SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Domagoj Demeterfi

KONVERGENCIJA CIJENA OPCIJA S BARIJEROM U BINOMNOM MODELU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, travanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji, cimerima i prijateljima

Sadržaj

Uvod

Opcije su financijski ugovori koji vlasniku daju pravo (no ne i obavezu) kupiti (*call* opcije) ili prodati (*put* opcije) neku imovinu, npr. dionicu, do određenog datuma (američke opcije) ili na određeni datum (europske opcije) po unaprijed dogovorenoj cijeni (cijeni izvršenja). Vrijednost *call* opcije u trenutku izvršenja je razlika između trenutne cijene dionice i cijene izvršenja ako je trenutna cijena dionice veća od cijene izvršenja (jer možemo iskoristiti pravo iz ugovora da kupimo dionicu po cijeni izvršenja te ju odmah prodati na tržištu i tako ostvariti zaradu), a 0 inače (jer nema smisla iskoristiti pravo iz ugovora zato što dionicu možemo jeftinije kupiti na tržištu). Slično, vrijednost *put* opcije u trenutku izvršenja je razlika između cijene izvršenja i trenutne cijene dionice ako je trenutna cijena manja od cijene izvršenja, a 0 inače.

Već i nakon kratkog uvodnog opisa može se naslutiti kako bi se opcije mogle koristiti kao instrument osiguranja od nepovoljnih promjena cijena imovine na koje su napisane (valja napomenuti kako to nije jedina upotreba opcija, njima se često i špekulativno trguje). No ako opcija vlasnika štiti od nekog rizika, onaj koji mu je opciju izdao (tzv. pisac opcije) taj rizik preuzima na sebe pa se prirodno postavlja pitanje koliko bi pisac opcije trebao naplatiti njeno izdavanje. Odgovor na to pitanje dali su Fischer Black, Myron Scholes i Robert C. Merton poznatim Black-Scholes-Mertonovim modelom (kraće BSM model). Iako je BSM model imao velik utjecaj na financijsku industriju i teoriju (Scholes i Merton dobitnici su Nobelove nagrade iz ekonomije iz 1997. godine za rad na njemu, Black je preminuo prije dodjele, više o njihovom doprinosu može se pročitati u [10]), u praksi je često nezgodno direktno s njime raditi pa se koriste razne aproksimacije tog modela. Jedna od njih je diskretni Cox-Ross-Rubinsteinov model (kraće CRR model ili binomni model). U ovom radu pokazat će se kako se određuje cijena posebne vrste opcija, europskih *call* opcija s barijerom (opisanih u nastavku), u binomnom modelu te će se proučavati brzina konvergencije cijena opcija dobivenih u binomnom modelu u one iz BSM modela ili pojednostavljeno, proučavat će se koliko je binomni model dobra aproksimacija za BSM model.

Opcije s barijerom vrsta su egzotičnih opcija čija isplata ovisi o tome je li cijena temeljne imovine prešla određenu razinu (barijeru) u određenom vremenskom periodu. Drugim riječima, isplata opcija s barijerom ovisi i o putanji cijene temeljne imovine (za razliku od *vanilla*, tj. običnih europskih opcija gdje isplata ovisi samo o vrijednosti imovine u trenutku dospijeća). Četiri osnovna oblika opcija s barijerom su:

- *down-and-in* opcije, kod kojih je cijena temeljne imovine u trenutku stvaranja opcije iznad barijere te mora pasti ispod nje da bi opcija postala aktivna (tj. da počnu vrijediti prava iz ugovora),
- *down-and-out* opcije, kod kojih je cijena temeljne imovine u trenutku stvaranja opcije iznad barijere, a ako padne ispod nje, opcija prestaje biti aktivna (tj. prestaju vrijediti prava iz ugovora),
- *up-and-in* opcije, kod kojih je cijena temeljne imovine u trenutku stvaranja opcije ispod barijere te ju mora prijeći da bi opcija postala aktivna te
- *up-and-out* opcije, kod kojih je cijena temeljne imovine u trenutku stvaranja opcije ispod barijere, a ako prijeđe barijeru, opcija prestaje biti aktivna.

Ukratko, kod *in* opcija pravo izvršenja se pojavljuje, a kod *out* opcija pravo izvršenja nestaje prelaskom barijere. Barijera je postavljena iznad (*up* opcije) ili ispod (*down* opcije) cijene temeljne imovine u trenutku stvaranja opcije. Jednom kada je opcija s barijerom postala/prestala biti aktivna takva i ostaje, bez obzira na eventualna daljnja doticanja i/ili prelaske barijere. Opcije s barijerom mogu imati različite načine izvršavanja, tj. mogu biti *put* ili *call* opcije, američke ili europske itd. U radu se proučavaju europske *call* opcije s barijerom.

Opcije s barijerom općenito su jeftinije od standardnih *vanilla* opcija jer dodatak uvjeta s barijerom povećava šanse da će isplata biti 0 (sa stajališta pisca opcije, manje su šanse da će morati nešto isplatiti pa će vjerojatno manje naplatiti izdavanje takve opcije). Na primjer, kod *out* opcija isplata će biti 0 ako opcija prijeđe barijeru pa je stoga jeftinija od inače identične opcije bez uvjeta s barijerom. Stoga, ako smatramo da je vjerojatnost prelaska barijere mala, možemo iskoristiti prednost manje cijene uz iste koristi. Dakle, kupnjom opcije s barijerom (umjesto standardne opcije) možemo eliminirati plaćanje scenarija koje smatramo nevjerojatnima pa bismo mogli reći da se isplate opcija s barijerom mogu bolje poklapati s našim uvjerenjima o budućem stanju na tržištu nego standardne opcije ili s našim potrebama zaštite od rizika (više detalja može se pronaći u [4]).

Ostatak rada organiziran je na sljedeći način: u Poglavlju 1 prolazimo općeniti princip određivanja cijena opcija i uvodimo binomni model, u Poglavlju 2 izvodimo formule za cijene europskih *call* opcija s barijerom u binomnom modelu, a u Poglavlju 3 proučavamo brzinu konvergencije tih cijena u cijene iz BSM modela te pokazujemo kako se dobiveni rezultati mogu primijeniti za ubrzanje konvergencije.

Poglavlje 1

Martingalni pristup vrednovanju i binomni model

U ovom poglavlju prvo uvodimo osnovne pojmove koji se koriste u ostatku teksta. Zatim prolazimo princip određivanja cijena financijskih izvedenica koristeći tzv. martingalnu mjeru (mjeru neutralnu na rizik) u općenitom modelu s diskretnim vremenom. Nakon toga uvodimo binomni model (koji je poseban slučaj modela s diskretnim vremenom) i pokazujemo kako se u njemu određuju cijene opcija uz martingalnu mjeru.

1.1 Osnovni pojmovi

Dokazi tvrdnji koje su navedene ovdje bez dokaza mogu se pronaći u [13], [14], [15] i [16].

Definicija 1.1.1. *Familija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest* σ-algebra skupova *(na Ω) ako je*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ *tada zovemo* izmjeriv prostor.

Definicija 1.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor. Funkcija* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *jest* vjerojatnost (vjerojatnosna mjera) *(na $\mathcal{F}$, na Ω) ako vrijedi*

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ *i* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *za* $i \neq j \implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Tada skup Ω *zovemo* prostor elementarnih događaja, *a uređenu trojku* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da se događaj $A \in \mathcal{F}$ dogodio $\mathbb{P}$-*gotovo sigurno* ($\mathbb{P} - g.s.$) ako $\mathbb{P}(A) = 1$. Ako je jasno o kojoj vjerojatnosti $\mathbb{P}$ se radi, reći ćemo samo da se dogodio gotovo sigurno.

Neka su $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ diskretni vjerojatnosni prostori (svaki Ω_i je konačan ili prebrojiv) i $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ Kartezijev produkt skupova $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Može se pokazati da tada postoji jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ takva da je

$$\mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(A_i), \quad A_i \subset \Omega_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Diskretni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo *produkt* diskretnih vjerojatnosnih prostora $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, a $\mathbb{P}$ *produktna vjerojatnost*.

Definicija 1.1.3. *Neka su* $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{Q}$ *dvije vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Kažemo da su mjere* $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{Q}$ ekvivalentne *i pišemo* $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$ *ako za svaki* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Dakle, vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ su ekvivalentne ako se slažu koji su događaji mogući. Drugim riječima, ako je A moguć događaj s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}$, tada je moguć i s obzirom na $\mathbb{Q}$, a ako nije moguć s obzirom na $\mathbb{P}$, tada nije moguć ni s obzirom na $\mathbb{Q}$. I obratno.

Praslika skupa $S \subset V$ *s obzirom na funkciju* $f : U \to V$ je skup $f^{-1}(S) = \{x \in U : f(x) \in S\}$.

Definicija 1.1.4. *Neka su* $(U, \mathcal{U})$ *i* $(V, \mathcal{V})$ *izmjerivi prostori. Funkcija* $f : U \to V$ *je* $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-izmjeriva (izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$) *ako vrijedi* $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{U}$. *Koristimo izraz* $\mathcal{U}$*-izmjeriva ako je jasno o kojoj se* σ*-algebri* $\mathcal{V}$ *radi.*

Označimo s $\mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *Borelovu* σ*-algebru* na d-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$. To je σ-algebra generirana familijom svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^d$ (odnosno najmanja σ-algebra na $\mathbb{R}^d$ koja sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^d$). Borelovu σ-algebru na $\mathbb{R}$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ označavamo s $\mathcal{B}$.

Neka je $(U, \mathcal{U})$ izmjeriv prostor. Ako su funkcije $f, g : U \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$-izmjerive, tada su i funkcije $f + g$, fg, αf $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, $\frac{1}{f}$ (definirana tamo gdje je $f \neq 0$), $|f|$, $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ $(\mathcal{U}, \mathcal{B})$-izmjerive.

Definicija 1.1.5. Slučajna varijabla *na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjeriva u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$.

Definicija 1.1.6. Slučajni vektor *na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *izmjeriva u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_d)$.

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Označimo i-tu komponentu od X s X_i, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada možemo pisati $X = (X_1, X_2, ..., X_d)$. Vrijedi sljedeća karakterizacija: X je slučajni vektor ako i samo ako je X_i slučajna varijabla za sve $i = 1, 2, ..., d$.

Definicija 1.1.7. *Neka su* $X_1, ..., X_n$ *slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Kažemo da su* $X_1, ..., X_n$ nezavisne *ako za proizvoljne* $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, ..., n$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) = \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i),$$

gdje $\{X_i \in B_i\}$ *označava* $X_i^{-1}(B_i)$.

Definicija 1.1.8. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te neka su* $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{H}$ *dvije* σ*-algebre sadržane u* $\mathcal{F}$. *Kažemo da su* $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{H}$ nezavisne *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H), \qquad \text{za sve } G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}.$$

Kažemo da je slučajna varijabla X *nezavisna od* σ*-algebre* $\mathcal{G}$ ako su σ-algebre $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ nezavisne, gdje je $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B})$ σ-algebra generirana s X.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. To je primjer prostora s mjerom, a slučajna varijabla X na Ω je izmjeriva funkcija. Teorija mjere nam govori kako integrirati slučajnu varijablu X u odnosu na mjeru $\mathbb{P}$.

Definicija 1.1.9. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla. Kažemo da* X *ima matematičko očekivanje ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[|X|] := \int_\Omega |X| d\mathbb{P} = \int_\Omega |X|(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

U tom slučaju definiramo matematičko očekivanje od X *s*

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Karakteristična funkcija skupa A definirana je s

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Definicija 1.1.10. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje te neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$.* Uvjetno očekivanje od *X* uz dano *$\mathcal{G}$ je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi*

$$\mathbb{E}[1_A \,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1_A X], \ \forall A \in \mathcal{G}. \tag{1.1}$$

Uvjetno očekivanje postoji i jedinstveno je gotovo sigurno te se može pokazati da vrijedi (uz pretpostavku da X^2 ima očekivanje)

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] = \inf\left\{\mathbb{E}[(Y - X)^2] : Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-izmjeriva}, Y^2 \text{ ima očekivanje}\right\}.$$

Stoga uvjetno očekivanje možemo interpretirati kao najbolju aproksimaciju (u smislu najmanjih kvadrata) slučajne varijable X ukoliko nam je poznata informacija dana σ-algebrom $\mathcal{G}$. Navodimo neka osnovna svojstva uvjetnog očekivanja:

1. Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ *g.s.*
2. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right] = \mathbb{E}[X]$.
3. Ako su X_1 i X_2 slučajne varijable koje imaju očekivanje, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je
$$\mathbb{E}[\alpha X_1 + \beta X_2|\mathcal{G}] = \alpha\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \beta\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \ g.s.$$
4. Ako je Y omeđena $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je
$$\mathbb{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ g.s.$$
5. Ako je $\mathcal{H}$ σ-algebra takva da $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \ g.s.$$
6. Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ *g.s.*

Neka je $A \in \mathcal{F}$. *Uvjetna vjerojatnost od A uz dano $\mathcal{G}$* definira se formulom

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[1_A|\mathcal{G}].$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. U nastavku definiramo slučajni proces i neke s njim povezane pojmove u diskretnom vremenu, a oznaka $t \geq 0$ će nam značiti $t \in \mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$.

Definicija 1.1.11. *Pretpostavimo da je za svaki $t \in \mathbb{Z}_+$ $X(t)$ slučajna varijabla (vektor) na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X(t) : t \geq 0)$ naziva se* slučajni proces *(s diskretnim vremenom).*

Definicija 1.1.12. *Familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ *σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ za svaki $t \geq 0$ zove se* filtracija.

Definicija 1.1.13. *Slučajni proces $X = (X(t) : t \geq 0)$ je* adaptiran *s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ ako je za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla (vektor) $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva.*

Definicija 1.1.14. *Slučajni proces $X = (X(t) : t \geq 0)$ je* predvidiv *u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ ako je za svaki $t \geq 1$ slučajna varijabla (vektor) $X(t)$ izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{t-1}$ te ako je X_0 izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_0$.*

Definicija 1.1.15. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija i $X = (X(t) : t \geq 0)$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ za sve $t \geq 0$. Slučajni proces X je* martingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingal*) ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X(t+1)|\mathcal{F}_t] = X(t) \text{ g.s., za sve } t \geq 0.$$

Definicija se proširuje na višedimenzionalan slučaj: niz $X = (X(t) : t \geq 0)$ slučajnih vektora u $\mathbb{R}^d$ je martingal ako su sve komponente martingali.

Uočimo da ako je $X = (X(t) : t \geq 0)$ martingal, tada je najbolji procjenitelj slučajne varijable $X(t+1)$ (na koju možemo gledati kao na neposrednu budućnost) uz danu $\mathcal{F}_t$ (koju možemo smatrati informacijom o prošlosti i sadašnjosti) upravo trenutna vrijednost procesa $X(t)$.

Iz relacije $\mathbb{E}[X(t+1)|\mathcal{F}_n] = X(t)$ g.s. uzimanjem očekivanja slijedi $\mathbb{E}[X(t+1)] = \mathbb{E}[X(t)]$ iz čega odmah imamo i $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(0)], \forall t \geq 0$. Dakle, proces koji je martingal ima konstantno očekivanje.

Ako je $X = (X(t) : t \geq 0)$ martingal, koristeći svojstva uvjetnog očekivanja jednostavno se vidi da za proizvoljne $0 \leq s \leq t$ imamo

$$X(s) = \mathbb{E}[X(s+1)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X(s+2)|\mathcal{F}_{s+1}]|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[X(s+2)|\mathcal{F}_s] = \ldots = \mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s].$$

Definicija 1.1.16. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F}$, neka je $X = (X(t) : t \geq 0)$ martingal te neka je $H = (H(t) : t \geq 0)$ predvidiv slučajni proces. Definiramo niz $Y = (Y(t) : t \geq 0)$ slučajnih varijabli na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} Y(0) &:= H(0)X(0), \\ Y(t) &:= H(0)X(0) + H(1)\Delta X(1) + \ldots + H(t)\Delta X(t), \qquad t \geq 1, \end{aligned}$$

gdje $\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$. Niz Y naziva se martingalna transformacija.

Može se pokazati da je martingalna transformacija također martingal.

1.2 Martingalni pristup vrednovanju

U ovom odjeljku proučavamo financijsko tržište s $d+1$ financijskom imovinom. Imovine u principu mogu biti skoro bilo što, kao npr. obveznice, dionice, opcije ili bilo koji financijski instrument kojim se trguje na likvidnom tržištu. Cijenu i-te financijske imovine u trenutku t označavamo sa $S^i(t)$. Pretpostavljamo da se imovinama može trgovati u trenucima $t = 0, 1, ..., T$.

Cijene financijskih imovina općenito su slučajne (cijena neke imovine $S^i(t)$ u trenutku $t-1$, a i svima prije njega, nam je nepoznata zbog slučajnih fluktuacija) pa stoga pretpostavljamo da su $S^i(t)$ slučajne varijable. Za proučavanje slučajnih varijabli potreban nam je vjerojatnosni prostor. Neka je to $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O elementarnim događajima $\omega \in \Omega$ možemo razmišljati kao o različitim stanjima svijeta u budućnosti ili kao o mogućim scenarijima. Pretpostavljamo da se može dogoditi najviše konačno različitih scenarija, odnosno da je prostor elementarnih događaja konačan, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\}$ za neki $K \in \mathbb{N}$. Za σ-algebru događaja uzimamo partitivni skup od Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pretpostavljamo i da su svi scenariji zaista mogući, to jest da vrijedi $\mathbb{P}(\omega) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$.

Dalje, pretpostavljamo da uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ imamo i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Na elemente σ-algebre $\mathcal{F}_t$ možemo gledati kao na događaje koji mogu biti opaženi do trenutka t, a na $\mathcal{F}_t$ kao na informaciju o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku t (za koju pretpostavljamo da je jednako dostupna svim sudionicima na tržištu). Kako vrijeme prolazi opažamo sve više događaja, odnosno dostupna informacija o stanju svijeta je sve veća pa je prirodno pretpostaviti da je familija neopadajuća. Dodatno pretpostavljamo i da u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o mogućem stanju svijeta, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, a na kraju imamo potpunu informaciju, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Razumno je pretpostaviti da cijena $S^i(t)$ ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t, odnosno o informaciji dostupnoj do trenutka t. To je zapravo pretpostavka da je slučajna varijabla $S^i(t)$ izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$, tj. da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{S^i(t) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid S^i(t)(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t$ (ekvivalentno, $\{S^i(t) < x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S^i(t) \geq x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S^i(t) > x\} \in \mathcal{F}_t$). Dakle, je li cijena cijena $S^i(t)$ veća ili manja od x ovisi samo o događajima do trenutka t. Ako označimo sa $S(t) := (S^0(t), S^1(t), ..., S^d(t))$ vektor cijena svih imovina u trenutku t, tada je $S(t) : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor pa je $S = (S(t) : t = 0, 1, ..., T)$ adaptiran slučajni proces.

Pretpostavljamo da na tržištu postoji jedna nerizična imovina, neka je to imovina s indeksom 0. Pretpostavljamo da vrijedi $S^0(0) = 1$ i $S^0(t) = e^{rt}$ za $t = 1, ..., T$, gdje je $r \in \mathbb{R}$ konstanta (primijetimo da se ovdje radi o ukamaćivanju diskretnom u vremenu iako je e^{rt} obično način označavanja koji se koristi kod neprekidnog ukamaćivanja). Na primjer, o S^0 možemo razmišljati kao o novcu u banci uloženom uz kamatnu stopu r. Pretpostavljamo da je kamatna stopa jednaka za posuđivanje i ulaganje.

Prije nego što objasnimo kako se u modelu trguje potrebne su nam još neke pretpostavke o tržištu, odnosno trgovanju na njemu. Pretpostavljamo da ne postoje transakcijski troškovi (trgovanje je besplatno), niti *bid-ask spread* (prodajna cijena jednaka je kupovnoj, za sve imovine) te da je tržište potpuno likvidno, tj. da je u svakom trenutku moguće kupiti i/ili prodati neograničene količine imovine na tržištu (posebno, moguće je posuditi neograničene iznose od banke). Nadalje, pretpostavljamo da je na tržištu dozvoljena tzv. *short* prodaja (*short* pozicija). *Short* pozicija u nultoj imovini je zapravo posuđivanje novca od banke, a inače je to naziv za prodaju imovine koju trenutno ne posjedujemo. Ukratko, ideja je u nekom trenutku $t = t_1$ posuditi neku imovinu, recimo i-tu, uz obećanje da ćemo ju vratiti u nekom kasnijem trenutku $t = t_2$ te ju odmah prodati za iznos $S^i(t_1)$. U trenutku $t = t_2$ kupujemo tu imovinu po cijeni $S^i(t_2)$ i vraćamo je, a ako je cijena te imovine pala, tj. $S^i(t_2) < S^i(t_1)$, ostvarili smo zaradu u iznosu od $S^i(t_1) - S^i(t_2)$. Dakle, *short* prodaja omogućuju zaradu od pada cijena imovine. *Short* prodaja i-te imovine će biti predstavljena negativnom količinom iste u portfelju. Također pretpostavljamo da je sva imovina beskonačno djeljiva (na primjer, možemo posjedovati polovinu dionice). Zadnje dvije pretpostavke znače da svaki vektor u $\mathbb{R}^{d+1}$ može predstavljati portfelj.

Trgovanje u modelu se odvija konstrukcijom portfelja. U trenutku $t = 0$ ulažemo u dostupne imovine i tako stvaramo portfelj $\phi(1) = (\phi^0(1), \phi^1(1), ..., \phi^d(1))$, gdje $\phi^i(1)$ označava broj jedinica i-te imovine u portfelju. U trenutku $t = 1$ možemo rebalansirati portfelj, tj. zamijeniti ga nekim drugim portfeljom koji označavamo s $\phi(2) = (\phi^0(2), \phi^1(2), ..., \phi^d(2))$. Taj novi portfelj ovisit će o cijenama financijske imovine u trenutku $t = 1$, a budući da su one slučajne, ali $\mathcal{F}_1$ izmjerive i portfelj $\phi(2)$ će općenito biti $\mathcal{F}_1$ izmjeriv slučajni vektor u $\mathbb{R}^{d+1}$. U trenutku $t = 2$ saznajemo nove cijene $S(2)$ pa rebalansiramo portfelj i tako dalje.

Definicija 1.2.1. Strategija trgovanja *(ili* dinamički portfelj*) je predvidiv slučajni proces* $\phi = ((\phi^0(t), \phi^1(t), ..., \phi^d(t)) : t = 1, 2, ..., T)$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$.

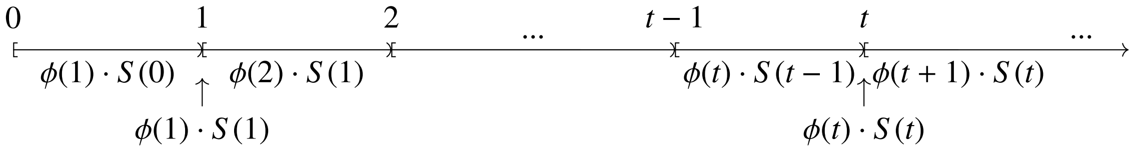
Dodatno, definiramo portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi(0) := \phi(1)$.

Definicija 1.2.2. Vrijednost portfelja ϕ *u trenutku* $t = 0, 1, ..., T$ *definiramo kao*

$$V^\phi(t) = \phi(t) \cdot S(t) = \sum_{i=0}^{d} \phi^i(t) S^i(t).$$

Primijetimo da je $V^\phi(t)$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla pa vidimo da je $V^\phi = (V^\phi(t) : t = 0, 1, ..., T)$ adaptiran slučajni proces.
Po definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što saznamo cijene imovina u trenutku t, a prije rebalansa portfelja (vidi Sliku 1.1).

Osim stvarnih vrijednosti financijskih imovina i portfelja zanimaju nas i njihove diskontirane vrijednosti (sadašnje vrijednosti). Uvedimo oznaku $\beta(t) = 1/S^0(t) = e^{-rt}$ za diskontni faktor od vremena t do vremena 0. Dakle, jedna novčana jedinica u trenutku t



Slika 1.1: Dinamika portfelja

vrijedi $\beta(t)$ novčanih jedinica danas. Diskontirane cijene financijskih imovina $\beta(t)S^i(t) = e^{-rt}S^i(t)$ označavamo sa $\tilde{S}^i(t)$ (uočimo $\tilde{S}^0(t) = 1$ za sve $t = 0, 1, ..., T$), a diskontiranu vrijednost portfelja $\beta(t)V^\phi(t) = \phi(t) \cdot \tilde{S}(t)$ s $\tilde{V}^\phi(t)$, gdje smo sa $\tilde{S}(t) := (\tilde{S}^0(t), \tilde{S}^1(t), ..., \tilde{S}^d(t))$ označili vektor diskontiranih cijena svih imovina u trenutku t.

Definicija 1.2.3. *Strategija ϕ je* samofinancirajuća *ako za sve $t = 0, 1, ..., T-1$ vrijedi*

$$\phi(t) \cdot S(t) = \phi(t+1) \cdot S(t). \tag{1.2}$$

Interpretacija uvjeta (1.2) je da u trenutku t saznajemo cijene $S^0(t), S^1(t), ..., S^d(t)$ i vrijednost portfelja postaje $\phi(t) \cdot S(t)$. Biramo novi portfelj $\phi(t+1)$ čija je vrijednost (u trenutku t) $\phi(t+1) \cdot S(t)$. Dakle, uvjet (1.2) govori da vrijednost novog portfelja mora biti jednaka vrijednosti starog, odnosno da sredstva za kupnju novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti starog. Nadalje, uvjet (1.2) ekvivalentan je s

$$\phi(t+1) \cdot (S(t+1) - S(t)) = \phi(t+1) \cdot S(t+1) - \phi(t) \cdot S(t),$$

odnosno

$$\phi(t+1) \cdot (S(t+1) - S(t)) = V^\phi(t+1) - V^\phi(t).$$

Desna strana je razlika vrijednosti portfelja ϕ u trenucima $t+1$ i t, odnosno ukupni dobitak (ili gubitak) portfelja ostvaren između trenutaka t i $t+1$. Lijeva strana je dobitak (ili gubitak) ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina od trenutka t do trenutka $t+1$. Dakle, strategija je samofinancirajuća ako i samo ako je dobitak (ili gubitak) portfelja ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina (a ne, na primjer, dodatnim investiranjem ili povlačenjem novca iz portfelja). Primijetimo još da vrijedi $\phi(t)S(t) = \phi(t+1)S(t)$ ako i samo ako je $\phi(t)\tilde{S}(t) = \phi(t+1)\tilde{S}(t)$ pa na sličan način kao gore dobivamo i da je uvjet (1.2) ekvivalentan s

$$\phi(t+1) \cdot (\tilde{S}(t+1) - \tilde{S}(t)) = \tilde{V}^\phi(t+1) - \tilde{V}^\phi(t). \tag{1.3}$$

Definicija 1.2.4. *Strategija ϕ je* dopustiva *ako je samofinancirajuća i vrijedi $V^\phi(t) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, ..., T$.*

Prethodna definicija govori da investitor u svakom trenutku t mora moći podmiriti svoje eventualne dugove, odnosno mora moći zatvoriti eventualne *short* pozicije.

Definicija 1.2.5. *Dopustiva strategija ϕ je* arbitraža (arbitražna strategija) *ako je $V^\phi(0) = 0$ i $\mathbb{P}(V^\phi(T) > 0) > 0$.*

Uočimo da iz dopustivosti od ϕ imamo $V^\phi(T) \geq 0$. Dakle, arbitraža je dopustiva strategija koja nije izložena riziku gubitka, a s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit. Arbitražna strategija u principu je ekvivalentna mogućnosti da se stvori (strogo pozitivan) profit iz ničega i to bez preuzimanja rizika. Postojanje arbitraže možemo interpretirati kao ozbiljnu grešku tržišnih sudionika pri određivanju cijena imovina, odnosno kao neefikasnost tržišta. Na stvarnim tržištima teško je pronaći arbitražu pa ima smisla proučavati modele tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Kažemo da financijsko tržište ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža.

Definicija 1.2.6. *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se* martingalna mjera *ili* mjera neutralna na rizik *ako za sve $t \in \{0, 1, ..., T-1\}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}^i(t+1)|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i(t), \qquad i = 0, 1, ..., d.$$

Ekvivalentno, $\mathbb{P}^*$ je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se ekvivalentna martingalna mjera *ako je martingalna mjera i vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$.*

Naziv martingalna mjera jasan je iz definicije. Iz uvjeta definicije slijedi $\mathbb{E}^*[S^i(t+1)|\mathcal{F}_t] = e^r S^i(t)$ za $i = 1, ..., d$, odakle naziv mjera neutralna na rizik. Uz $\mathbb{P}^*$ je očekivani povrat na rizičnu imovinu u sljedećem periodu, uz danu informaciju o sadašnjosti i prošlosti, jednak povratu na nerizičnu imovinu (i to za svaki period). Dakle, iako smo preuzeli rizik, uz $\mathbb{P}^*$ ne očekujemo da ćemo za to biti nagrađeni (više nego što bismo bili nagrađeni za držanje nerizične imovine).

Neka je ϕ samofinancirajuća strategija. Tada koristeći (1.3) diskontiranu vrijednost portfelja ϕ možemo zapisati kao

$$\tilde{V}^\phi(t) = \tilde{V}^\phi(0) + \sum_{j=1}^{t} (\tilde{V}^\phi(j) - \tilde{V}^\phi(j-1)) = \tilde{V}^\phi(0) + \sum_{j=1}^{t} \phi(j) \cdot \Delta\tilde{S}(j),$$

gdje smo označili $\Delta\tilde{S}(j) = \tilde{S}(j) - \tilde{S}(j-1)$. Ako su diskontirane cijene financijskih imovina $\mathbb{P}^*$-martingali, tada je i diskontirana vrijednost portfelja $\mathbb{P}^*$-martingal (kao martingalna transformacija).

Da bismo provjerili da tržište ne dopušta arbitražu po definiciji bismo trebali provjeriti da nijedna dopustiva strategija nije arbitraža. To nije tako jednostavno, a u sljedećem teoremu dan je operativniji uvjet nepostojanja arbitraže.

Teorem 1.2.7. *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u Poglavlju 2 iz [15].

Definicija 1.2.8. Slučajni zahtjev s dospijećem *T je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *takva da je*

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem T zove se izvedenica *primarnih imovina* $S^0, S^1, ..., S^d$ *ako je C funkcija slučajnih vektora* $S(1), S(2), ..., S(T)$.

Slučajni zahtjev C interpretiramo kao ugovor koji vlasniku isplaćuje C novčanih jedinica u trenutku $t = T$. Tipičan primjer slučajnog zahtjeva je europska *call* opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K (opisana u uvodnom poglavlju). Isplatu takve opcije, napisane npr. na prvu financijsku imovinu, možemo zapisati kao $C = \max\left(S^1(T) - K, 0\right)$.

Definicija 1.2.9. *Slučajni zahtjev C je* dostižan *ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V^\phi(T) = C$. Kažemo da strategija ϕ* replicira *C.*

Definicija 1.2.10. *Model tržišta bez arbitraže je* potpun *ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Zahtjev na potpunost tržišta je ekonomski restriktivan i često nema ekonomsko opravdanje, za razlika od zahtjeva na nepostojanje arbitraže. Osnovni rezultat o potpunosti tržišta je sljedeći teorem.

Teorem 1.2.11. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u Poglavlju 2 iz [15].

Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže i potpuno te neka je $\mathbb{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev i ϕ dopustiva strategija koja ga replicira, $V^\phi(T) = C$. Niz diskontiranih vrijednosti portfelja $(\tilde{V}^\phi(t) : 0 \leq t \leq T)$ je $\mathbb{P}^*$-martingal pa je

$$V^\phi(0) = \tilde{V}^\phi(0) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}^\phi(T)] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S^0(T)}\right] = e^{-rT}\mathbb{E}^*[C].$$

Općenitije,

$$\tilde{V}^\phi(t) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}^\phi(T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S^0(T)}|\mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, ..., T,$$

otkud

$$V^\phi(t) = S^0(t)\mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S^0(T)}|\mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, ..., T.$$

Primijetimo da je u trenutku t vrijednost $V^{\phi}(t)$ dopustive strategije ϕ koja replicira C potpuno određena s C.

Prirodno je $V^{\phi}(t)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t. To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju ϕ. Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu $C(0) = \mathbb{E}^*[C/S^0(T)]$, te dobiveni iznos $C(0) = V^{\phi}(0)$ uloži u replicirajući portfelj ϕ. Budući da je ϕ samofinancirajući, investitor može slijediti ϕ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t rebalans dinamičkog portfelja ϕ je besplatan. U trenutku T vrijednost portfelja jednaka je $V^{\phi}(T)$. Međutim, $V^{\phi}(T) = C$ što znači da je iznos $V^{\phi}(T)$ upravo dovoljan za pokriće obaveze dospjele po slučajnom zahtjevu C. Iz ove rasprave nije teško vidjeti i da u situaciji u kojoj se slučajnim zahtjevom u trenutku t trguje za iznos različit od $V^{\phi}(t)$ postoji mogućnost ostvarivanja povrata većeg od r bez rizika.

Dakle, cijena slučajnog zahtjeva u trenutku t jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev u trenutku t. Stoga, ako označimo s $C(t)$ cijenu slučajnog zahtjeva C u trenutku t, imamo

$$C(t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_t], \qquad t = 0, 1, ..., T.$$

Posebno, za trenutak $t = 0$ imamo

$$C(0) = e^{-rT}\mathbb{E}^*[C]. \tag{1.4}$$

1.3 Binomni model

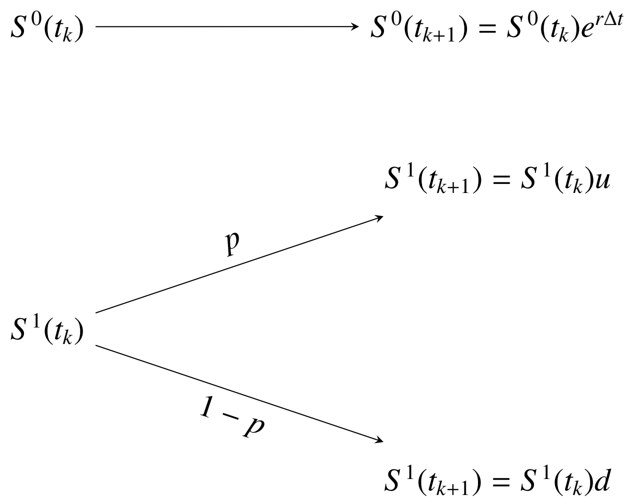
U ovom odjeljku ćemo vidjeti kako teorija iz prethodnog odjeljka izgleda u konkretnom modelu, binomnom modelu s n perioda. Definirat ćemo konkretan vjerojatnosni prostor, na njemu naći ekvivalentnu martingalnu mjeru i pokazati kako pomoću nje možemo odrediti cijenu europske *call* opcije.

Označimo s $\Delta t := \frac{T}{n}$ duljinu jednog vremenskog perioda, gdje je T vremenski horizont od interesa. U binomnom modelu s n perioda pretpostavljamo da se imovinom može trgovati u trenucima $t_k := k\Delta t$ za $k = 0, ..., n$. Označimo tu ekvidistantnu diskretizaciju vremenske osi s $\mathbb{T}$ (dakle, $\mathbb{T} = \{t_k : 0 \leq k \leq n\}$).

Pretpostavljamo da na tržištu postoji nerizična imovina s fiksnim povratom r za jedan period, tj. cijena nerizične imovine u trenutku $t \in \mathbb{T}$ je $S^0(t) = e^{rt}$. Dalje, pretpostavljamo da na financijskom tržištu postoji samo jedna rizična imovina (npr. dionica) čiju cijenu u trenutku $t \in \mathbb{T}$ označavamo sa $S^1(t)$. Pretpostavljamo da cijena rizične imovine između dva uzastopna trenutka ili poraste za faktor $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ili padne za faktor $d = u^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, gdje je $\sigma > 0$ parametar koji zovemo volatilnost. To znači da je

$$S^1(t_{k+1}) = \begin{cases} S^1(t_k)u \\ S^1(t_k)d. \end{cases} \tag{1.5}$$

Pretpostavljamo da je početna cijena rizične imovine S_0, tj. $S^1(0) = S_0$.



Slika 1.2: Promjene cijena u jednom periodu

Konstruirajmo vjerojatnosni prostor. Uočimo da se u svakom trenutku slučajnost očituje samo u tome je li faktor promjene cijene jednak u ili d. Stavimo $\Omega_1 := \{u, d\}$ i neka je $\mathbb{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbb{P}_1(\{u\}) = p$, $\mathbb{P}_1(\{d\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Za prostor elementarnih događaja uzet ćemo Kartezijev produkt skupa Ω_1. Dakle, $\Omega := \Omega_1^n = \{u, d\}^n$. Uočimo da se Ω sastoji od n-torki $(\omega_1, ..., \omega_n)$ gdje je za $k = 1, ..., n$, ω_k ili u ili d. Za vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost $\mathbb{P}_1^n$. Dakle, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^n$.

Proces cijena rizične imovine može se prikazati binomnim stablom (i to rekombinirajućim jer $ud = 1$). Na primjer, za $n = 3$, elementarni događaj (d, u, u) znači da je u prvom periodu faktor za koji se cijena promijenila bio d, a u druga dva perioda u (Slika 1.3, putanja cijene za elementarni događaj (d, u, u) podebljanja).

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ definiramo niz slučajnih varijabli $X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)$ na sljedeći način:

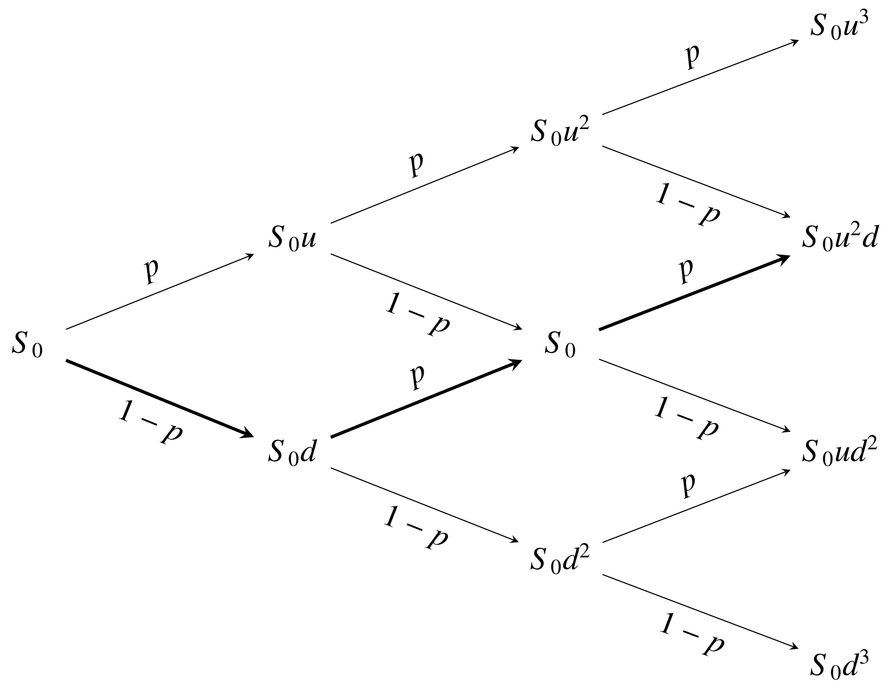
$$X(t_k)(\omega) = \omega_k, \quad \omega = (\omega_1, ..., \omega_n).$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable s distribucijom

$$\mathbb{P}(X(t_k) = u) = p, \qquad \mathbb{P}(X(t_k) = d) = 1 - p.$$

Neka je $S_0 > 0$ zadano. Niz slučajnih varijabli $S^1 = (S^1(t) : t \in \mathbb{T})$ definiramo s

$$\begin{aligned} S^1(0) &:= S_0, \\ S^1(t_k) &:= S^1(t_{k-1})X(t_k), \ k = 1, ..., n. \end{aligned}$$



Slika 1.3: Dinamika cijena dionice

Niz $S^1 = (S^1(t) : t \in \mathbb{T})$ interpretiramo kao niz cijena dionice. Cijena se u periodu između dva uzastopna trenutka t_{k-1} i t_k promijeni za faktor u ili d. To modeliramo slučajnom varijablom $X(t_k)$.

Preostaje definirati filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Kao i u prethodnom odjeljku, pretpostavljamo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tj. u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju. Dostupna informacija u trenutku $t_k \in \mathbb{T}$ su cijene do (uključivo) trenutka t_k. Dakle, imamo informaciju o $S^1(t_0), S^1(t_1), ..., S^1(t_k)$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X(t_1), ..., X(t_k)$ (iz faktora promjena možemo rekonstruirati cijene dionice, i obratno, iz cijena dionice možemo izračunati faktore promjene). Informaciju o $S^1(t_1), ..., S^1(t_k)$ opisujemo σ-algebrom $\mathcal{F}_{t_k} := \sigma(S^1(t_1), ..., S^1(t_k))$. To je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S^1(t_1), ..., S^1(t_k)$ izmjerive. Zbog jednake informacije sadržane u nizu $X(t_1), ..., X(t_k)$, vrijedi $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(X(t_1), ..., X(t_k))$.

Diskontirane cijene dionice definirane su kao i u prethodnom odjeljku,

$$\tilde{S}^1(t) := S^1(t)/S^0(t), \qquad t \in \mathbb{T}.$$

U nastavku proučavamo pod kojim uvjetima binomni model ne dopušta arbitražu i potpun je te tražimo ekvivalentnu martingalnu mjeru. Glavni tehnički alat koji ćemo za to koristiti je rezultat sljedeće leme.

Lema 1.3.1. *Neka je $\hat{\mathbb{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s $\mathbb{P}$.*

a) Niz diskontiranih cijena $(\tilde{S}^1(t) : t \in \mathbb{T})$ je $\hat{\mathbb{P}}$-martingal ako i samo ako vrijedi

$$\hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}, \qquad k = 1, ..., n.$$

b) Neka je zadovoljen uvjet a). Tada vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$ i slučajne varijable $X(t_1), ..., X(t_n)$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$).

Dokaz. a) Za $k \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{E}}[\tilde{S}^1(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \tilde{S}^1(t_{k-1}) &\iff \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{\tilde{S}^1(t_k)}{\tilde{S}^1(t_{k-1})}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 \\
&\iff \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{\frac{S^1(t_k)}{S^0(t_k)}}{\frac{S^1(t_{k-1})}{S^0(t_{k-1})}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 \iff e^{-r\Delta t}\hat{\mathbb{E}}\left[\frac{S^1(t_k)}{S^1(t_{k-1})}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 \\
&\iff \hat{\mathbb{E}}\left[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = e^{r\Delta t},
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj ekvivalenciji iskoristili da je $\tilde{S}^1(t_{k-1})$ $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-izmjeriva.
b) Po pretpostavci je $\hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}$. Međutim, $X(t_k) \in \{u, d\}$ te $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u) > 0$ i $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d) > 0$ ($\hat{\mathbb{P}}$ je ekvivalentna s $\mathbb{P}$). Pretpostavimo da ne vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$. Tada je ili $e^{r\Delta t} \leq d < u$ ili $d < u \leq e^{r\Delta t}$. U prvom slučaju je $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) \geq e^{r\Delta t}) = 1$ i $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) > e^{r\Delta t}) > 0$ otkud slijedi $\hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] > e^{r\Delta t}$ što je u kontradikciji s $\hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}$. Slučaj $d < u \leq e^{r\Delta t}$ na isti način daje kontradikciju.

Nadalje, računamo,

$$\begin{aligned}
e^{r\Delta t} &= \hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= \hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=d\}}X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] + \hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=u\}}X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= d\hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=d\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] + u\hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=u\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= d\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + u\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}).
\end{aligned}$$

Također imamo i

$$1 = \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}).$$

Rješavanjem po $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}})$ i $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}})$ dobivamo

$$\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}, \quad \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{1.6}$$

Definiramo

$$\hat{p} := \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Zbog pokazanog $d < e^{r\Delta t} < u$ slijedi $0 < \hat{p} < 1$. Uz ovako definirani $\hat{p}$, (1.6) postaje

$$\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1 - \hat{p}, \quad \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \hat{p}.$$

Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d) &= \hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=d\}}] = \hat{\mathbb{E}}\left[\hat{\mathbb{E}}[1_{\{X(t_k)=d\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}]\right] \\ &= \hat{\mathbb{E}}\left[\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\right] = \hat{\mathbb{E}}[1 - \hat{p}] = 1 - \hat{p},\end{aligned}$$

i slično $\hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u) = \hat{p}$. To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X(t_1), ..., X(t_n)$. Drugo što vidimo iz (1.6) je da je $X(t_k)$ nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, $k = 1, 2, ..., n$. Budući da je $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ generirana s $X(t_1), ..., X(t_{k-1})$, slijedi da je $X(t_k)$ nezavisna s $X(t_1), ..., X(t_{k-1})$, $k = 1, 2, ..., n$. Odavde se vidi nezavisnost slučajnih varijabli $X(t_1), ..., X(t_n)$ (u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$). □

Lema 1.3.2. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada je $d < e^{r\Delta t} < u$.*

Dokaz. Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Po Lemi 1.3.1 a) (primijenjenoj na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$) slijedi $\mathbb{E}^*[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}$. Sada iz Leme 1.3.1 b) slijedi $d < e^{r\Delta t} < u$. □

Gornja lema ima jednostavnu ekonomsku interpretaciju. Pretpostavimo da ne vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$. Na primjer, neka je $e^{r\Delta t} \leq d < u$. Tada je $S^1(T) \geq S_0 d^n \geq S_0 e^{rT}$ za sve $\omega \in \Omega$ te postoji bar jedan ω' za koji je $S^1(T)(\omega') > S_0 e^{rT}$. Ako posudimo iz banke S_0 i uložimo to u jednu dionicu, u trenutku T ne možemo imati manje od $S_0 e^{rT}$ koliko smo dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Teorem 1.3.3. *a) Binomni model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $d < e^{r\Delta t} < u$.*

b) Ako je $d < e^{r\Delta t} < u$, tada je binomni model potpun.

Dokaz. a) Jedan smjer je tvrdnja Leme 1.3.2. Pretpostavimo da je $d < e^{r\Delta t} < u$. Da bismo dokazali da tržište ne dopušta arbitražu konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru. Definiramo

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Tada je po pretpostavci $0 < p^* < 1$. Neka je $\mathbb{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbb{P}_1^*(\{u\}) = p^*$ i neka je $\mathbb{P}^* := (\mathbb{P}_1^*)^n$. Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna je vjerojatnosti $\mathbb{P}$. Slučajne varijable $X(t_1), ..., X(t_n)$ su nezavisne u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Nadalje, za sve $k = 1, ..., n$ vrijedi

$$\mathbb{P}^*(X(t_k) = u) = p^*, \quad \mathbb{P}^*(X(t_k) = d) = 1 - p^*.$$

Kako su $X(t_1), ..., X(t_n)$ nezavisne tada je posebno i $X(t_k)$ nezavisna od $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ pa imamo

$$\mathbb{E}^*[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \mathbb{E}^*[X(t_k)] = (1 - p^*)d + p^*u = e^{r\Delta t}.$$

Po Lemi 1.3.1 a) slijedi da je $S^1 = (S^1(t) : t \in \mathbb{T})$ martingal u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera.

b) Neka su $\mathbb{P}^*$ i $\hat{\mathbb{P}}$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po Lemi 1.3.1 slučajne varijable $X(t_1), ..., X(t_n)$ su tada nezavisne i jednako distribuirane i po $\mathbb{P}^*$ i po $\hat{\mathbb{P}}$ te vrijedi

$$\mathbb{E}^*[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}, \quad \hat{\mathbb{E}}[X(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}, \quad k = 1, ..., n,$$

odnosno zbog nezavisnosti od $X(t_1), ..., X(t_n)$

$$\mathbb{E}^*[X(t_k)] = e^{r\Delta t}, \quad \hat{\mathbb{E}}[X(t_k)] = e^{r\Delta t}, \quad k = 1, ..., n.$$

Označimo $p^* = \mathbb{P}^*(X(t_k) = u)$ i $\hat{p} = \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u)$ te uočimo iz jednakosti iznad da p^* i $\hat{p}$ zadovoljavaju istu jednadžbu:

$$p^*u + (1 - p^*)d = e^{r\Delta t}, \quad \hat{p}u + (1 - \hat{p})d = e^{r\Delta t}.$$

Dakle, za sve $k = 1, ..., n$ vrijedi

$$\mathbb{P}^*(X(t_k) = u) = \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = u), \quad \mathbb{P}^*(X(t_k) = d) = \hat{\mathbb{P}}(X(t_k) = d).$$

Zbog

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}) &= \mathbb{P}^*(X(t_1) = \omega_1, ..., X(t_n) = \omega_n)\\ &= \mathbb{P}^*(X(t_1) = \omega_1) \cdots \mathbb{P}^*(X(t_n) = \omega_n),\end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}) &= \hat{\mathbb{P}}(X(t_1) = \omega_1, ..., X(t_n) = \omega_n)\\ &= \hat{\mathbb{P}}(X(t_1) = \omega_1) \cdots \hat{\mathbb{P}}(X(t_n) = \omega_n),\end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbb{P}^*(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\}) = \hat{\mathbb{P}}(\{(\omega_1, ..., \omega_n)\})$$

za sve $(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega$. Zato je $\mathbb{P}^* = \hat{\mathbb{P}}$, odnosno martingalna mjera je jedinstvena pa je tržište potpuno. □

Neka je sada $d < e^{r\Delta t} < u$ i $\mathbb{P}^*$ jedinstvena martingalna mjera. Tada je za sve $k = 1, ..., n$

$$\mathbb{P}^*(X(t_k) = u) = p^*, \quad \mathbb{P}^*(X(t_k) = d) = 1 - p^*,$$

gdje

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Primijetimo da su sve vrijednosti koje terminalna cijena dionice $S^1(T)$ može poprimiti dane s

$$S_0 u^i d^{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., n,$$

gdje je i broj perioda u kojima je cijena dionice porasla, a $n-i$ onda automatski broj perioda u kojima je cijena pala. Vjerojatnost neke putanje cijene koja završava u $S_0 u^i d^{n-i}$ jednaka je $p^{*i}(1-p^*)^{n-i}$, a vjerojatnost da je terminalna cijena jednaka $S_0 u^i d^{n-i}$ jednaka je zbroju vjerojatnosti svih putanja koje završavaju u $S_0 u^i d^{n-i}$. Takvih putanja je $\binom{n}{i}$ (na koliko načina se može dogoditi i porasta, tj. na koliko načina od n perioda možemo izabrati i perioda u kojima se dogodio porast) te sve imaju jednaku vjerojatnost. Dakle, distribucija od $S^1(T)$ dana je s

$$\mathbb{P}^*(S^1(T) = S_0 u^i d^{n-i}) = \binom{n}{i} p^{*i}(1-p^*)^{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Odredimo sada cijenu europske *call* opcije s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K. To je slučajni zahtjev $C = \max\left(S^1(T) - K, 0\right)$. Označimo njegovu cijenu u trenutku $t = 0$ s $C(S_0, K, T, n)$ (jer će ovisiti o svim tim parametrima). Prema formuli (1.4) ta cijena jednaka je $e^{-rT}\mathbb{E}^*[C]$ pa slijedi

$$C(S_0, K, T, n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{*i}(1-p^*)^{n-i} \max\left(S_0 u^i d^{n-i} - K, 0\right).$$

Ukratko, u binomnom modelu s n perioda pretpostavljamo da u svakom periodu cijena dionice može ili porasti za faktor $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ili pasti za faktor $d = u^{-1} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, gdje je $\sigma > 0$ parametar koji zovemo volatilnost, a $\Delta t = T/n$ duljina jednog vremenskog perioda. Pretpostavljamo da je kamatna stopa tijekom cijelog razdoblja od 0 do T konstantna i iznosi r (uz neprekidno ukamaćivanje). Ako vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$, tada je model bez arbitraže i potpun, a jedinstvena martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ dana je s

$$\mathbb{P}^*(X(t) = u) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad \mathbb{P}^*(X(t) = d) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d},$$

gdje je $X(t)$ faktor za koji se cijena dionice promijeni u periodu koji prethodi trenutku t.

U ostatku rada radimo s binomnim modelom za koji pretpostavljamo da vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$, a vjerojatnost porasta cijene dionice uz martingalnu mjeru označavamo jednostavno s p. Dakle, od sada

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Poglavlje 2

Cijene opcija s barijerom u binomnom modelu

Cilj ovog poglavlja je izvesti formule za cijene europskih *call* opcija s barijerom u binomnom modelu. Te formule koristit ćemo kod proučavanja konvergencije.

2.1 Princip refleksije

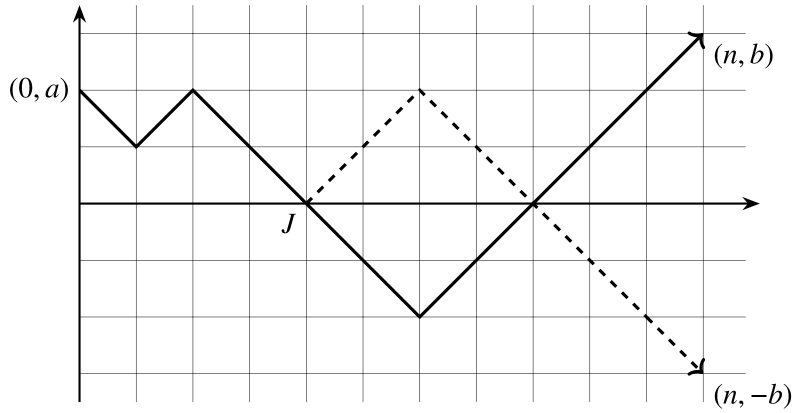
Da bismo dobili formule za cijene opcija s barijerom u binomnom modelu trebamo znati prebrojati broj načina na koji cijena dionice može doći do proizvoljne terminalne cijene, a da je pritom dotakla barijeru. Za to koristimo princip refleksije.

Pretpostavimo da čestica kreće s pozicije $(0, a)$ na cjelobrojnoj rešetci te treba doći do (n, b) (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $a, b \geq 0$). Čestica iz pozicije (i, j) može prijeći u $(i + 1, j + 1)$ ili u $(i + 1, j - 1)$, tj. kreće se na isti način kao i cijena dionice u binomnom modelu (Slika 2.1).

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & (i+1, j+1) \ \text{odgovara porastu cijene dionice, } S \to S\,u \\
(i, j) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (i+1, j-1) \ \text{odgovara padu cijene dionice, } S \to S\,d
\end{tikzcd}$$

Slika 2.1: Korak čestice na cjelobrojnoj rešetci

Zanima nas koliko takvih puteva dodiruje x-os. Promotrimo bilo koji put od $(0, a)$ do (n, b) koji dodiruje x-os. Označimo s J poziciju na kojoj se to prvi put dogodi. Ako reflektiramo (s obzirom na x-os) dio puta od J do (n, b), stvorili smo put od $(0, a)$ do $(n, -b)$. Ova 1-1 korespondencija prikazana na Slici 2.2 pokazuje da je broj puteva od $(0, a)$ do (n, b) koji dodiruju x-os jednak broju puteva od $(0, a)$ do $(n, -b)$.



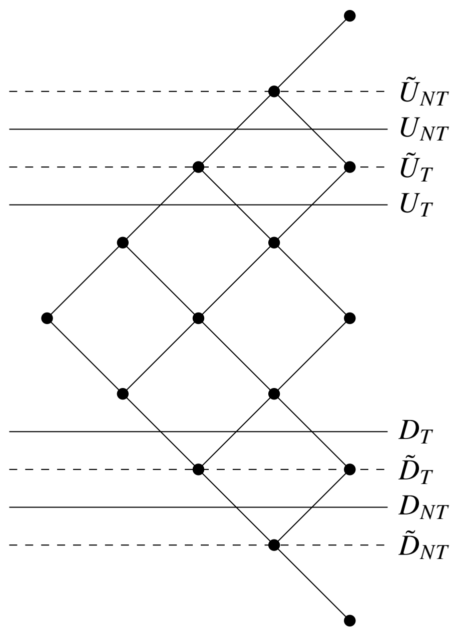
Slika 2.2: Princip refleksije

2.2 Efektivne barijere

Efektivna barijera $\tilde{H}$ je vrijednost iz binomne rešetke takva da kada ju cijena dionice iz binomnog modela prvi puta dostigne opcija s barijerom postaje (*in* opcija) ili prestaje (*out* opcija) biti aktivna. Neka je j_H broj pomaka gore potreban za doseći efektivnu barijeru $\tilde{H}$. Tada j_H ovisi o tome promatramo li *up* ili *down* opcije i o tome je li efektivna barijera terminalna cijena dionice ili ne. Različiti scenariji ilustrirani su primjerom na Slici 2.3. Barijere označene s U predstavljaju barijere za *up* opcije, a one s D za *down* opcije. Barijere s indeksom T odnose se na slučaj kada je efektivna barijera terminalna cijena dionice, a barijere s indeksom NT na slučaj kada nije. Odgovarajuće efektivne barijere označene su tildom. U nastavku konkretno određujemo efektivne barijere za gore opisane slučajeve te uvodimo pogodne oznake.

Za *down* opcije kada je efektivna barijera terminalna cijena dionice imamo

$$\tilde{H} = S_0 u^{j_H} d^{n-j_H} \leq H < S_0 u^{j_H} d^{n-1-j_H} = \tilde{H}u,$$



Slika 2.3: Stvarne i efektivne barijere

iz čega imamo sljedeći niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\begin{aligned} u^{j_H} d^{n-j_H} &\leq \frac{H}{S_0} < u^{j_H} d^{n-1-j_H}, \\ u^{2j_H-n} &\leq \frac{H}{S_0} < u^{2j_H-n+1}, \\ e^{(2j_H-n)\sigma\sqrt{\Delta t}} &\leq \frac{H}{S_0} < e^{(2j_H-n+1)\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\ 2j_H &\leq \frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + n < 2j_H + 1, \end{aligned}$$

pa vidimo da je $j_H = \frac{1}{2}\lfloor 2l_H \rfloor$ gdje je

$$l_H = \frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + \frac{n}{2}. \tag{2.1}$$

Kada je efektivna barijera cijena dionice iz pretposljednjeg perioda imamo

$$\tilde{H} = S_0 u^{j_H} d^{n-1-j_H} \leq H < S_0 u^{j_H+1} d^{n-(j_H+1)} = \tilde{H}u,$$

što je (slično kao gore) ekvivalentno s

$$2j_H + 1 \leq 2l_H < 2j_H + 2,$$

odakle vidimo da je $j_H = \frac{1}{2}\lfloor 2l_H \rfloor - \frac{1}{2}$.

Za *up* opcije kada je efektivna barijera terminalna cijena dionice imamo

$$\tilde{H}d = S_0 u^{j_H - 1} d^{n-1-(j_H-1)} < H \leq S_0 u^{j_H} d^{n-j_H} = \tilde{H},$$

pa slično kao za *down* opcije dobivamo da je $j_H = \frac{1}{2}\lceil 2l_h \rceil$. Kada je efektivna barijera cijena dionice iz pretposljednjeg perioda imamo

$$\tilde{H}d = S_0 u^{j_H} d^{n-j_H} < H \leq S_0 u^{j_H} d^{n-1-j_H} = \tilde{H},$$

odakle slično kao prije dobivamo $j_H = \frac{1}{2}\lceil 2l_h \rceil - \frac{1}{2}$.

Ako definiramo

$$\tilde{j_H} = \begin{cases} \frac{1}{2}\lfloor 2l_H \rfloor & \text{za } \textit{down} \text{ opcije} \\ \frac{1}{2}\lceil 2l_H \rceil & \text{za } \textit{up} \text{ opcije,} \end{cases}$$

onda efektivnu barijeru možemo zapisati kao $\tilde{H} = S_0 u^{\tilde{j_H}} d^{n-\tilde{j_H}}$ i uočavamo

$$j_H = \tilde{j_H} - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_n), \tag{2.2}$$

gdje je

$$\epsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{ako efektivna barijera nije terminalna cijena dionice} \\ 1 & \text{ako je efektivna barijera terminalna cijena dionice.} \end{cases}$$

Nadalje, ako definiramo

$$\Delta_n^H = \begin{cases} \text{frac}(2l_H) & \text{za } \textit{down} \text{ opcije} \\ \text{frac}(-2l_H) & \text{za } \textit{up} \text{ opcije,} \end{cases}$$

gdje je $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$, uočavamo

$$2\tilde{j_H} = 2l_H - \begin{cases} \Delta_n^H & \text{za } \textit{down} \text{ opcije} \\ -\Delta_n^H & \text{za } \textit{up} \text{ opcije.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Iz gornjih formula za *down* opcije imamo

$$\tilde{H} = S_0 u^{\tilde{j_H}} d^{n-\tilde{j_H}} = S_0 u^{2\tilde{j_H}-n} = S_0 u^{2l_H - \Delta_n^H - n} = u^{-\Delta_n^H} S_0 e^{(2l_H - n)\sigma\sqrt{\Delta t}} = u^{-\Delta_n^H} H$$

što možemo zapisati kao

$$H = \tilde{H} u^{\Delta_n^H} = \tilde{H}^{1-\Delta_n^H} \tilde{H}^{\Delta_n^H} u^{\Delta_n^H} = \tilde{H}^{1-\Delta_n^H} (\tilde{H}u)^{\Delta_n^H},$$

to jest kao

$$\log H = (1 - \Delta_n^H)\log(\tilde{H}) + \Delta_n^H \log(\tilde{H}u).$$

Slično, za *up* opcije dobivamo

$$\log H = (1 - \Delta_n^H)\log(\tilde{H}) + \Delta_n^H \log(\tilde{H}d).$$

Dakle, Δ_n^H mjeri poziciju barijere H na logaritamskoj skali u odnosu na dvije susjedne cijene dionice, jedna od njih je terminalna cijena dione, a druga cijena dionice iz pretposljednjeg perioda (manja od njih je efektivna barijera u slučaju *down* opcija, a veća u slučaju *up* opcija).

2.3 Određivanje cijena opcija s barijerom

U ovom odjeljku izvodimo formule za cijene europskih *call* opcija s barijerom. Za to nam je za svaku terminalnu cijenu potreban broj puteva koji završavaju u njoj, a dotiču ili prelaze barijeru. Koristimo oznake definirane u prethodnom odjeljku.

Lema 2.3.1. *Neka je S_0 početna cijena dionice u binomnom CRR modelu s n perioda i $\tilde{H} = S_0 u^{\tilde{j}_H} d^{n-\tilde{j}_H}$ efektivna barijera. Tada*

1. *za down opcije, uz pretpostavku $\tilde{H} < S_0$, broj puteva koji dotiču ili prelaze barijeru i završavaju u $S_0 u^i d^{n-i}$ je*
   a) $\binom{n}{i}$ *ako* $i \leq j_H$,
   b) $\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}$ *ako* $j_H < i \leq 2\tilde{j}_H$,
   c) *0 ako* $i > 2\tilde{j}_H$.
2. *za up opcije, uz pretpostavku $\tilde{H} > S_0$, broj puteva koji dotiču ili prelaze barijeru i završavaju u $S_0 u^i d^{n-i}$ je*
   a) 0 *ako* $i < 2\tilde{j}_H - n$,
   b) $\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}$ *ako* $2\tilde{j}_H - n \leq i \leq j_H$,
   c) $\binom{n}{i}$ *ako* $i > j_H$.

Napomena 2.3.2. *Za down, odnosno up opcije pretpostavljamo $\tilde{H} < S_0$, odnosno $\tilde{H} > S_0$ jer su inače te opcije odmah aktivne (kod in opcija) pa su zapravo vanilla opcije ili odmah prestaju biti aktivne (kod out opcija).*

Dokaz Leme 2.3.1. Prvo uočimo da je $S_0 u^i d^{n-i} \leq \tilde{H} = S_0 u^{\tilde{j}_H} d^{n-\tilde{j}_H}$ ako i samo ako je $i \leq j_H$.

1. Za *down* opcije pretpostavljamo $H < S_0$ pa je $\tilde{j}_H < \frac{n}{2}$.

a) Ako je $i \leq \tilde{j}_H$, tada svi putevi koji završavaju u $S_0 u^i d^{n-i}$ moraju dodirnuti $\tilde{H}$ jer je $S_0 u^i d^{n-i} \leq \tilde{H}$ (početna cijena je iznad, a terminalna cijena ispod efektivne barijere). Dakle, broj takvih puteva je $\binom{n}{i}$.

b) Ako je $j_H < i \leq 2\tilde{j}_H$, tada je $S_0 u^i d^{n-i} > \tilde{H}$ te je broj puteva od S_0 do $S_0 u^i d^{n-i}$ koji udare u barijeru po principu refleksije (opisanom u odjeljku 2.1) jednak broju puteva od S_0 do $S_0 u^{2\tilde{j}_H - i} d^{n-(2\tilde{j}_H - i)}$, tj. $\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}$ (situacija prikazana na Slici 2.4a).

c) Neka je $i > 2\tilde{j}_H$. Prvo, da od S_0 dođemo do $\tilde{H} = S_0 d^{n-2\tilde{j}_H}$ potrebno je barem $n - 2\tilde{j}_H$ koraka. Nakon toga, da od $\tilde{H} = S_0 u^{2\tilde{j}_H - n}$ dođemo do $S_0 u^i d^{n-i} = S_0 u^{2i-n}$ potrebno je bar $2i - n - (2\tilde{j}_H - n) = 2i - 2\tilde{j}_H$ koraka. Dakle, ukupno je potrebno barem $n - 2\tilde{j}_H + 2i - 2\tilde{j}_H = n + 2(i - 2\tilde{j}_H) > n$ koraka pa stoga u ovom slučaju ne postoji put koji dodirne barijeru $\tilde{H}$ prije nego što dođe do $S_0 u^i d^{n-i}$ (terminalna cijena $S_0 u^i d^{n-i}$ je toliko visoka da se cijena u n koraka ne stigne iz S_0 spustiti do efektivne barijere pa popeti do $S_0 u^i d^{n-i}$).

2. Za *up* opcije pretpostavljamo $H > S_0$ pa je $\tilde{j}_H > \frac{n}{2}$.

a) Neka je $i < 2\tilde{j}_H - n$. Prvo, da od S_0 dođemo do $\tilde{H} = S_0 u^{2\tilde{j}_H - n}$ potrebno je barem $2\tilde{j}_H - n$ koraka. Nakon toga, da od $\tilde{H} = S_0 d^{n-2\tilde{j}_H}$ dođemo do $S_0 u^i d^{n-i} = S_0 d^{n-2i}$ potrebno je bar $n - 2i - (n - 2\tilde{j}_H) = 2\tilde{j}_H - 2i$ koraka. Dakle, ukupno je potrebno barem $2\tilde{j}_H - n + 2\tilde{j}_H - 2i = 2(2\tilde{j}_H - i) - n > n$ koraka pa stoga u ovom slučaju ne postoji put koji dodirne barijeru $\tilde{H}$ prije nego što dođe do $S_0 u^i d^{n-i}$ (terminalna cijena $S_0 u^i d^{n-i}$ je toliko niska da se cijena u n koraka ne stigne iz S_0 popeti do efektivne barijere pa spustiti do $S_0 u^i d^{n-i}$).

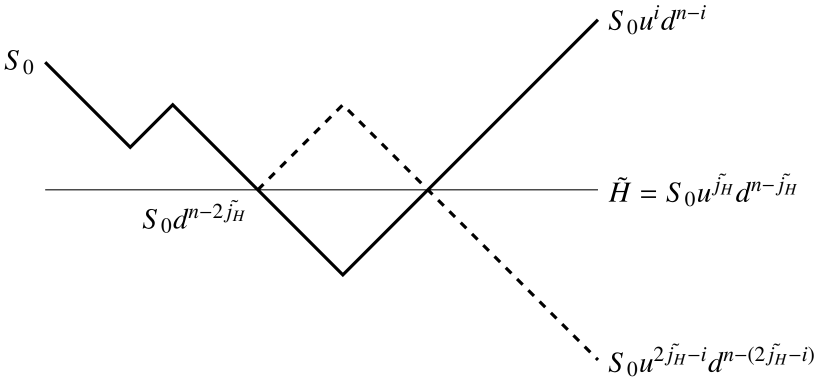
b) Ako je $2\tilde{j}_H - n \leq i \leq j_H$, tada je $S_0 u^i d^{n-i} \leq \tilde{H}$ te je broj puteva od S_0 do $S_0 u^i d^{n-i}$ koji udare u barijeru po principu refleksije jednak broju puteva od S_0 do $S_0 u^{2\tilde{j}_H - i} d^{n-(2\tilde{j}_H - i)}$, tj. $\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}$ (situacija prikazana na Slici 2.4b).

c) Ako je $i > j_H$, tada svi putevi koji završavaju u $S_0 u^i d^{n-i}$ moraju dodirnuti $\tilde{H}$ jer je $S_0 u^i d^{n-i} > \tilde{H}$ (početna cijena je ispod, a terminalna cijena iznad efektivne barijere). Dakle, broj takvih puteva je $\binom{n}{i}$.

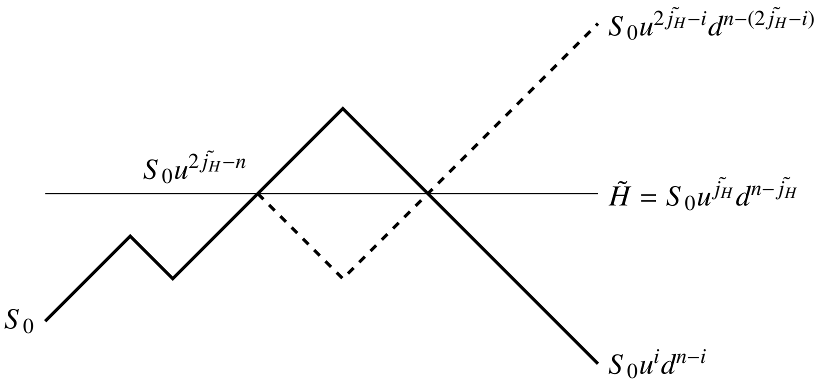
□

Sada lako dobivamo formule za cijene.

Teorem 2.3.3. *U CRR binomnom modelu s n perioda pretpostavimo da je početna cijena dionice S_0. Tada su formule za cijene europskih call opcija s barijerom s cijenom izvršenja K, barijerom H i vremenom dospijeća T:*



(a) Primjer za *down* opcije



(b) Primjer za *up* opcije

Slika 2.4: Princip refleksije za binomno stablo CRR modela

1. *za down-and-in (di) i down-and-out (do) opcije uz $S_0 > H$:*

$$C_{di}(S_0, K, T, H, n) = e^{-rT}\left[\sum_{i=0}^{j_H}\binom{n}{i} + \sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}\right]p^i(1-p)^{n-i}\max(S_0u^id^{n-i} - K, 0), \tag{2.4}$$

$$C_{do}(S_0, K, T, H, n) = e^{-rT}\left[\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i} - \sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}\right]p^i(1-p)^{n-i}\max(S_0u^id^{n-i} - K, 0). \tag{2.5}$$

2. *za up-and-in (ui) i up-and-out (uo) opcije uz* $S_0 < H$*:*

$$C_{ui}(S_0, K, T, H, n) = e^{-rT}\left[\sum_{i=2\tilde{j}_H-n}^{j_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H - i} + \sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}\right]p^i(1-p)^{n-i}\max(S_0u^id^{n-i} - K, 0), \tag{2.6}$$

$$C_{uo}(S_0, K, T, H, n) = e^{-rT}\left[\sum_{i=0}^{j_H}\binom{n}{i} - \sum_{i=2\tilde{j}_H-n}^{j_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}\right]p^i(1-p)^{n-i}\max(S_0u^id^{n-i} - K, 0). \tag{2.7}$$

Dokaz. Formule su jednostavna posljedica Leme 2.3.1 i općenitog principa određivanja cijena slučajnih zahtjeva kojeg smo vidjeli u odjeljku 1.2: cijena slučajnog zahtjeva C s dospijećem T u trenutku $t = 0$ je $e^{-rT}\,\mathbb{E}_p[C]$ gdje je $\mathbb{E}_p$ očekivanje s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik. Očekivanje slučajnog zahtjeva na terminalnim čvorovima binarnog stabla je težinska suma vrijednosti zahtjeva na tim čvorovima, s težinama jednakim vjerojatnostima dostizanja odgovarajućih čvorova (vidi kako smo odredili cijenu europske *call* opcije pred kraj odjeljka 1.3). Vrijednost *call* opcije s barijerom u terminalnim čvorovima jednaka vrijednosti odgovarajuće *vanilla* opcije u tim čvorovima ako je opcija s barijerom aktivna, a 0 inače. Još uočimo da je broj puteva koji završavaju u $S_0u^id^{n-i}$, a za koje je *down-and-in*, odnosno *up-and-in* opcija aktivna dan u Lemi 2.3.1 1), odnosno 2) dok je za *out* opcije taj broj jednak $\binom{n}{i}$ umanjeno za odgovarajući broj iz Leme 2.3.1. □

Napomena 2.3.4. *Za europske call opcije s barijerom vrijedi tzv. in-out paritet: cijena europske vanilla call opcije jednaka je zbroju cijena europske in i out call opcije s barijerom (s istim vremenima dospijeća i cijenama izvršenja),* $C = C_{in} + C_{out}$*. Jednostavan argument arbitražom za in-out paritet je da istovremeno držanje in i out opcije garantira da će u trenutku dospijeća točno jedna od njih biti aktivna te donijeti isplatu jednaku onoj koju donosi vanilla europska call opcija.*

Iz postupka određivanja cijena kojeg smo proveli u ovom odjeljku i algebarski možemo vidjeti in-out paritet u binomnom modelu. Na primjer, za down-and-out opcije je broj puteva koji završavaju u $S_0u^id^{n-i}$*, a za koje je opcija aktivna jednak* $\binom{n}{i}$ *umanjeno za odgovarajući broj iz Leme 2.3.1 1) pa imamo*

$$\begin{aligned}C_{do}(S_0, K, T, H, n) &= e^{-rT}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - \left(\sum_{i=0}^{j_H}\binom{n}{i} + \sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H - i}\right)\right]p^i(1-p)^{n-i}\max(S_0u^id^{n-i} - K, 0) \quad (2.8)\\ &= C(S_0, K, T, n) - C_{di}(S_0, K, T, H, n),\end{aligned}$$

gdje je $C(S_0, K, T, n)$ *cijena vanilla call opcije iz odjeljka 1.3,*

$$C(S_0, K, T, n) = e^{-rT} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max(S_0 u^i d^{n-i} - K, 0).$$

Slično možemo vidjeti da za up-and-out opcije vrijedi

$$C_{uo}(S_0, K, T, H, n) = C(S_0, K, T, n) - C_{ui}(S_0, K, T, H, n). \tag{2.9}$$

Poglavlje 3

Konvergencija cijena opcija s barijerom

U ovom poglavlju proučavamo brzinu konvergencije cijena europskih *call* opcija s barijerom iz binomnog modela u odgovarajuće cijene iz BSM modela kada broj perioda n ide u beskonačnost. U Teoremu 3.1.1 dani su glavni rezultati. Nakon toga pokazujemo kako se ti rezultati mogu primijeniti za ubrzanje konvergencije te ih ilustriramo numeričkim primjerima.

Na početku iznosimo analogni rezultat za *vanilla* opcije. Prvi dokaz da cijene opcija iz binomnog modela konvergiraju u cijene iz BSM modela kada broj perioda n teži u beskonačnost dali su Cox, Ross i Rubinstein u [3] te Rendleman i Bartter u [12]. Leisen i Reimer pokazali su u [7] da je za europske *call* opcije greška $O(1/n)$, ali nisu dali eksplicitnu formulu za koeficijent uz $1/n$ u razvoju greške. Diener i Diener u [5], [6], Walsh u [17] te Chang i Palmer u [2] pokazali su sljedeći teorem:

Teorem 3.0.1. *U CRR binomnom modelu neka je početna cijena dionice S_0, kamatna stopa r te volatilnost σ. Tada cijena europske call opcije s cijenom izvršenja K te vremenom dospijeća T zadovoljava*

$$C(S_0, K, T, n) = C_{BS}(S_0, K, T) + \frac{S_0 e^{-\frac{d_{11}^2}{2}}}{24\sigma\sqrt{2\pi T}} \frac{A - 12\sigma^2 T\left(\left(\Delta_n^K\right)^2 - 1\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

gdje je $C_{BS}(S_0, K, T)$ cijena iz BSM modela te

$$A = -\sigma^2 T(6 + d_{11}^2 + d_{12}^2) + 4T(d_{11}^2 - d_{12}^2)r - 12T^2 r^2,$$

$$d_{11} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_{12} = d_{11} - \sigma\sqrt{T},$$

$$\Delta_n^K = 1 - 2\,\mathrm{frac}\left[\frac{\log(S_0/K)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} - \frac{n}{2}\right].$$

Napomena 3.0.2. *Lin i Palmer u [8] napominju kako je u teoremu iz [2] ostatak dan kao $o(1/n)$, ali pažljivim ispitivanjem dokaza pokazuje se kako je on zapravo $O(1/n^{3/2})$.*

Δ_n^K je veličina slična Δ_n^H iz odjeljka 2.2. Kako bismo vidjeli značenje Δ_n^K uočimo da ako je j_K cijeli broj takav da je

$$S_{j_K-1} = S_0 u^{j_K-1} d^{n-j_K+1} < K \leq S_0 u^{j_K} d^{n-j_K} = S_{j_K},$$

tada je S_{j_K} efektivna cijena izvršenja u binomnom modelu, tj. vrijednost iz binomne rešetke iznad koje cijena dionice iz binomnog modela mora biti u trenutku dospijeća da bi isplata europske *call* opcija bila veća od 0. Manipulacijom gornjih nejednakosti vidimo da je $j_K = \lceil l_K \rceil$ gdje je

$$l_K = \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + \frac{n}{2}, \tag{3.1}$$

a kako je $\Delta_n^K = 1 - \mathrm{frac}(-l_K)$ imamo

$$2j_K = 1 - \Delta_n^K + 2l_K. \tag{3.2}$$

Nadalje, iz gornjih formula imamo

$$S_{j_K} = S_0 u^{j_K} d^{n-j_K} = S_0 u^{2j_K-n} = S_0 u^{1-\Delta_n^K+2l_K-n} = u^{1-\Delta_n^K} S_0 e^{(2l_K-n)\sigma\sqrt{\Delta t}} = u^{1-\Delta_n^K} K$$

što možemo zapisati kao

$$K = S_{j_K} u^{-1+\Delta_n^K} = S_{j_K}^{\frac{1+\Delta_n^K}{2}} S_{j_K}^{\frac{1-\Delta_n^K}{2}} u^{-1+\Delta_n^K} = S_{j_K}^{\frac{1+\Delta_n^K}{2}} \left(S_{j_K} u^{-2}\right)^{\frac{1-\Delta_n^K}{2}} = S_{j_K}^{\frac{1+\Delta_n^K}{2}} S_{j_K-1}^{\frac{1-\Delta_n^K}{2}}$$

odakle

$$\log K = \alpha \log S_{j_K} + (1-\alpha)\log S_{j_K-1},$$

gdje je $\alpha = \frac{1+\Delta_n^K}{2}$. Dakle, Δ_n^K mjeri poziciju cijene izvršenja K na logaritamskoj skali u odnosu na dvije susjedne terminalne cijene dionice.

3.1 Europske call opcije s barijerom

Teorem 3.1.1. *U CRR binomnom modelu s n perioda pretpostavimo da je početna cijena dionice S_0. Tada su asimptotske formule za cijene europskih call opcija s barijerom s cijenom izvršenja K, barijerom H i vremenom dospijeća T:*

1. *za down-and-out (do) i down-and-in (di) opcije uz $S_0 > H$:*

a) ako je $H < K$ ili $H = K$ te $H = K$ nije terminalna cijena dionice:

$$
\begin{aligned}
C_{do}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) + \left[A_1 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&+ \left[B_1 - D_1 \left(\Delta_n^K\right)^2 - E_1 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{di}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{di}(S_0, K, T, H) - \left[A_1 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&- \left[B_2 + D_2 \left(\Delta_n^K\right)^2 - E_1 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right);
\end{aligned}
$$

b) ako je $H > K$ ili $H = K$ te je $H = K$ terminalna cijena dionice:

$$
\begin{aligned}
C_{do}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) + \left[A_2 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&+ \left[B_3 - C\epsilon_n^2 - E_2 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \\
C_{di}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{di}(S_0, K, T, H) - \left[A_2 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&- \left[B_4 + D_3 \left(\Delta_n^K\right)^2 - C\epsilon_n^2 - E_2 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}
$$

2. *za up-and-in (ui) i up-and-out (uo) opcije uz $S_0 < H$ ako je $H > K$:*

$$
\begin{aligned}
C_{ui}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{ui}(S_0, K, T, H) + \left[A_3 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&+ \left[B_5 - D_2 \left(\Delta_n^K\right)^2 - C\epsilon_n^2 - E_3 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{uo}(S_0, K, T, H, n) =& C_{BS}^{uo}(S_0, K, T, H) - \left[A_3 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&- \left[B_6 + D_1 \left(\Delta_n^K\right)^2 - C\epsilon_n^2 - E_3 \left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
$$

gdje su konstante A_i, B_i, C, D_i i E_i dane u Dodatku A, cijene iz BSM modela C_{BS} u Dodatku B i $\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

Napomena 3.1.2. *Primijetimo da je za $H \leq K$ up opcija zapravo vanilla opcija pa stoga nije uključena u ovaj teorem.*

Glavni alati koji se koriste u dokazu ovog teorema su formule (2.4), (2.5), (2.6), i (2.7) za cijene opcija s barijerom u CRR modelu koje smo izveli u odjeljku 2.3 te korolar leme Uspenskog o aproksimaciji binomne distribucije normalnom koji navodimo u nastavku.

Lema 3.1.3. *Pretpostavimo*

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{\beta}{n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) \ i \ j_n = \frac{1-b_n}{2} + \gamma\sqrt{n} + \frac{n}{2},$$

gdje je b_n *ograničen. Tada za* $q_n = 1 - p_n$

$$\sum_{k=j_n}^{n} \binom{n}{k} p_n^k q_n^{n-k} = \Phi(d) + \frac{e^{-\frac{d^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{b_n}{\sqrt{n}} + \frac{g - db_n^2/2}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

gdje $d = 2(\alpha - \gamma)$ *i* $g = 2(\beta + \alpha^2 d) + \left(\frac{2\alpha}{3} - \frac{d}{12}\right)(1 - d^2)$.

Dokaz gornje leme može se pronaći u [8, Lemma 4.1].

Ideja dokaza je dovesti formule za cijene opcija s barijerom u prigodan oblik na koji možemo primijeniti Lemu 3.1.3. Za to nam je potreban Taylorov razvoj (u potencijama od $\Delta t^{\frac{1}{2}}$, do trećeg reda) vjerojatnosti neutralne na rizik iz binomnog modela. Iz [2] imamo

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{1}{2} + \alpha \Delta t^{\frac{1}{2}} + \beta \Delta t^{\frac{3}{2}} + O(\Delta t^{5/2}), \tag{3.3}$$

gdje su α i β definirani u Dodatku A. Slično,

$$\hat{p} = pue^{-r\Delta t} = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} = \frac{1}{2} + \hat{\alpha}\Delta t^{\frac{1}{2}} + \hat{\beta}\Delta t^{\frac{3}{2}} + O(\Delta t^{5/2}), \tag{3.4}$$

gdje su $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ također definirani u Dodatku A. Iz (3.4) lako vidimo $1 - \hat{p} = (1 - p)de^{-r\Delta t}$.

U dokazu se može vidjeti kako različite komponente cijene iz BSM modela proizlaze iz komponenti u koje je cijena iz binomnog modela rastavljena.

Dokaz Teorema 3.1.1. Prvo dokazujemo slučaj a): $H < K$ ili $H = K$ i $H = K$ nije terminalna cijena dionice. Iz jednadžbi (2.3) i (3.2) imamo

$$2\tilde{j}_H - j_K = 2l_H - \Delta_n^H - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta_n^K - l_K = 2l_H - l_K + O(1)$$

jer $0 \leq \Delta_n^H < 1$ i $-1 < \Delta_n^K \leq 1$. Dalje, iz (2.1) i (3.1) imamo

$$2l_H - l_K + O(1) = \left(2\frac{\log\frac{H}{S_0}}{2\sigma\sqrt{T}} - \frac{\log\frac{K}{S_0}}{2\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{n} + \frac{n}{2} + O(1) = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n}).$$

Slijedi da je za dovoljno veliki n $j_K < 2\tilde{j_H}$. Kako je u slučaju a) i $j_H \leq \tilde{j_H} < j_K$ (zbog definicija od j_H, $\tilde{j_H}$ i j_K i jer je u ovom slučaju $H < K$) formulu za cijenu *down-and-in call* opcije iz binomnog modela (2.4) za dovoljno veliki n možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
J_1 &= e^{-rT} \sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} p^i (1-p)^{n-i} (S_0 u^i d^{n-i} - K) \\
&= S_0 \sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} \left(p^i u^i e^{-ir\Delta t}\right) \left((1-p)^{n-i} d^{n-i} e^{-(n-i)r\Delta t}\right) \\
&\quad - K e^{-rT} \sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= S_0 \sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} \hat{p}^i (1-\hat{p})^{n-i} - K e^{-rT} \sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} p^i (1-p)^{n-i}
\end{aligned}$$

jer je za $i < j_K$ $\max(S_0 u^i d^{n-i} - K, 0) = 0$. Kako bismo razvili asimptotsku formulu za J_1 zapišimo

$$\sum_{i=j_K}^{2\tilde{j_H}} \binom{n}{2\tilde{j_H} - i} p^i (1-p)^{n-i} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j_H}} \sum_{i=0}^{2\tilde{j_H} - j_K} \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i. \tag{3.5}$$

Sličan izraz dobivamo za $\hat{p}$ (kada p zamijenimo s $\hat{p}$). Ovdje napominjemo da baš član s $\frac{1-p}{p}$ vodi do člana $(S_0/H)^{-r/\sigma^2}$ u cijeni iz BSM modela. Iz (2.1), (2.3), (3.1) i (3.2) imamo

$$\begin{aligned}
2\tilde{j_H} - j_K + 1 &= \frac{1}{2}(1 + \Delta_n^K - 2\Delta_n^H) + 2l_H - l_K \\
&= \frac{1}{2}(1 + \Delta_n^K - 2\Delta_n^H) + \frac{2\log\frac{H}{S_0} - \log\frac{K}{S_0}}{2\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 + \Delta_n^K - 2\Delta_n^H) + \frac{\log\frac{H^2}{S_0 K}}{2\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 + \Delta_n^K - 2\Delta_n^H) + (-\alpha\sqrt{T} + d_{22}/2)\sqrt{n} + n/2,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

gdje je d_{22} dan u Dodatku A. Sada možemo primijeniti Lemu 3.1.3 na $1-p$ umjesto p s $-\alpha\sqrt{T}$ i $-\beta T\sqrt{T}$ na mjestima od α i β te s $b_n = -\Delta_n^K + 2\Delta_n^H$ i $\gamma = -\alpha\sqrt{T} + d_{22}/2$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2\tilde{j}_H - j_K} \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i &= 1 - \sum_{i=2\tilde{j}_H - j_K + 1}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i \\ &= 1 - \left[\Phi(-d_{22}) + \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{b_n}{\sqrt{n}} - \left(g_2 - \frac{d_{22}b_n^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] \qquad (3.7) \\ &= \Phi(d_{22}) + \frac{e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{b_n}{\sqrt{n}} + \left(g_2 - \frac{d_{22}b_n^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\end{aligned}$$

gdje je g_2 dan u Dodatku A. Primijetimo da iz (3.6) imamo $2\tilde{j}_H - j_K + 1 = \frac{1}{2}(1 + \Delta_n^K - 2\Delta_n^H) + (-\hat{\alpha}\sqrt{T} + d_{21}/2)\sqrt{n} + n/2$, gdje je d_{21} dan u Dodatku A. Sada možemo primijeniti Lemu 3.1.3 na analogni izraz za $\hat{p}$ s $-\hat{\alpha}\sqrt{T}$ i $-\hat{\beta}T\sqrt{T}$ na mjestima od α i β te $b_n = -\Delta_n^K + 2\Delta_n^H$ i $\gamma = -\hat{\alpha}\sqrt{T} + d_{21}/2$ pa na sličan način dobivamo

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2\tilde{j}_H - j_K} \binom{n}{i} \hat{p}^{n-i}(1-\hat{p})^i \\ &\quad = \Phi(d_{21}) + \frac{e^{-\frac{d_{21}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{b_n}{\sqrt{n}} + \left(\hat{g}_2 - \frac{d_{21}b_n^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\end{aligned} \qquad (3.8)$$

gdje je $\hat{g}_2$ kao u Dodatku A.

Sada razvijamo $\left(\frac{p}{1-p}\right)^{n-2\tilde{j}_H}$. Iz (3.3) koristeći $\log\left(\frac{x}{1-x}\right) = 4(x-1/2) + \frac{16}{3}(x-1/2)^3 + O((x-1/2)^5)$, $x \in (0,1)$ imamo

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = 4\alpha\Delta t^{\frac{1}{2}} + \left(4\beta + \frac{16}{3}\alpha^3\right)\Delta t^{\frac{3}{2}} + O(\Delta t^{5/2}). \qquad (3.9)$$

Iz (2.1) i (2.3) uočimo

$$n - 2\tilde{j}_H = \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\log\left(\frac{S_0}{H}\right) + \Delta_n^H. \qquad (3.10)$$

Iz jednadžbi (3.9) i (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j}_H} &= -(n-2\tilde{j}_H)\log\left(\frac{p}{1-p}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\log\left(\frac{S_0}{H}\right) - 4\alpha\sqrt{T}\Delta_n^H\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{I}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\end{aligned}$$

gdje je I kao u Dodatku A. Dalje, koristeći $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ računamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j}_H} &= \exp\left[\log\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j}_H}\right] \\
&= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left[-4\alpha\sqrt{T}\Delta_n^H \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{I}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] \qquad (3.11) \\
&= \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[1 - 4\alpha\sqrt{T}\Delta_n^H \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{I}{n} + 8\alpha^2 T \left(\Delta_n^H\right)^2 \frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Slično, koristeći (3.4) dobivamo

$$\left(\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}}\right)^{n-2\tilde{j}_H} = \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[1 - 4\hat{\alpha}\sqrt{T}\Delta_n^H \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{I}{n} + 8\hat{\alpha}^2 T \left(\Delta_n^H\right)^2 \frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \qquad (3.12)$$

Kako bismo dobili asimptotsku formulu za J_1 uvrstimo jednadžbe (3.8) i (3.12) u jednadžbu analognu jednadžbi (3.5) za $\hat{p}$. Nakon toga uvrstimo jednadžbe (3.7) i (3.11) u jednadžbu (3.5). Prvo množimo s S_0, drugo s Ke^{-rT} pa oduzmemo. Koristeći $H^2 e^{-\frac{d_{21}^2}{2}} = S_0 K e^{-rT} e^{-\frac{d_{22}^2}{2}}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
J_1 = S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{21}) - Ke^{-rT}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{22}) - \left[A_1 \Delta_n^H\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
+ \left[-B_2 - D_2\left(\Delta_n^K\right)^2 + E_1\left(\Delta_n^H\right)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Uočimo da je cijena iz BSM modela dana s (Dodatak B)

$$S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{21}) - Ke^{-rT}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{22})$$

pa smo dobili asimptotsku formulu za cijenu *down-and-in call* opcije iz Teorema 3.1.1 1) a).

Sada uočimo da cijenu *vanilla call* opcije iz binomnog modela danu u Teoremu 3.0.1 možemo zapisati kao

$$C_{BS}(S_0, K, T) + (G_1 - D_3(\Delta_n^K)^2)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \qquad (3.13)$$

gdje je G_1 kao u Dodatku A. Koristeći prethodnu formulu, *in-out* paritet za binomne (2.8) i BSM (B.3) cijene asimptotsku formulu za cijenu *down-and-out* opcije možemo dobiti iz one za *down-and-in* opciju. Time je dokaz za dio 1) a) gotov.

Nastavljamo s dokazom za slučaj b): $H > K$ ili $H = K$ i $H = K$ je terminalna cijena dionice. U ovom slučaju pogodnije je prvo odrediti cijenu *down-and-out* opcije. Tada je $j_H \geq j_K$ pa formulu za cijenu *down-and-out call* opcije iz binomnog modela (2.5) možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
&e^{-rT}\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}(S_0u^id^{n-i}-K)\\
&\qquad - e^{-rT}\sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H-i}p^i(1-p)^{n-i}(S_0u^id^{n-i}-K)\\
&= \left[S_0\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}\hat{p}^i(1-\hat{p})^{n-i} - Ke^{-rT}\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\right]\\
&\qquad - \left[S_0\sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H-i}\hat{p}^i(1-\hat{p})^{n-i} - Ke^{-rT}\sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H}\binom{n}{2\tilde{j}_H-i}p^i(1-p)^{n-i}\right]\\
&= J_2 - J_3.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Ova dva izraza u binomnoj cijeni odgovaraju onima u cijeni iz BSM modela kada $H > K$.

Prvo razvijamo asimptotsku formulu za J_2. Pomoću (2.1), (2.2) i (2.3) imamo $j_H + 1 = \tilde{j}_H - \frac{1}{2}(1-\epsilon_n) + 1 = \frac{1}{2}(1+\epsilon_n-\Delta_n^H) + l_H = \frac{1}{2}(1+\epsilon_n-\Delta_n^H) + (\alpha\sqrt{T} - d_{32}/2)\sqrt{n} + n/2$ s d_{32} kao u Dodatku A. Sada iz Leme 3.1.3 dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\\
&\qquad = \Phi(d_{32}) + \frac{e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\Delta_n^H-\epsilon_n}{\sqrt{n}} + \left(g_3 - \frac{d_{32}(\Delta_n^H-\epsilon_n)^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

gdje je g_3 kao u Dodatku A. Zamijenimo p s $\hat{p}$ te primijenimo Lemu 3.1.3 no sada s $\gamma = \hat{\alpha}\sqrt{T} - d_{31}/2$ (d_{31} kao u Dodatku A) pa dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=j_H+1}^{n}\binom{n}{i}\hat{p}^i(1-\hat{p})^{n-i}\\
&\qquad = \Phi(d_{31}) + \frac{e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\Delta_n^H-\epsilon_n}{\sqrt{n}} + \left(\hat{g}_3 - \frac{d_{31}(\Delta_n^H-\epsilon_n)^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

gdje je $\hat{g}_3$ definiran u Dodatku A. Da dobijemo asimptotsku formulu za J_2 definiran u (3.14) pomnožimo (3.16) sa S_0, (3.15) s Ke^{-rT} pa oduzmemo. Koristeći $S_0e^{-\frac{d_{31}^2}{2}} = He^{-rT}e^{-\frac{d_{32}^2}{2}}$

dobivamo

$$
\begin{aligned}
J_2 = S_0\Phi(d_{31}) - Ke^{-rT}\Phi(d_{32}) &+ \left[\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{31}^2}{2}} \left(1 - \frac{K}{H}\right)(\Delta_n^H - \epsilon_n)\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&+ \left[G_3 - \frac{C_2}{2}\epsilon_n^2 + C_2\epsilon_n\Delta_n^H - \frac{C_2}{2}(\Delta_n^H)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

gdje su G_3 i C_2 dani u Dodatku A. Dio drugog izraza u J_3 možemo zapisati kao

$$
\sum_{i=j_H+1}^{2\tilde{j}_H} \binom{n}{2\tilde{j}_H - i} p^i (1-p)^{n-i} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j}_H} \sum_{i=0}^{2\tilde{j}_H - j_H - 1} \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i \tag{3.18}
$$

te slično odgovarajući izraz u kojem je p zamijenjen s $\hat{p}$. Uočimo iz (2.1), (2.2) i (2.3) da $2\tilde{j}_H - j_H = \frac{1}{2}(1 - \epsilon_n - \Delta_n^H) - (\alpha\sqrt{T} - d_{42}/2)\sqrt{n} + n/2$, s d_{42} kao u Dodatku A, pa koristimo Lemu 3.1.3 s $1 - p$ umjesto p i dobivamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2\tilde{j}_H - j_H - 1} \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i &= 1 - \sum_{i=2\tilde{j}_H - j_H}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i \\
&= 1 - \left[\Phi(-d_{42}) - \frac{e^{-\frac{d_{42}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-(\Delta_n^H + \epsilon_n)}{\sqrt{n}} + \left(g_4 - \frac{d_{42}(\Delta_n^H + \epsilon_n)^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] \\
&= \Phi(d_{42}) + \frac{e^{-\frac{d_{42}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-(\Delta_n^H + \epsilon_n)}{\sqrt{n}} + \left(g_4 - \frac{d_{42}(\Delta_n^H + \epsilon_n)^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

gdje je g_4 kao u Dodatku A. Zamijenimo p i $1 - p$ njihovim verzijama s kapicom pa opet koristimo Lemu 3.1.3 i na sličan način dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2\tilde{j}_H - j_H - 1} \binom{n}{i} \hat{p}^{n-i}(1-\hat{p})^i \\
&\qquad = \Phi(d_{41}) + \frac{e^{-\frac{d_{41}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-(\Delta_n^H + \epsilon_n)}{\sqrt{n}} + \left(\hat{g}_4 - \frac{d_{41}(\Delta_n^H + \epsilon_n)^2}{2}\right)\frac{1}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

gdje je $\hat{g}_4$ kao u Dodatku A. Da dobijemo asimptotsku formulu za J_3 uvrstimo jednadžbe (3.12) i (3.20) u jednadžbu analognu jednadžbi (3.18) za $\hat{p}$. Nakon toga uvrstimo jednadžbe (3.11) i (3.19) u jednadžbu (3.18). Pomnožimo prvo s S_0, drugo s Ke^{-rT} pa oduzmemo.

Koristeći $He^{-\frac{d_{41}^2}{2}} = S_0 e^{-rT} e^{-\frac{d_{42}^2}{2}}$ i $e^{-\frac{d_{41}^2}{2}} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} = e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}$ dobivamo

$$\begin{aligned} J_3 =& S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{41}) - Ke^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{42}) \\ &- \left[A_2 \Delta_n^H - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{31}^2}{2}} \left(1 - \frac{K}{H}\right)(\Delta_n^H - \epsilon_n)\right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &+ \left[-B_3 + G_3 - \frac{C_3}{2}\epsilon_n^2 + C_2 \epsilon_n \Delta_n^H + \left(E_2 - \frac{C_2}{2}\right)(\Delta_n^H)^2\right] \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje je C_3 definiran u Dodatku A. Sada oduzimanjem jednadžbe (3.21) od jednadžbe (3.17) te koristeći činjenicu da je (Dodatak B)

$$\begin{aligned} C_{BS}^{do}(S_0, K, T, H) =& S_0 \Phi(d_{31}) - Ke^{-rT} \Phi(d_{32}) \\ & - \left[S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{41}) - Ke^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{42})\right] \end{aligned}$$

dobivamo asimptotsku formulu za cijenu *down-and-out call* opcije kao u tvrdnji Teorema 3.1.1 1) b). Konačno, slično kao u slučaju a), koristeći jednadžbu (3.13), *in-out* paritet za binomne (2.8) i BSM (B.5) cijene asimptotsku formulu za cijenu *down-and-in* opcije možemo dobiti iz one za *down-and-out* opciju.

Sada prelazimo na slučaj 2). Za *up* opcije trebamo uzeti u obzir samo slučaj $H > K$ (Napomena 3.1.2). Prvo uočimo da iz (3.1), (3.2), (2.1) i (2.3) imamo $j_K - 2\tilde{j}_H + n = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n})$ pa slijedi da je za dovoljno veliki n $j_K > 2\tilde{j}_H - n$. Kako $H > K$ implicira $j_H \geq \tilde{j}_H - \frac{1}{2} > j_K$ ako je n velik, formula za cijenu *up-and-in call* opcije iz binomnog modela (2.6) za dovoljno veliki n jednaka je

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \sum_{i=j_K}^{j_H} \binom{n}{2\tilde{j}_H - i} p^i (1-p)^{n-i} (S_0 u^i d^{n-i} - K) \\ & \qquad + e^{-rT} \sum_{i=j_H+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} (S_0 u^i d^{n-i} - K) \\ & = \left[S_0 \sum_{i=j_K}^{j_H} \binom{n}{2\tilde{j}_H - i} \hat{p}^i (1-\hat{p})^{n-i} - Ke^{-rT} \sum_{i=j_K}^{j_H} \binom{n}{2\tilde{j}_H - i} p^i (1-p)^{n-i}\right] \\ & \qquad + \left[S_0 \sum_{i=j_H+1}^{n} \binom{n}{i} \hat{p}^i (1-\hat{p})^{n-i} - Ke^{-rT} \sum_{i=j_H+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}\right] \\ & = J_4 + J_5. \end{aligned}$$

Napišimo

$$J_4 = S_0\left(\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}}\right)^{n-2\tilde{j_H}} \sum_{i=2\tilde{j_H}-j_H}^{2\tilde{j_H}-j_K} \binom{n}{i}\hat{p}^{n-i}(1-\hat{p})^i$$
$$- Ke^{-rT}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-2\tilde{j_H}} \sum_{i=2\tilde{j_H}-j_H}^{2\tilde{j_H}-j_K} \binom{n}{i}p^{n-i}(1-p)^i.$$

Sada korištenjem sličnih metoda kao za *down* opcije dobivamo

$$\begin{aligned}
J_4 =& S_0\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} [\Phi(-d_{41}) - \Phi(-d_{21})] \\
&- Ke^{-rT}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} [\Phi(-d_{42}) - \Phi(-d_{22})] \\
&+ \Big[4\sqrt{T}[h_1(-d_{41}, -d_{42}) - h_1(-d_{21}, -d_{22})]\Delta_n^H \\
&- \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1-\frac{K}{H}\right)(\Delta_n^H - \epsilon_n)\Big]\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&- \Big[I(h_0(-d_{41}, -d_{42}) - h_0(-d_{21}, -d_{22})) + G_4 - G_2 \\
&+ \frac{C_1}{4}(\Delta_n^K)^2 - \frac{C_3}{2}\epsilon_n^2 - C_2\epsilon_n\Delta_n^H \\
&- \left(8T[h_2(-d_{41}, -d_{42}) - h_2(-d_{21}, -d_{22})] + C_1 - C_2 - \frac{C_3}{2}\right)\left(\Delta_n^H\right)^2\Big]\frac{1}{n} \\
&+ O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

gdje su G_2, G_4, C_1 i h_i kao u Dodatku A i

$$\begin{aligned}
J_5 =& S_0\Phi(d_{31}) - Ke^{-rT}\Phi(d_{32}) - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1-\frac{K}{H}\right)(\Delta_n^H + \epsilon_n)\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&+ \left[G_3 - \frac{C_2}{2}\epsilon_n^2 - C_2\epsilon_n\Delta_n^H - \frac{C_2}{2}(\Delta_n^H)^2\right]\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Zbrajanjem jednadžbi (3.22) i (3.23) te koristeći (Dodatak B)

$$\begin{aligned}
&C_{BS}^{ui}(S_0, K, T, H) \\
&= S_0\Phi(d_{31}) - Ke^{-rT}\Phi(d_{32}) - S_0\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(-d_{21}) - \Phi(-d_{41})) \\
&+ Ke^{-rT}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(-d_{22}) - \Phi(-d_{42}))
\end{aligned}$$

dobivamo asimptotsku formulu za cijenu *up-and-in call* opcije kao u Teoremu 3.1.1 2). Konačno, koristeći jednadžbu (3.13), *in-out* paritet za binomne (2.9) i BSM (B.7) cijene asimptotsku formulu za cijenu *up-and-out call* opcije možemo dobiti iz one za *up-and-in* opciju. □

3.2 Primjena

Iz formula navedenih u Teoremima 3.0.1 i 3.1.1 vidimo da za razliku od *vanilla call* opcija, kod kojih je stopa konvergencije reda $1/n$, kod opcija s barijerom ona je općenito reda $1/\sqrt{n}$. Teorem 3.1.1 dodatno pokazuje da je veliki dio greške kod opcija s barijerom u svim slučajevima proporcionalan s $\Delta_n^H/\sqrt{n}$. Kako Δ_n^H oscilira između 0 i 1, konvergencija je također oscilatorna, a veliki dio oscilacije uzrokovan je pozicijom barijere u odnosu na dvije susjedne cijene dionice u binomnoj rešetci. Uočimo i da kroz izraz $C\epsilon_n^2$, kada je $H > K$, imamo i dodatnu oscilaciju uzrokovanu time je li efektivna barijera terminalna cijena dionice ili ne. Zanimljivo je i da se u asimptotskim formulama ne pojavljuju umnošci tipa $\Delta_n^H \Delta_n^K$ ili $\epsilon_n \Delta_n^H$. Još jedno svojstvo vrijedno zapažanja je izostanak člana Δ_n^K u asimptotskoj formuli za *down-and-out* opciju kada je $H > K$. Intuitivno objašnjenje za ovo je da kako bi opcija ostala aktivna cijena dionice mora ostati iznad H pa stoga i K pa pozicija od K nema utjecaja.

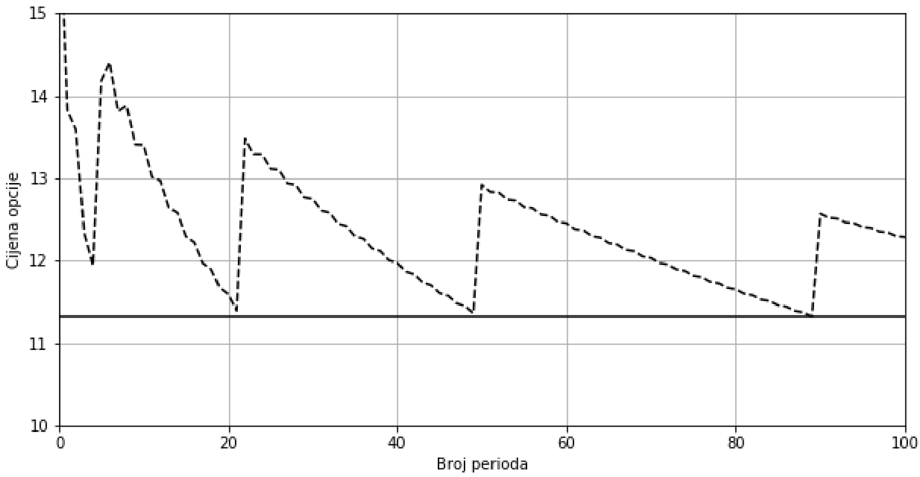
Sada ćemo pokazati kako se Teorem 3.1.1 može primijeniti za ubrzanje konvergencije cijena europskih *call* opcija s barijerom iz binomnog modela kada broj perioda n teži u beskonačnost. U tu svrhu biramo n tako da H bude što bliži cijeni dionice u binomnoj rešetci. U slučaju *down* opcija H je točno cijena iz rešetke ako i samo ako je $2l_H$ cijeli broj, tj. ako i samo ako $n = F(m) = m^2\sigma^2 T/(\log(S_0/H))^2$ za neki pozitivan cijeli broj m. Stoga, za *down* opcije kada je $S_0 > H$, biramo $n = n_m$ kao najveći cijeli broj manji ili jednak od $F(m)$ za $m = 1, 2, 3, \ldots$. Tada $F(m) = n_m + x_m$ gdje je $0 \leq x_m < 1$ i po Taylorovom razvoju imamo

$$\sqrt{F(m)} = \sqrt{n_m}\left(1 + \frac{x_m}{n_m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n_m} + \frac{x_m}{2}\frac{1}{\sqrt{n_m}} + O\left(\frac{1}{n_m^{3/2}}\right).$$

Prema tome, za dovoljno veliki m, s $\Delta t = T/n_m$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta^H_{n_m} &= \mathrm{frac}\left[\frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right)}{\log d}\right] = \mathrm{frac}\left[\frac{\frac{m\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{F(m)}}}{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right] = \mathrm{frac}\left[-\frac{m\sqrt{n_m}}{\sqrt{F(m)}}\right] \\
&= \mathrm{frac}\left[-m + \frac{m}{\sqrt{F(m)}}(\sqrt{F(m)} - \sqrt{n_m})\right] \\
&= \mathrm{frac}\left[-m + \frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\left(\frac{x_m}{2}\frac{1}{\sqrt{n_m}} + O\left(\frac{1}{n_m^{3/2}}\right)\right)\right] \\
&= \frac{x_m \log\left(\frac{S_0}{H}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\sqrt{n_m}} + O\left(\frac{1}{n_m^{3/2}}\right),
\end{aligned}$$

pa je $\Delta^H_{n_m}\frac{1}{\sqrt{n_m}} = O\left(\frac{1}{n_m}\right)$. Sada, ako stavimo $n = n_m$ u Teoremu 3.1.1, vidimo da izraz $O\left(\frac{1}{\sqrt{n_m}}\right)$ postaje $O\left(\frac{1}{n_m}\right)$, tj. greške su reda $1/n$.



Slika 3.1: Cijena *down-and-out call* opcije iz binomnog modela sa $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.25$, $T = 1$, $H = 90$ i $n_m = 5, 22, 50, 90$ za $m = 1, 2, 3, 4$, $C^{do}_{BS} = 11.323$

3.3 Numerički primjeri

U ovom dijelu pokazujemo i provjeravamo rezultate iz Teorema 3.1.1 numeričkim primjerima. U Teoremu 3.1.1 za svaku vrstu opcija dan je asimptotski razvoj oblika

$$C_n = C_{BS} + \frac{A_n}{\sqrt{n}} + \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

gdje je C_n cijena iz binomnog modela s n perioda, a C_{BS} cijena iz BSM modela. To znači da

$$\sqrt{n}(C_n - C_{BS}) - A_n \to 0$$

kada $n \to \infty$ pa bi se $\sqrt{n}(C_n - C_{BS})$ i A_n trebali skoro podudarati za velike n. Nadalje,

$$n(C_n - C_{BS} - \frac{A_n}{\sqrt{n}}) - B_n \to 0$$

kada $n \to \infty$ pa bi se $n(C_n - C_{BS} - \frac{A_n}{\sqrt{n}})$ i B_n trebali skoro podudarati za velike n. Te veličine nalaze se u tablicama ispod, a njihova usporedba potvrđuju rezultate Teorema 3.1.1.

Broj perioda n	1,000	5,000	10,000	50,000	100,000
C_{BS}^{do}	3.903	3.903	3.903	3.903	3.903
C_n^{do}	3.925	3.908	3.911	3.907	3.906
$\sqrt{n}\left(C_n^{do} - C_{BS}^{do}\right)$	0.679	0.330	0.717	0.884	0.840
A_n^{do}	0.754	0.318	0.727	0.898	0.843
$n\left(C_n^{do} - C_{BS}^{do} - A_n^{do}/\sqrt{n}\right)$	-2.395	0.832	-0.979	-3.075	-0.745
B_n^{do}	-2.405	0.831	-0.989	-3.080	-0.752

Tablica 3.1: Rezultati za *down-and-out* opcije, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 1$, $K = 110$, $H = 90$

Broj perioda n	1,000	5,000	10,000	50,000	100,000
C_{BS}^{di}	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172
C_n^{di}	0.149	0.168	0.165	0.168	0.170
$\sqrt{n}\left(C_n^{di} - C_{BS}^{di}\right)$	-0.726	-0.318	-0.717	-0.891	-0.838
A_n^{di}	-0.754	-0.318	-0.727	-0.898	-0.843
$n\left(C_n^{di} - C_{BS}^{di} - A_n^{di}/\sqrt{n}\right)$	0.885	0.044	1.022	1.498	1.623
B_n^{di}	0.898	0.046	1.030	1.503	1.630

Tablica 3.2: Rezultati za *down-and-in* opcije, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 1$, $K = 110$, $H = 90$

Broj perioda n	1,000	5,000	10,000	50,000	100,000
C_{BS}^{uo}	1.760	1.760	1.760	1.760	1.760
C_n^{uo}	1.924	1.766	1.785	1.783	1.761
$\sqrt{n}\left(C_n^{uo} - C_{BS}^{uo}\right)$	5.183	0.395	2.535	5.164	0.382
A_n^{uo}	5.070	0.393	2.571	5.144	0.383
$n\left(C_n^{uo} - C_{BS}^{uo} - A_n^{uo}/\sqrt{n}\right)$	3.578	0.111	-3.659	4.528	-0.330
B_n^{uo}	3.604	0.107	-3.616	4.528	-0.329

Tablica 3.3: Rezultati za *up-and-out* opcije, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 1$, $K = 90$, $H = 110$

Broj perioda n	1,000	5,000	10,000	50,000	100,000
C_{BS}^{ui}	13.707	13.707	13.707	13.707	13.707
C_n^{ui}	13.543	13.702	13.682	13.684	13.706
$\sqrt{n}\left(C_n^{ui} - C_{BS}^{ui}\right)$	-5.193	-0.395	-2.537	-5.161	-0.384
A_n^{ui}	-5.070	-0.393	-2.571	-5.144	-0.383
$n\left(C_n^{ui} - C_{BS}^{ui} - A_n^{ui}/\sqrt{n}\right)$	-3.882	-0.115	3.433	-3.825	-0.213
B_n^{ui}	-3.898	-0.117	3.393	-3.825	-0.213

Tablica 3.4: Rezultati za *up-and-in* opcije, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 1$, $K = 90$, $H = 110$

Dodatak A

Popis konstanti

$$d_{11} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_{12} = d_{11} - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_{21} = \frac{\log\left(\frac{H^2}{S_0 K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_{22} = d_{21} - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_{31} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{H}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_{32} = d_{31} - \sigma\sqrt{T}$$

$$d_{41} = \frac{\log\left(\frac{H}{S_0}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_{42} = d_{41} - \sigma\sqrt{T}$$

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$\alpha = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}; \quad \hat{\alpha} = \alpha + \frac{\sigma}{2}$$

$$\beta = \frac{\sigma^4 - 4\sigma^2 r + 12r^2}{48\sigma}; \quad \hat{\beta} = -\beta - \frac{\sigma r}{6}$$

$$\hat{g}_i = 2T\left(\hat{\alpha}^2 d_{i1} + \hat{\beta}\sqrt{T}\right) + \left(\frac{2\hat{\alpha}\sqrt{T}}{3} - \frac{d_{i1}}{12}\right)(1 - d_{i1}^2), \quad i = 1,2,3,4$$

$$g_i = 2T\left(\alpha^2 d_{i2} + \beta\sqrt{T}\right) + \left(\frac{2\alpha\sqrt{T}}{3} - \frac{d_{i2}}{12}\right)(1 - d_{i2}^2), \quad i = 1,2,3,4$$

$$G_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{11}^2}{2}}(\hat{g}_1 - g_1), \quad G_2 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} e^{-\frac{d_{21}^2}{2}}(\hat{g}_2 - g_2)$$

$$G_3 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}(\hat{g}_3 - \frac{K}{H}g_3), \quad G_4 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}(\hat{g}_4 - \frac{K}{H}g_4)$$

$$A_1 = 4\sqrt{T}h_1(d_{21}, d_{22}), \quad A_2 = 4\sqrt{T}h_1(d_{41}, d_{42}) + \frac{2S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1 - \frac{K}{H}\right)$$

$$A_3 = 4\sqrt{T}(h_1(-d_{41}, -d_{42}) - h_1(-d_{21}, -d_{22})) - \frac{2S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(1 - \frac{K}{H}\right)$$

gdje

$$h_i(x, y) = \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(H\hat{\alpha}^i\Phi(x) - \frac{S_0Ke^{-rT}}{H}\alpha^i\Phi(y)\right), \quad i = 0, 1, 2.$$

$$B_1 = G_1 - G_2 + I \cdot h_0(d_{21}, d_{22}), \quad B_2 = B_1 - G_1$$

$$B_3 = G_3 - G_4 + I \cdot h_0(d_{41}, d_{42}), \quad B_4 = B_3 - G_1$$

$$B_5 = G_2 + G_3 - G_4 + I \cdot h_0(-d_{21}, -d_{22}) - I \cdot h_0(-d_{41}, -d_{42}), \quad B_6 = B_5 - G_1$$

gdje

$$I = \left(\frac{4\beta + \frac{16}{3}\alpha^3}{\sigma}\right)\log\left(\frac{S_0}{H}\right)T.$$

$$C_1 = \frac{2S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{21}^2}{2}}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}}\sigma\sqrt{T}, \quad C_2 = \frac{2S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(d_{31} - \frac{K}{H}d_{32}\right)$$

$$C_3 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{31}^2}{2}}\left(d_{41} - \frac{K}{H}d_{42}\right), \quad C = \frac{1}{2}(C_2 - C_3)$$

$$D_1 = \frac{S_0}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{11}^2}{2}}\sigma\sqrt{T} - \frac{C_1}{4}, \quad D_2 = \frac{C_1}{4}, \quad D_3 = D_1 + D_2$$

$$E_1 = 8Th_2(d_{21}, d_{22}) + C_1, \quad E_2 = 8Th_2(d_{41}, d_{42}) + \frac{1}{2}(3C_2 + C_3)$$

$$E_3 = 8T(h_2(-d_{21}, -d_{22}) - h_2(-d_{41}, -d_{42})) - C_1 + \frac{1}{2}(3C_2 + C_3).$$

Dodatak B

Cijene opcija u BSM modelu

Ovdje su navedene cijene opcija iz BSM modela koje se koriste u radu. Detaljno o BSM modelu i izvodi navedenih formula mogu se pronaći u [1].

Teorem B.0.1. *Pretpostavimo da je u BSM modelu početna cijena dionice S_0, kamatna stopa r i volatilnost σ. Cijena europske call opcije s cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T dana je formulom*

$$C_{BS}(S_0, K, T) = S_0 \Phi(d_{11}) - e^{-rT} K \Phi(d_{12}), \tag{B.1}$$

gdje su d_{11} i d_{12} kao u Dodatku A.

Teorem B.0.2. *Pretpostavimo da je u BSM modelu početna cijena dionice S_0, kamatna stopa r i volatilnost σ. Tada su formule za cijene europskih call opcija s barijerom s cijenom izvršenja K, barijerom H i vremenom dospijeća T:*

1. *za down-and-in (di) i down-and-out (do) call opcije uz $S_0 > H$:*

   a) *za $H < K$:*

$$C^{di}_{BS}(S_0, K, T, H) = S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{21}) - Ke^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{22}), \tag{B.2}$$

$$C^{do}_{BS}(S_0, K, T, H) = C_{BS}(S_0, K, T) - C^{di}_{BS}(S_0, K, T, H); \tag{B.3}$$

   b) *za $H > K$:*

$$\begin{aligned} C^{do}_{BS}(S_0, K, T, H) =& S_0 \Phi(d_{31}) - Ke^{-rT} \Phi(d_{32}) \\ & - \left[S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{41}) - Ke^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(d_{42}) \right], \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$C^{di}_{BS}(S_0, K, T, H) = C_{BS}(S_0, K, T) - C^{do}_{BS}(S_0, K, T, H). \tag{B.5}$$

2. *za up-and-in (ui) i up-and-out (uo) call opcije uz* $S_0 < H$ *ako je* $H > K$*:*

$$\begin{aligned} C_{BS}^{ui}(S_0, K, T, H) =& S_0\Phi(d_{31}) - Ke^{-rT}\Phi(d_{32}) \\ & - S_0\left(\frac{S_0}{H}\right)^{-1-\frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(-d_{21}) - \Phi(-d_{41})) \\ & + Ke^{-rT}\left(\frac{S_0}{H}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} (\Phi(-d_{22}) - \Phi(-d_{42})), \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$C_{BS}^{uo}(S_0, K, T, H) = C_{BS}(S_0, K, T) - C_{BS}^{ui}(S_0, K, T, H). \tag{B.7}$$

Konstante d_{ij} *dane su u Dodatku A.*

Bibliografija

[1] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 2009.

[2] L. B. Chang i K. Palmer, *Smooth Convergence in the Binomial Model*, Finance and Stochastics **11** (2007), 91–105, `http://doi.org/10.1007/s00780-006-0020-6`.

[3] J. C. Cox, S. A. Ross i M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics **7** (1979), br. 3, 229 – 263, `http://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1`.

[4] E. Derman i I. Kani, *The Ins and Outs of Barrier Option: Part 1*, Derivatives Quarterly **Winter** (1996), 55 – 67, `http://www.emanuelderman.com/media/insoutbarriers1.pdf`.

[5] F. Diener i M. Diener, *Asymptotics of the Binomial Formula for Option Pricing*, Working Paper, University of Nice (1999), `http://math.unice.fr/~diener/crr/crreng.ps`.

[6] ______, *Asymptotics of the price oscillations of a European call option in a tree model*, Mathematical Finance **14** (2004), br. 2, 271–293, `http://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2004.00192.x`.

[7] D. P. J. Leisen i M. Reimer, *Binomial models for option valuation - examining and improving convergence*, Applied Mathematical Finance **3** (1996), br. 4, 319–346, `http://doi.org/10.1080/13504869600000015`.

[8] J. Lin i K. Palmer, *Convergence Of Barrier Option Prices In The Binomial Model*, Mathematical Finance **23** (2013), br. 2, 318–338, `http://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2011.00501.x`.

[9] Y. D. Lyuu, *Very Fast Algorithms for Barrier Option Pricing and the Ballot Problem*, The Journal of Derivatives **5** (1998), br. 3, 68–79, `http://doi.org/10.3905/jod.1998.407999`.

[10] T. Marsh i T. Kobayashi, *The Contributions of Professors Fischer Black, Robert Merton and Myron Scholes to the Financial Services Industry*, International Review of Finance **1** (2000), br. 4, 295 – 315, `http://doi.org/10.1111/1468-2443.00020`.

[11] M. Reimer i K. Sandmann, *A discrete time approach for European and American barrier options*, (1995), `http://doi.org/10.2139/ssrn.6075`.

[12] R. J. Rendleman i B. J. Bartter, *Two-State Option Pricing*, The Journal of Finance **34** (1979), br. 5, 1093 – 1110, `http://doi.org/10.2307/2327237`.

[13] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[14] H. Šikić, *Mjera i integral*, Bilješke s predavanja, 2010.

[15] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, Skripta, 2008.

[16] ______, *Slučajni procesi*, Skripta, 2010.

[17] J. B. Walsh, *The rate of convergence of the binomial tree scheme*, Finance and Stochastics **7** (2003), br. 3, 337–361, `http://doi.org/10.1007/s007800200094`.

Sažetak

Opcija s barijerom je egzotična opcija čija isplata ovisi o tome je li cijena temeljne imovine na koju je ta opcija napisana prešla određenu unaprijed dogovorenu razinu (barijeru) u određenom vremenskom razdoblju. U ovom diplomskom radu određujemo cijene europskih *call* opcija s barijerom u binomnom modelu s n perioda (CRR modelu) te proučavamo brzinu konvergencije tih cijena u odgovarajuće cijene iz Black-Scholes-Mertonovog modela kada broj perioda n teži u beskonačnost. Pokazujemo da su, općenito, greške reda $1/\sqrt{n}$ te dajemo eksplicitne formule za koeficijente uz $1/\sqrt{n}$ i $1/n$ u asimptotskom razvoju greške (koji ovise o poziciji barijere i cijene izvršenja u binomnoj rešetci). Nadalje, pokazujemo kako poznavanje eksplicitnih formula za te koeficijente omogućuju da se prikladnim odabirom broja perioda n ubrza konvergencija, tj. da je za prigodno odabrane n greška reda $1/n$. Na kraju dobivene rezultate ilustriramo i provjeravamo numeričkim primjerima.

Summary

Barrier option is an exotic option whose payoff depends upon underlying asset's price reaching a certain preset barrier level during a certain period of time. In this Master's thesis we price European barrier call options in n-period binomial model (CRR model) and study the rate of convergence of these prices to the prices given by the Black-Scholes-Merton model as the number of periods n tends to infinity. We show that, in general, the error is of order $1/\sqrt{n}$ and give explicit formulas for the coefficients of $1/\sqrt{n}$ and $1/n$ in the asymptotic expansion of the error (which depend on the positions of the barrier and strike in the binomial lattice). Furthermore, we show how knowing explicit formulas for these coefficients enables us to speed up the convergence by choosing n in an appropriate way, i.e. we show that for appropriately chosen n error is of order $1/n$. Lastly, we illustrate and verify results with numerical examples.

Životopis

Rođen sam 8. siječnja 1995. godine u Našicama. Nakon završene prirodoslovno-matematičke gimnazije u Našicama, 2013. godine upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2016. godine upisao sam Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.