

# Vizualni dokazi

---

**Kocijan, Anja**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:231108>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Anja Kocijan

**VIZUALNI DOKAZI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv.prof.dr.sc. Julije Jakšetić  
Suvoditelj:  
izv.prof.dr.sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem mentoru izv.prof.dr.sc Julije Jakšetiću na vođenju ovog diplomskog rada, strpljenju i svoj stručnoj pomoći. Također, veliko hvala sumentorici izv.prof.dr.sc. Zrinki Franušić na svim sugestijama i vremenu koje je izdvojila za ovaj diplomski rad. Zahvaljujem svojoj obitelji koja je bila uz mene kroz sve godine mojeg studiranja, a posebno zahvaljujem mami, Željku, sestrama, teti Mimi te djedama i bakama. Hvala mom zaručniku Petru na bezrezervnoj podršci i razumijevanju, te također zahvaljujem njegovoj obitelji.*

# Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
<b>1 Geometrija i algebra</b>	<b>2</b>
1.1 Pitagorin teorem . . . . .	2
1.2 Faktorizacija zbroja kvadrata . . . . .	4
1.3 Radijus pravokutnom trokutu upisane kružnice I . . . . .	5
1.4 Radijus pravokutnom trokutu upisane kružnice II . . . . .	7
1.5 Površina trokuta s duljinama stranica $t_a, t_b, t_c$ . . . . .	8
1.6 Vivianijev teorem . . . . .	10
1.7 Volumen krnje piramide . . . . .	12
<b>2 Trigonometrija i infinitezimalni račun</b>	<b>15</b>
2.1 Teorem o kosinusu . . . . .	15
2.2 Adicijska formula za sinus . . . . .	17
2.3 Adicijska formula za kosinus . . . . .	18
2.4 Formule dvostrukog kuta . . . . .	20
2.5 Parcijalna integracija . . . . .	21
2.6 Broj $e$ kao limes niza . . . . .	23
<b>3 Nejednakosti</b>	<b>25</b>
3.1 Nejednakost sredina . . . . .	25
3.2 Napierova nejednakost I . . . . .	27
3.3 Napierova nejednakost II . . . . .	28
<b>4 Sume</b>	<b>30</b>
4.1 Suma prvih $n$ neparnih brojeva . . . . .	30
4.2 Suma prvih $n$ prirodnih brojeva . . . . .	31
4.3 Suma geometrijskog reda . . . . .	32

*SADRŽAJ*

v

**Bibliografija**

**33**

# Uvod

Da bi se matematika mogla bolje razumjeti, a matematička znanja trajno usvojiti veoma je bitno usmjereno matematičko mišljenje pri čemu je pojam jedan od osnovnih oblika mišljenja. Pojmovi su međusobno povezani sudovima, gdje su aksiomi i postulati tvrdnje koje se ne dokazuju. S druge strane, teorem ili poučak je istinita tvrdnja čija se istinitost utvrđuje dokazom. Teoremi se većinom dokazuju indirektnim dokazima pri čemu se primjenjuju aksiomi, definicije i od prije poznati teoremi. Teoremi se također dokazuju indirektnim dokazom, odnosno svođenjem na kontradikciju ili dokazom po kontrapoziciji. Kako onda gledati na vizualne dokaze?

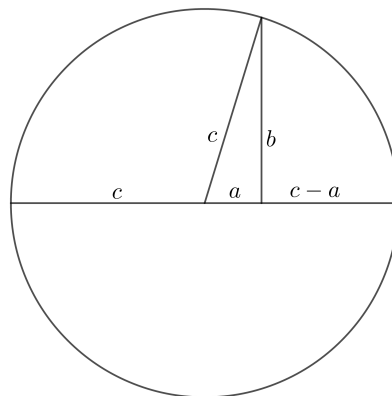
Vizualni dokazi nazivaju se još i slikovni dokazi, grafički dokazi ili dokazi bez riječi. To su dokazi dani slikom ili nizom slika sa što manje simbola i oznaka te bez dodatnog teksta. Budući da takav dokaz nije formalno proveden, matematičari nisu usuglašeni je li vizualan dokaz prihvatljiva matematička forma. Jedna strana gledišta je da vizualni dokazi ne samo da dopunjuju formalne dokaze, već ih i zamjenjuju. Matematika se ne smatra samo logikom te s obzirom na to i slike imaju važnu ulogu zorno prikazujući pojedine teoreme i dokaze. S druge strane, iako su vizualni dokazi psihološki sugestivni i pedagoški važni suprotstavljaju se apstraktnosti što je jedan od glavnih obilježja matematike. Problem je i u tome da pojedini vizualni dokazi obuhvaćaju samo specijalne slučajeve te zbog toga ne dokazuju teorem u cijelosti, također može se desiti situacija u kojoj različiti ljudi promatrajući isti vizualni dokaz različito matematički tumače zapis. Da bi se izbjegle prethodne situacije i kako bi vizualan dokaz bio potpun važnu ulogu ima analiza problema.

Ovim radom predstavljeni su odabrani vizualni dokazi iz geometrije, ali također i iz područja algebre te infinitezimalnog računa koji se mogu geometrijski interpretirati. Nakon svakog iskaza teorema i njegovog vizualnog dokaza slijedi detaljna analiza slike. U pojedinim dokazima u analizi su na slici uvedene dodatne oznake kako bi se lakše objasnili odnosi između elemenata u vizualnom dokazu te se koriste teoremi iz matematičke analize, planimetrije, stereometrije te trigonometrije.

# Poglavlje 1

## Geometrija i algebra

### 1.1 Pitagorin teorem



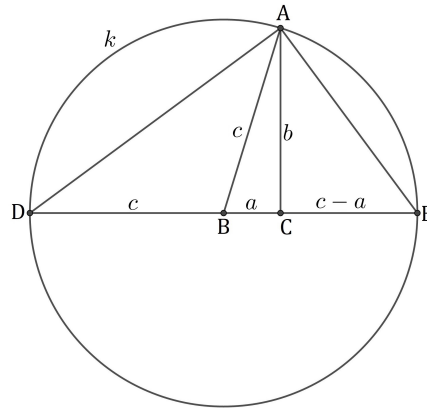
Slika 1.1:  $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

*Opis:*

Na slici 1.1 istaknut je pravokutan trokut sa stranicama duljine  $a$ ,  $b$  i  $c$ , zatim stranice  $c+a$  i  $b$ , te  $b$  i  $c-a$  koje predstavljaju katete sličnih pravokutnih trokuta. Proporcionalnost odgovarajućih stranica tih trokuta povlači Pitagorin teorem.

*Analiza:*



Slika 1.2:  $\triangle DCA \sim \triangle ACE$ 

Zadani je pravokutan trokut  $ABC$  s pravim kutom u vrhu  $C$  te kružnica  $k$  sa središtem  $B$  i polumjerom  $\overline{BA}$  duljine  $c$ . Uz oznake kao na slici 1.2 kut  $EAD$  je pravi prema Talesovom teoremu o obodnom kutu konstruiranom nad promjerom kružnice, odnosno trokut  $EAD$  je pravokutan. Stoga je

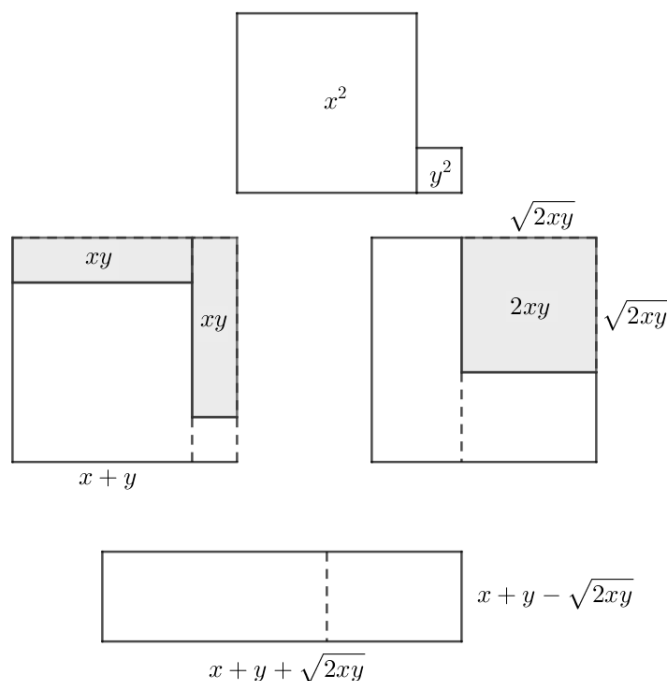
$$|\sphericalangle ADE| = 90^\circ - |\sphericalangle DEA|.$$

Također, prema pretpostavci i trokut  $CEA$  je pravokutan i

$$|\sphericalangle EAC| = 90^\circ - |\sphericalangle DEA|.$$

Dakle,  $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle EAC|$  pa su prema  $K - K - K$  teoremu o sličnosti trokuta pravokutni trokuti  $DCA$  i  $ACE$  slični. Odatle slijedi  $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$ .

## 1.2 Faktorizacija zbroja kvadrata



Slika 1.3: Faktorizacija zbroja kvadrata

*Opis:*

Identitet

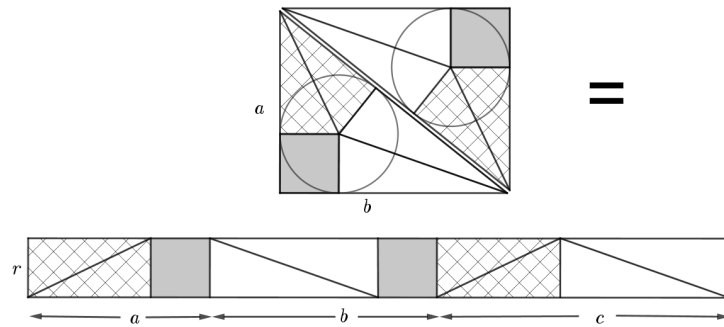
$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

je na slici 1.3 vizualiziran pomoću površina jednostavnih geometrijskih likova, kvadrata i pravokutnika.

*Analiza:*

Izraz  $x^2 + y^2$  se može predstaviti kao zbroj površina dva kvadrata; kvadrata sa stranicom duljine  $x$ , odnosno duljine  $y$ . Polože li se ta dva kvadrata jedan uz drugoga te se tako dobiveni lik nadopuni pomoću dva pravokutnika stranica  $x$  i  $y$  do kvadrata sa stranicom  $x + y$ . Nadopunjenja su na slici 1.3 označena sivom bojom. Unutar dobivenog kvadrata stranice  $x + y$ , “sivi” pravokutnici površine  $xy + xy$  zamijene se sa “sivim” kvadratom iste površine,  $2xy$ . Duljina stranice “sivog” kvadrata je očito  $\sqrt{2xy}$ . Bijeli dio kvadrata stranice  $x + y$ , odnosno onaj čija je površina  $x^2 + y^2$ , presloži se u pravokutnik sa stranicama duljine  $x + y + \sqrt{2xy}$  i  $x + y - \sqrt{2xy}$  (tako da se prereže po iscrtkanoj liniji) čija je površina jednaka  $(x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$ .

### 1.3 Radijus pravokutnom trokutu upisane kružnice I



Slika 1.4:  $ab = r(a + b + c)$

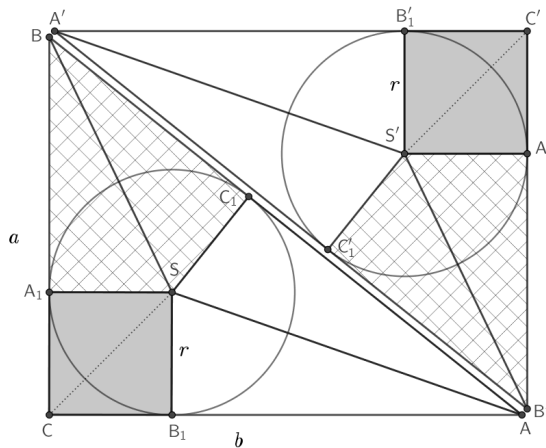
*Opis:*

Za radijus  $r$  upisane kružnice pravokutnom trokutu sa stranicama  $a$ ,  $b$  i  $c$  vrijedi formula:

$$r = \frac{ab}{a + b + c}.$$

Na slici 1.4 je pravokutnik sa stranicama  $a$  i  $b$  presložen u pravokutnik sa stranicama  $a + b + c$  i  $r$ .

*Analiza:*



Slika 1.5:  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Dva se sukladna pravokutna trokuta  $ABC$  i  $A'B'C'$  stave jedan do drugoga tako da je hipotenuza jednoga položena uz hipotenuzu drugog trokuta. Svakom od trokuta upisana je kružnica radijusa  $r$  sa središtima u  $S$ , odnosno  $S'$ . Kružnice diraju stranice trokuta  $ABC$ , odnosno trokuta  $A'B'C'$  u točkama  $A_1, B_1, C_1$ , odnosno  $A'_1, B'_1, C'_1$ . Uočavaju se sljedeći sukladni likovi:

- $\square CB_1SA_1 \cong \square S'A'_1C'B'_1$ .

Četverokut  $CB_1SA_1$  je kvadrat jer su mu kutovi pri vrhovima  $C, B_1, A_1$  pravi a susjedne stranice sukladne,  $|B_1S| = |A_1S| = r$ . Analogno vrijedi za  $\square S'A'_1C'B'_1$ .

- $\triangle A_1SB \cong \triangle C_1SB \cong \triangle A'_1S'B' \cong \triangle C'_1S'B'$ .

To su pravokutni trokuti sa zajedničkom hipotenuzom i sukladnom katetom duljine  $r$  pa sukladnost slijedi prema teoremu o sukladnosti  $S - S - K^>$ .

Uočava se da se po dva ta trokuta mogu presložiti u pravokutnik sa stranicama duljina  $a - r$  i  $r$ .

- $\triangle SB_1A \cong \triangle SC_1A \cong \triangle S'B'_1A' \cong \triangle S'C'_1A'$ .

Analogno kao prethodni slučaj. Uočava se da se po dva ta trokuta mogu presložiti u pravokutnik sa stranicama duljine  $b - r$  i  $r$ .

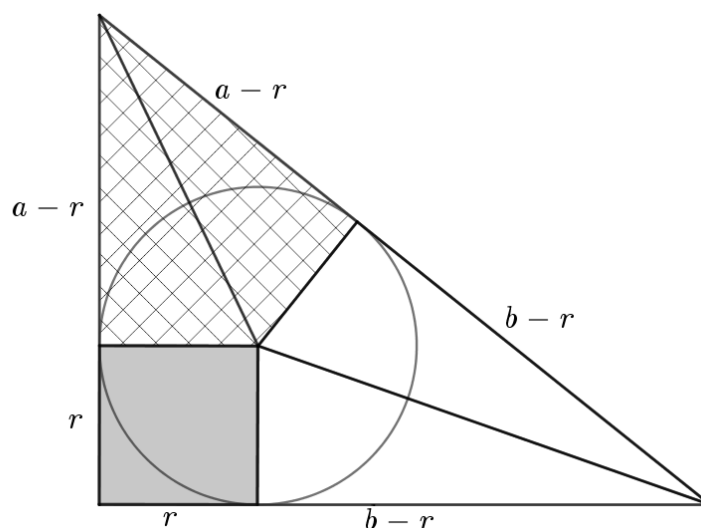
Konačno, dva kvadrata sa stranicom  $r$ , dva pravokutnika sa stranicama  $a - r$  i  $r$ , te dva pravokutnika sa stranicama  $b - r$  i  $r$  mogu se presložiti u pravokutnik sa stranicama  $r$  i  $2r + 2(a - r) + 2(b - r) = a + b + (a - r) + (b - r)$ . Uočava se još da ako se stavi pravokutnik sa stranicama  $a - r$  i  $r$  i pravokutnik sa stranicama  $b - r$  i  $r$  jedan uz drugi da će oni formirati pravokutnik sa stranicama  $c$  i  $r$  jer on sadrži, na primjer, trokut  $BAS$  sa stranicom  $c$  (slika 1.5). Sada je

$$ab = r(a + b + c),$$

pa je dokazana željena formula. Usput je pokazano i da je

$$c = a + b - 2r.$$

## 1.4 Radijus pravokutnom trokutu upisane kružnice II



Slika 1.6:  $c = (a - r) + (b - r)$

*Opis:*

Pokazuje se

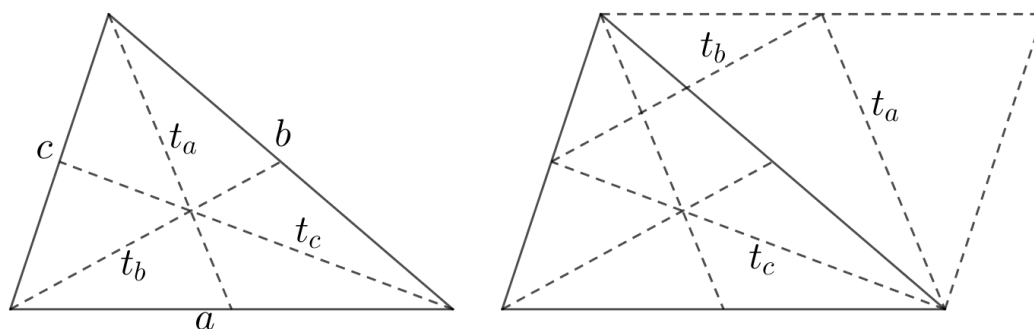
$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

gdje je  $r$  radijus pravokutnom trokutu upisane kružnice upisane, a  $a, b, c$  duljine njegovih stranica.

*Analiza:*

U prethodnom odjeljku je obrazloženo da se pravokutan trokut može podijeliti na kvadrat sa stranicom  $r$  te dva para sukladnih pravokutnih trokuta s katetama  $r$  i  $a - r$ , odnosno  $r$  i  $b - r$ . Zbroj duljina tih dviju kateta je upravo  $c$ .

### 1.5 Površina trokuta s duljinama stranica $t_a, t_b, t_c$



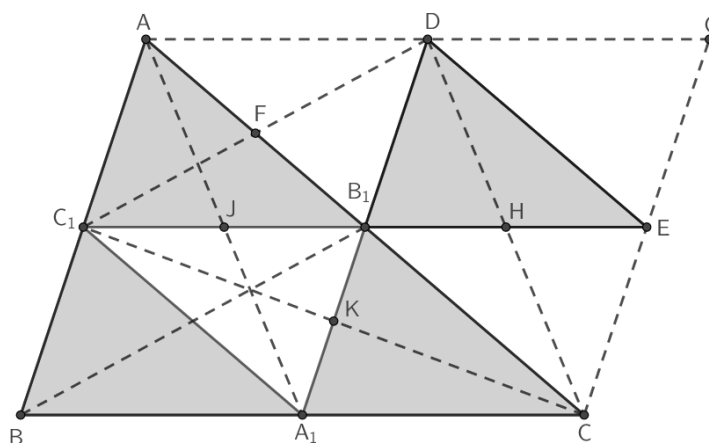
Slika 1.7:  $\triangle abc$  i  $\triangle t_a t_b t_c$

*Opis:*

Neka je zadan trokut sa stranicama duljine  $a, b, c$ . Duljine njegovih težnica označene su s  $t_a, t_b, t_c$ . Ako se od težnica načini trokut njegova će površina iznositi  $\frac{3}{4}$  površine početnog trokuta, odnosno

$$p(\triangle t_a t_b t_c) = \frac{3}{4}p(\triangle abc).$$

*Analiza:*



Slika 1.8:  $p(C_1CD) = \frac{3}{4}p(ABC)$

Na slici 1.8 će se promatrati određeni sivi i bijeli trokuti te će se uz sljedeći teorem pokazati sukladnost tih trokuta.

**Teorem 1.5.1** (Teorem o srednjici trokuta). *Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.*

Prema Teoremu 1.5.1 i uz oznake kao na slici 1.8, trokut  $ABC$  podijeljen je na četiri sukladna trokuta:

$$\triangle BA_1C_1 \cong \triangle A_1CB_1 \cong \triangle C_1B_1A \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Nadopuni li se taj trokut do paralelograma  $ABCG$  dobije se trokut  $CGA$ . Budući da je  $B_1$  polovište stranice  $\overline{AC}$ , a točke  $E$  i  $D$  su redom polovišta stranica  $\overline{CG}$  i  $\overline{GA}$  trokut  $B_1ED$  je sukladan sa svakim od četiri trokuta na koje je podijeljen trokut  $ABC$ .

Sada se promatraju trokuti  $C_1CB_1$ ,  $CDB_1$ ,  $DC_1B_1$  koji čine trokut  $C_1CD$ . Kako je  $C_1A_1CB_1$  paralelogram, trokut  $C_1KB_1$  sukladan je trokutu  $A_1CK$  pa je

$$p(C_1CB_1) = p(A_1CB_1) = \frac{1}{4}p(ABC).$$

Također  $C_1B_1DA$  je paralelogram pa je trokut  $B_1FD$  sukladan trokutu  $C_1FA$  i tada vrijedi

$$p(DC_1B_1) = p(C_1B_1A) = \frac{1}{4}p(ABC).$$

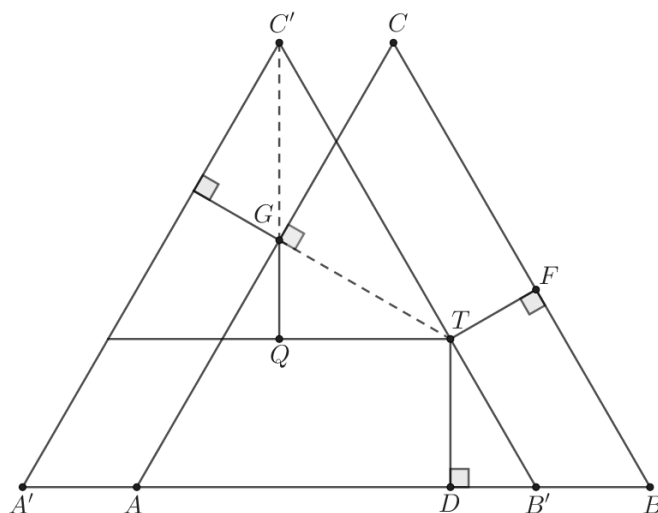
Analogno slijedi da je  $B_1CED$  paralelogram pa je  $\triangle B_1CH \cong \triangle HED$  te je

$$p(CDB_1) = p(B_1ED) = \frac{1}{4}p(ABC).$$

Konačno,

$$p(C_1CD) = p(C_1CB_1) + p(CDB_1) + p(DC_1B_1) = 3 \cdot \frac{1}{4}p(ABC).$$

## 1.6 Vivianijev teorem



Slika 1.9:  $|TD| + |TF| + |TG| = h$

*Opis:*

**Teorem 1.6.1** (Vivianijev teorem). *Neka je  $ABC$  jednakostraničan trokut i točka  $T$  unutar njega, tada je zbroj udaljenosti točke  $T$  od stranica trokuta jednak duljini visine tog trokuta.*

Postoje dvije mogućnosti: točka  $T$  pripada unutrašnjosti danog trokuta i točka  $T$  pripada jednoj od stranica trokuta. U prvoj trokut  $A'B'C'$  dobiven je translacijom trokuta  $ABC$  za vektor  $\overrightarrow{AA'}$  tako da točka  $T$  pripada stranici trokuta  $A'B'C'$ . Kako je trokut  $A'B'C'$  sukladan trokutu  $ABC$  slučaj kada točka  $T$  pripada stranici trokuta  $A'B'C'$  ujedno pokriva i drugu mogućnost. Na slici 1.9 prikazan je specijalan slučaj kada točka  $G$  pripada dužini  $\overline{C'Q}$ .

*Analiza:*



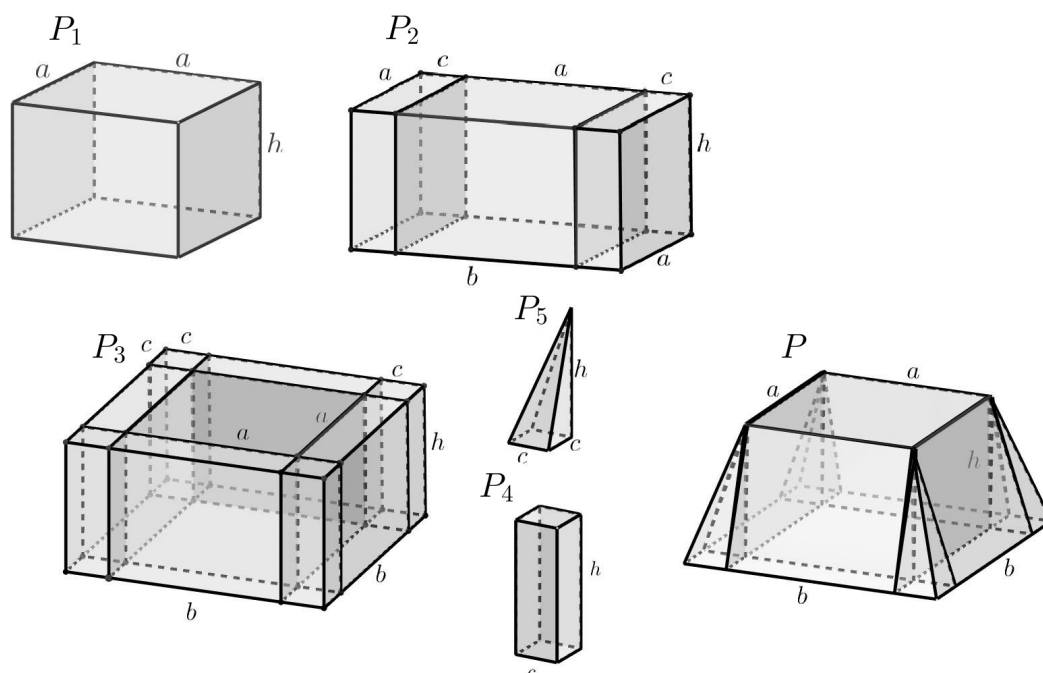


a udaljenost od stranice  $\overline{A'B'}$  je  $|TD|$ .

Kako je prema prethodno dokazanom  $|TG| = |C'G|$ , a  $|GH| = |GQ|$  ponovno je zbroj udaljenosti

$$|TD| + |TH| = h.$$

## 1.7 Volumen krnje piramide



Slika 1.11: Poliedri  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  i  $P$

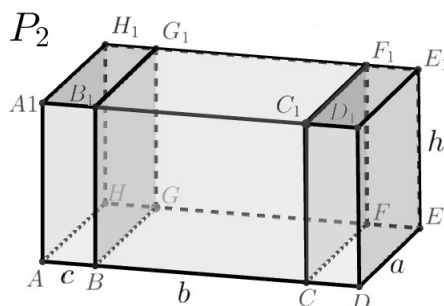
*Opis:*

Izraz za volumen krnje četverostrane piramide čija je jedna baza kvadrat sa stranicom duljine  $a$ , a druga baza kvadrat sa stranicom duljine  $b$  dan je sljedećom formulom:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2). \quad (1.1)$$

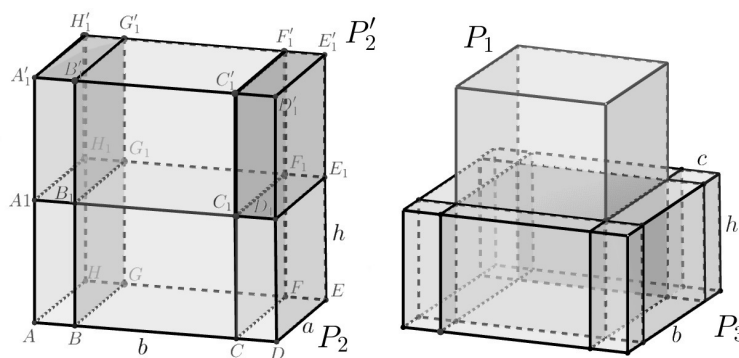
Na slici 1.11 izraz (1.1) je vizualno prikazan uz pomoć volumena jednostavnijih poliedara. Volumen spomenute krnje četverostrane piramide  $v(P)$  izražava se pomoću volumena poliedara  $v(P_1), v(P_2), v(P_3), v(P_4), v(P_5)$ .

Analiza:



Slika 1.12: Poliedar  $P_2$

Na slici 1.11 bridovi poliedara su duljine  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $h$ . Prema oznakama sa slike 1.12 kvadar  $P_2$  čine poliedar  $P_1$  s bridovima duljine  $|BC| = a$ ,  $|CF| = a$ ,  $|FF_1| = h$  i kvadar sa stranicama duljine  $|AB| = c$ ,  $|BG| = a$  i  $|GG_1| = h$  te njemu sukladan kvadar. S obzirom na uvedene oznake duljine bridova kvadra  $P_2$  su  $|AD| = 2c + a = b$ ,  $a$  i  $h$ .



Slika 1.13:  $2v(P_2) + 4v(P_4) = v(P_1) + v(P_3)$

Dva se sukladna poliedra  $P_2$  i  $P_2'$  polože jedan na drugi kao na slici 1.13 i gornjem se poliedru kvadar  $A_1B_1G_1H_1A_1'B_1'G_1'H_1'$  odsječe ravninom kroz brid  $\overline{B_1'G_1'}$  okomitom na bazu  $A_1B_1G_1H_1$ , a kvadar  $C_1D_1E_1F_1C_1'D_1'E_1'F_1'$  ravninom kroz brid  $\overline{C_1'F_1'}$  okomitom na bazu  $C_1D_1E_1F_1$ . Odsječen kvadar položi se uz stranu  $BCB_1C_1$ , a drugi uz stranu  $GGF_1G_1$  i dodaju se četiri prizme  $P_4$  tada vrijedi:

$$2v(P_2) + 4v(P_4) = v(P_1) + v(P_3),$$

odnosno

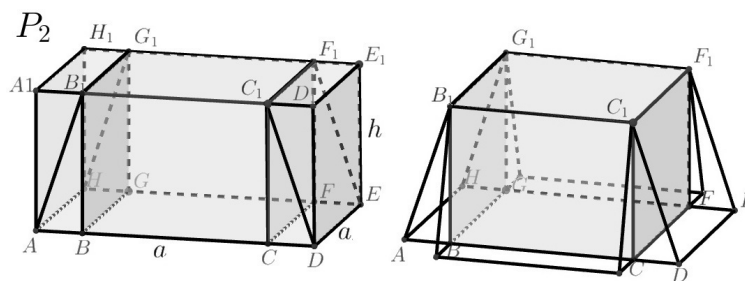
$$3v(P_2) + 4v(P_4) = v(P_1) + v(P_2) + v(P_3).$$

Sada se koristi sljedeći teorem.

**Teorem 1.7.1.** *Volumen piramide jednak je  $\frac{1}{3}$  volumena prizme iste površine baze i jednake visine.*

Uz teorem 1.7.1 prethodna jednakost može se zapisati kao:

$$v(P_1) + v(P_2) + v(P_3) = 3(v(P_2) + 4v(P_5)). \quad (1.2)$$



Slika 1.14:  $v(P_2) + 4v(P_5) = v(P)$

Slika 1.14 prikazuje poliedar  $P_2$ , kojem se odsječe trostrana prizma  $AA_1B_1G_1H_1H$  ravninom kroz dužinu  $\overline{AB_1}$  okomitom na stranu  $GHG_1H_1$ . Isto tako se odsječe i trostrana prizma  $DC_1D_1E_1F_1E$  ravninom kroz dužinu  $\overline{DC_1}$  okomitom na stranu  $EFE_1F_1$ . Odsječena prizma položi se uz stranu  $BCC_1B_1$ , a druga uz stranu  $GFF_1G_1$  i dodaju se četiri prizme  $P_5$  tada vrijedi:

$$v(P_2) + 4v(P_5) = v(P). \quad (1.3)$$

Uvrštavanjem (1.3) u (1.2) dobije se:

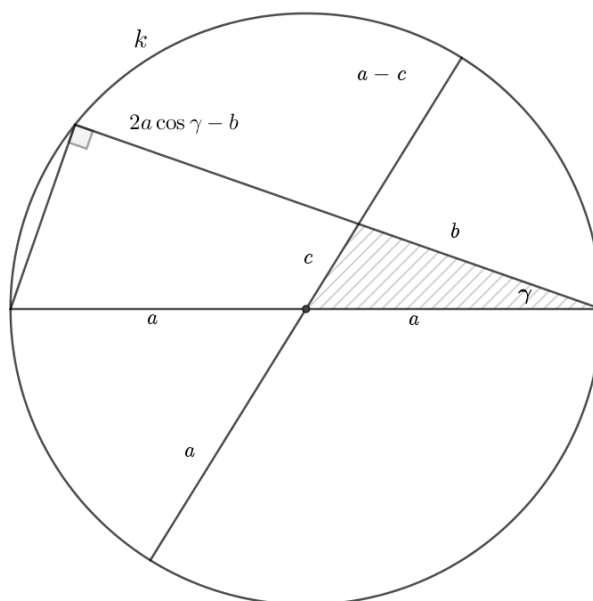
$$v(P_1) + v(P_2) + v(P_3) = 3v(P). \quad (1.4)$$

Kako je  $v(P_1) = a^2h$ ,  $v(P_2) = abh$ , a  $v(P_3) = b^2h$  kada se ti izrazi uvrste u (1.4) te se oznaka  $v(P)$  zamijeni oznakom  $V$  slijedi formula (1.1).

## Poglavlje 2

# Trigonometrija i infinitezimalni račun

### 2.1 Teorem o kosinusu



Slika 2.1: Kružnica opisana pravokutnom trokutu

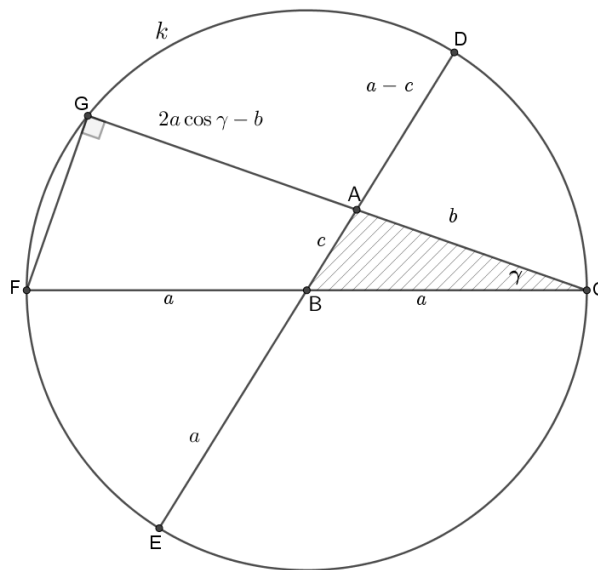
*Opis:*

Na slici 2.1 je istaknut pravokutan trokut i njemu opisana kružnica te trokut sa

stranicama  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Pokazuje se da vrijedi teorem o kosinusu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

*Analiza:*



Slika 2.2:  $|AG| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AD|$

Uz oznake kao na slici 2.2 pravci pravci  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  sjeku kružnicu  $k(B, a)$  redom u točkama  $D$  i  $E$ ,  $F$ ,  $G$ . Kako je  $|BD| = a$  vrijedi da je  $|AD| = a - c$ . Primjenom trigonometrije na pravokutan trokut  $FCG$  vrijedi:

$$\cos \gamma = \frac{|GC|}{2a} \Rightarrow |GC| = 2a \cos \gamma.$$

Sada se koristi sljedeća definicija i teorem.

**Definicija 2.1.1.** U ravnini je zadana kružnica  $k(O, r)$  te točka  $T$ . Pravac  $p$  kroz točku  $T$  siječe kružnicu  $k$  u točkama  $Q_1$  i  $Q_2$ . Realan broj  $|TQ_1| \cdot |TQ_2|$  naziva se potencija točke  $T$  s obzirom na kružnicu  $k$  i označava  $p(k, T)$ .

**Teorem 2.1.2.** Potencija točke  $T$  s obzirom na kružnicu  $k(O, r)$  je konstanta te za nju vrijedi izraz:  $p = |TO|^2 - r^2$  pri čemu je ta vrijednost veća, manja ili jednaka nuli ovisno o tome je li točka izvan, unutar kružnice ili pripada kružnici.

Kako je

$$|AG| = |GC| - |AC| \Rightarrow |AG| = 2a \cos \gamma - b \quad (2.1)$$

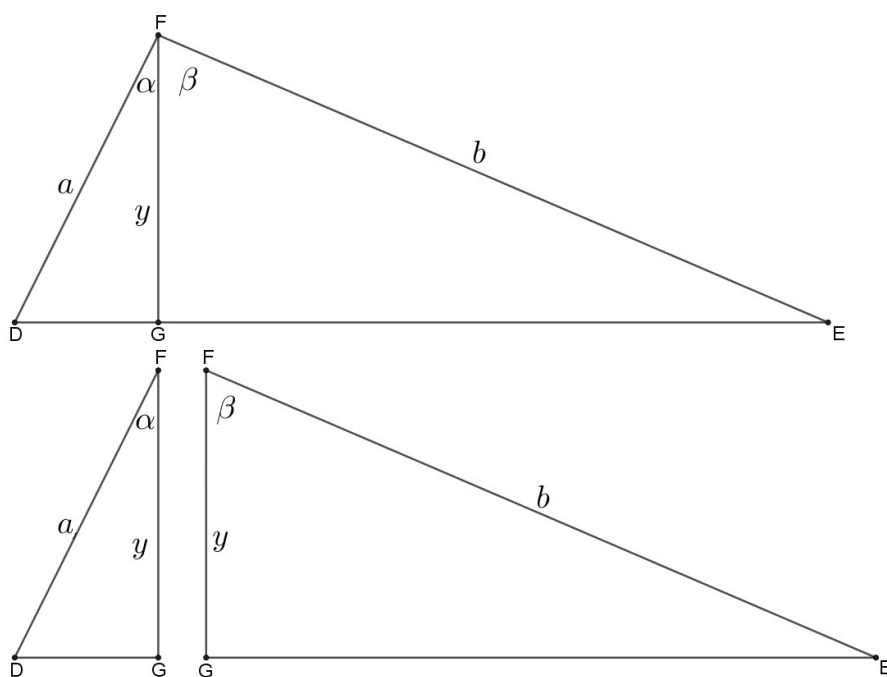
koristeći teorem 2.1.2 pri čemu je  $p(k, A)$  vrijedi da je  $|AG| \cdot |AC| = a^2 - c^2$  i  $|AE| \cdot |AD| = a^2 - c^2$  pa je

$$|AG| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AD|. \quad (2.2)$$

Uvrštavajući (2.1) u (2.2) te  $|AE| = a + c$  i  $|AD| = a - c$  dobiva se:

$$(2a \cos \gamma - b) \cdot b = a^2 - c^2.$$

## 2.2 Adicijska formula za sinus



Slika 2.3:  $ab \sin(\alpha + \beta) = ay \sin \alpha + by \sin \beta$ .

*Opis:*

Formula

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

dokazuje se uz pomoć površine danog trokuta kojeg zadana visina dijeli na dva pravokutna trokuta te pomoću primjene trigonometrije na pravokutan trokut.

*Analiza:*

Uz oznake kao na slici 2.3 visina trokuta duljine  $y$  dijeli kut  $EFD$  na kutove  $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Površina velikog trokuta može se prikazati kao zbroj površina dobivenih manjih pravokutnih trokuta.

**Teorem 2.2.1.** *Površina svakog trokuta jednaka je polovini umnoška duljina dviju stranica i sinusa kuta među njima.*

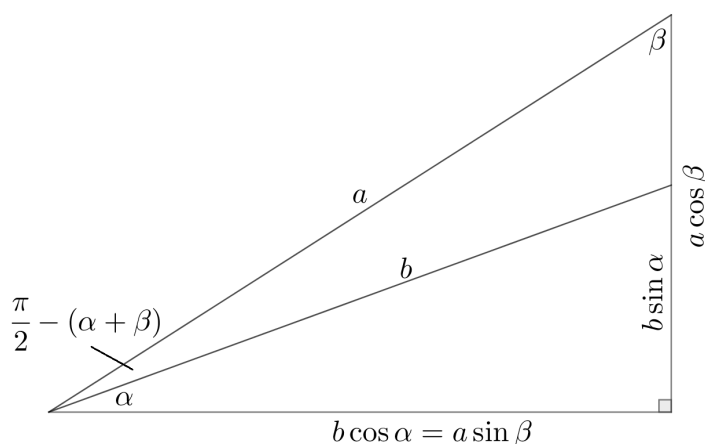
Prema teoremu 2.2.1 slijedi:

$$\frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}ay \sin \alpha + \frac{1}{2}by \sin \beta. \quad (2.3)$$

Vrijednost trigonometrijske funkcije šiljastog kuta  $\alpha$  dana je formulom  $\cos \alpha = \frac{y}{a}$ , a kuta  $\beta$  je dana formulom  $\cos \beta = \frac{y}{b}$ . Zamijeni li se prvi  $y$  iz (2.3) s  $y = b \cos \beta$  odnosno drugi  $y$  s  $y = a \cos \alpha$  slijedi:

$$\frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}ab \cos \beta \sin \alpha + \frac{1}{2}ab \cos \alpha \sin \beta.$$

## 2.3 Adicijska formula za kosinus



Slika 2.4: Pravokutan trokut sa stranicama  $a, b \cos \alpha = a \sin \beta, a \cos \beta$

*Opis:*

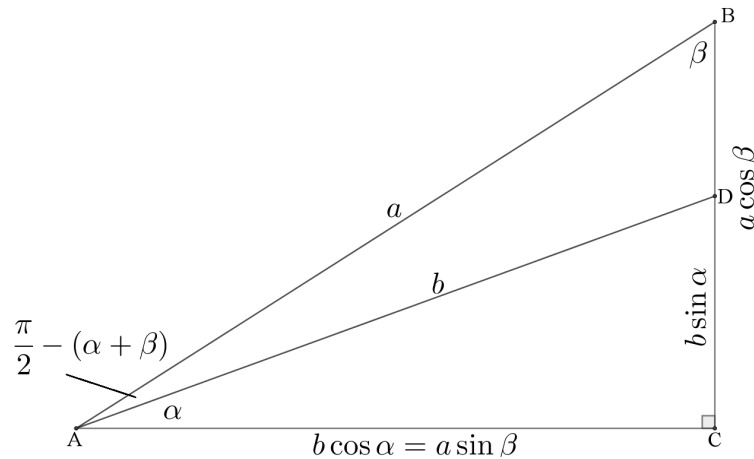
Na slici 2.4 je zadani pravokutan trokut podijeljen na dva trokuta. Izražavajući površinu trokuta sa stranicama duljina  $a$  i  $b$  preko površina velikog i malog pravokutnog trokuta te primjenom trigonometrije na pravokutan trokut dokazuje se adicijska



formula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Analiza:



Slika 2.5:  $\triangle ABC, \triangle ACD$  i  $\triangle ADB$

Uz oznake na slici 2.5 pravokutan trokut  $ABC$  podijeljen je na pravokutan trokut  $ACD$  i trokut  $ADB$ . U trokutu  $ACD$  vrijedi da je  $|AC| = b \cos \alpha$ ,  $|CD| = b \sin \alpha$ , također  $|AC| = a \sin \beta$  i  $|CB| = a \cos \beta$  ako se promatra trokut  $ABC$ . U trokutu  $ABC$  veličina kuta  $|\sphericalangle BAC| = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ .

Za površine trokuta na slici 2.5 vrijedi:

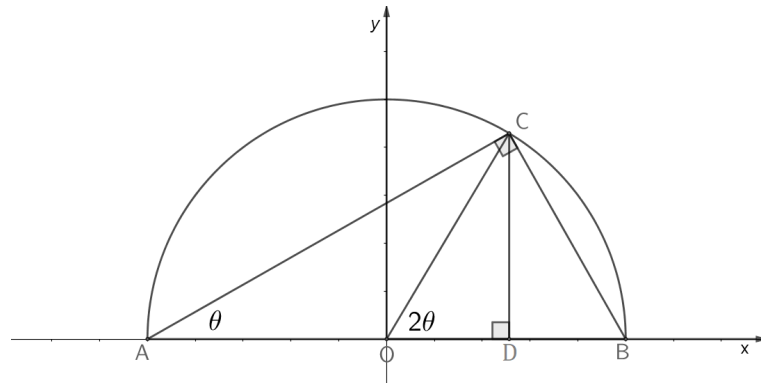
$$p(ADB) = p(ABC) - p(ACD).$$

Sada, koristeći teorem 2.2.1 slijedi:

$$\frac{1}{2}ab \sin \left( \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) = \frac{1}{2}ab \cos \alpha \cos \beta - \frac{1}{2}ab \sin \beta \sin \alpha.$$

Budući da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $\sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$  sređivanjem gornjeg izraza dobiva se adicijska formula za kosinus.

## 2.4 Formule dvostrukog kuta

Slika 2.6:  $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ 

*Opis:*

U koordinatnom sustavu u ravnini smještena je kružnica s jednadžbom  $x^2 + y^2 = 1$  opisana pravokutnom trokutu. Promatra se samo pozitivan dio osi ordinata gdje su određeni pravokutni trokuti međusobno slični. Proporcionalnost odgovarajućih stranica tih trokuta povlači formule dvostrukog kuta:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1.$$

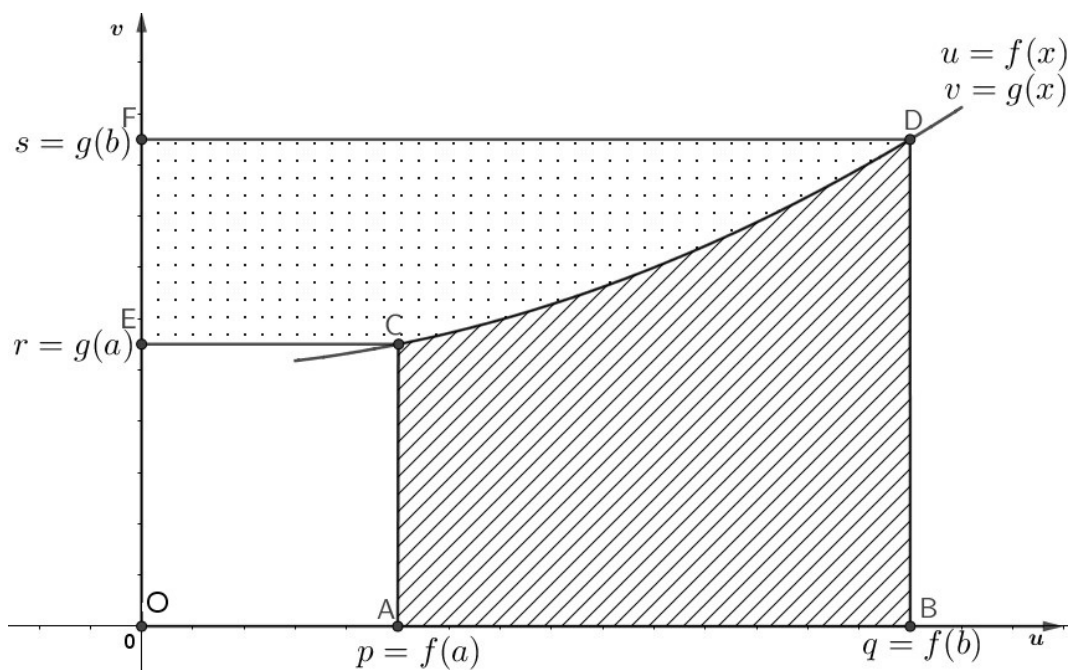
*Analiza:*

Uz oznake na slici 2.6 trokut  $AOC$  je jednakokračan s duljinama kateta  $r$ , gdje je  $r$  radijus dane kružnice i njegova duljina iznosi 1. U pravokutnom trokutu  $ABC$  vrijedi  $|AC| = 2 \cos \theta$  i  $|BC| = 2 \sin \theta$ , a u pravokutnom trokutu  $ODC$  vrijedi  $|CD| = \sin 2\theta$  i  $|OD| = \cos 2\theta$ . Prema  $K - K - K$  teoremu pravokutni trokuti  $ADC$  i  $ABC$  su slični jer imaju zajednički kut  $\theta$  i oba imaju pravi kut pa vrijedi:

$$\frac{\sin 2\theta}{2 \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta}{2},$$

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{2 \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{2}.$$

## 2.5 Parcijalna integracija



Slika 2.7: Parametrizirana krivulja  $x \mapsto (f(x), g(x))$

*Opis:*

Na slici 2.7 prikazana je parametrizirana krivulja  $x \mapsto (f(x), g(x))$ ,  $a \leq x \leq b$ , odnosno graf složene funkcije u  $uv$  ravnini i uvedene su oznake  $f(x) = u$  i  $g(x) = v$ . Dokazuje se slučaj kada su funkcije  $f$  i  $g$  obje rastuće. Izražavajući površinu osjenčanog lika na slici 2.7 na dva načina dokazuje se da vrijedi formula za parcijalnu integraciju

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

*Analiza:*

Koristit će se sljedeći teorem:

**Teorem 2.5.1.** *Neka je  $f$  pozitivna funkcija integrabilna na segmentu  $[a, b]$ . Neka je  $G$  primitivna funkcija funkcije  $f$ . Tada je površina područja  $P$  u koordinatnoj ravnini koje je omeđeno odozdo s  $x$  osi, a odozgo grafom funkcije  $f$ , lijevo s pravcem  $x = a$ , te desno s pravcem  $x = b$  jednaka određenom integralu  $\int_a^b f(x) dx$ .*

Uz uvedene oznake na slici 2.7 i koristeći teorem 2.5.1 za neprekidnu funkciju  $u(v)$  na intervalu  $[p, q]$  vrijedi:

$$p(ABCD) = \int_p^q v \, du.$$

Također, za funkciju  $v(u)$  na intervalu  $[r, s]$  vrijedi

$$p(CDEF) = \int_r^s u \, dv.$$

Kako je

$$p(ABCDEF) = p(CDEF) + p(ABCD)$$

slijedi

$$p(ABCDEF) = \int_r^s u \, dv + \int_p^q v \, du.$$

S druge strane

$$p(ABCDEF) = p(OBDF) - p(OACE)$$

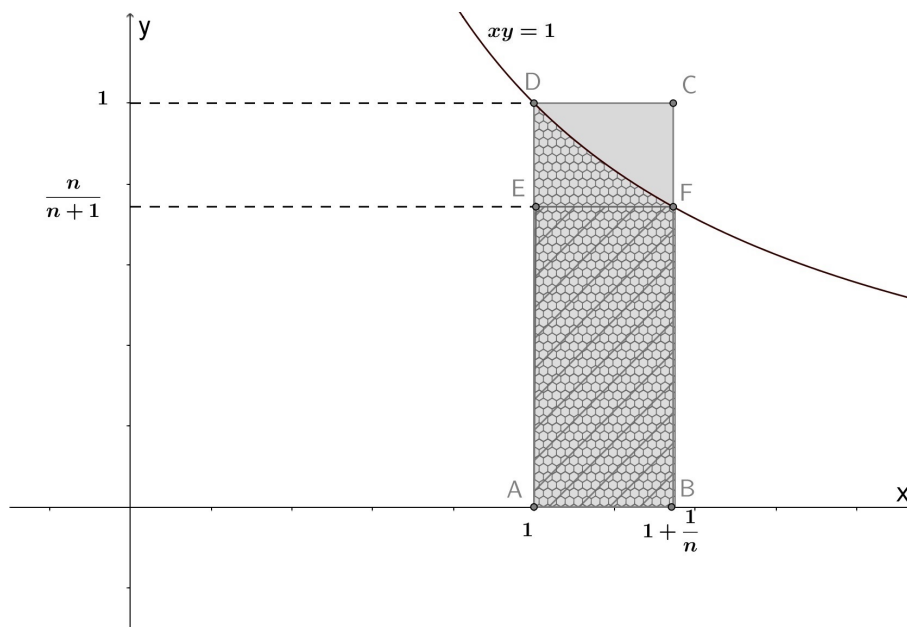
odnosno  $p(ABCDEF) = qs - pr$ . Izjednačavanjem izraza za površinu dobiva se

$$\int_r^s u \, dv + \int_p^q v \, du = uv \Big|_{(p, r)}^{(q, s)}$$

koja izražena pomoću varijable  $x$  glasi:

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) \, dx.$$

## 2.6 Broj $e$ kao limes niza



Slika 2.8: Graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$

*Opis:*

Slika 2.8 prikazuje graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  pri čemu je istaknuta površina ispod grafa funkcije. Istaknuta površina ispod grafa funkcije  $f$  manja je od površine većeg pravokutnika čija je površina  $\frac{1}{n}$ , a veća od površine manjeg pravokutnika čija je površina  $\frac{1}{n+1}$ . Ta ideja koristit će se da bi se pokazalo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (2.4)$$

*Analiza:*

S obzirom na oznake na slici 2.8 prema teoremu 2.5.1 vrijedi da je

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Kako je

$$p(ABFE) \leq p(ABFD) \leq p(ABCD)$$

slijedi da je

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$$

te množenjem produžene nejednakosti s  $n$  slijedi:

$$\frac{n}{n+1} \leq n \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

**Teorem 2.6.1** (Teorem o sendviču). *Neka su  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  nizovi takvi da postoji  $m \in \mathbb{N}$  takav da je  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $\forall n \geq m$ . Ako  $(a_n)$  i  $(c_n)$  konvergiraju prema istom realnom broju  $L \in \mathbb{R}$ , onda je i  $(b_n)$  konvergentan i vrijedi:  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .*

Koristeći teorem 2.6.1 i činjenicu da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

vrijedi da je i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

**Teorem 2.6.2.** *Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoren interval i  $n \mapsto a_n$  niz u  $I$  koji konvergira k  $a_0 \in I$ . Ako je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija u točki  $a_0$ , onda niz  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$  konvergira k  $f(a_0)$  to jest  $\lim f(a_n) = f \lim(a_n)$ .*

Koristeći teorem 2.6.2 vrijedi:

$$e = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} = e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

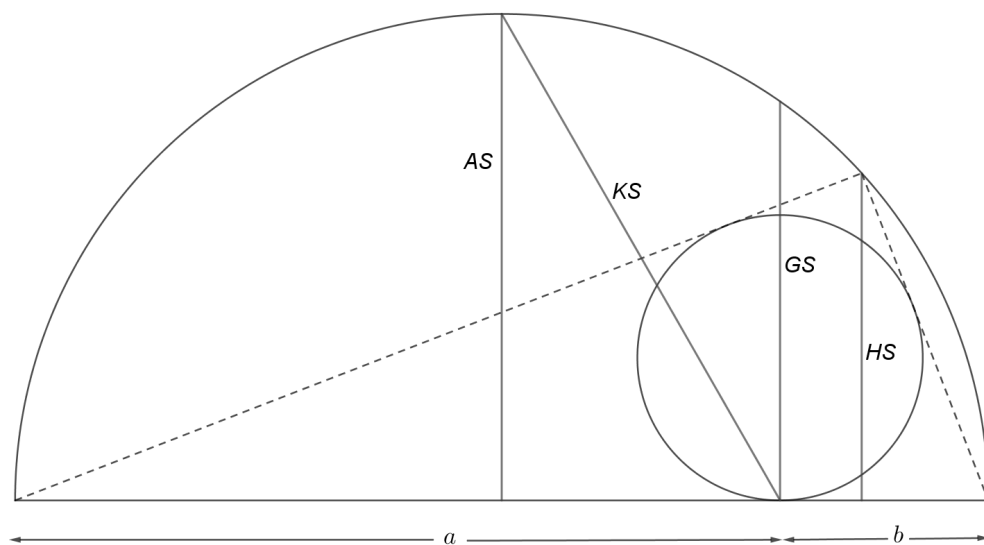
te je

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

# Poglavlje 3

## Nejednakosti

### 3.1 Nejednakost sredina



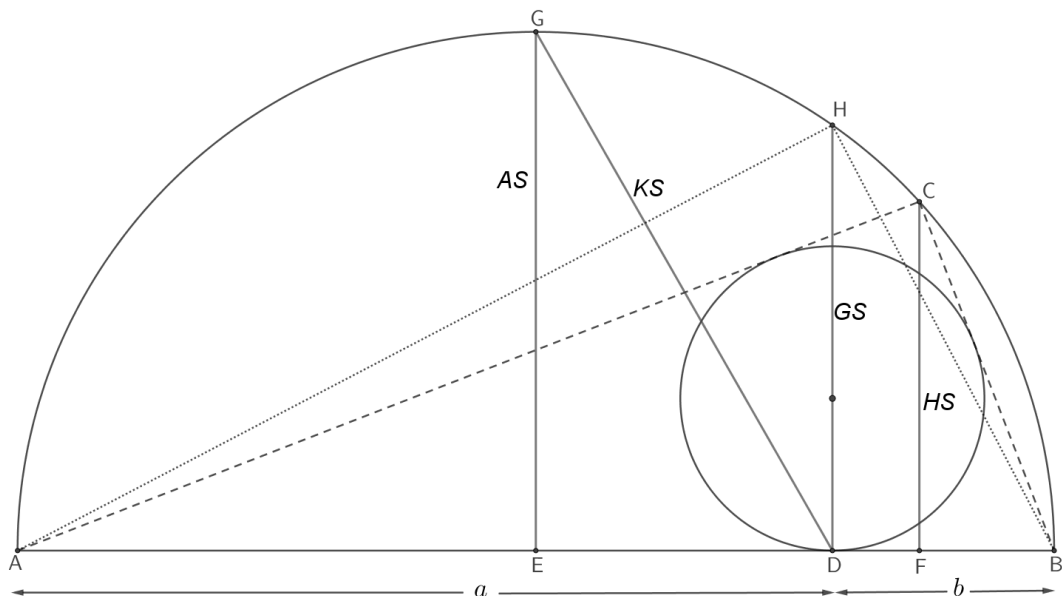
Slika 3.1:  $HS \leq GS \leq AS \leq KS$

*Opis:*

Na slici 3.1 zadan je pravokutan trokut i njemu upisana i opisana kružnica odnosno polukužnica. Harmonijska, geometrijska, kvadratna i aritmetička sredina na slici 3.1 predstavljaju duljine dužina tetiva polukružnice te vrijedi  $HS \leq GS \leq AS \leq KS$  odnosno

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

*Analiza:*



Slika 3.2:  $\triangle EDG$ ,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABH$

Koristiti će se sljedeći teorem:

**Teorem 3.1.1.** *Neka su pozitivni brojevi  $x, y$  takvi da postoji kružnica  $k$  s promjerom duljine  $x + y$  tada je polumjer te kružnice duljine  $\frac{x+y}{2}$ .*

Uz oznake kao na slici 3.2 označenim duljinama dužina pridružuju se sredine.

- Aritmetička sredina: Koristeći teorem 3.1.1 direktno slijedi da je aritmetička sredina brojeva  $a, b > 0$  u oznaci  $AS$  jednaka  $\frac{a+b}{2}$ .
- Kvadratna sredina: Primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut  $EDG$  vrijedi

$$KS^2 = AS^2 + ED^2$$

odnosno

$$KS^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

sređivanjem izraza slijedi da je kvadratna sredina brojeva  $a, b > 0$  u oznaci  $KS$  jednaka  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ .

Za harmonijsku sredinu koristit će se sljedeći teorem:



**Teorem 3.1.2.** *Pravokutan trokut kojem diralište upisane kružnice dijeli hipotenuzu na dijelove  $x$  i  $y$  ima površinu  $P = xy$ .*

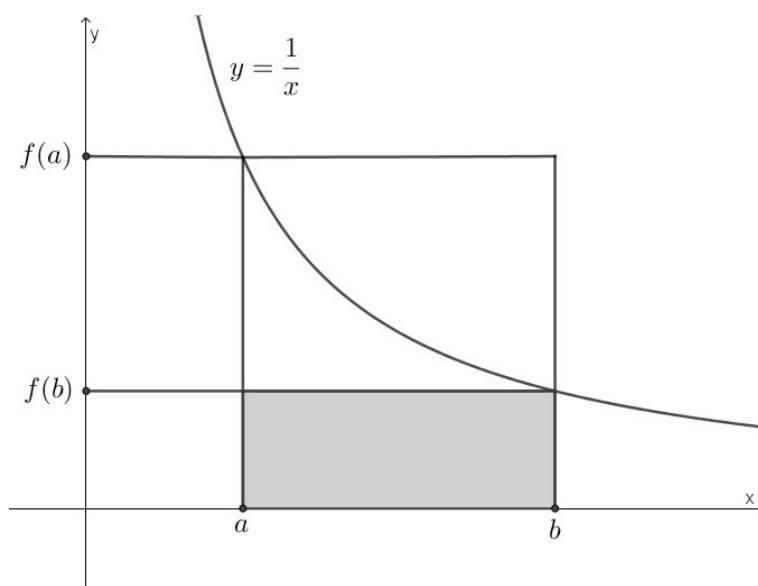
- Harmonijska sredina: Kako je  $\overline{CF}$  visina trokuta  $ABC$  duljine  $HS$  vrijedi da je

$$P = \frac{(a+b)HS}{2}.$$

Primjenom teorema 3.1.2 slijedi  $2ab = (a+b) \cdot HS$  pa je harmonijska sredina brojeva  $a, b > 0$  u oznaci  $HS$  jednaka  $HS = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ .

- Geometrijska sredina: Primjenom Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice trokut  $ABH$  je pravokutan, a  $GS$  je duljina visine tog trokuta. Prema Euklidovu poučku, duljina visine na hipotenuzu jednaka je geometrijskoj sredini njenih duljina odsječaka na hipotenuzi prema tome je geometrijska sredina brojeva  $a, b > 0$  u oznaci  $GS$  jednaka  $\sqrt{ab}$ .

## 3.2 Napierova nejednakost I



Slika 3.3: Graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$

*Opis:*

Neka je  $0 < a < b$ . Koristeći činjenicu da se površina ispod grafa funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  na segmentu  $[a, b]$  može omeđiti površinama odgovarajućih pravokutnika pokazuje se *Napierova nejednakost*:

$$\frac{1}{b}(b-a) < \int_a^b \frac{1}{x} dx < \frac{1}{a}(b-a). \quad (3.1)$$

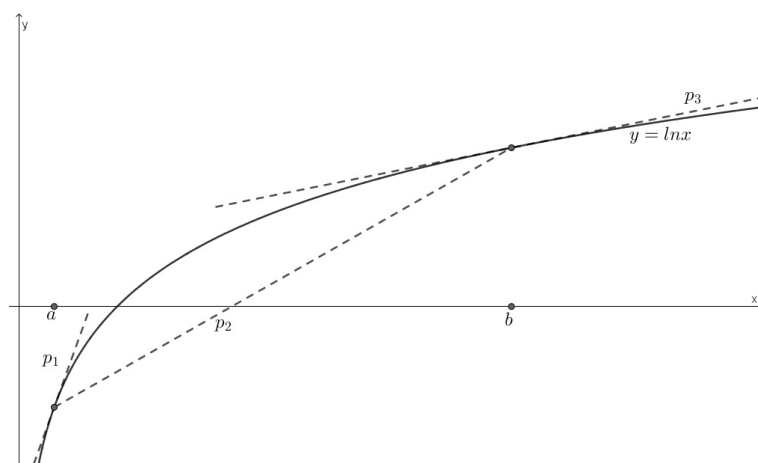
*Analiza:*

Kako je površina ispod grafa funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$  omeđena s površinama dva istaknuta pravokutnika na slici 3.3 vrijedi

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq (b-a)f(a).$$

Budući da je  $f(a) = \frac{1}{a}$  i  $f(b) = \frac{1}{b}$  slijedi tražena nejednakost (3.1).

### 3.3 Napierova nejednakost II



Slika 3.4: Graf funkcije  $f(x) = \ln x$

*Opis:*

Slika 3.4 prikazuje graf funkcije  $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  te tangente  $p_1$  i  $p_3$  na prikazanu krivulju kao i njezinu sekantu  $p_2$ . Kada se nagib sekante uspoređi sa nagibima danih tangenti dobiva se (3.1).

*Analiza:*

Uz oznake na slici 3.4 sekanta  $p_2$  kroz točke  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  ima koeficijent smjera

$$k_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

a tangenta  $p_1$  u točki  $(a, f(a))$  ima koeficijent smjera

$$k_1 = f'(a) = \frac{1}{a},$$

a tangenta  $p_3$  u točki  $(b, f(b))$  ima koeficijent smjera

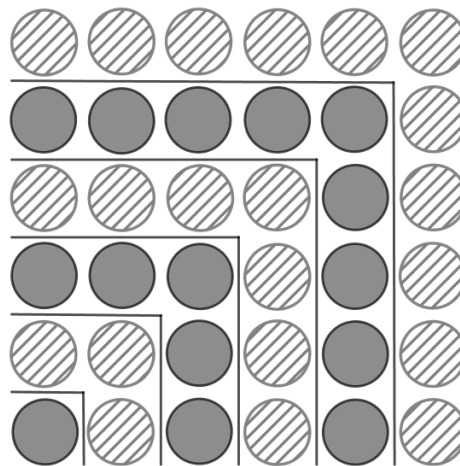
$$k_3 = f'(b) = \frac{1}{b}.$$

Kako je sa slike vidljivo da su nagibi:  $n(p_3) < n(p_2) < n(p_1)$  uvrštavanjem prethodnih koeficijenta smjerova slijedi Napierova nejednakost.

# Poglavlje 4

## Sume

### 4.1 Suma prvih $n$ neparnih brojeva



Slika 4.1:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

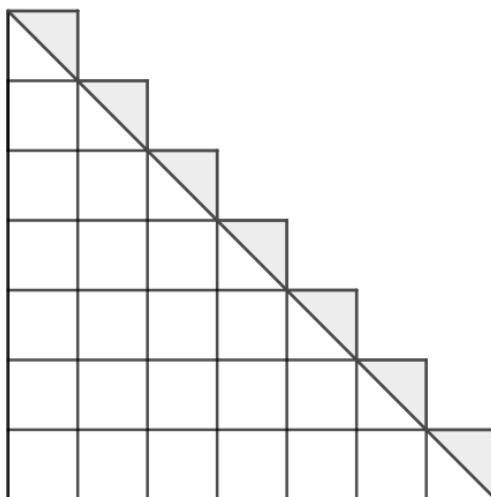
*Opis:*

Zbroj prvih  $n$  neparnih prirodnih brojeva jednak je  $n^2$ .

*Analiza:*

Uočava se da se  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  kružića može presložiti u kvadrat od  $n \times n$  kružića. Zaista, da bi se od kvadrata koji se sastoji od  $k \times k$  kružića dobio kvadrat koji se sastoji od  $(k + 1) \times (k + 1)$  kružića potrebno je taj kvadrat s dvije susjedne stranice obrubiti s  $2k + 1$  kružićem.

## 4.2 Suma prvih $n$ prirodnih brojeva



Slika 4.2:  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

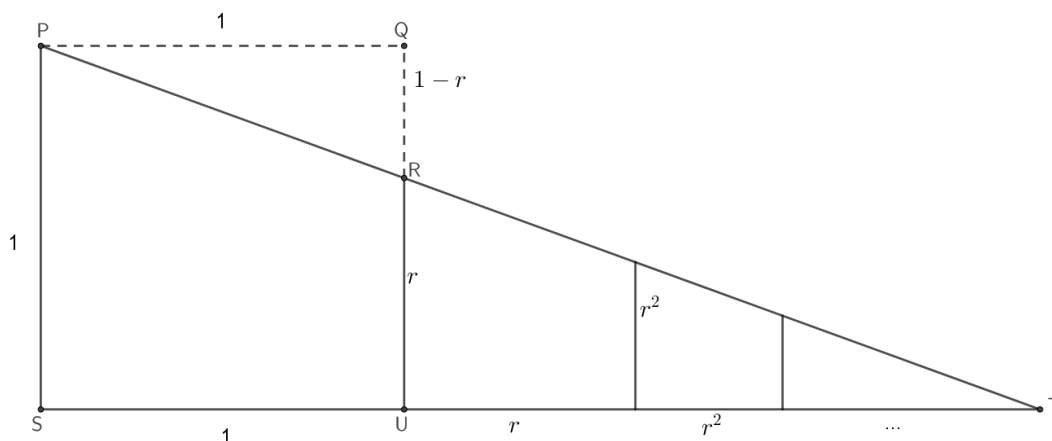
*Opis:*

Zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva jednak je  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ .

*Analiza:*

$1+2+3+\dots+n$  jedinična kvadratića poslože se u trokutastu shemu kao na slici 4.2. Budući da je površina svakog kvadratića 1, lik na slici ima površinu  $1+2+3+\dots+n$ . S druge strane, površina tog lika je zbroj površine pravokutnog trokuta s katetama duljine  $n$  i  $n$  sivih trokutića površine  $\frac{1}{2}$ , odnosno  $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ .

### 4.3 Suma geometrijskog reda

Slika 4.3:  $\triangle STP \sim \triangle PQR$ 

*Opis:*

Na slici 4.3 istaknuti je pravokutan trokut s katetama duljine  $1-r$ ,  $r$  te pravokutan trokut sa katetama duljine  $1$ ,  $1+r+r^2+r^3+\dots$ . Spomenuti pravokutni trokuti su slični, a proporcionalnost odgovarajućih stranica tih trokuta povlači izraz za sumu geometrijskog reda:

$$1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (4.1)$$

*Analiza:*

Sukladno oznakama na slici 4.3 trokuti  $STP$  i  $PQR$  su pravokutni. Kako je pravac kojem pripada dužina  $\overline{PT}$  transverzala pravaca kojima pripadaju dužine  $\overline{PQ}$  i  $\overline{ST}$  vrijedi da je  $\sphericalangle QPR \cong \sphericalangle STP$  pa su prema  $K-K-K$  teoremu o sličnosti trokuta trokuti  $STP$  i  $PQR$  slični. Stoga je

$$\frac{|ST|}{|PS|} = \frac{|PQ|}{|QR|},$$

što daje (4.1).

# Bibliografija

- [1] A. Čižmešija, D. Marić, Dokaz bez riječi kao metoda uvođenja dokaza u nastavu matematike, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/Dokazi\\_bez\\_rijeci.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/Dokazi_bez_rijeci.pdf) (listopad 2018.)
- [2] B. Dakić, Matematika u boji-dokazi bez riječi, Element, Zagreb, 2018.
- [3] Z. Hanžek, Trigonometrija u ravnini, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.
- [4] D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf> (prosinac 2018.)
- [5] P. Javor, Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- [6] J. Jakšetić, Dokazi bez riječi, dostupno na [http://www.matematika.hr/files/3614/0467/0576/Dokazi\\_bez\\_rijeci-Jaksetic.pdf](http://www.matematika.hr/files/3614/0467/0576/Dokazi_bez_rijeci-Jaksetic.pdf) (rujan 2018.)
- [7] Z. Kurnik, Poučak ili teorem, MIŠ 8 (2000/2001), 101-105.
- [8] Z. Kurnik, Dokaz, MIŠ 9 (2000/2001), 149-155.
- [9] Z. Kurnik, Načelo primjerenosti, MIŠ 48 (2008/2009), 100-105.
- [10] S. Kurepa, Matematička analiza 2: funkcije jedne varijable, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [11] R. L. Miller, On proofs without words, dostupno na <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf?fbclid=IwAROSFy4bZ1gyzpZ-uxbeRxPZJYQV6w95o01-m6YHSAEa77SOPUXTsFRWi1I> (listopad 2018.)

- [12] Roger B. Nelsen, Cameos for calculus visualization in the first-year course, The Mathematical Association of America, Washington, 2015.
- [13] R. B. Nelsen, Proofs without words, Exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- [14] R. B. Nelsen, Proofs without words II, More exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, Washington, 2000.
- [15] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika I, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- [16] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika II, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [17] D. Palman, Planimetrija, Element, Zagreb, 1999.
- [18] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 1994.
- [19] B. Širola, Matematika 2, dostupno na [https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mat2pf/skripta/MAT2\\_1.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mat2pf/skripta/MAT2_1.pdf) (siječanj 2019.)
- [20] Nizovi, dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/analiza/files/nizovi2.pdf> (prosinac 2018.)



# Sažetak

Ovaj rad bavi se dokazima matematičkih tvrdnji korištenjem slika. Dokazi bez riječi su vizualne interpretacije jednostavnih i složenih matematičkih tvrdnji. Vizualni dokazi čitatelju koncizno prikazuju zašto određeni teorem vrijedi i kako doći do njegove istinitosti. No upravo zbog te konciznosti ponekad dolazi do pogrešnog shvaćanja dokaza ili nerazmatranja svih slučajeva. Stoga, važnu ulogu ima detaljna analiza koja se provodi kako bi se vizualni dokaz shvatio u cijelosti. Uz kvalitetnu analizu vizualni dokazi mogu biti zamjena za formalan dokaz.

# Summary

This paper is all about presenting proofs of mathematical statements by using only pictures. Proofs without words are visual interpretations of simple and complex mathematical statements. Visual proofs are concise at presenting mathematical claims which is why they allow the reader to spot why a certain claim is valid and how to prove it. For being so concise it's also common for a proof without words to be misunderstood. To avoid that it's important to also have a detailed analysis next to the picture in order to help understand the real issue completely. Using a detailed analysis even proofs without words could be considered equal to formal proofs.

# Životopis

Anja Kocijan rođena je 16. 07. 1989. godine u Varaždinu gdje je pohađala IV. osnovnu školu, a zatim Prvu gimnaziju Varaždin, opći smjer koji završava 2008. godine. Školovanje je nastavila u Zagrebu gdje je 2010. godine upisala nastavnički smjer na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu. Na istom fakultetu 2016. godine upisuje nastavnički smjer Diplomskog sveučilišnog studija Matematika.