Prolaznost i povratnost slučajnih šetnji na grafovima

Grill, Hrvoje

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Hrvoje Grill

PROLAZNOST I POVRATNOST SLUČAJNIH ŠETNJI NA GRAFOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 04.2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je uvesti pojam i neka strukturalna svojstva slučajnih šetnji na grafovima. Prvo ćemo se formalno prisjetiti nekih osnovnih definicija vezanih za Markovljeve lance. Markovljev lanac je slučajan proces čije ponašanje u nesposrednoj budućnosti uvjetno na sadašnjost i prošlost jednako je ponašanju u neposrednoj budućnosti uvjetno samo na sadašnjost. Također, diskutirati ćemo i određena strukturalna svojstva Markovljevih lanaca te posebno definirati pojmove reverzibilnosti, ireducibilnosti, svojstva prolaznosti i povratnosti. Spomenut ćemo najpoznatije primjere te se posebno usredotočiti na slučajnu šetnju.

U drugom poglavlju definirat ćemo pojam grafa te pojam slučajne šetnje na grafu. Također, uvest ćemo pojam energije te diskutirati struktualna svojstva ovih procesa, opisana u prethodnom poglavlju, ali u terminima karakteristika grafa.

U trećem poglavlju dati ćemo iskaze i dokaze teorema koji pokazuju da se povratnost i prolaznost slučajne šetnje na grafu može gledati preko ”energije” procesa. Uz to, spomenut ćemo fizikalnu interpretaciju tih teorema te prikazati vezu između *Roydenovog kriterija* i postojećih rezultata.

Poglavlje 1

Markovljevi lanci

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove vezane za Markovljeve lance te iskazati neke bitne teoreme. Također, definirat ćemo pojmove povratnosti i prolaznosti te spomenuti neke primjere.

Definicija 1.0.1. *Neka je $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv skup, gdje je $\mathcal{S}$ σ-algebra na S.* Slučajan proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ slučajnih varijabli (tj. slučajnih elemenata) definiranih na nekom zajedničkom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ s vrijednostima u S. Dakle, $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad X_n : \Omega \mapsto S$ je slučajna varijabla.*

Definicija 1.0.2. *Neka je S prebrojiv skup. Slučajan proces $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ s vrijednostima u skupu S je* **Markovljev lanac** *ako vrijedi*

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

$$\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$$

Formulu 1.1 zovemo Markovljevo svojstvo

Definicija 1.0.3. *Matrica $P = \left(p_{ij}\right)_{i,j \in S}$ naziva se stohastička matrica ako je $p_{ij} \geq 0$ $\forall i, j \in S$ te $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ $\forall i \in S$. Ukoliko je S konačan, to je "konačna matrica".*

Definicija 1.0.4. *Neka je $\lambda = (\lambda_i)_{i \in S}$ vjerojatnosna distribucija na S, tj. $\lambda_i \geq 0, \forall i \in S$ te $\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$. Neka je P stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ s prostorom stanja S je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi:*

1. $\mathcal{P}(X_0 = i)) = \lambda_i, \quad \forall i \in S$
2. $\mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$

Slučajan proces iz prethodne definicije nazivat ćemo (λ, P)-*Markovljev lanac*

Sljedeći teorem nam govori da je za distribuciju cijelog slučajnog procesa dovoljno znati vjerojatnosti da se slučajni proces u danim vremenskim trenutcima (njih konačno mnogo) nalazi u danim stanjima.

Teorem 1.0.5. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ (λ, P)-Markovljev lanac. Tada za $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ vrijedi*

$$\mathcal{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ slučajan proces s distribucijom danom formulom 1.2, gdje je λ neka distribucija na S, a P neka stohastička matrica. Tada je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac.

U jako puno primjera u praksi je početna distribucija Markovljevog lanca koncentrirana u jednom stanju $i \in S$, tj. Markovljev lanac g.s. "kreće" iz stanja i. To znaći da je $\mathcal{P}(X_0 = i) = 1$.

Fiksirajmo stanje $i \in S$. Neka je $\delta^i = \left(\delta^i_j\right)_{j\in S}$,

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{ako } i = j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

vektor redak koji na mjestu i ima 1, a na ostalim mjestima 0. Ako je λ početna distribucija Markovljevog lanca X sa svojstvom da je $\lambda_i > 0$, tj. da $\mathcal{P}(X_0 = i) > 0$, tada možemo definirati uvjetnu vjerojatnost

$$\mathcal{P}_i(A) := \mathcal{P}(A \mid X_0 = i) \text{ za neki } A \in \mathcal{F} \tag{1.3}$$

Teorem 1.0.6. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ (λ, P) - Markovljev lanac s prostorom stanja S. Tada je, uvjetno na $X_m = i$, slučajni proces $(X_{m+n})_{n\geq 0}$ $\left(\delta^i, P\right)$-Markovljev lanac koji je nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_m$.*

Teoremi 1.0.5 i 1.0.6 dokazani su na kolegiju Markovljevi lanci. Postoje mnogi poznati primjeri Markovljevih lanaca (nezavisni pokusi, kockarev kraj, ...) ali za ovaj diplomski rad nama je od posebne zanimljivosti sljedeći primjer.

Primjer 1.0.7. *Neka je* $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u* $\mathbb{Z}$ *i distribucijom* $\mathcal{P}(Y = k) = p_k$*, za* $k \in \mathbb{Z}$*, te vrijedi* $p_k \geq 0$*,* $\sum_k p_k = 1$*. Definiramo* slučajnu šetnju *kao* $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$*, pri čemu stavimo* $X_0 = 0$ *te* $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Uočimo da* $X_n - X_{n-1} = Y_n$ *predstavlja "n-ti korak" slučajne šetnje.*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) &= \mathcal{P}(X_n + Y_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\ &= \mathcal{P}(Y_{n+1} = j - i \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\\ &= \mathcal{P}(Y_{n+1} = j - i) = p_{j-i}\end{aligned} \tag{1.4}$$

Prema definiciji 1.0.4 X je Markovljev lanac s matricom prijelaza $P = \left(p_{ij}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$*,* $p_{i,j} = p_{j-i}$*. To je matrica koja na glavnoj dijagonali ima vrijednost* p_0*, na gornjoj dijagonali* p_1*,na donjoj* p_{-1}*, itd. pri čemu* p_1 *predstavlja "1 korak udesno", a* p_{-1} *"1 korak ulijevo".*

Navedimo još jedan tipičan primjer Markovljevog lanca, koji u primjeni često zovemo *niz uspjeha*.

Primjer 1.0.8. *Neka* $Y = (Y_n)_{n=1}^{\infty}$ *predstavlja niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Definiramo X_n *kao broj uzastopnih uspjeha (tj. jedinica) koje se se pojavile do n-tog trenutka. Lako se vidi da tada* $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ *predstavlja Markovljev lanac.*

1. $X_0 = 0$
2. $X_n = i, Y_{n+1} = 1 \rightarrow X_{n+1} = i + 1$
3. $X_n = i, Y_{n+1} = 0 \rightarrow X_{n+1} = 0$

Sljedeći pojmovi koji se spominju i u samom naslovu ovog rada su *povratnost* i *prolaznost*. Da bi njih uveli moramo prvo definirati pojmove koje njima prethode. Uz oznake od prije prvo definirajmo za $B \subset S$ "prvo vrijeme pogađanja skupa B"

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

uz dogovornu oznaku da je $\min\{\emptyset\} = +\infty$

Definicija 1.0.9. *Za stanja* $i, j \in S$ *kažemo da je* j *dostižno iz* i*, u oznaci* $i \rightarrow j$*, ako vrijedi*

$$\mathcal{P}_i\left(T_j < \infty\right) > 0$$

Definicija 1.0.10. *Stanja* $i, j \in S$ *komuniciraju, u oznaci* $i \leftrightarrow j$ *ako vrijedi* $i \rightarrow j$ *i* $j \rightarrow i$*.*

Uočimo da je $\leftrightarrow$ relacija relacija ekvivalencije na $S \times S$ pa takva definira particiju prostora stanja S na klase. Označimo te klase s $C_1, C_2, \ldots$ (imamo konačno ili beskonačno klasa). Naravno, pod particijom pretpostavljamo da su te klase međusobno disjunktne.

Definicija 1.0.11. *Markovljev lanac X je ireducibilan ako se prostor stanja S sastoji od samo jedne klase komuniciranja, tj. za sva stanja $i, j \in S$ vrijedi da $i \longleftrightarrow j$*

Primjer Markovljevog lanca koji je ireducibilan je svaki Markovljev lanac čija matrica prijelaza P ima sve ne-nul elemente. Definirajmo još i pojmove *zatvorenosti* i *aposorbirajućeg stanja.*

Definicija 1.0.12. *Za $C \subset S$ kažemo da je* **zatvoren** *ako $\forall i \in C$ $\mathcal{P}_i\left(T_{C^c} = \infty\right) = 1$, a za stanje $j \in S$ kažemo da je* **apsorbirajuće** *ako je $\{j\}$ zatvoren skup.*

Uvedimo pojam **prvog vremena povratka u stanje i**

$$T_i^{(1)} := \min\{n > 0 : X_n = i\}$$

Definicija 1.0.13. *Stanje $i \in S$ je* **povratno** *ili* **rekuretno** *ako vrijedi*

$$\mathcal{P}_i\left(T_i^{(1)} < \infty\right) = 1$$

tj. sa vjerojatnosti 1 *Markovljev lanac koji kreće iz stanja i ponovno dolazi u stanje i.*

Definicija 1.0.14. *Za neko stanje $i \in S$ kažemo da je* ***prolazno*** *ili* ***tranzijentno****, ako vrijedi:*

$$\mathcal{P}_i\left(T_i^{(1)} = \infty\right) > 0$$

,tj. s pozitivnom vjerojatnosti Markovljev lanac koji kreće iz stanja i više nikad ne dolazi u to isto stanje i.

Propozicija 1.0.15. *Stanje $i \in S$ je* ***povratno*** *ako i samo ako vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$*

Uočimo da iz gornje definicije slijedi kriterij prolaznosti:

Lema 1.0.16. *Stanje $i \in S$ je* ***prolazno*** *ako i samo ako $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$*

Sada prelazimo na iskazivanje nekih uvjeta povratnosti. Da bi to iskazali, uvedimo još i pojam *broj posjeta stanju $i \in S$* kao

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}$$

te sada možemo izračunati *očekivani broj posjeta stanju $i \in S$ uz početno stanje $j \in S$* kao

$$E_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}$$

Teorem 1.0.17. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

1. $i \in S$ *jepovratno*

2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;

3. $E(N_i) = \infty$;

4. $\mathcal{P}_i(N_i = \infty) = 1$

Propozicija 1.0.18. *Neka je* $i \in S$ *povratno stanje, te neka* $i \longleftrightarrow j$. *Tada je* $j \in S$ *povratno stanje.*

Iz propozicije 1.0.18 slijedi da ako je $i \in S$ prolazno, te $i \longleftarrow j$, da je tada i $j \in S$ prolazno. Propozicija nam zapravo kaže da ako je jedno stanje u nekoj klasi komunikacije povratno (odnosno prolazno), tada su sva stanja u toj klasi povratna (odnosno prolazna).

Propozicija 1.0.19. *Svaka povratna klasa je zatvorena.*

Dokaz. Neka je C neka povratna klasa. Pretpostavimo da C nije zatvorena. To po definiciji znači da postoji $i \in C$ takav da vrijedi $\mathcal{P}_i(T_{C^c} < \infty) > 0$. Slijedi da postoje $j \notin C$ i $m \geq 1$ takvi da je

$$\mathcal{P}_i(X_m = j) > 0$$

Nadalje imamo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_m = i \text{ za beskonačno mnogo n}\}) \\
&\quad = \mathcal{P}_i(X_m = j)\mathcal{P}_i(\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo n}\} \mid X_m = j) \qquad (1.5)\\
&\quad = \mathcal{P}_i(X_m = j)\, P_j(\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo n}\}) = 0,
\end{aligned}$$

jer je $P_j(T_i < \infty) = 0$ (u suprotnom bi i i j komunicirali). Budući da je stanje i povratno vrijedi

$$\mathcal{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ za najviše konačno mnogo n}\})$$

$$\leq \mathcal{P}_i(\{X_n = i \text{ za najviše konačno mnogo n}\}) = 0$$

Sada dobivamo da vrijedi

$$\mathcal{P}_i(X_m = j) = 0$$

a to nas dovodi do kontradikcije. □

Iz dokaza propozicije 1.0.19 slijedi da ako je $i \in S$ povratno stanje te ako vrijedi $i \longrightarrow j$, tada vrijedi $j \longrightarrow i$.

Navedimo još jednu propoziciju te teorem koji su također korisni u proučavanju Markovljevih lanaca

Propozicija 1.0.20. *Pretpostavimo da je S konačan prostor stanja. Tada S sadrži barem jedno povratno stanje.*

Dokaz. Pretpostavimo da su sva stanja prolazna. Tada za $j \in S$ i za sve $i \in S$ vrijedi $E_j N_i < \infty$. Zbog pretpostavke da je S konačan slijedi

$$E_j \sum_{i \in S} N_i = \sum_{i \in S} E_j N_i < \infty$$

S druge strane je očigledno da je vrijedi $\sum_{i \in S} N_i = +\infty$ pa vrijedi da je $E_j \sum_{i \in S} N_i = +\infty$ što nas je dovelo do kontradikcije. Zaključak je da je S sadrži barem jedno povratno stanje. □

Teorem 1.0.21. *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan i povratan. Tada za sve $i \in S$ vrijedi $\mathcal{P}(T_i < \infty) = 1$*

Dokaz. Budući da je $\mathcal{P}(T_i < \infty) = \sum_{j \in S} \mathcal{P}(X_0 = j) \mathcal{P}_j(T_i < \infty)$, dovoljno je pokazati da vrijedi $\mathcal{P}_j(T_i < \infty) = 1$ za sve $i, j \in S$. Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{P}_i(X_n = i \text{ za beskonačno mnogo n}) = \mathcal{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1) \\ &= \sum_{k \in S} \mathcal{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1 \mid X_m = k) \mathcal{P}_i(X_m = k) \\ &= \sum_{k \in S} \mathcal{P}_k(T_i < \infty)\, p_{ik}^{(m)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

gdje zadnji redak slijedi iz Markovljevog svojstva. Kada bi bilo $\mathcal{P}_j(T_i < \infty) < 1$, imali bismo zbog $p_{ij}^{(m)} > 0$,

$$\sum_{k \in S} \mathcal{P}_k(T_i < \infty)\, p_{ik}^{(m)} = 1$$

Došli smo do kontradikcije. Dakle, zaključujemo da vrijedi $\mathcal{P}_j(T_i < \infty) = 1$ □

Ovo poglavlje završit ćemo primjerom jednostavne slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$. Od koristi će nam biti Stirlingova formula:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} = 1 \tag{1.7}$$

Za nizove $(a_n : n \geq 1)$ i $(b_n : n \geq 1)$ uvodimo oznaku $a_n \sim b_n$ ako vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} a_n / b_n = 1 \tag{1.8}$$

Kada smo uveli ovakvu oznaku, Stirlingovu formulu sada možemo pisati

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$$

Primjer 1.0.22. *Neka je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom* $\mathcal{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathcal{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. *Jednostavna slučajna šetnja* $X = (X_n : n \geq 0)$ *definirana je s* $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. *Izračunajmo m-koračne prijalazne vjerojatnosti definirane kao* $p_{00}^{(m)}$. *Ukoliko je* $m = 2n + 1$ *neparan, tada je* $p_{00}^{(m)} = 0$ *(u početno stanje šetnja se može vratiti samo u parnom broju koraka). Za* $m = 2n$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= \frac{(2n!)}{(n!)^2}(pq)^n \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}e^{-2n}\,(2n)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n\right)^2}\,(pq)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jednakost 1.9 povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za sve* $n \geq n_0$ *vrijedi*

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n \leq p_{00}^{(2n)} \leq 2\tfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n.$$

Pretpostavimo da $p = q = 1/2$, *odnosno da je X jednostavna simetrična slučajna šetnja. Tada vidimo da vrijedi* $4pq = 1$, *pa je*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty \tag{1.10}$$

Iz prethodnih teorema sada slijedi da je X povratan. Ako pak imamo slučaj da $p \neq 1$, *tada vrijedi da je* $4pq < 1$, *pa u tom slučaju imamo*

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n < +\infty \tag{1.11}$$

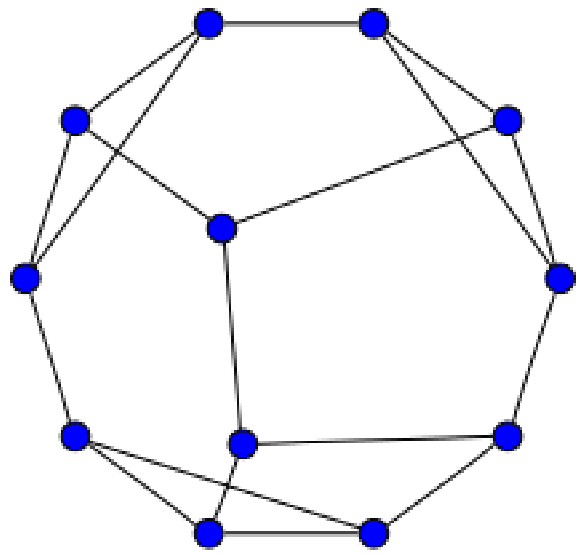
Pomoću prethodne napomene sada zaključujemo da je X prolazan.

Poglavlje 2

Slučajna šetnja na grafu

U ovom poglavlju, uvodimo pojam grafa te pojam slučajne šetnje na grafu. Također, diskutirati ćemo određena strukturalna svojstva iste.

2.1 Graf



Definicija 2.1.1. ***Graf*** *je uređeni par $G = (V, E)$, gdje V predstavlja skup* ***vrhova****, a E je simetrični podskupod $V \times V$ koji se naziva skup* ***bridova****.*

Riječ simetričan se odnosi na to da je $(x, y) \in E$ ako i samo ako je $(y, x) \in E$. U tom slučaju govorimo o *neusmjerenom* grafu tj. podrazumijevamo da su bridovi *neorijentirani*. Ako je $(x, y) \in E$ tada kažemo da su x i y *susjedni* vrhovi.

Definicija 2.1.2. ***Stupanj*** *vrha označava broj njegovih susjeda. Ako je taj broj konačan za svaki vrh, kažemo da je graf* **lokalno konačan**.

Definicija 2.1.3. ***Put*** *na grafu je niz vrhova u kojem između dva susjedna vrha postoji brid. Graf je* **povezan** *ako postoji put od bilo kojeg vrha da svakog ostalog vrha u tom grafu.*

Ako je u grafu svakom bridu pridružena neka vrijednost, tada taj graf nazivamo **težinski graf** (mreža). Tu vrijednost nazivamo *provodljivost* brida.
Ponekad radimo s objektima koji su nešto složeniji od samih grafova, tj. *multigrafovima*.

Definicija 2.1.4. ***Multigraf*** *je par skupova V i E, zajedno sa parom preslikavanja $E \to V$ koji označujemo s $e \to e^-$ i $e \to e^+$.*

Slike od e nazivamo krajnje točke, pri čemu prvi nazivamo *rep* a drugi *glava*. Ako imamo slučaj da vrijedi $e^+ = e^- = x$, tada kažemo da je *e petlja* na x.

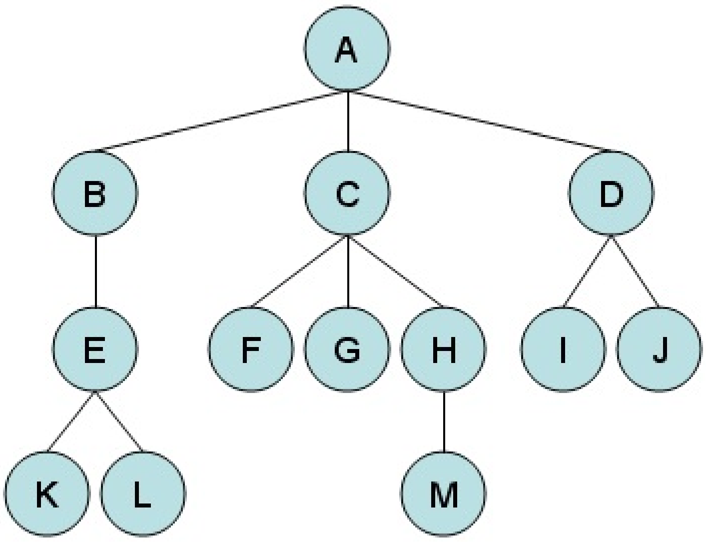
Definicija 2.1.5. *Kažemo da su bridovi* **paralelni** *ili* **višestruki** *ako imaju isti par krajnjih točaka.*

Pretpostavimo da je zadan graf $G = (V, E)$, težine $c(\bullet)$ te neka je K podskup vrhova od V.

Definicija 2.1.6. ***Inducirani podgraf*** *$G \upharpoonright K$ je podgraf sa skupom vrhova K, skupom bridova $(K \times K) \cap E$ te težinama koje su jednake $c \upharpoonright (K \times K) \cap E$*

Definicija 2.1.7. ***Stablo*** *$G = (V, E)$ je povezan graf s n čvorova i $n - 1$ bridova. U stablu nema ciklusa ni petlji. U stablu postoji poseban čvor koji nazivamo* korijen stabla.

Specijalni slučaj, a također i jedan od najčešćih je *binarno stablo*, tj. stablo kod kojeg svaki vrh ima najviše 2 podstabla.



2.2 Slučajna šetnja

Pretpostavimo da nam je zadan konačan povezan graf G sa zadanim provodljivostima bridova, tada uzimamo u obzir da slučajna šetnja može ići samo od vrha do njemu susjednog vrha i čije prijelazne vjerojatnosti p_{ij} su proporcionalne u odnosu na provodljivosti danih bridova. Ako je x vrh sa susjednim vrhovima $y_1, \ldots, y_d$ i dane su nam prodvodljivosti bridova na način da je provodljivost brida (x, y_i) dana s c_i, tada uz oznaku $c := \sum_{i=1}^{d} c_i$ vrijedi

$$p_{x,y_j} = \frac{c_j}{c} \tag{2.1}$$

2.3 Reverzibilnost

Ono što će nas posebno zanimati je to da promatramo *povratnost i prolaznost ireducibilnog Markovljevog lanca*.
Ako naš lanac kreće iz x, zanima nas da li je vjerojatnost da on ikad posjeti stanje a 1 ili nije.
Zapravo, zanima nas jedino slučaj *reverzibilnog Markovljevog lanca*.

Definicija 2.3.1. *Markovljev lanac je reverzibilan ako postoji pozitivna funkcija π, tj. preslikavanje $x \mapsto \pi(x)$ je pozitivno, takvo da je prijelazne vjerojatnosti lanca zadovoljavaju*

$$\pi(x)\, p_{xy} = \pi(y)\, p_{yx} \text{ za sve parove } x, y.$$

U ovom slučaju definiramo graf G uzimajući stanja za vrhove te uzimajući dva vrha x i y za brid u slučaju da je $p_{xy} > 0$. Pridružimo bridovima težine na sljedeći način:

$$c(x, y) := \pi(x)\, p_{xy} \tag{2.2}$$

Uočimo da uvjet revezribilnosti koji smo definirati netom prije osigurava da su težine bridova jednake bez obzira na to gledamo li brid (x, y) ili brid (y, x). Postavivši graf na ovaj način, Markovljev lanac može biti opisan kao slučajna šetnja na G tako da kažemo: kada je šetnja u vrhu x, na slučajan način biramo sljedeći vrh od susjednih vrhova koji imaju prijelaznu vjerojatnost proporcionalnu težini pripadajućeg brida. Obratno, svaki povezan graf s težinskim bridovima takvim da zbroj težina konačan definira slučajnu šetnju s prijelaznim vjerojatnostima proporcionalnim težinama bridova. Kako je slučajna šetnja primjer ireducibilnog reverzibilnog Markovljevog lanca, definiramo $\pi(x)$ kao sumu svih težina incidentnih s x.

Primjer 2.3.2 (Kockarev kraj). *Jedan od najpoznatijih i možda najčešće spominjanih primjera u literaturi je kockarev kraj. Ideja je da kockar želi zaraditi, tj. posjedovati iznos od n novčanica, ali ima za početak samo iznos od k* $(1 \leq k \leq n-1)$. *On sudjeluje u igrama koje mu daju šansu p da će dobiti iznos* 1 *te $q := 1 - p$ da će izgubiti iznos od* 1 *svaki puta kada igra. Kada dođe do iznosa n ili* 0 *on zaustavlja igra, tj prestaje igrati.*

Navedimo sada neka svojstva koja će nam koristiti u proučavanju reverzibilnih Markovljevih lanaca.

(a) Ako je Markovljev lanac reverzibilan, tada $\forall x_1, \ldots, x_n$ vrijedi

$$\pi(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} p_{x_i x_{i+1}} = \pi(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} p_{x_{n+1-i} x_{n-i}}$$

Specijalno, ako je $x_1 = x_n$ tada su produkti s lijeve i desne strane jednaki. Ta jednakost također karakterizira reverzibilnost.

(b) Neka je X_n slučajna šetnja na G i neka su x i y dva vrha iz G. Neka je W put od x do y i W' njegov inverzni put, tj. put od y do x u G. Tada vrijedi:

$$\mathcal{P}_x\left[\left\langle X_n; n \leq \tau_y \right\rangle = W \mid \tau_y < \tau_x^+\right] = \mathcal{P}_y\left[\langle X_n; n \leq \tau_x \rangle = W' \mid \tau_x < \tau_y^+\right],$$

gdje τ_w predstavlja prvo vrijeme kada slučajna šetnja posjeti w, a τ_w^+ predstavlja prvo vrijeme nakon početnog vremena da slučajna šetnja posjeti w. Drugim riječima, putevi između 2 stanja koji se ne vraćaju u početno stanje te završavaju kada prvi put posjete krajnju točku imaju istu distribuciju u oba smjera ovisno o vremenu.

(c) Označimo s G slučajnu šetnju koja je ili prolazna ili se zaustavlja kada prvi put posjeti neki od vrhova iz skupa Z. Neka je $G(x,y)$ očekivani broj posjeta slučajne šetnje koja kreće iz x vrhu y. Ako je šetnja završila u nekom od vrhova iz skupa Z, brojimo samo one posjete koji su bili striktno prije dolaska u Z. Tada vrijedi da za svaki par vrhova x, y vrijedi

$$\pi(x)\, G(x,y) = \pi(y)\, G(y,x)$$

2.4 Slučajne šetnje na konačnim mrežama

Pretpostavimo da je G konačna povezana mreža, x vrh u G te A i Z međusobno disjunktni podskupovi od G. Označimo s τ_A prvo vrijeme posjeta skupu A. Uobičajno je u primjeni uzimati slučaj kada su težine svih bridova jednake te ćemo takav slučaj zvati *jednostavna slučajna šetnja*. Definirajmo funkciju

$$F(x) := \mathbf{P}_x[\tau_A < \tau_Z]$$

Uočimo da $\restriction$ označava restrikciju funkcije na skup. Stoga, $F \restriction A = 1$ te $F \restriction Z = 0$, dok za $x \notin A \cup Z$ vrijedi

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_y \mathbf{P}_x[\text{prvi korak je prema y}]\mathbf{P}_x[\tau_A < \tau_Z \mid \text{ prvi korak je prema y }] \\ &= \sum_{x\sim y} p_{xy} F(y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{x\sim y} c(x,y)\, F(y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje $x \sim y$ označava da su x i y susjedni u G. U slučaju koji nas najviše zanima, tj. slučajnoj šetnji, jedankost postaje

$$F(x) = \tfrac{1}{\deg x} \textstyle\sum_{x\sim y} F(y),$$

gdje $degx$ označava stupanj od x tj. "broj susjeda" od x.

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je funkcija* ***harmonička*** *u x ako vrijedi*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{x\sim y} c(x,y)\, f(y) \tag{2.4}$$

Kada govorimo o električnim mrežama, zapravo govorimo o težinskim grafovima. Recipročne vrijednosti od provodljivosti nazivamo **otporima**. U praksi, spojimo baterije između A i Z pa je **napon** u svakom vrhu u A jednak 1, dok je u vrhovima iz Z jednak 0. Ponekad napone zovemo **potencijali**. **Naponi** v se uspostavljaju u svakom vrhu te **struja** i prolazi kroz bridove. Ove funkcije su definirane implicitno te jedinstveno određeni na konačnim mrežama pomoću 2 "zakona"

Ohmov zakon: Ako je $x \sim y$, tada strujni tok od x do y zadovoljava

$$v(x) - v(y) = i(x, y)\, r(x, y)$$

Kirchhoffov zakon o čvorovima : Zbroj svih strujnih tokova koji izlaze iz zadanog vrha je 0, pod uvjetom da taj vrh nije povezan s baterijom.

Fizički gledano, *Ohmov zakon*, koji se često navodi izrazom $\mathbf{v} = \mathbf{ir}$, je zapravo tvrdnja o linearnosti razlika napona. Primjetimo također da struja teče u smjeru napona koji su padajućed iznosa

$$i(x, y) > 0 \leftrightarrow v(x) > v(y)$$

Kirchhoffov zakon o čvorovima izražava činjenicu da se naboj ne nakuplja u čvorovima. Matematički gledano, *Ohmov zakon* će nam poslužiti za definiciju struje gledane preko napona. Specijalno,

$$i(x, y) = -i(y, x)$$

Kirchhoffov zakon predstavlja ograničenje na funkciju v. Doista, on određuje v na jedinstven način : strujni tok ulazi u G u A te izlazi u Z. Ova dva zakona možemo kombinirati na skupu $V \setminus (A \cup \mathbb{Z})$ da bi dobili da za $\forall x \in A \cup Z$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x \sim y} i(x, y) \\ &= \sum_{x \sim y} \left[(x) - v(y)\right] c(x, y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ili

$$v(x) = \frac{1}{\pi(x)} \textstyle\sum_{x \sim y} c(x, y)\, v(y)$$

Naredna propozicija daje nam glavnu vezu između slučajnih šetnji i električnih mreža.

Propozicija 2.4.2. *Za svaki vrh x, napon od x jednak je vjerojatnosti da pripadajuća slučajna šetnja posjeti a_1 prije nego što posjeti a_2 krenuvši iz x.*

U slučaju stabla primjenjuje se sljedeće: obzirom na N, pronađemo sve vrhove koji pripadaju toj razini (T_N) i identificiramo ih prema jednom vrhu, tj. prema a_1. Definiramo a_0 kao korijen. Tada prema prethodnoj propoziciji, napon vrha x jednak je vjerojatnosti da će slučajna šetnja posjetiti razinu N prije nego što posjeti korijen počevši iz x. Kada pustimo da $N \to \infty$, naponi svih vrhova po limesu idu u 0 ako i samo ako pripadajuće vjerojatnosti idu u 0, što je isto kao i da kažemo da na beskonačnim stablima, vjerojatnost da ćemo posjetiti korijen stabla krenuvši iz bilo koje vrha je jednaka 1, tj. da je naša slučajna šetnja povratna. Budući da nema "trenutne struje" na bridovima čiji vrhovi imaju isti napon, zaključujemo da

nema struje ako i samo ako je slučajna šetnja povratna

Uočimo da je $v(\bullet)$ je harmonična na $V\backslash(A \cup Z)$. Iz toga što je $v \restriction A \equiv 1$ i $v \restriction Z \equiv 0$ slijedi da ako je G konačan, da nam tada vrijedi da je $v = F$. Ako zbrojimo napone na bridovima ciklusa, dobivamo 0. Stoga, po *Ohmovom zakonu*, utvrđujemo te odmah definiramo

Kirchhoffov zakon o ciklusu:Ako

$$x_1 \sim x_2 \cdots \sim \ x_n \sim \ x_1 \tag{2.6}$$

predstavlja ciklus, tada

$$\sum_{i=1}^{n} i\left(x_i, x_{i+1}\right) r\left(x_i, x_{i+1}\right) = 0 \tag{2.7}$$

2.5 Energija

Sada dolazimo do jednog od ključnih pojmova vezanih za ovaj diplomski rad, tj. do pojma *energije*. Neka je $G = (V, E)$ konačan graf sa skupom vrhova V te skupom bridova E, gdje s e^- , $e^+ \in E$ označavamo početak i kraj brida ("glavu i rep") $e \in E$. Kažemo da brid ima *orijentaciju* i to orijentaciju od glave do repa. Također uvedimo suprotnu orijentaciju oznakom $-e$. Od sada nadalje svaki brid se pojavljuje s obje orijentacije. Također *konačnost* podrazumijeva konačnost skupova V i E.
Definirajmo $l^2(V)$ standardno realan Hilbertov prostor funkcija na V s definiranim *skalarnim* produktom

$$(f, g) := \sum_{x \in V} f(x)\, g(x) \tag{2.8}$$

Definirajmo još jedan prostor, $l^2(E)$, kao prostor *antisimetričnih* funkcija θ na E, tj. funkcija koje zadovoljavaju $\theta(-e) = -\theta(e)$ za svaki $e \in E$ i na njemu definirajmo produkt

$$(\theta, \theta') := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \theta(e)\, \theta'(e) = \sum_{e \in E_{\frac{1}{2}}} \theta(e)\, \theta'(e) \tag{2.9}$$

gdje $E_{\frac{1}{2}} \subset E$ predstavlja skup bridova koji sadrži točno jedan od svakog para e, $-e$. Zatim, definiramo *operator* $d : l^2(V) \to l^2(E)$ sa

$$(df)(e) := f\left(e^-\right) - f\left(e^+\right) \tag{2.10}$$

Ovaj operator je očito linearan. Nasuprot tome, obzirom na antisimetričnu funkciju , definiramo *granični operator* $d^* : l^2(E) \to l^2(V)$ sa

$$(d^*\theta)(x) := \sum_{e^-=x} \theta(e) \tag{2.11}$$

Ovaj operator je kao i pretkodni također linearan. U definiciji "graničnog operatora" koristimo * iz razloga jer su dva spomenuta operatora *adjungirana* jedan u odnosu na drugi

$$(\theta, df) = (d^*\theta, f) \quad \forall f \in l^2(V), \forall \theta \in l^2(E) \tag{2.12}$$

Druga je upotreba u kompaktnim formama mrežnih zakona. Neka je i struja.

Ohmov zakon

$$dv = ir \tag{2.13}$$

tj,

$$dv(e) = i(e)\, r(e) \quad \forall e \in E \tag{2.14}$$

Kirchhoffov zakon

$$d^*(i)(x) = 0 \text{ ako niti jedna baterija nije spojena na } x \tag{2.15}$$

Primjer 2.5.1. *Zamislimo da imamo mrežu cijevi kroz koju teče voda. Količina vode koja se nalazi u jednom od vrhova a je $d^*\theta(a)$. Ako je θ takav da je $d^*\theta = 0$ izvan A i Z, na skupu A nenegativna, dok je na skupu Z nepozitvna, tada takav θ zovemo tok od A do Z. Tada je ukupna količina koja protječe kroz mrežu jednaka $\sum_{a\in A} d^*\theta(a)$. Uvedimo pojam* ***snage*** *toka θ*

$$Snaga(\theta) = \sum_{a\in A} d^*\theta(a) \tag{2.16}$$

U slučaju da je tok θ takav da mu je Snaga(θ) = 1, tada taj tok nazivamo ***jedinični tok***

Lema 2.5.2. *Neka je G konačan graf te neka su A i Z međusobno disjunktni podskupovi. Ako je θ tok od A do Z, tada imamo*

$$\sum_{a\in A} d^*\theta(a) = -\sum_{z\in Z} d^*\theta(z) \tag{2.17}$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{x\in A} d^*\theta(x) + \sum_{x\in Z} d^*\theta(x) &= \sum_{x\in A\cup Z} d^*\theta(x)\\ &= (d^*\theta, 1)\\ &= (\theta, d1)\\ &= (\theta, 0)\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.18}$$

gdje je

$$d^*\theta(x) = 0 \quad x \notin A \cup Z \tag{2.19}$$

Tada slijedi da je

$$\textstyle\sum_{a\in A} d^*\theta(a) = -\sum_{z\in Z} d^*\theta(z)$$

što smo i htjeli pokazati □

Lema 2.5.3. *Neka je G konačan graf te neka su A i Z međusobno disjunktni podskupovi. Neka je θ tok od A do Z. Ako su uz to $f \restriction A$ te $f \restriction Z$ konstante jednake α i ζ, tada vrijedi*

$$(\theta, df) = Snaga(\theta)(\alpha - \zeta) \tag{2.20}$$

Dokaz. Primjenom leme 2.5.2 i definicije *Snage* dobivamo

$$\begin{aligned}(\theta, df) &= (d^*\theta, f)\\ &= \sum_{a\in A} d^*\theta(a)\,\alpha + \sum_{z\in Z} d^*\theta(z)\,\zeta\\ &= \sum_{a\in A} d^*\theta(a)\,\alpha - \sum_{a\in A} d^*\theta(a)\,\zeta\\ &= \sum_{a\in A} d^*\theta(a)\,(\alpha - \zeta)\\ &= \text{Snaga}(\theta)(\alpha - \zeta)\end{aligned} \tag{2.21}$$

□

Kada struja i teče niz otpornik otpornosti r te razlike napona v, energija je raspoređena po stopi $P = iv = i^2 r = i^2/c = v^2 c = v^2/r$. Zanima nas kolika je ukupna snaga (tj. energija po jedinici vremena) rasprostranjena. Uvedimo oznaku

$$(f, g)_h := (fh, g) = (f, gh) \tag{2.22}$$

$$\|f\|_h := \sqrt{(f, f)_h} \tag{2.23}$$

Definicija 2.5.4. *Za antisimetričnu funkciju θ, definirajmo* ***energiju*** *kao*

$$\mathcal{E}(\theta) = \|\theta\|_r^2, \tag{2.24}$$

gdje r označava otpore

Vidimo da vrijedi $\mathcal{E}(i) = (i, i)_r = (i, dv)$.

2.6 Povratnost i prolaznost

Ako je $G = (V, E)$ prebrojiva mreža, definirajmo prostor

$$l^2 := \left\{ f : V \to \mathbb{R}; \sum_{x \in V} f(x)^2 < \infty \right\} \tag{2.25}$$

s definiranim skalarnim produktom $(f, g) := \sum_{x \in V} f(x)g(x)$. Također definirajmo **Hilbertov prostor**

$$l_-^2(E, r) := \left\{ \theta : E \to \mathbb{R};\ \forall e\ \theta(-e) = -\theta(e) \text{ i } \sum_{e \in E} \theta^2(e) r(e) < \infty \right\} \tag{2.26}$$

s pripadajućim skalarnim produktim

$$(\theta, \theta')_r := \sum_{e \in E_{1/2}} \theta(e)\theta'(e) r(e) \tag{2.27}$$

te označimo

$$\mathcal{E}(\theta) := (\theta, \theta')_r$$

Definirajmo zatim $df(e) := f(e^-) - f(e^+)$ kao i prije. Također, ako vrijedi da je $\sum_{e^- = x} |\theta(e)| < \infty$, tada definiramo $(d^*\theta)(x) := \sum_{e^- = x} \theta(e)$. Ako je V konačan i $\sum_e |\theta(e)| < \infty$ tada vrijedi da je

$$(\theta, df) = (d^*\theta, f) \quad \forall f \tag{2.28}$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost nam povlači sljedeće:

$$\begin{aligned}\forall x \in V \quad |d^*\theta(x)| &\leq \sum_{e^-=x} |\theta(e)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{e^-=x} \theta(e)^2/c(e) \sum_{e^-=x} c(e)} \\ &\leq \sqrt{\mathcal{E}(\theta)\pi(x)}\end{aligned} \tag{2.29}$$

Uočimo da ako je $\mathcal{E}(\theta) < \infty$, da je tada $d^*\theta$ dobro definirano. Za antisimetričnu funkciju θ na E reći ćemo da je **jedinični tok** od $a \in V$ do ∞ ako vrijedi

$$\forall x \in V \quad \textstyle\sum_{e^-=x} |\theta(e)| < \infty$$

te

$$(d^*\theta)(x) = 1_a(x)$$

Uvedimo još neke pojmove koji su nam potrebni u zadnjem poglavlju.

Definicija 2.6.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran obzirom na* $\mathbb{F}$*, te da vrijedi da je* $E\|X_n\| < \infty$ *za sve* $n \geq 0$*.* X *se zove* martingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathcal{P})$*-martingal), ako vrijedi*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ g.s.}, \quad \text{za sve } n \geq 0 \tag{2.30}$$

Teorem 2.6.2 (Fatou)**.** *Neka su* $X_n, n \geq 0$ *integrabilne i g.s. nenegativne slučajne varijable takve da je* $\liminf_{n\to\infty} X_n$ *integrabilna slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] \tag{2.31}$$

Teorem 2.6.3 (O konvergenciji martingala u $\mathcal{L}^p$)**.** *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *martingal takav da za* $p > 1$ *vrijedi*

$$\sup_n E[|X_n|^p] < \infty \tag{2.32}$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ *takva da je* $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ *g.s. i u* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*.*

Poglavlje 3

Kriterij prolaznosti reverzibilnog Markovljevog lanca

U ovom poglavlju dati ćemo jednostavan kriterij za prolaznost reverzibilnog Markovljevog lanca, što je upravo i tema ovog diplomskog rada. Roydenov kriterij, koji ćemo prvo spomenuti, daje nam nužne i dovoljne uvjete za prolaznost i to na način da ćemo koristiti tok i iz prethodnog poglavlja te preko postojanja njega dati te uvjete . Nakon toga ćemo dati dovoljne uvjete povratnosti Markovljevog lanca (Nash-Williams kriterij). Uz to, dajemo nekoliko primjera u kojima se dotični teoremi primjenjuju. Za kraj, prikazujemo teorem koji uz neke dodatne pretpostavke na lanac X daje dovoljne uvjete za prolaznost.

3.1 Nužan i dovoljan uvjet za prolaznost reverzibilnog Markovljevog lanca

U ovom potpoglavlju ćemo iskazati i dokazati Roydenov kriterij. Označimo sa $\left(S, X_n, p_{ij}\right)$ Markovljev lanac X s prostorom stanja S i prijelaznim vjerojatnostima $p_{xy}(x, y \in S)$. Sa $i(x, y)$ označit ćemo tok od x do y kao i u prethodnom poglavlju. Takoder, sa $\mathcal{P}^x$ te E^x označit ćemo vjerojatnost i očekivanje od X_0 uz uvjet da je $x \in S$. Ponovimo još jednom, Markovljev lanac (S, X, p) je reverzibilan ako postoje strogo pozitivne težine $\pi(x)(x \in X)$ takve da vrijedi

$$\pi(x)p_{xy} = \pi(y)p_{yx}$$

gdje ćemo kao i prije koristiti oznaku $c(x, y) := \pi(x)p_{xy}$. Primjetimo da je $p_{xy} = c(x, y)/\sum_k c(x, k)$ i da vrijedi $\pi(x) = \sum_y c(x, y)$. Od ovog trenutka pa do kraja rada, mi pretpostavljamo da je naš Markovljev lanac reverzibilan.

Teorem 3.1.1 (Roydenov kriterij povratnosti)**.** $\big(S, X, p_{xy}, \pi(x)\big)$ *je prolazan Markovljev lanac ako i samo ako postoje realni brojevi* $i(x,y)(x,y \in S)$ *tako da vrijedi*

(i) $i(x,y) = -i(y,x)$

(ii) postoji $x_0 \in S$ *takav da* $\sum_y i(x_0 y) \neq 0$ *i* $\sum_y i(x,y) = 0 \quad \forall x \neq x_0$

(iii) $\sum_{x,y} i(x,y)^2/c(x,y) < \infty$*, uz konvenciju da je* $0/0 = 0$ *i da je* $x/0 = \infty\ \forall x \neq 0$

Dokaz. Prvo dokazujemo da postojanje toka s konačnom energijom povlači da je X prolazan. Prvi korak je elementarni argument Hilbertovog prostora. Neka je H Hilbertov prostor svih nizova $(v_{xy})_{x,y\in S}$ koje zadovoljavaju uvjet (iii) iz teorema te definirajmo skalarni produkt na H s

$$(v,w) = \sum_x \sum_y \frac{v_{xy} w_{xy}}{c(x,y)} \tag{3.1}$$

Uvjet (ii) možemo izreći i ovako : $\forall x \in S$ definirajmo $l^x \in H$

$$(l^x_{yz}) = \delta_{xy} c(x,z),$$

gdje je $\delta_{xy} = 1$ u slučaju $x = y$, a 0 inače. Jednostavnim računom dobije se da $(l^x, l^x) = \pi(x)$ te da zadovoljava našu tvrdnju da je $l^x \in H$. Vektor $i \in H$ zadovoljava svojstvo (ii) ako i samo ako

$$(l^{x_0}, i) \neq 0, \quad (l^x, i) = 0 \quad \forall x \neq x_0.$$

Iz tvrdnje teorema tada slijedi da postoji vektor $i \in H$ takav da je $(l^{x_0}, i) = 1$, $(l^x, i) = 0$ $\forall x \in S$ takav da je $x \neq x_0$. Također, slijedi da je $i(x,y) = -i(y,x)\ \forall x,y \in S$. Definirajmo E kao afin potprostor od H koji zadovoljava ta tri svojstva. Neka je w jedinstveni vektor u skupu E koji je minimum od (w,w). Iz standardnog argumenta Hilbertovog prostora slijedi da w postoji te da za njega vrijedi svojstvo

$$(w, w - e) = 0 \quad \forall e \in E \tag{3.2}$$

Ta činjenica nam "dopušta" da konstruiramo funkciju W na S takvu da zadovoljava

$$c(x,y)(W(y) - W(x)) = w_{xy}$$

Konstruirali smo $W(x)$-ove. Neka $x_0, x_1, ..., x_n = x$ predstavlja put u S takav da je $p_{x_k x_{k+1}} > 0$ $\forall k < n$. Definirajmo $W(x)$ na sljedeći način

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_{x_k x_{k+1}}}{c(x_k, x_{k+1})}$$

Kako bi pokazali da je $W(x)$ dobro definiram te neovisan o izboru puta koristimo činjenicu da vrijedi 3.2 . Neka $y_0, y_1, ..., y_n = y$ predstavlja vrhove ireducibilnog lanca takvog da vrijedi $p_{y_k y_{k+1}} \neq 0$ $\forall k < n$ i $y_k \neq y_m$ ako su $k, m < n$. Dovoljno je dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_{y_k y_{k+1}}}{c(y_k, y_{k+1})} = 0$$

Definirajmo zatim $(f(x,y))$ s $f(y_k y_{k+1}) = -f(y_{k+1} y_k) = 1$ $\forall k < n$ a inače $f = 0$. Računom se pokaže da vrijedi

$$(f,w) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_{y_k y_{k+1}}}{c(y_k, y_{k+1})} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-w_{y_{k+1} y_k}}{c(y_k, y_{k+1})}$$

Kako znamo da je $w_{xy} = -w_{yx}$ i $c(x,y) = c(y,x)$ slijedi

$$(f,w) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_{y_k y_{k+1}}}{c(y_k, y_{k+1})}$$

S druge strane, $(f, l^x) = 0$ $\forall x \in S$ pa slijedi da je $w + f \in E$. Stoga imamo $(w, f) = 0$.
Sada smo došli na pola puta dokaza. Konstruirali smo funkciju W_x na S sa sljedećim svojstvima

(i) $W(x_0) = 0$

(ii) W nije identički jednaka 0 (zato što je $(w, l^{x_0}) = 1$,)

(iii) $W(x) = \sum_{y \in S} p_{xy} W_y$ $\forall x \neq x_0$

(iv) $\sum_{x,y \in S} c(x,y)(W(x) - W(y))^2 = \sum_{x,y \in S} \pi p_{xy} (W(x) - W(y))^2 < \infty$

Sada ćemo pokazati da je postojanje takvog W u kontradikciji s pretpostavkom da je X povratan. Pretpostavimo da je X povratan. Označimo s T prvo vrijeme kada X pogodi x_0. Tada je $W(X_{k \wedge T})$ $\mathcal{P}^l$ - martingal te gotovo sigurno teži k 0 kako $k \to \infty$. Mi ćemo dokazati da

$$\sup_k E^x((W(X_{k \wedge T}) - W(X_0))^2) < \infty$$

pa slijedi da je $W(X_{k\wedge T}) \equiv 0$. Iz ovoga nam slijedi da je $W(x) = 0 \; \forall x$ što nas dovodi do kontradikcije. Sljedeći korak nam je da dobijemo srednje kvadratnu procjenu. Iz svojstva martingala imamo

$$\begin{aligned} E^x\left([W(X_{k\wedge T}) - W(X_0)]^2\right) &= E^x\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left[W(X_{(j+1)\wedge T}) - W(X_{j\wedge T})\right]^2\right) \\ &\leq E^x\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[W(X_{(j+1)\wedge T}) - W(X_{j\wedge T})\right]^2\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neka nam $\sum_k$ označava σ-polje koje je generirano s s $(W(X_{j\wedge T}))_{j\leq k}$. Tada se zadnji izraz može napisati i ovako

$$E^x\left(\sum_0^\infty E\left(\left[W\left(X_{(j+1)\wedge T}\right) - W\left(X_{j\wedge T}\right)\right]^2\right) \mid \sum_j\right) = \sum_{n\in S} g(x,n) \sum_{m\in S} p_{nm}\left(W(m) - W(n)\right)^2,$$

gdje $g(x,n)$ označava očekivani broj posjeta X-a stanju n prije nego posjeti stanje x_0 (obzirom na vjerojatnost $\mathcal{P}^x$). Jednostavnim računom se pokaže da $\pi(x)g(x,y) = \pi(y)g(y,x)$. Posebno, $g(y,x) \leq g(x,x)$. Kada ta dva izraza spojimo u jedan dobijemo

$$g(x,y) \leq \tfrac{\pi(y)}{\pi(x)} g(x,x).$$

Zbog mogućnosti da X pogodi stanje x_0 slijedi da je $f_x := \mathcal{P}^x(X_n = x) < 1$ za neki $n > 0$. Kako je $g(x,x) = \sum_{k=0}^\infty (f(x))^k$ slijedi da je konačno. Stoga,

$$\sum_{n\in S} g(x,n) \sum_{m\in S} p_{nm}(W(n) - W(m))^2 \leq \tfrac{g(x,x)}{\pi(x)} \sum_{n\in S} \sum_{m\in S} \pi(n) p_{nm}(W(n) - W(m))^2 < \infty$$

kako je i traženo.
Obratni smjer je jednostavniji. Ideja je uzeti gradijent funkcije $W(x) = \mathcal{P}^x\,(X_n = x_0 \quad n > 0)$. Ovo će zasigurno biti različito od konstante ako je X_n prolazan. Osim toga, jednostavno je za pokazati da je energija toka najviše $2\pi(x_0)$. Pretpostavimo da je (S, X, p_{ij}) prolazan. Fiksirajmo x_0 i stavimo da je $W(i) = \mathcal{P}^l(X_n = x_0 \quad n \geq 0)$. Zaključujemo da i dan s

$$i(x,y) = \pi(x) p_{xy}(W(x) - W(y))$$

ima sva tražena svojstva. Znamo da $\sum_y i(x_0, y) > 0$ i $\sum_y i(x,y) = 0 \; \forall x \neq x_0$. Jedino što nam preostaje za dokazati je

$$\sum_{x,y} (W(x) - W(y))^2 \pi(x)p_{xy} < \infty.$$

Neka je F konačan skup koji sadrži x_0 i $F^* = F \setminus \{x_0\}$. Definirajmo w_x (ovisno o F) sa

$$w_x = \mathcal{P}^x \ (X \text{ pogodi } x_0 \text{ prije napuštanja } F).$$

Tada

$$\sum_{x\in F^*} \sum_{y\in S} \pi(x)p_{xy} \left(w_x - w_y\right)^2 = \sum_{x\in F^*} \sum_{y\in X} \pi(x)p_{xy} \left(w_y^2 - w_x^2\right),$$

činjenica da je $x \in F^*$ povlači da

$$w_x = \sum_{y\in S} p_{xy}w_y.$$

Simetričnost od $\pi(x)p_{xy}$ dopušta nam da zanemarimo većinu uvjeta na desnoj strani (Greenov teorem). Daljnim promatranjem zaključujemo da je $w_{x_0} \geq w_x \geq w_y \ \forall x \in S, \forall y \in S \setminus F$. Koristeći ove dvije činjenice, zaključujemo da

$$\begin{aligned}\sum_{x\in F^*}\sum_{y\in S} \pi(x)p_{xy} \left(w_x - w_y\right)^2 &= \sum_{x\in F^*}\sum_{y\in S\setminus F} \pi(x)p_{xy} \left(w_y^2 - w_x^2\right) \\ &\quad + \sum_{x\in F^*} \pi(x)p_{xx_0} \left(w_{x_0}^2 - w_x^2\right) \\ &\leq \sum_{x\in F^*} \pi(x)p_{xx_0} \left(w_{x_0}^2 - w_x^2\right) \\ &\leq \pi(x_0)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Neka je $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset ...$ neki skup konačnih podskupova od S takvi da $\cup F_x = S$ i neka su $w_x^{(n)} = \mathcal{P}^x$ (X pogodi x_0 prije nego napusti F_n). Tada $\lim_n w_x^{(n)} = W_x$ pa iz Fatuovog teorema zaključujemo

$$\sum_{x\neq x_0} \sum_{y\in S} \pi(x)p_{xy}(W_x - W_y)^2 \leq \pi(x_0)$$

stavljajući x_0 u sumu dobivamo

$$\sum_{x\in S} \sum_{y\in S} \pi(x)p_{xy} \left(W_x - W_y\right)^2 \leq 2\pi(x_0)$$

čime smo dokazali ovaj teorem. □

Primjer 3.1.2. *Zamislimo da su točke $x \in S$ čvorovi povezani zajedno pomoću cijevi duljine* 1*, površine poprečnog presjeka cijevi od x do y veličine a_{xy}. Pretpostavimo da ukupna površina $\sum_y c(x, y)$ bude konačna u svakom čvoru. Tada su $c(x, y)$ simetrični i određuju reverzibilan Markovljev lanac na standardan način s $\pi(x) = \sum_y c(x, y)$ i $p_{xy} = c(x, y)/\pi(x)$.*

Pretpostavimo sada da je x_0 neki čvor od S i da tekućina na neki način "izlazi" iz tog čvora konstantnom stopom, ali da istovremeno nemože otići u niti jedan drugi čvor. Osim toga, pretpostavimo još da su cijevi takve da su pune neke tekućine. Označimo zatim s $i(x, y)$ volumen tekućine unutar cijevi od x do y. Zbog kompresije, tj. povećavanja tlaka zbog smanjivanja njihovog volumena, slijedi da da je za $\forall x \neq x_0 \quad \sum_y i(x, y) = 0$. Također, po pretpostavci teorema 3.1.1 koju imamo znamo da je suma $\sum_y i(x_0 y)$ različita od 0. Tekućina koja se nalazi u cijevi od čvora x do čvora y ima masu $c(x, y)$, dok joj je brzina $i(x, y)/c(x, y)$. Sada smo pripremljeni da damo izraz za ukupnu kinetičku energiju tekućine

$$\textstyle\sum_{x,y} c(x, y) \left(\frac{i(x,y)}{c(x,y)}\right)^2 = \sum_{xy} \frac{i(x,y)^2}{c(x,y)}$$

Sada Roydenov kriterij možemo intepretirati na sljedeći način :

(S, X, c) je prolazan $\longleftrightarrow$ možemo konstruirati neki tok u mreži koji će imati konačnu kinetičku energiju.

Primjer 3.1.3. *Jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$ je povratna.*

Dokaz. Neka je $i(x, y)$ tok na $\mathbb{Z}^2$ koji izvire u 0 "jačine" 1. Označimo s $[A_n, A_{n+1}]$ skup od $8n+4$ bridova koji zajedno povezuju kvadrat koji ćemo označit s A_n (širine $2n$) s kvadratom A_{n+1} (širine $n + 1$). Iz pretpostavke znamo da vrijedi sljedeće

$$\textstyle\sum_{(x,y)\in[A_n,A_{n+1}]} i(x, y) = 1$$

Kratkim i jednostavnim računom jednostavno se pokaže da jednakost 3.1 ne ovisi o izboru n, tj. da vrijedi za $\forall n \in \mathbb{N}$.
Primjenjujući *Cauchy-Scharzovu nejednakost* dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y)\in[A_n,A_{n+1}]} \frac{i(x, y)^2}{c(x, y)} &\geq \left[\sum_{(x,y)\in[A_n,A_{n+1}]} |i(x, y)|\right]^2 \left[\sum_{(x,y)\in[A_n,A_{n+1}]} c(x, y)\right]^{-1} \\ &\geq \left[\sum_{(x,y)\in[A_n,A_{n+1}]} c(x, y)\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Kako u našem slučaju promatramo jednostavnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}^2$, za težinu $c(x, y)$ uzmemo 1 ako su x i y susjedni vrhovi a u ostalim slučajevima nam je $c(x, y)$ definiran kao

0. Tada možemo primjetiti da

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} \frac{i(x,y)^2}{c(x,y)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+4} = \infty. \tag{3.6}$$

Iz ovoga možemo zaključiti da tok nema konačnu energiju. Dokaz je ovime gotov jer je izbor toka bio proizvoljan. □

Dokažimo sada još dva jako bitna i korisna teorema. Prvi od njih, *Nash Williams*, daje dovoljan uvjet za povratnost (pod nekim dodatnim pretpostavkama), dok naredni daje dovoljan uvjet za prolaznost.

Teorem 3.1.4 (Nash-Williams)**.** *Neka je* (S, X, c) *reverzibilan Markovljev lanac te neka je* $S = \cup_{k=0}^{\infty}\Lambda^k$ *pri čemu su* Λ^k *međusobno disjukntktni. Osim toga, pretpostavimo da je* $x \in \Lambda^k$ *i* $c(x,y) > 0$ *te da to zajedno povlači da je* $y \in \Lambda^{k-1} \cup \Lambda^k \cup \Lambda^{k+1}$ *te da je* $\sum_{x\in\Lambda^k, y\in X} c(x,y) < \infty \quad \forall k$. *Uvedimo sljedeću oznaku* $(x,y) \in \left[\Lambda^{k-1}, \Lambda^k\right]$ *za činjenicu da je* $x \in \Lambda^{k-1}, y \in \Lambda^k$.
Markovljev lanac (S, X, c) *je povratan ako vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{(x,y)\in\left[\Lambda^{k-1},\Lambda^k\right]} c(x,y)\right]^{-1} = \infty$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je je x_0 jedina točka skupa Λ^0 te da je $i(x,y)$ tok "koji izvire" u x_0 snage 1. Ono što moramo dokazati je da je taj tok i konačne energije. Pretpostavimo sada da je za neki k suma $\sum_{x\in\Lambda^k, y\in S} |i(x,y)| < \infty$. Primjenom *Cauchy-Schwarzove nejednakosti* i pretpostavke da je $\sum_{x\in\Lambda^k, y\in S} c(x,y) < \infty$ povlači da je

$$\sum_{x\in\Lambda^k, y\in X} \frac{i(x,y)^2}{c(x,y)} < \infty$$

pa je dokaz gotov.
Nadalje, sada možemo pretpostaviti da suma $\sum_{x\in\Lambda^k, y\in S} i(x,y)$ apsolutno konvergira za $\forall k$. Promjenom reda sumiranja pokaže se da je suma jednaka 1 $\forall k$. Za $k > 0$ vidimo da kad prvo sumiramo po x koordinati dobivamo

$$\sum_{x\in\Lambda^k, y\in S} i(x,y) = 0$$

S druge strane, ako je $x \in \Lambda^k$ tada je $i(x,y) \neq 0$ samo ako je $y \in \Lambda^{k-1} \cup \Lambda^k \cup \Lambda^{k+1}$. Također, $i(x,y) = -i(y,x) \ \forall x, y$. Spajanjem tih dviju stvari dobivamo

$$\sum_{(x,y)\in[\Lambda^k,\Lambda^{k+1}]} i(x,y) = \sum_{(x,y)\in[\Lambda^{k-1},\Lambda^k]} i(x,y)$$

Po indukciji imamo da je

$$\sum_{(x,y)\in[\Lambda^k,\Lambda^{k+1}]} i(x,y) = 1 \ \forall k$$

Osim toga, primjenom *Cauchy-Schwarzove nejednakosti* dobivamo da da za $\forall k$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{(x,y)\in[\Lambda^{k-1},\Lambda^k]} \frac{i(x,y)^2}{c(x,y)}\right) &\geq \left(\sum_{(x,y)\in[\Lambda^{k-1},\Lambda^k]} |i(x,y)|\right)^2 \left(\sum_{(x,y)\in[\Lambda^{k-1},\Lambda^k]} c(x,y)\right)^{-1} \\ &\geq \left(\sum_{(x,y)\in[\Lambda^{k-1},\Lambda^k]} c(x,y)\right)^{-1}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sumiranjem po k dobivamo ono što smo htjeli pa je dokaz gotov. □

Teorem 3.1.5. *Neka je $(S, X_n,)$ ireducibilan i reverzibilan Markovljev lanac. Osim toga, pretpostavimo da postoje realni brojevi $(i(x,y))_{x,y\in S}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $i(x,y) = -i(y,x)$

(ii) $\sum_{x\in S} |\sum_{y\in S} i(x,y)| < \infty$ *i* $\sum_{x\in S}\left(\sum_{y\in S} i(x,y)\right) \neq 0$

(iii) $\sum_{x\in S}\sum_{y\in S} \frac{i(x,y)^2}{c(x,y)} < \infty$

Tada je X prolazan. Obratan smjer slijedi diretkno iz Roydenovog kriterija.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji i sa svojstvima $(i), (ii), (iii)$. Jednostavnim transformacijama na i dobijemo da postoji $x_0 \in S$ takav da

$$\sum_y i(x_0 y) > \sum_{x\neq x_0} |\sum_{y\in S} i(x,y)|$$

. Nadalje, pretpostavimo da je Hilbertov prostor H svih vektora koji zadovoljavaju svojstva $(i), (ii), (iii)$ te neka je $l^x \in H$ vektor za koji vrijedi

$$(l^x, v) = \sum_y v(x,y)$$

Cilj nam je konstruirati $w \in H$ takav da vrijedi

$$(l^x, w) = (l^x, i) \quad \forall x \neq x_0$$

i

$$|(l^{x_0}, w)| \leq \sum_{x\neq x_0} |(l^x, i)|.$$

U tom slučaju bi vektor $i - w$ zadovoljavao *Roydenov kriterij* te bi teorem bio dokazan. Sada prelazimo na konstrukciju w. Odaberimo konačan podskup F od S koji sadrži x_0 te takav da restrikcija $c(x, y)$ na F bude ireducibilan Markovljev lanac. Označimo sa $F^* := F \setminus \{x_0\}$. Neka w_F vektor iz H koji minimizira

$$(l^x, w) = (l^x, i) \quad \forall x \in F^*.$$

Kako smo dopustili da F varira, norma od w_F ostaje uniformno ograničena. Neka F_n raste prema S te neka je W točka supremuma od (w_{F_n}). Jasno je da vrijedi $(l^x, w) = (l^x, i) \quad \forall x \in S_{x_0}$. Dovoljno nam je još samo pokazati da vrijedi

$$|(l^{x_0}, w_F)| \leq \textstyle\sum_{x \in F^*} |(l^x, w_F)|.$$

za svaki izbor F.
Minimalnost od w_F povlači da postoji funkcija $\phi : S \to \mathbb{R}$ takva da uz pretpostavku da vrijedi $w_F = \left(\omega_{xy}\right)(x, y \in S)$ zadovoljava sljedeće

(i) $w_{xy} = c(x, y)\left[\phi(x) - \phi(y)\right]$

(ii) $\phi(x) = 0 \; x \in S \setminus F^*$

Svojstvo (i) slijedi iz identičnog argumenta koji je bio korišten u dokazu *Roydenovom kriterija*. Svojstvo (ii) možemo gledati na sljedeći način; ϕ iz (i) je definirano kao konstanta. Stoga možemo zaključiti da je $\phi(x_0) = 0$. Uzmimo proizvoljni $x \in S \setminus F$. Ako je $c(x_0, x) > 0$, tada postojanje minimuma norme od w_F povlači da je $w_{x_0 x} = 0$ te da je $\phi(x) = \phi(x_0) = 0$. S druge strane, ako je $c(x_0, x) = 0$, tada ga jednostavno promjenimo da bude strogo veći od 0. Dopunimo li "stari" Hilbertov prostor H (sa $c(x_0, x) = 0$) u novi na prirodan način, vidimo da ako ne promjenimo ograničenje koje imamo da je w_F minimalan i u ovom većemo prostoru. Zato je $\phi(x) = \phi(x_0) = 0$ kako se i zahtjevalo. Da bismo dobili potrebne uvjete na $|(l^{x_0}, F)|$, dekomponiramo ϕ na dva "*potencijala*.
Neka je $y \in F^*$. Definirajmo funkciju $g(x, y)$ kao očekivan broj posjeta X-a stanju y prije napuštanja F^*, obzirom na vjerojatnost $\mathcal{P}^x$. Tada

$$\phi(x) = \sum_{y \in F^*} g(x, y) \frac{(l^y, w_F)}{(l^y, l^y)} \tag{3.8}$$

Da bi dokazali ovo, označimo s $\tilde{\phi}$ izraz na desnoj strani u 3.8, a s T prvo vrijeme izlaska iz F^*. Tada je $\left(\phi - \tilde{\phi}\right)(X_{n \wedge T})$ martingal. Očito da vrijedi $\phi = \tilde{\phi}$ izvan F^* pa je $\phi = \tilde{\phi}$. Zbog $\varphi(i_0) = 0$ slijedi da

$$(l^{x_0}, w_F) = -\textstyle\sum_{y \in F^*} c(x_0, y)\phi(y)$$

pa je (jer je $g \geq 0$)

$$\begin{aligned} |(l^{x_0}, w_F)| &\leq \sum_{y \in F^*} \sum_{k \in F^*} c(x_0, y) g(y, k) \frac{\left|(l^k, w_F)\right|}{(l^k, l^k)} \\ &\leq \sum_k \left|(l^k, wF)\right| \end{aligned} \tag{3.9}$$

kao što se i zahtjevalo. Zadnja nejednakost vrijedi jer

$$\textstyle\sum_{x \notin F^*} \sum_{y \in F^*} c(x, y) g(y, k) = (l^k, l^k)$$

Ugrubo rečeno, ovaj izraz kaže da *količina tekućine* koju stavimo u konačan F^* na mjesto k je uravnotežena s jednakom količinom koja dolazi s "bridova" u F^*. To se dokaže stavljajući da je $i(x, y) = c(x, y)\,(g(x, k) - g(y, k))$. Tada

$$\textstyle\sum_{y \in F^*} \sum_{x \in S} i(y, x) = \sum_x i(k, x) = \pi(k) = (l^k, l^k)$$

Kako je suma apsulutno konvergentna, možemo zanemariti uvjete $i(x, y) + i(y, x)$ koji se pojavljuje. Ako to napravimo, dobivamo traženu formulu

$$\begin{aligned} (l^k, l^k) &= \sum_{y \in F^*} \sum_{x \notin F^*} a_{yx} \left[g(y, k) - g(x, k)\right] \\ &= \sum_{y \in F^*} \sum_{x \notin F^*} c(x, y) g(y, k) \end{aligned} \tag{3.10}$$

te vrijedi

$$(l^k, l^k) > \textstyle\sum_{y \in F^*} c(x_0, y) g(y, k)$$

čime je teorem dokazan.

□

Primjer 3.1.6 (Slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^3$ *jeprolazna*)**.** *Konkretan tok i se može konstruirati koristeći* Greenovu funkciju $1/r$ *na* $\mathbb{R}^3$*. Podijelimo* $\mathbb{R}^3$ *na međusobno disjunktne jedinične kocke centrirane u točkama iz* $\mathbb{Z}^3$*. Stavimo tok između susjednih točaka i, v iz* $\mathbb{Z}^3$ *jednak integralu od* $(\nabla 1/r)\,(u - v)$ *preko zajedičke strane kocaka sa središtima u točkama i i v. Veličina toka je reda* $1/r^2$ *i* $\int_\epsilon^\infty [1/r^2]^2 r^2 dr < \infty$ *pa slijedi da je tok konačne energije*

Bibliografija

[1] P. Bremaud *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer Verlag, 1999.

[2] J. R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1997.

[3] R. Lyons, Y. Peres, *Probability on trees and networks*, Cambridge University Press, New York, 2016.

[4] T. Lyons, *A simple criterion for transience of a reversible Markov chain*, Ann. Probab. 11 (1983), no. 2, 393-402

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je prolaznost i povratnost slučajnih šetnji na grafovima. Diplomski rad je podijeljen u tri poglavlja.
U prvom poglavlju cilj je upoznati se s Markovljevim lancima i njihovim osnovnim svojstvima. Također, uvodimo pojmove kao što su povratnost, prolaznost i reverzibilnost.
U drugom poglavlju uvodimo pojam grafa te se upoznajemo s osnovnim pojmovima vezanim za graf. Uvodimo slučajnu šetnju na grafu i na električnoj mreži. Također, uvodimo pojam energije.
U trećem poglavlju dajemo kriterij za prolaznost i povratnost reverzibilnog Markovljevog lanca. Također, dajemo i dovoljan uvjet za povratnost Markovljevog lanca poznat kao *Nash-Williamsov kriterij*. Zatim, dajemo teorem koji, uz neke dodatne pretpostavke na Markovljev lanac X, daje dovoljne uvjete za prolaznost tog lanca. Za kraj, dajemo nekoliko primjera.

Summary

The topic of this thesis is transience and reccurence of random walks on graphs. The thesis is divided into three chapters.
In the first chapter, the goal is to get acquainted with Markovs chains and their basic properties. We also introduce the notions of reccurence, transience and reversibility.
In the second chapter, we introduce the concept of a graph and get familiar with the basic concepts related to graphs. We introduce the notion of a random walk on a graph and on the electrical network.
In the third chapter, we give a criterion for recurrence and transience of Markov chains. We also provide sufficient conditions for the reccurence of Markov chains known as the *Nash-Williams criterion*. Then we give a theorem which, with some additional assumptions on the Markov chain X, provides sufficient conditions for transience of that chain. We conclude the thesis with several examples.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 11. siječnja 1994. godine. Osnovnoškolsko obrazovanje stekao sam u Zaprešiću. U Zagrebu sam 2012. godine završio svoje srednjoškolsko obrazovanje u gimnaziji u Zagrebu, matematički smjer. Nakon toga upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Zatim, 2016. godine, nakon završetka preddiplomog studija upisao sam diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na tom istom fakultetu. Kao student radim u McDonald's-u te istovremeno obavljam stručnu praksu u Državnom zavodu za statistiku u Zagrebu.