Polubeskonačno programiranje

Čudina, Dorian

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dorian Čudina

POLUBESKONAČNO PROGRAMIRANJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, veljača, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu navodimo pregled osnovne teorije o rješavanju problema polubeskonačnog programiranja oblika

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g(x, \omega) \le 0,& \quad \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

pri čemu je Ω (konačan ili beskonačan) skup indeksa, funkcija cilja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, gdje je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ prošireni skup realnih brojeva, te su $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije koje koristimo kako bi opisali ograničenja koja traženo optimalno rješenje mora zadovoljavati. Navedeni optimizacijski problem se rješava u konačno dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ i, ako je skup indeksa Ω beskonačan, rješenje problema mora zadovoljavati beskonačno mnogo uvjeta koji su predstavljeni nejednakostima. Prema tim svojstvima, klasa ovakvih problema nazvana je problemima **polubeskonačnog programiranja** (*eng. semi-infinite programming - SIP*).

Rad je temeljen na Shapirovom članku [7] te je podijeljen u četiri poglavlja. U prvoj je cjelini postavljen problem polubeskonačnog programiranja (P) i pri tome su navedeni i korišteni poznati rezultati iz teorije dualnosti. U drugom poglavlju razmatramo uvjete optimalnosti prvog reda te pripadne uvjete regularnosti na funkcije ograničenja. Treće poglavlje se nadovezuje na *diskretizaciju* obrađenu u prethodnom poglavlju te sadrži važne rezultate o konvergenciji optimalnih rješenja diskretiziranih problema polubeskonačnog programiranja prema optimalnom rješenju općeg problema. U posljednjem su poglavlju opisani poznati primjeri primjena ove teorije.

Poglavlje 1

Problem polubeskonačnog programiranja

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Neka su x i y točke iz $\mathbb{R}^n$.* ***Segment*** *između x i y je skup*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda \in [0, 1] \text{ t.d. } z = \lambda x + (1 - \lambda)y\}.$$

Elemente tog skupa nazivamo ***konveksnim kombinacijama*** *točaka x i y.*

Definicija 2. *Skup svih konveksnih kombinacija skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se* ***konveksna ljuska*** *skupa S i označava se s $conv(S)$. Dakle,*

$$conv(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, a_1, \ldots a_p \in S, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Prema Caratheodoryevom teoremu znamo da u Definiciji (2) p može biti najviše $n + 1$.

Definicija 3. *Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***konveksan*** *ako je $[x, y] \subseteq K$ za sve $x, y \in K$. Posebno, svaki jednočlan skup i prazan skup su također konveksni skupovi.*

Definicija 4. *Za funkciju $f : K \to \mathbb{R}$ definiranu na konveksnom skupu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***konveksna*** *ako za sve $x, y \in K$ i za svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Ako u gornjoj relaciji, za sve $x, y \in K$, $x \neq y$, i za svaki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, vrijedi stroga nejednakost, kažemo da je f ***strogo konveksna****.*
Funkcija f je ***konkavna*** *ako je $-f$ konveksna. Analogno, funkcija f je* ***strogo konkavna*** *ako je $-f$ strogo konveksna.*

Definicija 5. *Kažemo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **odozdo poluneprekidna** na $\mathbb{R}^n$ ako za svaki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira prema x_0 vrijedi*

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Definicija 6. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$. Kažemo da je f **neprekidna u Lipschitzovom smislu** ako postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, takva da za sve $x_1, x_2 \in X$ vrijedi*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c d_X(x_1, x_2).$$

*Takvu konstantu c nazivamo **Lipschitzova konstanta**.*
Posebno, ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tada je f neprekidna u Lipschitzovom smislu ako postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, takva da za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|f(x_1) - f(x_2| \leq c|x_1 - x_2|.$$

Definicija 7. *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je **pravilna** ako je skup $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ neprazan i ako vrijedi $f(x) > -\infty$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$.*

U ovom radu, koristit ćemo sljedeću notaciju. Oznaka ":=" značiti će *jednako po definiciji*. Nadalje, s $\mathcal{F}$ opisujemo skup dopustivih točaka problema (1), odnosno

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x, \omega) \leq 0, \omega \in \Omega\}.$$

Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, s A^T označavamo transponiranu matricu. Za $x \in \mathbb{R}^n$ podrazumijevamo da je vektor stupac te je $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ skalarni produkt dvaju vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 8. *Kažemo da je problem polubeskonačnog programiranja (1) **linearan** ako su i funkcija cilja i funkcija ograničenja linearne po x, odnosno ako problem možemo zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \\ &a(\omega)^T x + b(\omega) \leq 0, \quad \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

za neki vektor $c \in \mathbb{R}^n$ i funkcije $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $b : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definicija 9. *Kažemo da je problem polubeskonačnog programiranja (1) **konveksan** ako je, za svaki $\omega \in \Omega$, funkcija $g(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i ako je funkcija cilja $f(\cdot)$ pravilna, konveksna i odozdo poluneprekidna.*

Definicija 10. ***Dualna funkcija** funkcije $v : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana je s*

$$v^*(x^*) := \sup_x \left\{(x^*)^T x - v(x)\right\}.$$

*S v^{**} označavamo **bidualnu funkciju** od v, odnosno dualnu funkciju funkcije v^*.*

Definicija 11. ***Subdiferencijal*** *$\partial v(x)$, u točki x takvoj da je $v(x)$ konačno, je skup vektora γ takvih da vrijedi*

$$v(y) \geq v(x) + \gamma^T(y - x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Kažemo da je $v(\cdot)$ subdiferencijabilna u točki x ako je $v(x)$ konačno i ako je $\partial v(x)$ neprazan skup.

Osim ako nije navedeno drugačije, subdiferencijal $\partial g(x, \omega)$, gradijent $\nabla g(x, \omega)$ i Hessova matrica $\nabla^2 g(x, \omega)$ funkcije $g(x, \omega)$ računamo u odnosu na x. Nadalje, s $Df(x)$ i $D^2 f(x)$ označavamo diferencijal prvog i drugog reda funkcije $f(x)$. Prisjetimo se i činjenice da ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna, onda su $Df(x)h = h^T \nabla f(x)$ i $D^2 f(x)(h, h) = h^T \nabla^2 f(x) h$.

Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$, s $\mathrm{int}(S)$ označavamo njegov interior. Koristit ćemo funkciju

$$\mathrm{dist}(x, S) := \inf_{y \in S} \|x - y\|$$

kojom *mjerimo* **udaljenost** neke točke $x \in \mathbb{R}^n$ od skupa S. Također, za skupove $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, s

$$\mathbb{D}(A, B) := \sup_{x \in A} \mathrm{dist}(x, B)$$

definiramo **devijaciju** skupa A od skupa B.

Definicija 12. *Neka su X i Y neprazni podskupovi metričkog prostora (M, d). Njihova* ***Hausdorffova udaljenost*** *$d_H(X, Y)$ definirana je s*

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}.$$

Definicija 13. ***Potpornu funkciju*** *skupa S definiramo s*

$$\sigma_S(x) := \sup_{h \in S} h^T x.$$

Ovu funkciju ponekad označavamo i s $\sigma(x, S)$.

Definicija 14. ***Nosač funkcije*** *$h : \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo s*

$$supp(h) := \{\omega \in \Omega : h(\omega) \neq 0\}.$$

Definicija 15. *Skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je* ***konus*** *ako za svaki $x \in C$ i svaki $\lambda \geq 0$ vrijedi $\lambda x \in C$.*
Ako je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konus, onda skup $C_{x_0} := x_0 + C = \{x_0 + x : x \in C\}$ ***zovemo konus s vrhom u*** *x_0.*
Ako je konus ujedno i konveksan skup, onda se on naziva ***konveksni konus****.*

U pojedinim dijelovima rada, pozivamo se na sljedeće rezultate.

Teorem 1. ***Farkaseva lema***
Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Tada je točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje istinita:

1) postoji $x \in \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi $Ax = b$ i $x \geq 0$,

2) postoji $y \in \mathbb{R}^m$ takav da vrijedi $A^T y \geq 0$ i $b^T y < 0$.

Teorem 2. ***Fenchel-Moreau***
Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Tada vrijedi $f = f^{**}$ ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

1) f je odozdo poluneprekidna i konveksna,

2) $f \equiv +\infty$,

3) $f \equiv -\infty$.

1.2 Dualnost

Kako bismo postavili dualni problem problemu polubeskonačnog programiranja, moramo ugraditi ograničenja u pogodan prostor funkcija koji je uparen s nekim dualnim prostorom. Neka je $\mathcal{Y}$ linearni prostor funkcija $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$. Uzmimo preslikavanje $g(x, \cdot)$ iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathcal{Y}$, odnosno $g(x, \cdot) \in \mathcal{Y}$ je realna funkcija definirana na Ω. Ovisno o tome što pretpostavimo za skup indeksa Ω i za ograničenja $g(x, \cdot)$, pri odabiru pogodnog prostora funkcija $\mathcal{Y}$ imamo različite mogućnosti. U ovom radu proučavamo dva slučaja prostora $\mathcal{Y}$.

U općenitom slučaju, kada nemamo pretpostavke na strukturu, možemo uzeti $\mathcal{Y} := \mathbb{R}^\Omega$, tj. da je $\mathcal{Y}$ prostor svih funkcija $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ na kojem su definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom. Sada tom prostoru pridružimo linearni prostor funkcija $\gamma^* : \Omega \to \mathbb{R}$ takvih da je samo konačan broj vrijednosti $\gamma^*(\omega)$, $\omega \in \Omega$, različit od nule i označimo taj prostor s $\mathcal{Y}^*$. Za funkciju $\gamma^* \in \mathcal{Y}^*$ definiramo njezin nosač

$$\text{supp}(\gamma^*) := \{\omega \in \Omega : \gamma^*(\omega) \neq 0\}$$

te za $\gamma \in \mathcal{Y}$ i $\gamma^* \in \mathcal{Y}^*$ definiramo skalarni produkt

$$\langle \gamma, \gamma^* \rangle := \sum_{\omega \in \text{supp}(\gamma^*)} \gamma(\omega)\gamma^*(\omega),$$

pri čemu, radi navedenih svojstava funkcije γ^*, znamo da se sumacija vrši po konačnom skupu $\text{supp}(\gamma^*)$.

Drugi slučaj funkcijskog prostora $\mathcal{Y}$ koji analiziramo je slučaj kada vrijedi sljedeća pretpostavka.

(A1) Skup Ω je kompaktan metrički prostor i funkcija $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

Ako vrijedi (A1), možemo uzeti $\mathcal{Y} := C(\Omega)$, gdje $C(\Omega)$ označava prostor svih neprekidnih funkcija $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ na kojem je definirana norma

$$\|\gamma\| := \sup_{\omega\in\Omega} |\gamma(\omega)|.$$

Prostor $C(\Omega)$ je Banachov prostor i njemu pripadajući dual $\mathcal{Y}^*$ je prostor realnih Radonovih mjera na $(\Omega, \mathcal{B})$, gdje je $\mathcal{B}$ Borelova sigma algebra na nepraznom skupu Ω, s pridruženom operacijom skalarnog produkta definiranom integralom

$$\langle \mu, \gamma \rangle := \int_\Omega \gamma(\omega) d\mu(\omega).$$

Dualna norma od $\mu \in C(\Omega)^*$ je $|\mu|(\Omega)$, gdje $|\mu|$ označava totalnu varijaciju mjere μ. Za mjeru $\mu \in C(\Omega)^*$, s $\mathrm{supp}(\mu)$ označavamo njezin nosač, odnosno $\mathrm{supp}(\mu)$ je najmanji zatvoren podskup $\mathbb{Y} \subseteq \Omega$ takav da vrijedi $|\mu|(\Omega \setminus \mathbb{Y}) = 0$. Naravno, ako je

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta(\omega_i),$$

tada mjeri μ pripada konačan nosač koji se sastoji od točaka ω_i za koje je $\lambda_i \neq 0$. Primijetimo da iz pretpostavke (A1) slijedi da je preslikavanje $G : \mathbb{R}^n \to C(\Omega)$, neprekidno.

Uvjete $g(x, \omega) \leq 0, \omega \in \Omega$, možemo zapisati u obliku $G(x) \in K$, gdje je $G : \mathbb{R}^n \to \mathcal{Y}$ dana s $G(x) = g(x, \cdot)$ te je

$$K := \{\gamma \in \mathcal{Y} : \gamma(\omega) \leq 0, \omega \in \Omega\}$$

konus svih funkcija γ iz odgovarajućeg prostora $\mathcal{Y}$ koje zadovoljavaju navedeno svojstvo. Dualni konus konusa K je:

$$K^* := \{\gamma^* \in \mathcal{Y}^* : \langle \gamma^*, \gamma \rangle \leq 0, \forall \gamma \in K\}.$$

Uočimo da vrijedi $K^* = \{\lambda \in \mathcal{Y}^* : \lambda \geq 0\}$, gdje ako uzmemo $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$, uvjet $\lambda \geq 0$ podrazumijeva da je funkcija $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $\lambda(\omega) \geq 0$, za sve $\omega \in \Omega$, dok kada imamo $\mathcal{Y} := C(\Omega)$, tada uvjet $\lambda \geq 0$ znači da je mjera λ nenegativna, odnosno da vrijedi $\lambda(A) \geq 0$, za sve $A \in \mathcal{B}$. Primijetimo također da na analogan način možemo definirati negativni dual $K^{**} \subset \mathcal{Y}$ konusa K^*. U oba navedena slučaja za odabrani funkcijski prostor $\mathcal{Y}$ imamo da vrijedi $K^{**} = K$.

Problemu (1) pridružujemo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, \lambda) := f(x) + \langle \lambda, G(x) \rangle, \quad (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{Y}^*.$$

Dakle, za $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\Omega}$, imamo

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{\omega \in \operatorname{supp}(\lambda)} \lambda(\omega) g(x,\omega),$$

dok, za $\mathcal{Y} = C(\Omega)$, imamo:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \int_{\Omega} g(x,\omega) d\lambda(\omega).$$

U oba slučaja vrijedi

$$\sup_{\lambda \geq 0} L(x,\lambda) = \begin{cases} f(x), & g(x,\omega) \leq 0, \forall \omega \in \Omega, \\ +\infty, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema tome, problem (1) možemo zapisati kao

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \geq 0} L(x,\lambda), \tag{1.2}$$

dok do dualne zadaće dolazimo zamijenom min i max operatora u (1.2), tj. imamo

$$\max_{\lambda \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\lambda). \tag{1.3}$$

Problem (1) označavamo s (P), njemu pripadni dualni problem (1.3) označavamo s (D), dok s $\operatorname{val}(P)$ i s $\operatorname{val}(D)$ označavamo optimalne vrijednosti, odnosno rješenja, tih problema. Skupove rješenja problema (P) i (D) označavamo s $\operatorname{Sol}(P)$ i $\operatorname{Sol}(D)$. Primijetimo da iz min-max formulacija (1.2) i (1.3) direktno slijedi

$$\operatorname{val}(P) \geq \operatorname{val}(D),$$

tj. vrijedi svojstvo **slabe dualnosti**.

Definicija 16. *Kažemo da vrijedi svojstvo* ***jake dualnosti*** *ako je* $val(P) = val(D)$.

Parametrizirajmo sada dualni problem na sljedeći način.

$$\max_{\lambda \in \mathcal{Y}^*} \phi(\lambda, y),$$

gdje je

$$\phi(\lambda, y) := \begin{cases} \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ L(x,\lambda) - y^T x \right\}, & \lambda \in K^*, \\ -\infty, & \lambda \notin K^*. \end{cases}$$

Uočimo da je funkcija $\phi : \mathcal{Y}^* \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ infimum afinih funkcija pa je stoga ta funkcija i konkavna. Odavde slijedi da je minimizacijska funkcija dana s

$$\theta(y) := \inf_{\lambda \in \mathcal{Y}^*} \{-\phi(\lambda, y)\} = -\sup_{\lambda \in \mathcal{Y}^*} \phi(\lambda, y) \tag{1.4}$$

konveksna funkcija s vrijednostima u $\overline{\mathbb{R}}$. Očito je $\mathrm{val}(D) = -\theta(0)$.

Može se pokazati da je dualna funkcija od $\theta(y)$ zapravo

$$\theta^*(y^*) = \sup_{\lambda \in K^*} L^{**}(y^*, \lambda),$$

gdje je $L^{**}(\cdot, \lambda)$ bidualna funkcija od $L(\cdot, \lambda)$. Štoviše, ako je problem polubeskonačnog programiranja (1) konveksan, tada je, za svaki $\lambda \in K^*$, funkcija $L(\cdot, \lambda)$ pravilna, konveksna i odozdo poluneprekidna. Sada iz Fenchel-Moreauovog teorema slijedi da se, za svaki $\lambda \in K^*$, funkcija $L^{**}(\cdot, \lambda)$ podudara s $L(\cdot, \lambda)$ pa vrijedi

$$\theta^*(y^*) = \sup_{\lambda \in K^*} L(y^*, \lambda).$$

Budući da je $\theta^{**}(0) = -\inf_{y^* \in \mathbb{R}^n} \theta^*(y^*)$, iz (1.2) slijedi da je $\mathrm{val}(P) = -\theta^{**}(0)$. Dodatno, ako je $\theta^{**}(0)$ konačan, vrijedi

$$\partial\theta^{**}(0) = \arg\max_{y^* \in \mathbb{R}^n} \{-\theta^*(y^*)\} = -\arg\min_{y^* \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{\lambda \in K^*} L(y^*, \lambda) \right\}$$

pa iz toga imamo da je $\mathrm{Sol}(P) = -\partial\theta^{**}(0)$. Prema rezultatima iz teorije dualnosti, ova razmatranja dovode nas do sljedećeg važnog rezultata.

Teorem 3. *Pretpostavimo da je problem polubeskonačnog programiranja (1) konveksan te da vrijedi $\theta^{**}(0) < +\infty$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *$val(D) = val(P)$ ako i samo ako je funkcija $\theta(y)$ odozdo poluneprekidna u $y = 0$,*

2. *$val(D) = val(P)$ i $Sol(P)$ je neprazan ako i samo ako je funkcija $\theta(y)$ subdiferencijabilna u $y = 0$ i u tom slučaju je $Sol(P) = -\partial\theta(0)$.*

Prva tvrdnja prethodnog teorema daje nužne i dovoljne uvjete za svojstvo jake dualnosti. Napomenimo da u nekim slučajevima nije jednostavno provjeriti zadovoljava li $\theta(y)$ svojstvo poluneprekidnosti odozdo. Jasno je da ako je $\theta(y)$ neprekidna u $y = 0$, onda je i odozdo poluneprekidna u $y = 0$. Iz konveksnosti od $\theta(\cdot)$ imamo da ako je $\theta(0)$ konačan, tada je $\theta(y)$ neprekidna u $y = 0$ ako i samo ako postoji okolina od 0 takva da je $\theta(y) < +\infty$ za svaki y iz te okoline. To nas dovodi do sljedećeg rezultata.

Teorem 4. *Pretpostavimo da je problem polubeskonačnog programiranja (1) konveksan i da je val(P) konačno. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *θ je neprekidna u nuli,*
2. *Sol(P) je neprazan i ograničen,*
3. *val(D) = val(P) i Sol(P) je neprazan i ograničen,*
4. *postoji okolina $\mathcal{N}$ od $0 \in \mathbb{R}^n$ takva da za svaki $y \in \mathcal{N}$ postoji $\lambda \in K^*$ takav da vrijedi*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{L(x,\lambda) - y^T x\right\} > -\infty.$$

Drugim riječima, ako je problem polubeskonačnog programiranja (P) konveksan i ako je skup optimalnih rješenja tog problema Sol(P) neprazan i ograničen, tada vrijedi svojstvo jake dualnosti. Primijetimo da navedeni rezultati ne uključuju pretpostavke na strukturu skupa indeksa Ω i funkcije ograničenja $g(x,\cdot)$ te ne govore o egzistenciji optimalnog rješenja dualnog problema (D).

Pretpostavimo sada da vrijedi (A1). Kao što je navedeno ranije, u tom slučaju možemo uzeti $\mathcal{Y} = C(\Omega)$ te pripadni dualni prostor $\mathcal{Y}^* = C(\Omega)^*$ konačnih realnih mjera na Ω. Promotrimo problem

$$\begin{gathered}\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g(x,\omega) + z(\omega) \le 0, \quad \omega \in \Omega,\end{gathered} \tag{1.5}$$

parametriziran s $z \in \mathcal{Y}$. Neka je $v(z)$ optimalna vrijednost problema (1.5). Jasno je da se, za $z = 0$, problem (1.5) podudara s problemom polubeskonačnog programiranja (P) te da je tada $v(0) = \mathrm{val}(P)$. Prema standardnim rezultatima teorije dualnosti, slijedi da je $\mathrm{val}(D) = v^{**}(0)$, pri čemu su dualni problem (D) i dualne operacije određene u odnosu na prostore $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}^*$. Također, ako je problem (P) konveksan, tada je i funkcija $v : C(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna. Zato možemo iskoristiti Fenchel-Moreauov teorem prema kojem imamo da, ako je problem (P) konveksan i ako je $\mathrm{val}(D)$ konačno, tada je $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$ ako i samo ako je funkcija $v(z)$ odozdo poluneprekidna u $z = 0$.

Definicija 17. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ te neka je $dom f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ neprazan skup. Kažemo da vrijedi* ***Slaterov uvjet*** *za problem (P) ako postoji $\bar{x} \in dom f$ takav da vrijedi $g(\bar{x},\omega) < 0$, za sve $\omega \in \Omega$.*

Budući da vrijedi pretpostavka (A1), Ω je kompaktan skup i $g(\bar{x},\cdot)$ je neprekidna pa uvjet $g(\bar{x},\omega) < 0$, za sve $\omega \in \Omega$, implicira da postoji $\epsilon > 0$ takav da je $g(\bar{x},\omega) < -\epsilon$, za sve $\omega \in \Omega$. Drugim riječima, to znači da ako je zadovoljen Slaterov uvjet, tada $G(\bar{x})$ (sjetimo se da je $G(\bar{x})$ zapravo funkcija $g(\bar{x},\cdot)$ gledana kao element skupa $C(\Omega)$) pripada interioru skupa $K \subset C(\Omega)$. Iz ove posljednje činjenice nadalje slijedi da postoji okolina nulfunkcije u $C(\Omega)$ takva da je $v(z) \le f(\bar{x}) < +\infty$ za sve z iz te okoline, odnosno da je

$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(v)), \tag{1.6}$$

što nazivamo **svojstvom regularnosti**.

Može se dokazati da vrijedi i obratna tvrdnja, a posebno i sljedeći rezultat.

Teorem 5. *Neka vrijedi (A1). Pretpostavimo da je problem (P) konveksan te neka je val(P) konačno. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *funkcija cilja $v(z)$ problema (P) je neprekidna u $z = 0$,*
2. *vrijedi svojstvo regularnosti (1.6),*
3. *vrijedi Slaterov uvjet,*
4. *skup Sol(D) je neprazan i ograničen,*
5. *val(P) = val(D) i skup Sol(D) je neprazan i ograničen.*

Napomenimo da kada govorimo o ograničenosti skupa Sol(D) podrazumijevamo da se radi o ograničenosti u odnosu na normu totalne varijacije na $C(\Omega)^*$, tj. u odnosu na dualnu normu sup-norme na $C(\Omega)$. Također, napomenimo i da ako je $\mu \in C(\Omega)^*$ nenegativna mjera, tada je njena totalna varijacija jednaka $\mu(\Omega)$, a ako je $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta(\omega_i)$, tada je njena totalna varijacija jednaka $\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|$.

Sjetimo se Definicije (8) i pretpostavimo da imamo linearan problem polubeskonačnog programiranja. U prostoru $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^{\Omega}$ dualna zadaća tog problema je

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \ge 0} \sum_{\omega \in \operatorname{supp}(\lambda)} & \lambda(\omega) b(\omega), \lambda \in \mathcal{Y}^* \\ c + \sum_{\omega \in \operatorname{supp}(\lambda)} & \lambda(\omega) a(\omega) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

za $\lambda \in \mathcal{Y}^*$. Minimizacijska funkcija $\theta(y)$, definirana s (1.4), sada ima oblik

$$\theta(y) = \inf \left\{ -\sum \lambda(\omega) b(\omega) : c + \sum \lambda(\omega) + a(\omega) = y, \lambda \in K^* \right\}.$$

Prema ovim razmatranjima, za linearni problem polubeskonačnog programiranja, uvjeti $1 - 4$ Teorema 4, ekvivalentni su uvjetu

$$0 \in \operatorname{int} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = c + \sum \lambda(\omega) a(\omega), \lambda \in K^* \right\}. \tag{1.8}$$

Uvjet (1.8) jedan je od poznatijih rezultata u teoriji dualnosti linearnih problema polubeskonačnog programiranja. Također, može se dokazati da je taj rezultat ekvivalentan uvjetu

$$-c \in \mathrm{int}(M),$$

gdje je M konveksni konus generiran vektorima $a(\omega)_{\omega\in\Omega}$.

1.3 Diskretizacija

Postoji značajna veza između svojstva jake dualnosti i diskretizacije problema (1). Za dani neprazan i konačan skup $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\} \subset \Omega$ promotrimo optimizacijski problem

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ g(x, \omega_i) \leq 0,& \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Problem (1.9) označavamo s (P_m). Očito je skup dopustivih točaka problema (P) podskup skupa dopustivih točaka problema (P_m) pa iz toga slijedi da je $\mathrm{val}(P) \geq \mathrm{val}(P_m)$.

Definicija 18. *Kažemo da je problem (P)* ***reducibilan*** *ako postoji diskretizacija (P_m) takva da je $val(P) = val(P_m)$.*

Definicija 19. *Kažemo da je problem (P)* ***diskretizibilan*** *ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji diskretizacija (P_m) takva da vrijedi $val(P_m) \geq val(P) - \epsilon$.*

Dakle, problem (P) je diskretizibilan ako postoji niz $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konačnih diskretizacija takvih da $\mathrm{val}(P_m) \to \mathrm{val}(P)$. Ovo svojstvo nazivamo *slaba diskretizabilnost* kako bismo dodatno naglasili da se ne radi o konvergenciji $\mathrm{val}(P_m) \to \mathrm{val}(P)$ *za svaki niz* konačnih diskretizacija. Konvergenciju ćemo posebno razmotriti u jednom od sljedećih poglavlja.

Dualna zadaća problema (1.9) je

$$\max_{\lambda\geq 0} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m(x, \lambda), \tag{1.10}$$

gdje je

$$\mathcal{L}_m(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x, \omega_i), \quad (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Lagrangeova funkcija diskretiziranog problema. Problem (1.10) označavamo s (D_m). Prema slaboj dualnosti, za diskretizirani problem vrijedi $\mathrm{val}(P_m) \geq \mathrm{val}(D_m)$. U oba ranije navedena slučaja prostora $\mathcal{Y}$, ako je $\lambda \in \mathcal{Y}^*$ takav da vrijedi $\mathrm{supp}(\lambda) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m\}$, imamo da je

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \mathcal{L}_m(x, \lambda),$$

iz čega nadalje slijedi da je

$$\mathrm{val}(D) \geq \mathrm{val}(D_m).$$

Uz blago nepoštivanje prethodnih oznaka, ako je $\lambda \in (\mathbb{R}^\Omega)^*$, podrazumijevati ćemo da je taj λ m-dimenzionalni vektor kojeg čine elementi od $\lambda(\omega)$ različiti od nule, dok u slučaju kada je $\lambda \in C(\Omega)^*$, podrazumijevati ćemo da je $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta(\omega_i)$.

U preostalom dijelu ovog poglavlja, koristimo sljedeću pretpostavku.

(A2) Za svaku diskretizaciju za koju je $\mathrm{val}(P_m)$ konačno, vrijedi $\mathrm{val}(P_m) = \mathrm{val}(D_m)$ i postoji optimalno rješenje problema (D_m).

Ova pretpostavka vrijedi u sljedeća dva važna slučaja problema polubeskonačnog programiranja.

1) Slučaj kada je problem polubeskonačnog programiranja (1) linearan - pa je stoga njegova diskretizacija (P_m) problem linearnog programiranja.

2) Slučaj kada je problem polubeskonačnog programiranja (1) konveksan i zadovoljava Slaterov uvjet. Uočimo da kada Slaterov uvjet vrijedi za problem (P), tada, jasno, vrijedi i za svaku njemu pripadnu diskretizaciju (P_m).

Važan rezultat za rješavanje linearnih problema polubeskonačnog programiranja daje nam sljedeći teorem.

Teorem 6. *Neka je $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$ te neka je (D) dualni problem problema (P). Tada vrijedi:*

1) ako je $val(P) = val(D)$, tada je problem (P) diskretizibilan.

2) ako je $val(P) = val(D)$ i ako postoji optimalno rješenje dualnog problema (D), tada je problem (P) reducibilan.

Štoviše, ako pretpostavka (A2) vrijedi, tada vrijede i obrati ovih tvrdnji.

Dokaz. Neka je $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$. Pretpostavimo da je $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$. Prema definiciji dualnog problema (D), imamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\bar{\lambda} \in \mathcal{Y}^*$, takav da je $\bar{\lambda} \geq 0$ i

$$\inf_{x \in X} L(x, \bar{\lambda}) \geq \mathrm{val}(D) - \epsilon. \tag{1.11}$$

Budući da je $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$, znamo da je $L(x, \bar{\lambda})$ Lagrangeova funkcija diskretizacije (P_m) definirane na skupu $\{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m\} = \mathrm{supp}(\bar{\lambda})$. To znači da vrijedi

$$\mathrm{val}(P_m) \geq \inf_{x \in X} L(x, \bar{\lambda}).$$

Iz navedenih razmatranja slijedi:

$$\mathrm{val}(P_m) \geq \inf_{x\in X} L(x, \bar{\lambda}) \geq \mathrm{val}(D) - \epsilon = \mathrm{val}(P) - \epsilon, \tag{1.12}$$

što znači da je problem (P) diskretizibilan.

Kako bismo dokazali drugu tvrdnju, pretpostavimo da je $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$ i da postoji optimalno rješenje dualnog problema (D) te označimo to rješenje s $\bar{\lambda}$. Tada (1.11) vrijedi za $\epsilon = 0$ što, uz nejednakost $\mathrm{val}(P) \geq \mathrm{val}(P_m)$, implicira da je $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(P_m)$. Dakle, problem (P) je reducibilan.

Slično, pretpostavimo da uvjet (A2) vrijedi i da je problem (P) diskretizibilan, tj. da za svaki $\epsilon > 0$ postoji diskretizacija (P_m) takva da je $\mathrm{val}(P_m) \geq \mathrm{val}(P) - \epsilon$. Tada vrijedi:

$$\mathrm{val}(P_m) + \epsilon \geq \mathrm{val}(P) \geq \mathrm{val}(D) \geq \mathrm{val}(D_m) = \mathrm{val}(P_m).$$

Slijedi da je $|\mathrm{val}(P) - \mathrm{val}(D)| \leq \epsilon$, a budući da je $\epsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$.

Kako bismo dokazali obrat druge tvrdnje teorema, primijetimo da ako vrijedi $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(P_m)$ i ako je $\lambda \in \mathbb{R}^m$ optimalno rješenje dualnog problema (D_m), tada je odgovarajući $\lambda \in \mathcal{Y}^*$ optimalno rješenje problema (D).

■

Teorem 6 nam, zajedno s rezultatima koje smo naveli pod naslovom *Dualnost*, daje nekoliko dovoljnih i nužnih uvjeta za diskretizibilnost i reducibilnost optimizacijskog problema (P). Posebno, iz druge tvrdnje Teorema 5 slijedi sljedeći korolar.

Korolar 1. *Neka je problem (P) konveksan te neka je skup $Sol(P)$ neprazan i ograničen. Tada je problem (P) diskretizibilan.*

Kada provjeravamo reducibilnost optimizacijskog problema (P), prvo što provjeravamo je postoji li optimalno rješenje pripadnog dualnog problema (D). Kako bismo osigurali egzistenciju optimalnog rješenja problema (D), moramo uvesti dodatne topološke uvjete. Pretpostavimo da vrijedi (A1) te za funkcijski prostor uzmimo $\mathcal{Y} = C(\Omega)$. Prisjetimo se da je tada dualni prostor $\mathcal{Y}^*$ prostor konačnih realnih mjera na Ω. Posebno, možemo promatrati mjere oblika $\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta(\omega_i)$, tj. mjere s konačnim nosačem. Taj nosač sastoji se od točaka $\omega_i \in \Omega$ takvih da je $\lambda_i \neq 0$. Za takvu mjeru μ vrijedi:

$$L(x, \mu) = f(x) + \int_\Omega g(x, \omega) d\mu(\omega) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g(x, \omega_i) = \mathcal{L}_m(x, \lambda), \tag{1.13}$$

iz čega slijedi da je $\mathrm{val}(D) \geq \mathrm{val}(D_m)$. Prema Teoremu 5 znamo da ako je problem (P) konveksan i takav da zadovoljava Slaterov uvjet, tada je skup $\mathrm{Sol}(D)$ neprazan i ograničen. Napomenimo da govorimo o dualnom problemu (D) definiranom nad skupom Borelovih mjera te je posebno važno uočiti da pitanje egzistencije mjere s konačnim nosačem u tom skupu nije trivijalno pitanje. U vezi s tim opažanjem, imamo sljedeći rezultat.

Teorem 7. *Pretpostavimo da vrijedi (A1). Neka je problem* (P) *konveksan, skup* $dom f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ *zatvoren te pretpostavimo da vrijedi* $val(P) < +\infty$ *i da je zadovoljen sljedeći uvjet:*

(A3) Za svaki niz točaka $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{n+1} \in \Omega$ *postoji točka* $\bar{x} \in dom f$ *takva da je* $g(\bar{x}, \omega'_i) < 0$*,* $i = 1, \ldots, n+1$*.*

Tada postoji niz točaka $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \in \Omega$*, gdje je* $m \leq n$*, takvih da za pripadnu diskretizaciju* (P_m) *i njoj pripadni dualni problem* (D_m) *vrijedi:*

$$val(P) = val(P_m) = val(D_m) = val(D).$$

Uvjet (A3) drugim riječima znači da Slaterov uvjet vrijedi za svaku diskretizaciju (P_m), gdje je $m \leq n+1$. Prema Teoremu 5, s uvjetom da je $\text{val}(P_m)$ konačno, to nadalje implicira da je $\text{Sol}(D_m)$ neprazan i ograničen. Jasno, ako problem (P) zadovoljava Slaterov uvjet, zadovoljen je i uvjet (A3).

Prema definiciji, problem (P) je reducibilan ako postoji diskretizacija (P_m) takva da je $\text{val}(P) = \text{val}(P_m)$. Ako je uz to, problem (P) i konveksan, tada postoji diskretizacija sa ograničenjima na m navedenima u tvrdnji sljedećeg teorema. Prije navođenja teorema i njegovog dokaza, prisjetimo se da, prema Hellyevom teoremu, ako je $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ konačna familija konveksnih podskupova od $\mathbb{R}^n$ takva da je presjek bilo kojih $k+1$ $(k < n)$ podskupova iz te familije neprazan, tada je $\bigcap_{i=1}^n A_i$ neprazan.

Teorem 8. *Pretpostavimo da je problem* (P) *konveksan i reducibilan. Tada postoji diskretizacija* (P_m) *takva da je* $val(P) = val(P_m)$ *i*

1) *ako je* $val(P) = +\infty$ *tada je* $m \leq n+1$*,*

2) *ako je* $val(P) < +\infty$ *tada je* $m \leq n$*.*

Dokaz. Neka je (P_k) diskretizacija od (P) takva da je $\text{val}(P_k) = \text{val}(P)$ te neka je $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ odgovarajući diskretizacijski skup. Nadalje, neka je

$$A_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \text{val}(P)\}$$

te neka su

$$A_i := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x, \omega_i) \leq 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Budući da su funkcije $f(\cdot)$ i $g(\cdot, \omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ konveksne, skupovi A i A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, su također konveksni.

Pretpostavimo sada da je $\text{val}(P) = +\infty$. Uočimo da je u tom slučaju $A_0 = \text{dom}(f)$. Budući da je i $\text{val}(P_k) = +\infty$, imamo da je skup $\bigcap_{i=0}^k A_i$ prazan. Prema Hellyevom teoremu, slijedi da postoji podfamilija familije $\{A_1, \ldots, A_k\}$ koja ne sadrži više od $n+1$ skup te koja je takva da je presjek njezinih elemenata prazan skup. Sada, ovisno o tome sadrži li ta podfamilija skup A_0, imamo traženu diskretizaciju (P_m) takvu da je $\mathrm{val}(P_m) = +\infty$ i $m \leq n$ ili $m \leq n + 1$. Time smo dokazali prvu tvrdnju teorema.

Drugu tvrdnju ćemo dokazati kontradikcijom. Pretpostavimo da je $\mathrm{val}(P) < +\infty$ te da druga tvrdnja teorema ne vrijedi. Tada je za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ presjek skupa A_0 i bilo kojih $n \leq k$ skupova A_i, $i = 1, 2, \dots, k$ neprazan. Primijetimo da je presjek svih skupova A_i, $1 \leq i \leq k$, neprazan jer bi u protivnom skup dopustivih točaka problema (P_k) bio prazan što bi značilo da je $\mathrm{val}(P_k) = +\infty$. Dakle, za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, presjek $n + 1$ skupova iz familije $\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ je neprazan. Sada prema Hellyevom teoremu, slijedi da je presjek svih skupova A_i, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, neprazan. Neka je $\bar{x} \in \bigcap_{i=0}^{k} A_i$. To znači da je $\bar{x}$ dopustiva točka problema (P_k), a budući da je $\bar{x}$ posebno i element skupa A_0, slijedi da je $f(\bar{x}) < \mathrm{val}(P_k)$ što je kontradikcija.

■

Poglavlje 2

Uvjeti optimalnosti prvog reda

2.1 Uvjeti optimalnosti prvog reda

Iz min-max formulacija (1.2) i (1.3) slijedi da ako je $\bar{x}$ optimalno rješenje problema (P) i ako je $\bar{\lambda}$ optimalno rješenje dualnog problema (D) te ako vrijedi $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$, tada je $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sedlasta točka Lagrangeove funkcije $L(x, \lambda)$, odnosno vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{x} &\in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda}), \\ \bar{\lambda} &\in \arg\max_{\lambda \in K^*} L(\bar{x}, \lambda). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Obratno, ako je $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sedlasta točka od $L(x, \lambda)$, tada je $\bar{x}$ optimalno rješenje problema (P), $\bar{\lambda}$ je optimalno rješenje problema (D) te vrijedi $\mathrm{val}(P) = \mathrm{val}(D)$.

Drugi uvjet u (2.1) znači da je $\bar{\lambda}$ najveća moguća vrijednost izraza $\langle \lambda, G(\bar{x}) \rangle$ po svim $\lambda \in K^*$. Ako $G(\bar{x}) \notin K$, tada $\sup_{\lambda \in K^*} \langle \lambda, G(\bar{x}) \rangle = +\infty$, pa je stoga nužno $G(\bar{x}) \in K$. U tom slučaju, nadalje imamo da je $\langle \lambda, G(\bar{x}) \rangle \leq 0$ iz čega slijedi da se maksimum postiže za $\lambda = 0$ i jednak je 0. Dakle, uvjet

$$\bar{\lambda} \in \arg\max_{\lambda \in K^*} L(\bar{x}, \lambda)$$

vrijedi ako i samo ako su $G(\bar{x}) \in K$, $\lambda \in K^*$ i $\left\langle \bar{\lambda}, G(\bar{x}) \right\rangle = 0$. Primijetimo, također, da ako su $G(\bar{x}) \in K$ i $\bar{\lambda} \in K^*$, tada je uvjet $\left\langle \bar{\lambda}, G(\bar{x}) \right\rangle = 0$ ekvivalentan uvjetu $\mathrm{supp}(\bar{\lambda}) \subset \Delta(\bar{x})$, gdje je

$$\Delta(\bar{x}) := \{\omega \in \Omega : g(\bar{x}, \omega) = 0\}$$

skup indeksa postojećih ograničenja za dani $\bar{x}$. Ova posljednja razmatranja vrijede i za prostor $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$ i za prostor $\mathcal{Y} = C(\Omega)$.

U idućim razmatranjima koristimo sljedeći važan rezultat koji je dokazao Rogosinsky.

Teorem 9. *Neka je Ω metrički prostor s pridruženom Borelovom sigma algebrom $\mathcal{B}$, neka su $q_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, izmjerive funkcije te neka je μ nenegativna mjera na $(\Omega, \mathcal{B})$ takva da su $q_1, q_2, \ldots, q_k$ μ-integrabilne. Tada postoji nenegativna mjera ν na $(\Omega, \mathcal{B})$ koja ima konačan nosač s najviše k točaka u kojima vrijedi $\int_\Omega q_i d\mu = \int_\Omega q_i d\nu$, za sve $i = 1, 2, \ldots, k$.*

2.2 Konveksni problemi polubeskonačnog programiranja

U ovom dijelu pretpostavljamo da je problem (P) konveksan. Ako je $\bar{\lambda} \in K^*$, tada je $L(\cdot, \bar{\lambda})$ konveksan te stoga prvi uvjet u (2.1) vrijedi ako i samo ako je $0 \in \partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Prema tome, ako je (P) konveksan, uvjeti iz (2.1) mogu se zapisati u sljedećem ekvivalentnom obliku:

$$\begin{gathered} 0 \in \partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}), \\ g(\bar{x}, \omega) \leq 0, \omega \in \Omega, \\ \bar{\lambda} \geq 0 \\ \operatorname{supp}(\bar{\lambda}) \subset \Delta(\bar{x}). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Uvjete (2.2) možemo koristiti kao uvjete optimalnosti u oba razmatrana slučaja funkcijskog prostora $\mathcal{Y}$. S $\Lambda(\bar{x})$ označavamo skup Lagrangeovih multiplikatora $\bar{\lambda} \in \mathcal{Y}^*$ koji zadovoljavaju uvjete (2.2).

Za linearni problem polubeskonačnog programiranja (1.1) u slučaju kada je $\mathcal{Y} = C(\Omega)$ vrijedi:

$$\partial L(\bar{x}, \mu) = \{\nabla L(\bar{x}, \mu)\} = \left\{ c + \int_\Omega a(\omega) d\mu(\omega) \right\}, \tag{2.3}$$

što znači da uvjete (2.2) možemo ekvivalentno zapisati kao

$$\begin{gathered} a(\omega)^T \bar{x} + b(\omega) \leq 0, \omega \in \Omega, \\ c + \int_\Omega a(\omega) d\mu(\omega) = 0, \mu \geq 0, \\ \int_\Omega \left[a(\omega)^T \bar{x} + b(\omega) \right] d\mu(\omega) = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Za $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^\Omega$, uvjeti (2.4) se mijenjaju na način da se integrali zamijene odgovarajućim sumama. Prva dva uvjeta predstavljaju uvjete dopustivosti za linearni problem polubeskonačnog programiranja i njegov dualni problem (respektivno), dok posljednji, treći uvjet u (2.4), je uvjet komplementarnosti. Prisjetimo se da je, prema prethodnim razmatranjima, točka $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ koja zadovoljava uvjete (2.2), sedlasta točka Lagrangeove funkcije.

Iz navedenoga slijedi Teorem 10.

Teorem 10. *Neka je problem* (P) *konveksan te neka su* $\bar{x} \in \mathcal{Y}$ *i* $\bar{\lambda} \in \mathcal{Y}^*$ *točke koje zadovoljavaju uvjete (2.2) (u bilo kojem od spomenutih slučajeva prostora* $\mathcal{Y}$*). Tada su* $\bar{x}$ *i* $\bar{\lambda}$ *optimalna rješenja problema* (P) *i* (D)*, respektivno, te vrijedi* $val(P) = val(D)$*.*

Prema ovom teoremu, uvjeti (2.2) su dovoljni kako bi se osigurala egzistencija optimalnih rješenja. S druge strane, kako bi se osigurala egzistencija Lagrangeovih multiplikatora, moraju vrijediti i određeni uvjeti regularnosti. Pomoću Teorema 5 dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 11. *Neka vrijedi (A1). Pretpostavimo da je problem* (P) *konveksan te da je* $\bar{x}$ *optimalno rješenje tog problema. Tada je, u slučaju* $\mathcal{Y} = C(\Omega)$*, skup Lagrangeovih multiplikatora* $\Lambda(\bar{x})$ *neprazan i ograničen ako i samo ako vrijedi Slaterov uvjet.*

Teorem 11 govori nam da Slaterov uvjet osigurava postojanje Lagrangeovih multiplikatora u obliku mjera. Označimo sada s $\Lambda_m(\bar{x})$ skup svih mjera koje imaju konačan nosač s najviše m točaka i takvih da zadovoljavaju uvjete (2.2). Odnosno, $\mu \in \Lambda_m(\bar{x})$ ako je $\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta(\omega_i)$ i ako vrijedi

$$\begin{aligned} 0 \in \partial\left[f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g(\bar{x}, \omega_i)\right], \\ g(\bar{x}, \omega) \leq 0, \omega \in \Omega, \\ \lambda \geq 0, \\ \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\} \subset \Delta(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Napomenimo da prema Moreau-Rockafellar teoremu, imamo da, za $\lambda \geq 0$, vrijedi:

$$\partial\left[f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g(\bar{x}\right] = \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g(\bar{x}, \omega_i). \tag{2.6}$$

Primijetimo da su uvjeti regularnosti koji su potrebni da bi gornja formula vrijedila u slučaju koji promatramo ispunjeni jer su funkcije $g(\cdot, \omega_i)$ neprekidne.

Teorem 12. *Neka vrijedi (A1). Pretpostavimo da je problem* (P) *konveksan te neka je* $\bar{x}$ *optimalno rješenje od* (P)*. Tada je skup* $\Lambda_n(\bar{x})$ *neprazan i ograničen ako Slaterov uvjet vrijedi. Obratno, ako je skup* Λ_{n+1} *neprazan i ograničen, tada vrijedi Slaterov uvjet.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi Slaterov uvjet i pokažimo da je skup $\Lambda_n(\bar{x})$ neprazan i ograničen. Prisjetimo se da ako vrijedi Slaterov uvjet, tada znamo da je $\Lambda(\bar{x})$ neprazan i ograničen. Budući da je $\Lambda_n(\bar{x})$ podskup skupa $\Lambda(\bar{x})$, slijedi da je $\Lambda_n(\bar{x})$ ograničen. Neka je $\mu \in C(\Omega)^*$ mjera koja zadovoljava uvjete (2.2), odnosno $\mu \in \Lambda(\bar{x})$ te definirajmo funkciju $h(x) := \int_\Omega g(x, \omega) d\mu(\omega)$. Budući da su funkcije $g(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$, realne i konveksne funkcije i budući da je $\mu \geq 0$, funkcija h je konveksna. Također, budući da je funkcija $g(x, \cdot)$ neprekidna, a Ω je kompaktan, $g(x, \cdot)$ je ograničena pa iz toga slijedi da je funkcija $h(x)$ realna. Sada, prema Moreau-Rockafellar teoremu, vrijedi $\partial L(\bar{x}, \mu) = \partial f(\bar{x}) + \partial h(\bar{x})$. Koristeći jedan od Strassenovih teorema, slijedi

$$\partial h(\bar{x}) = \int_\Omega \partial g(\bar{x}, \omega) d\mu(\omega),$$

odnosno, $\partial h(\bar{x})$ se sastoji od vektora oblika $\int_\Omega \gamma(\omega) d\mu(\omega)$ za izmjerive $\gamma(\omega) \in \partial g(\bar{x}, \omega)$. Prema tome, prvi od uvjeta (2.2) daje nam

$$q + \int_\Omega \gamma(\omega) d\mu(\omega) = 0, \tag{2.7}$$

za neki $q \in \partial f(\bar{x})$ i odabrani izmjerivi $\gamma(\omega) \in \partial g(\bar{x}, \omega)$. Promotrimo sada proizvoljni $\gamma(\omega) \in \partial g(\bar{x}, \omega)$ koji zadovoljava jednakost (2.7). Prema Teoremu 9, znamo da postoji mjera $\nu \geq 0$ s konačnim nosačem $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\} \subset \mathrm{supp}(\mu)$ takvim da je $m \leq n$ i $\int_\Omega \gamma(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega \gamma(\omega) d\nu(\omega)$. Budući da vrijedi

$$\int_\Omega \gamma(\omega) d\nu(\omega) \in \int_\Omega \partial g(\bar{x}, \omega) d\nu(\omega) = \partial \int_\Omega g(\bar{x}, \omega) d\nu(\omega),$$

prema (2.7) slijedi da je $0 \in q + \partial \int_\Omega g(\bar{x}, \omega) d\nu(\omega)$ i prema tome imamo $\nu \in \Lambda_n(\bar{x})$. Dakle, skup $\Lambda_n(\bar{x})$ je neprazan.

Obratno, pretpostavimo da je $\Lambda_{n+1}(\bar{x})$ neprazan i ograničen. Moramo pokazati da je tada i $\Lambda(\bar{x})$ ograničen. Pretpostavimo da svaki element iz $\Lambda_{n+1}(\bar{x})$ ima normu najviše $c > 0$. Kako bismo tvrdnju dokazali kontradikcijom, pretpostavimo da postoji element $\mu \in \Lambda(\bar{x})$ koji ima normu (totalne varijacije) $c^1 > c$. Budući da je $\mu \geq 0$, njezina norma totalne varijacije je jednaka $\mu(\Omega)$. Uzmimo sada skup $\left\{\mu^1 \in \Lambda(\bar{x}) : \mu^1(\Omega) = c^1\right\}$. Uočimo da je taj skup neprazan budući da je μ njegov element te prema Teoremu 9 slijedi da postoji mjera ν s konačnim nosačem koji sadrži najviše $n+1$ točaka. Prema tome, $\nu \in \Lambda_{n+1}(\bar{x})$ i ima normu $c^1 > c$, a to je kontradikcija.

■

2.3 Glatki problemi polubeskonačnog programiranja

U ovom dijelu navodimo uvjete optimalnosti prvog reda za probleme polubeskonačnog programiranja koji su glatki i ne nužno konveksni. Napomenino da u daljnjem tekstu ∇ predstavlja gradijent samo po varijabli x. Koristimo sljedeću pretpostavku.

(A4) Skup Ω je kompaktan metrički prostor, funkcije $g(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$, i $f(\cdot)$ su realne i svugdje diferencijabilne te je $\nabla g(\cdot, \cdot)$ neprekidna na $\mathbb{R}^n \times \Omega$.

Pretpostavka (A4) implicira da je preslikavanje $G : x \mapsto g(x, \cdot)$ diferencijabilno u svakoj točki x i da je diferencijal tog preslikavanja $DG(x) : h \mapsto h^T \nabla g(x, \cdot)$.

Neka je $\bar{x}$ lokalno optimalno rješenje problema polubeskonačnog programiranja (P). Iz uvjeta (2.5) dolazimo do sljedećih uvjeta

$$\begin{gathered}
\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g(\bar{x}, \omega_i) = 0, \\
g(\bar{x}, \omega) \leq 0, \omega \in \Omega \\
\lambda \geq 0, \\
\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\} \subset \Delta(\bar{x}).
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Označimo s $\Lambda_m(\bar{x})$ skup svih mjera $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta(\omega_i)$ koje zadovoljavaju uvjete (2.8). Ako je problem (P) konveksan, tada, budući da je $L(\cdot, \mu)$ diferencijabilan, vrijedi $\partial L(\bar{x}, \mu) = \{\nabla L(\bar{x}, \mu)\}$ pa se u tom slučaju uvjeti (2.8) podudaraju s uvjetima (2.5). Dokažimo egzistenciju Lagrangeovih multiplikatora koji zadovoljavaju uvjete (2.8). Definirajmo funkcije

$$H(x) := \sup_{\omega \in \Omega} g(x, \omega), \quad F(x) := \max\{f(x) - f(\bar{x}), H(x)\}$$

i zapišimo problem polubeskonačnog programiranja (1) u sljedećem, ekvivalentnom, obliku:

$$\begin{gathered}
\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
H(x) \leq 0.
\end{gathered}$$

Prema pretpostavci (A4), skup Ω je kompaktan i funkcija $g(x, \cdot)$ je neprekidna, što za posljedicu ima da je skup

$$\Omega^*(x) := \arg\max_{\omega \in \Omega} g(x, \omega) \tag{2.9}$$

neprazan i kompaktan za svaki $x \in \mathbb{R}^n$. S obzirom da je $\bar{x}$ dopustiva točka problema (P), slijedi

1) $H(\bar{x}) \leq 0$

2) $H(\bar{x}) = 0$ ako i samo ako je ranije definirani skup $\Delta(\bar{x})$ aktivnih indeksa u točki $\bar{x}$ neprazan. U tom je slučaju $\Delta(\bar{x}) = \Omega^*(x)$.

Prema jednom od Danskinovih teorema (teorem se može pronaći u [1]), maksimizacijska funkcija $H(x)$ je derivabilna u svakom smjeru te vrijedi

$$H'(x, h) = \sup_{\omega \in \Omega^*(x)} h^T \nabla g(x, \omega). \tag{2.10}$$

Štoviše, $H(x)$ je lokalno Lipschitz-neprekidna pa je stoga i derivabilna u Hadamardovom smislu. Nadalje, radi činjenice da je $\bar{x}$ dopustiva točka problema (P), znamo da vrijedi $H(\bar{x}) \leq 0$, a iz toga slijedi $F(\bar{x}) = 0$. Jasno, zbog lokalne optimalnosti točke $\bar{x}$, imamo i da postoji okolina od $\bar{x}$ takva da vrijedi $F(x) \geq F(\bar{x})$ za sve x iz te okoline. Dakle, $\bar{x}$ je lokalni minimum funkcije F.

Pretpostavimo da je indeksni skup $\Delta(\bar{x})$ neprazan. Prema prethodnom razmatranju, znamo da je tada $H(\bar{x}) = 0$. Definirajmo skup

$$\mathcal{A} := \{\nabla f(\bar{x})\} \cup \{\nabla g(\bar{x}, \omega), \omega \in \Delta(\bar{x})\}.$$

Prema činjenici iz (2.10), funkcija $F(x)$ je usmjereno diferencijabilna u $x = \bar{x}$ i vrijedi

$$F'(\bar{x}, \cdot) = \sigma_{\mathcal{A}}(\cdot), \tag{2.11}$$

gdje je $\sigma_{\mathcal{A}}$ potporna funkcija skupa $\mathcal{A}$. U prethodnom razmatranju smo zaključili da je $\bar{x}$ lokalni minimum funkcije F pa sada slijedi da je $F'(\bar{x}, h) \geq 0$, za sve $h \in \mathbb{R}^n$, a to, zajedno s definicijom skupa $\mathcal{A}$, daje

$$0 \in \operatorname{conv}(\mathcal{A}). \tag{2.12}$$

Uočimo da je skup $\mathcal{A}$ kompaktan pa je stoga i njegova konveksna ljuska kompaktan skup, a prema tome i zatvoren skup. Uvjet (2.12) znači da postoje multiplikatori $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m$, među kojima je barem jedan različit od nule, te točke $\omega_i \in \Delta(\bar{x}), i = 1, 2, \ldots, m$ takvi da vrijedi

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g(\bar{x}, \omega_i) = 0. \tag{2.13}$$

Ovaj posljednji rezultat poznat je kao **Fritz Johnov uvjet optimalnosti**. Kako bi se osiguralo da u uvjetu (2.13) multiplikator λ_0 nije jednak nuli, potrebno je zadati određene uvjete regularnosti.

Definicija 20. *Kažemo da* ***prošireni Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti*** *vrijedi u točki $\bar{x}$ ako postoji $h \in \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi*

$$h^T \nabla g(\bar{x}, \omega) < 0, \quad \omega \in \Delta(\bar{x}).$$

Ovo je prirodno proširenje Mangasarian-Fromovitzovog uvjeta koji se koristi u nelinearnom programiranju u slučaju kada je skup indeksa Ω konačan. U slučaju koji razmatramo u ovom dijelu, pod pretpstavkom da (A4) vrijedi, Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti ekvivalentan je Robinsonovom uvjetu regularnosti, dok je u ranije razmatranom (konveksnom) slučaju taj uvjet ekvivalentan Slaterovom uvjetu.

Teorem 13. *Neka je $\bar{x}$ lokalno optimalno rješenje problema (P) takvo da je skup indeksa $\Delta(\bar{x})$ neprazan. Pretpostavimo da vrijede (A4) i Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti. Tada je skup $\Lambda_n(\bar{x})$ neprazan i ograničen. Obratno, ako vrijedi (A4) i skup $\Lambda_{n+1}(\bar{x})$ je neprazan i ograničen, tada vrijedi Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti u $\bar{x}$. Neka su $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m$ multiplikatori i neka su $\omega_i \in \Delta(\bar{x}), i = 1, \ldots, m$, točke koje zadovoljavaju uvjete (2.13). Prema prethodnim razmatranjima, ako vrijedi pretpostavka (A4), takvi multiplikatori postoje i barem je jedan od njih različit od nule. Pokažimo da je $\lambda_0 \neq 0$. Tvrdnju dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da je $\lambda_0 = 0$. Neka je h vektor koji zadovoljava uvjet iz Definicije 20. Tada, budući da je $\lambda_0 = 0$, imamo

$$h^T(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g(\bar{x}, \omega_i)) = 0.$$

S druge strane, prema Definiciji 20 imamo

$$h^T(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g(\bar{x}, \omega_i)) < 0$$

što je u kontradikciji s prethodnom jednakošću. Prema tome, dokazali smo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je skup $\Lambda_m(\bar{x})$ neprazan. Kako bismo zaključili da je $m \leq n$, uočimo da, za fiksne ω_i, svaka ekstremna točka skupa svih vektora $\lambda \geq 0$ takvih da zadovoljavaju prvu jednadžbu iz uvjeta (2.8), ima najviše n komponenata različitih od nule.

Preostaje dokazati da je skup $\Lambda_m(\bar{x})$ ograničen za sve $m \in \mathbb{N}$. Budući da je $\Delta(\bar{x})$ kompaktan, prema uvjetu iz Definicije 20, slijedi da postoje $h \in \mathbb{R}^n$ i $\epsilon > 0$ takvi da vrijedi $h^T \nabla g(\bar{x}, \omega) < -\epsilon$, za sve $\omega \in \Delta(\bar{x})$. Sada, prema prvoj jednadžbi iz uvjeta (2.8), dobivamo

$$h^T \nabla f(\bar{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h^T \nabla g(\bar{x}, \omega_i) \geq \epsilon \sum_{i=1}^{m} \lambda_i,$$

a prema tome je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ ograničen konstantom $\epsilon^{-1} h^T \nabla f(\bar{x})$.

Obratna tvrdnja se može dokazati na sličan način kao tvrdnja Teorema 12.

■

Na kraju ovog poglavlja, razmatramo dovoljne uvjete prvog reda. Neka su nizovi $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da $t_k \searrow 0$, a $h_k \to h$, $h \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, neka je $\mathcal{F}$ skup dopustivih točaka problema (P) te $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Definirajmo skup

$$T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) := \{h \in \mathbb{R}^n : \bar{x} + t_k h_k \in \mathcal{F} \text{ za neke nizove } t_k \searrow 0, h_k \to h\}.$$

Može se pokazati da je $T_{\mathcal{F}}(\bar{x})$ konus kojeg zovemo **Bouligandov tangencijalni konus**. Koristimo sljedeći rezultat.

Lema 1. *Neka vrijedi (A4). Neka je $\mathcal{F}$ skup dopustivih točaka problema (P) te $\bar{x} \in \mathcal{F}$ dopustiva točka problema (P) takva da je skup indeksa $\Delta(\bar{x})$ neprazan. Tada vrijedi*

$$T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \subset \Gamma(\bar{x}),$$

gdje je

$$\Gamma(\bar{x}) := \left\{ h \in \mathbb{R}^n : h^T \nabla g(\bar{x}, \omega) \leq 0, \omega \in \Delta(\bar{x}) \right\}.$$

Dodatno, ako je u $\bar{x}$ zadovoljen Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti, tada vrijedi $T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) = \Gamma(\bar{x})$.

Definicija 21. *Neka je $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ i neka je $\mathcal{F}$ skup dopustivih točaka problema (P). Kažemo da uvjet rasta p-tog reda vrijedi u dopustivoj točki $\bar{x} \in \mathcal{F}$ ako postoji konstanta $c > 0$ i okolina $\mathcal{V}$ od $\bar{x}$ takva da vrijedi*

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c\|x - \bar{x}\|^p, \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{V}.$$

Napomenimo da se u literaturi može pronaći da za slučaj $p = 1$ iz prethodne definicije kažemo da je $\bar{x}$ *strogi lokalni minimum reda* 1. Uvjet rasta drugog reda se u literaturi ponekad navodi kao *kvadratni uvjet rasta*.

Teorem 14. *Pretpostavimo da vrijedi (A4). Neka je $\bar{x}$ dopustiva točka problema (P) takva da je skup $\Delta(\bar{x})$ neprazan. Tada je uvjet*

$$h^T \nabla f(\bar{x}) > 0, \quad \forall h \in \Gamma(\bar{x}) \setminus \{0\}$$

dovoljan da bi uvjet rasta prvog reda bio zadovoljen u $\bar{x}$.
Dodatno, ako je i Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti zadovoljen u $\bar{x}$, tada je gornji uvjet i nužan kako bi uvjet rasta prvog reda bio zadovoljen u $\bar{x}$.

Dokaz. Dokažimo da uvjet rasta prvog reda vrijedi u dopustivoj točki $\bar{x}$ problema (P) ako i samo ako vrijedi

$$h^T \nabla f(\bar{x}) > 0, \quad \forall h \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \setminus \{0\}. \tag{2.14}$$

Pretpostavimo da u $\bar{x}$ vrijedi uvjet rasta prvog reda te neka je $h \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \setminus \{0\}$ proizvoljan. Tada postoje nizovi $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takvi da $t_k \searrow 0$ i $h_k \to h$ te vrijedi $\bar{x} + t_k h_k \in \mathcal{F}$. Prema definiciji uvjeta rasta prvog reda, postoji k_0 takav da za sve $k > k_0$ vrijedi $f(\bar{x} + t_k h_k) - f(\bar{x}) \geq c t_k \|h_k\|$. Također, budući da je (prema (A4)) $f(x)$ svugdje diferencijabilna, vrijedi i

$$f(\bar{x} + t_k h_k) - f(\bar{x}) = t_k h^T \nabla f(\bar{x}) + o(t_k). \tag{2.15}$$

Slijedi da je

$$t_k h^T \nabla f(\bar{x}) + o(t_k) \geq c t_k \|h_k\|,$$

što znači da vrijedi $h^T \nabla f(\bar{x}) \geq c\|h\|$ te smo time dokazali prvu tvrdnju.

Obratni smjer dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo da vrijedi (2.14), ali da uvjet iz Definicije 21 ne vrijedi u $\bar{x}$ za $p = 1$. To znači da postoje nizovi $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sa svojstvom da $c_k \searrow 0$ i $\mathcal{F} \ni x_k \to \bar{x}$ i takvi da vrijedi

$$f(x_k) < f(\bar{x}) + c_k\|x_k - \bar{x}\|.$$

Definirajmo nizove

$$t_k := \|x_k - \bar{x}\|, \quad h_k := \frac{x_k - \bar{x}}{t_k}$$

te pri tome uočimo da je $\|h_k\| = 1$. Možemo pretpostaviti (uzimanjem podniza ako je potrebno) da niz $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema nekom vektoru h. Prema tome je $h \in T_{\mathcal{F}}(\bar{x})$ i $\|h\| = 1$ pa stoga imamo i $h \neq 0$. Dodatno, iz (2.15), možemo zaključiti da je

$$\frac{f(\bar{x} + t_k h_k) - f(\bar{x})}{t_k} \leq c_k.$$

Ova posljednja nejednakost, zajedno s (2.15), implicira da je $h^T \nabla f(\bar{x}) \leq 0$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da vrijedi (2.14). Dakle, uvjet rasta prvog reda vrijedi u $\bar{x}$.

Sada, iskoristimo tvrdnju Leme 1 pa dobivamo $T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) \subset \Gamma(\bar{x})$ te iz toga direktno slijedi da je uvjet

$$h^T \nabla f(\bar{x}) > 0, \quad \forall h \in \Gamma(\bar{x}) \setminus \{0\}$$

dovoljan kako bi vrijedio uvjet rasta prvog reda u $\bar{x}$.

Dodatno, ako Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti vrijedi u $\bar{x}$, tada, korištenjem iste leme, zaključujemo da je $T_{\mathcal{F}}(\bar{x}) = \Gamma(\bar{x})$ te iz toga slijedi nužnost.

■

Napomenimo da je prema Farkasevoj lemi, uvjet (2.14) ekvivalentan uvjetu

$$-\nabla f(\bar{x}) \in \operatorname{int}\left[\operatorname{conv}(\mathcal{A}')\right], \tag{2.16}$$

gdje je $\mathcal{A}' := \{\nabla g(\bar{x}, \omega) : \omega \in \Delta(\bar{x})\}$. Drugim riječima, prema Teoremu 14 i Farkasevoj lemi, znamo da je uvjet (2.16) dovoljan, a pod pretpostavkom da vrijedi Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti, i nužan, da bi uvjet rasta prvog reda vrijedio u $\bar{x}$. Dovoljnost uvjeta (2.14) i (2.16) je standardan i često korišten rezultat u teoriji optimizacije.

Na kraju ovog poglavlja, navodimo sljedeći važan rezultat o jedinstvenosti Lagrangeovih multiplikatora u funkcijskom prostoru $\mathcal{Y} = C(\Omega)$. Primijetimo, ako je $\mu \in C(\Omega)^*$ jedinstven Lagrangeov multiplikator, tada su nužno vektori $\nabla g(\bar{x}, \omega)$, za $\omega \in \operatorname{supp}(\mu)$, linearno nezavisni te stoga nosač mjere μ ne sadrži više od n točaka.

Teorem 15. *Pretpostavimo da vrijedi (A4) i neka je* $\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta(\omega_i)$ *Lagrangeov multiplikator koji zadovoljavaju nužne uvjete optimalnosti prvog reda (2.8) pri čemu su* $\lambda_i > 0$*, za* $i = 1, 2, \dots, m$*. Tada je skup* $\Lambda(\bar{x}) = \{\mu\}$ *jednočlan, odnosno* μ *je jedinstven, ako i samo ako vrijede sljedeća dva uvjeta:*

1) *vektori gradijenti* $\nabla g(\bar{x}, \omega_i)$*,* $i = 1, 2, \dots, m$*, su linearno nezavisni,*

2) *za svaku okolinu* $\mathcal{W} \subset \Omega$ *skupa* $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ *postoji* $h \in \mathbb{R}^n$ *takav da vrijedi*

$$\begin{aligned} h^T \nabla g(\bar{x}, \omega_i) = 0, &\quad i = 1, 2, \dots, m \\ h^T \nabla g(\bar{x}, \omega) < 0, &\quad \omega \in \Delta(\bar{x}) \backslash \mathcal{W}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

U slučaju kada je skup Ω konačan, tada su uvjeti (2.17) ekvivalentni uvjetima

$$\begin{aligned} h^T \nabla g(\bar{x}, \omega_i) = 0, &\quad i = 1, 2, \dots, m \\ h^T \nabla g(\bar{x}, \omega) < 0, &\quad \omega \in \Delta(\bar{x}) \backslash \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

i uvjeti 1) i 2) ovog teorema postaju standardni nužni i dovoljni uvjeti za jedinstvenost vektora čije su komponente Lagrangeovi multiplikatori. U postupku rješavanja problema polubeskonačnog programiranja, pronalazak vektora h za danu okolinu $\mathcal{W}$ je ključan korak.

Poglavlje 3

Konvergencija

3.1 Ocjene konvergencije rješenja diskretiziranih problema polubeskonačnog programiranja

U ovom poglavlju pretpostavljamo da je optimalno rješenje $\mathrm{val}(P)$ problema polubeskonačnog programiranja (P) konačno te da vrijedi (A1).

Uzmimo niz diskretizacija $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ problema (P). Neka je $(\epsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da $\epsilon_m \searrow 0$ te neka su $\hat{x}_m$ optimalna rješenja odgovarajućeg diskretiziranog problema (P_m) do na ϵ_m točnost. Drugim riječima, $g(\hat{x}_m, \omega) \leq 0$, za sve $\omega \in \Omega$, i $f(\hat{x}_m)$ je konačna vrijednost takva da zadovoljava nejednakost

$$f(\hat{x}_m) \leq \mathrm{val}(P_m) + \epsilon_m.$$

Pitamo se što možemo reći o konvergenciji niza $(\hat{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ prema skupu optimalnih rješenja problema (P) kada udaljenost

$$\varrho_m := \sup_{\omega\in\Omega} \mathrm{dist}(\omega, \Omega_m) \tag{3.1}$$

teži prema nuli. Ovdje smo s $\mathrm{dist}(\omega, \Omega_m)$ označili udaljenost točke $\omega \in \Omega$ od skupa Ω_m u odnosu na metriku ρ definiranu na prostoru Ω, odnosno

$$\mathrm{dist}(\omega, \Omega_m) = \min_{1\leq i\leq m} \rho(\omega, \omega_i).$$

Pritom primijetimo, budući da je $\Omega_m \subseteq \Omega$, devijacija skupa Ω od skupa Ω_m, odnosno desna strana u (3.1), je zapravo Hausdorffova udaljenost (prisjetimo se Definicije (12)) između skupova Ω_m i Ω.

U nastavku ćemo koristiti sljedeći rezultat.

Lema 2. *Neka vrijedi (A1) te neka je funkcija $f(\cdot)$ odozdo poluneprekidna. Pretpostavimo da je $(\hat{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz optimalnih rješenja diskretiziranih problema (P_m) do na točnost $\epsilon_m > 0$. Ako $\epsilon_m \searrow 0$ i $\varrho_m \to 0$, za $m \to +\infty$, tada je svako gomilište niza $(\hat{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ optimalno rješenje problema (P).*

Dokaz. Neka je $\bar{x}$ gomilište niza $(\hat{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Možemo pretpostaviti (uzimanjem podniza ako je potrebno) da $\hat{x}_m \to \bar{x}$. Dokažimo da vrijedi $g(\bar{x},\omega) \le 0$, za sve $\omega \in \Omega$. Neka je $\omega \in \Omega$ proizvoljan. Budući da $\varrho_m \to 0$, za $m \to +\infty$, postoji $\omega_m \in \Omega_m$ takav da $\omega_m \to \omega$. Prema definiciji niza $(\hat{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, imamo da $g(\hat{x}_m,\omega_m) \le 0$ te uz prethodnu činjenicu, iz toga slijedi $g(\hat{x}_m,\omega_m) \to g(\bar{x},\omega)$. Prema tome, vrijedi $g(\bar{x},\omega) \le 0$. Nadalje, pretpostavimo da je točka x takva da vrijedi $g(x,\omega) \le 0$, za sve $\omega \in \Omega$. Stoga imamo

$$f(\hat{x}_m) \le f(x) + \epsilon_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Sada, budući da, zbog svojstva poluneprekidnosti odozdo od f, vrijedi

$$f(\bar{x}) \le \liminf_{m\to+\infty} f(\hat{x}_m)$$

i budući da $\epsilon_m \searrow 0$, slijedi

$$f(\bar{x}) \le f(x).$$

S obzirom da je $x \in \mathcal{F}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\bar{x}$ optimalno rješenje problema (P).

■

Od ovog dijela nadalje, podrazumijevamo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna i neprekidna. Označimo s $\hat{\mathcal{F}}_m$ skup dopustivih točaka problema (P_m), odnosno definiramo

$$\hat{\mathcal{F}}_m := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x,\omega_i) \le 0, i = 1,2,\ldots,m\}.$$

Uočimo da, iz neprekidnosti funkcije $g(\cdot,\omega)$ slijedi zatvorenost skupa $\hat{\mathcal{F}}_m$. Kažemo da su skupovi $\hat{\mathcal{F}}_m$ *uniformno ograničeni* ako postoji ograničen skup $C \subset \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi $\hat{\mathcal{F}}_m \subset C$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Direktno iz leme 2 i definicije kompaktnosti slijedi da, ako $\varrho_m \to 0$ i ako su skupovi $\hat{\mathcal{F}}_m$ uniformno ograničeni, tada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\hat{\mathcal{F}}_m,\mathcal{F}) \to 0 \ \text{ i} \\ \operatorname{dist}(\hat{x}_m, \operatorname{Sol}(P)) \to 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Štoviše, moguće je ocijeniti brzinu kojom devijacija $\mathbb{D}(\hat{\mathcal{F}}_m,\mathcal{F})$ konvergira prema 0.

Pretpostavimo sada da Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti vrijedi u točki $\bar{x} \in \mathcal{F}$. To znači da postoji okolina $\mathcal{V}$ od $\bar{x}$ i konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$ takvi da za svaki $x \in \mathcal{V}$ vrijedi

$$\operatorname{dist}(x,\mathcal{F}) \le \alpha(\sup_{\omega\in\Omega} [g(x,\omega)]_+). \tag{3.3}$$

Dodatno, pretpostavimo i da je skup Sol(P) neprazan i ograničen (pa stoga i kompaktan) te da je Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti zadovoljen u svakoj točki skupa Sol(P). Tada, zbog kompaktnosti, slijedi da postoje $\alpha \in \mathbb{R}$ i okolina $\mathcal{W}$ od Sol(P) takvi da uvjet (3.3) vrijedi za svaki $x \in \mathcal{W}$.

Nadalje, pretpostavimo i da je funkcija $g(x, \cdot)$ neprekidna u Lipschitzovom smislu na skupu Ω uniformno po $x \in \mathcal{W}$, odnosno pretpostavimo da postoji konstanta $k > 0$ takva da vrijedi

$$|g(x, \omega) - g(x, \omega')| \leq k\rho(\omega, \omega'), \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega, \forall x \in \mathcal{W}. \tag{3.4}$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $x \in \hat{\mathcal{F}}_m \cap \mathcal{W}$. Znamo da za svaki $\omega \in \Omega$ postoji točka $\omega' \in \Omega_m$ takva da je $\rho(\omega, \omega') \leq \varrho_m$. S obzirom da smo uzeli $x \in \hat{\mathcal{F}}_m$, slijedi da je $g(x, \omega') \leq 0$ pa, pomoću svojstva (3.4) funkcije $g(x, \cdot)$, zaključujemo

$$g(x, \omega) \leq k\varrho_m.$$

Naposljetku, koristeći (3.3), dobivamo

$$\mathbb{D}(\hat{\mathcal{F}}_m \cap \mathcal{W}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}) = O(\varrho_m). \tag{3.5}$$

Definicija 22. *Neka je $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ i neka je $\mathcal{F}$ skup dopustivih točaka problema (P). Kažemo da uvjet rasta p-tog reda vrijedi na nepraznom skupu $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ ako postoji konstanta $c > 0$ i okolina $\mathcal{V}$ od $\mathcal{S}$ takvi da vrijedi*

$$f(x) \geq val(P) + c\,[dist(x, S)]^p\,, \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{V}$$

Jasno, ponovo koristeći (3.3), slijedi da je $\mathcal{S}$ skup lokalnih optimalnih rješenja problema (P). Posebno, ako je $\mathcal{S} = \{\bar{x}\}$, odnosno ako je $\mathcal{S}$ jednočlan skup, tada se uvjet iz Definicije 22 podudara s uvjetom iz Definicije 21.

Teorem 16. *Neka je $\mathcal{F}$ skup dopustivih točaka problema (P) te neka je $\mathcal{S}$ neprazan i ograničen podskup od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da:*

1) vrijedi uvjet rasta p-tog reda na skupu $\mathcal{S}$ za $p = 1$ ili za $p = 2$,

2) vrijedi pretpostavka (A4) i $g(x, \cdot)$ je neprekidna u Lipschitzovom smislu na Ω uniformno po $x \in \mathcal{V}$,

3) Mangasarian-Fromovitzov uvjet regularnosti vrijedi u svakoj točki $x \in \mathcal{S}$,

4) za $\epsilon_m = O(\varrho_m)$, problem (P_m) ima optimalno rješenje $\hat{x}_m$ do na ϵ_m točnost takvo da $dist(\hat{x}_m, \mathcal{S}) \to 0$.

Tada, za $p = 1$ i $p = 2$, vrijedi

$$dist(\hat{x}_m, \mathcal{S}) = O(\varrho_m^{1/p}).$$

Dokaz. Budući da je funkcija f svugdje diferencijabilna te sužavanjem okoline $\mathcal{V}$ koliko je potrebno, dobivamo da je f neprekidna u Lipschitzovom smislu na $\mathcal{V}$ te s η označimo Lipschitzovu konstantu. Prema pretpostavci 4), znamo da postoji m_0 takav da za sve $m > m_0$ vrijedi $\hat{x}_m \in \mathcal{V}$. Prema tome, može se pokazati da vrijede sljedeće ocjene:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\hat{x}_m, \mathcal{S}) &\leq (1 + c^{-1}\eta)d_m + c^{-1}\epsilon_m, \quad \text{za } p = 1, \\ \operatorname{dist}(\hat{x}_m, \mathcal{S}) &\leq 2d_m + c^{-1/2}\eta^{1/2}d_m^{1/2} + c^{-1/2}\epsilon_m^{1/2}, \quad \text{za } p = 2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

pri čemu je d_m definiran s

$$d_m := \mathbb{D}(\hat{\mathcal{F}}_m \cap \mathcal{V}, \mathcal{F} \cap \mathcal{V}).$$

Sada, iz (3.5) te sužavanjem okoline $\mathcal{V}$ koliko je potrebno, dobivamo

$$d_m = O(\varrho_m).$$

Iz ove posljednje jednakosti, zajedno s ocjenama (3.6), slijedi tvrdnja teorema.

■

Na kraju ovog poglavlja, navodimo još jedan rezultat kao nadopunu ovog važnog teorema. Uz pretpostavke Teorema 16, dodatno pretpostavimo:

5) funkcija $g(\cdot, \cdot)$ je svugdje dvostruko diferencijabilna,

6) za svaki $\bar{x} \in \mathcal{S}$, skup $\Omega^*(\bar{x}) = \operatorname{argmax}_{\omega \in \Omega} g(\bar{x}, \omega)$ je sadržan u interioru skupa Ω.

Tada vrijedi $\nabla_\omega g(\bar{x}, \bar{\omega}) = 0$, za svaki $\bar{\omega} \in \Omega^*(\bar{x})$. U tom slučaju, koristeći (3.3), slijedi da je d_m iz prethodnih ocjena (3.6) određen s

$$d_m = O(\varrho_m^{2/p}).$$

To za posljedicu ima da, uz navedene promjene u pretpostavkama, za $p = 1$ i $p = 2$, dobivamo još bržu ocjenu konvergencije u tvrdnji Teorema 16. Preciznije, tvrdnja se mijenja u

$$\operatorname{dist}(\hat{x}_m, \mathcal{S}) = O(\varrho_m^{2/p}).$$

Napomenimo da se dokaz ovog posljednjeg rezultata, za slučaj kada je $\mathcal{S}$ jednočlan skup, može pronaći u [8].

Poglavlje 4

Primjene

4.1 Planiranje putanje robota

Prilikom kontrole robota, njegovo je kretanje podređeno uvjetima (ograničenjima) kao što su:

- kako bi robot izbjegao prepreke u prostoru, svaki dio njegove robotske ruke čitavo se vrijeme mora nalaziti izvan nekog područja,
- akceleracija koju robotski motor može proizvesti je u svakom trenutku ograničena.

Opišimo planiranje putanje robota kao problem polubeskonačnog programiranja. Pretpostavimo da promatramo robota čiji je položaj određen koordinatama $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_R)$. Svaka od tih koordinata označava položaje dijelova koje robot koristi pri kretanju i koje možemo kontrolirati - kao što su npr. robotski zglobovi.

Neka je $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_R)^T$ te pretpostavimo da je dan put $\theta(\tau)$, gdje je $\tau \in [0, 1]$. Tada je potrebno uvesti reparametrizaciju $t = h(\tau)$, odnosno $\tau = h^{-1}(t)$, vremena t takvu da s

$$\Theta(t) := \theta(h^{-1}(t))$$

definiramo izvedivi pomak te da je vrijeme izvedbe tog pomaka $T = h(1)$ minimizirano. Promatrat ćemo funkcije h oblika

$$h(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds,$$

gdje je

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n} z_j B_j(s)$$

kubični spline na ekvidistantnom skupu od $n-4$ čvora u segmentu $[0,1]$ (npr. $\{B_j\}$ je baza B-splinea) te je $g(s) > 0$, $s \in [0,1]$.

Koristeći navedene oznake, u najjednostavnijem slučaju, $\Theta(t)$ smatramo izvedivim pokretom ako, s danim ograničenjima c_{ij}, za zglobove $i = 1, 2, \ldots, R$ vrijedi

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}\Theta_i(t)\right| \leq c_{ij}, \quad j = 1, 2, 3,$$

odnosno, ako brzine, akceleracije i trzaji zadovoljavaju dane uvjete. U nešto realističnijem slučaju, možemo promatrati i ograničenja na okretni moment. Tada je problem reparametrizacije oblika

$$\min c^T z$$

$$g_l^{i,j}(z, \tau) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, R, \quad j = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2$$

pri čemu je $\tau \in [0,1]$, a $g_l^{i,j}$ nelinearno ovise o z za $j = 2, 3$. Prema tome, radi se o problemu polubeskonačnog programiranja sa $6R$ važećih ograničenja na $[0,1]$ od kojih su $4R$ nelinearna ograničenja.

Napomenimo da se i drugi problemi iz robotike mogu modelirati kao problemi polubeskonačnog programiranja, a posebno problem poznat pod imenom *Problem manevriranja* modelira se kao generalizirani problem polubeskonačnog programiranja, gdje područje B ovisi o funkciji z.

4.2 Minimizacija troškova kontrole onečišćenja zraka

Pretpostavimo da postoji n izvora kemijski inertnih zagađivača na nekom području B, čije se stope emitiranja zagađenja moraju regulirati na način da godišnji prosjek koncetracije zagađenosti tla mora zadovoljavati određeni standard u svakoj točki područja B. Kako bi se taj cilj postigao, potrebno je uvesti određeni sustav kontrole te odrediti minimalan trošak takvog sustava.

Neka $a_j(t)$ označava godišnji prosjek koncentracije zagađenosti koja je nastala iz izvora j u točki $t \in B$ prije kontrole razina zagađenosti u toj točki. Nadalje, neka je $\psi(t)$ maksimalno dozvoljeno zagađenje u točki t. Označimo sa z_j dio smanjenja zagađenja koje nastaje iz izvora j i koje je ograničeno odozgo sa konstantom $u_j \leq 1$. Radi pretpostavke ovog primjera o kemijskoj inertnosti izvora, razina zagađenja nakon provedene kontrole iznosi

$$\sum_{j=1}^{n}(1 - z_j)a_j(t)$$

i ona ne smije biti veća od (prema standardu) propisane razine $\psi(t)$. Pretpostavimo da trošak postizanja smanjenja zagađenosti z_j iznosi $C^j(z_j)$.

U slučaju linearnog troška $C_j(z_j) = c_j z_j$, optimalni sustav kontrole je određen sa

$$\nu(P) = \max\left\{ -\sum_{j=1}^{n} c_j z_j : z \in Z^P \right\},$$

pri čemu smo sa Z^P označili skup dopustivih točaka ovog problema koji je definiran ograničenjima

$$-\sum_{j=1}^{n} z_j a_j(t) \leq \psi(t) - \sum_{j=1}^{n} a_j(t) =: a_{n+1}(t), \quad \forall t \in B,$$
$$0 \leq z_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Uvodimo sljedeće pretpostavke kako bi osigurali egzistenciju optimalnog rješenja z^* iznad opisanog problema:

1) skup B je kompaktan,
2) funkcije a_j i ψ su diferencijabilne na cijelom B,
3) postoji Slaterova točka z^0.

Prema teoriji dualnosti, slijedi da je $\nu(P) = \nu(D)$, pri čemu $\nu(D)$ označava vrijednost sljedećeg dualnog problema koji također ima optimalno rješenje (μ^*, y^*):

$$\nu(D) = \min\left\{ \sum_{t \in B} a_{n+1}(t)\mu(t) + \sum_{j=1}^{n} y_j u_j : (\mu, y) \in Z^D \right\}.$$

gdje je μ nenegativna funkcija s konačnim nosačem $\mathrm{supp}(\mu)$ na B, a $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ te je Z^D skup svih uređenih parova (μ, y) koji zadovoljavaju uvjet

$$\sum_{t \in B} a_j(t)\mu(t) - y_j \leq c_j, \quad j = 1, 2 \ldots, n.$$

Slično kao i u teoriji linearnog programiranja, optimalno rješenje $\mu^*(t)$ problema (D) može se interpretirati kao granična vrijednost po jedinici smanjenja emisija onečišćenja u točki $t \in B$ pod uvjetom da su se prethodno dogodila smanjenja emisija onečišćenja z^*.

Dakle, navedeni dualni problem daje nam objektivan način za evaluaciju kvalitete zraka.

4.3 Mjerenje efikasnosti industrijskog procesa

Data envelopment analysis (DEA) je poznata neparametarska metoda mjerenja uspješnosti vođenja javnih i privatnih organizacija. U ovom primjeru dajemo sažetak osnovnog i input-orijentiranog determinističkog DEA modela kojeg je opisao Banker.

Neka je S konačan skup čiji su elementi *moguće odluke* koje trebaju biti donesene od strane uprave određene organizacije. Dakle, elementi skupa S preslikavaju n pozitivnih varijabli koje unosimo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u m pozitivnih izlaznih varijabli $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Za element $s \in S$ s $x_s = (x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ns})^T$ i $y_s = (y_{1s}, y_{2s}, \ldots, y_{ms})^T$ označimo odgovarajuće vektore pozitivnih ulaznih i izlaznih varijabli. Opisano možemo odrediti tzv. *skupom proizvodnje*

$$GR = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : x \text{ može proizvesti } y \right\}.$$

Pritom primijetimo da skup GR ne sadrži samo sve ranije opisane elemente promatranog problema $\left\{ \binom{x_s}{y_s} : s \in S \right\}$ nego i sve njihove konveksne kombinacije (koje u stvarnom problemu možda i ne postoje pa za njih kažemo da su *virtualne*). U ovom primjeru, postuliramo da se te konveksne kombinacije mogu dobiti opcionalnim *pogoršavanjem* nekih od ulaznih ili izlaznih varijabli. Drugim riječima, model pretpostavlja da je $\binom{x}{y} \in GR$ ako i samo ako, za $s \in S$, postoje skalari $\gamma_s \geq 0$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} x &\geq \sum_{s \in S} \gamma_s x_s, \\ \sum_{s \in S} \gamma_s y_s &\geq y, \\ \sum_{s \in S} \gamma_s &= 1. \end{aligned}$$

Dani element skupa S je *apsolutno efikasan* ako je nemoguće proizvesti istu izlaznu varijablu iz (proporcionalno) smanjenih ulaznih varijabli. Kako bismo bili precizniji, uvodimo skup ulaznih varijabli koji je pridružen (izlaznom) vektoru $y > 0_m$ te ga označavamo s

$$L(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in GR \right\}.$$

Radijalna mjera tehničke efikasnosti ulaznog vektora x u proizvodnji izlaznog vekora y je dana s

$$TE(x, y) = \min \{\theta : \theta x \in L(y)\}.$$

Budući da je $x \in L(y)$, očito je $TE(x, y) \in [0, 1]$ te je $s \in S$ apsolutno efikasan ako vrijedi $TE(x, y) = 1$. Vrijednost funkcije TE možemo dobiti rješavanjem odgovarajućeg problema linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\inf \theta \\ &\theta x \geq \sum_{s \in S} \gamma_s x_s, \\ &\sum_{s \in S} \gamma_s y_s \geq y, \\ &\sum_{s \in S} \gamma_s = 1, \\ &\gamma_s \geq 0, \quad \forall s \in S. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Cilj svake takve analize iz makro perspektive je usporedba učinkovitosti, odnosno uspješnosti, konačnog broja (privatnih ili javnih) organizacija. No ista se DEA metoda može primijeniti za mjerenje učinkovitosti parametra koji kontrolira neki industrijski (npr. kemijski) proces na proizvoljnom skupu S. U tom slučaju, možemo pretpostaviti da postoje funkcije x_s i y_s koje procjenjuju vrijednosti ulaznih i izlaznih varijabli za svaki dani parametar $s \in S$. Prema tome, iznad opisani model moramo prilagoditi slučaju kada je S beskonačan skup parametara. Primijetimo da iako *GR* nije više poliedarski skup, skalari $\{\gamma_s : s \in S\}$ i u ovom slučaju označavaju konveksne kombinacije točaka iz prostora $\mathbb{R}^{n+m}$. Dakle, u opisanom slučaju, do problema kojeg želimo rješiti dolazimo tako da zamijenimo posljednji uvjet u modelu linearnog programiranja (4.1) sa uvjetom $\gamma \in \mathbb{R}_+^{(S)}$.

Bibliografija

[1] Borwein, J., Lewis, A., *Convex analysis and nonlinear optimization - Theory and examples*, Springer, 2006.

[2] Conway, J., *A course in abstract analysis*, American Mathematical Society, 2012

[3] Goberna, M.A., Lopez, M.A., *Linear-Semi Infinite Optimization*, John Wiley & Sons, 1998

[4] Hettich, R., Kortanek, K.O., *Semi Infinite Programming: Theory, Methods and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993

[5] Hiriart-Urruty, J.B., Lemarechal, C., *Fundamentals of convex analysis*, Springer, 2001.

[6] Rockafellar, R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.

[7] Shapiro, A.: *Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions*, Taylor & Francis, 2009

[8] Still, G.: *Discretization in Semi-infinite Programming: the rate of approximation*, Math. Programming, 91, (2001), 53-69

Sažetak

Polubeskonačno programiranje je optimizacijski problem u kojem minimiziramo realnu funkciju na konačnodimenzionalnom prostoru, ali uz beskonačno mnogo uvjeta tipa nejednakosti. Ta klasa problema je u ovom radu predstavljena kroz četiri poglavlja u kojima su navedeni važni rezultati iz dualnosti, diskretizacije, uvjeta optimalnosti prvog reda te konvergencije. Posebno su istaknuti slučajevi konveksnog problema i glatkog problema polubeskonačnog programiranja radi njihovih matematički pogodnih svojstava. U posljednjem su poglavlju navedene poznate primjene, odnosno načini modeliranja suvremenih problema koji se pojavljuju u robotici, minimizaciji troškova i mjerenju efikasnosti procesa koristeći teoriju polubeskonačnog programiranja.

Summary

Semi-infinite programming is an optimization problem in which a real function is being minimized on a finite-dimensional space, but with infinite number of constrains that must be satisfied, which are represented by inequalities. In this Master thesis, the class of problems is presented through four chapters in which we gave an overview of important results used in solving semi-infinite programming problems, which include results from duality theory, discretization, first order optimality conditions and convergence. We emphasized the cases of convex problems and linear problems because of their mathematically nicer properties. In the last chapter, we gave examples of well known problems from areas of robotics, minimizing costs and measuring efficiency of processes that can be solved by modeling them like semi-infinite programming problems.

Životopis

Dorian Čudina rođen je 04. svibnja 1994. u Rijeci. Nakon završenog Općeg smjera Prve riječke hrvatske gimnazije 2013. godine u Rijeci, upisao je preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Pod mentorstvom dr. sc. Ivane Slamić, 2016. godine napisao je i obranio završni rad *Konveksni skupovi i konveksne funkcije* te time završio preddiplomski studij. Iste godine, u suradnji s profesoricom Slamić, napisao je stručni članak *Neke primjene svojstva konveksnosti i konkavnosti u ekonomiji* koji je objavljen 2017. godine u časopisu math.e. Diplomski studij Matematička statistika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu također je upisao 2016. godine. Za vrijeme studija u Zagrebu radio je stručne prakse u Sektoru unutarnje revizije Erste Banke i u Sektoru za upravljanje imovinom mirovinskog fonda PBZ Croatia osiguranje te je podučavao matematiku studente Ekonomskog fakulteta u Zagrebu u centru za poduke Pascal. Gotovo čitavo školovanje aktivno se bavio vaterpolom te je kao golman Vaterpolo kluba Opatija 1981 ostvario zapažene rezultate 2014. i 2015. godine. Na ljeto 2018. godine, pri završetku studija, zaposlio se kao Business Analyst u Infobipu gdje i danas radi.