

Matematika salse

Drezga, Andrea

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:048546>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Andrea Drezga

MATEMATIKA SALSE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam
Brückler

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Matematička analiza clave ritmova	3
1.1 Prikaz i analiza ritmova	3
1.2 Složenost ritmova	7
1.3 Sličnost ritmova	14
1.4 Permutacije ritmova	18
2 Salsa rueda	21
3 Pozicije u salsi	25
3.1 Podjela i prebrojavanje stacionarnih pozicija	26
3.2 Pokreti između plesnih pozicija	33
4 Simetrije u plesu	39
5 Metodički osvrt na matematiku salse	45
Bibliografija	47

Uvod

Salsa je ples koji se razvio iz kubanskog narodnog plesa i kombinacija je afričkih i kubanskih plesova. Značajan je razvoj doživjela sredinom 1970-ih godina u New Yorku. Različite regije Latinske Amerike i Sjedinjenih Američkih Država su stvorile svoje stilove salse. Iako su stilovi različiti, u svakom možemo pronaći iste pravilnosti. U ovom radu proći ćemo kroz nekoliko njih koje su matematički zanimljive.

Podloga glazbe na koju se pleše salsa su *clave* ritmovi. Ritmovi se mogu analizirati, prikazivati na različite načine i može im se matematički opisivati složenost i međusobna sličnost i tim temama, te još nekim kombinatornim pitanjima, se bavi prvo poglavlje ovog rada.

Jedan od stilova salse je salsa *rueda*. *Rueda* se pleše kružno u parovima. U drugom poglavlju ovog rada odgovorit ćemo na neka kombinatorna pitanja vezana za plesanje salse *ruede*.

U trećem ćemo poglavlju prebrojati tzv. stacionarne pozicije salse, tj. pozicije u kojima se par ne kreće. Uzimat ćemo u obzir pozicije u kojima se par ne drži za ruke, drži za jednu ruku ili drži za obje ruke. Na kraju poglavlja te pozicije ćemo spojiti pokretima i definirati 'prostor plesnih pokreta salse'.

Promatrajući plesače u plesnim pozicijama te projekcije njihovih tijela na ravninu na kojoj plešu postavljaju se, za salsu podjednako kao i za druge plesove, razna pitanja simetrijskih odnosa. Tom se temom bavimo u četvrtom poglavlju rada.

Na kraju ćemo dati nekoliko prijedloga kako s učenicima u nastavi doći do zaključaka koje smo dobili u radu.

Poglavlje 1

Matematička analiza *clave* ritmova

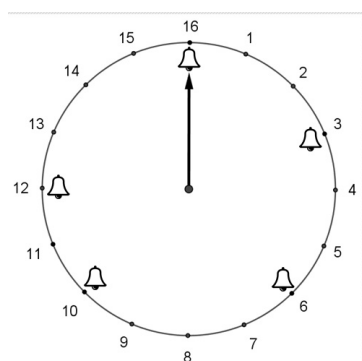
U ovom poglavlju opisat ćemo šest ritmova koji potječu iz Afrike i dijelova Amerike. Svaki se sastoji od po 5 nota raspoređenih u 16 taktova i sviraju se s dva drvena štapa koje nazivamo *clave* u Brazilu i Kubi ili sa željeznim zvonom u Africi. *Clave*-štapovi i zvona su podloga glazbe koja se svira u Africi, Brazilu i Kubi. Uloga im je olakšavanje praćenja ritma bubnjarima.

Ritmovi se nazivaju *shiko*, *son*, *soukous*, *rumba*, *bossa-nova* i *gahu*. *Son* je najrasprostranjeniji i najpopularniji ritam te podloga glazbe na koju se pleše ples salsa. Osnovna odlika svakog ritma je periodičnost – ponavljanje osnovnog uzorka (u našem slučaju udaraca *clave* štapova odnosno zvona) u jednakim razmacima.

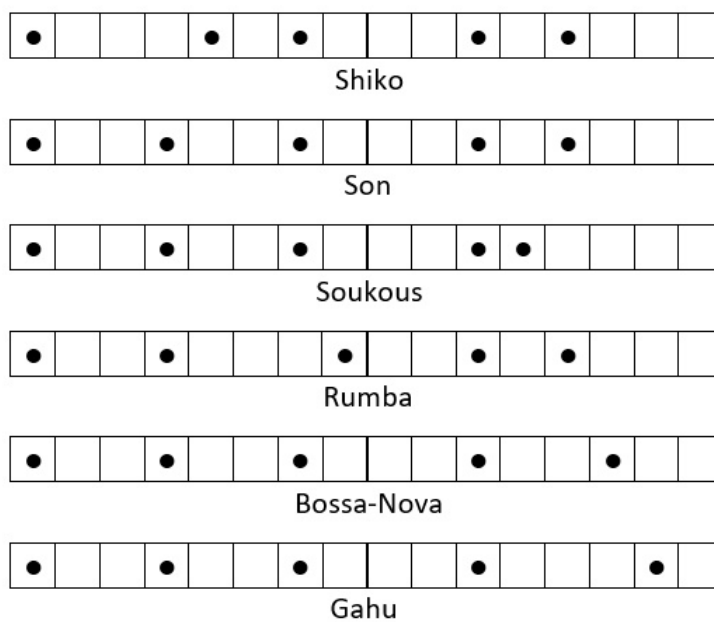
1.1 Prikaz i analiza ritmova

Navedenih šest ritmova možemo prikazati na razne načine. Zamislimo prvo analogni sat sa 16 umjesto 12 oznaka za sate. Sat se oglasi kada kazaljka prijeđe preko pozicija s oznakama 16, 3, 6, 10 i 12. Na slici 1.1 te pozicije su označene sa zvoncima. Takav obrazac zvukova je poznat kao *clave son* ritam. Kada bismo promatrali ritam *shiko*, sat bi se oglasio na oznakama 16, 4, 6, 10 i 12. Za ritam *soukous* sat bi se oglasio na oznakama 16, 3, 6, 10, 11; *rumba* na oznakama 16, 3, 7, 10, 12; *bossa-nova* na 16, 3, 6, 10, 13; *gahu* na 16, 3, 6, 10, 14.

Ritmovi se mogu prikazivati i koristeći niz „kućica”. Na slici 1.2 vidimo sve *clave* ritmove u takvom prikazu. Ovakav prikaz poznat je kao *box notation*, a osmislio ga je Philip Harland 1962. godine. Poznat je i pod nazivom TUBS (*Time Unit Box System*). Ako spojimo početak i kraj ovakvog prikaza dobijemo kružni prikaz sa satom. Mjesta na kojima su točke odgovaraju zvoncima sa slike 1.1. Iz ovako prikazanih ritmova lako vidimo da svih šest obrazaca imaju prvu i četvrtu notu na istoj poziciji. Svi ritmovi osim *shiko* i *rumba* imaju istih prvih osam taktova, tj. prve tri note na istim pozicijama. *Son* se može pretvoriti



Slika 1.1: Prošireni sat

Slika 1.2: Prikaz uzoraka šest osnovnih *clave* ritmova

u *shiko* ako pomaknemo drugu notu jedan takt u desno, *son* u *rumbu* ako pomaknemo treću notu jedan takt u desno i *soukous* u *son*, *bossa-novu* i *gahu* ako pomaknemo petu notu za jedan, dva ili tri takta u desno, redom. Također, pogledamo li prikaz ritma *son* možemo uočiti da ako ritam krenemo svirati od treće note unazad zvuči jednako kao kad ga sviramo od prve note unaprijed, tj. *son* je pomaknuti palindrom.

Treći način na koji *clave* ritam može biti zapisan je 16-bitnim binarnim nizom, npr. *gahu* (1001001000100010), gdje jedinice predstavljaju notu, tj. udarac štapova ili zvona, a nule pauze. Očigledno je to samo zamjena praznih i punih kućica u *box notation* znamenka 1 i 0.

Za matematičare najzanimljiviji je sljedeći prikaz. Nadopunit ćemo prikaz s proširenim satom. Kružnicu podijelimo na 16 jednakih dijelova (lukova) i točke na kružnici označimo brojevima od 0 do 15. Dužinama redom spojimo točke s brojevima koji odgovaraju rednim brojevima taktova u kojima se u ritmu događa udarac. Te točke sad su vrhovi mnogokuta. Svaki od ritmova tako postane različiti konveksan mnogokut. Ovakav prikaz dobro vizualno prikazuje razlike i sličnosti među ritmovima. Budući da u svakom ritmu ima točno 5 udaraca, mnogokuti će biti peterokuti (slika 1.3).

Isprekidane plave crte predstavljaju osnovice jednakokračnih trokuta, a isprekidane crvene crte predstavljaju osi simetrije. Peterokute koji predstavljaju određene ritmove na ovaj način lako možemo uspoređivati, analizirati i klasificirati.

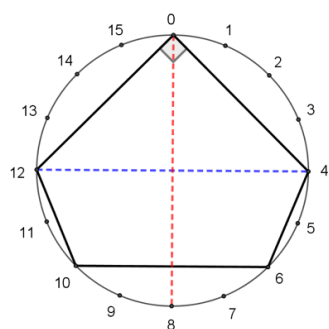
Prva geometrijska značajka po kojoj možemo uspoređivati peterokute jest je li jedan od unutarnjih kutova pravi. Od navedenih šest ritmova, po jedan pravi kut imaju *shiko*, *so-ukous* i *gahu*. Pravi kut u jednom od vrhova peterokuta prema Talesovom poučku znači da ostala četiri vrha leže unutar jedne polukružnice kružnice opisane peterokutu, tj. preostale četiri note se nalaze unutar 9 taktova. Navedena tri ritma koja imaju pravi kut u jednom od vrhova mnogokuta su nastala u Africi, za razliku od ostalih koja potječu iz Amerike.

Druga geometrijska značajka po kojoj uspoređujemo peterokute je simetričnost. *Shiko* i *bossa-nova* imaju os simetrije na spojnici točaka 0 i 8. Uz pomoć ove simetrije vidimo da su ta dva ritma palindromi, tj. da zvuče jednako ako se sviraju unaprijed i unazad. Kao što smo već uočili *son* je pomaknuti palindrom, os simetrije mu je spojnica točaka 3 i 11. Kada se *son* svira s početkom na poziciji 3 unaprijed i unazad, zvuči jednako.

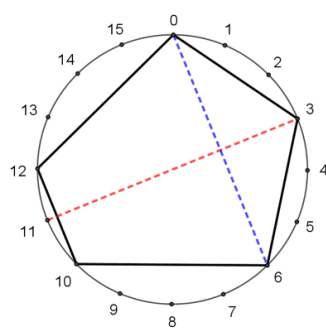
Treća geometrijska značajka je broj jednakokračnih trokuta. *Shiko*, *son* i *soukous* imaju po jedan jednakokračni trokut, *gahu* ima dva, a *bossa-nova* tri. Jednakokračni trokut podrazumijeva dva jednaka vremenska intervala oko jedne note, tj. oko vrha nasuprot osnovice jednakokračnog trokuta.

Proučimo ritam *bossa-nova*. Naveli smo kako prikaz tog mnogokuta ima tri jednakokračna trokuta. Budući da su svi mnogokuti *clave* ritmova peterokuti, tri jednakokračna trokuta impliciraju da *bossa-nova* ima četiri jednaka vremenska intervala oko tri uzastopne note. Svaki od tih intervala je duljine tri takta i ostaje nam jedan interval od četiri takta kako bismo dobili punih 16 taktova. Peterokut *bossa-nove* ima i os simetrije na spojnici točaka 0 i 8 koja ga čini palindromom. Zbog svega navedenog *bossa-nova* je geometrijski najpravilniji ritam. Suprotno *bossa-novi*, *rumbin* peterokut nema pravi kut, nije simetričan i nema nijedan jednakokračan trokut.

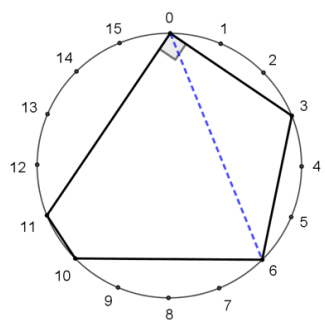
Navedene geometrijske značajke mogu biti korištene u prepoznavanju ritmova bez da znamo početnu notu. Pretpostavimo da je ritam prikazan kao mnogokut. Prvo određujemo



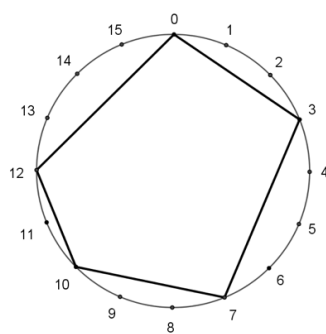
Shiko



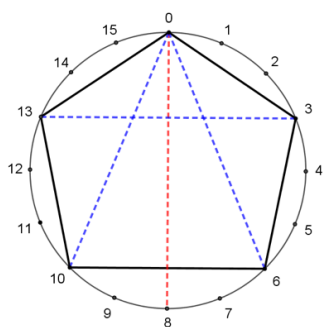
Son



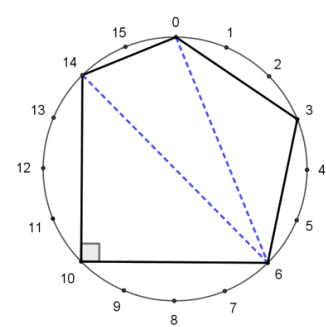
Soukous



Rumba



Bossa-Nova



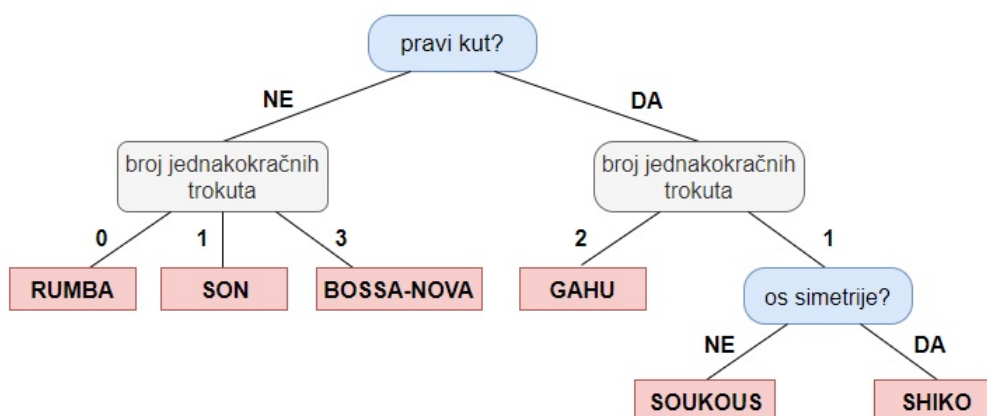
Gahu

Slika 1.3: Konveksni mnogokuti šest osnovnih ritmova

ima li dani mnogokut pravi kut. Ako je odgovor NE, znamo da ritam može biti samo *rumba*, *son* ili *bossa-nova*. Budući da se ova tri ritma razlikuju po broju jednakokračnih trokuta, sljedeći korak je prebrojavanje istih. Ako je broj jednakokračnih trokuta jednak nuli onda je taj ritam *rumba*, ako mnogokut ima jedan jednakokračan trokut onda je to *son*, a *bossa-nova* ako ima tri takva trokuta.

Ako je odgovor za pravi kut DA, onda ponovo prebrojavamo jednakokračne trokute. Ako je broj takvih trokuta tri, onda je taj ritam *gahu*. Međutim, u ovom slučaju dva ritma imaju po jedan jednakokračni trokut pa prelazimo na zadnji korak klasifikacije. Određujemo postoji li os simetrije. Ako os simetrije postoji onda je ritam *shiko*, a ako ne postoji onda je traženi ritam *soukous*. Uočimo, ni jedna od tri značajke ne zahtijeva poznavanje početne note.

Prepoznavanje ritma možemo predočiti dijagramom. Slika 1.4 je jedan od mogućih stabala odluke.

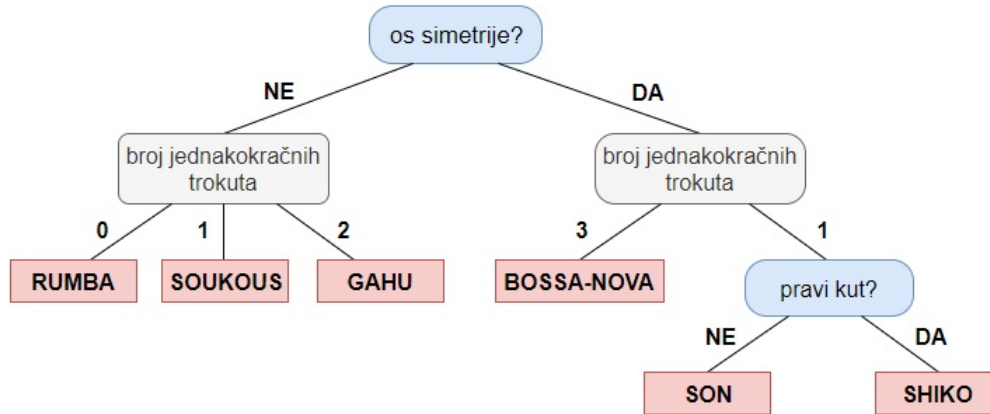


Slika 1.4: Stablo odluka 1

Moguće je i prvo određivati postoji li os simetrije pa prebrojavati jednakokračne trokute i onda, ukoliko je potrebno, određivati ima li mnogokut pravi kut (slika 1.5) [7].

1.2 Složenost ritmova

Ritmovima možemo matematički opisati složenost. Opisat ćemo tri načina opisa složenosti ritmova: Lempel-Zivovu složenost, Pressingovu kognitivnu i metričku složenost.



Slika 1.5: Stablo odluka 2

Lempel-Zivova složenost

Lempel-Zivova složenost definirana je 1976. godine kao mjera slučajnosti uzorka u konačnom (binarnom) nizu [4]. Složenost se određuje prolaženjem kroz niz s lijeva u desno i traženjem najkraćih podnizova koji se do tog mjesta nisu pojavili u nizu. Preciznije:

Definicija 1.2.1. *Neka je $b = b_1b_2 \dots b_n$ konačan binarni niz. Lempel-Zivova particija tog niza je njegov rastav na podnizove β_1, \dots, β_k ($b = |\beta_1| \dots |\beta_k|$) sa sljedećim svojstvima:*

1. $\beta_1 = b_1$;
2. za svaki $1 < i < k$ podniz β_i ne nalazi se nigdje unutar $|\beta_1| \dots |\beta_i|$;
3. za svaki $1 < i \leq k$ je β_i najkraći mogući podniz koji zadovoljava prethodno svojstvo, tj. β_i bez zadnjeg znaka se može naći kao podniz unutar $|\beta_1| \dots |\beta_i|$.

U tom slučaju broj k nazivamo Lempel-Zivovom složenosti niza b .

Primijetimo da drugo od definicijskih svojstava povlači da su svi podnizovi β_i međusobno različiti, te također da nijedan od njih, osim prvog, nije oblika $b_1 \dots b_1$.

Također, uočimo da se drugo definicijsko svojstvo ne mora odnositi na zadnji podniz β_k . Ukoliko ono za njega ne vrijedi, govori se o otvorenoj Lempel-Zivovoj particiji i ona se označava s $|\beta_1| \dots |\beta_{k-1}| \beta_k$ umjesto s $|\beta_1| \dots |\beta_{k-1}| \beta_k|$.

Primjer 1.2.2. *Odredimo Lempel-Zivovu složenost binarnog niza $b = 101001010010111110$. Prvi član particije je $\beta_1 = 1$, $b = |1|01001010010111110$. Drugi član particije je $\beta_2 = 0$ jer je različit od β_1 : $b = |1|0|1001010010111110$.*

Treći član particije ne može biti samo 1, jer njega već imamo, nije ni 10 jer bi 10 bio podniz niza $|\beta_1|\beta_2|$ bez zadnjeg znaka (to bi bio 101) pa je $\beta_3 = 100$, $b = |1|0|100|1010010111110$.

Četvrti član u particiji nije 1 (već ga imamo), nije ni 10 jer bi bio podniz niza $|\beta_1|\beta_2|\beta_3|$ bez zadnjeg znaka (1010). Isto vrijedi i za nizove 101, 1010, 10100, 101001, 1010010 i 10100101. Prolazeći dalje kroz niz dobijemo da je četvrti član 101001011, $b = |1|0|100|101001011|11110$.

Nastavimo li do kraja dobijemo Lempel-Zivovu particiju $b = |1|0|100|101001011|11110|$ s 5 članova, dakle je Lempel-Zivova složenost niza b jednaka 5.

Za cikličke (periodičke) nizove kao što su ritmovi, promatramo nizove duljine dva prikaza (dva temeljna perioda), no pri prolazu stajemo nakon što prijedemo duljinu temeljnog perioda.

Odredimo sad Lempel-Zivovu složenost ritma *son*. Binarni zapis mu je

1001001000101000.

Ovaj zapis ćemo ponoviti još jednom te gledamo 32-bitni niz. Niz kojemu računamo složenost je $a = 10010010001010001001001000101000$. Prvi član particije je $\alpha_1 = 1$, $a = |1|0010010001010001001001000101000$. Drugi član particije je $\alpha_2 = 0$, $a = |1|0|010010001010001001001000101000$.

Treći član particije ne može biti samo 0, jer njega već imamo, nego je $\alpha_3 = 01$ koji nije podniz početnog dijela 100, dakle, $a = |1|0|01|0010001010001001001000101000$.

Četvrti član u particiji nije 0 (već ga imamo), nije ni 00 jer bi bio podniz niza do te pozicije. To vrijedi za nizove 001, 0010 i za 00100. Prolazeći dalje kroz niz dobijemo da je četvrti član $\alpha_4 = 001000$, $a = |1|0|01|001000|1010001001001000101000$.

Peti član u particiji je $\alpha_5 = 101$, $a = |1|0|01|001000|101|0001001001000101000$.

Šesti član u particiji je $\alpha_6 = 0001001$, $a = |1|0|01|001000|101|0001001|001000101000$, čime smo prešli pola ukupnog niza (16 bitova temeljnog perioda) pa stajemo.

Dobili smo Lempel-Zivovu particiju

$a = |1|0|01|001000|101|0001001|(001000101000)$

sa 6 članova, dakle Lempel-Zivova složenost za ritam *son* je jednaka 6.

Za sve ostale *clave* ritmove također dobijemo da im je Lempel-Zivova složenost jednaka 5 ili 6.

Za ritam *gahu*, niz kojemu određujemo složenost je $b = 10010010001000101001001000100010$.

Prvi član particije je $\beta_1 = 1$, $b = |1|0010010001000101001001000100010$. Drugi član particije je $\beta_2 = 0$, $b = |1|0|010010001000101001001000100010$.

Treći član particije ne može biti samo 0, jer njega već imamo, nego je $\beta_3 = 01$, $b = |1|0|01|0010001000101001001000100010$.

Četvrti član u particiji nije 0 (već ga imamo), nije ni 00 jer bi bio podniz niza do te pozicije. To vrijedi 001, 0010 i za 00100. Prolazeći dalje kroz niz dobijemo da je četvrti član $\beta_4 = 001000$, $b = |1|0|01|001000|1000101001001000100010$.

Peti član u particiji je $\beta_5 = 1000101$, $b = |1|0|01|001000|1000101|001001000100010$. Time smo prešli osnovnih 16 bitova i stajemo.

Dobili smo Lempel-Zivovu particiju

$$b = |1|0|01|001000|101|0001001|(001000100010)$$

s 5 članova, dakle Lempel-Zivova složenost za ritam *gahu* je jednaka 5.

Binarni niz ritma *shiko* rastavljen je na 5 podnizova,

$$|1|0|001|0100|0101000100|(0101000101000),$$

tj. Lempel-Zivova složenost ritma *shiko* je 5.

Binarni niz ritma *soukous* rastavljen je na 6 podnizova,

$$|1|0|01|001000|11|0000|(1001001000110000),$$

tj. Lempel-Zivova složenost ritma *soukous* je 6.

Binarni niz ritma *rumba* rastavljen je na 6 podnizova,

$$|1|0|01|000|100101|000100100|(0100101000),$$

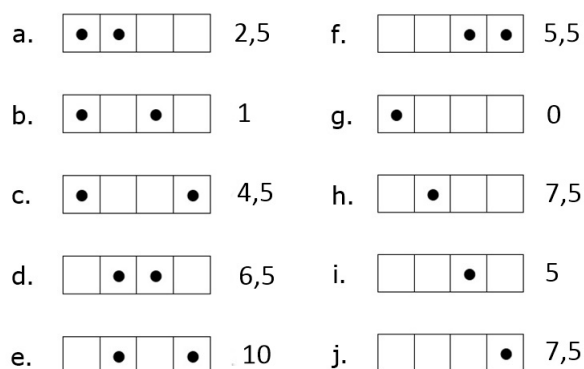
tj. Lempel-Zivova složenost ritma *rumba* je 6.

Binarni niz ritma *bossa-nova* rastavljen je na 5 podnizova,

$$|1|0|01|001000|1001001001|(001000100100),$$

tj. Lempel-Zivova složenost ritma *bossa-nova* je 5.

Dobivene složenosti se ne poklapaju sa iskustvima glazbenika pri sviranju ritmova. Npr. *shiko* je najjednostavniji, a *gahu* najstroženiji ritam, međutim za oba dobijemo Lempel-Zivovu složenost 5. Zaključujemo da Lempel-Zivova složenosti nije najpogodnija mjera složenosti za *clave* ritmove [7].



Slika 1.6: Pressingove kognitivne složenosti

Kognitivna složenost

Jeff Pressing je osmislio način za mjerenje tzv. kognitivne složenosti ritmova [7]. Predložio je deset četverodijelnih uzoraka koji imaju po jednu ili dvije note na određenim pozicijama i pripadne iznose složenosti. Na slici 1.6 možemo vidjeti kognitivne složenosti tih deset uzoraka (prikazanih pomoću *box notation-a*) prema Pressingu.

Ako za određeni ritam želimo odrediti njegovu kognitivnu složenost, dijelimo ga na dijelove po 4 takta i zbrajamo složenosti tih dijelova.

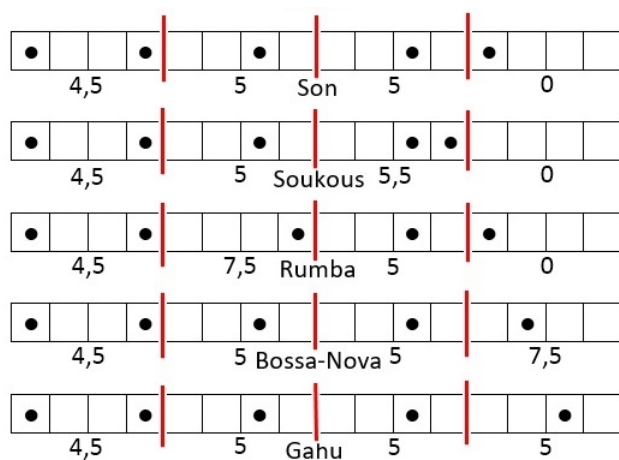
Izračunat ćemo složenost svih ritmova. Uspoređujemo Pressingove četverodijelne uzorke s dobivenim dijelovima pojedinog ritma.

Primjer 1.2.3. Na slici 1.7 ritam *shiko* podijeljen je na 4 dijela po 4 takta. Prvi dio ritma *shiko* odgovara kognitivnoj složenosti 0, drugi dio složenosti 1, treći 5 i četvrti 0 pa je kognitivna složenost ritma *shiko* $0 + 1 + 5 + 0 = 6$.

Slika 1.7: Kognitivna složenost ritma *shiko*

Na slici 1.8 vidimo preostalih pet osnovnih ritmova prikazanih pomoću *box notation-a* i podijeljenih crvenim crtama na po 4 dijela s po 4 takta.

Prvi dio ritma *son* odgovara kognitivnoj složenosti 4,5, drugi dio 5, treći 5 i četvrti 0 pa je kognitivna složenost ritma *son* $4,5 + 5 + 5 + 0 = 14,5$. Kognitivna složenost ritma *soukous*



Slika 1.8: Ritmovi prikazani u *box notation*-u podijeljeni na četverodijelne dijelove

je $4,5 + 5 + 5,5 + 0 = 15$, *rumba* $4,5 + 7,5 + 5 + 0 = 17$, *bossa-nova* $4,5 + 5 + 5 + 7,5 = 22$, *gahu* $4,5 + 5 + 5 + 5 = 19,5$.

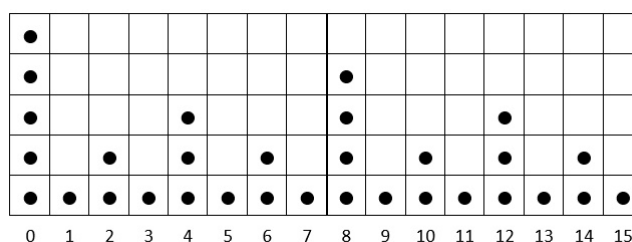
Najmanju složenost ima *shiko*, *rumba* je sa 17 složenija od *sona* s 14,5. *Bossa-nova* i *gahu* su najteži za interpretaciju.

Vidimo da se kognitivna složenost *clave* ritmova proteže od 6 do 22, što nam daje više informacija od Lempel-Zivove složenosti. Također, glazbenici i učitelji glazbe slažu se da dobivene vrijednosti smisleno opisuju njihovo iskustvo složenosti ritmova [7].

Metrička složenost

Fred Lerdahl i Ray Jackendoff predlažu hijerarhijski raspored udaraca različitih jačina [7]. Konstruirali su metričku¹ strukturu (slika 1.9) koja definira funkciju koja povezuje broj takta s relativnom jačinom metričkog akcenta. Postoji pet razina, tj. jačina, metričkog akcenta. Svakom taktu, označenom s brojevima 0 do 15, pridružen je određen broj udaraca. Broj udaraca pridružen taktu određuje njegovu jačinu. Metrička struktura konstruirana je binarno, tako da je na prvoj razini metričkog akcenta svakom taktu pridružen udarac počevši od nule. Na drugoj razini udarac se dodaje svaki drugi takt počevši od nule. Zato na toj razini imamo udarce na taktovima označenima s 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Na trećoj razini udarac se dodaje svaki četvrti takt. Na svakoj sljedećoj razini razliku između udaraca povećavamo dva puta. Na zadnjoj petoj razini udarac imamo samo na nultom taktu. Taktove 2, 6, 10 i 14 nazivamo slabima, 4 i 12 srednjima, 8 jačim, a 0 najjačim taktom.

¹Izraz „metrički” se ovdje odnosi na njegovo glazbeno, a ne na njegovo matematičko značenje.



Slika 1.9: Lerdahl-Jackendoffova metrička struktura za 16-taktne ritmove

Definiramo mjerilo potpune metričke snage ritma i nazovemo ga metričnost (engl. *metricity*). Metričnost je zbroj svih jačina taktova u kojima se nalazi udarac u promatranom ritmu. Primjećujemo da je maksimalni iznos metričnosti kojeg možemo dobiti s 5 udaraca unutar 16 taktova jednak 17. Također, primjećujemo da metričnost opisuje metričku jednostavnost ritma - nulti takt ima najveću jačinu i najlakše ga je odsvirati. Stoga se metrička složenost *clave* ritma definira kao razlika metričnosti do maksimalnog iznosa 17.

Shiko ima udarce na pozicijama 0, 4, 6, 10 i 12. Pogledamo li sliku 1.9 vidimo da je nultom taktu pridruženo pet udaraca što znači da nulti takt ima jačinu 5. Četvrtom taktu pridruženo je tri udarca što znači da četvrti takt ima jačinu 3. Analognim postupkom preostalim taktovima pročitamo jačine i zbrojimo ih. Zbroj jačina, tj. metričnost ritma *shiko* je $5 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15$. Stoga je metrička složenost *shiko* ritma jednaka $17 - 15 = 2$.

Son ima udarce na pozicijama 0, 3, 6, 10 i 12. Nultom taktu pridruženo pet udaraca što znači da nulti takt ima jačinu 5. Trećem taktu pridružen je jedan udarac što znači da treći takt ima jačinu 1. Šestom taktu pridružena su dva udarca, šesti takt ima jačinu 2. Deseti takt ima jačinu 2 i dvanaesti takt jačinu 3. Metričnost ritma *son* je 13 što znači da mu je metrička složenost $17 - 13 = 4$.

Soukus ima udarce na pozicijama 0, 3, 6, 10 i 11. Nulti takt ima jačinu 5, treći takt 1, šesti takt 2, deseti takt 2 i jedanaesti takt 1. Metričnost ritma *soukus* je 11, tj. metrička složenost mu je $17 - 11 = 6$.

Rumba ima udarce na pozicijama 0, 3, 7, 10 i 12. Analognim postupkom dobijemo metričnost 12 i metričku složenost 5.

Metričnost ritma *bossa-nova* iznosi 11 i metrička složenost 6. Metričnost ritma *gahu* iznosi 12 i metrička složenost 5.

Ovaj način mjerenja složenosti daje nešto bolje rezultate od Lempel-Zivove složenosti, ali ipak ne bolje (u smislu slaganja s iskustvom glazbenika) od Pressingove kognitivne složenosti. *Bossa-nova* i *gahu* su kompliciraniji za izvođenje od ritma *soukus*, što se ne može zaključiti iz njihove metričke složenosti [7].

Usporedbu tri moguća načina mjerenja složenosti *clave* ritmova je prikazana na tablici 1.1.

	Lempel-Zivova	kogitivna	metrička
<i>shiko</i>	5	6	2
<i>son</i>	6	14,5	4
<i>soukous</i>	6	15	6
<i>rumba</i>	6	17	5
<i>bossa-nova</i>	5	22	6
<i>gahu</i>	5	19,5	5

Tablica 1.1: Usporedba izmjerenih složenosti ritmova

1.3 Sličnost ritmova

Ritmovima možemo matematički opisati i međusobnu sličnost. Opisat ćemo određivanje sličnosti parova ritmova te sličnost jednog ritma s drugim ritmovima temeljem Hammingove udaljenosti, udaljenosti tzv. intervalnih vektora i uspoređivanjem odgovarajućih minimalnih razapinjućih stabala.

Hammingova udaljenost

Hammingova udaljenost uspoređuje dva konačna niza jednake duljine te prebrojava koliko je minimalno supstitucija potrebno za promijeniti jedan niz u drugi [7].

Uz pomoć Hammingove udaljenosti možemo mjeriti sličnost *clave* ritmova. Svaki ritam kao i ranije shvaćamo kao binarni niz (duljine 16) $X = x_1 \dots x_{16}$ gdje je x_i 1 ili 0. Ako je u trenutku i nota odsvirana $x_i = 1$, ako nije $x_i = 0$. Hammingova udaljenost između dva binarna niza $X = x_1 \dots x_{16}$ i $Y = y_1 \dots y_{16}$ duljine 16 izračunava se formulom:

$$d_H(X, Y) = \sum_{i=1}^{16} |x_i - y_i|. \quad (1.1)$$

Vidimo da je lako odrediti Hammingovu udaljenost dva ritma gledajući njihov prikaz u *box notation*-u. Ako su njihovi prikazi gledani jedan ispod drugog, onda je Hammingova udaljenost jednaka broju pozicija na kojima u jednom ritmu imamo praznu kućicu, a u drugom punu (naime, $|x_i - y_i|$ je različito od 0 samo ako je jedna od binarnih znamenki x_i i y_i na i -toj poziciji jednaka 1, a druga 0, no tad je ta apsolutna vrijednost jednaka 1).

Primjer 1.3.1. Izračunat ćemo Hammingovu udaljenost ritmova *rumba* i *bossa-nova*. Pogledamo li njihove prikaze na slici 1.2, vidimo da se oni od 16 taktova razlikuju samo u 4 (sedmom, osmom, trinaestom i četrnaestom), dakle je Hammingova udaljenost ta dva ritma jednaka 4.

U tablici 1.2 su dane sve Hammingove udaljenosti između parova *clave* ritmova. U posljednjem redu tablice navedeni su zbrojevi Hammingovih udaljenosti pojedinog ritma do ostalih ritmova. Što je broj veći, ritmovi se više razlikuju. Prema ovim izračunima *son* je najbliži ostalim ritmovima, njegova je Hammingova udaljenost do svakog od ostalih pet ritmova 2, odnosno ukupna Hammingova udaljenost do svih skupa je 10.

	<i>shiko</i>	<i>son</i>	<i>soukous</i>	<i>rumba</i>	<i>bossa-nova</i>	<i>gahu</i>
<i>shiko</i>	0	2	4	4	4	4
<i>son</i>		0	2	2	2	2
<i>soukous</i>			0	4	2	2
<i>rumba</i>				0	4	4
<i>bossa-nova</i>					0	2
<i>gahu</i>						0
Σ	18	10	14	18	14	15

Tablica 1.2: Tablica s Hammingovim udaljenostima među ritmovima

Hammingova udaljenost nije najbolji način za opis sličnosti u našem slučaju. Ona mjeri koliko se dva ritma ne poklapaju takt po takt, ali ne mjeri razliku ukupnih struktura pojedinog ritma. Npr. Hammingova udaljenost ritmova *gahu* i *soukous* i ritmova *gahu* i *bossa-nova* je jednaka i iznosi 2. Ako pogledamo *box notation* zapis ritmova na slici 1.2, lako vidimo da su *gahu* i *bossa-nova* međusobno sličniji [7].

Udaljenost intervalnih vektora

Za sljedeće računanje sličnosti koristit ćemo prikazivanje ritmova u obliku konveksnih peterokuta (slika 1.3). Mi ćemo proučiti slučaj u kojem je ritam prikazan vektorom $X = (x_1, \dots, x_5)$, gdje je x_i broj točaka na kružnici koje su preskočene stranicom peterokuta, počevši od vrha označenog s 0. Te vektore nazivamo intervalnim vektorima pojedinog ritma. Tako je primjerice vektor koji je pridružen ritmu *son* oblika $X = (2, 2, 3, 1, 3)$ zato što smo počevši od 0 prvo preskočili 2 točke te je treća točka prvi vrh mnogokuta, zatim preskačemo opet 2 točke pa je šesta točka sljedeći vrh mnogokuta. Preskačemo sljedeće 3 točke i deseta točka postaje treći vrh mnogokuta i tako dok ne dobijemo svih pet vrhova peterokuta. Intervalni vektori ostalih pet ritmova su: za ritam *shiko* $(3, 1, 3, 1, 3)$, *soukous* $(2, 2, 3, 0, 4)$, *rumba* $(2, 3, 2, 1, 3)$, *bossa-nova* $(2, 2, 3, 2, 2)$ i *gahu* $(2, 2, 3, 3, 1)$.

Udaljenost između dva intervalna vektora $X = (x_1, \dots, x_5)$ i $Y = (y_1, \dots, y_5)$ definiramo kao euklidsku udaljenost između vektora X i Y u prostoru \mathbb{R}^5 , tj. formulom:

$$d_E(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - y_i)^2}. \quad (1.2)$$

Primjer 1.3.2. Izračunajmo udaljenost intervalnih vektora ritmova shiko i gahu. Vektorski prikaz ritma shiko je $X = (3, 1, 3, 1, 3)$, a ritma gahu $Y = (2, 2, 3, 3, 1)$. Uvrštavajući x_i i y_i u zadanu formulu dobijemo

$$\begin{aligned} d_E(X, Y) &= \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2 + (3-3)^2 + (1-3)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{1+1+0+4+4} = \sqrt{10} \approx 3,16. \end{aligned}$$

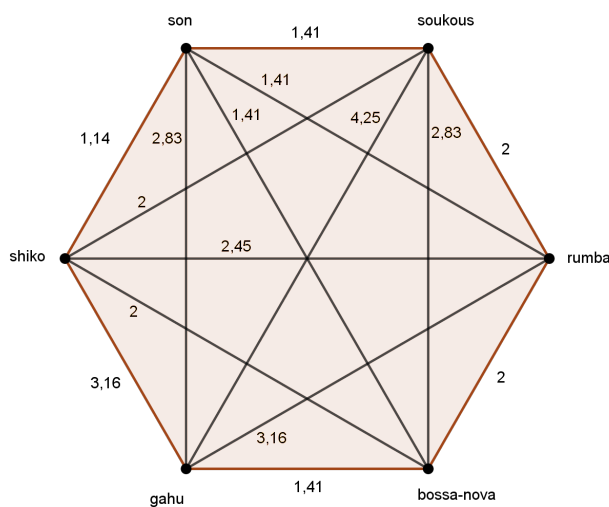
U tablici 1.3 su dane sve udaljenosti intervalnih vektora *clave* ritmova. Kao i kod Hammingove udaljenosti u posljednjem redu tablice navedeni su zbrojevi udaljenosti pojedinog ritma do ostalih ritmova. Što je zbroj veći, ritam se ukupno gledajući više razlikuje od svih ostalih. Ponovo dobijemo da je *son* najbliži ostalim ritmovima, njegova je udaljenost intervalnih vektora do četiri ritma 1,14 i do ritma *gahu* 2,83, odnosno ukupna udaljenost intervalnih vektora do svih skupa je 8,47. *Gahu* ima najvišu sumu (14,80) što znači da se najviše razlikuje od ostalih ritmova. Dobivene udaljenosti intervalnih vektora slažu se iskustvom glazbenika koji kažu da je ritam *gahu* jedinstven i drugačiji od drugih ritmova i da je ritam *son* popularan i rasprostranjen u svijetu upravo zbog sličnosti s ostalim ritmovima [7].

	<i>shiko</i>	<i>son</i>	<i>soukous</i>	<i>rumba</i>	<i>bossa-nova</i>	<i>gahu</i>
<i>shiko</i>	0	1,14	2	2,45	2	3,16
<i>son</i>		0	1,41	1,41	1,41	2,83
<i>soukous</i>			0	2	2,83	4,25
<i>rumba</i>				0	2	3,16
<i>bossa-nova</i>					0	1,41
<i>gahu</i>						0
Σ	10,02	8,47	12,48	11,02	9,65	14,80

Tablica 1.3: Tablica s udaljenostima intervalnih vektora ritmova

Odnos ritmova možemo prikazati i matematičkom strukturom poznatom pod nazivom težinski graf. Graf se sastoji od dva skupa, jedan je skup vrhova V (njegov elementi u našem slučaju predstavljaju pojedine ritmove), a drugi je skup bridova E koji povezuju po dva vrha. Ako su svaka dva vrha povezana i nijedan vrh nije povezan sam sa sobom,

govorimo o potpunom grafu. Naš će graf biti potpun jer želimo usporediti svaki ritam sa svakim. Ukoliko je još definirana i funkcija koja svakom bridu grafa pridružuje neki numerički iznos (težinu brida), govorimo o težinskom grafu. U našem slučaju gledamo potpun težinski graf sa šest vrhova (ritmova), a težine bridova su njihove sličnosti definirane kao udaljenosti intervalnih vektora (tablica 1.3). Dobiveni graf prikazan je slikom 1.10.



Slika 1.10: Potpun težinski graf šest osnovnih *clave* ritmova

Podgraf grafa G je graf čiji skup vrhova je podskup skupa vrhova od G , a skup bridova je podskup skupa bridova od G . Ako je skup vrhova podgraфа jednak skupu vrhova od G , govorimo o razapinjućem podgrafu.

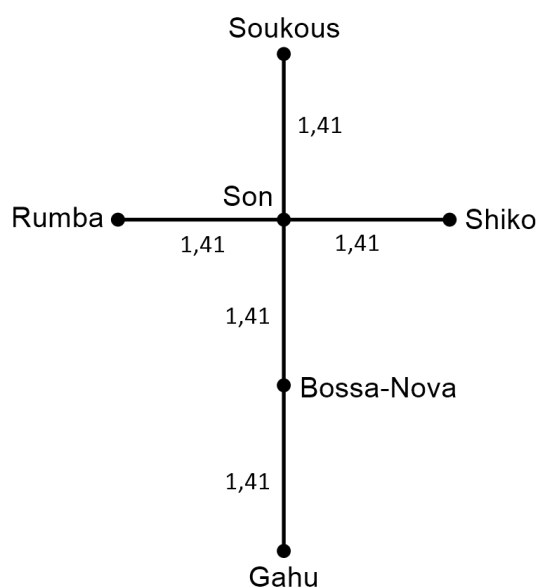
Graf nazivamo povezanim ako se ne može prikazati kao unija dva disjunktna grafa (disjunktna i s obzirom na vrhove i s obzirom na bridove).

Graf je aciklički ako ne postoji niz $v_1e_1v_2e_2 \dots v_ke_kv_1$ takav da su svi v_i vrhovi grafa i svi e_i bridovi grafa.

Aciklički povezan graf nazivamo stablom. Ako je podgraf danog grafa razapinjući i stablo, govorimo o razapinjućem stablu.

Ako imamo težinski graf, kao u našem slučaju, možemo govoriti i o minimalnom razapinjućem stablu, tj. razapinjućem stablu čiji zbroj težina bridova ima minimalnu vrijednost. Općenito minimalno razapinjuće stablo neće biti jedinstveno. Postoje razni algoritmi za nalaženje minimalnog razapinjućeg stabla, među kojima je vjerojatno najpoznatiji Primov algoritam [8].

Primijenimo li Primov algoritam na naš graf, dobijemo minimalno razapinjuće stablo prikazano slikom 1.11. Iz njega je lako vidljivo da je *son* najbliži svim ostalim ritmovima [7].



Slika 1.11: Minimalno razapinjuće stablo određeno s udaljenostima intervalnih vektora

1.4 Permutacije ritmova

Clave ritmovi se sastoje od po 5 nota raspoređenih u 16 taktova te je razumno pitanje koji su još takvi ritmovi mogući, ali se ne nalaze među 6 uobičajenih. Pet taktova od mogućih 16 možemo izabrati na $\frac{16!}{5!11!} = 4638$ načina, tj. teorijski imamo 4638 takvih ritmova, a u praksi se izvode samo njih 6. Jedan od razloga je taj što većina tih načina kada ih odsviramo neće zvučati zanimljivo, primjerice 1111100000000000 (pet udaraca za redom i onda duga stanka od 11 taktova). Broj mogućih načina možemo ograničiti uzimajući u obzir da svih šest *clave* ritmova svoje note imaju s razmacima od po najviše 4 takta (1 do 3 takta za sve osim ritma *soukous*). Drugim riječima, koordinate njihovih intervalnih vektora imaju iznose 0 do 4 (svi osim *soukous*-a 1 do 3). Broj svih uređenih petorki prirodnih brojeva od 0 do 4 je $5^5 = 3125$ (a svih uređenih petorki prirodnih brojeva 1 do 3 je samo $3^5 = 243$). Naravno, neki od takvih uzoraka bit će vrlo slični već poznatima, te samo prebrojavanje

permutacija ne daje zanimljive informacije. Pogodnije je kombinatorno razvrstavanje ritmova u međusobno slične.

Primjerice, intervalni vektor za ritam *son* je (2, 2, 3, 1, 3). Broj permutacija tog uzorka je $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$ budući da imamo dvije dvojke, dvije trojke i jednu jedinicu (permutacija multiskupa). Svaka od ovih permutacija zvuči dobro. Među tim permutacijama nalaze se i intervalni vektori ritmova *rumba* i *gahu* te *son*, *rumba* i *gahu* svirani unazad. Ako se intervalni vektor nekog ritma može dobiti kao permutacija drugog, kažemo da ti ritmovi pripadaju istoj intervalnoj kombinatornoj klasi. Na taj način se svi ritmovi mogu razvrstati u klase. To vrijedi za ritmove *son* (2, 2, 3, 1, 3), *rumba* (2, 3, 2, 1, 3) i *gahu* (2, 2, 3, 3, 1). *Shiko* (3, 1, 3, 1, 3), *soukous* (2, 2, 3, 0, 4) i *bossa-nova* (2, 2, 3, 2, 2) pripadaju svojoj intervalnoj klasi. Među ukupno 30 ritmova u *son-rumba-gahu* intervalnoj kombinatornoj klasi, osim ritmova *son*, *rumba* i *gahu* te ritma *son* sviranog unazad, nalazi se 26 ritmova koji zvuče slično ritmovima *son,rumba* i *gahu*, ali modernije i više u stilu džezza. Svaki od tih ritmova mogao bi biti dobro inkorporiran u novu muziku [7].

Poglavlje 2

Salsa rueda

Salsa *rueda* je nastala u Havani na Kubi 1950-ih. Pri plesanju salse *ruede* parovi plesača stoje u krugu, istovremeno plešu iste pokrete i svaki voditelj se nalazi desno od pratitelja. Jedan od voditelja je *caller*, on tijekom plesa govori ostalim plesačima koji će plesni pokret biti sljedeći.

U ovom ćemo se poglavlju posvetiti nekim kombinatornim pitanjima vezanim za plesanje salse *ruede*, prateći prijedlog radionice iz [9].

Neka je n paran broj plesača koji žele plesati *ruedu*. U prvom koraku određujemo broj načina da se oni podijele u parove, bez uzimanja u obzir tko je voditelj, a tko pratitelj.

Primjer 2.0.1. Pogledajmo slučajeve s $n = 4$ i $n = 6$.

Ako imamo 4 plesača, zovimo ih A, B, C i D, imamo sljedeće mogućnosti: A pleše s B, C s D; A pleše s C, a B s D; A pleše s D, a B s C. Imamo dakle tri mogućnosti: prvi plesač partnera može izabrati na 3 načina, a time je jednoznačno određen drugi plesni par.

Za 6 plesača bismo mogli također prebrojati sve mogućnosti. Brže je da odmah računamo: Prvi plesač može birati među 5 partnera, a zatim se ostala 4 plesača mogu na 3 načina (kao gore) podijeliti u parove te sve skupa imamo $5 \cdot 3 = 15$ načina da se 6 plesača raspodijeli u parove.

Općenito koristeći kombinatorni princip produkta [8], zaključujemo: Ako je broj plesača paran broj n , broj načina P_n da ih rasporedimo u parove jednak je $n - 1$ puta broj načina da $n - 2$ plesača raspodijelimo u parove iznosi $P_n = (n - 1)P_{n-2}$. Imamo i $P_2 = 1$ i $P_4 = 3$ te matematičkom indukcijom zaključujemo: Broj načina da se n plesača raspodijeli u parove jednak je $P_n = (n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1)$.

Dodajmo sada razlikovanje uloge voditelja i pratitelja u svakom od parova. Ako imamo P_n parova, onda u svakom od njih imamo 2 načina odabira tko je voditelj, a tko je pratitelj. Stoga je broj načina da paran broj n plesača raspodijelimo u $\frac{n}{2}$ parova u kojima se razlikuje uloga voditelja i pratitelja iznosi $2^{n/2} \cdot P_n = 2^{n/2}(n - 1)!!$.

Primjer 2.0.2. Za 4 plesača imamo $4 \cdot 3 = 12$ različitih načina raspodjele u parove uz razlikovanje voditelja i pratitelja.

Za 6 plesača imamo $8 \cdot 15 = 120$ različitih načina raspodjele u parove uz razlikovanje voditelja i pratitelja.

Naposljetku, uzmimo još u obzir da se salsa *rueda* pleše u krugu. Broj načina da se k objekata poreda u krug iznosi $(k-1)!$ (jer od $k!$ mogućih permutacija imamo k ekvivalentnih poredaka u krug [8]). Ovdje je k broj parova koji plešu *ruedu*, dakle $k = \frac{n}{2}$. Dakle, za svaki odabir podjele u parove imamo $\left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ načina da se oni poredaju u krug.

Primjer 2.0.3. Za $n = 4$ plesača imali smo 12 mogućih podjela u 2 para. No, ako imamo samo dva objekta koja redamo u krug, poretci prvi-drugi i drugi-prvi su ekvivalentni, pa je za 4 plesača 12 konačni broj rasporeda u krug za *ruedu*.

Za $n = 6$ imamo 120 odabira 3 plesna para. Tri para se u krug mogu poredati na $(3-1)! = 2$ načina. Stoga je za $n = 6$ mogući broj rasporeda za *ruedu* jednak $2 \cdot 120 = 240$.

Zaključujemo da vrijedi:

Teorem 2.0.4. Ako je n paran broj plesača, onda svih mogućih početnih postava za plesanje *ruede* (plesaći su raspoređeni u parove u kojima se razlikuje uloga voditelja i pratitelja te su parovi zatim poredani u krug) ima

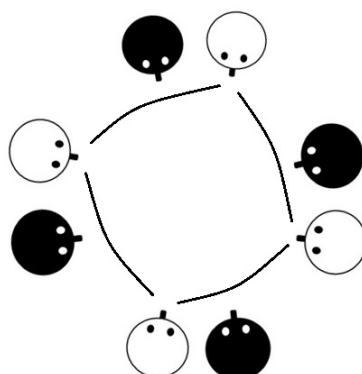
$$\left(\frac{n}{2} - 1\right)! \cdot 2^{n/2} \cdot (n-1)!!.$$

Dva zanimljiva pokreta u salsi *ruedi* su *da me* i *da me dos*. Kod oba pokreta plesaći mijenjaju partnera s kojim plešu. Kod pokreta *da me* voditelj nastavlja ples s prvim pratiteljem desno od njega, a kod pokreta *da me dos* voditelj preskače jednog pratitelja i nastavlja ples s pratiteljem iza njega. Na slici 2.1 prikazan je put kojeg pratitelji prelaze ako parovi plešu samo s pokretima *da me*, a slika 2.2 ako plešu samo s pokretima *da me dos* [9].

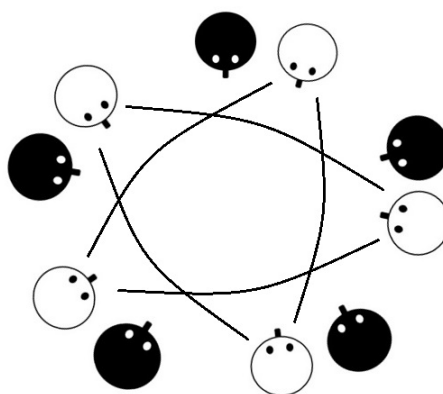
Gledajući slike 2.1 i 2.2, postavlja se pitanje: Ako imamo određen broj parova plesača, hoće li odabrani pratitelj plesati sa svakim voditeljem ako plesaći plešu samo pokrete *da me* (odnosno samo *da me dos*)?

Za slučaj plesanja samo *da me* očito je načelno moguće da svaki pratitelj pleše sa svakim voditeljem. Jedini uvjet je da se napravi dovoljno izmjena, a to je za 1 manje od broja parova. Primjerice, ako imamo 6 parova, svaki pratitelj će plesati sa svakim voditeljem ako se naprave minimalno 5 izmjena partnera.

Kada plešemo samo *da me dos*, zbog pomaka za 2 mjesta, razlikovat ćemo slučajeve kada imamo paran broj parova i kad imamo neparan broj parova. Ako imamo paran broj parova pratitelj može plesati samo s polovinom svih voditelja budući da svakom izmjenom pratitelj preskače jednog voditelja i nastavlja ples s voditeljem dva mjesta lijevo od njega. Promotrimo slučaj kada imamo 6 parova (slika 2.3). Ako numeriramo parove brojevima



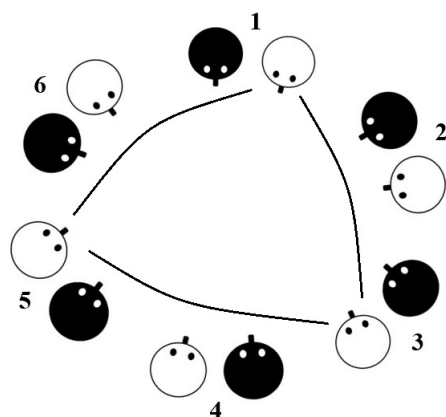
Slika 2.1: Put kojeg pratitelji prelaze ako četiri para plešu samo s pokretima *da me*



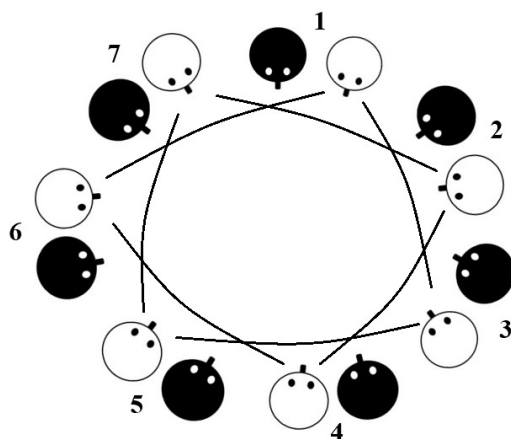
Slika 2.2: Put kojeg pratitelji prelaze ako pet parova pleše samo s pokretima *da me dos*

od 1 do 6, pratitelj koji kreće iz para 1 će prijeći voditelje pod brojevima 1, 3 i 5 u prvom krugu. Tada će ponovo plesati s voditeljem iz para 1 te nastaviti plesati s istim voditeljima kao i u prvom krugu. Dakle, ako imamo paran broj parova, određeni pratitelj, bez obzira koliko izmjena napravili, nikada neće plesati sa svim voditeljima, a ako je broj izmjena za 1 manji od polovine broja parova onda će (iz razloga kao gore za *da me*) svaki pratitelj plesati sa svakim od mogućih voditelja, njih pola od ukupnog broja parova.

Ako imamo neparan broj parova odgovor na naše pitanje je kao u slučaju *da me*. Naime, u ovom slučaju pratitelji prolaze (kao na slici 1.2) putanje koje su sve dijagonale „duljine 2” u k -terokutu, gdje je k neparni broj svih parova, pa načelno, uz dovoljan broj izmjena, mogu

Slika 2.3: *Da me dos* sa šest parova

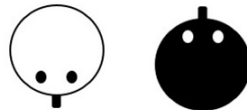
plesati svatko sa svakim. Primjerice, ako imamo 7 parova (slika 2.4) možemo numerirati parove brojevima od 1 do 7. Tada u prvom krugu pratitelj koji kreće iz para 1 će redom plesati s voditeljima parova pod brojevima 1, 3, 5, 7, 2, 4 i 6. Kako bi pratitelj plesao sa svim voditeljima mora napraviti 6 izmjena.

Slika 2.4: *Da me dos* sa sedam parova

Poglavlje 3

Pozicije u salsi

Salsa se pleše u paru, pri čemu jedan od partnera (u pravilu muškarac) vodi, a drugi (u pravilu žena) prati. U dijagramima ćemo voditelja označavati s crnim krugom, a pratitelja s bijelim. S obzirom na to da nije svejedno tko kamo gleda, naznačit ćemo i njihove noseve (slika 3.1). U ovom poglavlju rada opisat ćemo i sistematizirati, uz neka ograničenja, broj pozicija u kojima se par plesača može naći i kako može prelaziti iz jedne pozicije u drugu.



Slika 3.1: Prikaz pratitelja (bijeli krug) i voditelja (crni krug)

Prvo ćemo proučiti koliko je pozicija u kojima se par plesača ne kreće (odnosno, ignoriramo pokrete nogu dok se radi samo o pomacima naprijed-natrag). Takve ćemo pozicije zvati stacionarnim pozicijama. Kasnije ćemo te pozicije spojiti plesnim pokretima. Osnovni koraci u salsi događaju se u taktovima 1, 2, 3 i 5, 6, 7 u ritmu s osam taktova. Voditelj započinje s lijevom nogom, a pratitelj s desnom i tako naizmjenice. Osnovni koraci provlače se kroz cijeli ples. Nakon što se usvoje osnovni koraci, najveći izazov voditelja je u kombiniranju različitih pokreta na zanimljiv način i pratitelja u stiliziranju pokreta. Pozicioniranje ruku je najbitniji čimbenik koji pokrete čini drugačijima. Ni jedan drugi ples ne ovisi toliko o pozicijama ruku kao salsa [10]. Napominjemo da nećemo promatrati detalje plesanja već promjene pozicija i pokreta unutar osam taktova.

3.1 Podjela i prebrojavanje stacionarnih pozicija

Stacionarne pozicije ćemo prebrojavati tako da ih prvo podijelimo na tipove, a zatim prebrojimo sve različite pozicije unutar pojedinog tipa. Razlikujemo:

1. otvorene pozicije (bez držanja ruku);
2. jednoručne pozicije (pozicije u kojima se partneri drže po jednom rukom);
3. pozicije u kojima se parovi drže za obje ruke, koje dalje možemo podijeliti na dva tipa:
 - a) obje ruke voditelja su ispred njega i
 - i. plesači se drže za iste ruke, lijeva za lijevu, desna za desnu - u nastavku to označavamo s (*LL/DD*) ili
 - ii. plesači se drže za suprotne ruke, lijeva za desnu i desna za lijevu - u nastavku to označavamo s (*LD/DL*);
 - b) jedna ili obje ruke voditelja su iza njegovih leđa.

Brojat ćemo samo bitno različite pozicije. Bitno nam je u kojem smjeru gleda pojedini plesač, za koje ruke se plesači drže, nalaze li se nekom od plesača ruke iza leđa i je li to oko struka ili oko vrata te križaju li im se ruke. Ne razlikujemo pozicije u kojima su ruke plesačima pomaknute malo nagore ili nadolje. Također, nećemo prebrojavati one pozicije koje bismo mogli prikazati dijagramima i izgledale bi u redu, ali su u praksi neizvedive ili bolne.

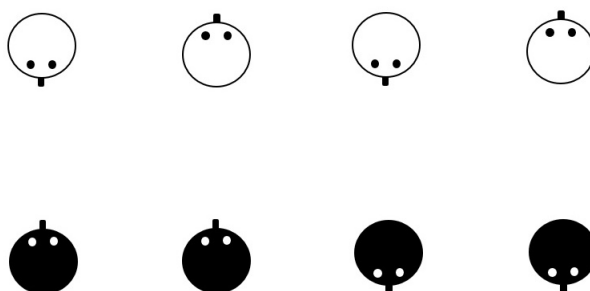
Otvorene pozicije

Postoje četiri otvorene stacionarne pozicije ovisno tome u kojem smjeru pojedini plesač gleda. Navedene pozicije prikazane su na slici 3.2.

Primijetimo ovdje da kada pozicije budu složenije, koliko god pozicija pronašli pri promatranju jedne od moguće četiri kombinacije smjerova u kojima plesači mogu gledati možemo ih pomnožiti s 4 i dobiti ukupan broj pozicija.

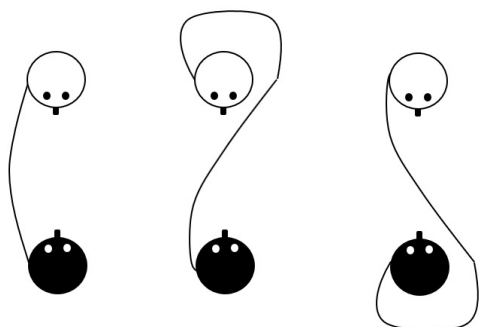
Jednoručne pozicije

Par plesača se jednoručno može držati za suprotne ruke (*L/D* ili *D/L*) ili za iste ruke (*L/L* ili *D/D*). Za svaku *L/D* poziciju postoji zrcalno simetrična *D/L* pozicija. Isto vrijedi za *L/L* i *D/D* pozicije. Dakle, dovoljno je prebrojati samo *L/D* i *L/L* pozicije i pomnožiti ih s 2.

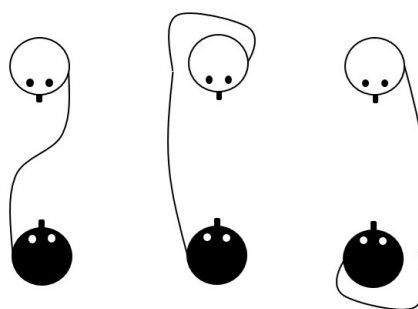


Slika 3.2: Otvorene pozicije

Na slikama 3.3 i 3.4 vidimo L/D i L/L pozicije u kojima par plesača gleda jedan prema drugome i drže se za jednu ruku. Takvih pozicija ima 6. Kako ruka iza leđa plesača može biti iza vrata ili iza struka, drugi i treći prikazi na obje slike odgovaraju po dvjema pozicijama, ovisno o tome gdje se nalazi ruka iza leđa. Stoga imamo 10 pozicija. Dobiveni broj pomnožimo s 2 da uključimo i pozicije D/L i D/D . Zaključujemo da postoji 20 pozicija u kojima par plesača gleda jedan prema drugome i drže se za jednu ruku.



Slika 3.3: Jednoručne pozicije L/D



Slika 3.4: Jednoručne pozicije L/L

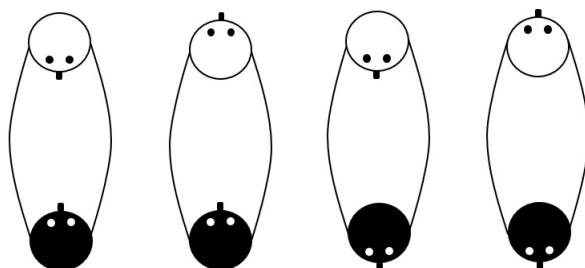
Kako smo već naveli, množenjem tog broja s 4 uključit ćemo i sve četiri moguće orijentacije plesača jednog prema drugome i tako dobiti ukupan broj pozicija kada se par plesača drži za jednu ruku. Dakle, ukupno dobivamo 80 jednoručnih pozicija [2].

Pozicije u kojima se par drži za obje ruke

Sad ćemo se ograničiti na pozicije u kojima se plesni par drži za obje ruke i ne pušta ih u nijednom trenutku tijekom osam taktova, tj. i dalje razmatramo stacionarne pozicije.

Promatramo pozicije u kojima imamo najviše jedno križanje ruku jer dva križanja nisu izvediva ili su bolna.

Na slici 3.5 prikazane su 4 najjednostavnije pozicije. Prvu poziciju nazivamo osnovnom pozicijom, plesači gledaju jedno drugog i drže se za suprotne ruke (*LD/DL*). Ostale tri pozicije dobijemo tako da voditelj ili pratitelj gledaju u suprotnu stranu od partnera. Ove pozicije dobivene od prve pozicije također nazivamo osnovnim pozicijama. Primijetimo da plesači mogu prijeći iz prve u četvrtu poziciju ili obrnuto istovremeno radeći poluokret bez da se prestanu držati za ruke. Isto vrijedi za preostale dvije pozicije.



Slika 3.5: Osnovne pozicije

Simboličko označavanje

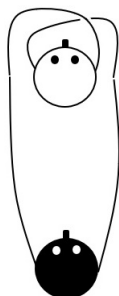
U nastavku koristimo pristup iz članka [10]. Za opisivanje određene pozicije koristit ćemo uređene petorki. Prvo moramo zabilježiti orijentaciju oba plesača. Prva koordinata je orijentacija voditelja, a druga orijentacija pratitelja. Ako voditelj gleda prema pratitelju, prva koordinata će biti 1, ako gleda u suprotnom smjeru koordinata će biti 0. Isto vrijedi za pratitelja čiju orijentaciju upisujemo u drugu koordinatu.

Sljedeće dvije koordinate (treća i četvrta) odgovaraju pozicijama ruku. U trećoj koordinati započinjemo s voditeljevom desnom rukom te nadodajemo pratiteljevu ruku koju voditelj drži. Sljedeća koordinata je voditeljeva lijeva ruka i pratiteljeva preostala ruka. Ako se par drži za iste ruke imat ćemo $(-, -, DD, LL, -)$, gdje D predstavlja desnu ruku, a L lijevu. Ako se par drži za suprotne ruke imamo $(-, -, DL, LD, -)$. Primijetimo da je pisanje obiju koordinata u našem slučaju suvišno budući da promatramo samo slučajeve u kojima se partneri drže za obje ruke, ali ovakav zapis olakšava iščitavanje pozicija iz uređenih petorki.

Moguće je da jedan od plesnih partnera drži ruku iza leđa, bilo oko vrata ili oko struka. To ćemo naznačiti u trećoj i četvrtoj koordinati u eksponentu slova koje određuje tu ruku. Koristimo slovo V za vrat i slovo S za struk. Tako, npr. kada osoba drži lijevu ruku iza vrata pišemo L^V , za voditelja ili pratitelja. U eksponent pišemo $*$ ako se ruka nalazi iza

leđa, ali nam nije bitno gdje. Nećemo promatrati slučajeve u kojima oboje imaju ruke iza tijela jer te pozicije nisu u praksi ugodne, u pravilu niti moguće. Zadnja koordinata naznačava postoji li križanje ruku. Ako nema križanja upisujemo 0, ako su ruke prekrížene pišemo K . U eksponent slova K pišemo D ili L ako je desna ili lijeva ruka vođitelja iznad druge ruke i D ili L u indeks ako je desna ili lijeva ruka ispod druge ruke. Kao i u slučaju s trećom i četvrtom koordinatom i ovdje je suvišno pisati slovo u indeksu, ali ga zapisujemo zbog lakšeg očitavanja.

Primjerice, petorka $(1, 0, DL^S, LD^V, K_D^L)$ označava poziciju u kojoj vođitelj gleda prema pratitelju, a pratitelj ima okrenuta leđa prema vođitelju. Vođiteljeva desna ruka drži pratiteljevu lijevu koja se nalazi oko njegovog struka. Vođiteljeva lijeva ruka drži pratiteljevu desnu ruku koja se nalazi oko njegovog vrata. Ruke im se križaju jednom, vođiteljeva lijeva ruka nalazi se poviše desne. Dijagram koji odgovara ovoj uređenoj petorci prikazan je slikom 3.6.



Slika 3.6: Pozicija $(1, 0, DL^S, LD^V, K_D^L)$

Na slici 3.7 vidimo dva primjera za koje bi peta koordinata, koja opisuje križanje ruku, bila K_L^D i K_D^L .

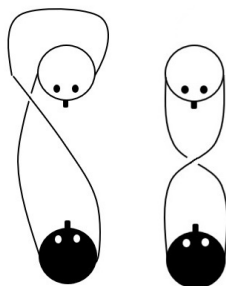
Obje ruke vođitelja ispred njega

U ovom dijelu prebrojavat ćemo samo slučajeve kada su plesni partneri okrenuti licem u lice (prve dvije koordinate su 1) i vođitelj ima obje ruke ispred sebe.

Prvo promatramo LL/DD situaciju. Na slikama 3.8, 3.9 i 3.10 vidimo sve moguće situacije.

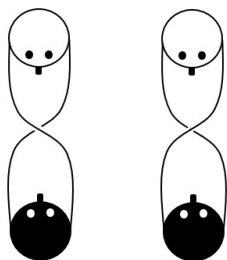
Kada pratitelj isto kao i vođitelj nema nijednu ruku iza leđa imamo dvije moguće pozicije, kada je vođiteljeva desna ili lijeva ruka preko pratiteljeve. Budući da nitko nema ruke iza leđa, svaki prikaz odgovara točno jednoj plesnoj poziciji (slika 3.8).

Ako pratitelj ima jednu ruku iza leđa, plesačima se ruke više ne križaju. Budući da ruka iza leđa može biti oko vrata ili oko struka svaki od prikaza sa slike 3.9 odgovara po

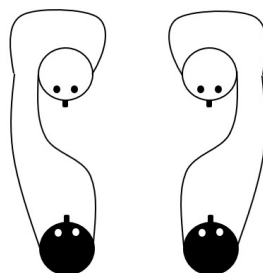


Slika 3.7: Primjeri s križanjem ruku (voditeljeva desna preko lijeve i lijeva preko desne ruke)

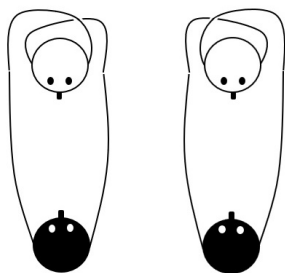
dvjema plesnim pozicijama. Zaključujemo da pozicija u kojima se partneri gledaju, drže s obje ruke (*DD/LL*), voditelj obje ruke ima ispred sebe i pritom je pratitelju najviše jedna ruka iza leđa ukupno ima $2 + 4 = 6$.



Slika 3.8: Dvije pozicije tipa ($1, 1, DD, LL, K$)



Slika 3.9: Dvije pozicije tipa ($1, 1, DD, LL, 0$)



Slika 3.10: Dvije pozicije tipa ($1, 1, DD^*, LL^*, K$)

Sada pogledajmo situacije kada su pratitelju obje ruke iza leđa. Tada mora postojati jedno križanje ruku. Imamo dva prikaza te pozicije ovisno to tome koja je ruka gornja. Kada još uzmemo u obzir da ruke iza leđa mogu biti oko vrata ili oko struka, za svaki prikaz sa slike 3.10 imamo po 3 fizički izvedive plesne pozicije. Jednu imamo kada su obje ruke oko struka, drugu kada su obje ruke oko vrata i treća kada je jedna ruka oko vrata, a druga oko struka. Pogledajmo slučaj $(1, 1, DD^V, LL^S, K_D^L)$. Zbog križanja K_D^L lijeva ruka je iznad desne ruke. Lijeva ruka ne može biti oko struka, a desna oko vrata ako je lijeva ruka iznad desne ruke pa taj slučaj ne brojimo. Zaključujemo da pozicija u kojima su pratitelju obje ruke iza tijela ukupno ima 6. Stoga pozicija u kojima su plesači okrenuti jedan prema drugome, voditelj ima obje ruke ispred sebe i ruke se križaju najviše jednom ukupno ima $2 + 4 + 6 = 12$.

Nadalje proučavamo slučaj kada su plesači okrenuti jedan prema drugome i drže se za suprotne ruke (voditeljeva desna ruka drži pratiteljevu lijevu ruku). I dalje vrijedi da su voditeljeve obje ruke ispred njega. Najjednostavnija verzija ove pozicije je osnovna $(1, 1, DL, LD, 0)$ (slika 3.11).

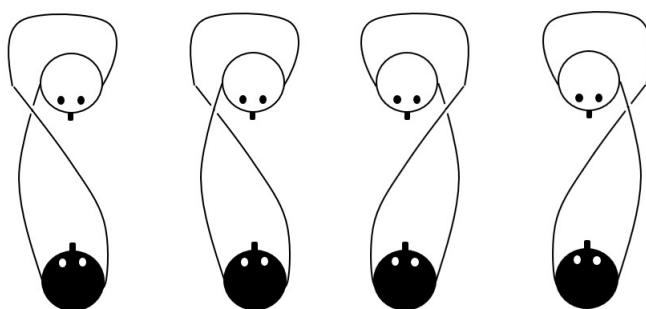


Slika 3.11: Najjednostavnija pozicija kada su plesači okrenuti jedan prema drugome, drže se za suprotne ruke i voditeljeve obje ruke su ispred njega

Križanje ruku dobijemo ako je barem jedna ruka nekog od članova para iza tijela kao što je prikazano na slici 3.12. Svaki od prikaza sa slike odgovara po dvjema plesnim pozicijama, ovisno o tome je li ruka koja je iza tijela oko vrata ili oko struka.

Zaključujemo da pozicija u kojima su plesači okrenuti jedan prema drugome, voditeljeve obje ruke su ispred njega i plesači drže se za suprotne ruke ukupno ima $1 + 4 \cdot 2 = 9$. Time je dokazana:

Lema 3.1.1. *Postoji $12 + 9 = 21$ plesnih pozicija u kojima su plesači okrenuti jedan prema drugome, najviše dvije ruke su iza tijela pratitelja, nijedna ruka nije iza tijela voditelja i s najviše jednim križanjem ruku.*



Slika 3.12: Pozicije kada su plesači okrenuti jedan prema drugome, drže se za suprotne ruke, voditeljeve obje ruke su ispred njega i jedna pratiteljeva ruka se nalazi iza leđa

Jedna ili obje ruke voditelja iza leđa

Sad ćemo u prebrajanje uključiti slučajeve kada su voditelju jedna ili obje ruke iza leđa. Možemo koristiti analizu koju smo proveli do sada, ali ne smijemo samo preuzeti broj izračunat u lemi 3.1.1 jer bismo neke pozicije prebrojali dvaput. To su pozicije u kojima nijedan član para nema ruke iza leđa. Te pozicije ovdje ne brojimo i one su $(1, 1, DD, LL, K_L^D)$, $(1, 1, DD^V, LL^S, K_D^L)$ i $(1, 1, DD^V, LL^S, 0)$. Dakle, imamo $21 - 3 = 18$ novih plesnih pozicija, odnosno vrijedi

Lema 3.1.2. *Postoji $21 + 18 = 39$ plesnih pozicija u kojima su plesači okrenuti jedan prema drugome, drže se za obje ruke i najviše jedan plesač ima ruke iza leđa.*

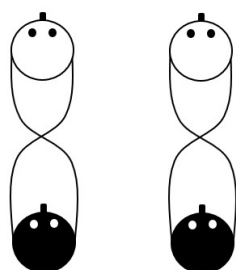
Kao što smo napisali na početku poglavlja, kada smo izračunali broj mogućih pozicija u kojima plesači gledaju jedan prema drugome, možemo broj dobivenih pozicija pomnožiti s 4 kako bismo dobili pozicije u kojima plesači gledaju u svim mogućim smjerovima. Dobijemo $39 \cdot 4 = 156$ plesnih pozicija, odnosno vrijedi

Teorem 3.1.3. *Ukupno postoji 156 plesnih pozicija salse s dva plesača u kojima se plesači drže za obje ruke, s najviše jednim križanjem i najviše jedan plesač ima ruke iza tijela.*

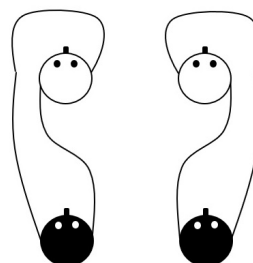
Radi zornosti, malo ćemo detaljnije opisati koje sve pozicije još ulaze u tih 156.

Nakon leme 3.1.2 bilo je preostalo još prebrojati pozicije u kojima plesni partneri gledaju u istom smjeru ili su okrenuti leđima jedan prema drugome. Na slikama 3.13 i 3.14 vidimo pozicije u kojima partneri gledaju u istom smjeru i drže se za suprotne ruke (voditeljeva desna ruka drži lijevu ruku pratitelja). U ovom slučaju voditelj gleda u leđa pratitelja.

Navedene pozicije iste su kao one na slikama 3.8 i 3.9, osim što pratitelj gleda u drugom smjeru. Tako možemo promatrati sve pozicije koje smo do sada prebrojali. Ako okrenemo pratitelja u suprotni smjer dobijemo 39 novih plesnih pozicija.



Slika 3.13: Pozicije tipa $(1, 0, DL, LD, K)$



Slika 3.14: Pozicije tipa $(1, 0, DL, LD, 0)$

Zrcalno simetrično tim pozicijama, imamo pozicije u kojima je voditelj okrenut leđima prema pratitelju, simbolički $(0, 1, -, -, -)$. S takvim položajem plesača dobijemo još 39 novih plesnih pozicija salse.

Teorem 3.1.4. *Ukupno postoji 156 objeručnih pozicija (s najviše jednim križanjem ruku i najviše jednim plesačem s rukama iza leđa), 80 jednoručnih pozicija (s najviše jednim plesačem s rukama iza leđa) i 4 otvorene pozicije što čini $156 + 80 + 4 = 240$ stacionarnih pozicija u salsi.*

3.2 Pokreti između plesnih pozicija

U plesu salsa iz jedne stacionarne pozicije prelazimo u drugu plesnim pokretima. U članku [10] na kojem se temelji ovo poglavlje rada, Christine von Renesse i Volker Ecke su pokušali definirati 'prostor plesnih pokreta salse'. Razmatrane su samo „objeručne” pozicije, tj. pozicije u kojima se partneri drže za obje ruke, no pristup bi se lako proširio otvorenim i jednoručnim pozicijama.

Nadopunit ćemo simboličko označavanje koje smo do sada imali tako da za svaku poziciju uzimamo u obzir nalaze li se obje ruke gore, obje ruke dolje ili jedna ruka gore, druga dolje. Uz ovaj uvjet svaka dosadašnja stacionarna pozicija definira još do četiri nove pozicije.

Za sada ćemo opisivati samo *DL/LD* pozicije (pozicije u kojima voditeljeva desna ruka drži pratiteljevu lijevu i obrnuto). Podijelit ćemo pozicije u sektore s tim da će se neke pozicije pojavljivati više puta. Svaki sektor bit će podijeljen na četiri odjeljka da bi predstavili četiri navedena moguća odnosa koje ruke su gore, a koje dolje. Odjeljci će biti lijeva gore, desna dolje; lijeva gore, desna gore; lijeva dolje, desna dolje; lijeva dolje, desna gore. Poviše svakog odjeljka pisat ćemo kako su pozicionirane ruke, a s lijeve strane sektora pisat ćemo koliko poluokreta pratitelja i u kojem smjeru je potrebno napraviti da bi

se došlo iz početnih pozicija u pozicije u određenom sektoru. Pozicije ruku napisane su iz perspektive voditelja. Tako lijeva dolje, desna gore znači da je voditeljeva lijeva ruka dolje i voditeljeva desna ruka gore. Prelaženje iz jednog sektora u drugi odgovara poluokretu udesno ili ulijevo.

Popis pokreta koje uzimamo u obzir je sljedeći:

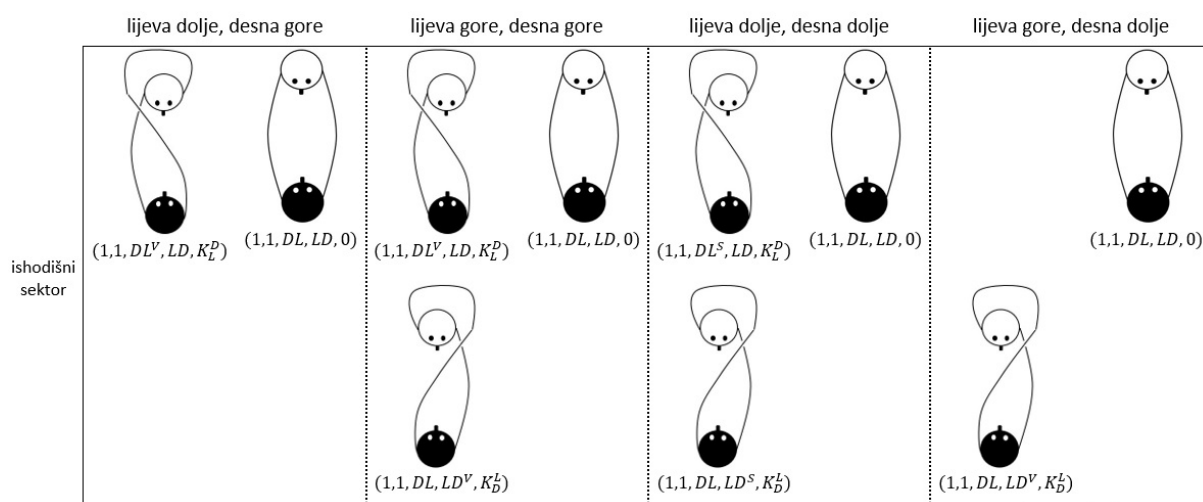
- Okret pratitelja ulijevo (obrnuto od kazaljke na satu) ili udesno (u smjeru kazaljke na satu) za višekratnik od 180° (poluokret pratitelja);
- Okret voditelja ulijevo ili udesno za višekratnik od 180° (poluokret voditelja);
- Prebacivanje jedne ili obje ruke preko glave pratitelja;
- Prebacivanje jedne ili obje ruke preko glave voditelja;
- Provlačenje pratitelja ispod ruku voditelja;
- Provlačenje voditelja ispod ruku pratitelja;
- Pomak ruku nagore ili nadolje.

Ishodišni sektor sadrži DL/LD stacionarne pozicije u kojima se plesači gledaju i kojima je u slučaju križanja ruku voditeljeva ruka iznad pratiteljeve (to su pozicije sa slike 3.11 i prva i treća sa slike 3.12). Drugim riječima, ishodišni sektor sadrži pozicije $(1, 1, DL, LD, 0)$, $(1, 1, DL, LD, K_L^D)$ i $(1, 1, DL, LD, K_D^L)$ (slika 3.15). Nisu sve tri pozicije fizički moguće za svaki od položaja ruku koji određuje odjeljak unutar sektora, pa u odjeljke unosimo samo one stacionarne pozicije koje su izvedive.

Unutar sektora iz pozicije u poziciju se prelazi pomicanjem ruku nagore ili nadolje, saginjanjem i pomicanjem glave (npr. tijela ostaju u stacionarnom stanju, a jedan plesač pomakne ruku preko glave drugog plesača), ali bez okreta.

Sektor iznad ishodišnog sektora bit će sektor u koji se dođe poluokretom udesno, a sektor ispod ishodišnog sektora bit će sektor u koji se dođe poluokretom ulijevo. U sektoru 1 poluokret udesno nalaze se pozicije $(1, 0, DL, LD, 0)$, $(1, 0, DL, LD, K_D^L)$ i $(1, 0, DL, LD, K_L^D)$. U sektoru 1 poluokret ulijevo nalaze se $(1, 0, DL, LD, K_L^D)$, $(1, 0, DL, LD, 0)$ i $(1, 0, DL, LD, K_D^L)$. Kao i u ishodišni sektor, unutar sektora, pa u odjeljke unosimo samo one stacionarne pozicije koje su izvedive.

Unutar sektora postoje pozicije do kojih se može doći samo prelazeći iz drugih sektora. Npr. do pozicije $(1, 1, DL^S, LD, K_L^D)$ u odjeljku lijeva dolje, desna dolje u ishodišnom sektoru ne može se doći pomicanjem ruku ili saginjanjem iz drugih odjeljaka istog sektora.



Slika 3.15: Ishodišni sektor

Za doći do te pozicije počinjemo u poziciji $(1, 1, DL, LD, 0)$ u odjeljku lijeva gore, desna gore u ishodišnom sektoru. Iz tog sektora i te pozicije poluokretom pratitelja u lijevo prelazimo u sektor ispod u poziciju $(1, 0, DL, LD, K_L^D)$, zatim spuštanjem ruku u odjeljak lijeva dolje, desna dolje, desno od odjeljka u kojem se nalazimo u poziciju $(1, 0, DL, LD, K_L^D)$. Zadnji prelazak je poluokret u desno kojim se penjemo u sektor iznad i dolazimo do pozicije $(1, 1, DL^S, LD, K_L^D)$. Sektori iznad i ispod ishodišnog sektora i ishodišni sektor te dolazak do pozicije $(1, 1, DL^S, LD, K_L^D)$ prikazani su na slici 3.16.

Između sektora postavljeni su konektori. Neki od konektora su prekriveni kako bi naznačili da postoje parovi pozicija unutar ta dva odjeljka među kojima se ne može prelaziti s poluokretima s tako pozicioniranim rukama. Npr. ako su plesačima obje ruke dolje, nemoguće je napraviti poluokret i iz pozicije $(1, 1, DL, LD, 0)$ doći u poziciju $(1, 0, DL, LD, K_L^D)$. Odjeljak lijeva dolje, desna dolje ima drugačije označene konektore zato što je fizički teško mijenjati pozicije s obje ruke pozicionirane dolje.

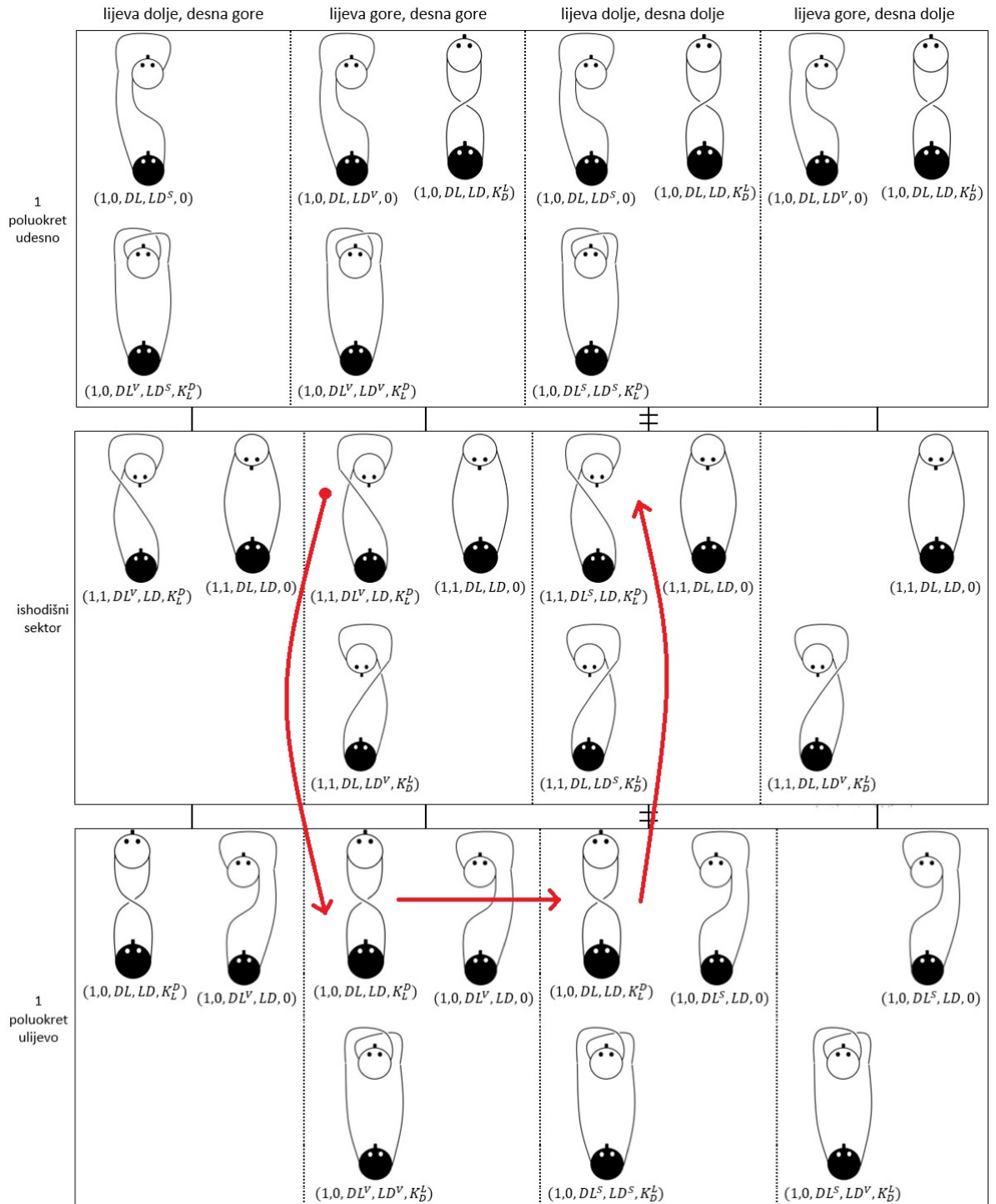
Maksimalan broj poluokreta je četiri, tj. dva puna okreta, pa puna struktura ima devet sektora. Jedino odjeljci označeni s lijeva gore, desna gore mogu doći do dva puna okreta, dok svi ostali odjeljci staju nakon određenog broja poluokreta.

Ovakva struktura (slika 3.16) predstavlja dio pozicija u kojima se par plesača drži za suprotne ruke i do koji se može doći poluokretima pratitelja. Iz strukture možemo iščitati u koju poziciju i kako možemo doći iz neke druge pozicije.

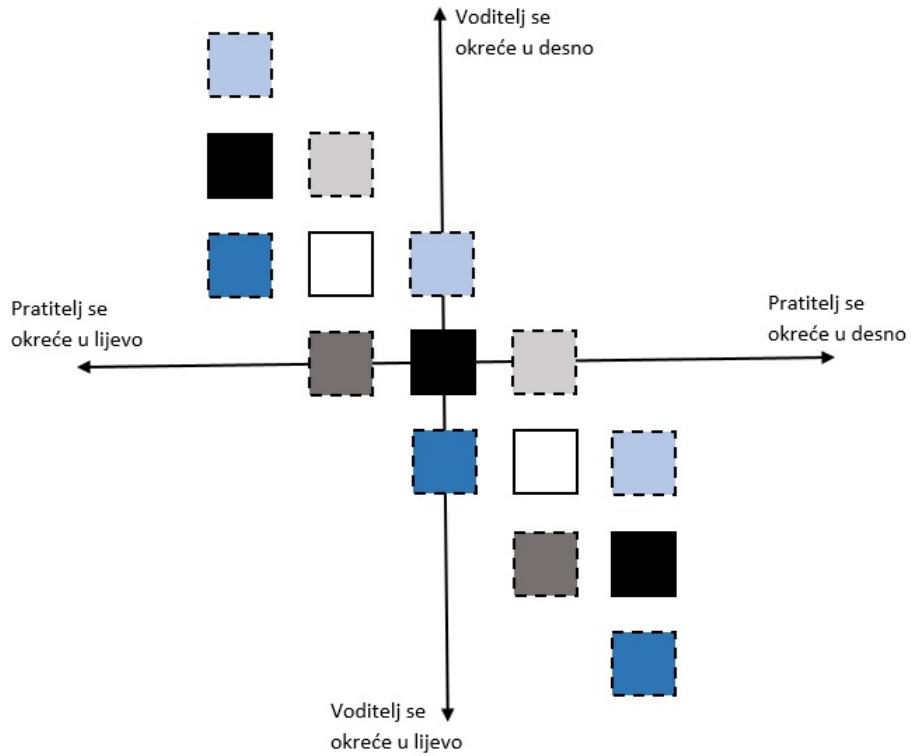
Dalje, želimo proučiti i situacije u kojima se voditelj okreće. Dobijemo istu strukturu samo sa zamijenjenim voditeljem i pratiteljem.

Ostaje nam prikazati i situacije u kojima se i voditelj i pratitelj smiju okretati. Prikaz bi bio Kartezijev produkt dvije dvodimenzionalne strukture kao što su navedene dvije u ovom poglavlju. Međutim, za to bi nam trebao prikaz četverodimenzionalnog prostora svih pozicija u salsi. Stoga ćemo zanemariti koje pojedinačne pozicije bi trebale biti u sektorima i sektore prikazati kao različito obojene kvadrate. Također, kako bismo pojednostavili prikaz, samo ćemo se bazirati na srednja tri sektora. Slika 3.17 prikazuje različito obojene kvadrate postavljene na dvije osi, jedna os predstavlja okrete voditelja, a druga okrete pratitelja. Tri kvadrata na vodoravnoj osi predstavljaju tri srednja sektora. Neki od kvadrata na dijagonalama, koje se protežu od gornjeg lijevog dijela prema donjem desnom dijelu strukture, obojeni su jednako. Svaka dijagonala sastoji se samo od dva tipa kvadrata zato što prvo imamo poluokret voditelja pa poluokret pratitelja koji tim pokretom vrati par u istu poziciju iz koje su počeli plesati. Zato navedene dijagonale nemaju kraj i slika 3.17 je prikaz samo dijela potpune strukture.

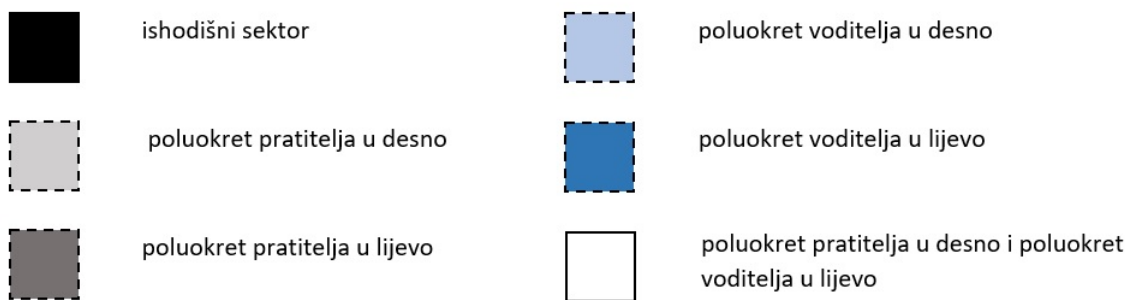
To ne vrijedi i za dijagonale koje se protežu iz gornjeg desnog u donji lijevi dio strukture. Ako se voditelj i pratitelj obojica okrenu puni krug u desno tada je došlo do puna dva okreta i to podrazumijeva četiri križanja ruku pa se struktura ne može nastaviti.



Slika 3.16: Dijagrami ishodišnog sektora i sektora polukreta udesno i ulijevo



Slika 3.17: Prikaz okreta pratitelja i voditelja



Slika 3.18: Kvadrati koji predstavljaju sektore

Poglavlje 4

Simetrije u plesu

Pri promatranju plesnih koreografija možemo uočiti određene pravilnosti i simetrične pozicije između plesača. Naravno, simetrijski odnosi među plesačima su simetrije u trodimenzionalnom prostoru, no s obzirom na to da se u salsi plesači ne kreću vertikalno (ne skaču uvis), dovoljno je ograničiti se na simetrije ravnine, odnosno simetrije projekcija plesača na ravninu na kojoj plešu (tj. na pod). Simetrije spadaju u izometrije, stoga ćemo se prvo podsjetiti osnovnih definicija i teorema [9].

Definicija 4.0.1. *Neka je M ravnina. Izometrija ravnine je funkcija $f : M \rightarrow M$ sa svojstvom $d(A, B) = d(f(A), f(B))$ za sve $A, B \in M$. Simetrija ravninske figure F je izometrija f ravnine koja fiksira tu figuru: $f(F) = F$.*

Definicija 4.0.2. *Neka je p pravac u ravnini M . Osna simetrija s obzirom na pravac p je preslikavanje $s_p : M \rightarrow M$ koje svakoj točki $T \notin p$ pridružuje točku T' takvu da je pravac p simetrala dužine TT' . Pravac p se tada zove os simetrije.*

Definicija 4.0.3. *Neka je S točka ravnine M i α kut. Rotacija oko točke S za kut α je preslikavanje $r : M \rightarrow M$ koje točki $A, A \neq S$, pridružuje točku A' tako da $|SA| = |SA'|$ i $\angle ASA' = \alpha$. Točka S se preslikava u samu sebe i naziva središtem rotacije.*

Definicija 4.0.4. *Neka je dan vektor \vec{a} u ravnini M . Translacija za vektor \vec{a} je preslikavanje $t_{\vec{a}} : M \rightarrow M$ koje točki A pridružuje točku A' tako da $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.*

Definicija 4.0.5. *Kompoziciju translacije sa osnom simetrijom nazivamo kliznom simetrijom.*

Teorem 4.0.6. *Kompozicija dvije translacije je translacija [6].*

Teorem 4.0.7. *Kompozicija translacije i rotacije te rotacije i translacije je rotacija [6].*

Teorem 4.0.8. *Kompozicija dvije rotacije s različitim centrima je ili rotacija ili translacija [6].*

Teorem 4.0.9. *Kompozicija dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} kojima su osi p_1 i p_2 paralelne, je translacija [5].*

Teorem 4.0.10. *Produkt dvije osne simetrije s_{p_1} i s_{p_2} kojima se osi p_1 i p_2 sijeku u točki O je rotacija s centrom u točki O i kutom rotacije 2α , pri čemu je α orijentirani kut kojeg zatvaraju pravci p_1 i p_2 [5].*

Teorem 4.0.11. *Svaka klizna simetrija može se opisati kao kompozicija translacije i osne simetrije s obzirom na pravac paralelan vektoru translacije.*

Dokaz. Neka je $t_{\vec{a}} \circ s_p$ proizvoljna klizna simetrija.

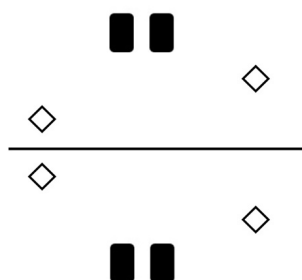
Rastavimo vektor \vec{a} na zbroj komponente \vec{a}_1 s p i okomite \vec{a}_2 na p : $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Očigledno je sad translacija za \vec{a} kompozicija translacija s obzirom na komponentne, tj. $t_{\vec{a}} \circ s_p = t_{\vec{a}_1} \circ t_{\vec{a}_2} \circ s_p$.

Neka sad A proizvoljna točka u ravnini i $A' = s_p(A)$. Tada je $t_{\vec{a}_2} \circ s_p(A) = A''$ i AA'' je okomit na p jer je \vec{a}_2 okomit na p . Udaljenost od A do A'' je $2d \pm a$ ili $a - 2d$, ovisno o orijentaciji i duljini a vektora \vec{a}_2 , ako smo s d označili udaljenost A do p (dakle, $|AA'| = 2d$). Sad se lako provjeri da je udaljenost polovišta $\overline{AA''}$ do polovišta $\overline{AA'}$ ista za sve A , iz čega slijedi da je $t_{\vec{a}_2} \circ s_p$ osna simetrija s obzirom na pravac paralelan s p te je $t_{\vec{a}} \circ s_p$ stvarno kompozicija osne simetrije (s obzirom na taj novi pravac) i translacije paralelne s osi simetrije (za vektor \vec{a}_1). \square

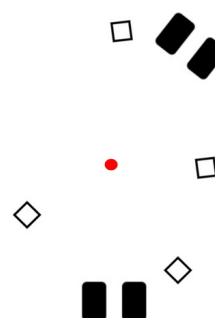
Teorem 4.0.12 (Osnovni teorem o izometrijama). *Svaka izometrija $f : M \rightarrow M$ je osna simetrija, kompozicija dviju osnih simetrija ili kompozicija triju osnih simetrija, tj. svaka izometrija je kompozicija najviše tri osne simetrije [6, 3].*

Iz gornjih teorema je očito da za simetrije u ravnini trebamo u obzir uzimati samo osne simetrije, rotacije, translacije i klizne simetrije sa smjerom klizanja paralelnim osi klizne simetrije.

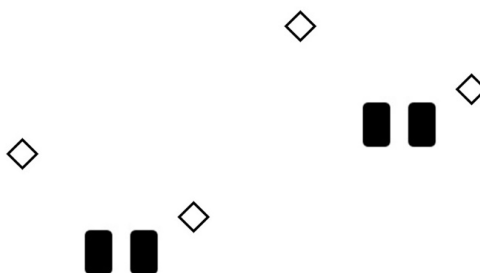
Salsa je ples koji se pleše u paru pa se ograničavamo na simetrije pokreta i pozicija jednog plesača prema svom partneru. Na slikama 4.1, 4.2, 4.3 i 4.4 vidimo primjere u kojima su plesači jedan prema drugome u osnosimetričnoj, rotiranoj, transliranoj ili kliznosimetričnoj poziciji. Crni likovi na slikama predstavljaju stopala, a bijeli kvadrati ruke plesača. Primijetimo da bi za pravu translacijsku simetriju (slika 4.3) trebalo pretpostaviti i da su lijeve ruke na istim visinama, kao i desne. Uočimo da je translacijska simetrija u salsi kompatibilna samo s otvorenim stacionarnim pozicijama (slika 3.2), štoviše samo s drugom i četvrtom od pozicija na toj slici (jedan plesač gleda drugome u leđa).



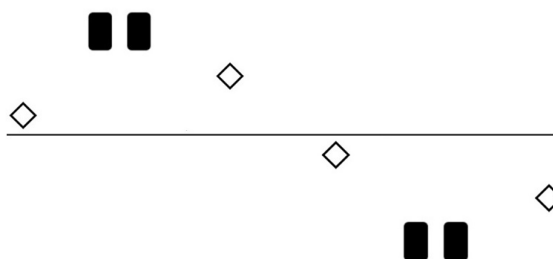
Slika 4.1: Primjer osne simetrije u plesnoj poziciji



Slika 4.2: Primjer rotacijske simetrije u plesnoj poziciji



Slika 4.3: Primjer translacijske simetrije u plesnoj poziciji



Slika 4.4: Primjer klizne simetrije u plesnoj poziciji

Nadalje, većina stacionarnih pozicija salse (iz poglavlja 3.) kompatibilne su s osnom simetrijom (slika 4.1), odnosno ona je izrazito prisutna u plesanju salse. Neke od stacionarnih pozicija omogućuju rotacijsku (slika 4.2) umjesto osne simetrije, primjerice lijeva

pozicija na slici 3.4.

Naposljetku, klizna simetrija (slika 4.4), koja podrazumijeva osnu simetriju i pomak u smjeru osi te simetrije je također prisutna (odnosno, izvediva) u salsi, ukoliko se jedan od plesača u bilo kojoj osnosimetričnoj stacionarnoj poziciji pomakne u stranu, no za pravu kliznu simetriju to bi značilo i ispuštanje ruku (odnosno, otvorenu poziciju).

Vidimo da se tako otvara niz netrivialnih pitanja vezanih za simetrije u salsi i plesu općenito. Možemo promatrati je li u sklopu plesanja salse (ili, naravno, nekog drugog plesa) lako, teško, moguće ili nemoguće prelaziti iz osnosimetrične u rotiranu poziciju, iz osnosimetrične u transliranu i slično [9]. Također, možemo se pitati i koje od plesnih pozicija salse su kompatibilne s kojom simetrijom. Ta pitanja s jedne strane zahtijevaju preciznije uvjete, a s druge su zbog velikog broja mogućih različitih simetrija u ravnini (primjerice, rotacija je moguća za bilo koji kut) preopsežna te ćemo se u ostatku još malo ograničiti.

U linijskoj salsi par se (dobrim dijelom) kreće u samo jednom smjeru te tako bar približno ostvaruju translacijsku simetriju u jednom jedinom smjeru (kretanjem jedan za drugim). Takvu simetriju ćemo zvati simetrijom na pravcu. Naravno, simetrije na pravcu su podskupovi skupa simetrija ravnine, no uvjet očuvanja smjera ograničava moguće simetrije.

Za translacije sad imamo samo jedan mogući smjer – smjer kretanja plesnog para (slika 4.5 lijevo). Označit ćemo translaciju u smjeru kretanja (bez preciziranja duljine pomaka) s T .

Osna simetrija za ovaj slučaj prikazana je drugim crtežom slijeva u slici 4.5. Označit ćemo ju s O , os simetrije je okomita na smjer kretanja. Primijetimo da je osna simetrija načelno moguća i s obzirom na os jednaku smjeru kretanja, no nju ćemo ovdje zanemariti.

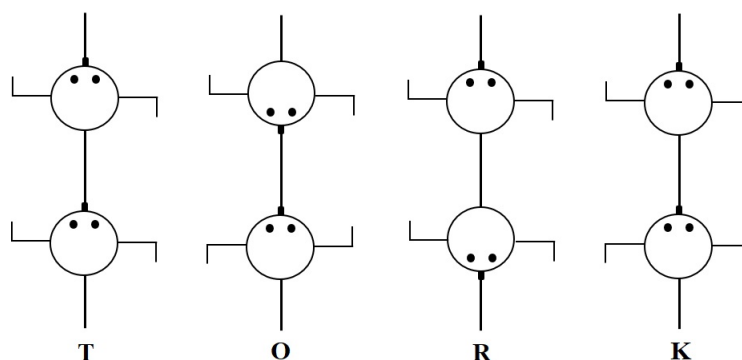
Ako bismo par zaokrenuli za bilo koji kut koji nije višekratnik od 180° , promijenio bi smjer kretanja, pa nam je dovoljna samo rotacijska simetrija R (slika 4.5, drugi crtež zdesna) za pola kruga.

Klizna simetrija se također može ostvariti samo s obzirom na smjer kretanja (slika 4.5 desno). Nju ćemo označiti s K .

Promotrimo sad moguće kompozicije ovih pet simetrija. S obzirom na to da se radi o plesu, komponiranje se svodi na uzastopnu primjenu simetrija, točnije, kompozicija $A \circ B$ znači primjenu simetrije A na poziciju sa simetrijom B . Zanimariti ćemo konkretne metričke odnose i razmatrati samo vrste (tipove) simetrija. Primjerice, kompozicije $T \circ O$ i $O \circ T$ nisu isto preslikavanje, ali obje jesu osne simetrije s obzirom na os okomitu na smjer kretanja, pa ćemo uzeti $T \circ O = O \circ T = O$.

Sve moguće kompozicije naših četiriju simetrija slijede iz već navedenih teorema i sadržane su u tablici 4.1. Primjerice, ako su plesači translirani jedan u odnosu na drugog i jedan od njih se još jednom translira, oni su i dalje u transliranom položaju: $T \circ T = T$. Vidimo da je kompozicija po dviju simetrija iz skupa $\{T, O, R, K\}$ simetrija iz istog skupa.

Također, komponiranje je asocijativna operacija. Nadalje, iz tablice 4.1 vidimo da je T neutralni element za komponiranje unutar našeg skupa. Naposljetku, za svaku simetriju postoji neka koja s njom komponirana daje neutralni element T . Drugim riječima, skup $\{T, O, R, K\}$ s obzirom na kompoziciju je grupa [1], čija „tablica množenja” (Cayleyeva tablica) je upravo tablica 4.1 Vidljivo je i da je ta grupa komutativna, a poznata je kao Kleinova četvorna grupa. Sad postaje jasno zašto smo ignorirali osne simetrije čije osi se podudaraju s pravcem na kojem se kreću plesači: kompozicija takve osne simetrije s T je K , te više T ne bi bio neutralni element, štoviše, takav peteročlani skup ne bi bio grupa jer ne bi imao neutralni element. S druge strane, mogli smo se ograničiti na komponiranje T sa samo jednim od triju preostalih tipova simetrije i dobili smo strukturu grupe.



Slika 4.5: Primjer četiriju simetričnih pozicija na pravcu

	T	O	R	K
T	T	O	R	K
O	O	T	K	R
R	R	K	T	O
K	K	R	O	T

Tablica 4.1: Kompozicije simetrija uzoraka na pravcu

Ukoliko bismo gornji način razmišljanja proširili na ravninu, čak i ako se ograničimo samo na navedena četiri tipa simetrije (u ravnini su kao simetrije moguće i rotacije za kutove različite od 180° , ali ih ignoriramo jer smo u salsi – poglavlje 3.2 – gledali samo pune okrete i poluokrete), stvar je bitno kompliciranija, jer postoji beskonačno mnogo smjerova translacije, osi simetrije odnosno kliznih osi. Ovisno o odabiru koje ćemo simetrije uzimati u obzir, možemo i ne moramo dobiti strukturu grupe [9].

Poglavlje 5

Metodički osvrt na matematiku salse

U salsi smo pronašli primjene tri matematička područja: kombinatoriku, geometriju i algebru. Dio matematike koju smo koristili u radu uči se u srednjoj školi. Nastavnici bi putem salse mogli učenicima približiti neke od školskih nastavnih sadržaja.

U prvom razredu srednje škole uče se izometrije ravnine. Nakon što obrade sve izometrije učenici mogu vježbati naučeno tako da jedan od učenika bude voditelj i stane u određenu poziciju, nastavnik zada izometriju, a pratitelji moraju stati u poziciju simetričnu voditeljevoj ovisno o kojoj se izometriji radi. Također, učenici mogu komponirati (uzastopno izvoditi) simetrije stojeći u liniji zaključivati koje tipove simetrija dobijemo komponiranjem dvaju zadanih tipova. Nakon što završe s tom vježbom, komponiranje mogu proširiti i na ravninu.

U četvrtom razredu srednje škole uči se kombinatorika. Učenici bi mogli sami izračunati broj permutacija ritma *son* i svaku permutaciju pokušati odsvirati rukama ili olovkama. Također, mogu izračunati na koliko načina možemo izabrati 5 mjesta za note od 16 taktova i pokušati odsvirati neke od njih. Za učenike, najzanimljiviji dio bi mogao biti plesanje salse *ruede*. Prije nego s profesorom izračunaju na koliko načina se plesači mogu podijeliti u parove i na koliko načina se te parove može smjestiti u krug, dio učenika može pred razredom pokušati stati u parove i smjestiti se u krug na sve moguće načine i prebrojati ih. Također, nakon što se postave u krug mogu pokušati doći do zaključaka dobivenih u radu o plesanju samo pokretima *da me* i *da me dos* i pokušati dokazati zaključeno plesom.

Ispreplićući kombinatorno i geometrijsko razmišljanje, učenici se mogu zabaviti i pitanjima otkrivanja brojeva stacionarnih pozicija uz određene uvjete te tako otkriti veze između tih dvaju naizgled nepovezanih matematičkih područja. Za ideje za takve radionice, bilo školske bilo popularne, upućujemo na [9].

Bibliografija

- [1] M. Bašić, A. Milojević, S. Ružić, *Algebarske strukture vježbe, prema predlošku i zadacima Martine Balagović i Marcele Hanzer*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/grupe.pdf>.
- [2] F. M. Brueckler, *The importance of number 240 for salsa*, neobjavljeni rukopis.
- [3] K. Conrad, *Isometries of \mathbb{R}^n* , <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/isometryRn.pdf>.
- [4] A. Lempel, J. Ziv, *On the Complexity of Finite Sequences*, IEEE Transactions on Information Theory, VOL. IT-22 (1) 1976, 75–81.
- [5] T. Milanović, *Preslikavanja ravnine i prostora i primjene*, (Osijek, 2010), <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/MIL51.pdf>.
- [6] I. Mišak, *Sukladnost i izometrije*, (Zagreb, veljača, 2018), <https://repositorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A4760/datastream/PDF/view>.
- [7] G. Toussaint, *A Mathematical Analysis of African, Brazilian and Cuban Clave Rhythms*, (2002), <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/publications/clave.pdf>.
- [8] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
- [9] C. von Renesse, *Discovering the Art of Mathematics - Dance*, 2016, <https://www.artofmathematics.org/books/dance>.
- [10] C. von Renesse, V. Ecke, *Mathematics and Salsa dancing*, Journal of Mathematics and the Arts **5** (2011), br. 1, 17–28, <https://doi.org/10.1080/17513472.2010.491781>.

Sažetak

U diplomskom radu opisane su neke veze salse i matematike (kombinatorike, geometrije i algebre). U prvom poglavlju opisali smo šest *clave* ritmova, koji su podloga glazbe na koju se pleše salsa, na nekoliko matematičkih načina te opisali neke matematičke mjere njihove složenosti i sličnosti i moguće permutacije. U drugom poglavlju smo odgovorili na nekoliko kombinatornih pitanja povezanih s plesanjem salse *ruede* (kružna salsa). U trećem poglavlju smo prebrojali koliko ima plesnih pozicija salse u kojima se plesači ne kreću. U zadnjem poglavlju rada opisali smo neke simetrije koje se pojavljuju općenito u plesu, pa tako i u salsi.

Summary

In this thesis we described some connections between salsa dancing and mathematics (combinatorics, geometry and algebra). We mathematically described the six *clave* rhythms, that are the base of music salsa is danced to and described mathematical measures of their complexities and similarities, as well as permutations of rhythms. In the second chapter we answered some combinatorial questions related dancing salsa *rueda* (salsa danced in a circle). The third chapter describes the enumeration of salsa dance positions in which dancers don't move. In the last chapter we described some symmetries found in dancing in general, and thus in salsa too.

Životopis

Rođena sam 1. veljače 1995. godine u Splitu. Nakon završene osnovne škole u Splitu, srednjoškolsko obrazovanje stekla sam u općoj gimnaziji Vladimir Nazor u Splitu. Maturirala sam 2013. godine i iste godine u srpnju upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, smjer nastavnički. Po završetku preddiplomskog studija 2016. godine upisala sam diplomski studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu.