mathbb{Z}_4$-koda C je najmanja Leejeva težina među Leejevim težinama svih nenula riječi iz C.

Minimalna euklidska težina d_E $\mathbb{Z}_4$-koda C je najmanja euklidska težina među euklidskim težinama svih nenula riječi iz C.

Sljedeći teoremi se mogu pronaći u [26].

Teorem 1.5. *Neka je C samoortogonalan $\mathbb{Z}_4$-kod i $c \in C$. Tada je:*

(i) $wt_L(c)$ *djeljiva sa* 2,

(ii) $wt_E(c)$ *djeljiva sa* 4.

Teorem 1.6. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod.*

(i) Neka je C samoortogonalan s generirajućom matricom G takvom da svaki redak od G ima euklidsku težinu djeljivu sa 8*. Tada sve riječi iz C imaju euklidsku težinu djeljivu sa* 8.

(ii) Neka sve riječi iz C imaju euklidsku težinu djeljivu sa 8*. Tada je C samoortogonalan $\mathbb{Z}_4$-kod.*

Uočimo da je teorem 1.6 sličan teoremu 1.1 za binarne kodove.

Definicija 1.19. Neka je C samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod. Kažemo da je C **tipa II** ako je euklidska težina svake riječi iz C djeljiva sa 8. U suprotnom, kažemo da je C **tipa I**.

Primjer 1.7. Oktakod o_8 je $\mathbb{Z}_4$-kod s generirajućom matricom

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $HH^T = O \pmod 4$, gdje je O nulmatrica reda 4, pa je o_8 samodualan $\mathbb{Z}_4$-kod. Budući da retci od H imaju euklidske težine djeljive sa 8, po teoremu 1.6, o_8 je $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.

Sljedeća tvrdnja se može pronaći u [26].

Teorem 1.7. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II i duljine n. Tada vrijedi:*

(i) $C^{(2)}$ *je paran,*

(ii) $C^{(1)}$ *sadrži riječ sa svim komponentama* 1,

(iii) C sadrži riječ sa svim neparnim komponentama,

(iv) n je djeljiv sa 8.

Vrijedi sljedeći teorem iz [23]:

Teorem 1.8. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n. Za minimalnu euklidsku težinu d_E $\mathbb{Z}_4$-koda C vrijedi* $d_E \leq 8 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 8$.

Definicija 1.20. $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n kojem je $d_E = 8\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 8$ zovemo **ekstremalnim**.

Koristit ćemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.1 ([18], lema 2)**.** *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n. Tada njegov torzijski kod $C^{(2)}$ ima minimalnu težinu veću ili jednaku od $2\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2$.*

1.3 Rešetke

U ovom potpoglavlju navodimo osnovne pojmove o rešetkama i njihovu vezu sa $\mathbb{Z}_4$-kodovima - konstrukciju poznatu pod nazivom **konstrukcija** A_4.

Definicija 1.21. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza od $\mathbb{R}^n$. **Rešetka** Λ je skup

$$\Lambda = \{z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \mid z_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Ako je $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,n}),\ i = 1, \ldots, n$, kažemo da je matrica

$$M = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n} \end{bmatrix}$$

generirajuća matrica od Λ.

Definicija 1.22. Neka je $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ rešetka. Ako je $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$, za sve $x, y \in \Lambda$, gdje je $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,\ x = (x_1 \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$, kažemo da je Λ **cjelobrojna** (**integralna**) rešetka.
Kažemo da je cjelobrojna rešetka Λ **parna** ako je $\langle x, x \rangle$ paran broj za sve $x \in \Lambda$.

Definicija 1.23. Za rešetku $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo **dualnu rešetku** Λ^* :

$$\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \text{ za sve } x \in \Lambda\}.$$

Kažemo da je cjelobrojna rešetka Λ **unimodularna** ako je $\Lambda = \Lambda^*$.

Prema [34], parne unimodularne rešetke u $\mathbb{R}^n$ postoje samo za $n \equiv 0 \pmod 8$.

Definicija 1.24. **Minimalna norma** μ rešetke Λ je broj

$$\mu = \min\{\langle x, x \rangle \mid x \in \Lambda, x \neq (0, \ldots, 0)\}.$$

Priljubljujući broj rešetke Λ je broj elemenata od Λ minimalne norme μ.

Poznato je da za minimalnu normu μ parne unimodularne rešetke $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ vrijedi $\mu \leq 2\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2$ (vidi [34]).

Definicija 1.25. Parnu unimodularnu rešetku $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ kojoj je $\mu = 2\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2$ zovemo **ekstremalnom**.

Broj poznatih ekstremalnih parnih unimodularnih rešetki u $\mathbb{R}^n$ je dan u tablici 1.1 (vidi [34] i [33]).

Tablica 1.1: Broj poznatih ekstremalnih parnih unimodularnih rešetki u $\mathbb{R}^n$

n	8	16	24	32	40	48	72	80	$\geq 163\,264$
broj poznatih ekstremalnih rešetki	1	2	1	10^7	10^{51}	4	1	4	0

Za $\mathbb{Z}_4$-kod C duljine n definiramo:

$$\Lambda_4(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 2x \pmod 4 \in C\}.$$

Ova konstrukcija se zove **konstrukcija** A_4.

Neka je

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \end{bmatrix}$$

generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$-koda C duljine n u standardnoj formi. Označimo s G_i i-ti redak matrice G, gdje je $i = 1, \ldots, k_1 + k_2$.

Neka je $x \in \Lambda_4(C)$ proizvoljan. Tada je $2x \pmod 4 \in C$ pa je

$$2x \pmod 4 = \sum_{i=1}^{k_1+k_2} a_i G_i,$$

gdje je $a_i \in \mathbb{Z}_4$. Označimo s e_i vektor iz $\mathbb{R}^n$ koji na i-toj komponenti ima 1, a na ostalim komponentama 0, za $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} a_i' G_i + \frac{1}{2} \sum_{i=k_1+k_2+1}^{n} 4b_i e_i,$$

gdje je $a_i' \equiv a_i \pmod 4, b_i \in \mathbb{Z}$.

Stavimo $v_i = \frac{1}{2} G_i$, za $i = 1, \ldots, k_1 + k_2$ i $v_i = \frac{1}{2} 4e_i$, za $i = k_1 + k_2 + 1, \ldots, n$. Budući da je skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza za $\mathbb{R}^n$, $\Lambda_4(C)$ je rešetka s generirajućom matricom

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \\ O & O & 4I_{n-k_1-k_2} \end{bmatrix}.$$

Sljedeći teorem je dokazan u [26].

Teorem 1.9. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod. Tada je $\Lambda_4(C)$ parna unimodularna rešetka ako i samo ako je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.*

Napomena 1.2. Prema [23], ako je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n \leq 40$, tada je $\Lambda_4(C)$ ekstremalna parna unimodularna rešetka.

Sljedeću tvrdnju iz [18] ćemo koristiti za ispitivanje ekstremalnosti $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 i 64.

Teorem 1.10. *C je ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine* 56 (*odnosno* 64) *ako i samo ako* $\Lambda_4(C)$ *ima minimalnu normu* 4 *i priljubljujući broj* 112 (*odnosno* 128).

1.4 Dizajni

U nastavku definiramo dizajne te navodimo neke činjenice koje će nam biti potrebne. U poglavlju 5 ćemo iz nekih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II konstruirati dizajne i razmotriti neka njihova svojstva.

Definicija 1.26. t-(v, k, λ) **dizajn** je konačna incidencijska struktura $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{B}$ međusobno disjunktni skupovi, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$, pri čemu vrijede sljedeća svojstva:

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa $\mathcal{B}$ je incidentan s točno k elemenata skupa $\mathcal{P}$,
3. svakih t međusobno različitih elemenata skupa $\mathcal{P}$ je incidentno s točno λ elemenata skupa $\mathcal{B}$.

Elemente skupa $\mathcal{P}$ zovemo **točkama**, a elemente skupa $\mathcal{B}$ zovemo **blokovima**. Ako je $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}| = v$ i $2 \leq k \leq v - 2$, tada kažemo da je 2-(v, k, λ) dizajn **simetričan**.

Definicija 1.27. Kažemo da su dizajni $(\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ i $(\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ **izomorfni** ako postoji bijekcija $f : \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{B}_1 \to \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{B}_2$ takva da

1. f preslikava $\mathcal{P}_1$ na $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{B}_1$ na $\mathcal{B}_2$,

2. $(p,B) \in \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow (f(p), f(B)) \in \mathcal{I}_2,\ p \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{B}_1$.

Definicija 1.28. Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ t-(v,k,λ) dizajn i $|\mathcal{B}| = b$. **Matrica incidencije** dizajna $\mathcal{D}$ je $b \times v$ matrica $M = [m_{B,p}]$ čiji retci su indeksirani blokovima $B \in \mathcal{B}$, stupci su indeksirani točkama $p \in \mathcal{P}$, pri čemu je

$$m_{B,p} = \begin{cases} 1, & (p,B) \in \mathcal{I} \\ 0, & (p,B) \notin \mathcal{I} \end{cases}.$$

Primjer 1.8. Neka je

$$\mathcal{P} = \{1,2,3,4,5,6,7\},$$

$$\mathcal{B} = \{\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,7\},\{1,5,6\},\{2,6,7\},\{1,3,7\}\},$$

$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$, gdje je $(p,B) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow p \in B$, za sve $p \in \mathcal{P}$ i $B \in \mathcal{B}$.

Tada je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetrični 2-$(7,3,1)$ dizajn s matricom incidencije

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sljedeći je teorem dokazan u [39].

Teorem 1.11. *U 2-(v,k,λ) dizajnu je svaka točka incidentna s točno*

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

blokova.

Poznato je da vrijedi sljedeća tvrdnja (vidi npr. [1]).

Propozicija 1.2. *Ako je $s < t$, tada je svaki t-(v,k,λ) dizajn ujedno i s-(v,k,λ_s) dizajn, gdje je*

$$\lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}.$$

1.4.1 Hadamardove matrice i dizajni

U ovom potpoglavlju definiramo Hadamardove matrice i njima pridružene binarne kodove.

Definicija 1.29. **Hadamardova matrica** reda n je $n \times n$ matrica $H = [h_{i,j}]$, $h_{i,j} \in \{-1, 1\}$ za koju vrijedi $HH^T = nI_n$, gdje je I_n jedinična matrica reda n. Kažemo da su dvije Hadamardove matrice **ekvivalentne** ako možemo dobiti jednu iz druge nizom permutacija i negacija redaka i stupaca. Hadamardovu matricu čiji su svi elementi u prvom retku i prvom stupcu 1 zovemo **normaliziranom** Hadamardovom matricom.

Napomena 1.3. Svaka Hadamardova matrica je ekvivalentna nekoj normaliziranoj Hadamardovoj matrici.

Primjer 1.9. $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ je normalizirana Hadamardova matrica reda 1.
$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je normalizirana Hadamardova matrica reda 2.

Sljedeće tvrdnje su dokazane u [39].

Teorem 1.12. *Ako postoji Hadamardova matrica reda $n > 2$, tada je n djeljiv sa* 4.

Teorem 1.13. *Hadamardova matrica reda n postoji ako i samo ako postoji simetrični* 2-$(n-1, \frac{1}{2}n - 1, \frac{1}{4}n - 1)$ *dizajn.*

Definicija 1.30. Simetrične dizajne s parametrima 2-$(n-1, \frac{1}{2}n-1, \frac{1}{4}n-1)$ zovemo **Hadamardovim dizajnima**.

Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ Hadamardov $(n-1, \frac{1}{2}n-1, \frac{1}{4}n-1)$ dizajn i $\infty \notin \mathcal{P}$. Konstruiramo novi dizajn $\mathcal{D}^*$ sa skupom točaka $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ i blokovima definiranim na sljedeći način: svim blokovima iz $\mathcal{B}$ dodamo ∞ te uzmemo komplemente (u $\mathcal{P}$) blokova iz $\mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{D}^*$ 3-$(n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}n-1)$ dizajn.

Definicija 1.31. 3−dizajne s parametrima $(n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}n-1)$ zovemo **Hadamardovim 3-dizajnima**.

Definicija 1.32. Neka je H Hadamardova matrica. **Binarni kod pridružen** H, u oznaci $C_2(H)$, je binarni kod generiran retcima matrice incidencije 3-dizajna $\mathcal{D}^*$ dobivenog iz H.

Sljedeći teorem je dokazan u [2].

Teorem 1.14. *Za svaku klasu ekvivalencije Hadamardovih matrica postoji jedinstven (do na ekvivalenciju) pridruženi binarni kod.*

Primjer 1.10. Neka je

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

H je normalizirana Hadamardova matrica reda 8. Tada je

$$M^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica incidencije 3-dizajna $\mathcal{D}^*$ dobivenog iz H. $C_2(H)$ je prošireni Hammingov $[8, 4, 4]$ kod.

1.5 Grafovi

Navest ćemo nekoliko osnovnih pojmova o grafovima.

Definicija 1.33. **Graf** G je uređena trojka $(V(G), E(G), \Psi_G)$, gdje je $V(G)$ skup **vrhova** od G, $E(G)$ (skup disjunktan s $V(G)$) skup **bridova** od G, a Ψ_G **funkcija incidencije** koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od G. Ako su vrhovi $u, v \in V(G)$ incidentni s bridom $e \in E(G)$, kažemo da su u i v **susjedni** vrhovi.

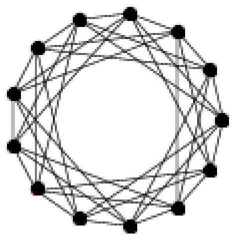
Definicija 1.34. Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se **petlja**. Graf bez petlji u kojemu su svaka dva vrha incidentna najviše s jednim bridom naziva se **jednostavnim** grafom.

Definicija 1.35. **Stupanj** vrha $v \in V(G)$, u oznaci $d_G(v)$, je broj bridova od G incidentnih s v, pri čemu svaku petlju brojimo dva puta. Ako je $d_G(v) = k$, za svaki $v \in V(G)$, kažemo da je graf G k-regularan.

Definicija 1.36. Graf G s n vrhova je **jako regularan** graf s parametrima (n, k, λ, μ) ako vrijedi:

1. G je jednostavan k-regularan graf,
2. svaka dva susjedna vrha imaju točno λ zajedničkih susjednih vrhova,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju točno μ zajedničkih susjednih vrhova.

Primjer 1.11. Graf prikazan na sljedećoj slici poznat je pod nazivom Paleyev graf reda 13, u oznaci $P(13)$. To je jako regularan graf s parametrima $(13, 6, 2, 3)$.



Slika 1.1: Jako regularan graf s parametrima $(13, 6, 2, 3)$

Definicija 1.37. Neka su $v_1, \ldots, v_t$ međusobno različiti vrhovi grafa G. Kažemo da je $P = (v_1, \ldots, v_t)$ **put** duljine $t - 1$ od v_1 do v_t u grafu G ako su vrhovi v_i i v_{i+1} susjedni za sve $i = 1, \ldots, t - 1$.

Graf G je **povezan** za svaka dva njegova vrha u i v postoji put od u do v u G.

Udaljenost između vrhova u i v u grafu G, u oznaci $d(u, v)$, je duljina najkraćeg puta od u do v u G.

Dijametar grafa G je broj $D = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$.

Definicija 1.38. Neka je G jednostavan i povezan graf dijametra D. G je **distancijsko regularan** ako za sve $i = 0, \ldots, D$ postoje konstante c_i, a_i, b_i takve da za sve $u, v \in V(G)$ za koje je $i = d(u, v)$, među susjednim vrhovima od v, c_i ih je na udaljenosti $i - 1$, a_i na udaljenosti i i b_i na udaljenosti $i + 1$ od u.

Svaki distancijsko regularan graf je b_0-regularan.

Primjer 1.12. Jednostavan graf s n vrhova u kojem su svaka dva vrha susjedna naziva se **potpunim grafom** i označava s K_n.

K_n je $(n-1)$-regularan graf.

Ako je $n \geq 2$, graf K_n je distancijsko regularan dijametra $D = 1$ s konstantama $c_0 = 0, a_0 = 0, b_0 = n-1, c_1 = 1, a_1 = n-2, b_1 = 0$.

Napomena 1.4. Graf G je distancijsko regularan dijametra $D = 2$ ako i samo ako je G povezan jako regularan graf.

Naime, ako je G distancijsko regularan dijametra $D = 2$ s n vrhova, onda je G povezan jako regularan graf s parametrima (n, b_0, a_1, c_2).

Ako je G povezan jako regularan graf s parametrima (n, k, λ, μ), G je jednostavan i povezan graf dijametra $D = 2$, $c_0 = 0, a_0 = 0, b_0 = k, c_1 = 1, a_1 = \lambda, b_1 = k - 1 - \lambda, c_2 = \mu, a_2 = k - \mu, b_2 = 0$, pa je G je distancijsko regularan dijametra $D = 2$.

Poglavlje 2

$\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II

$\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II čine klasu samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova povezanu s parnim unimodularnim rešetkama (teorem 1.9), zbog čega se posebno proučavaju (vidi npr. [4]). U ovom ćemo poglavlju upoznati neke njihove konstrukcije i svojstva.

2.1 Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II

Klasifikacija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II je gotova za duljine 8, 16 i 24. Poznat je velik broj ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 32 i 40 te svega nekoliko ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 48, 56 i 64. Pitanje o postojanju ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II većih duljina je otvoreno.

U ovom poglavlju navodimo do sada poznate rezultate vezane za ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II. Također, uvodimo oznake za ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II koje ćemo koristiti u ostatku rada.

Duljine $n = 8, 16, 24$

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljina 8, 16 i 24 su klasificirani pa nisu predmet našeg interesa. Radi potpunosti navodimo rezultate u nastavku.

Svaki $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 8 ili 16 je ekstremalan. Klasifikacija $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 8 je dana u [10]. Postoje točno četiri međusobno neekvivalentna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 8.

Klasifikacija $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 16 je dana u [35]. Postoje točno 133 međusobno neekvivalentna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 16.

Rowena Betty i Akihiro Munemasa su 2014. klasificirali ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 24 ([31]).

Kažemo da je binarni kod **dopustiv** ako je dvostruko paran i sadrži riječ sa svim komponentama 1. Broj međusobno neekvivalentnih dopustivih binarnih kodova C_1 duljine 24 takvih da je minimalna težina od $C_1^\perp$ najmanje 4 nalazi se u tablici 2.1.

Kažemo da je binarni kod C_1 **izvediv** ako je C_1 rezidualni kod ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II. Broj ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 24 s rezidualnim kodom C_1 prikazan je u tablici 2.2.

Tablica 2.1: Broj međusobno neekvivalentnih dopustivih binarnih kodova C_1 duljine 24 takvih da je minimalna težina od $C_1^\perp$ najmanje 4

Dimenzija	Ukupno	Izvedivi	Neizvedivi
12	9	9	0
11	21	21	0
10	49	47	2
9	60	46	14
8	32	20	12
7	7	5	2
6	1	1	0

Tablica 2.2: Broj ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 24 s rezidualnim kodom C_1

$\dim C_1$	6	7	8	9	10	11	12
broj kodova C_1	1	5	20	46	47	21	9
broj	1	5	29	171	755	1880	1903

Duljine $n = 32, 40$

Sljedeće tvrdnje su dokazane u [21].

Propozicija 2.1. *Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 s rezidualnim kodom dimenzije k postoji ako i samo ako je $k \in \{6, 7, \ldots, 16\}$.*

Propozicija 2.2. *Svaki binarni dvostruko parni samodualni kod duljine* 32 *je izvediv.*

Prema [21], postoji najmanje 146 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32.

U [21] je dokazana sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3. *Postoji jedinstveni ekstremalni* $\mathbb{Z}_4$*-kod tipa II duljine* 32 *s rezidualnim kodom dimenzije* 6, *do na ekvivalenciju.*

Napomena 2.1. Neka je $i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^i 2^{32-2i}$ duljine 32 u oznaci $C_{32,i}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Prema [21], $C_{32,i}$ je jedini poznat ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^i 2^{32-2i}$ duljine 32 za $i \in \{7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$. Osim $C_{32,11}$, poznata su još dva ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{11}2^{10}$ duljine 32, do na ekvivalenciju, u oznaci $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ ([36]). Rezidualni kodovi kodova $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ imaju minimalnu težinu 12.

U [8] je konstruirano 219 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{13}2^6$ duljine 32, 205 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{14}2^4$ duljine 32 i 355 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{15}2^2$ duljine 32.

Iz navedenog slijedi da postoji najmanje 925 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32, kako je prikazano u tablici 2.3.

Tablica 2.3: Broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32

tip	$4^6 2^{20}$	$4^7 2^{18}$	$4^8 2^{16}$	$4^9 2^{14}$	$4^{10} 2^{12}$	$4^{11} 2^{10}$	$4^{12} 2^8$	$4^{13} 2^6$	$4^{14} 2^4$	$4^{15} 2^2$	4^{16}
broj	1	1	1	1	1	3	1	220	206	356	134

Sljedeća propozicija je dokazana u [21].

Propozicija 2.4. *Ekstremalni* $\mathbb{Z}_4$*-kod tipa II duljine* 40 *s rezidualnim kodom dimenzije* k *postoji ako i samo ako je* $k \in \{7, 8, \ldots, 20\}$.

Sljedeća propozicija se može pronaći u [17].

Propozicija 2.5. *Svaki binarni dvostruko parni samodualni kod duljine* 40 *je izvediv.*

Prema [17], postoji najmanje 94356 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40.

Napomena 2.2. Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^7 2^{26}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,7}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 16. Neka je $i \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$. Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^i 2^{40-2i}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,i}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Prema [21], $C_{40,i}$ je jedini poznat ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^i 2^{40-2i}$ duljine 40 za $i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$. Osim $C_{40,13}$, poznat je još jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{13} 2^{14}$ duljine 40, do na ekvivalenciju ([36]). Rezidualni kod tog koda ima minimalnu težinu 12.

U [8] je konstruirano 133 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{17} 2^6$ duljine 40, 501 međusobno neekvivalentan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{18} 2^4$ duljine 40 i 431 međusobno neekvivalentan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{19} 2^2$ duljine 40.

Iz navedenog slijedi da postoje najmanje 95422 međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 40, kako je prikazano u tablici 2.4.

Tablica 2.4: Broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40

tip	$4^7 2^{26}$	$4^8 2^{24}$	$4^9 2^{22}$	$4^{10} 2^{20}$	$4^{11} 2^{18}$	$4^{12} 2^{16}$	$4^{13} 2^{14}$
broj	1	1	1	1	1	1	2
tip	$4^{14} 2^{12}$	$4^{15} 2^{10}$	$4^{16} 2^8$	$4^{17} 2^6$	$4^{18} 2^4$	$4^{19} 2^2$	4^{20}
broj	1	1	1	134	502	432	94343

Duljine $n = 48, 56, 64$

Poznata su dva međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 48 ([5], [22]) u oznakama $C^{(4)}_{48p}$ iz [22] i $\mathcal{D}_{48}$ iz [20]. Oba koda su tipa 4^{24}.

Poznata su dva međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 56 i tipa 4^{28} u oznakama $\mathcal{C}_{56}$ i $\mathcal{D}_{56,1}$ ([20]). Do na ekvivalenciju, poznat je jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 56 i tipa $4^{14} 2^{28}$ ([18]). Ovaj $\mathbb{Z}_4$-kod ćemo označavati s C^{14}_{56}.

Do na ekvivalenciju, poznat je jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64 i tipa $4^{16} 2^{32}$ ([18]). Ovaj $\mathbb{Z}_4$-kod ćemo označavati s C^{16}_{64}.

Iz navedenog slijedi da postoje najmanje dva međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 48, najmanje tri međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 56 i najmanje jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64, do na ekvivalenciju, kako je prikazano u tablici 2.5.

Tablica 2.5: Poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 48, 56 i 64

oznaka	duljina	tip
$C_{48p}^{(4)}$	48	4^{24}
$\mathcal{D}_{48}$	48	4^{24}
$\mathcal{C}_{56}$	56	4^{28}
$\mathcal{D}_{56,1}$	56	4^{28}
C_{56}^{14}	56	$4^{14}2^{28}$
C_{64}^{16}	64	$4^{16}2^{32}$

Sljedeće tvrdnje su dokazane u [18].

Propozicija 2.6. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine* 56. *Tada je dimenzija rezidualnog koda $C^{(1)}$ najmanje* 12.

Propozicija 2.7. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine* 64. *Tada je dimenzija rezidualnog koda $C^{(1)}$ najmanje* 13.

Napomena 2.3. Pitanje o postojanju ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine n, gdje je $n \geq 72$ je otvoreno.

2.2 Konstrukcija $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz binarnih kodova

U nastavku navodimo dvije konstrukcije koje se mogu pronaći u [26]. Prva konstrukcija je konstrukcija samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova iz binarnog dvostruko parnog koda. Ova konstrukcija je korištena u [3] za dobivanje novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32. Druga konstrukcija je konstrukcija $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz binarnog dvostruko parnog koda duljine djeljive sa 8 koji sadrži riječ sa svim komponentama 1. Ovu konstrukciju ćemo koristiti pri pokušaju dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 56 i 64.

Konstrukcija 1

- Neka je $G_1 = \begin{bmatrix} F & I_k \end{bmatrix}$ generirajuća matrica binarnog dvostruko parnog $[n, k]$ koda C_1. Prema teoremu 1.1, C_1 je samoortogonalan kod. Proširimo G_1 do generirajuće matrice G_2 koda $C_1^{\perp}$. Tada je $G_2 = \begin{bmatrix} F & I_k \\ H & O \end{bmatrix}$, gdje je H generirajuća matrica dualnog koda binarnog koda s generirajućom matricom F.

- Sada tražimo generirajuću matricu G samodualnog $\mathbb{Z}_4$-koda duljine n oblika

$$G = \left[\begin{array}{cc} F & I_k + 2B \\ 2H & O \end{array} \right],$$

pri čemu matricu B s elementima iz $\mathbb{Z}_2$ trebamo odrediti tako da retci od G budu međusobno ortogonalni. Budući da je dimenzija koda $C_1^{\perp}$ jednaka $n-k$, $\mathbb{Z}_4$-kod s generirajućom matricom G će sadržavati $4^k 2^{n-2k} = 2^n$ riječi pa će biti samodualan.

- Bez obzira na izbor matrice B skalarni produkt dva od donjih $n-2k$ redaka, jednog od gornjih k s jednim od donjih $n-2k$ redaka te jednog od gornjih k redaka matrice G sa samim sobom je 0. Neka je $B = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq k$. Izaberimo elemente $b_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq k$. Skalarni produkt $i-$tog i $j-$tog redaka , $1 \leq i < j \leq k$, u matrici G je jednak $\langle f_i, f_j \rangle + 2(b_{ij} + b_{ji})$, gdje je f_i $i-$ti, a f_j $j-$ti redak u matrici F. Budući da je C_1 samoortogonalan kod, vrijednosti b_{ji} su jedinstveno određene.

Prema svemu navedenom, vrijedi sljedeći teorem čiji dokaz se može pronaći u [26].

Teorem 2.1. *Za $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ postoji $\nu_{n,k} 2^{\frac{k(k+1)}{2}}$ samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova duljine n i tipa $4^k 2^{n-2k}$, gdje je $\nu_{n,k}$ broj binarnih dvostruko parnih $[n, k]$ kodova. Ukupan broj samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova duljine n je*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \nu_{n,k} 2^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Primjer 2.1. Matrica

$$G_1 = \left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

je generirajuća matrica binarnog dvostruko parnog $[8, 2]$ koda C_1. Proširimo G_1 do generirajuće matrice G_2 koda $C_1^{\perp}$. Tada je

$$G_2 = \left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Prethodnom konstrukcijom dolazimo do 2^3 generirajućih matrica za samodualne $\mathbb{Z}_4$-

kodove tipa $4^2 2^4$:

$$\left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \pm 1 \\ \hdashline 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ \hdashline 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Konstrukcija 2

- Neka je n djeljiv sa 8. Neka je $G_1 = \begin{bmatrix} F & \tilde{I}_k \end{bmatrix}$ generirajuća matrica dopustivog $[n,k]$ koda C_1, gdje je

$$\tilde{I}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

  Proširimo G_1 do generirajuće matrice G_2 koda $C_1^{\perp}$. Tada je $G_2 = \begin{bmatrix} F & \tilde{I}_k \\ H & O \end{bmatrix}$.

- Sada tražimo generirajuću matricu G $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II i duljine n oblika

$$G = \begin{bmatrix} F & \tilde{I}_k + 2B \\ 2H & O \end{bmatrix},$$

  pri čemu matricu B s elementima iz $\mathbb{Z}_2$ trebamo odrediti tako da retci od G budu međusobno ortogonalni i da euklidska težina svih redaka od G bude djeljiva sa 8. Tada će po teoremu 1.6 $\mathbb{Z}_4$-kod s generirajućom matricom G biti tipa II.

- Bez obzira na izbor matrice B skalarni produkt dva od donjih $n-2k$ redaka, jednog od gornjih k s jednim od donjih $n-2k$ redaka te jednog od gornjih k redaka matrice

G sa samim sobom je 0. Budući da C_1 sadrži riječ sa svim komponentama 1, svaki redak matrice H ima paran broj jedinica pa svaki od donjih $n-2k$ redaka od G ima euklidsku težinu djeljivu sa 8. Neka je $B = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq k$. Izaberimo b_{11} i elemente u $i-$tom retku, gdje je $2 \leq i \leq k$, na ili iznad dijagonale u matrici B proizvoljno. Ako su svi elementi u $i-$tom retku od B fiksni, euklidska težina $i-$tog retka od G je ili djeljiva sa 8 ili daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8 pa je izbor elementa b_{i1} jednoznačan. Preostali elementi u B su jednoznačno određeni zahtjevom da su retci u G međusobno ortogonalni.

Prema svemu navedenom, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.2. *Neka je n djeljiv sa 8. Za $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ postoji $\mu_{n,k} 2^{1+\frac{k(k-1)}{2}}$ $\mathbb{Z}_4$-kodova duljine n tipa $4^k 2^{n-2k}$ i tipa II, gdje je $\mu_{n,k}$ broj dopustivih $[n,k]$ kodova. Ukupan broj $\mathbb{Z}_4$-kodova duljine n tipa II je*

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{n,k} 2^{1+\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Primjer 2.2. Matrica

$$G_1 = \left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

je generirajuća matrica dopustivog $[8,2]$ koda C_1. Prethodnom konstrukcijom dolazimo do 2^2 generirajućih matrica za $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 8 tipa $4^2 2^4$:

$$\left[\begin{array}{cccccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & -y \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & y \\ \hdashline 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right], \ x = \pm 1, y = \pm 1.$$

U nastavku, pozicije na dijagonali matrice B ne smatramo slobodnima u konstrukciji. Promjenom nekog elementa na dijagonali matrice B dobivamo generirajuću matricu $\mathbb{Z}_4$-koda ekvivalentnog $\mathbb{Z}_4$-kodu s generirajućom matricom s polaznom matricom B, uz promjenu predznaka na odgovarajućoj komponenti.

Napomena 2.4. Neka je C_1 binarni paran kod duljine n. Neka je $\mathbf{1}$ riječ duljine n sa svim komponentama 1. Tada je $\langle x, \mathbf{1} \rangle = 0, \forall x \in C_1$ pa je $\mathbf{1} \in C_1^{\perp}$.

Dakle, svaki binarni dvostruko parni samodualni kod je dopustiv.

U nastavku konstruiramo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 iz pet binarnih dvostruko parnih samodualnih ekstremalnih kodova duljine 56, dobivenih iz Hadamardovih matrica reda 28 pomoću teorema 2.3 dokazanog u [43]. Ekstremalnost dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 ispitujemo pomoću kriterija iz teorema 1.10.

Teorem 2.3. *Neka je H Hadamardova matrica reda $n = 8t + 4$ takva da broj elemenata 1 u svakom retku daje ostatak tri pri dijeljenju sa četiri. Tada matrica $[I_n \;\; B]$, gdje je B binarna Hadamardova matrica pridružena H, generira samodualan dvostruko paran binarni kod duljine $2n$.*

Postoji točno 487 Hadamardovih matrica reda 28, do na ekvivalenciju ([28]).

U [28] je korištenjem teorema 2.3 pokazano da se iz Hadamardovih matrica reda 28 može dobiti točno pet međusobno neekvivalentnih binarnih dvostruko parnih $[56, 28, 12]$ kodova. Ovi binarni kodovi su ekstremalni. Označimo ih s $C_{1,56}, C_{2,56}, C_{3,56}, C_{4,56}$ i $C_{5,56}$.

Sljedeće matrice označimo redom s $H_{1,56}, H_{2,56}, H_{3,56}, H_{4,56}$ i $H_{5,56}$ ($-$ označava element -1):

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -
\end{array}\right],
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -
\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -
\end{bmatrix},
$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -
\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & -
\end{array}\right].$$

Kod $C_{i,56}$, gdje je $i = 1, \ldots, 5$, dobiven je iz Hadamardove matrice reda 28 $H_{i,56},\ i = 1, \ldots, 5$, pomoću teorema 2.3.

Rezidualni kod ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 56 u oznaci $\mathcal{C}_{56}$ iz tablice 2.5 ima grupu automorfizama reda 28. Rezidualni kod ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 56 u oznaci $\mathcal{D}_{56,1}$ iz tablice 2.5 ima grupu automorfizama reda 54.

Korištenjem Magme smo dobili da su redovi grupa automorfizama kodova $C_{1,56}, C_{2,56}$,

$C_{3,56}, C_{4,56}$ i $C_{5,56}$ redom $58968, 6, 6, 54$ i 9 te da su kodovi $C_{4,56}^{(1)}$ i $\mathcal{D}_{56,1}^{(1)}$ međusobno neekvivalentni.

Budući da su, po napomeni 2.4, kodovi $C_{1,56}, C_{2,56}, C_{3,56}, C_{4,56}$ i $C_{5,56}$ dopustivi, iz njih možemo konstruirati $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 koristeći prethodno navedenu konstrukciju 2. Minimalna težina koda $C_{i,56}^{\perp} = C_{i,56}$ je veća ili jednaka od 6, za $i = 1, \ldots, 5$, što je, po propoziciji 1.1, nužan uvjet da bi $C_{i,56}^{\perp}$ bio torzijski kod ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II. Dobijemo li iz $C_{i,56}, \ i = 1, \ldots, 5$ ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 56, on će biti neekvivalentan $\mathbb{Z}_4$-kodovima $\mathcal{C}_{56}$ i $\mathcal{D}_{56,1}$ zbog međusobne neekvivalentnosti pripadnih rezidualnih kodova. Dakle, u tom slučaju ćemo dobiti novi ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 56.

U konstrukciji 2, za svaki $C_{i,56}, \ i = 1, \ldots, 5$, matrica B reda 28 ima 351 slobodnu poziciju.

Označimo sa S_k $k-$člani podskup skupa $\{1, \ldots, 351\}$.

Navodimo dosadašnja pretraživanja i konstrukcije.

Pretražili smo sve podskupove S_k i konstruirali matricu B koja na slobodnoj poziciji $j = 1, \ldots, 351$ ima element 1 ako i samo ako je $j \in S_k$, za $k = 1, 350$.

Pretražili smo prvih 1000 podskupova S_2 i konstruirali matricu B koja na slobodnoj poziciji $j = 1, \ldots, 351$ ima element 1 ako i samo ako je $j \in S_2$.

Pretražili smo prvih 3600 podskupova S_{349} i konstruirali matricu B koja na slobodnoj poziciji $j = 1, \ldots, 351$ ima element 1 ako i samo ako je $j \in S_{349}$.

Pomoću kriterija iz teorema 1.10, dobili smo da niti jedan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa 4^{28} duljine 56 koji smo dobili iz $C_{1,56}, \ldots, C_{5,56}$ nije ekstremalan.

Slijedi opis još jedne primjene konstrukcije 2 gdje smo pokušali konstruirati nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64.

Matrica

$$
\begin{bmatrix}
1000000000000000000000000000000001111100100000001000000000000000 \\
0100000000000000000000000000000010111100010000000100000000000000 \\
0010000000000000000000000000000011010011001000000010000000000000 \\
0001000000000000000000000000000011100011000100000001000000000000 \\
0000100000000000000000000000000011000111000010000000100000000000 \\
0000010000000000000000000000000011001011000001000000010000000000 \\
0000001000000000000000000000000000111101000000100000001000000000 \\
0000000100000000000000000000000000111110000000010000000100000000 \\
0000000010000000000000000000000010000000011111000000000010000000 \\
0000000001000000000000000000000001000000101111000000000001000000 \\
0000000000100000000000000000000000100000110100110000000000100000 \\
0000000000010000000000000000000000010000111000110000000000010000 \\
0000000000001000000000000000000000001000110001110000000000001000 \\
0000000000000100000000000000000000000100110010110000000000000100 \\
0000000000000010000000000000000000000010001111010000000000000010 \\
0000000000000001000000000000000000000001001111100000000000000001 \\
0000000000000000100000000000000010000000000000000111110010000000 \\
0000000000000000010000000000000001000000000000001011110001000000 \\
0000000000000000001000000000000000100000000000001101001100100000 \\
0000000000000000000100000000000000010000000000001110001100010000 \\
0000000000000000000010000000000000001000000000001100011100001000 \\
0000000000000000000001000000000000000100000000001100101100000100 \\
0000000000000000000000100000000000000010000000000011110100000010 \\
0000000000000000000000010000000000000001000000000011111000000001 \\
0000000000000000000000001000000000000000100000001000000001111100 \\
0000000000000000000000000100000000000000010000000100000010111100 \\
0000000000000000000000000010000000000000001000000010000011010011 \\
0000000000000000000000000001000000000000000100000001000011100011 \\
0000000000000000000000000000100000000000000010000000100011000111 \\
0000000000000000000000000000010000000000000001000000010011001011 \\
0000000000000000000000000000001000000000000000100000001000111101 \\
0000000000000000000000000000000100000000000000010000000100111110
\end{bmatrix}
$$

je dobivena metodom opisanom u [12] za djelovanje grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na matricu susjedstva Hammingovog distancijsko regularnog grafa s 256 vrhova, pri čemu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ djeluje u 64 orbite duljine 4.

Navedena matrica je generirajuća matrica binarnog dvostruko parnog samodualnog $[64, 32, 8]$ koda kojeg ćemo označiti s $C_{1,64}$. Po napomeni 2.4, $C_{1,64}$ je dopustiv kod. Iz $C_{1,64}$ ćemo konstruirati $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 prethodno navedenom konstrukcijom 2. Minimalna težina od $C_{1,64}^{\perp} = C_{1,64}$ je veća ili jednaka od 6, što je, po propoziciji 1.1, nužan uvjet da bi $C_{1,64}^{\perp}$ bio torzijski kod ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II.

Ukoliko iz binarnog koda $C_{1,64}$ dobijemo ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II konstrukcijom 2, on će biti tipa 4^{32}, a budući da je jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64 iz tablice 2.5 tipa $4^{16}2^{32}$, dobit ćemo novi ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $G_1 = \begin{bmatrix} F & \tilde{I_{32}} \end{bmatrix}$ generirajuća matrica koda $C_{1,64}$, gdje je

$$
F = \begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0 \\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1 \\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0
\end{bmatrix}.
$$

Konstrukcijom možemo dobiti 2^{465} generirajućih matrica za $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II oblika

$$
\begin{bmatrix} F & \tilde{I_{32}} + 2B \end{bmatrix}.
$$

Matrica B ima 465 slobodnih pozicija.

Označimo sa S_i $i-$člani podskup skupa $\{1, \ldots, 465\}$.

Navodimo dosadašnja pretraživanja i konstrukcije.

Pretražili smo sve podskupove S_i i konstruirali matricu B koja na slobodnoj poziciji $j = 1, \ldots, 465$ ima element 1 ako i samo ako je $j \in S_i$, za $i = 1, 2, 464$.

Pretražili smo prvih 4500 podskupova S_{463} i konstruirali matricu B koja na slobodnoj poziciji $j = 1, \ldots, 465$ ima element 1 ako i samo ako je $j \in S_{463}$.

Korištenjem kriterija iz teorema 1.10, dobili smo da niti jedan konstruirani $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa 4^{32} duljine 64 nije ekstremalan.

Poglavlje 3

Konstrukcija novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz danog ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II

U ovom poglavlju navodimo tri metode iz [8] za konstrukciju novih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz danih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II: metodu udvostručavanja, generaliziranu Haradinu metodu i metodu nadogradnje. Za metodu udvostručavanja je u [8] dan algoritam koji garantira ekstremalnost rezultirajućih kodova u slučaju ekstremalnog polaznog koda za duljine 24, 32 i 40. S obzirom da smo uočili grešku u navedenom algoritmu, u ovom poglavlju donosimo korekciju algoritma.

U potpoglavljima 3.1.2 i 3.1.4 smo razvili algoritam za konstrukciju ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz polaznog ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II za duljine 48, 56 i 64.

3.1 Metoda udvostručavanja

Kin Hang Chan je u svojoj doktorskoj disertaciji ([8]) 2012. godine predstavio **metodu udvostručavanja** koju je koristio za nalaženje novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II:

Teorem 3.1. ***(Metoda udvostručavanja)*** *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n. Neka je $2u \in \mathbb{Z}_4^n$ parna riječ tako da $2u \notin C$ i $2u$ ima paran broj dvojki u svojim komponentama. Neka je $C_0 = \{v \in C \mid \langle 2u, v\rangle = 0\}$. Tada je $\widetilde{C} = C_0 \oplus \langle 2u\rangle$ $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.*

Prema [8] vrijedi sljedeće: ako je C u teoremu 3.1 tipa $4^{k_1}2^{k_2}$, izbor za $2u$ može biti ograničen na riječi koje na prvih $k_1 + k_2$ pozicija imaju sve elemente 0. Također, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.2. *Neka je G generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$-koda C tipa II duljine n i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ u standardnoj formi. Neka je $2u \in \mathbb{Z}_4^n \setminus C$ tako da su svi elementi na prvih $k_1 + k_2$*

pozicija od $2u$ nule i $wt_E(2u)$ djeljiva sa 8. Označimo s G_i $i-$ti redak matrice G. Neka je $B = \{G_1, \dots, G_{k_1+k_2}\}$. Sljedećim postupkom dolazimo do generirajuće matrice $\widetilde{G}$ $\mathbb{Z}_4$-koda $\widetilde{C}$ iz teorema 3.1.
Korak 1. Neka je $B_E = \{G_i \in B \mid \langle G_i, 2u\rangle = 0\}$ i $B_O = B \setminus B_E$.
Korak 2. Neka je $G_i \in B_O$ proizvoljan. Definiramo:

$$B'_O = \{G_i + G_j \mid G_j \in B_O\}.$$

Korak 3. Matrica čiji retci su elementi skupa $B'_O \cup B_E \cup \{2u\}$ je generirajuća matrica od $\widetilde{C}$.
Rezultirajući kod je neovisan o izboru G_i u koraku 2.

Ako je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$, tada je $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II dobiven metodom udvostručavanja duljine n i tipa $4^{k_1-1}2^{k_2+2}$.

3.1.1 Duljine $n = 24, 32, 40$ i tip 4^k

Prema [8], vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.3. *Neka je $n = 24, 32, 40$. Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n i tipa 4^k u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne komponente. Neka je $2u \in \mathbb{Z}_4^n$ tako da je $S_2(2u) \subseteq \{k+1, k+2, \dots, n\}$, $|S_2(2u)| \geq 4$ i $|S_2(2u)|$ paran broj. Pretpostavimo da ne postoji riječ v koda C takva da je*

1. $S_2(v) \subseteq S_2(2u) \subseteq S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v)$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 8$,
2. $|S_2(2u) \setminus (S_1(v) \cup S_3(v))| = |(S_1(v) \cup S_3(v)) \setminus S_2(2u)| = 1$,
3. $S_2(2u) \subseteq (S_1(v) \cup S_3(v))$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| - |S_2(2u)| = 2$.

Tada je $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II generiran s $2u$ i C metodom udvostručavanja ekstremalan i ovi izbori za $2u$ su jedini kandidati za C.

Prema napomeni 4.2, zahtjev iz teorema 3.3 da C ne sadrži riječ s točno četiri neparne komponente ekvivalentan je zahtjevu da je rezidualni kod $C^{(1)}$ ekstremalan.

Prema [8], vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.4. *Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Provodeći sljedeće korake dolazimo do svih mogućih kandidata $2u$ za ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod C tipa II tipa 4^k duljine $n = 24, 32, 40$, u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne komponente, kojima generiramo novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II metodom udvostručavanja:*

1. Neka je $G^{(1)} = [I_k \;\; A^1]$ generirajuća matrica od $C^{(1)}$.

2. Za svaki $F \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ takav da je $1 \leq |F| \leq 8$ provodimo sljedeće.

2.1. Računamo sumu redaka s_F^1 u matrici $G^{(1)}$ s indeksima redaka u F.

2.2. Ako je $|S_1(s_F^1)| \leq 8$, provodimo sljedeće korake na svim $E \subseteq F$.

2.2.1. Računamo: $v = s_F + 2s_E$, pri čemu je s_F suma redaka u generirajućoj matrici G u standardnoj formi koda C s indeksima redaka u F, a s_E suma redaka u G s indeksima redaka u E.

2.2.2. Stavimo:

$$T_v = S_2(v) \cap \{k+1, k+2, \ldots, n\},$$

$$O_v = (S_1(v) \cup S_3(v)) \cap \{k+1, k+2, \ldots, n\}.$$

2.2.3. Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija svih skupova

$$B = T_v \cup O, \;\; O \subseteq O_v,$$

takvih da je $|B|$ paran broj.

3. Za sve $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ provodimo sljedeće.

3.1. Neka je

$$O_i = (S_1(G_i) \cup S_3(G_i)) \cap \{k+1, k+2, \ldots, n\},$$

gdje je G_i $i-$ti redak matrice G.

3.2. U kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve skupove $B \subseteq O_i$ takve da je $|O_i| - |B| = 1$.

3.3. U kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve skupove $B = O_i \cup \{m\}$, takve da je $m \in \{k+1, k+2, \ldots, n\} \setminus O_i$.

4. Za sve dvočlane podskupove $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ provodimo sljedeće.

4.1. Stavimo: $v_{i,j} = G_i + G_j$ i $O_{ij} = (S_1(v_{i,j}) \cup S_3(v_{i,j})) \cap \{k+1, k+2, \ldots, n\}$.

4.2. U kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve skupove O_{ij}.

5. Neka je $\mathcal{S}$ kolekcija svih $S \subseteq \{k+1, k+2, \ldots, n\}$ takvih da je $|S| \geq 4$ i $|S|$ paran broj. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{G}$ kolekcija svih mogućih $S_2(2u)$.

Napomena 3.1. U [8] je iz ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa 4^{16} duljine 32 u oznaci $C(W_{16,11})$ iz [19] metodom udvostručavanja dobiveno najmanje 338 novih međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{15}2^2$ duljine 32. Također, iz ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa 4^{20} duljine 40 u oznaci $C_{40,11}$ iz [13], dobiveno je najmanje

329 novih međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{19}2^2$ duljine 40.

Ekvivalencija dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova je ispitivana pomoću ekvivalencije pripadnih rezidualnih kodova i određivanjem broja riječi euklidske težine 16.

3.1.2 Duljine $n = 48, 56, 64$ i tip 4^k

Na temelju metode udvostručavanja za duljine $n = 24, 32, 40$, razvijamo metodu udvostručavanja za duljine $n = 48, 56, 64$.

Teorem 3.5. *Neka je* $n = 48, 56, 64$. *Označimo sa* $S_i(w)$ *skup pozicija na kojima se nalazi element* $i \in \mathbb{Z}_4$ *u riječi* $w \in \mathbb{Z}_4^n$. *Neka je* C *ekstremalan* $\mathbb{Z}_4$*-kod tipa II duljine* n *i tipa* 4^k *u kojem nijedna riječ nema točno osam neparnih komponenata. Pretpostavimo da je* $2u$ *element iz* $\mathbb{Z}_4^n$ *takav da je* $S_2(2u) \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$, *gdje je* $|S_2(2u)| \geq 6$ *paran broj. Pretpostavimo da ne postoji riječ* v *koda* C *takva da je*

1. $S_2(v) \subseteq S_2(2u) \subseteq S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v)$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 16$,
2. $|S_2(2u) \setminus (S_1(v) \cup S_3(v))\,| = |\,(S_1(v) \cup S_3(v)) \setminus S_2(2u)| = 1$ *ili* 2,
3. $S_2(2u) \subseteq (S_1(v) \cup S_3(v))$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| - |S_2(2u)| = 2$ *ili* 4,
4. $|S_2(2u) \setminus (S_1(v) \cup S_3(v))\,| = 1$ *i* $|\,(S_1(v) \cup S_3(v)) \setminus S_2(2u)| = 3$ *ili*
   $|S_2(2u) \setminus (S_1(v) \cup S_3(v))\,| = 3$ *i* $|\,(S_1(v) \cup S_3(v)) \setminus S_2(2u)| = 1$,
5. $S_2(v) \subseteq S_2(2u), |S_2(2u) \setminus (S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v))\,| = 1$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 12$,
6. $S_2(2u) \subseteq S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v), |S_2(v) \setminus S_2(2u)| = 1$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 12$.

Tada je $\mathbb{Z}_4$*-kod* $\widetilde{C}$ *tipa II generiran s* $2u$ *i* C *metodom udvostručavanja ekstremalan i ovi izbori za* $2u$ *su jedini kandidati za* C.

Ekstremalnost koda C u teoremu 3.5 povlači da je minimalna težina koda $C^{(1)^{\perp}} = C^{(1)}$ barem 6, a budući da je $C^{(1)}$ dvostruko paran, njegova minimalna težina je barem 8. Zbog toga C ne sadrži riječ s točno četiri neparne komponente. Zahtjev iz teorema 3.5 da C ne sadrži riječ s točno osam neparnih komponenti ekvivalentan je zahtjevu da je $C^{(1)}$ ekstremalan.

Dokaz. $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n = 48, 56$ ili 64 nije ekstremalan ako i samo ako u tom kodu postoji riječ euklidske težine 8 ili 16. Budući da sve riječi iz C imaju euklidsku težinu barem 24, riječ euklidske težine 8 ili 16 u $\widetilde{C}$ mora biti oblika $w = v + 2u$, gdje je

$v \in C$ takva da je $\langle v, 2u \rangle = 0$. Pokazat ćemo da takva riječ v ne postoji. Pretpostavimo da takva riječ v postoji. Tada vrijedi:

$$wt_E(w) = |S_1(v) \cup S_3(v)| + 4\left(|S_2(v) \cap S_0(2u)| + |S_0(v) \cap S_2(2u)|\right).$$

Imamo tri različita slučaja:
1. slučaj: $|S_1(v) \cup S_3(v)| > 16$.
Tada je $wt_E(w) > 16$ pa je $wt_E(w) \geq 24$.
2. slučaj: $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 16$.
Da bi bilo $wt_E(w) = 16$, $S_2(v) \cap S_0(2u)$ i $S_0(v) \cap S_2(2u)$ trebaju biti prazni skupovi što je ekvivalentno tome da je $S_2(v) \subseteq S_2(2u)$ i $S_2(2u) \subseteq S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v)$. Ova je situacija nemoguća zbog 1. uvjeta.
3. slučaj: $|S_1(v) \cup S_3(v)| < 16$.
Budući da broj neparnih komponenti od v mora biti djeljiv sa 4, a pretpostavili smo da je različit od četiri i osam, v ili nema neparnih komponenti ili ima točno 12 neparnih komponenata.
Ako je v parna riječ, tada je $wt_E(w) = 4\left(|S_2(v) \cap S_0(2u)| + |S_0(v) \cap S_2(2u)|\right)$. Promatrajući prvih k komponenata, dobivamo da je $v = 2\sum_{i \in S_2(v) \cap \{1,\ldots,k\}} G_i$. Dakle, postoji riječ $\widetilde{v} \in C$ takva da je $2\widetilde{v} = v$. Očito je $S_1(\widetilde{v}) \cup S_3(\widetilde{v}) = S_2(v)$ i $S_0(\widetilde{v}) \cup S_2(\widetilde{v}) = S_0(v)$. Da bi bilo $wt_E(w) < 24$, mora vrijediti sljedeće:

$$\begin{gathered}\left(|(S_1(\widetilde{v}) \cup S_3(\widetilde{v})) \cap S_0(2u)|, |(S_0(\widetilde{v}) \cup S_2(\widetilde{v})) \cap S_2(2u)|\right) \in \\ \{(0,2),(0,4),(1,1),(1,3),(2,0),(2,2),(3,1),(4,0)\}\end{gathered}$$

budući da je $wt_E(w)$ višekratnik od 8. Primijetimo da su slučajevi $(0,2)$ i $(0,4)$ nemogući jer bi u tim slučajevima imali da je $(S_1(\widetilde{v}) \cup S_3(\widetilde{v})) \subseteq S_2(2u) \subseteq \{k+1,\ldots,n\}$. Slučajevi $(1,1)$ i $(2,2)$ su nemogući zbog 2. uvjeta. Slučajevi $(2,0)$ i $(4,0)$ su nemogući zbog 3. uvjeta. Slučajevi $(1,3)$ i $(3,1)$ su nemogući zbog 4. uvjeta.
Ako je $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 12$, onda je $wt_E(w) \geq 12$. Da bi bilo $wt_E(w) = 16$, mora vrijediti sljedeće: $(|S_2(v) \cap S_0(2u)|, |S_0(v) \cap S_2(2u)|) \in \{(0,1),(1,0)\}$. Slučaj $(0,1)$ je nemoguć zbog 5. uvjeta. Slučaj $(1,0)$ je nemoguć zbog 6. uvjeta. □

Teorem 3.6. *Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Provodeći sljedeće korake dolazimo do svih mogućih kandidata za riječ $2u$ za ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod C tipa II tipa 4^k duljine $n = 48, 56, 64$, u kojem nijedna riječ nema točno osam neparnih komponenata, kojima generiramo novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II metodom udvostručavanja.*

1. *Neka je $G^{(1)} = [I_k \;\; A^1]$ generirajuća matrica od $C^{(1)}$.*

2. Za svaki $F \subseteq \{1, \ldots, k\}$ takav da je $1 \leq |F| \leq 16$, provodimo sljedeće:

2.1. Računamo sumu redaka s_F^1 u matrici $G^{(1)}$ s indeksima redaka u F.

2.2. Ako je $|S_1(s_F^1)| = 16$, provodimo sljedeće korake na svim podskupovima E od F:

2.2.1. Računamo $v = s_F + 2s_E$ pri čemu je s_F suma redaka u G s indeksima u F, a s_E suma redaka u G s indeksima u E.

2.2.2. Stavimo $T_v = S_2(v) \cap \{k+1, \ldots, n\}$ i $O_v = (S_1(v) \cup S_3(v)) \cap \{k+1, \ldots, n\}$.

2.2.3. Promotrimo sve skupove B takve da je $B = T_v \cup O$ gdje je $O \subseteq O_v$. Uključimo sve skupove B u kolekciju $\mathcal{B}$.

2.3. Ako je $|S_1(s_F^1)| = 12$, ponavljamo sljedeće korake na svim podskupovima E od F:

2.3.1. Računamo $v = s_F + 2s_E$ pri čemu je s_F suma redaka u G s indeksima u F, a s_E suma redaka u G s indeksima u E.

2.3.2. Stavimo $T_v = S_2(v) \cap \{k+1, \ldots, n\}$ i $O_v = (S_1(v) \cup S_3(v)) \cap \{k+1, \ldots, n\}$.

2.3.3. Promotrimo sve skupove $B \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$ takve da je $T_v \subseteq B$ i $|B \setminus (T_v \cup O_v)| = 1$. Uključimo sve skupove B u $\mathcal{B}$.

2.3.4. Uključimo sve skupove $B \subseteq (T_v \cup O_v)$ takve da je $|T_v \setminus B| = 1$ u $\mathcal{B}$.

2.3.5. Računamo $v_i = v + 2G_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus F$.

2.3.6. Neka je $T_{v_i} = S_2(v_i) \cap \{k+1, \ldots, n\}$ i $O_{v_i} = (S_1(v_i) \cup S_3(v_i)) \cap \{k+1, \ldots, n\}$.

2.3.7 Uključimo sve skupove $T_{v_i} \cup O, O \subseteq O_{v_i}$ u $\mathcal{B}$.

3. Za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$, provodimo sljedeće:

3.1. Neka je $O_i = (S_1(G_i) \cup S_3(G_i)) \cap \{k+1, \ldots, n\}$ gdje je G_i i-ti redak od G.

3.2. Uključimo sve skupove $B \subseteq O_i$ takve da je $|O_i| - |B| = 1$ ili $|O_i| - |B| = 3$ u $\mathcal{B}$.

3.3. Uključimo sve skupove $B = O_i \cup \{m\}$ takve da je $m \in \{k+1, \ldots, n\} \setminus O_i$ u $\mathcal{B}$.

3.4. Uključimo sve skupove $B = O_i \cup \{p, q, r\}$ za svaki tročlani podskup $\{p, q, r\} \subseteq \{k+1, \ldots, n\} \setminus O_i$ u $\mathcal{B}$.

4. Za svaki dvočlani podskup $\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, provodimo sljedeće:

4.1. Neka je $v_{i,j} = G_i + G_j$ i $O_{i,j} = (S_1(v_{i,j}) \cup S_3(v_{i,j})) \cap \{k+1, \ldots, n\}$.

4.2. Uključimo sve skupove $O_{i,j}$ u $\mathcal{B}$.

4.3. Uključimo sve skupove $B = O_{i,j} \cup \{p, q\}$ za svaki dvočlani podskup $\{p, q\} \subseteq \{k+1, \ldots, n\} \setminus O_{i,j}$ u $\mathcal{B}$.

5. *Za svaki tročlani podskup* $\{i,j,l\} \subseteq \{1,\ldots,k\}$*, provodimo sljedeće:*

   5.1. *Neka je* $v_{i,j,l} = G_i + G_j + G_l$ *i* $O_{i,j,l} = (S_1(v_{i,j,l}) \cup S_3(v_{i,j,l})) \cap \{k+1,\ldots,n\}$.

   5.2. *Uključimo sve skupove* $B \subseteq O_{i,j,l}$ *takve da je* $|O_{i,j,l}| - |B| = 1$ *u* $\mathcal{B}$.

   5.3. *Uključimo sve skupove* $B = O_{i,j,l} \cup \{m\}$ *takve da je* $m \in \{k+1,\ldots,n\} \setminus O_{i,j,l}$ *u* $\mathcal{B}$.

6. *Za svaki četveročlani podskup* $\{i,j,l,m\} \subseteq \{1,\ldots,k\}$*, provodimo sljedeće:*

   6.1. *Neka je* $v_{i,j,l,m} = G_i + G_j + G_l + G_m$ *i* $O_{i,j,l,m} = (S_1(v_{i,j,l,m}) \cup S_3(v_{i,j,l,m})) \cap \{k+1,\ldots,n\}$.

   6.2. *Uključimo sve skupove* $O_{i,j,l,m}$ *u* $\mathcal{B}$.

7. *Neka je* $\mathcal{S}$ *kolekcija svih podskupova* S *od* $\{k+1,\ldots,n\}$ *takvih da je* $|S|$ *paran broj i* $|S| \geq 6$*. Tada je* $\mathcal{G} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{B}$ *kolekcija svih mogućih* $S_2(2u)$.

Dokaz. 1. uvjet iz teorema 3.5 razmatramo u koraku 2.2. Iz $S_2(v) \subseteq S_2(2u)$ slijedi da koeficijenti redaka od G u linearnoj kombinaciji od v mogu biti 0,1 ili 3. Korak 2.2.1 generira sve takve riječi v takve da je $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 16$. Svi $B = S_2(2u)$ koji ispunjavaju 1. uvjet su uključeni u $\mathcal{B}$ u koraku 2.2.3.
5. i 6. uvjet iz teorema 3.5 razmatramo u koraku 2.3. Iz $S_2(v) \subseteq S_2(2u)$ slijedi da koeficijenti redaka od G u linearnoj kombinaciji od v mogu biti 0,1 ili 3. Korak 2.3.1 generira sve takve riječi v takve da je $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 12$. Svi $B = S_2(2u)$ koji ispunjavaju 5. uvjet su uključeni u $\mathcal{B}$ u koraku 2.3.3.
Zbog uvjeta $|S_2(v) \setminus S_2(2u)| = 1$ u 6. uvjetu iz teorema 3.5, v može biti jedino linearna kombinacija redaka od G s najviše jednim koeficijentom 2. Ako nijedan od koeficijenata nije 2, svi $B = S_2(2u)$ koji ispunjavaju 6. uvjet su uključeni u $\mathcal{B}$ u koraku 2.3.4. Ako v ima točno jedan koeficijent 2, svi $B = S_2(2u)$ koji ispunjavaju 6. uvjet su uključeni u $\mathcal{B}$ u koraku 2.3.7.
Budući da je $|\,(S_1(v) \cup S_3(v)) \setminus S_2(2u)| = 1, 2, 3$ ili 4 u 2., 3., i 4. uvjetu iz teorema 3.5, za v uzimamo sumu najviše četiri retka od G.
U koraku 3.2 razmatramo 3. uvjet iz teorema 3.5.
U koraku 3.3 razmatramo 1. dio 2. uvjeta.
U koraku 3.4 razmatramo 2. dio 4. uvjeta.
U koraku 4.2 razmatramo 1. dio 3. uvjeta.
U koraku 4.3 razmatramo 2. dio 2. uvjeta.
U koraku 5.2 razmatramo 2. dio 3. uvjeta.
U koraku 5.3 razmatramo 1. dio 4. uvjeta.
U koraku 6.2 razmatramo 2. dio 3. uvjeta.

U koraku 7 izbacujemo sve $B = S_2(2u)$ za koje bismo dobili neekstremalan kod metodom udvostručavanja. $\square$

Za ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 48 tipa 4^{24} u oznaci $C_{48p}^{(4)}$ iz tablice 2.5, rezidualni kod ${C_{48p}^{(4)}}^{(1)}$ ima minimalnu težinu 8 pa ne možemo primijeniti teorem 3.6.

Za ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 48 tipa 4^{24} u oznaci $\mathcal{D}_{48}$ iz tablice 2.5, rezidualni kod $\mathcal{D}_{48}^{(1)}$ ima minimalnu težinu 12 pa $\mathcal{D}_{48}$ zadovoljava uvjete teorema 3.6. Računalnim pretraživanjem smo dobili da nema kandidata za riječ $2u$ kojim bi iz $\mathcal{D}_{48}$ dobili nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 48 tipa $4^{23}2^2$.

Rezidualni kodovi ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 tipa 4^{28} u oznakama $\mathcal{C}_{56}$ i $\mathcal{D}_{56,1}$ iz tablice 2.5 imaju minimalnu težinu 12 pa ovi $\mathbb{Z}_4$-kodovi zadovoljavaju uvjete teorema 3.6. Dosadašnjim pretraživanjem nismo dobili kandidate kojim bi dobili nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 tipa $4^{27}2^2$.

3.1.3 Duljine $n = 24, 32, 40$ i tip $4^{k_1}2^{k_2}$

Prema [8], metodom udvostručavanja možemo generirati nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II i tipa $4^{k_1-1}2^{k_2+2}$ koristeći poznate ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$, gdje je $k_2 > 0$:

Teorem 3.7. *Neka je $n = 24, 32, 40$. Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine n i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne komponente. Neka je $2u \in \mathbb{Z}_4^n$ tako da je $S_2(2u) \subseteq \{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\}$, $|S_2(2u)| \geq 4$ i $|S_2(2u)|$ paran broj. Pretpostavimo da ne postoji riječ v koda C takva da je*

1. $S_2(v) \subseteq S_2(2u) \subseteq S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v)$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 8$,
2. $|S_2(2u) \setminus S_2(v)| + |S_2(v) \setminus S_2(2u)| = 2$ *i* $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 0$.

Tada je $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II generiran s $2u$ i C metodom udvostručavanja ekstremalan.

Prema [8], provodeći korake iz rezultata 3.1 dolazimo do svih mogućih kandidata $2u$ za C kojima generiramo novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II metodom udvostručavanja.

Rezultat 3.1. ([8], teorem 10) Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n = 24, 32, 40$ tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne komponente, s generirajućom matricom

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$.

1. Neka je $G^{(1)} = [I_{k_1} \ \ A^1]$ generirajuća matrica od $C^{(1)}$ i neka je $H = \{k_1+1, k_1+2, \ldots, k_1+k_2\}$.

2. Za svaki podskup $F \subseteq \{1, 2, \ldots, k_1\}$ takav da je $1 \leq |F| \leq 8$ provodimo sljedeće.

2.1. Računamo sumu redaka s_F^1 u matrici $G^{(1)}$ s indeksima redaka u F.

2.2. Ako je $|S_1(s_F^1)| \leq 8$, provodimo sljedeće korake na svim $E \subseteq F$ i $H' \subseteq H$.

2.2.1. Računamo: $v = s_F + 2s_E + 2s_{H'}$, pri čemu je s_F suma redaka u G s indeksima redaka u F, s_E suma redaka u G s indeksima redaka u E, a $s_{H'}$ suma redaka u G s indeksima redaka u H'.

2.2.2. Stavimo:

$$T_v = S_2(v) \cap \{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\},$$

$$O_v = (S_1(v) \cup S_3(v)) \cap \{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\}.$$

2.2.3. Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija svih skupova

$$B = T_v \cup O, \ O \subseteq O_v,$$

takvih da je $|B|$ paran broj.

3. Za sve $S \subseteq \{2G_1, 2G_2, \ldots, 2G_{k_1}, G_{k_1+1}, \ldots, G_{k_1+k_2}\}, 1 \leq |S| \leq 2$, provodimo sljedeće.

3.1. Neka je s suma elemenata u S.

3.2. Stavimo:

$$O_i' = S_2(s) \cap \{1, 2, \ldots, k_1+k_2\},$$

$$O_i = S_2(s) \cap \{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\}.$$

3.3. Ako je $|O_i'| = 1$, tada:

3.3.1. u kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve $B \subseteq O_i$ takve da je $|O_i| - |B| = 1$.

3.3.2. u kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve $B = O_i \cup \{m\}$ takve da je $m \in \{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\} \setminus O_i$.

3.4. Ako je $|O_i'| = 2$, dodamo O_i u $\mathcal{B}$.

4. Neka je $\mathcal{G}$ kolekcija svih podskupova od $\{k_1+k_2+1, k_1+k_2+2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}$ takvih da je $|G|$ paran broj i $|G| \geq 4$. Tada je $\mathcal{G}$ kolekcija svih mogućih $S_2(2u)$ za C u metodi udvostručavanja.

Napomena 3.2. Označimo s C_{32}^{2u} ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 i tipa $4^{15}2^2$ dobiven metodom udvostručavanja u [8] uz $2u$, gdje je $S_2(2u) = \{17, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29\}$. U [8] je iz C_{32}^{2u} metodom udvostručavanja korištenjem rezultata 3.1 dobiveno najmanje 205 novih međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{14}2^4$.

Napomena 3.3. Označimo s C_{40}^{2u} ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 i tipa $4^{19}2^2$ dobiven metodom udvostručavanja u [8]. U [8] je iz C_{40}^{2u} metodom udvostručavanja korištenjem rezultata 3.1 dobiven najmanje 501 novi međusobno neekvivalentan ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 i tipa $4^{18}2^4$.

U algoritmu iz rezultata 3.1 smo uočili grešku primjenom tog algoritma na ekstremalnom $\mathbb{Z}_4$-kodu tipa II duljine 32 s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix}
10000001111110111111101100000202 \\
11111110000000111111101010202000 \\
11111110111111000000011001000000 \\
11000001100000110000010020320000 \\
10100001010000101000010000230002 \\
10010001001000100100010020001002 \\
10001001000100100010010200000120 \\
10000101000010100001010000000232 \\
10000011000001100000110200022021 \\
02200000220000000000000000000000 \\
02020000202000000000000000000000 \\
02002000200200000000000000000000 \\
02000200200020000000000000000000 \\
02000020200002000000000000000000 \\
02000002200000200000000000000000 \\
20000002200000020000000000000000 \\
22200002200000002000000000000000 \\
22020002200000000200000000000000 \\
22002002200000000020000000000000 \\
22000202200000000002000000000000 \\
22000022200000000000200000000000 \\
22000000200000000000020000000000 \\
22222220000000000000002000000000
\end{bmatrix},$$

o čemu detalje navodimo u poglavlju 4. U sljedećem algoritmu je dana korekcija algoritma iz rezultata 3.1.

Algoritam A

Neka je $n = 24, 32, 40$. Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n tipa $4^{k_1}2^{k_2}$, u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne koordinate, s generirajućom matricom

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$.

1. Neka je $G^{(1)} = [I_{k_1} \;\; A^1]$ generirajuća matrica od $C^{(1)}$.

2. Za svaki podskup $F \subseteq \{1, 2, \ldots, k_1\}$ takav da je $1 \leq |F| \leq 8$, provodimo sljedeće:

2.1. Računamo sumu redaka s_F^1 u $G^{(1)}$ s indeksima u F.

2.2. Ako je $|S_1(s_F^1)| = 8$, provodimo sljedeće korake na svim $E \subseteq F$.

2.2.1. Računamo $u = s_F + 2s_E$, gdje je s_F suma redaka u G s indeksima u F, a s_E suma redaka u G s indeksima u E.

2.2.2. Neka je $H = S_2(u) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$. Računamo $v = u + s_H$, gdje je s_H suma redaka u G s indeksima u H.

2.2.3. Neka je $P = (S_1(v) \cup S_3(v)) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$. Ponavljamo sljedeće korake na svim podskupovima $P' \subseteq P$.

2.2.4. Računamo $z = v + s_{P'}$, gdje je $s_{P'}$ suma redaka u G s indeksima u P'.

2.2.5. Neka je

$$T_z = S_2(z) \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\},$$

$$O_z = (S_1(z) \cup S_3(z)) \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}.$$

2.2.6. Promotrimo sve skupove $B = T_z \cup O$, $O \subseteq O_z$, gdje je $|B|$ paran broj. Uključimo sve skupove B u kolekciju $\mathcal{B}$.

3. Za sve $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ provodimo sljedeće.

3.1. Neka je $s = 2G_i$ i $H' = S_2(s) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

3.2. Računamo $s' = s + s_{H'}$, gdje je $s_{H'}$ suma redaka u G s indeksima u H'.

3.2.1. Neka je $O_i = S_2(s') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$.

3.2.2. Uključimo sve skupove $B \subseteq O_i$, takve da je $|O_i| - |B| = 1$, u $\mathcal{B}$.

3.2.3. Uključimo sve skupove $B = O_i \cup \{m\}$, takve da je $m \in \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_i$, u $\mathcal{B}$.

3.2.4. Neka je $s'' = s' + G_j$, gdje je $j \in \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

3.2.5. Neka je $O_j = S_2(s'') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$. Uključimo sve skupove O_j u $\mathcal{B}$.

4. Za svaki podskup $S \subseteq \{2G_1, \ldots, 2G_{k_1}\}$, gdje je $|S| = 2$, provodimo sljedeće:

4.1. Neka je s suma elemenata u S. Neka je $H' = S_2(s) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

4.2. Računamo $s' = s + s_{H'}$, gdje je $s_{H'}$ suma redaka u G s indeksima u H'.

4.3. Neka je $O_i = S_2(s') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$. Uključimo sve skupove O_i u $\mathcal{B}$.

5. Za sve podskupove $S \subseteq \{G_{k_1+1}, \ldots, G_{k_1+k_2}\}$, takve da je $1 \leq |S| \leq 2$, provodimo sljedeće:

5.1. Neka je s suma elemenata u S.

5.2. Neka je $O'_i = S_2(s) \cap \{1, \ldots, k_1 + k_2\}, O_i = S_2(s) \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$.

5.3. Ako je $|O'_i| = 1$, tada:

5.3.1. Uključimo sve skupove $B \subseteq O_i$, takve da je $|O_i| - |B| = 1$, u $\mathcal{B}$.

5.3.2. Uključimo sve skupove $B = O_i \cup \{m\}$, takve da je $m \in \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_i$, u $\mathcal{B}$.

5.4. Ako je $|O'_i| = 2$, tada uključimo O_i u $\mathcal{B}$.

Napomena 3.4. U algoritmu iz rezultata 3.1, za riječ v u koraku 2.2.1., $S_2(v)$ ne mora biti podskup od $\{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$, što se zahtijeva u teoremu 3.7. Pretpostavimo da je $v = G_i + G_j$, gdje je $1 \leq i < j \leq k_1$. Ako matrica G ima element 1 na pozicijama (i, k) i (j, k) za $k_1 + 1 \leq k \leq k_1 + k_2$, tada v ima element 2 na $k-$toj poziciji. U algoritmu A, korak 2.2.4. generira sve riječi z takve da je $S_2(z) \subseteq \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$ i $|S_1(z) \cup S_2(z)| = 8$. Nadalje, primijetimo da nije dovoljno provjeriti slučajeve $1 \leq |S| \leq 2$ u koraku 3. u algoritmu iz rezultata 3.1. Naime, i u slučajevima sume više od dva elementa iz S je moguće da je $|O'_i| = 1$ ili 2. Ti slučajevi su provjereni u algoritmu A u koracima 3. i 4.

Prema napomeni 3.4, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.8. *Neka je $n = 24, 32, 40$. Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ u kojem nijedna riječ nema točno četiri neparne komponente. Neka je $\mathcal{S}$ kolekcija svih podskupova $S \subseteq \{k_1 + k_2 + 1, k_1 + k_2 + 2, \ldots, n\}$ takvih da je $|S| \geq 4$ i $|S|$ paran broj. Tada je $\mathcal{G} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{B}$ kolekcija svih mogućih $S_2(2u)$ za C kojima generiramo novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II metodom udvostručavanja, gdje je $\mathcal{B}$ kolekcija dobivena koristeći algoritam A.*

Koristeći algoritam A, iz koda C_{32}^{2u} iz napomene 3.2 dobili smo 5395 kandidata $2u$ koji daju najmanje 5147 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova duljine 32 i tipa $4^{14}2^4$. U tablici 3.1 se nalazi broj riječi euklidske težine 16 za konstruirane kodove, uz informaciju o broju međusobno neekvivalentnih pripadnih rezidualnih kodova za dani broj E_{16}. Prvi stupac tablice 3.1 predstavlja težinski enumerator pripadnog rezidualnog koda:

$$P(i) = x_0^{32} + (136 + 4i)x_0^{24}x_1^8 + (3536 - 16i)x_0^{20}x_1^{12} + (9038 + 24i)x_0^{16}x_1^{16} +$$

$$+ (3536 - 16i)x_0^{12}x_1^{20} + (136 + 4i)x_0^8x_1^{24} + x_1^{32},$$

za $1 \leq i \leq 10$.

Jedan od ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova koji se ne može dobiti korištenjem rezultata 3.1 je, na primjer, $\mathbb{Z}_4$-kod za koji je $i = 3, E_{16} = 108378$, dobiven za

$$2u = 00000000000000000000000000002222.$$

Ovaj $2u$ bi bio eliminiran u koraku 2.2.3. rezultata 3.1 kao

$$B = \{29, 30, 31, 32\} = T_v \cup O,\ O \subseteq O_v,$$

$$T_v = \{30, 32\},\ O_v = \{18, 25, 27, 29, 31\},\ O = \{29, 31\},$$

gdje je

$$v = 01001000001000022300000030101212.$$

Tablica 3.1: Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II tipa $4^{14}2^4$

i	(E_{16}, broj neekvivalentnih rezidualnih kodova)
1	(108176,2), (108192,2), (108200,5), (108208,5), (108216,7), (108224,5), (108232,10), (108240,11), (108248,14), (108256,32), (108264,26), (108272,23), (108280,27), (108288,31), (108296,32), (108304,43), (108312,35), (108320,28), (108328,33), (108336,32), (108344,29), (108352,34), (108360,16), (108368,25), (108376,16), (108384,19), (108392,9), (108400,8), (108408,6), (108416,4), (108424,2), (108432,4), (108440,3), (108448,2), (108456,1), (108464,1), (108472,1)
2	(108209,1), (108217,2), (108225,1), (108233,2), (108241,2), (108249,9), (108257,6), (108265,11), (108273,11), (108281,15), (108289,21), (108297,31), (108305,41), (108313,58), (108321,42), (108329,57), (108337,73), (108345,62), (108353,66), (108361,75), (108369,67), (108377,88), (108385,75), (108393,84), (108401,57), (108409,73), (108417,44), (108425,39), (108433,40), (108441,25), (108449,20), (108457,22), (108465,10), (108473,5), (108481,4), (108489,5), (108497,6), (108505,3), (108513,3), (108521,2), (108529,1), (108537,1), (108569,1)
3	(108258,1), (108266,2), (108274,1), (108282,4), (108290,3), (108298,6), (108306,6), (108314,10), (108322,17), (108330,18), (108338,28), (108346,24), (108354,37), (108362,39), (108370,59), (108378,69), (108386,70), (108394,70), (108402,72), (108410,70), (108418,70), (108426,75), (108434,78), (108442,83), (108450,75), (108458,53), (108466,41), (108474,47), (108482,30), (108490,38), (108498,30), (108506,21), (108514,15), (108522,11), (108530,3), (108538,1), (108546,5), (108554,3), (108562,3), (108570,1), (108594,1)
4	(108291,1), (108315,2), (108323,1), (108331,2), (108339,4), (108347,9), (108355,9), (108363,6), (108371,12), (108379,15), (108387,27), (108395,34), (108403,32), (108411,38), (108419,34), (108427,45), (108435,54), (108443,53), (108451,61), (108459,54), (108467,54), (108475,66), (108483,61), (108491,44), (108499,54), (108507,41), (108515,44), (108523,38), (108531,27), (108539,22), (108547,19), (108555,13), (108563,9), (108571,7), (108579,4), (108587,5), (108595,2), (108603,2), (108611,1), (108619,1), (108635,1), (108651,2)
5	(108332,1), (108340,1), (108364,1), (108372,2), (108380,3), (108388,4), (108396,3), (108404,3), (108412,2), (108420,9), (108428,13), (108436,12), (108444,21), (108452,14), (108460,20), (108468,25), (108476,39), (108484,33), (108492,28), (108500,32), (108508,26), (108516,31), (108524,40), (108532,27), (108540,35), (108548,23), (108556,22), (108564,16), (108572,27), (108580,16), (108588,8), (108596,9), (108604,12), (108612,5), (108620,6), (108628,4), (108636,2), (108644,1), (108652,2), (108660,1), (108668,3), (108676,1), (108724,1), (108732,1)
6	(108405,1), (108413,1), (108437,2), (108445,3), (108453,5), (108461,5), (108469,4), (108477,8), (108485,5), (108493,4), (108501,10), (108509,14), (108517,9), (108525,15), (108533,13), (108541,16), (108549,18), (108557,13), (108565,19), (108573,19), (108581,12), (108589,14), (108597,12), (108605,9), (108613,6), (108621,10), (108629,9), (108645,6), (108653,1), (108661,1), (108669,5), (108677,1), (108685,2), (108693,1), (108709,1), (108725,1), (108781,1)
7	(108446,1), (108486,1), (108510,2), (108518,3), (108526,2), (108534,2), (108542,9), (108550,3), (108558,3), (108566,5), (108574,5), (108582,4), (108590,6), (108598,5), (108606,5), (108614,1), (108622,6), (108630,4), (108638,5), (108646,5), (108654,5), (108662,5), (108670,1), (108678,3), (108686,2), (108694,1), (108710,4), (108726,1), (108758,1), (108766,1), (108798,1)
8	(108559,1), (108567,1), (108599,1), (108607,3), (108615,2), (108631,3), (108639,1), (108647,3), (108655,1), (108663,2), (108671,3), (108679,2), (108687,1), (108703,1), (108719,1), (108735,1), (108743,1), (108759,1), (108783,1), (108815,1)
9	(108640,1), (108656,1), (108688,1), (108752,1), (108760,1)
10	(108761,1), (108825,1), (108849,1), (108921,1)

Algoritam A smo primijenili na ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 i tipa 4^{16} u oznaci $C(W_{16,11})$ iz napomene 3.1 s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix} 10000000000000002100011101111111 \\ 01000000000000003200303110311313 \\ 00100000000000000021130133013311 \\ 00010000000000000032113031303113 \\ 00001000000000000133230013330111 \\ 00000100000000003013120011313031 \\ 00000010000000003101002313113103 \\ 00000001000000003330001211133310 \\ 00000000100000000311333321000111 \\ 00000000010000003013131332001013 \\ 00000000001000003101113300231301 \\ 00000000000100003330133100121130 \\ 00000000000010003311011103332100 \\ 00000000000001003113303130133200 \\ 00000000000000103333310333010021 \\ 00000000000000013131331031300032 \end{bmatrix}.$$

Time smo dobili 338 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{15}2^2$, kao što je dobiveno primjenom algoritma iz teorema 3.4 u [8].

Primjena algoritma A na $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$

Poznata su tri ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 32 i tipa $4^{11}2^{10}$, do na ekvivalenciju: kod u oznaci $C_{32,11}$ iz [21] te kodovi u oznakama $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ iz [36]. Rezidualni kod $C^{(1)}_{32,11}$ ima minimalnu težinu 4 pa na njega ne možemo primijeniti algoritam A. Rezidualni kodovi $\tilde{C}^{(1)}_{31,2}$ i $\tilde{C}^{(1)}_{31,3}$ imaju minimalnu težinu 12 pa na njih možemo primijeniti algoritam A.

$\mathbb{Z}_4$-kod $\tilde{C}_{31,2}$ ima generirajuću matricu

$$\begin{bmatrix}
10000000000110001110031231022301 \\
01000000000011000111003123102231 \\
00100000000111101101113123312300 \\
00010000000011110110111312331230 \\
00001000000111110101022122233003 \\
00000100000011111010102212223303 \\
00000010000001111101010221222333 \\
00000001000110110000112231122332 \\
00000000100101010110022010132313 \\
00000000010100100101013010233330 \\
00000000001100011100132332021033 \\
00000000000200000000002222202222 \\
00000000000020000000002222000020 \\
00000000000002000000020220220202 \\
00000000000000200000002022022022 \\
00000000000000020000022200022000 \\
00000000000000002000002220002200 \\
00000000000000000200000222000220 \\
00000000000000000020022020020222 \\
00000000000000000002020200222220 \\
00000000000000000000220022202022
\end{bmatrix},$$

a $\mathbb{Z}_4$-kod $\tilde{C}_{31,3}$ ima generirajuću matricu

$$
\begin{bmatrix}
1000000000010011001010001332 0333 \\
0100000000011010101111021023 2100 \\
0010000000001101010111102102 3210 \\
0001000000010101100001311302 0013 \\
0000100000011001111012330020 0312 \\
0000010000011111110111210330 2101 \\
0000001000001111111011121033 0211 \\
0000000100010100110111313013 3110 \\
0000000010011001010001332033 1003 \\
0000000001001100101000133203 3103 \\
0000000000100110010100013320 3313 \\
0000000000020000000000222022 2200 \\
0000000000002000000000022202 2220 \\
0000000000000200000002000202 2002 \\
0000000000000020000000200020 2202 \\
0000000000000002000000020002 0222 \\
0000000000000000200002000022 2200 \\
0000000000000000020000200002 2220 \\
0000000000000000002002022022 2002 \\
0000000000000000000200202202 2202 \\
0000000000000000000020020220 2222
\end{bmatrix}.
$$

Na $\tilde{C}_{31,2}$ smo primijenili algoritam A. Dobili smo 527 kandidata $2u$. Svih 527 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$ dobivenih metodom udvostručavanja ima $E_{16} = 107816$. Težinski enumerator rezidualnih kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}^{(1)}$ svih dobivenih kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}$ je

$$P = x_0^{32} + 240x_0^{20}x_1^{12} + 542x_0^{16}x_1^{16} + 240x_0^{12}x_1^{20} + x_1^{32}.$$

Dakle, svi kodovi $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}^{(1)}$ imaju minimalnu težinu 12. Među binarnim kodovima $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}^{(1)}$, dva su međusobno neekvivalentna.

Budući da jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $C_{32,10}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$ (napomena 2.1) ima rezidualni kod minimalne težine 4, dobili smo bar dva nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda $\widetilde{\tilde{C}_{31,2}}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$. Označimo s $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz $\tilde{C}_{31,2}$ za

$$2u = 00000000000000000000022222222220$$

i s $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz $\tilde{C}_{31,2}$ za

$$2u = 00000000000000000000022222022020.$$

Rezidualni kodovi $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ su međusobno neekvivalentni.

Na $\tilde{C}_{31,3}$ smo primijenili algoritam A. Dobili smo 527 kandidata $2u$. Svih 527 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,3}}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$ dobivenih metodom udvostručavanja ima $E_{16} = 107816$. Težinski enumerator rezidualnih kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,3}}^{(1)}$ svih dobivenih kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,3}}$ je

$$P = x_0^{32} + 240x_0^{20}x_1^{12} + 542x_0^{16}x_1^{16} + 240x_0^{12}x_1^{20} + x_1^{32}.$$

Dakle, svi kodovi $\widetilde{\tilde{C}_{31,3}}^{(1)}$ imaju minimalnu težinu 12. Među binarnim kodovima $\widetilde{\tilde{C}_{31,3}}^{(1)}$, dva su međusobno neekvivalentna. Označimo s $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz $\tilde{C}_{31,3}$ za

$$2u = 00000000000000000000022222200000$$

i s $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_2}}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz $\tilde{C}_{31,3}$ za

$$2u = 00000000000000000000022222200022.$$

Rezidualni kodovi $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_2}}$ su međusobno neekvivalentni.

Rezidualni kodovi $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_2}}$ su međusobno ekvivalentni pa smo dobili najmanje tri nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$, u oznakama $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$.

Na $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ smo primijenili algoritam A. Za svaki od tih kodova smo dobili 135 kandidata $2u$. Svi dobiveni ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\widetilde{\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}}$, $\widetilde{\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}}$ i $\widetilde{\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$ imaju $E_{16} = 109176$. Težinski enumerator rezidualnih kodova svih 405 dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova je

$$P = x_0^{32} + 112x_0^{20}x_1^{12} + 286x_0^{16}x_1^{16} + 112x_0^{12}x_1^{20} + x_1^{32}.$$

Dakle, rezidualni kodovi svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova imaju minimalnu težinu 12. Među rezidualnim kodovima svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova, 12 ih je međusobno neekvivalentno.

Budući da jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $C_{32,9}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$ (napomena 2.1) ima rezidualni kod minimalne težine 4, dobili smo bar 12 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$.

Algoritam A smo primijenili na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$ dobivene iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$ za $2u \in \{00000000000000000000002222200002,$
$00000000000000000000002222022000, 00000000000000000000002222020002,$
$00000000000000000000002222000022, 00000000000000000000002220202020,$
$00000000000000000000002220020220, 00000000000000000000002202022222\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ za

$$2u = 00000000000000000000002222020002$$

i iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ za $2u \in \{00000000000000000000002222222222,$
$00000000000000000000002222200222, 00000000000000000000002222002002,$
$00000000000000000000002222000202\}$.
Rezidualni kodovi tih 12 $\mathbb{Z}_4$-kodova su međusobno neekvivalentni. Na taj način smo dobili ukupno 228 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ s $E_{16} = 111896$ i težinskim enumeratorom rezidualnih kodova

$$P = x_0^{32} + 48x_0^{20}x_1^{12} + 158x_0^{16}x_1^{16} + 48x_0^{12}x_1^{20} + x_1^{32}.$$

Dakle, rezidualni kodovi svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova imaju minimalnu težinu 12. Među rezidualnim kodovima svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova, 25 ih je međusobno neekvivalentno.

Budući da jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $C_{32,8}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ (napomena 2.1) ima rezidualni kod minimalne težine 4, dobili smo bar 25 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$.

Algoritam A smo primijenili na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ dobivene iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222222202, 00000000000000000000000220220000,$
$00000000000000000000000220222002, 00000000000000000000000202202220,$
$00000000000000000000000202200200, 00000000000000000000000202000022,$
$00000000000000000000000200222202, 00000000000000000000000200020022,$
$00000000000000000000000020222220\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222022000 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000220220220, 00000000000000000000000002002220\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222020002 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222002000, 00000000000000000000000222002202,$
$00000000000000000000000220220220, 00000000000000000000000202200020\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222000022 \rangle$ za

$$2u = 00000000000000000000000222222202,$$

iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}} \oplus \langle 00000000000000000000002222020002 \rangle$ za

$$2u = 00000000000000000000000222202002,$$

iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222222222 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000220220202, 00000000000000000000000220000022,$
$00000000000000000000000202220202, 00000000000000000000000200002022,$
$00000000000000000000000022200020, 00000000000000000000000000220220\}$,
i iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200222 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222020202, 00000000000000000000000022200002\}$.

Rezidualni kodovi tih 25 $\mathbb{Z}_4$-kodova su međusobno neekvivalentni. Na taj način smo dobili ukupno 34 ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 32 i tipa $4^7 2^{18}$ s $E_{16} = 117336$ i težinskim enumeratorom rezidualnih kodova

$$P = x_0^{32} + 16x_0^{20}x_1^{12} + 94x_0^{16}x_1^{16} + 16x_0^{12}x_1^{20} + x_1^{32}.$$

Dakle, rezidualni kodovi svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova imaju minimalnu težinu 12. Među rezidualnim kodovima svih dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova, pet ih je međusobno neekvivalentno.

Budući da jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $C_{32,7}$ tipa II duljine 32 i tipa $4^7 2^{18}$ (napomena 2.1) ima rezidualni kod minimalne težine 4, dobili smo bar pet novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^7 2^{18}$.

U tablici 3.2 se nalaze brojevi novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih algoritmom A polazeći od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$.

Dakle, polazeći od $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$, dobili smo ukupno barem 45 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32.

Tablica 3.2: Broj novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$

tip	$\tilde{C}_{31,2}$	$\tilde{C}_{31,3}$
$4^{10}2^{12}$	2	1
$4^9 2^{14}$	8	4
$4^8 2^{16}$	17	8
$4^7 2^{18}$	4	1

Napomena 3.5. Na nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 iz tablice 3.2 smo primijenili konstrukciju A_4 iz potpoglavlja 1.3. Prema teoremu 1.9 i napomeni 1.2, sve dobivene rešetke su ekstremalne parne unimodularne rešetke. Dakle, sve dobivene rešetke imaju minimalnu normu $\mu = 4$. Priljubljujući broj svih dobivenih rešetki je 146880.

3.1.4 Duljine $n = 48, 56, 64$ i tip $4^{k_1}2^{k_2}$

U ovom potpoglavlju razvijamo metodu udvostručavanja za ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine $n = 48, 56, 64$ tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ s rezidualnim kodom minimalne težine veće od 16.

Teorem 3.9. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n = 48, 56, 64$ tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ takav da $C^{(1)}$ ima minimalnu težinu veću od 16. Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Pretpostavimo da je $2u \in \mathbb{Z}_4^n$ tako da je $S_2(2u) \subseteq \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$, gdje je $|S_2(2u)| \geq 6$ paran broj. Ako ne postoji parna riječ $v \in C$ koja zadovoljava sljedeći uvjet:*

$$|S_2(2u) \setminus S_2(v)| + |S_2(v) \setminus S_2(2u)| = 2 \text{ ili } 4,$$

onda je $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II generiran s $2u$ i C metodom udvostručavanja ekstremalan.

Zbog zahtjeva da $C^{(1)}$ ima minimalnu težinu veću od 16 u teoremu 3.9, C mora biti tipa $4^{k_1}2^{k_2}$, gdje je $k_2 > 0$. Naime, prema teoremu 1.2, $C^{(1)}$ ne može biti samodualan.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji riječ $v \in C$ takva da riječ $w = v + 2u$, gdje je $\langle v, 2u \rangle = 0$, ima euklidsku težinu 8 ili 16. Tada je

$$wt_E(w) = |S_1(v) \cup S_3(v)| + 4\left(|S_2(v) \cap S_0(2u)| + |S_0(v) \cap S_2(2u)|\right).$$

Budući da je minimalna težina od $C^{(1)}$ veća od 16, imamo dva slučaja:
1. slučaj: $|S_1(v) \cup S_3(v)| > 16$.
U ovom slučaju imamo $wt_E(w) \geq 24$.
2. slučaj: $|S_1(v) \cup S_3(v)| = 0$, to jest v je parna riječ.
Da bi imali $wt_E(w) = 8$, broj komponenata na kojima se $2u$ i v ne podudaraju mora biti dva. Da bi imali $wt_E(w) = 16$, broj komponenata na kojima se $2u$ i v ne podudaraju mora biti četiri. Budući da smo ove slučajeve isključili, $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II generiran s $2u$ i C je ekstremalan. □

Teorem 3.10. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II i duljine $n = 48, 56, 64$ tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ takav da $C^{(1)}$ ima minimalnu težinu veću od 16. Neka je*

$$G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & A & B_1 + 2B_2 \\ O & 2I_{k_2} & 2D \end{bmatrix}$$

generirajuća matrica od C. Provodeći sljedeće korake dolazimo do svih mogućih kandidata za riječ $2u$ za C kojima generiramo novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod $\widetilde{C}$ tipa II metodom udvostručavanja.

1. *Za sve $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ provodimo sljedeće.*

1.1. Neka je $s = 2G_i$ *i* $H' = S_2(s) \cap \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

1.2. Računamo: $s' = s + s_{H'}$.

1.2.1. Neka je $O_i = S_2(s') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$.

1.2.2. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_i$ *takve da je* $|O_i| - |B| = 1$ *ili 3.*

1.2.3. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_i \cup \{m\}$ *takve da je* $m \in \{k_1+k_2+1, \ldots, n\} \setminus O_i$.

1.2.4. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_i \cup \{p, q, r\}$ *za sve tročlane podskupove* $\{p, q, r\} \subseteq \{k_1+k_2+1, \ldots, n\} \setminus O_i$.

1.2.5. Neka je $s'' = s' + G_j$, *gdje je* $j \in \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

1.2.6. Neka je $O_j = S_2(s'') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* O_j *u* $\mathcal{B}$.

1.2.7. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_j$ *takve da je* $|O_j| - |B| = 2$.

1.2.8. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_j \cup \{m, l\}$ *za sve dvočlane podskupove* $\{m, l\} \subseteq \{k_1+k_2+1, \ldots, n\} \setminus O_j$.

1.2.9. Računamo: $s''' = s' + G_k + G_l$ *za sve dvočlane podskupove* $\{k, l\} \subseteq \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

1.2.10. Neka je $O_{k,l} = S_2(s''') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$.

1.2.11. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_{k,l}$ *takve da je* $|O_{k,l}| - |B| = 1$.

1.2.12. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_{k,l} \cup \{m\}$, *gdje je* $m \in \{k_1+k_2+1, \ldots, n\} \setminus O_{k,l}$.

1.2.13. Računamo: $s'''' = s' + G_i + G_j + G_k$ *za sve tročlane podskupove* $\{i, j, k\} \subseteq \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

1.2.14. Neka je $O_{i,j,k} = S_2(s'''') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* $O_{i,j,k}$ *u* $\mathcal{B}$.

2. Za svaki podskup $S \subseteq \{2G_1, \ldots, 2G_{k_1}\}$, *gdje je* $|S| = 2$, *provodimo sljedeće:*

2.1. Neka je s suma elemenata iz S. Računamo $H' = S_2(s) \cap \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

2.2. Računamo: $s' = s + s_{H'}$.

2.3. Neka je $O_i = S_2(s') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* O_i *u* $\mathcal{B}$.

2.4. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_i$ *takve da je* $|O_i| - |B| = 2$.

2.5. U kolekciju $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_i \cup \{j, k\}$, *za sve dvočlane podskupove* $\{j, k\} \subseteq \{k_1+k_2+1, \ldots, n\} \setminus O_i$.

2.6. Neka je $s'' = s' + G_j$, *gdje je* $j \in \{k_1+1, \ldots, k_1+k_2\}$.

2.7. Neka je $O_j = S_2(s'') \cap \{k_1+k_2+1, \ldots, n\}$.

2.8. *U kolekciju* $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_j$ *takve da je* $|O_j| - |B| = 1$.

2.9. *U kolekciju* $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_j \cup \{m\}$ *takve da je* $m \in \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_j$.

2.10. *Računamo:* $s''' = s' + G_k + G_l$ *za sve dvočlane podskupove* $\{k, l\} \subseteq \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

2.11. *Neka je* $O_i = S_2(s''') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* O_i *u* $\mathcal{B}$.

3. *Za svaki podskup* $S \subseteq \{2G_1, \ldots, 2G_{k_1}\}$, *gdje je* $|S| = 3$, *provodimo sljedeće:*

3.1. *Neka je* s *suma elemenata iz* S. *Računamo* $H' = S_2(s) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

3.2. *Računamo:* $s' = s + s_{H'}$.

3.3. *Neka je* $O_i = S_2(s') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$.

3.4. *U kolekciju* $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_i$ *takve da je* $|O_i| - |B| = 1$.

3.5. *U kolekciju* $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B = O_i \cup \{m\}$, *za sve* $m \in \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_i$.

3.6. *Neka je* $s'' = s' + G_j$, *gdje je* $j \in \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

3.7. *Neka je* $O_j = S_2(s'') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* O_j *u* $\mathcal{B}$.

4. *Za svaki podskup* $S \subseteq \{2G_1, \ldots, 2G_{k_1}\}$, *gdje je* $|S| = 4$, *provodimo sljedeće:*

4.1. *Neka je* s *suma elemenata iz* S. *Računamo* $H' = S_2(s) \cap \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$.

4.2. *Računamo:* $s' = s + s_{H'}$.

4.3. *Neka je* $O_i = S_2(s') \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$. *Dodamo skupove* O_i *u* $\mathcal{B}$.

5. *Za svaki* $i \in \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$ *provodimo sljedeće.*

5.1. *Neka je* $s = G_i$.

5.2. *Neka je* $O_i = S_2(s) \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$.

5.3. *U kolekciju* $\mathcal{B}$ *dodamo sve* $B \subseteq O_i$ *takve da je* $|O_i| - |B| = 1$ *ili 3,* $B = O_i \cup \{m\}$, *za sve* $m \in \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_i$ *te sve* $B = O_i \cup \{p, q, r\}$ *za sve tročlane podskupove* $\{p, q, r\} \subseteq \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} \setminus O_i$.

6. *Za sve* $\{i, j\} \subseteq \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}$ *provodimo sljedeće.*

6.1. *Neka je* $s = G_i + G_j$.

6.2. *Neka je* $O_{i,j} = S_2(s) \cap \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\}$.

6.3. U kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve $O_{i,j}$, sve $B \subseteq O_{i,j}$ takve da je $|O_{i,j}| - |B| = 2$, $B = O_{i,j} \cup \{k,l\}$, za sve $\{k,l\} \subseteq \{k_1+k_2+1,\ldots,n\} \setminus O_{i,j}$.

7. Za sve $\{i,j,k\} \subseteq \{k_1+1,\ldots,k_1+k_2\}$ provodimo sljedeće.

7.1. Neka je $s = G_i + G_j + G_k$.

7.2. Neka je $O_{i,j,k} = S_2(s) \cap \{k_1+k_2+1,\ldots,n\}$.

7.3. U kolekciju $\mathcal{B}$ dodamo sve $B \subseteq O_{i,j,k}$ takve da je $|O_{i,j,k}| - |B| = 1$, $B = O_{i,j,k} \cup \{m\}$, za sve $m \in \{k_1+k_2+1,\ldots,n\} \setminus O_{i,j,k}$.

8. Za sve $\{i,j,k,l\} \subseteq \{k_1+1,\ldots,k_1+k_2\}$ provodimo sljedeće.

8.1. Neka je $s = G_i + G_j + G_k + G_l$.

8.2. Neka je $O_{i,j,k,l} = S_2(s) \cap \{k_1+k_2+1,\ldots,n\}$. Dodamo skupove $O_{i,j,k,l}$ u $\mathcal{B}$.

9. Neka je $\mathcal{S}$ kolekcija svih $S \subseteq \{k_1+k_2+1,\ldots,n\}$ takvih da je $|S| \geq 6$ i $|S|$ paran broj. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{G}$ kolekcija svih mogućih $S_2(2u)$.

Dokaz. Slučaj s parnim riječima koje imaju točno jedan element 2 na prvih k_1+k_2 komponenata razmatramo u koracima 1.2.2, 1.2.3., 1.2.4. i 5.3. Slučaj s parnim riječima koje imaju točno dva elementa 2 na prvih k_1+k_2 komponenata razmatramo u koracima 1.2.6., 1.2.7., 1.2.8., 2.3., 2.4., 2.5. i 6.3. Slučaj s parnim riječima koje imaju točno tri elementa 2 na prvih k_1+k_2 komponenata razmatramo u koracima 1.2.11., 1.2.12., 2.8., 2.9., 3.4., 3.5. i 7.3. Slučaj s parnim riječima koje imaju točno četiri elementa 2 na prvih k_1+k_2 komponenata razmatramo u koracima 1.2.14., 2.11., 3.7., 4.3. i 8.2. □

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 56 i 64 tipa $4^{14}2^{28}$, odnosno $4^{16}2^{32}$ iz [18] imaju rezidualne kodove s minimalnom težinom 20 pa na njih možemo primijeniti teorem 3.10. Računalnim pretraživanjem smo dobili da za oba koda nema kandidata $2u$ kojim bi dobili nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i 64 tipa $4^{13}2^{30}$, odnosno $4^{15}2^{34}$.

3.2 Generalizirana Haradina metoda

U [19] je predstavljena **Haradina metoda** kojom se iz postojećeg $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa 4^k dobiva klasa $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II s istim rezidualnim kodom. Korištenjem ove metode Gaborit i Harada su u [13] konstruirali 50 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa 4^{16} te 20 međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 i tipa 4^{20}.

U [8] je dana generalizacija Haradine metode kojom se iz postojećeg $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ dobiva klasa $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II s istim rezidualnim kodom. Na taj način su dobiveni novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 32 i 40.

U ovom potpoglavlju opisujemo pokušaje da se uzastopnom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode dobiju novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 56 i 64.

Sljedeći teorem je dokazan u [19].

Teorem 3.11. ***(Haradina metoda)*** *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa 4^k s generirajućom matricom $G = [I_k \ \ Y]$. Neka je y_i $i-$ti redak od Y. Pretpostavimo da je S podskup od $\{1, \dots, k\}$, a t riječ duljine k s komponentama 0 ili 1 takva da je $j-$ta komponenta od t jednaka 1 ako i samo ako je $j \in S$. Neka je $\mathbf{1}$ riječ duljine k sa svim komponentama 1. Neka je*

$$\overline{y_i} = \begin{cases} y_i + 2t, & \text{ako je } wt_E(y_i + 2t) \equiv 7 \pmod 8 \\ y_i + 2t + 2 \cdot \mathbf{1}, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tada je $\overline{G} = \left[I_k \ \ \overline{Y}\right]$ generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$-koda $\overline{C}$ tipa II.

Haradinom metodom iz postojećeg $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa 4^k konstruiramo klasu $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II s istim rezidualnim kodom s ciljem dobivanja ekstremalnih i međusobno neekvivalentnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II.

Sljedeći teorem, dokazan u [8], je generalizacija teorema 3.11.

Teorem 3.12. ***(Generalizirana Haradina metoda)*** *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n i tipa $4^{k_1}2^{k_2}$ s generirajućom matricom $G = \begin{bmatrix} I_{k_1} & Y \\ O & 2B \end{bmatrix}$. Neka je y_i $i-$ti redak od Y. Pretpostavimo da je S podskup od $\{1, \dots, n-k_1\}$, a t riječ duljine $n-k_1$ s komponentama 0 ili 1 takva da je $j-$ta komponenta od t jednaka 1 ako i samo ako je $j \in S$. Neka je $\mathbf{1}$ riječ duljine $n-k_1$ sa svim komponentama 1.*

1. *Ako je $n - k_1$ paran broj, onda stavimo*

$$\overline{y_i} = \begin{cases} y_i + 2t, & \text{ako je } wt_E(y_i + 2t) \equiv 7 \pmod 8 \\ y_i + 2t + 2 \cdot \mathbf{1}, & \text{inače} \end{cases}.$$

   Tada je $\overline{G} = \begin{bmatrix} I_{k_1} & \overline{Y} \\ O & 2B \end{bmatrix}$ generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$-koda $\overline{C}$ tipa II.

2. *Ako je $n - k_1$ neparan broj, provodimo sljedeće.*

   Neka je s_j broj parnih elemenata na $j-$toj komponenti u retcima od Y. Pretpostavimo *da je* $\sum_{j\in S} s_j$ *paran broj. Neka je* $K = \{i \mid wt_E(y_i + 2t) \equiv 3 \pmod 8\}$. *Neka je* $f : K \to K$ *bijekcija takva da je* $f(f(i)) = i$ *i* $f(i) \neq i$*, za sve* $i \in K$*. Stavimo:*

$$(h_i, \overline{y_i}) = \begin{cases} (\mathbf{0}, y_i + 2t), & \textit{ako je } wt_E(y_i + 2t) \equiv 7 \pmod 8 \\ (2e_{f(i)}, y_i + 2t + 2\cdot\mathbf{1}), & \textit{inače} \end{cases},$$

gdje je e_l *riječ duljine* k_1 *koja na* $l-$*toj komponenti ima* 1*, a na ostalim komponentama* 0*, a* $\mathbf{0}$ *je riječ duljine* k_1 *sa svim komponentama* 0*. Tada je* $\overline{G} = \begin{bmatrix} I_{k_1} + H & \overline{Y} \\ O & 2B \end{bmatrix}$ *generirajuća matrica* $\mathbb{Z}_4$*-koda* $\overline{C}$ *tipa II.*

Napomena 3.6. $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II generirani generaliziranom Haradinom metodom imaju isti rezidualni i torzijski kod kao polazni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.

U [8] je generaliziranom Haradinom metodom iz $\mathbb{Z}_4$-koda u oznaci C_{32}^{2u} iz napomene 3.2 dobiveno 17 novih međusobno neekvivalentih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{15}2^2$. Također, na taj način su u [8] iz $\mathbb{Z}_4$-koda u oznaci C_{40}^{2u} iz napomene 3.3 dobivena 102 nova međusobno neekvivalentna ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 40 i tipa $4^{19}2^2$.

Uočimo da za torzijski kod $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II dobivenog metodom udvostručavanja vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.13. *Neka je* C *samodualan* $\mathbb{Z}_4$*-kod duljine* n *i tipa* $4^{k_1}2^{k_2}$ *i* $2u \in \mathbb{Z}_4^n \setminus C$*. Neka je* G *generirajuća matrica od* C *u standardnom obliku. Označimo s* G_i $i-$*ti redak od* G*. Neka je* $B = \{G_1, \ldots, G_{k_1}, G_{k_1+1}, \ldots, G_{k_1+k_2}\}$*. Stavimo* $B_E = \{G_i \in B \mid \langle G_i, 2u\rangle = 0\}$ *i* $B_O = B \setminus B_E$*. Neka je* $G_i \in B_O$ *proizvoljan. Definiramo* $B_O' = \{G_i + G_j \mid G_j \in B_O\}$*. Neka je* $\widetilde{C}$ $\mathbb{Z}_4$*-kod s generirajućom matricom čiji retci su elementi skupa* $\widetilde{B} = B_O' \cup B_E \cup \{2u\}$*. Označimo sa* $S_i(w)$ *skup pozicija na kojima se nalazi element* $i \in \mathbb{Z}_4$ *u riječi* $w \in \mathbb{Z}_4^n$*. Tada je torzijski kod* $\widetilde{C}^{(2)}$ *jednak binarnom kodu* $C^{(2)} \oplus \langle u\rangle$ *, gdje je* $S_1(u) = S_2(2u)$*.*

Dokaz. Neka je $G_k' \in \mathbb{F}_2^n$ riječ takva da je $S_1(G_k') = S_2(G_k)$, za $k = k_1+1, \ldots, k_1+k_2$. Tada je

$$\{G_1 \pmod 2, \ldots, G_{k_1} \pmod 2, G_{k_1+1}', \ldots, G_{k_1+k_2}'\}$$

baza od $C^{(2)}$.

Skup B_O je neprazan. Pretpostavimo suprotno: $\langle G_i, 2u\rangle = 0$, za sve $G_i \in B$. Budući da je C samodualan, slijedi da je $2u \in C$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $2u \notin C$.

Budući da vrijedi

$$u + v \pmod 2 = u \pmod 2 +_2 v \pmod 2,$$

za sve $u, v \in \mathbb{Z}_4^n$, skup $\{G_i \pmod 2 +_2 G_j \pmod 2 \mid G_j \in B_O, j \neq i\} \cup \{G_i \pmod 2\} \cup \{G_l \pmod 2 \mid G_l \in B_E, l = 1, \ldots, k_1\} \cup \{G_{k_1+1}', \ldots, G_{k_1+k_2}'\} \cup \{u\}$ je baza za $\widetilde{C}^{(2)}$ pa su binarni kodovi $\widetilde{C}^{(2)}$ i $C^{(2)} \oplus \langle u\rangle$ jednaki. $\square$

Iz prethodnog teorema slijedi sljedeći korolar.

Korolar 3.1. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II. Neka je $\widetilde{C}$ $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II dobiven iz C metodom udvostručavanja. Tada je minimalna težina od $\widetilde{C}^{(2)}$ manja ili jednaka od minimalne težine od $C^{(2)}$.*

Primjenom metode udvostručavanja na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i 64 tipa $4^{14}2^{28}$, odnosno $4^{16}2^{32}$ iz [18] dobivamo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II s rezidualnim kodovima manje dimenzije.

Primjer 3.1. Označimo s C_{56}^{14} ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 56 i tipa $4^{14}2^{28}$ iz [18]. Metodom udvostručavanja iz C_{56}^{14} dobivamo 7099 $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{C_{56}^{14}}$ tipa II duljine 56 i tipa $4^{13}2^{30}$. Koristeći teorem 1.10, dobili smo da niti jedan od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{C_{56}^{14}}$ nije ekstremalan.

Računalnim pretraživanjem smo dobili da je minimalna težina torzijskih kodova $\widetilde{C_{56}^{14}}^{(2)}$ element skupa $\{2,4\}$ pa, iz propozicije 1.1 i napomene 3.6, slijedi da generaliziranom Haradinom metodom iz kodova $\widetilde{C_{56}^{14}}$ ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i tipa $4^{13}2^{30}$.

Primijenimo li metodu udvostručavanja na $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{C_{56}^{14}}$, dobivamo $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\widetilde{C_{56}^{14}}}$ tipa II duljine 56 i tipa $4^{12}2^{32}$. Iz korolara 3.1 i propozicije 1.1 slijedi da niti jedan od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\widetilde{C_{56}^{14}}}$ nije ekstremalan.

Primijenimo li generaliziranu Haradinu metodu na kodove $\widetilde{\widetilde{C_{56}^{14}}}$, iz napomene 3.6 slijedi da tako dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 56 i tipa $4^{12}2^{32}$ nisu ekstremalni.

Metodom udvostručavanja iz kodova $\widetilde{\widetilde{C_{56}^{14}}}$ možemo dobiti $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i tipa $4^{11}2^{34}$. Iz propozicije 2.6 slijedi da tako dobiveni kodovi nisu ekstremalni te da primjenom generalizirane Haradine metode na te kodove ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i tipa $4^{11}2^{34}$.

Iz propozicije 2.6 slijedi da daljnjom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode nećemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56.

Primjer 3.2. Označimo s C_{64}^{16} ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 64 i tipa $4^{16}2^{32}$ iz [18]. Metodom udvostručavanja iz C_{64}^{16} dobivamo 30827 $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{C_{64}^{16}}$ tipa II duljine 64 i tipa $4^{15}2^{34}$. Koristeći teorem 1.10, dobili smo da niti jedan od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{C_{64}^{16}}$ nije ekstremalan.

Računalnim pretraživanjem smo dobili da je minimalna težina torzijskih kodova $\widetilde{C_{64}^{16}}^{(2)}$ element skupa $\{2,4\}$ pa, iz propozicije 1.1 i napomene 3.6, slijedi da generaliziranom Haradinom metodom iz kodova $\widetilde{C_{64}^{16}}$ ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 i tipa $4^{15}2^{34}$.

Primijenimo li metodu udvostručavanja na $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{C_{64}^{16}}$, dobivamo $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}$ tipa II duljine 64 i tipa $4^{14}2^{36}$. Iz korolara 3.1 i propozicije 1.1 slijedi da niti jedan od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}$ nije ekstremalan.

Primijenimo li generaliziranu Haradinu metodu na kodove $\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}$, iz napomene 3.6 slijedi da tako dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa $4^{14}2^{36}$ nisu ekstremalni.

Primijenimo li metodu udvostručavanja na $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}$, dobivamo $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}}$ tipa II duljine 64 i tipa $4^{13}2^{38}$. Iz korolara 3.1 i propozicije 1.1 slijedi da niti jedan od $\mathbb{Z}_4$-kodova $\widetilde{\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}}$ nije ekstremalan.

Primijenimo li generaliziranu Haradinu metodu na kodove $\widetilde{\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}}$, iz napomene 3.6 slijedi da tako dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa $4^{13}2^{38}$ nisu ekstremalni.

Metodom udvostručavanja iz kodova $\widetilde{\widetilde{\widetilde{C_{64}^{16}}}}$ možemo dobiti $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 i tipa $4^{12}2^{40}$. Iz propozicije 2.7 slijedi da tako dobiveni kodovi nisu ekstremalni te da primjenom generalizirane Haradine metode na te kodove ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 i tipa $4^{12}2^{40}$.

Iz propozicije 2.7 slijedi da daljnjom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode nećemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64.

Dakle, uzastopnom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode iz ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 i 64 tipa $4^{14}2^{28}$, odnosno $4^{16}2^{32}$ iz [18] ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i 64.

3.3 Metoda nadogradnje

Metoda nadogradnje je metoda za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine $n+8$ iz $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine n.

Ovu metodu smo primijenili na nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 iz tablice 3.2 s ciljem konstrukcije novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40. Metodu nadogradnje ćemo koristiti i u poglavlju 4 kao pokušaj konstrukcije novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40.

Također, ovom metodom smo iz poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 pokušali dobiti nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64.

Sljedeći teorem je dokazan u [8].

Teorem 3.14. ***(Metoda nadogradnje)*** *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n. Neka je G generirajuća matrica od C. Neka je X 4×8 matrica s elementima iz $\mathbb{Z}_4$, a Y $4 \times n$ matrica s elementima iz $\mathbb{Z}_4$, tako da retci matrice $[X\ Y]$ imaju euklidske težine djeljive sa*

8 *i* $[X\ Y]$ *generira samoortogonalan* $\mathbb{Z}_4$*-kod. Neka je*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

generirajuća matrica oktakoda o_8*. Pretpostavimo da retci od* H *i* X *generiraju* $\mathbb{Z}_4^8$*. Tada je matrica*

$$G' = \begin{bmatrix} X & Y \\ -GY^T(HX^T)^{-1}H & G \end{bmatrix}$$

generirajuća matrica $\mathbb{Z}_4$*-koda* C' *tipa II duljine* $n+8$*.*

Napomena 3.7. Neka je C_8 ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 24 i tipa $4^9 2^6$ iz [25]. U [8] je, polazeći od C_8, metodom nadogradnje dobiveno najmanje 219 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{13}2^6$. Pri tome su matrice $[X\ Y]$ dobivene pseudoslučajnom pretragom. U [8] je navedeno prvih 20 matrica $[X\ Y]$ pomoću kojih su dobiveni ekstremalni kodovi.

Napomena 3.8. U [8] su, polazeći od ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 32 i tipa $4^{13}2^6$ s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix} 10000000000000000103311313330021 \\ 01000000000001001011201131112203 \\ 00100000000001010100220322332120 \\ 00010000000001111103030331031131 \\ 00001000000000110110313101012221 \\ 00000100000001100010022303003030 \\ 00000010000000010011322200100231 \\ 00000001000000100012322330122012 \\ 00000000100000111103330130232201 \\ 00000000010000011103201101223113 \\ 00000000001001011101121332330222 \\ 00000000000101111113201213320000 \\ 00000000000011111113113320002020 \\ 00000000000002000002200202220020 \\ 00000000000000200000002002200202 \\ 00000000000000020002002222202220 \\ 00000000000000002002020222000202 \\ 00000000000000000202022000202022 \\ 00000000000000000020022222020020 \end{bmatrix},$$

metodom nadogradnje dobivena najmanje 133 nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 40 i tipa $4^{17}2^6$. Pri tome su matrice $[X\ Y]$ dobivene pseudoslučajnom pretragom. U [8] je navedeno prvih 20 matrica $[X\ Y]$ pomoću kojih su dobiveni ekstremalni kodovi.

3.3.1 Novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 40 dobiveni metodom nadogradnje

Metodu nadogradnje smo primijenili na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^{11}2^{10}$ u oznakama $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ iz [36] te na 45 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ metodom udvostručavanja u potpoglavlju 3.1.3 (tipovi $4^{10}2^{12}$, $4^9 2^{14}$, $4^8 2^{16}$ i $4^7 2^{18}$) s ciljem dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40.

Pri tome smo koristili prvu matricu

$$[X\ Y] = \begin{bmatrix} 2100200111011022011111020100101001010020 \\ 0011101010111001000031130021210111101020 \\ 0000010202001102010011031002320112012000 \\ 0101000000011020112220031000100013000201 \end{bmatrix}$$

navedenu u [8].

Označimo s W_8 broj riječi težine 8, a s W_{12} broj riječi težine 12 u binarnom kodu.

Iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ smo dobili ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove $\tilde{C}'_{31,2}$ i $\tilde{C}'_{31,3}$ tipa II duljine 40 i tipa $4^{15}2^{10}$. Rezidualni kodovi dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\tilde{C}'_{31,2}$ i $\tilde{C}'_{31,3}$ imaju minimalnu težinu 8, $W_8 = 10$ i $W_8 = 6$, respektivno. Dakle, $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\tilde{C}'_{31,2}$ i $\tilde{C}'_{31,3}$ su međusobno neekvivalentni.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{15}2^{10}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,15}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Zbog toga su $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\tilde{C}'_{31,2}, \tilde{C}'_{31,3}$ i $C_{40,15}$ međusobno neekvivalentni. Kako je, prema [21], $C_{40,15}$ jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{15}2^{10}$ duljine 40, zaključujemo da smo dobili dva nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{15}2^{10}$ duljine 40: $\tilde{C}'_{31,2}$ i $\tilde{C}'_{31,3}$.

Iz $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{10}2^{12}$ u oznakama $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ iz potpoglavlja 3.1.3 smo dobili ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}'$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}'$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}'$ tipa II duljine 40 i tipa $4^{14}2^{12}$. Rezidualni kodovi dobivenih kodova imaju minimalnu težinu 8, $W_8 = 5, W_8 = 6$ i $W_8 = 4$, respektivno. Dakle, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi su međusobno neekvivalentni.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{14}2^{12}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,14}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Zbog toga su $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}'$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}'$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}'$ i $C_{40,14}$ međusobno neekvivalentni. Kako je, prema [21], $C_{40,14}$ jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{14}2^{12}$ duljine 40, zaključujemo da smo dobili tri nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{14}2^{12}$ duljine 40: $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}'$, $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}'$ i $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}'$.

Metodu nadogradnje smo primijenili i na 12 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$ dobivene iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}}$ za $2u \in \{00000000000000000000002222200002,$ $00000000000000000000002222022000, 00000000000000000000002222020002,$ $00000000000000000000002222000022, 00000000000000000000002220202020,$ $00000000000000000000002220020220, 00000000000000000000002202022222\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}}$ za

$$2u = 00000000000000000000002222020002$$

i iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}}$ za $2u \in \{00000000000000000000002222222222,$ $00000000000000000000002222200222, 00000000000000000000002222002002,$ $00000000000000000000002222000202\}$ u potpoglavlju 3.1.3. Time smo dobili ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 i tipa $4^{13}2^{14}$, osim iz koda

$$\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222002002 \rangle \, .$$

Iz tog koda smo dobili neekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 i tipa $4^{13}2^{14}$. Rezidualni kodovi dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova imaju minimalnu težinu 8, $W_8 = 1, W_8 = 4, W_8 = 1, W_8 = 2, W_8 = 3, W_8 = 4, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 3, W_8 = 2$ i $W_8 = 5$, respektivno. Dobili smo da su rezidualni kodovi s istim brojem W_8 međusobno neekvivalentni binarni kodovi. Dakle, 11 dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova je međusobno neekvivalentno.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{13}2^{14}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,13}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Osim $C_{40,13}$, poznat je još jedan ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{13}2^{14}$ duljine 40, do na ekvivalenciju ([36]). Rezidualni kod tog koda ima minimalnu težinu 12. Zbog toga su dobiveni ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi, $C_{40,13}$ i kod iz [36] međusobno neekvivalentni. Dakle, dobili smo 11 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{13}2^{14}$ duljine 40.

Metodu nadogradnje smo primijenili na 25 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ dobivene iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222222202, 00000000000000000000000220220000,$ $00000000000000000000000220222002, 00000000000000000000000202202220,$ $00000000000000000000000202200200, 00000000000000000000000202000022,$ $00000000000000000000000200222202, 00000000000000000000000200020022,$ $00000000000000000000000020222220\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222022000 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000220220220, 00000000000000000000000002002220\}$,
iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222020002 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222002000, 00000000000000000000000222002202,$ $00000000000000000000000220220220, 00000000000000000000000202200020\}$,

iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222000022 \rangle$ za

$$2u = 00000000000000000000000222222202,$$

iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,2_2}} \oplus \langle 00000000000000000000002222020002 \rangle$ za

$$2u = 00000000000000000000000222202002,$$

iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222222222 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000220220202, 00000000000000000000000220000022,$
$00000000000000000000000202220202, 00000000000000000000000200002022,$
$00000000000000000000000022200020, 00000000000000000000000000220220\}$,
i iz $\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200222 \rangle$ za
$2u \in \{00000000000000000000000222020202, 00000000000000000000000022200002\}$ u potpoglavlju 3.1.3. Time smo dobili ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 i tipa $4^{12}2^{16}$, osim iz kodova:

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000222222202 \rangle,$$

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000202202220 \rangle,$$

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000202200200 \rangle,$$

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000200222202 \rangle,$$

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000200020022 \rangle,$$

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,2_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222200002 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000020222220 \rangle$$

i

$$\left(\widetilde{\tilde{C}_{31,3_1}} \oplus \langle 00000000000000000000002222222222 \rangle\right) \oplus \langle 00000000000000000000000202220202 \rangle.$$

Iz tih sedam kodova smo dobili neekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 i tipa $4^{12}2^{16}$. Rezidualni kodovi dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova imaju minimalnu težinu 8 ili 12 sa sljedećim brojevima riječi minimalne težine: $W_{12} = 74, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_8 = 1, W_{12} = 74, W_8 = 1, W_8 = 1, W_{12} = 82, W_{12} = 82, W_8 = 3, W_{12} = 84, W_8 = 2, W_{12} = 88$ i $W_8 = 1$. Dobili smo da su rezidualni kodovi s istim brojem W_8, odnosno W_{12}, međusobno neekvivalentni binarni kodovi. Dakle, 18 dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova je međusobno neekvivalentno.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{12}2^{16}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,12}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Zbog toga su dobiveni ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi i $C_{40,12}$ međusobno neekvivalentni. Kako je, prema [21], $C_{40,12}$ jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{12}2^{16}$ duljine 40, zaključujemo da smo dobili 18 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^{12}2^{16}$ duljine 40.

Metodu nadogradnje smo primijenili na pet novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^{7}2^{18}$ dobivene u potpoglavlju 3.1.3 s generirajućim matricama:

$$
\begin{bmatrix}
00002000020022020000022220000222\\
00011000111021121100012102202203\\
01001000011122021011122103121311\\
10001000020021111011011111011122\\
00100000111010000010010031030132\\
00000100010111011111111022230213\\
00000010101000110111100101111011\\
00000001011110001001011111110011\\
00000000200000000000000020200222\\
00000000020000000000000020220022\\
00000000002000000000000000200022\\
00000000000200000000000000002220\\
00000000000020000000000002222200\\
00000000000002000000000002020222\\
00000000000000200000000022000222\\
00000000000000020000000022200220\\
00000000000000002000000002202202\\
00000000000000000200000000222022\\
00000000000000000020000020020200\\
00000000000000000002000022022200\\
00000000000000000000200022220200\\
00000000000000000000020000022222\\
00000000000000000000002000022200\\
00000000000000000000000222222202\\
00000000000000000000000020222220
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
00000020202220002002022222220022\\
00001010201121011001022203312302\\
01000010212110001101011100023202\\
10000010111211111101122130311031\\
00100000111100101110110013103100\\
00010000101011001111010010101111\\
00000100101001000100111103012010\\
00000001100001110011011020303223\\
00000000200000000000000020000022\\
00000000020000000000000020222020\\
00000000002000000000000000200022\\
00000000000200000000000000222220\\
00000000000020000000000002222200\\
00000000000002000000000002020222\\
00000000000000200000000022000222\\
00000000000000020000000022200220\\
00000000000000002000000002022202\\
00000000000000000200000000002022\\
00000000000000000020000020200200\\
00000000000000000002000022022200\\
00000000000000000000200022000200\\
00000000000000000000020000202222\\
00000000000000000000002000022200\\
00000000000000000000000222002202\\
00000000000000000000000022220202
\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}
00000200002222200220020200000220 \\
00001100002122201111120130230302 \\
00010100111121100211110230232121 \\
10000100002121110120111223221220 \\
01000000010111100010010111113103 \\
00100000100010111011111131022031 \\
00000010101000110111100101111011 \\
00000001011110001001011111110011 \\
00000000200000000000000020200222 \\
00000000020000000000000020020002 \\
00000000002000000000000000200022 \\
00000000000200000000000000202200 \\
00000000000020000000000002222200 \\
00000000000002000000000002220202 \\
00000000000000200000000022200202 \\
00000000000000020000000022200220 \\
00000000000000002000000002002222 \\
00000000000000000200000000222022 \\
00000000000000000020000020020200 \\
00000000000000000002000022222220 \\
00000000000000000000200022020220 \\
00000000000000000000020000222202 \\
00000000000000000000002000222220 \\
00000000000000000000000222222202 \\
00000000000000000000000022002200
\end{bmatrix},
\begin{bmatrix}
00000002202222222020000222022020 \\
00001001201121211021000201112302 \\
01000001101122111121001212111021 \\
10000001202222111110101222120013 \\
00100000110110011110100101011101 \\
00010000011011001111010010101111 \\
00000100101010110000010130132003 \\
00000010011001000100111103212210 \\
00000000200000000000000020020222 \\
00000000020000000000000020000022 \\
00000000002000000000000000000222 \\
00000000000200000000000000222220 \\
00000000000020000000000002022000 \\
00000000000002000000000002020222 \\
00000000000000200000000022200022 \\
00000000000000020000000022000020 \\
00000000000000002000000002022202 \\
00000000000000000200000000202222 \\
00000000000000000020000020200200 \\
00000000000000000002000022022200 \\
00000000000000000000200022200000 \\
00000000000000000000020000002022 \\
00000000000000000000002000222000 \\
00000000000000000000000222202002 \\
00000000000000000000000022220202
\end{bmatrix}
$$

i

$$\begin{bmatrix}
00000020000022222220222020220022\\
00010010010011121211211011223312\\
00100010111111221221112120012121\\
10000010111022121110121112313002\\
01000000011010000011001033122321\\
00001000000110011110101122000312\\
00000100110001111010000121020312\\
00000001000110010100011102113221\\
00000000200000000000000002222222\\
00000000020000000000000002200002\\
00000000002000000000000020022000\\
00000000000200000000000002000022\\
00000000000020000000000002202022\\
00000000000002000000000002000220\\
00000000000000200000000002200222\\
00000000000000020000000020200020\\
00000000000000002000000000200022\\
00000000000000000200000002020200\\
00000000000000000020000000020022\\
00000000000000000002000020020222\\
00000000000000000000200022022020\\
00000000000000000000020000022222\\
00000000000000000000002002002020\\
00000000000000000000000220220202\\
00000000000000000000000000220220
\end{bmatrix}.$$

Iz koda s drugom od navedenih pet generirajućih matrica smo dobili ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 i tipa $4^{11}2^{18}$. Iz kodova s preostalim generirajućim matricama smo dobili neekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 i tipa $4^{11}2^{18}$. Rezidualni kod dobivenog ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda ima minimalnu težinu 12 i $W_{12} = 42$.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{11}2^{18}$ duljine 40 u oznaci $C_{40,11}$ iz [21] ima rezidualni kod minimalne težine 4. Zbog toga su dobiveni ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod i $C_{40,11}$ međusobno neekvivalentni. Kako je, prema [21], $C_{40,11}$ jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{11}2^{18}$ duljine 40, zaključujemo da smo dobili novi ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^{11}2^{18}$ duljine 40.

U tablici 3.3 se nalaze brojevi novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 dobivenih metodom nadogradnje iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ i iz 45 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih u potpoglavlju 3.1.3.

Dobili smo ukupno 35 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40.

Tablica 3.3: Broj novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 dobivenih iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ i kodova iz njih dobivenih metodom udvostručavanja

tip	broj
$4^{15}2^{10}$	2
$4^{14}2^{12}$	3
$4^{13}2^{14}$	11
$4^{12}2^{16}$	18
$4^{11}2^{18}$	1

Napomena 3.9. Na nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 iz tablice 3.3 smo primijenili konstrukciju A_4 iz potpoglavlja 1.3. Prema teoremu 1.9 i napomeni 1.2, sve dobivene rešetke su ekstremalne parne unimodularne rešetke. Dakle, sve dobivene rešetke imaju minimalnu normu $\mu = 4$. Priljubljujući broj svih dobivenih rešetki je 39600.

3.3.2 Metoda nadogradnje na poznatim ekstremalnim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa II duljine 56

Neka je n djeljiv sa 4. Neka je X 4×8 matrica s elementima iz $\mathbb{Z}_4$, a Y $4 \times n$ matrica s elementima iz $\mathbb{Z}_4$, tako da retci matrice $[X\ Y]$ imaju euklidske težine djeljive sa 8 i $[X\ Y]$ generira samoortogonalan $\mathbb{Z}_4$-kod. Tada i matrica $[X\ Y\ X\ Y]$ generira samoortogonalan $\mathbb{Z}_4$-kod. Retci matrice $[X\ Y\ X\ Y]$ imaju euklidske težine djeljive sa 8. Dakle, matricu $[X\ Y\ X\ Y]$ možemo koristiti u metodi nadogradnje za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine $2(n+8)$ iz $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine $2n+8$.

Metodu nadogradnje smo primijenili na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 u oznakama C_{56}^{14}, $\mathcal{C}_{56}$ i $\mathcal{D}_{56,1}$ iz tablice 2.5 s ciljem dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64.

Koristili smo 20 matrica $[X\ Y]$ navedenih u [8]:

$$\begin{bmatrix} 20001012010211100011202001011010 \\ 01101101001110110100200111100201 \\ 01011012002012000000010210021002 \\ 01010110100010002012002001000020 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 00010100000101101120220112002110 \\ 11001010101110101111210102000001 \\ 01011200011010000022022000101002 \\ 11210001011002000000000120000210 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 01121202001000001201111011002010 \\ 00100111110110100210110101120100 \\ 12001002010000010021110120200200 \\ 10121000012011001000012000000002 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 02101000011010120001010102212011 \\ 11110100001102001111111000201100 \\ 02020010011200001020010010020112 \\ 00102002111020100000100012000100 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 001210200012011011000011112120100 \\ 110000102102110110110000111101011 \\ 020001000110010000002102212002101 \\ 002010010000102010001200100020101 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 021010102110101200010101022100001 \\ 111101001011020011111110002001000 \\ 020200100112002010200100100000112 \\ 001020020110200000001000120111100 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 101011021220100002000101001112 01 \\ 011111000121011121101011100000000 \\ 001001000202002000110110202200 11 \\ 000011122000100000011110020020 00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 020110201120111000110021020000 11 \\ 101001210000000110110110111210 11 \\ 200001000200210201100101220001 01 \\ 000010002022012010011100000001 01 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 010101110000210221012102001100 10 \\ 101110011112101021001010100010 10 \\ 010122211010000000102000211020 00 \\ 000000011100000200020100011202 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 010101000010110112022011200211 00 \\ 100010101011101011112101020000 11 \\ 000112000110100000220220001010 12 \\ 112100010110020000000001200002 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 110000112002000101010122101101 20 \\ 001121000002111110001011110101 01 \\ 001000200010102122110120120000 00 \\ 201100020200000100110000001011 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 101111210001001011202000200112 00 \\ 011010010000110110111210011002 11 \\ 000211000011120212012021000000 00 \\ 200000211211100010000000010120 00 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 111211100001100202010010201002 01 \\ 000101021110101011011111010102 00 \\ 001221100020112000100001020100 02 \\ 201001001002000000100011201020 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 010011011021101022021210010000 10 \\ 110000000110110120100102110111 11 \\ 010002101120001200202000011002 01 \\ 001220111100100000020020010010 00 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 010100001122121111012100000000 12 \\ 101110111012100000110010100211 01 \\ 002111200220100012200111000000 00 \\ 000001000000122110010010021001 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 010110201001121110122000002011 00 \\ 101100000111011000010121112110 01 \\ 010120002100000011020202100210 10 \\ 011001220100101201200000000010 00 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 100010111110000221210102011120 000 \\ 110001010012101110110121000010 11 \\ 101012200020002000100101201021 00 \\ 000210002200110010100100010201 00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 021011001010201002200110201110 10 \\ 111100110001011112112011000010 00 \\ 101220001100020020210010001000 21 \\ 001001010100200000010200011212 00 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 100120010101011022010100121010 02 \\ 010022001010101101001101110111 10 \\ 010100100002211000020012120200 10 \\ 001100120100001000201100002000 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 010121001001111002010120210001 20 \\ 100010101010111121101001201010 01 \\ 201121000020110000002201020100 01 \\ 001100010202011100020021000001 00 \end{bmatrix}.$$

Iz navedenih matrica $[X\ Y]$ konstruirali smo matrice $[X\ Y\ X\ Y]$. Kao što je već rečeno, dobivene matrice $[X\ Y\ X\ Y]$ možemo koristiti u metodi nadogradnje za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64.

Koristeći dobivenih 20 matrica $[X\ Y\ X\ Y]$, metodom nadogradnje smo iz C_{56}^{14} dobili $\mathbb{Z}_4$-kodove ${C_{56_i}^{14}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$. Kako bismo ispitali ekstremalnost dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 pomoću teorema 1.10, konstruirali smo rešetke $\Lambda_4({C_{56_i}^{14}}')$, $i = 1, \ldots, 20$. U tablici 3.4 se za $i = 1, \ldots, 20$ nalaze priljubljujući brojevi dobivenih rešetki $\Lambda_4({C_{56_i}^{14}}')$. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi ${C_{56_i}^{14}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ nisu ekstremalni.

Navedenih 20 matrica $[X\ Y\ X\ Y]$ smo također iskoristili u metodi nadogradnje na $\mathcal{C}_{56}$. Na taj način smo dobili $\mathbb{Z}_4$-kodove ${\mathcal{C}_{56_i}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa 4^{32}. Kako bismo ispitali ekstremalnost dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 pomoću teorema 1.10, konstruirali smo rešetke $\Lambda_4({\mathcal{C}_{56_i}}')$, $i = 1, \ldots, 20$. U tablici 3.5 se za $i = 1, \ldots, 20$ nalaze priljubljujući brojevi dobivenih rešetki $\Lambda_4({\mathcal{C}_{56_i}}')$. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi ${\mathcal{C}_{56_i}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} nisu ekstremalni.

Tablica 3.4: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih metodom nadogradnje iz C_{56}^{14}

i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj
1	174	8	200	15	246
2	166	9	164	16	182
3	196	10	188	17	196
4	192	11	162	18	138
5	218	12	170	19	194
6	198	13	144	20	168
7	206	14	152		

Navedenih 20 matrica $[X\ Y\ X\ Y]$ smo također iskoristili u metodi nadogradnje na $\mathcal{D}_{56,1}$. Na taj način smo dobili $\mathbb{Z}_4$-kodove ${\mathcal{D}_{56,1_i}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa 4^{32}. Kako bismo ispitali ekstremalnost dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 pomoću teorema 1.10, konstruirali smo rešetke $\Lambda_4({\mathcal{D}_{56,1_i}}')$, $i = 1, \ldots, 20$. U tablici 3.6 se za $i = 1, \ldots, 20$ nalaze priljubljujući brojevi dobivenih rešetki $\Lambda_4({\mathcal{D}_{56,1_i}}')$. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi ${\mathcal{D}_{56,1_i}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} nisu ekstremalni.

Tablica 3.5: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih metodom nadogradnje iz $\mathcal{C}_{56}$

i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj
1	136	8	140	15	144
2	144	9	134	16	138
3	150	10	136	17	142
4	138	11	134	18	154
5	132	12	132	19	134
6	144	13	146	20	140
7	142	14	140		

Tablica 3.6: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih metodom nadogradnje iz $\mathcal{D}_{56,1}$

i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj	i	priljubljujući broj
1	150	8	138	15	132
2	134	9	136	16	150
3	144	10	132	17	140
4	146	11	140	18	138
5	134	12	142	19	144
6	152	13	142	20	136
7	148	14	136		

Dakle, metodom nadogradnje smo iz C_{56}^{14}, $\mathcal{C}_{56}$ i $\mathcal{D}_{56,1}$ konstruirali 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ te 40 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa 4^{32}. Primjenom kriterija iz teorema 1.10, dobili smo da niti jedan od 60 konstruiranih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 nije ekstremalan.

Minimalne težine torzijskih kodova dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova ${C_{56_i}^{14}}'$, $i = 1, \ldots, 20$ su jednake 4, osim za $i = 13, 18$. Minimalne težine torzijskih kodova $\mathbb{Z}_4$-kodova ${C_{56_{13}}^{14}}'$ i ${C_{56_{18}}^{14}}'$ su jednake 6 pa ćemo, zbog propozicije 1.1 i napomene 3.6, na te kodove primijeniti generaliziranu Haradinu metodu (teorem 3.12) s ciljem dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$.

Budući da je $n = 64, k_1 = 18$, za konstrukciju su nam potrebni podskupovi skupa $\{1, \ldots, 46\}$. Slučajno smo odabrali 20 podskupova $S \subseteq \{1, \ldots, 46\}$:
$\{1, 2\}, \{22, 24, 26, 28, 32, 36, 40, 45, 46\}, \{19, 23, 26, 28, 31, 32, 34, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 46\}$,
$\{19, 20, 22, 23, 25, 29, 30, 33, 35, 36, 38, 41, 43, 44, 45, 46\}, \{22, 24, 26, 28, 32, 36, 40, 45, 46\}$,
$\{19, 23, 26, 28, 31, 32, 34, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 46\}$,
$\{19, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 42, 43, 45\}$,

$\{19, 22, 24, 28, 29, 30, 32, 36, 37, 43\}, \{19, 24, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 37, 39, 40, 42, 43, 45\}$,
$\{19, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 39, 41, 42, 44, 45, 46\}$,
$\{19, 23, 24, 25, 30, 31, 34, 37, 38, 40, 41, 42, 44, 45, 46\}$,
$\{19, 22, 25, 26, 27, 28, 33, 34, 35, 38, 41, 42, 43, 46\}, \{19, 25, 27, 28, 29, 36, 40, 41, 42, 43\}$,
$\{20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 40, 42, 43, 44, 45\}$,
$\{19, 20, 21, 23, 24, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43\}$,
$\{22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 44, 45\}$,
$\{19, 21, 28, 29, 32, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 44, 45\}$,
$\{20, 21, 22, 25, 29, 30, 32, 33, 36, 37, 39, 40, 43, 45, 46\}$,
$\{19, 20, 29, 31, 34, 38, 42, 44, 45, 46\}, \{21, 23, 24, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 36, 39, 40, 45, 46\}$.
Označimo s $j = 1, \dots, 20$ redni broj podskupa S.

Koristeći navedene podskupove S, generaliziranom Haradinom metodom smo iz ${C_{56_{13}}^{14}}'$ dobili 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ čije pripadne rešetke imaju priljubljujući broj iz tablice 3.7. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ nisu ekstremalni.

Koristeći navedene podskupove S, generaliziranom Haradinom metodom smo iz ${C_{56_{18}}^{14}}'$ dobili 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ čije pripadne rešetke imaju priljubljujući broj iz tablice 3.8. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ nisu ekstremalni.

Tablica 3.7: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih generaliziranom Haradinom metodom iz ${C_{56_{13}}^{14}}'$

j	priljubljujući broj	j	priljubljujući broj	j	priljubljujući broj
1	150	8	152	15	144
2	132	9	140	16	144
3	134	10	146	17	144
4	154	11	142	18	142
5	132	12	138	19	142
6	134	13	136	20	140
7	140	14	144		

Tablica 3.8: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih generaliziranom Haradinom metodom iz $C_{56_{18}}^{14}{}'$

j	priljubljujući broj	j	priljubljujući broj	j	priljubljujući broj
1	136	8	140	15	132
2	140	9	130	16	144
3	138	10	140	17	144
4	134	11	140	18	142
5	140	12	140	19	144
6	138	13	138	20	138
7	136	14	144		

Minimalne težine torzijskih kodova dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\mathcal{C}_{56_i}{}'$, $i = 1, \dots, 20$ su jednake 8, osim za $i = 5$. Minimalna težina torzijskog koda $\mathbb{Z}_4$-koda $\mathcal{C}_{56_5}{}'$ je jednaka 12. Budući da je rezidualni kod $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} samodualan binarni kod, on je jednak torzijskom kodu tog $\mathbb{Z}_4$-koda. Haradinu metodu (teorem 3.11) ćemo primijeniti na $\mathbb{Z}_4$-kod $\mathcal{C}_{56_5}{}'$ jer bismo, ukoliko na taj način dobijemo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 i tipa 4^{32}, na njih mogli primijeniti metodu udvostručavanja (teorem 3.5). U primjeni Haradine metode na $\mathbb{Z}_4$-kod $\mathcal{C}_{56_5}{}'$ koristit ćemo skupove $S \cap \{1, \dots, 32\}$ za navedenih 20 podskupova S. Označimo s $k = 1, \dots, 20$ redni broj skupa $S \cap \{1, \dots, 32\}$.

Dobili smo 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} čije pripadne rešetke imaju priljubljujući broj iz tablice 3.9. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} nisu ekstremalni.

Minimalne težine torzijskih kodova dobivenih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\mathcal{D}_{56,1_i}{}'$, $i = 1, \dots, 20$ su jednake 8, osim za $i = 8, 13$. Minimalne težine torzijskih kodova $\mathbb{Z}_4$-kodova $\mathcal{D}_{56,1_8}{}'$ i $\mathcal{D}_{56,1_{13}}{}'$ su jednake 12. Na te $\mathbb{Z}_4$-kodove ćemo primijeniti Haradinu metodu (teorem 3.11) koristeći skupove $S \cap \{1, \dots, 32\}$ za navedenih 20 podskupova S.

Iz $\mathcal{D}_{56,1_8}{}'$ smo dobili 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} čije pripadne rešetke imaju priljubljujući broj iz tablice 3.10. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} nisu ekstremalni.

Iz $\mathcal{D}_{56,1_{13}}{}'$ smo dobili 20 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} čije pripadne rešetke imaju priljubljujući broj iz tablice 3.11. Budući da nismo dobili priljubljujući broj 128, prema teoremu 1.10, dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 64 i tipa 4^{32} nisu ekstremalni.

Dakle, generaliziranom Haradinom metodom smo dobili 40 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa $4^{18}2^{28}$ te 60 $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 i tipa 4^{32}. Primjenom kriterija iz teorema 1.10, dobili smo da niti jedan od 100 tako konstruiranih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 64 nije ekstremalan.

Tablica 3.9: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih Haradinom metodom iz ${\mathcal{C}_{56_5}}'$

k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj
1	134	8	134	15	132
2	136	9	134	16	136
3	132	10	132	17	140
4	142	11	134	18	132
5	136	12	134	19	134
6	132	13	132	20	138
7	132	14	130		

Tablica 3.10: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih Haradinom metodom iz ${\mathcal{D}_{56,1_8}}'$

k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj
1	142	8	144	15	144
2	146	9	148	16	142
3	146	10	144	17	144
4	146	11	146	18	144
5	146	12	152	19	138
6	146	13	138	20	150
7	152	14	140		

Tablica 3.11: Priljubljujući brojevi rešetki kodova konstruiranih Haradinom metodom iz ${\mathcal{D}_{56,1_{13}}}'$

k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj	k	priljubljujući broj
1	140	8	142	15	146
2	138	9	144	16	148
3	134	10	158	17	142
4	140	11	140	18	146
5	138	12	138	19	144
6	164	13	144	20	146
7	148	14	146		

Poglavlje 4

Konstrukcija novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz Hadamardovih matrica

U ovom poglavlju konstruiramo binarne kodove iz Hadamardovih matrica, a potom $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II koristeći konstrukciju iz potpoglavlja 2.2. Za dobivene $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II ispitujemo njihovu ekstremalnost.

4.1 Binarni kodovi pridruženi Hadamardovim matricama reda $n = 8m$

U ovom potpoglavlju pokazujemo da su binarni kodovi pridruženi Hadamardovim matricama reda $n = 8m$ dopustivi, odnosno da se mogu koristiti za konstrukciju $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II iz potpoglavlja 2.2. Navodimo nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 dobivene iz Hadamardovih matrica.

Sljedeći teorem se može naći u [42].

Teorem 4.1. *Neka je $\mathcal{D}$ 2-(v, k, λ) dizajn s veličinama presjeka blokova $s_1, \ldots, s_m$. Neka je C_1 binarni kod generiran retcima matrice incidencije dizajna $\mathcal{D}$. Tada vrijedi:*

1. *ako su $k, s_1, \ldots, s_m$ parni brojevi, tada je C_1 samoortogonalan kod,*
2. *ako su $v, k, s_1, \ldots, s_m$ parni brojevi, tada je C_1 sadržan u samodualnom kodu duljine v,*
3. *ako je $v \equiv 0 \pmod 8$, $k \equiv 0 \pmod 4$ i ako su $s_1, \ldots, s_m$ parni brojevi, tada je C_1 sadržan u dvostruko parnom samodualnom kodu duljine v.*

4. $C_1^\perp$ *ima minimalnu težinu veću ili jednaku od* $\frac{r+\lambda}{\lambda}$.

Koristeći teorem 4.1, dokazali smo sljedeće korolare:

Korolar 4.1. *Neka je* H *Hadamardova matrica reda* $n = 8m$. *Tada je* $C_2(H)$ *dopustiv kod duljine* n.

Dokaz. $C_2(H)$ je binarni kod generiran retcima matrice incidencije 3-dizajna $\mathcal{D}^*$ dobivenog iz H. Prema propoziciji 1.2, svaki 3-(v,k,λ) dizajn je 2-(v,k,λ_2) dizajn za $\lambda_2 = \lambda\binom{v-2}{t-2}/\binom{k-2}{t-2}$. $\mathcal{D}^*$ je 3-$(n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}n-1)$ dizajn pa ujedno i 2-$(n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n-1)$ dizajn. Dakle, $C_2(H)$ je binarni kod generiran retcima matrice incidencije 2-dizajna. Po napomeni 1.3 i teoremu 1.14, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $H = [h_{i,j}]$ normalizirana Hadamardova matrica. Za $1 \leq i \leq n$ označimo s r_i $i-$ti redak od H. Budući da r_1 sadrži n elemenata 1 i vrijedi $r_1 \cdot r_i^T = 0$ za $i \geq 2$, svaki redak r_i za $i \geq 2$ sadrži $\frac{n}{2}$ elemenata 1 i $\frac{n}{2}$ elemenata -1. Definirajmo:
$a = |\{j \mid h_{i,j} = h_{i',j} = 1\}|$,
$b = |\{j \mid h_{i,j} = 1, h_{i',j} = -1\}|$,
$c = |\{j \mid h_{i,j} = -1, h_{i',j} = 1\}|$,
$d = |\{j \mid h_{i,j} = h_{i',j} = -1\}|$, za $2 \leq i < i' \leq n$. Vrijedi:

$$a + b + c + d = n$$

$$a + b = \frac{n}{2}$$

$$a + c = \frac{n}{2}$$

$$a - b - c + d = 0$$

Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $a = b = c = d = \frac{n}{4}$.
Blok u $\mathcal{D}^*$ koji sadrži simbol ∞ i njegov komplement imaju prazan presjek. Dva različita bloka iz $\mathcal{D}^*$ koja sadrže simbol ∞ imaju točno a zajedničkih točaka. Blok koji sadrži simbol ∞ i blok koji ne sadrži simbol ∞ i nije njegov komplement imaju točno b zajedničkih točaka. Dva različita bloka koja ne sadrže simbol ∞ imaju točno d zajedničkih točaka. Budući da je n djeljivo sa 8, $\frac{n}{2}$ djeljivo sa 4, a presječni brojevi $s_1 = 0$ i $s_2 = \frac{n}{4}$ su parni brojevi, po teoremu 4.1 $C_2(H)$ je dvostruko paran kod.
Budući da je za svaki blok Hadamardovog 3-dizajna $\mathcal{D}^*$ njegov komplement također blok tog dizajna, $C_2(H)$ sadrži vektor sa svim komponentama 1.
Dakle, $C_2(H)$ je dopustiv binarni kod. □

Po korolaru 4.1, binarni kod $C_2(H)$, gdje je H Hadamardova matrica reda $n = 8m$, možemo koristiti u konstrukciji 2 iz potpoglavlja 2.2.

Korolar 4.2. *Neka je H Hadamardova matrica reda $n \in \{8, 16, 24, 32, 40\}$. Tada je $C_2(H)$ dopustiv kod takav da $C_2(H)^\perp$ ima minimalnu težinu veću od ili jednaku $2\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2$.*

Dokaz. Neka je H Hadamardova matrica reda $n \in \{8, 16, 24, 32, 40\}$. $C_2(H)$ je dopustiv kod po korolaru 4.1. Budući da $C_2(H)$ sadrži vektor sa svim komponentama 1, $C_2(H)^\perp$ je paran kod pa je njegova minimalna težina veća od ili jednaka dva.
Iz teorema 4.1, teorema 1.11 i dokaza korolara 4.1 slijedi da je minimalna težina od $C_2(H)^\perp$ veća ili jednaka od $\frac{3n-4}{n-2}$. Za $n \in \{24, 32, 40\}$ ovaj broj je veći od ili jednak tri, a budući da je $C_2(H)^\perp$ paran kod, taj broj je veći od ili jednak četiri.
Dakle, $C_2(H)^\perp$ ima minimalnu težinu veću ili jednaku od $2\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 2$. □

Definicija 4.1. Neka je H Hadamardova matrica. Matricu $B = \frac{1}{2}(H + J)$, gdje je J matrica sa svim elementima 1, zovemo **binarnom Hadamardovom matricom** pridruženom H.

Sljedeća tvrdnja je dokazana u [32].

Propozicija 4.1. *Neka je H normalizirana Hadamardova matrica reda $n = 8m$, gdje je $(2, m) = 1$. Neka je B binarna Hadamardova matrica pridružena H. Tada je binarni kod generiran retcima matrice B samodualan dvostruko paran kod duljine n.*

Propozicija 4.2. *Neka je H normalizirana Hadamardova matrica. Neka je B binarna Hadamardova matrica pridružena H. Binarni kod generiran retcima matrice B jednak je kodu $C_2(H)$.*

Dokaz. Neka je H normalizirana Hadamardova matrica reda n i neka je B binarna Hadamardova matrica pridružena H. Matrica M dobivena iz H uklanjanjem prvog retka i prvog stupca i zamjenom elemenata -1 s elementima 0 je matrica incidencije Hadamardovog dizajna (prema dokazu teorema 1.13). Matricu incidencije M^* Hadamardovog 3−dizajna $\mathcal{D}^*$ dobivamo na sljedeći način: matrici M dodamo prvi stupac sa svim jedinicama. Označimo dobivenu matricu s M'. Neka je M'' matrica reda $(n-1) \times n$ s elementima iz $\mathbb{Z}_2$ koja na poziciji (i, j) ima element 1 ako i samo ako matrica M' na poziciji (i, j) ima element 0. Retci matrice $M^* = \begin{bmatrix} M' \\ M'' \end{bmatrix}$ generiraju kod $C_2(H)$.
Pribrojimo $i-$ti redak matrice M^* $(i+n-1)-$tom retku matrice M^* za $i = 1, \ldots, n-1$. Dobivamo matricu $\begin{bmatrix} M' \\ M''' \end{bmatrix}$, pri čemu su svi retci matrice M''' vektori sa svim komponentama 1. Retci matrice $\begin{bmatrix} M' \\ M''' \end{bmatrix}$ generiraju binarni kod generiran retcima matrice B.
Dakle, kod $C_2(H)$ je jednak binarnom kodu generiranom retcima matrice B. □

Napomena 4.1. Iz propozicije 4.1 i propozicije 4.2 slijedi da je binarni kod $C_2(H)$, gdje je H Hadamardova matrica reda $n = 8m$ i $(2, m) = 1$, samodualan.

Do na ekvivalenciju, postoji jedinstvena Hadamardova matrica reda 8. Postoji točno pet međusobno neekvivalentnih Hadamardovih matrica reda 16, točno 60 međusobno neekvivalentnih Hadamardovih matrica reda 24 i najmanje 13 707 126 međusobno neekvivalentnih Hadamardovih matrica reda 32 ([27]).

Neka je H Hadamardova matrica reda 8. Tada je $C_2(H)$ ekvivalentan proširenom Hammingovom $[8, 4, 4]$ kodu. Oktakod o_8 je jedinstveni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 8 i tipa 4^4 do na ekvivalenciju ([10]) pa iz $C_2(H)$ konstrukcijom 2 iz potpoglavlja 2.2 možemo dobiti samo o_8, do na ekvivalenciju.

Označimo s $H^{(i)}$, $i = 1, \dots, 5$, predstavnike klasa ekvivalencije Hadamardovih matrica reda 16 iz [38]. Tada kodovi $C_2(H^{(i)})$, $i = 1, \dots, 5$, imaju redom parametre:

$$[16, 5, 8], [16, 6, 4], [16, 7, 4], [16, 8, 4], [16, 8, 4].$$

Kodovi $C_2(H^{(4)})$ i $C_2(H^{(5)})$ su međusobno neekvivalentni.

Neka je H Hadamardova matrica reda 24. Prema napomeni 4.1 i [31], $C_2(H)$ je binarni kod s parametrima $[24, 12, 4]$ ili $[24, 12, 8]$.

4.1.1 Novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 32

U ovom potpoglavlju navodimo nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 dobivene polazeći od Hadamardovih matrica reda 32. Na te kodove primjenjujemo metodu udvostručavanja.

Primjer 4.1. Neka je H sljedeća Hadamardova matrica reda 32 u oznaci had.32.pal iz

[38] ($-$ označava element -1):

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
1 & - \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\
1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
1 & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\
1 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - \\
1 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\
1 & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1
\end{array}\right].$$

$C_2(H)$ je dopustiv binarni $[32, 7, 8]$ kod. Minimalna težina koda $C_2(H)^{\perp}$ je jednaka 4. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $G_1 = \left[\begin{array}{cc} F & \tilde{I}_7 \end{array}\right]$ generirajuća matrica koda $C_2(H)$, gdje je

$$F = \left[\begin{array}{c}
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \\
1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1 \\
1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0
\end{array}\right].$$

Konstrukcijom 2 iz potpoglavlja 2.2 dolazimo do 2^{15} generirajućih matrica za $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 oblika

$$\left[\begin{array}{cc} F & \tilde{I}_7 + 2B \\ 2H & O \end{array}\right],$$

gdje je

$$2H = \begin{bmatrix}
0&0&2&2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&0&0&2&0&2&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&0&0&0&0&0&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&2&0&0&0&0&0&2&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&2&0&0&0&0&2&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&2&2&0&0&0&0&2&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&0&0&0&0&2&0&0&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&2&0&0&2&0&0&2&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&0&0&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&2&2&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&0&2&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&0&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
2&2&2&2&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\
2&2&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\
2&2&2&2&2&0&2&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\
2&2&0&0&2&0&2&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\
2&2&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2
\end{bmatrix}.$$

Pretraživanjem matrica B smo dobili da je kod $C_2(H)$ izvediv. Matrica

$$B = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0
\end{bmatrix}$$

je prva za koju smo dobili generirajuću matricu

$$\begin{bmatrix} F & \tilde{I}_7 + 2B \\ 2H & O \end{bmatrix}$$

ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^7 2^{18}$ duljine 32. Budući da je minimalna težina koda $C^{(1)}_{32,7}$ iz napomene 2.1 jednaka 4, a minimalna težina od $C_2(H)$ jednaka 8, $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz $C_2(H)$, za danu matricu B, je novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^7 2^{18}$ duljine 32.

Koristeći Hadamardove dizajne s parametrima 2-$(31, 15, 2)$, u [3] je dobiven 21 međusobno neekvivalentan pridruženi binarni kod duljine 32 u oznaci $C_1, \dots, C_{21}$. Prema korolaru 4.1, kodovi $C_1, \ldots, C_{21}$ su dopustivi. Na $C_1, \ldots, C_{21}$ je primijenjena konstrukcija 1 samodualnih $\mathbb{Z}_4$-kodova iz potpoglavlja 2.2. Pseudoslučajnom pretragom su dobiveni ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II iz kodova C_1, C_2, C_7, C_{10} i C_{14}. Binarni kodovi C_1, C_2, C_7, C_{10} i C_{14} su trostruko parni.

Na opisani način je dobiveno najmanje pet međusobno neekvivalentnih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II, kako je prikazano u tablici 4.1. E_{16} je oznaka za broj riječi euklidske težine 16 u dobivenim $\mathbb{Z}_4$-kodovima.

Tablica 4.1: Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II iz $C_1, \ldots, C_{21}$

Binarni kod	$[n, k, d]$	Broj dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II	Tip	E_{16}
C_1	[32,6,16]	118	$4^6 2^{20}$	128216
C_2	[32,9,8]	114	$4^9 2^{14}$	120152
C_7	[32,9,8]	91	$4^9 2^{14}$	120152
C_{10}	[32,7,8]	296	$4^7 2^{18}$	123608
C_{14}	[32,10,8]	304	$4^{10} 2^{12}$	119576

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 32 konstruirani u [8] su tipa $4^{15}2^2$, $4^{14}2^4$ i $4^{13}2^6$ pa nisu ekvivalentni $\mathbb{Z}_4$-kodovima dobivenim iz C_1, C_2, C_7, C_{10} i C_{14}.

Prema propoziciji 2.3, ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 tipa $4^6 2^{20}$ je jedinstven do na ekvivalenciju pa niti jedan od ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II dobivenih iz C_1 nije nov.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II dobiveni iz C_2 i C_7 su neekvivalentni s kodom $C_{32,9}$ iz napomene 2.1 i s 12 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 tipa $4^9 2^{14}$ dobivenih algoritmom A u potpoglavlju 3.1.3 jer C_2 i C_7 imaju minimalnu težinu 8. Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II dobiveni iz C_{10} su neekvivalentni s kodom $C_{32,7}$ iz napomene 2.1 i s pet novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 tipa $4^7 2^{18}$ dobivenih algoritmom A u potpoglavlju 3.1.3 jer C_{10} ima minimalnu težinu 8. Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II dobiveni iz C_{14} su neekvivalentni s kodom $C_{32,10}$ iz napomene 2.1 i s tri nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 32 tipa $4^{10}2^{12}$ dobivenih algoritmom A u potpoglavlju 3.1.3 jer C_{14} ima minimalnu težinu 8.

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^7 2^{18}$ duljine 32 iz primjera 4.1 i ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II dobiveni iz C_{10} imaju ekvivalentne rezidualne kodove i isti broj E_{16}.

Dakle, dobivena su najmanje četiri nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II.

Za $i = 1, 2, 7, 10, 14$, svi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II dobiveni iz C_i imaju isti rezidualni kod (C_i) i isti broj riječi euklidske težine 16. S obzirom na to, u daljnjim konstrukcijama ćemo koristiti po jednog predstavnika dobivenih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II, u oznaci $\mathbf{C}_i$, za svaki $i = 1, 2, 7, 10, 14$.

Neka je $\mathbf{C}_1$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz binarnog koda C_1 s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix}
11010001101111001011100101320020 \\
11011110010000110111100101232202 \\
11011110010111001000011011023200 \\
10111001011100101110010110022322 \\
11100101110010111001011100200230 \\
01110010111001011100101110020201 \\
02022200000000000000000000000000 \\
22002020000000000000000000000000 \\
00222002000000000000000000000000 \\
22222000200000000000000000000000 \\
20022000020000000000000000000000 \\
20202000002000000000000000000000 \\
02020000000220000000000000000000 \\
22000000000202000000000000000000 \\
00220000000200200000000000000000 \\
22220000000200020000000000000000 \\
20020000000200002000000000000000 \\
20200000000200000200000000000000 \\
20222000000200000020000000000000 \\
22202000000200000002000000000000 \\
02222000000200000000200000000000 \\
20002000000200000000020000000000 \\
02002000000200000000002000000000 \\
00202000000200000000000200000000 \\
00022000000200000000000020000000 \\
22020000000000000000000002000000
\end{bmatrix}.$$

Iz propozicije 2.1 slijedi da metodom udvostručavanja iz $\mathbf{C}_1$ (ali i iz bilo kojeg drugog $\mathbb{Z}_4$-koda dobivenog iz C_1) ne možemo dobiti ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.

Neka je $\mathbf{C}_{10}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz binarnog koda C_{10} s generirajućom matricom

$$
\begin{bmatrix}
00011111110000000000000003022000 \\
00000000001111111000000000322000 \\
00000000000000000111111102210202 \\
11001110010111001011100112201022 \\
01110111001011100101110010020102 \\
11100101110010111001011100002012 \\
10111110010111001011100101002221 \\
20222000000000000000000000000000 \\
02220020000000000000000000000000 \\
02200202000000000000000000000000 \\
20200200200000000000000000000000 \\
22000200020000000000000000000000 \\
20200000002200000000000000000000 \\
00020200002020000000000000000000 \\
02200000002002000000000000000000 \\
02220200002000200000000000000000 \\
20220200002000020000000000000000 \\
22020200002000002000000000000000 \\
20200000000000000220000000000000 \\
00020200000000000202000000000000 \\
02200000000000000200200000000000 \\
02220200000000000200020000000000 \\
20220200000000000200002000000000 \\
22020200000000000200000200000000 \\
00220200000000000000000020000000
\end{bmatrix}.
$$

Iz propozicije 2.3 slijedi da metodom udvostručavanja iz $\mathbf{C}_{10}$ (ali i iz bilo kojeg drugog $\mathbb{Z}_4$-koda dobivenog iz C_{10}) ne možemo dobiti novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II.

Neka je $\mathbf{C}_2$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz binarnog koda C_2 s generirajućom matricom

$$
\begin{bmatrix}
100000011111110111111101100000202 \\
11111110000000111111101010202000 \\
11111110111111100000001100100000 0 \\
11000000110000001100000010020320000 \\
10100000101000001010000010000230002 \\
1001000100100010010001002000100 2 \\
1000100100010010001001020000012 0 \\
1000010100001010000101000000023 2 \\
1000000110000001100000011020002202 1 \\
02200000220000000000000000000000 \\
02020000202000000000000000000000 \\
02002000200200000000000000000000 \\
02000200200020000000000000000000 \\
02000020200002000000000000000000 \\
02000002200000200000000000000000 \\
20000002200000020000000000000000 \\
22200002200000002000000000000000 \\
22020002200000000200000000000000 \\
22002002200000000020000000000000 \\
22000202200000000002000000000000 \\
22000022200000000000200000000000 \\
22000000200000000000020000000000 \\
22222220000000000000002000000000
\end{bmatrix}.
$$

Algoritam iz rezultata 3.1 daje 69 kandidata $2u$ za kod $\mathbf{C}_2$. Prema rezultatu 3.1, svi kodovi konstruirani metodom udvostručavanja pomoću tih kandidata trebaju biti ekstremalni. Međutim, među tim kandidatima, za sve $2u$ za koje je
$S_2(2u) \in \{\{24, 25, 26, 27, 31, 32\}, \{24, 25, 26, 28, 29, 31\}, \{24, 25, 26, 28, 30, 32\},$
$\{24, 25, 26, 30, 31, 32\}, \{24, 25, 27, 28, 29, 32\}, \{24, 26, 27, 28, 29, 32\}, \{24, 27, 28, 29\},$
$\{24, 28, 29, 31\}, \{24, 28, 30, 32\}, \{24, 29, 30, 31\}, \{25, 26, 28, 29, 31, 32\},$
$\{25, 26, 29, 30, 31, 32\}, \{25, 27, 31, 32\}, \{25, 30, 31, 32\}, \{26, 27, 28, 29\},$
$\{26, 27, 31, 32\}, \{26, 29, 30, 31\}, \{28, 29, 31, 32\}, \{29, 30, 31, 32\}\}$, dobivamo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II tipa $4^8 2^{16}$ koji nisu ekstremalni. Za ostale kandidate $2u$, dobivamo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II tipa $4^8 2^{16}$ čiji rezidualni kodovi imaju minimalnu težinu 8, pa su svi ti $\mathbb{Z}_4$-kodovi neekvivalentni s kodom $C_{32,8}$ iz napomene 2.1.

Primjenom algoritma A na kod $\mathbf{C}_2$ dobivamo 72 kandidata $2u$. Među ovim kandidatima se ne nalazi dobivenih 19 kandidata koji ne daju ekstremalne kodove. Nadalje, dobili smo još 22 kandidata $2u$ koji daju ekstremalne kodove:
$S_2(2u) \in \{\{28, 29, 30, 31\}, \{27, 28, 29, 31\}, \{26, 29, 31, 32\}, \{26, 28, 31, 32\}, \{26, 28, 30, 31\},$

$\{26, 27, 28, 31\}, \{25, 29, 31, 32\}, \{25, 28, 30, 31\}, \{25, 27, 28, 31\}, \{25, 26, 28, 29, 30, 31\},$ $\{25, 26, 27, 30, 31, 32\}, \{25, 26, 27, 28, 31, 32\}, \{25, 26, 27, 28, 29, 31\}, \{24, 28, 29, 32\},$ $\{24, 27, 30, 32\}, \{24, 26, 28, 30, 31, 32\}, \{24, 26, 27, 28, 30, 32\}, \{24, 25, 28, 30, 31, 32\},$ $\{24, 25, 27, 28, 30, 32\}, \{24, 25, 26, 28, 29, 32\}, \{24, 25, 26, 27, 30, 31\}, \{24, 25, 26, 27, 28, 30\}\}$. Metodom udvostručavanja za ove kandidate $2u$, dobivamo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ čiji rezidualni kodovi imaju minimalnu težinu 8. Sva 72 $\mathbb{Z}_4$-koda dobivena metodom udvostručavanja iz $\mathbf{C}_2$ imaju međusobno ekvivalentne rezidualne kodove s težinskim enumeratorom

$$P = x_0^{32} + 12x_0^{24}x_1^8 + 230x_0^{16}x_1^{16} + 12x_0^8x_1^{24} + x_1^{32}$$

i isti broj riječi minimalne euklidske težine ($E_{16} = 121304$).

Prema [21], jedini poznati ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ ima rezidualni kod minimalne težine 4. U potpoglavlju 3.1.3 smo algoritmom A dobili 25 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ s rezidualnim kodovima minimalne težine 12. Dakle, metodom udvostručavanja iz $\mathbf{C}_2$ smo dobili novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$.

Riječi $v \in \mathbf{C}_2$ iz koraka 2.2.1. u rezultatu 3.1 za koje $S_2(v)$ nije podskup od $\{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} = \{24, \ldots, 32\}$ su:

10000001000000122222211111020020, 30000003000000322222233333020020,
01000000122222212222221131122202, 03000000322222232222222331332202,
001100000011000001100002202231000, 003300000033000003300002202213000,
001010000010100001010002022230122, 003030000030300003030002022210322,
001001000010010001001002222230230, 003003000030030003003002222210210,
00100010010001001000102022212023, 00300030030003003000302022232021,
000110000001100000110002002001122, 000330000003300000330002002003322,
0001010000010100000101002202001230, 0003030000030300000303002202003210,
00010010001001000100102002023023, 00030030003003000300302002021021,
0000110000001100000011002022000312, 0000330000003300000033002022000132,
0000101000001010000010102222022101, 0000303000003030000030302222022303,
0000011000000110000001102022022213, 0000033000000330000003302022022231,
10100001010000123222212222012220, 30300001030000103000032002210002,
30300003030000321222232222032220, 30100003010000323222230000012220,
10300001030000121222210000032220, 10100003010000301000012002230002,
10010001001000122322212202223220, 30030001003000100300032022003002,
30030003003000322122232202221220, 30010003001000322322230020223220,
10030001003000122122210020221220, 10010003001000300100012022001002,
10001001000100122232212022222302, 30003001000300100030032202000320,
30003003000300322212232022222102, 30001003000100322232230200222302,
10003001000300122212210200222102, 10001003000100300010012202000120,
10000101000010122223212222222010, 30000301000030100003032002000212,
30000303000030322221232222222030, 30000103000010322223230000222010,
10000301000030122221210000222030, 10000103000010300001012002000232,
10000011000001122222312022200203, 30000031000003100000332202022023,
30000033000003322222132022200201, 30000013000001322222330200200203,
10000031000003122222110200200201, 10000013000001300000112202022021,
01100000132222213222222202110002, 03300000130000013000002220330002,
03300000312222231222222202330002, 031000003322222332222220020310002,
013000001122222112222220020130002, 011000003100000310000002220110002,
010100001232222123222222222321002, 0303000001030000103000002200123002,
030300003212222321222222222123002, 030100003232222323222220000121002,
010300001212222121222220000323002, 010100003010000301000002200321002,
01001000122322212232222002320120, 030030001003000100300002020120320,
03003000322122232212222002120320, 030010003223222322322220220120120,
010030001221222122122220220320320, 010010003001000300100002020320120,
01000100122232212223222202320232, 030003001000300100030002220120212,
030003003222122322212222202120212, 030001003222322322232223220020120232,
010003001222122122212220020320212, 010001003000100300010002220320232,
01000010122223212222322002302021, 03000030100003010000302020102023,
03000030322221232222122002102023, 03000010322223232222320220102021,
01000030122221212222120220302023, 01000010300001030000102020302021,
11000000112222223300000322020102222, 310000011222223122222210200320000,
3300000011000000110000032000120000, 3300000031000000332222232220302222,
3300000033222222110000012202302222, 3300000013222222332222212022120000,
3100000031222222130000010020102222, 3100000033000000312222230002102222,
1300000011000000132222210002302222, 1300000033222222132222230200120000,
1300000013222222310000030020302222, 1100000031222222112222232022320000,
1100000033000000330000012000320000, 1100000013000000112222212220102222.

U algoritmu A, korak 2.2.4. generira 1300 riječi $z \in \mathbf{C}_2$ takvih da je $S_2(z) \subseteq \{k_1 + k_2 + 1, \ldots, n\} = \{24, \ldots, 32\}$ i $|S_1(z) \cup S_2(z)| = 8$ koje se ne dobivaju u koraku 2. u rezultatu 3.1. Jedna od tih riječi je, na primjer, $z = 00000010000001000000103133220223$.

Riječi $s \in \mathbf{C}_2$ koje nedostaju u koraku 3. u algoritmu iz rezultata 3.1, koje dobivamo u koracima 3. i 4. algoritma A, su sume redaka u generirajućoj matrici od $\mathbf{C}_2$ sa sljedećim skupovima indeksa:

$\{1,2,10,11,12,13,14,15,16\}, \{1,3,10,16,18,19,20,21,22\}, \{1,4,11,16,17,19,20,21,22\}, \{1,5,12,16,17,18,20,21,22\}, \{1,6,13,16,17,18,19,21,22\}, \{1,7,14,16,17,18,19,20,22\}, \{1,8,15,22,23\}, \{1,9,10,11,12,13,14,15,23\}, \{1,10,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,11,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,12,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,13,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,14,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{1,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{2,3,11,12,13,14,15,18,19,20,21,22\}, \{2,4,10,12,13,14,15,17,19,20,21,22\}, \{2,5,10,11,13,14,15,17,18,20,21,22\}, \{2,6,10,11,12,14,15,17,18,19,21,22\}, \{2,7,10,11,12,13,15,17,18,19,20,22\}, \{2,8,10,11,12,13,14,16,22,23\}, \{2,9,16,23\}, \{2,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}, \{2,10,11,12,13,14,15,17,18,19,20,21,22,23\}, \{3,4,10,11,17,18\}, \{3,5,10,12,17,19\}, \{3,6,10,13,17,20\}, \{3,7,10,14,17,21\}, \{3,8,10,15,16,18,19,20,21,23\}, \{3,9,11,12,13,14,15,16,18,19,20,21,22,23\}, \{3,10,11,17,23\}, \{3,10,12,17,23\}, \{3,10,13,17,23\}, \{3,10,14,17,23\}, \{3,10,15,17,23\}, \{3,10,16,17,23\}, \{3,10,17,18,23\}, \{3,10,17,19,23\}, \{3,10,17,20,23\}, \{3,10,17,21,23\}, \{3,10,17,22,23\}, \{3,10,17,23\}, \{4,5,11,12,18,19\}, \{4,6,11,13,18,20\}, \{4,7,11,14,18,21\}, \{4,8,11,15,16,17,19,20,21,23\}, \{4,9,10,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23\}, \{4,10,11,18,23\}, \{4,11,12,18,23\}, \{4,11,13,18,23\}, \{4,11,14,18,23\}, \{4,11,15,18,23\}, \{4,11,16,18,23\}, \{4,11,17,18,23\}, \{4,11,18,19,23\}, \{4,11,18,20,23\}, \{4,11,18,21,23\}, \{4,11,18,22,23\}, \{4,11,18,23\}, \{5,6,12,13,19,20\}, \{5,7,12,14,19,21\}, \{5,8,12,15,16,17,18,20,21,23\}, \{5,9,10,11,13,14,15,16,17,18,20,21,22,23\}, \{5,10,12,19,23\}, \{5,11,12,19,23\}, \{5,12,13,19,23\}, \{5,12,14,19,23\}, \{5,12,15,19,23\}, \{5,12,16,19,23\}, \{5,12,17,19,23\}, \{5,12,18,19,23\}, \{5,12,19,20,23\}, \{5,12,19,21,23\}, \{5,12,19,22,23\}, \{5,12,19,23\}, \{6,7,13,14,20,21\}, \{6,8,13,15,16,17,18,19,21,23\}, \{6,9,10,11,12,14,15,16,17,18,19,21,22,23\}, \{6,10,13,20,23\}, \{6,11,13,20,23\}, \{6,12,13,20,23\}, \{6,13,14,20,23\}, \{6,13,15,20,23\}, \{6,13,16,20,23\}, \{6,13,17,20,23\}, \{6,13,18,20,23\}, \{6,13,19,20,23\}, \{6,13,20,21,23\}, \{6,13,20,22,23\}, \{6,13,20,23\}, \{7,8,14,15,16,17,18,19,20,23\}, \{7,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23\}, \{7,10,14,21,23\}, \{7,11,14,21,23\}, \{7,12,14,21,23\}, \{7,13,14,21,23\}, \{7,14,15,21,23\}, \{7,14,16,21,23\}, \{7,14,17,21,23\}, \{7,14,18,21,23\}, \{7,14,19,21,23\}, \{7,14,20,21,23\}, \{7,14,21,22,23\}, \{7,14,21,23\}, \{8,9,10,11,12,13,14,22\}, \{8,10,15,16,17,18,19,20,21\}, \{8,11,15,16,17,18,19,20,21\}, \{8,12,15,16,17,18,19,20,21\}, \{8,13,15,16,17,18,19,20,21\}, \{8,14,15,16,17,18,19,20,21\}\{8,15,16,17,18,19,20,21\}, \{8,15,16,17,18,19,20,21,22\},$

$\{8,15,16,17,18,19,20,21,23\},\{9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22\},$
$\{9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23\}.$

Neka je $\widetilde{\mathbf{C}_2}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven metodom udvostručavanja iz $\mathbf{C}_2$ i $2u$ za

$$S_2(2u)=\{24,25,26,27,28,30\}.$$

Koristeći teorem 3.8, dobivamo 20 kandidata $2u$ za $\widetilde{\mathbf{C}_2}$. Za ove $2u$, iz $\widetilde{\mathbf{C}_2}$ metodom udvostručavanja dobivamo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^7 2^{18}$ s $E_{16}=123608$, čiji rezidualni kodovi su međusobno ekvivalentni binarni $[32,7,8]$ kodovi, ekvivalentni kodu C_{10}.

Neka je $\mathbf{C}_7$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz binarnog koda C_7 s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix}
11010001101000000000001122000220\\
11011110010101111101001232020222\\
11011110010000011111111223200002\\
10111001011000000000000002120022\\
11100101110000000000000020212020\\
01110010111000000000000000021200\\
00000000000111010011100220002102\\
00000000000011101001110220220010\\
00000000000110100111010022200201\\
02022200000000000000000000000000\\
22002020000000000000000000000000\\
00222002000000000000000000000000\\
22222000200000000000000000000000\\
20022000020000000000000000000000\\
20202000002000000000000000000000\\
20222000000222020000000000000000\\
20222000000022202000000000000000\\
20222000000220200200000000000000\\
20222000000200000020000000000000\\
20222000000020000002000000000000\\
20222000000002000000200000000000\\
20222000000000200000020000000000\\
22020000000000000000002000000000
\end{bmatrix}.$$

Koristeći teorem 3.8, dobivamo 50 kandidata $2u$ za $\mathbf{C}_7$. Za ove $2u$, iz $\mathbf{C}_7$ metodom udvostručavanja dobivamo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^8 2^{16}$ s $E_{16}=121304$, čiji su rezidualni kodovi međusobno ekvivalentni binarni $[32,8,8]$ kodovi, ekvivalentni rezidualnim kodovima 72 $\mathbb{Z}_4$-koda dobivena iz $\mathbf{C}_2$, tj. rezidualnom kodu koda $\widetilde{\mathbf{C}_2}$.

Neka je $\mathbf{C}_{14}$ $\mathbb{Z}_4$-kod dobiven iz binarnog koda C_{14} s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix}
00011111110000000000001220220000 \\
00000000001011111010002302202022 \\
00000000000000111111102032220022 \\
11001110010000000000010221200020 \\
01110111000000000000012222300022 \\
11100101110000000000002020010022 \\
10111100100000000000010200003200 \\
00000000001110100111000000002102 \\
00000000000111010011100222220032 \\
00000000001101001110100220220223 \\
20222000000000000000000000000000 \\
02220020000000000000000000000000 \\
02200202000000000000000000000000 \\
20200200200000000000000000000000 \\
22000200020000000000000000000000 \\
00000000002002220000000000000000 \\
00000000000022202000000000000000 \\
00000000000220200200000000000000 \\
00000000002020200020000000000000 \\
00000000002200200002000000000000 \\
00000000002222200000200000000000 \\
00220200000000000000200000000000
\end{bmatrix}.$$

Koristeći teorem 3.8, dobivamo 113 kandidata $2u$ za $\mathbf{C}_{14}$. Za ove $2u$, iz $\mathbf{C}_{14}$ metodom udvostručavanja dobivamo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 i tipa $4^9 2^{14}$ s $E_{16} = 120152$, čiji su rezidualni kodovi međusobno ekvivalentni binarni $[32, 9, 8]$ kodovi, ekvivalentni kodu C_7.

Budući da su $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 32 te da smo algoritmom A u potpoglavlju 3.1.3 dobili 4942 nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{14}2^4$ duljine 32, tri nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{10}2^{12}$ duljine 32, 12 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^9 2^{14}$ duljine 32, 25 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^8 2^{16}$ duljine 32 i pet novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II tipa $4^7 2^{18}$ duljine 32, broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 se nalazi u tablici 4.2.

Tablica 4.2: Broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32

tip	$4^6 2^{20}$	$4^7 2^{18}$	$4^8 2^{16}$	$4^9 2^{14}$	$4^{10} 2^{12}$	$4^{11} 2^{10}$	$4^{12} 2^8$	$4^{13} 2^6$	$4^{14} 2^4$	$4^{15} 2^2$	4^{16}
broj	1	7	27	15	5	3	1	220	5148	356	134

Rezidualni kodovi novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 u oznakama $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ su svi trostruko parni binarni kodovi.

U nastavku donosimo vezu trostruke parnosti rezidualnog koda i Leejevih težina i u općenitijem slučaju.

Napomena 4.2. Označimo sa $S_i(w)$ skup pozicija na kojima se nalazi element $i \in \mathbb{Z}_4$ u riječi $w \in \mathbb{Z}_4^n$. Tada je skup $S_1(x) \cup S_3(x)$ jednak skupu nenula pozicija u riječi x (mod 2).

Propozicija 4.3. *Neka je C $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II. C ima sve riječi Leejeve težine djeljive sa* 4 *ako i samo ako je $C^{(1)}$ trostruko paran binarni kod.*

Dokaz. Neka je $c \in C$ proizvoljna riječ. Označimo s $n_i(c)$ broj komponenti od c jednakih i za $i \in \mathbb{Z}_4$. Prema teoremu 1.4, $C^{(1)}$ je dvostruko paran pa je, po napomeni 4.2, $n_1(c)+n_3(c)$ djeljivo sa 4. Zato je $wt_L(c)$ je djeljiva sa 4 ako i samo ako je $n_2(c)$ paran broj. Budući da je $wt_E(c)$ djeljiva sa 8, ova činjenica je ekvivalentna tome da je $n_1(c) + n_3(c)$ djeljivo sa 8, što je po napomeni 4.2 ekvivalentno tome da je $C^{(1)}$ trostruko paran binarni kod.

□

Propozicija 4.4. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n \geq$ 24 takav da je rezidualni kod $C^{(1)}$ trostruko paran. Tada je minimalna Leejeva težina $\mathbb{Z}_4$-koda C veća od ili jednaka* 8.

Dokaz. Prema propoziciji 4.3, sve riječi u C imaju Leejevu težinu djeljivu sa 4. Pretpostavimo da u C postoji riječ c Leejeve težine 4. Tada je $n_1(c)+2n_2(c)+n_3(c) = 4$. Slučajevi $n_2(c) = 0$ i $n_2(c) = 1$ nisu mogući jer je $C^{(1)}$ trostruko paran. Ukoliko je $n_2(c) = 2$, c je parna riječ i $c_1 \in C^{(2)}$ takva da je $2c_1 = c$ ima težinu 2, što je nemoguće po propoziciji 1.1, budući da je C ekstremalan duljine $n \geq 24$. Dakle, minimalna Leejeva težina od C je veća od ili jednaka 8. □

Napomena 4.3. Na nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ smo primijenili konstrukciju A_4 iz potpoglavlja 1.3. Prema teoremu 1.9 i napomeni 1.2, sve dobivene rešetke $\Lambda(\mathbf{C}_2)$, $\Lambda(\widetilde{\mathbf{C}_2})$, $\Lambda(\mathbf{C}_7)$, $\Lambda(\mathbf{C}_{10})$ i $\Lambda(\mathbf{C}_{14})$ su ekstremalne parne unimodularne rešetke. Dakle, sve dobivene rešetke imaju minimalnu normu $\mu = 4$. Priljubljujući broj svih dobivenih rešetki je 146880.

4.1.2 Novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 40

Metodu nadogradnje smo primijenili na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 u oznakama $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ iz potpoglavlja 4.1.1 s ciljem dobivanja novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40.

Koristeći prvu matricu

$$[X\ Y] = \begin{bmatrix} 2100200111011022011111020100101001010020 \\ 0011101010111001000031130021210111101020 \\ 0000010202001102010011031002320112012000 \\ 0101000000011020112220031000100013000201 \end{bmatrix}$$

iz [8], dobili smo ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 $\mathbf{C}_2'$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}'$, $\mathbf{C}_7'$, $\mathbf{C}_{10}'$ i $\mathbf{C}_{14}'$ u tablici 4.3.

Za navedenu matricu $[X\ Y]$, iz $\mathbf{C}_1$ smo dobili neekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 i tipa $4^{10}2^{20}$.

Koristeći drugu matricu

$$[X\ Y] = \begin{bmatrix} 0001110211111022020011120100111000010020 \\ 1011000000011101011131131011200211100020 \\ 0100101002201002000211231022300010011000 \\ 0000111020011020101020331000120000000201 \end{bmatrix}$$

iz [8], dobili smo ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 40 $\mathbf{C}_1'$ u tablici 4.3.

Tablica 4.3: Metoda nadogradnje na kodovima $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$, $\mathbf{C}_{14}$

C	C'	$C'^{(1)}$
$\mathbf{C}_1$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{10}2^{20}$	$[40, 10, 12]$
$\mathbf{C}_2$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{13}2^{14}$	$[40, 13, 8]$
$\widetilde{\mathbf{C}_2}$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{12}2^{16}$	$[40, 12, 8]$
$\mathbf{C}_7$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{13}2^{14}$	$[40, 13, 8]$
$\mathbf{C}_{10}$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{11}2^{18}$	$[40, 11, 12]$
$\mathbf{C}_{14}$	Ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod duljine 40 tipa $4^{14}2^{12}$	$[40, 14, 8]$

$\mathbb{Z}_4$-kodovi u oznaci $C_{40,i}$, gdje je $i = 10, 11, 12, 13, 14$, iz napomene 2.2 imaju rezidualne kodove s minimalnom težinom 4.

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\mathbf{C}_1'$ i $C_{40,10}$ su međusobno neekvivalentni jer imaju rezidualne kodove različite minimalne težine.

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\widetilde{\mathbf{C}_2}'$ i $C_{40,12}$ su međusobno neekvivalentni jer imaju rezidualne kodove različite minimalne težine. Rezidualni kod od $\widetilde{\mathbf{C}_2}'$ ima $W_8 = 1$, ali nije ekvivalentan niti jednom rezidualnom kodu novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipa $4^{12}2^{16}$ iz potpoglavlja 3.3.1 s minimalnom težinom 8 i istim brojem W_8.

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\mathbf{C}'_{10}$ i $C_{40,11}$ su međusobno neekvivalentni jer imaju rezidualne kodove različite minimalne težine. Rezidualni kod od $\mathbf{C}'_{10}$ ima $W_{12} = 34$ pa nije ekvivalentan rezidualnom kodu novog ekstremalnog $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II duljine 40 tipa $4^{11}2^{18}$ iz potpoglavlja 3.3.1.

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\mathbf{C}'_{14}$ i $C_{40,14}$ su međusobno neekvivalentni jer imaju rezidualne kodove različite minimalne težine. Rezidualni kod od $\mathbf{C}'_{14}$ ima $W_8 = 10$ pa nije ekvivalentan rezidualnim kodovima novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipa $4^{14}2^{12}$ iz potpoglavlja 3.3.1.

Rezidualni kod od $\mathbf{C}'_2$ ima $W_8 = 3$, a rezidualni kod od $\mathbf{C}'_7$ ima $W_8 = 4$ pa su $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\mathbf{C}'_2$ i $\mathbf{C}'_7$ međusobno neekvivalentni. $\mathbf{C}'_2$ i $\mathbf{C}'_7$ su neekvivalentni $\mathbb{Z}_4$-kodu $C_{40,13}$ te ekstremalnom $\mathbb{Z}_4$-kodu tipa II duljine 40 iz [36] koji ima rezidualni kod dimenzije 13 i minimalne težine 12. Rezidualni kod od $\mathbf{C}'_2$ nije ekvivalentan niti jednom rezidualnom kodu novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipa $4^{13}2^{14}$ iz potpoglavlja 3.3.1 s istim brojem W_8. Rezidualni kod od $\mathbf{C}'_7$ nije ekvivalentan niti jednom rezidualnom kodu novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipa $4^{13}2^{14}$ iz potpoglavlja 3.3.1 s istim brojem W_8.

Prema svemu navedenom $\mathbf{C}'_1$, $\mathbf{C}'_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}'$, $\mathbf{C}'_7$, $\mathbf{C}'_{10}$ i $\mathbf{C}'_{14}$ su novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 40. Broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 se nalazi u tablici 4.4.

Tablica 4.4: Broj poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40

tip	$4^7 2^{26}$	$4^8 2^{24}$	$4^9 2^{22}$	$4^{10} 2^{20}$	$4^{11} 2^{18}$	$4^{12} 2^{16}$	$4^{13} 2^{14}$
broj	1	1	1	2	3	20	15
tip	$4^{14} 2^{12}$	$4^{15} 2^{10}$	$4^{16} 2^{8}$	$4^{17} 2^{6}$	$4^{18} 2^{4}$	$4^{19} 2^{2}$	4^{20}
broj	5	3	1	134	502	432	94343

Napomena 4.4. Na nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 40 $\mathbf{C}'_1$, $\mathbf{C}'_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}'$, $\mathbf{C}'_7$, $\mathbf{C}'_{10}$ i $\mathbf{C}'_{14}$ smo primijenili konstrukciju A_4 iz potpoglavlja 1.3. Prema teoremu 1.9 i napomeni 1.2, sve dobivene rešetke $\Lambda(\mathbf{C}'_1)$, $\Lambda(\mathbf{C}'_2)$, $\Lambda(\widetilde{\mathbf{C}_2}')$, $\Lambda(\mathbf{C}'_7)$, $\Lambda(\mathbf{C}'_{10})$ i $\Lambda(\mathbf{C}'_{14})$ su ekstremalne parne unimodularne rešetke. Dakle, sve dobivene rešetke imaju minimalnu normu $\mu = 4$. Priljubljujući broj svih dobivenih rešetki je 39600.

Poglavlje 5

Dizajni i grafovi iz ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II

U [15] je pokazano da skupovi nosača riječi Hammingove težine 10 u određenim ekstremalnim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa II duljine 24 formiraju 5-$(24, 10, 36)$ dizajne. U [24] je pokazano da se iz riječi s nosačima veličine 6 različitih tipova u Preparata kodu $\mathcal{P}_m$, gdje je m neparan, mogu konstruirati različite familije 3-dizajna.

U ovom poglavlju smo iz ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ tipa II duljine 32 iz potpoglavlja 4.1.1, iz novih 45 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ algoritmom A (tablica 3.2) te iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ pokušali konstruirati nove kombinatoričke strukture promatrajući nosače riječi minimalne Leejeve težine.

Definicija 5.1. **Nosač** riječi c iz $\mathbb{F}_2^n$ ili $\mathbb{Z}_4^n$ je skup nenula pozicija u c.

Riječi $c \in \mathbb{Z}_4$ i $-c \in \mathbb{Z}_4$ imaju isti nosač.

Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine n. U nastavku ovog poglavlja ćemo iz C pokušati konstruirati nove dizajne i distancijsko regularne grafove na sljedeći način:

Promatrat ćemo nosače svih riječi $c \in C$ s minimalnom Leejevom težinom i ispitati radi li se o blokovima dizajna s n točaka.

Ukoliko na taj način dobijemo dizajn $\mathcal{D}_C = (\mathcal{P}_C, \mathcal{B}_C, \mathcal{I}_C)$, s veličinama presjeka blokova $s_1, \ldots, s_m$, definirat ćemo graf ${G_C}^{(i)}$ na sljedeći način: $V({G_C}^{(i)}) = \mathcal{B}_C$, vrhovi $u, v \in V({G_C}^{(i)})$ su susjedni ako i samo ako pripadni blokovi u $\mathcal{D}_C$ imaju točno s_i zajedničkih točaka, gdje je $i \in \{1, \ldots, m\}$. Takva konstrukcija je opisana u članku [11]. Ispitivat ćemo je li tako dobiveni graf ${G_C}^{(i)}$ distancijsko regularan. Opisani postupak prikazan je u sljedećem primjeru.

Primjer 5.1. Neka je o_8 oktakod (vidi primjer 1.7).

Neka je 5_f5 $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine 16 iz [35] s generirajućom matricom

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

U $\mathbb{Z}_4$-kodovima o_8 i 5_f5 ćemo promatrati nosače svih riječi s minimalnom Leejevom težinom i ispitati radi li se o blokovima dizajna s osam, odnosno 16 točaka.

Oktakod o_8 ima minimalnu Leejevu težinu 6.

U o_8 nosači svih riječi Leejeve težine 6 su svi peteročlani podskupovi skupa $\{1, \dots, 8\}$ pa formiraju 5-$(8, 5, 1)$ dizajn $\mathcal{D}_{o_8}$. Dizajn $\mathcal{D}_{o_8}$ ima 56 blokova i veličine presjeka blokova $s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 4$.

Prema [41], 56 je dopustiv broj vrhova za jako regularan graf. Konstruirali smo grafove $G_{o_8}^{(i)}$ za $i = 1, 2, 3$. Graf $G_{o_8}^{(1)}$ je 10-regularan graf sa 56 vrhova. Graf $G_{o_8}^{(2)}$ je 30-regularan graf sa 56 vrhova. Graf $G_{o_8}^{(3)}$ je 15-regularan graf sa 56 vrhova. Grafovi $G_{o_8}^{(i)}$ nisu distancijsko regularni, za $i = 1, 2, 3$.

$\mathbb{Z}_4$-kod 5_f5 ima minimalnu Leejevu težinu 8.

U 5_f5 nosači svih riječi Leejeve težine 8 ne formiraju dizajn.

Primijenimo sada isti postupak na ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 32 u oznakama $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ iz potpoglavlja 4.1.1.

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ imaju minimalnu Leejevu težinu 8. Nosači riječi s Leejevom težinom 8 u tim kodovima formiraju dizajne s parametrima iz tablice 5.1. Prema [9], dizajn s parametrima 3-$(32, 4, 1)$ je poznat. Dizajni $\mathcal{D}_{\mathbf{C}_2}$ i $\mathcal{D}_{\mathbf{C}_7}$ imaju iste parametre, ali su međusobno neizomorfni. Svi dobiveni dizajni imaju veličine presjeka blokova $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2$.

Tablica 5.1: Dizajni iz $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$, $\mathbf{C}_{14}$

C	$\mathcal{D}_C$
$\mathbf{C}_1$	3-$(32, 4, 1)$ dizajn s 1240 blokova
$\mathbf{C}_2$	1-$(32, 4, 43)$ dizajn s 344 bloka
$\widetilde{\mathbf{C}_2}$	1-$(32, 4, 59)$ dizajn s 472 bloka
$\mathbf{C}_7$	1-$(32, 4, 43)$ dizajn s 344 bloka
$\mathbf{C}_{10}$	1-$(32, 4, 91)$ dizajn sa 728 blokova
$\mathbf{C}_{14}$	1-$(32, 4, 35)$ dizajn s 280 blokova

Prema [41], $1240, 344$ i 280 su dopustivi brojevi vrhova za jako regularan graf. U [7] smo pronašli 728 kao dopustivi broj vrhova za distancijsko regularan graf. Konstruirali smo grafove ${G_{\mathbf{C}_j}}^{(i)}$ i ${G_{\widetilde{\mathbf{C}_2}}}^{(i)}$ za $j = 1, 2, 7, 10, 14$ i $i = 1, 2, 3$.

Graf ${G_{\mathbf{C}_1}}^{(1)}$ je 707-regularan graf sa 1240 vrhova. Graf ${G_{\mathbf{C}_1}}^{(2)}$ je 448-regularan graf sa 1240 vrhova. Graf ${G_{\mathbf{C}_1}}^{(3)}$ je 84-regularan graf sa 1240 vrhova. Grafovi ${G_{\mathbf{C}_1}}^{(i)}$ nisu distancijsko regularni, za $i = 1, 2, 3$.

Grafovi ${G_{\mathbf{C}_2}}^{(i)}$, ${G_{\widetilde{\mathbf{C}_2}}}^{(i)}$, ${G_{\mathbf{C}_7}}^{(i)}$ i ${G_{\mathbf{C}_{10}}}^{(i)}$ nisu regularni, za $i = 1, 2, 3$.

Graf ${G_{\mathbf{C}_{14}}}^{(1)}$ je 179-regularan graf sa 280 vrhova. Graf ${G_{\mathbf{C}_{14}}}^{(2)}$ je 64-regularan graf sa 280 vrhova. Graf ${G_{\mathbf{C}_{14}}}^{(3)}$ je 36-regularan graf sa 280 vrhova. Grafovi ${G_{\mathbf{C}_{14}}}^{(i)}$ nisu distancijsko regularni, za $i = 1, 2, 3$.

Novih 45 ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 dobivenih iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ algoritmom A (tablica 3.2) imaju minimalnu Leejevu težinu 8. $\mathbb{Z}_4$-kodovi $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ imaju minimalnu Leejevu težinu 12. Nosači riječi s minimalnom Leejevom težinom u tih 47 kodova formiraju dizajne s parametrima iz tablice 5.2. Prema [9], dizajn s parametrima 3-$(32, 6, 4)$ je poznat. Dobiveni dizajni s istim parametrima su svi međusobno neizomorfni. Dizajni dobiveni iz kodova tipa $4^8 2^{16}$ su svi međusobno neizomorfni s dizajnom $\mathcal{D}_{\mathbf{C}_{14}}$.

Tablica 5.2: Dizajni iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ i iz kodova iz njih dobivenih algoritmom A

tip od C	$\mathcal{D}_C$
$4^7 2^{18}$	1-$(32, 4, 75)$ dizajn sa 600 blokova
$4^8 2^{16}$	1-$(32, 4, 35)$ dizajn s 280 blokova
$4^9 2^{14}$	1-$(32, 4, 15)$ dizajn sa 120 blokova
$4^{10} 2^{12}$	1-$(32, 4, 5)$ dizajn s 40 blokova
$4^{11} 2^{10}$	3-$(32, 6, 4)$ dizajn s 992 bloka

Prema [41], $280, 120$ i 40 su dopustivi brojevi vrhova za jako regularan graf. U [7] smo pronašli 600 kao dopustivi broj vrhova za distancijsko regularan graf. Konstruirali smo grafove iz dobivenih dizajna.

Svi dizajni sa 600, 280 i 120 blokova imaju veličine presjeka blokova $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2$. Od 116 grafova konstriranih iz dizajna sa 600, 280 i 120 blokova niti jedan graf nije regularan.

Dizajni s 40 blokova imaju veličine presjeka blokova $s_1 = 0$ i $s_2 = 1$. Iz svakog od tri dobivena dizajna s 40 blokova za $i = 1$ dobivamo 23-regularan graf sa 40 vrhova, a za $i = 2$ dobivamo 17-regularan graf sa 40 vrhova. Niti jedan od dobivenih grafova nije distancijsko regularan.

Dizajni s 992 bloka imaju veličine presjeka blokova $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2$ i $s_4 = 3$. Iz ovih dizajna smo dobili k-regularne grafove, za $k = 60, 255, 256, 420$, koji nisu distancijsko regularni.

Definicija 5.2. Kažemo da je riječ $c \in \mathbb{Z}_4$ **tipa** $1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}0^{n_0}$ ako se $j = 0, 1, 2, 3$ pojavljuje n_j puta među komponentama od c.

Primjer 5.2. Preparata kod $\mathcal{P}_m$ duljine 2^m je $\mathbb{Z}_4$-kod čiji dualni kod ima generirajuću matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \beta & \beta^2 & \cdots & \beta^{2^m-2} \end{bmatrix},$$

gdje je β invertibilan element reda $2^m - 1$ u Galoisovom prstenu karakteristike 4 sa 4^m elemenata.

U [24] je pokazano da se iz riječi različitih tipova s nosačima veličine 6 u Preparata kodu $\mathcal{P}_m$, gdje je m neparan, mogu konstruirati različite familije 3-dizajna.

Ispitali smo formiraju li nosači riječi minimalne Leejeve težine određenog tipau $\mathbb{Z}_4$-kodovima o_8 i 5_f5 dizajne.

U o_8 su riječi Leejeve težine 6 tipova $1^0 2^1 3^4 0^3$, $1^1 2^1 3^3 0^3$, $1^2 2^1 3^2 0^3$, $1^3 2^1 3^1 0^3$ i $1^4 2^1 3^0 0^3$. Nosači riječi bilo kojeg od navedenih tipova ne formiraju dizajne.

U 5_f5 su riječi Leejeve težine 8 tipova $1^0 2^0 3^8 0^8$, $1^0 2^4 3^0 0^{12}$, $1^4 2^0 3^4 0^8$ i $1^8 2^0 3^0 0^8$. Nosači riječi tipa $1^0 2^0 3^8 0^8$ formiraju 3-$(16, 8, 3)$ dizajn s 30 blokova, kao i nosači riječi tipa $1^4 2^0 3^4 0^8$ i tipa $1^8 2^0 3^0 0^8$. Nosači riječi tipa $1^0 2^4 3^0 0^{12}$ formiraju 3-$(16, 4, 1)$ dizajn sa 140 blokova.

Odredit ćemo tipove riječi minimalne Leejeve težine u $\mathbb{Z}_4$-kodovima iz kojih smo konstruirali dizajne u tablicama 5.1 i 5.2.

Propozicija 5.1. *Neka je C ekstremalan $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II duljine $n \geq 24$ takav da je minimalna težina rezidualnog koda $C^{(1)}$ veća od ili jednaka 8. Tada je skup nosača riječi*

Leejeve težine 8 *u* C *jednak skupu nosača riječi težine* 4 *u torzijskom kodu* $C^{(2)}$. *Sve riječi Leejeve težine* 8 *u* C *su tipa* $1^0 2^4 3^0 0^{n-4}$.

Dokaz. Pretpostavimo da C sadrži riječi Leejeve težine 8. Neka je $c \in C$ riječ Leejeve težine 8. Tada je $n_1(c) + 2n_2(c) + n_3(c) = 8$. Ukoliko je $n_2(c) = 0$, c ima euklidsku težinu 8, što je nemoguće budući da je C ekstremalan duljine $n \geq 24$. Slučajevi $n_2(c) = 1$ i $n_2(c) = 3$ nisu mogući jer je $C^{(1)}$ dvostruko paran. Slučaj $n_2(c) = 2$ nije moguć jer je minimalna težina od $C^{(1)}$ veća od ili jednaka 8. Dakle, $n_2(c) = 4$ i c je parna riječ. Nosač od c je jednak nosaču riječi $c_1 \in C^{(2)}$ težine 4, gdje je $2c_1 = c$. Riječ c je tipa $1^0 2^4 3^0 0^{n-4}$. □

Budući da su rezidualni kodovi $\mathbb{Z}_4$-kodova $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ trostruko parni, sve riječi Leejeve težine 8 u tim $\mathbb{Z}_4$-kodovima su tipa $1^0 2^4 3^0 0^{28}$. Dizajni dobiveni iz $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\widetilde{\mathbf{C}_2}$, $\mathbf{C}_7$, $\mathbf{C}_{10}$ i $\mathbf{C}_{14}$ u tablici 5.1 su jednaki dizajnima koje formiraju nosači riječi minimalne težine u pripadnim torzijskim kodovima.

Novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II duljine 32 dobiveni iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ algoritmom A imaju rezidualne kodove minimalne težine 12 pa su sve riječi Leejeve težine 8 u tim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa $1^0 2^4 3^0 0^{28}$. Dizajni dobiveni iz tih kodova u tablici 5.2 su jednaki dizajnima koje formiraju nosači riječi minimalne težine u pripadnim torzijskim kodovima.

Propozicija 5.2. *Neka je* C *ekstremalan* $\mathbb{Z}_4$*-kod tipa II duljine* $n \geq 24$ *takav da je minimalna težina rezidualnog koda* $C^{(1)}$ *veća od ili jednaka* 12. *Tada je skup nosača riječi Leejeve težine* 12 *u* C *jednak skupu nosača riječi težine* 6 *u torzijskom kodu* $C^{(2)}$. *Sve riječi Leejeve težine* 12 *u* C *su tipa* $1^0 2^6 3^0 0^{n-6}$.

Dokaz. Pretpostavimo da C sadrži riječi Leejeve težine 12. Neka je $c \in C$ riječ Leejeve težine 12. Tada je $n_1(c) + 2n_2(c) + n_3(c) = 12$. Ukoliko je $n_2(c) = 0$, c ima euklidsku težinu 12, što je nemoguće budući da je C tipa II. Slučajevi $n_2(c) = 1, n_2(c) = 3$ i $n_2(c) = 5$ nisu mogući jer je $C^{(1)}$ dvostruko paran. Slučajevi $n_2(c) = 2$ i $n_2(c) = 4$ nisu mogući jer je minimalna težina od $C^{(1)}$ veća od ili jednaka 12. Dakle, $n_2(c) = 6$ i c je parna riječ. Nosač od c je jednak nosaču riječi $c_1 \in C^{(2)}$ težine 6, gdje je $2c_1 = c$. Riječ c je tipa $1^0 2^6 3^0 0^{n-6}$. □

$\mathbb{Z}_4$-kodovi $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ imaju rezidualne kodove minimalne težine 12 pa su sve riječi Leejeve težine 12 u tim $\mathbb{Z}_4$-kodovima tipa $1^0 2^6 3^0 0^{26}$. Dizajni dobiveni iz $\tilde{C}_{31,2}$ i $\tilde{C}_{31,3}$ u tablici 5.2 su jednaki dizajnima koje formiraju nosači riječi minimalne težine u pripadnim torzijskim kodovima.

Zaključak

Ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kodovi tipa II su klasificirani za duljine 8, 16 i 24. U okviru ove disertacije, pokušali smo konstruirati ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II većih duljina.

Polazeći od binarnih kodova, konstruirali smo $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 tipa 4^{28} i $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 64 tipa 4^{32}. Dobiveni $\mathbb{Z}_4$-kodovi nisu ekstremalni.

Korekcijom algoritma u metodi udvostručavanja za duljine 24, 32 i 40, konstruirali smo barem 4942 nova ekstremalna $\mathbb{Z}_4$-koda tipa II tipa $4^{14}2^4$ duljine 32 te ukupno barem 45 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 tipova $4^7 2^{18}$, $4^8 2^{16}$, $4^9 2^{14}$ i $4^{10}2^{12}$. Na temelju metode udvostručavanja za duljine $n = 24, 32, 40$, razvili smo metodu udvostručavanja za duljine $n = 48, 56, 64$. Na taj način nismo dobili nove ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II ovih duljina. Metodom nadogradnje smo dobili ukupno 35 novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipova $4^{11}2^{18}$, $4^{12}2^{16}$, $4^{13}2^{14}$, $4^{14}2^{12}$ i $4^{15}2^{10}$. Pokazali smo da uzastopnom primjenom metode udvostručavanja i generalizirane Haradine metode iz poznatih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 56 i 64 tipa $4^{14}2^{28}$, odnosno $4^{16}2^{32}$, ne možemo dobiti ekstremalne $\mathbb{Z}_4$-kodove tipa II duljine 56 i 64.

Pokazali smo da se binarni kodovi pridruženi Hadamardovim matricama mogu koristiti za konstrukciju ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II. Polazeći od Hadamardovih matrica, korigiranom metodom udvostručavanja dobiven je novi ekstremalni $\mathbb{Z}_4$-kod tipa II tipa $4^8 2^{16}$ duljine 32, a metodom nadogradnje dobiveno je ukupno šest novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 40 tipova $4^{10}2^{20}$, $4^{11}2^{18}$, $4^{12}2^{16}$, $4^{13}2^{14}$ i $4^{14}2^{12}$.

Iz ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljine 32 smo konstruirali kombinatoričke strukture koristeći nosače riječi minimalne Leejeve težine. Time smo dobili dizajne s otprije poznatim parametrima te regularne grafove.

Algoritmi i metode razvijene u disertaciji moći će se i dalje primjenjivati na rješavanje problema konstrukcije novih ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II duljina 32, 40, 48, 56 i 64.

Literatura

[1] I. Anderson, Combinatorial Designs and Tournaments, Clarendon Press, 1997.

[2] E. F. Assmus Jnr, J. D. Key, Designs and their codes, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[3] S. Ban, D. Crnković, M. Mravić, S. Rukavina, New extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of length 32 obtained from Hadamard matrices, submitted, 2018.

[4] A. Bonnecaze, P. Gaborit, M. Harada, M. Kitazume, Niemeier Lattices and Type II Codes over $\mathbb{Z}_4$, Discrete Math., 205:1-21, 1999.

[5] A. Bonnecaze, P. Solé, C. Bachoc, B. Mourrain, Type II codes over $\mathbb{Z}_4$, IEEE Trans. Inform. Theory, 43:969-976, 1997.

[6] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system I: The user language, J. Symbolic Comput., 24:235-265, 1997.

[7] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 1989.

[8] K. H. Chan, Three New Methods for Construction of Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-Codes, PhD Thesis, 2012.

[9] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition, Chapman&Hall/CRC, 2006.

[10] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Self-dual codes over the integers modulo 4, J. Combin. Theory Ser. A, 62:30-45, 1993.

[11] D. Crnković, V. Mikulić, Self-orthogonal doubly-even codes from Hadamard matrices of order 48, Adv. Appl. Discrete Math., 1:159-170, 2008.

[12] D. Crnković, S. Rukavina, A. Švob, Self-orthogonal codes from equitable partitions of association schemes, arXiv: 1903.01832, 2019.

[13] P. Gaborit, M. Harada, Construction of extremal Type II codes over $\mathbb{Z}_4$, Des. Codes Cryptogr., 16:257-269, 1999.

[14] T. A. Gulliver, M. Harada, An Optimal Unimodular Lattice in Dimension 39, J. Combin. Theory, Ser. A, 88:158-161, 1999.

[15] T. A. Gulliver, M. Harada, Extremal double circulant Type II codes over $\mathbb{Z}_4$ and construction of 5-$(24, 10, 36)$ designs, Discrete Math., 194:129-137, 1999.

[16] A. R. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, P. Sole, The $\mathbb{Z}_4$-linearity of Kerdock, Preparata, Goethals and related codes, IEEE Trans. Inform. Theory, 40:301-319, 1994.

[17] M. Harada, Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes constructed from binary doubly even self-dual codes of length 40, Discrete Math., 340:2466-2468, 2017.

[18] M. Harada, Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-Codes of Lengths 56 and 64, J. Combin. Theory Ser. A, 117:1285-1288, 2010.

[19] M. Harada, New extremal Type II codes over $\mathbb{Z}_4$, Des. Codes Cryptogr., 13:271–284, 1998.

[20] M. Harada, Note on the residue codes of self-dual $\mathbb{Z}_4$-codes having large minimum Lee weights, Adv. Math. Commun., 10:795-706, 2016.

[21] M. Harada, On the residue codes of extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes of lengths 32 and 40, Discrete Math., 311:2148-2157, 2011.

[22] M. Harada, M. Kitazume, A. Munemasa, B. Venkov, On some self-dual codes and unimodular lattices in dimension 48, Eur. J. Combin. 26:543-557, 2005.

[23] M. Harada, P. Solé, P. Gaborit, Self-dual codes over $\mathbb{Z}_4$ and unimodular lattices: a survey, Algebras and combinatorics (Hong Kong, 1997.), 255-275, Springer, Singapore, 1999.

[24] T. Helleseth, C. Rong, K. Yang, New infinite families of 3-designs from preparata codes over $\mathbb{Z}_4$, Discrete Math., 195:139-156, 1999.

[25] W. C. Huffman, Decompositions and extremal Type II codes over $\mathbb{Z}_4$, IEEE Trans. Inform. Theory, 44:800–809, 1997.

[26] W. C. Huffman, V. Pless, Fundamentals of Error-Correcting Codes, Cambridge University Press, 2003.

[27] H. Kharaghani, B. Tayfeh-Rezaie, On the classification of Hadamard matrices of order 32, J. Combin. Des., 18:328-336, 2010.

[28] H. Kimura, Extremal doubly even (56,28,12) codes and Hadamard matrices of order 28, Australas. J. Comb., 10:153-162, 1994.

[29] S. Lang, Algebra, Revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.

[30] F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, The Theory of Error-Correcting Codes, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[31] A. Munemasa, Extremal type II $\mathbb{Z}_4$-codes of length 24 and triply even binary codes of length 48, ICM 2014 Satellite Conference on Algebraic Coding Theory, Ewha Womans University, Korea, 2014.

[32] A. Munemasa, H. Tamura, The codes and the lattices of Hadamard matrices, Eur. J. Combin., 33:519-533, 2012.

[33] G. Nebe, A fourth extremal even unimodular lattice of dimension 48, Discrete Math., 331:133-136, 2014.

[34] G. Nebe, Boris Venkov's Theory of Lattices and Spherical Designs, Contemporary Mathematics, Volume 587, 2013.

[35] V. Pless, J. Leon, J. Fields, All $\mathbb{Z}_4$ codes of Type II and length 16 are known, J. Combin. Theory Ser. A, 78:32–50, 1997.

[36] V. Pless, P. Solé, Z. Qian, Cyclic self-dual $\mathbb{Z}_4$-codes, Finite Fields Appl., 3:48–69, 1997.

[37] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J., 27:379-423, 623-656, 1948.

[38] N. J. A. Sloane, A Library of Hadamard Matrices:

`http://neilsloane.com/hadamard/`

[39] D. R. Stinson, Combinatorial Designs with Selected Applications, Lecture Notes, University of Manitoba, 1996.

[40] The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms and Programming, Version 4.7.9, available at www.gap-system.org

[41] Tablica s parametrima za jako regularne grafove:

`https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html`

[42] V. D. Tonchev, Codes, in : Handbook of Combinatorial Designs, 2nd ed., (C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, Eds.), Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 667-702, 2007.

[43] V. D. Tonchev, Self-Orthogonal Designs and Extremal Doubly Even Codes, J. Combin. Theory, Ser. A, 52:197-205, 1989.

[44] Z. X. Wan, Quaternary Codes, Volume 8 of Series on Applied Mathematics, World Scientific, Singapore, 1997.

Životopis

Sara Ban rođena je 24. ožujka 1989. godine u Rijeci. Završila je Osnovnu školu Jelenje-Dražice te Prvu sušačku hrvatsku gimnaziju u Rijeci.

Preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci završava 2011. godine. Iste godine upisala je Diplomski studij Diskretna matematika i primjene na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Diplomirala je 2013. godine čime je stekla naziv magistra matematike. Dobitnica je Rektorovih nagrada za izvrsnost u akademskim godinama 2009./2010. i 2011./2012.

Nakon završetka studija upisala je Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike Sveučilišta u Osijeku, Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišta u Splitu i Sveučilišta u Zagrebu. Od listopada 2013. godine zaposlena je kao asistentica na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Članica je Zavoda za diskretnu matematiku. Znanstveno se usavršavala sudjelujući na međunarodnim radionicama "2017 PhD Summer School in Discrete Mathematics", srpanj 2017., Rogla, Slovenija, "2018 PhD Summer School in Discrete Mathematics", srpanj 2018., Rogla, Slovenija, gdje je održala izlaganja "Construction of Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes" i "Extremal Type II $\mathbb{Z}_4$-codes from some 2-$(31, 15, 7)$ designs". Aktivno je sudjelovala na Simpoziju studenata doktorskih studija PMF-a, veljača 2018., Zagreb, Hrvatska, pri čemu je održala izlaganje "Konstrukcija ekstremalnih $\mathbb{Z}_4$-kodova tipa II". Članica je Društva matematičara i fizičara, Alumni kluba Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci te Seminara za konačnu matematiku, u sklopu kojega je održala niz seminara.