SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Adam Naglaš

CASEYEV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Od samih početaka matematike kružnica je jedan od najproučavanijih geometrijskih likova. Tijekom cijelog obrazovanja susrećemo se s kružnicama i upoznajemo nove zakonitosti i pojmove koji su povezani s kružnicom, poput polumjera, uvjetima dodira dviju kružnica i mnogim drugim.

Cilj ovog diplomskog rada je proučiti, objasniti i dokazati generalizaciju Ptolomejevog teorema, poznatu pod nazivom Caseyev teorem. Prema [1] John Casey prvi je dao iskaz teorema, ali ne u potpunom obliku kakvog ga danas poznajemo. John Casey je znao samo za jednu implikaciju. U radu će do velikog izražaja doći zakonitosti i pojmovi vezani uz kružnice.

John Casey (1820. – 1891.) bio je ugledni irski profesor i matematičar. Prema [2] napisao je više od 25 znanstvenih radova, ali njegova matematička reputacija počiva na šest udžbenika koje je napisao: Nastavak prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata (1881.), Rasprava o analitičkoj geometriji točaka, linija, kruga i konike (1885.), Rasprava o elementarnoj trigonometriji (1886.), Rasprava o trigonometriji ravnine (1888.), Rasprava o sfernoj trigonometriji (1889.). Objavio je i svoje vlastito izdanje prvih šest knjiga Euklidovih Elemenata (1882.). Zbog svojeg izričitog doprinosa u geometriji smatra se da je uz Émile Lemoinea suosnivač moderne geometrije kružnice i trokuta.

Poglavlje 1

Osnovni teoremi i pojmovi

Cilj ovog diplomskog rada je iskazati i dokazati Caseyev teorem. Da bismo mogli to iskazati i dokazati, na početku je potrebno navesti neke osnovne pojmove i teoreme.

1.1 Ptolomejev teorem

Kako je Caseyev teorem generalizacija Ptolomejevog teorema prvo ćemo iskazati i dokazati Ptolomejev teorem.

Teorem 1.1. ***(Ptolomejev teorem)*** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\angle BDC \leq \angle ADB$, ako nije zamijenimo vrhove A i C. Neka je E točka na dijagonali $\overline{AC}$ takva da je $\angle ADE = \angle BDC$. Kutovi $\angle CAD$ i $\angle CBD$ su sukladni jer su to obodni kutovi nad lukom $\widehat{CD}$. Slijedi da su trokuti AED i BCD slični prema $K-K$ teoremu o sličnosti trokuta. Iz sličnosti trokuta AED i BCD slijedi $\dfrac{|AE|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|}$ i stoga je:

$$|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|. \tag{1.1}$$

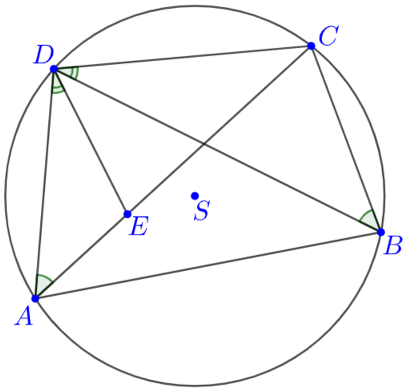
Uočimo da je

$$\angle CDE = \angle BDC + \angle EDB = \angle ADE + \angle EDB = \angle ADB.$$

Kutovi $\angle DBA$ i $\angle DCA$ su sukladni jer su to obodni kutovi nad lukom $\widehat{DA}$. Slijedi da su trokuti BDA i CDE slični prema $K-K$ teoremu o sličnosti trokuta.

Iz sličnosti trokuta DBA i DCA slijedi $\dfrac{|BD|}{|CD|} = \dfrac{|BA|}{|CE|}$ i stoga je:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|. \tag{1.2}$$



Slika 1.1.

Zbrajanjem (1.1) i (1.2) dobije se

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AE| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CE| \\ &= |BD| \cdot (|AE| + |CE|) \\ &= |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

Ovime je Ptolomejev teorem dokazan. □

1.2 Poučak o kosinusima

U dokazima ćemo koristit poučak o kosinusima.

Teorem 1.2. *(**Poučak o kosinusima**) Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, tada je*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

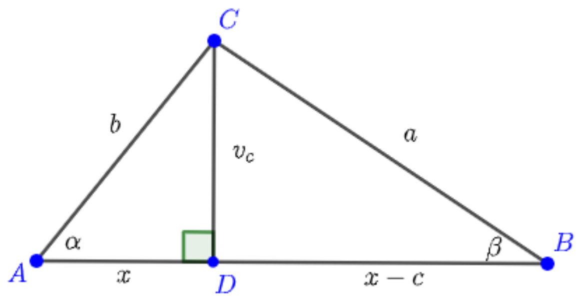
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati prvu jednakost.
1° Neka je α šiljasti kut. Iz pravokutnih trokuta ADC i CDB dobije se:

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

odakle slijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$



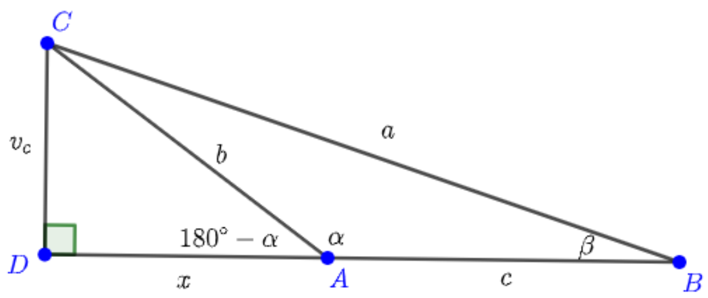
Slika 1.2.

U pravokutnom trokutu ADC je $\cos\alpha = \dfrac{x}{b}$, pa je $x = b\cos\alpha$ i konačno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

2° Neka je α pravi kut.
Tada je $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

3° Neka je α tupi kut.
Iz pravokutnih trokuta ADC i CDB dobije se:



Slika 1.3.

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2,$$

odakle slijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

U pravokutnom trokutu ADC je $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{b}$, pa je $x = b\cos(180° - \alpha) = -b\cos\alpha$ i konačno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$\square$

1.3 Međusobni položaj dviju kružnica

Kako je Caseyev teorem povezan s međusobnim položajem kružnica, navest ćemo sve moguće položaje dviju kružnica.
Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Označimo s d udaljenost središta kružnica. Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$. Mogući su sljedeći položaji kružnica k_1 i k_2:

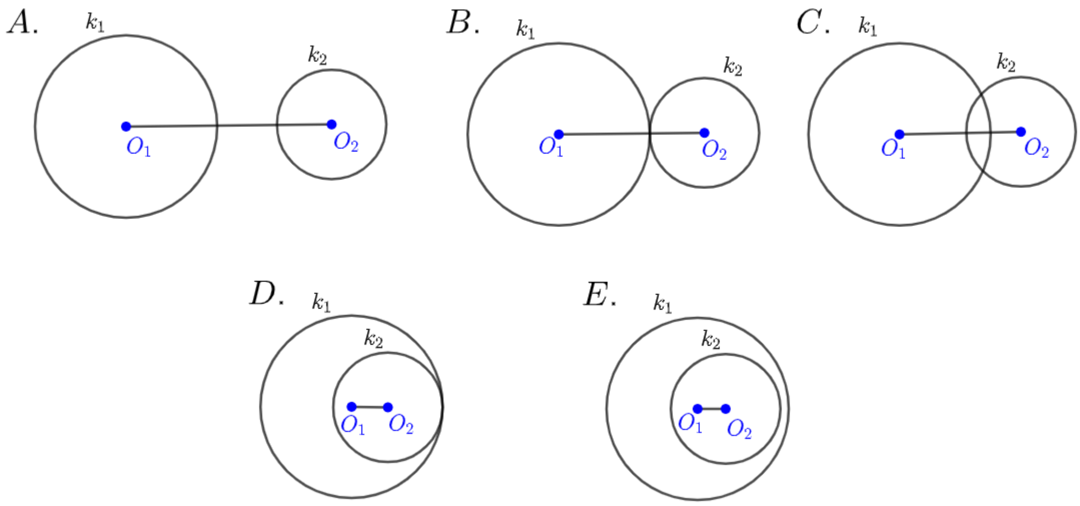
A. ako je $d > r_1 + r_2$ tada kružnice k_1 i k_2 nemaju zajedničkih točaka,

B. ako je $d = r_1 + r_2$ tada se kružnice k_1 i k_2 dodiruju izvana,

C. ako je $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ tada se kružnice k_1 i k_2 sijeku u dvjema točkama,

D. ako je $d = r_1 - r_2$ tada se kružnice k_1 i k_2 dodiruju iznutra,

E. ako je $d < r_1 - r_2$ tada kružnice k_1 i k_2 nemaju zajedničkih točaka i kružnica k_1 se nalazi unutar kružnice k_2.



Slika 1.4.: Međusobni položaj dviju kružnica

1.4 Zajedničke tangente dviju kružnica

Definicija 1.1. *Tangenta kružnice je pravac koji dodiruje tu kružnicu u jednoj točki.*

Definicija 1.2. *Zajednička tangenta dviju kružnica je pravac koji je tangenta obiju kružnica.*

Dvije kružnice mogu imati najviše dvije unutarnje i dvije vanjske zajedničke tangente. Unutarnje zajedničke tangente sijeku dužinu koja spaja središta danih kružnica, dok vanjske zajedničke tangente ne sijeku tu dužinu.
Neka su promatrane kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_1)$. Označimo s d udaljenost središta kružnica. Pretpostavimo da je $r_1 > r_2$. Tada kružnice k_1 i k_2:

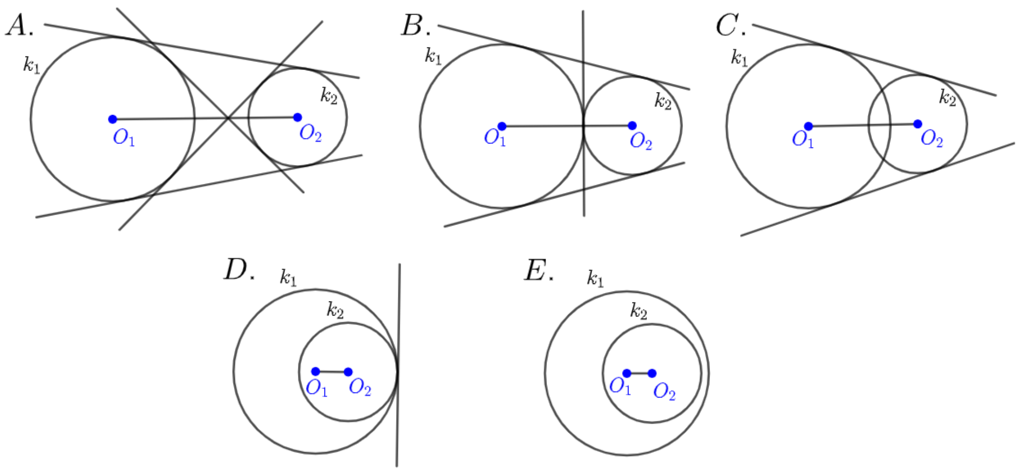
A. imaju četiri zajedničke tangente ako je $d > r_1 + r_2$,

B. imaju tri zajedničke tangente ako je $d = r_1 + r_2$,

C. imaju dvije zajedničke tangente ako je $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$,

D. imaju jednu zajedničku tangentu ako je $d = r_1 - r_2$,

E. nemaju zajedničkih tangenti ako je $d < r_1 - r_2$.



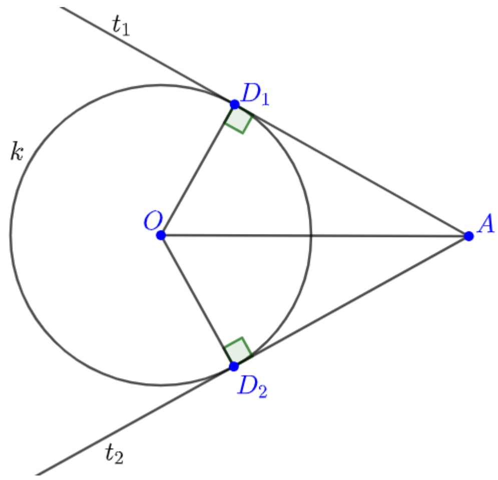
Slika 1.5.: Zajedničke tangente kružnica k_1 i k_2

1.5 Tangentna udaljenost kružnice i točke

Povučemo li tangente na kružnicu k iz točke A, odsječci tih tangenti između dirališta i točke A bit će sukladne dužine.

Lema 1.1. *Neka su D_1 i D_2 redom dirališta tangenti t_1 i t_2 iz točke A na kružnicu $k(r, O)$. Tada su dužine $\overline{AD_1}$ i $\overline{AD_2}$ sukladne.*

Dokaz. Neka je $k(r, O)$ kružnica i neka su t_1 i t_2 tangente na kružnicu k iz točke A. Točke D_1 i D_2 su redom dirališta tangenti t_1 i t_2 s kružnicom k. Kako je $|OD_1| =$



Slika 1.6.

$|OD_2| = r$, $\angle OD_1A = \angle OD_2A = 90°$ i $\overline{OA}$ zajednička stranica trokuta OD_1A i OD_2A, slijedi da su ti trokuti sukladni po $S - S - K^>$ teoremu o sukladnosti. Odnosno $|AD_1| = |AD_2|$. □

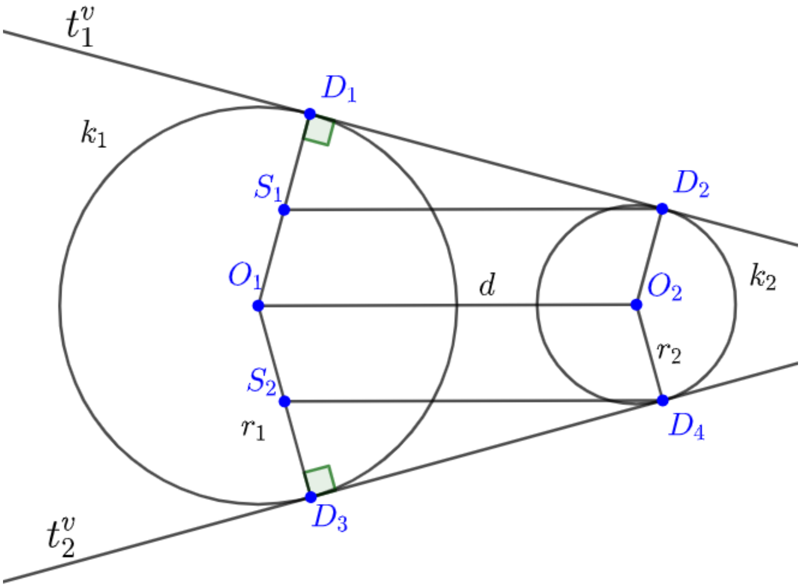
Definicija 1.3. *Neka je t tangenta na kružnicu k iz točke A, neka je D diralište tangente t s kružnicom k. Udaljenost $|AD|$ nazivamo **tangentna udaljenost kružnice** k **i točke** A.*

1.6 Tangentna udaljenost dviju kružnica

Povučemo li dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente dviju kružnica, odsječci tih tangenti između dirališta bit će sukladne dužine.

Lema 1.2. *Neka su t_1^v i t_2^v zajedničke vanjske tangente kružnica $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Zajednička vanjska tangenta t_1^v dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, a zajednička vanjska tangenta t_2^v dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_3 i D_4. Tada su dužine $\overline{D_1D_2}$ i $\overline{D_3D_4}$ sukladne.*

Dokaz. Označimo $d = |O_1O_2|$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r_1 \geq$

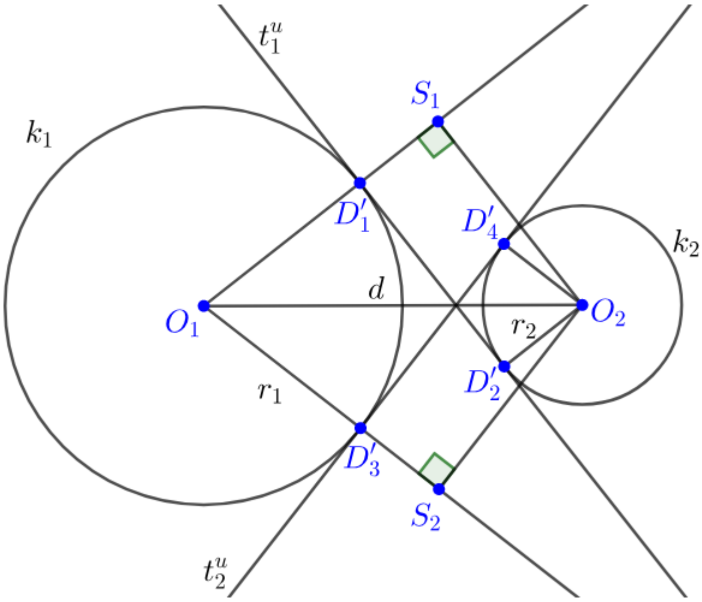


Slika 1.7.

r_2. Povučemo pravce paralelne s pravcem O_1O_2 kroz točke D_2 i D_4. Označimo sa S_1 sjecište pravca O_1D_1 i pravca paralelnog s pravcem O_1O_2 kroz točku D_2, te sa S_2 sjecište pravca O_1D_3 i pravca paralelnog s pravcem O_1O_2 kroz točku D_4. Četverokuti $O_1O_2D_2S_1$ i $S_2D_4O_2O_1$ su paralelogrami odakle slijedi $|S_1D_2| = |S_2D_4| = d$. Kako je $|D_1S_1| = |D_3S_2| = r_1 - r_2$ i $\angle S_1D_1D_2 = \angle S_2D_3D_4 = 90°$. Slijedi da su trokuti $S_1D_1D_2$ i $S_2D_3D_4$ sukladni po $S-S-K^>$ teoremu o sukladnosti. Odnosno $|D_1D_2| = |D_3D_4|$. □

Lema 1.3. *Neka su t_1^u i t_2^u zajedničke unutarnje tangente kružnica $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Zajednička unutarnja tangenta t_1^u dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1' i D_2', a zajednička unutarnja tangenta t_2^u dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_3' i D_4'. Tada su dužine $\overline{D_1'D_2'}$ i $\overline{D_3'D_4'}$ sukladne.*

Dokaz. Označimo $d = |O_1O_2|$. Neka je S_1 ortogonalna projekcija točke O_2 na pravac O_1D_1' i S_2 ortogonalna projekcija točke O_2 na pravac O_1D_3'. Kako su četverokuti $D_1'D_2'O_2S_1$ i $D_3'D_4'O_2S_2$ pravokutnici vrijedi sljedeće: $|D_1'D_2'| = |O_2S_1|$, $|D_1'S_1| = |D_2'O_2| = r_2$, $|D_3'D_4'| = |O_2S_2|$ i $|D_3'S_2| = |D_4'O_2| = r_2$.
Kako je $|O_1S_1| = |O_1D_1'| + |D_1'S_1| = r_1 + r_2$ i $|O_1S_2| = |O_1D_3'| + |D_3'S_2| = r_1 + r_2$, $\angle O_1S_1O_2 = \angle O_1S_2O_2 = 90°$ i $\overline{O_1O_2}$ zajednička stranica trokuta $O_1O_2S_1$ i $O_1O_2S_2$, slijedi da su ti trokuti sukladni po $S-S-K^>$ teoremu o sukladnosti.
Iz sukladnosti trokuta $O_1O_2S_1$ i $O_1O_2S_2$ slijedi $|O_2S_1| = |O_2S_2|$. Kako je od prije



Slika 1.8.

poznato da vrijedi $|D_1'D_2'| = |O_2S_1|$ i $|D_3'D_4'| = |O_2S_2|$, konačno imamo $|D_1'D_2'| = |D_2'D_4'|$. □

Ako dvije kružnice imaju četiri zajedničke tangente, udaljenosti odgovarajućih dirališta na unutarnjim odnosno vanjskim zajedničkim tangenta neće biti jednake. Stoga definiramo vanjsku i unutarnju tangentnu udaljenost dviju kružnica.

Definicija 1.4. *Neka je t^v zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2, a točke D_1 i D_2 redom dirališta tangente t^v s kružnicama k_1 i k_2. Udaljenost $|D_1D_2|$ nazivamo* ***vanjska tangentna udaljenost kružnica*** *k_1 i k_2.*

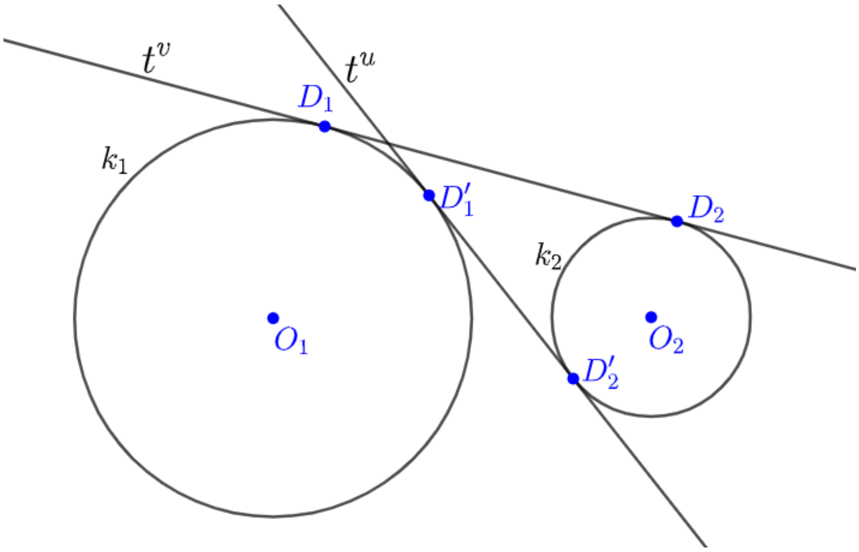
Definicija 1.5. *Neka je t^u zajednička unutarnja tangenta kružnica k_1 i k_2 a, točke D_1' i D_2' redom dirališta tangente t^u s kružnicama k_1 i k_2. Udaljenost $|D_1'D_2'|$ nazivamo* ***unutarnja tangentna udaljenost kružnica*** *k_1 i k_2.*

Izračunajmo sada udaljenost $|D_1D_2|$ iz leme 1.2. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut $S_1D_1D_2$ sa slike 1.7.. Slijedi

$$\begin{aligned} |D_1D_2|^2 &= |D_2S_1|^2 - |D_1S_1|^2 \\ &= d^2 - (r_1 - r_2)^2. \end{aligned}$$

Konačno, vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 iznosi:

$$t^v = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}. \tag{1.3}$$



Slika 1.9.: Tangentne udaljenosti

Uočimo da ova formula vrijedi i za $r_1 \leq r_2$.
Izračunajmo sada udaljenost $|D_1'D_2'|$ iz leme 1.3. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut $O_1O_2S_1$ sa slike 1.8.. Slijedi

$$\begin{aligned} |D_1'D_2'|^2 = |O_2S_1|^2 &= |O_1O_2|^2 - |O_1S_1|^2 \\ &= d^2 - (r_1 + r_2)^2. \end{aligned}$$

Konačno, unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 iznosi:

$$t^u = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}. \tag{1.4}$$

Kako je $|r_1 - r_2| < r_1 + r_2$ vrijedi

$$d^2 - (r_1 - r_2)^2 > d^2 - (r_1 + r_2)^2$$

pa iz jednakosti (1.3) i (1.4) slijedi $t^v > t^u$.

Zaključak: Vanjska tangentna udaljenost dviju kružnica je veća od unutarnje tangentne udaljenosti tih dviju kružnica.

Poglavlje 2

Inverzija

Definicija 2.1. *Neka je M ravnina, $O \in M$ čvrsta točka, $R \in \mathbb{R}^+$ i $T \neq O$ bilo koja točka ravnine M. Preslikavanje ravnine $I_O : M \backslash \{O\} \to M \backslash \{O\}$ koje točki T pridružuje točku T', tako da vrijedi:*

1. *O, T, T' su kolinearne točke*
2. *T i T' leže s iste strane točke O*
3. *$|OT| \cdot |OT'| = R^2$*

*zove se **inverzija** s **centrom inverzije** O i **konstantom inverzije** R^2.*

Iz definicije inverzije direktno slijedi da se svaka točka na kružnici sa središtem u centru inverzije O i polumjera R inverzijom I_O preslika sama na sebe, odnosno, svaka je točka kružnice $k(O, R)$ fiksna. Kružnica $k(O, R)$ naziva se **kružnica inverzije**. Inverzija je jednoznačno određena kružnicom inverzije $k(O, R)$. Dakle, kada preslikavamo elemente ravnine M koristeći inverziju I_O dovoljno je reći da se elementi preslikavaju u odnosu na kružnicu inverzije $k(O, R)$.
Sljedeća tri teorema nećemo dokazivati, a dokazi se mogu naći u [10].

Teorem 2.1. *Ako je točka O centar inverzije, pravac p koji prolazi točkom O preslikava se u samog sebe.*

Teorem 2.2. *Ako je O centar inverzije, pravac p koji ne prolazi točkom O preslikava se u kružnicu k koja prolazi točkom O.*

Teorem 2.3. *Ako je O centar inverzije, kružnica k koja prolazi točkom O preslikava se u pravac p koji ne prolazi točkom O.*

Teorem 2.4. *Ako je O centar inverzije, kružnica koja ne prolazi točkom O preslika se u kružnicu koja ne prolazi točkom O.*

Teorem 2.5. *Ako je O centar inverzije, a točke A i B tom su inverzijom preslikane u A' i B', tada su trokuti OAB i $OB'A'$ slični.*

Dokaz. Iz definicije inverzije slijedi: $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = R^2$, pa je $|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'|$, a budući da je $\angle AOB = \angle B'OA'$ trokuti OAB i $OB'A'$ su slični. □

Teorem 2.6. *Ako je O centar inverzije, a točke A, B, C i D tom se inverzijom preslikaju redom u točke A', B', C' i D' tada vrijedi:*

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AD| \cdot |CB|} = \frac{|A'B'| \cdot |C'D'|}{|A'D'| \cdot |C'B'|} \tag{2.1}$$

Dokaz. Iz sličnosti trokuta $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, $\triangle OCD \sim \triangle OD'C'$, $\triangle OAD \sim \triangle OD'A'$ i $\triangle OCB \sim \triangle OB'C'$ slijedi tvrdnja teorema. □

Sljedeći teorem povezuje potenciju točke u odnosu na kružnicu i inverziju.

Teorem 2.7. *Neka je $k'(S', r')$ slika kružnice $k(S, r)$ u odnosu na kružnicu inverzije $k_i(O, R)$. Neka je t potencija točke O u odnosu na kružnicu $k(S, r)$ i t' potencija točke O u odnosu na kružnicu $k'(S', r')$. Tada vrijedi:*

$$r' = r \cdot \frac{R^2}{t}, \quad t' = \frac{R^4}{t}.$$

Dokaz. Pravac koji prolazi točkama O i S siječe kružnicu k u točkama P i Q. Točke P' i Q' su slike redom točaka P i Q pri promatranoj inverziji.
Tada je $t = |OP| \cdot |OQ|$ i $t' = |OP'| \cdot |OQ'|$. Zbog $|OP| \cdot |OP'| = R^2$ i $|OQ| \cdot |OQ'| = R^2$ slijedi:

$$t' = \frac{R^2}{|OP|} \cdot \frac{R^2}{|OQ|},$$

konačno

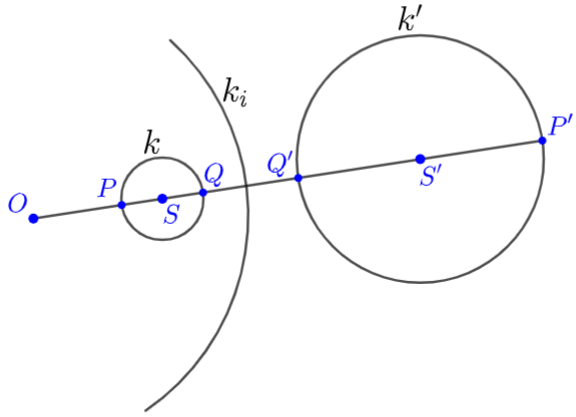
$$t' = \frac{R^4}{t}.$$

Sada promotrimo duljinu

$$2r' = |Q'P'| = |OP'| - |OQ'|.$$

Kako je $|OP| \cdot |OP'| = R^2$ i $|OQ| \cdot |OQ'| = R^2$ slijedi:

$$2r' = R^2 \left(\frac{1}{|OP|} - \frac{1}{|OQ|} \right) = R^2 \left(\frac{|OQ| - |OP|}{|OP| \cdot |OQ|} \right),$$



Slika 2.1.

zbog $|OQ| - |OP| = |PQ| = 2r$ i $|OP| \cdot |OQ| = t$, konačno:

$$r' = r \cdot \frac{R^2}{t}.$$

□

Napomena 2.1. *Potencija točke T koja leži izvan kružnice k s obzirom na kružnicu k jednaka je kvadratu udaljenosti točke T i dirališta tangente iz te točke i kružnice k, odnosno kvadratu tangentne udaljenosti točke T i kružnice k.*

Teorem 2.8. *Neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ dvije kružnice. Neka je t_{12}^v vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2, a t_{12}^u unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2. Tada se $\dfrac{(t_{12}^v)^2}{r_1 \cdot r_2}$ i $\dfrac{(t_{12}^u)^2}{r_1 \cdot r_2}$ ne mijenjaju pri inverziji čiji je centar unutar ili izvan kružnica k_1 i k_2.*

Najprije napomenimo da tvrdnja teorema ne vrijedi ako se centar inverzije nalazi unutar jedne, a izvan druge kružnice.

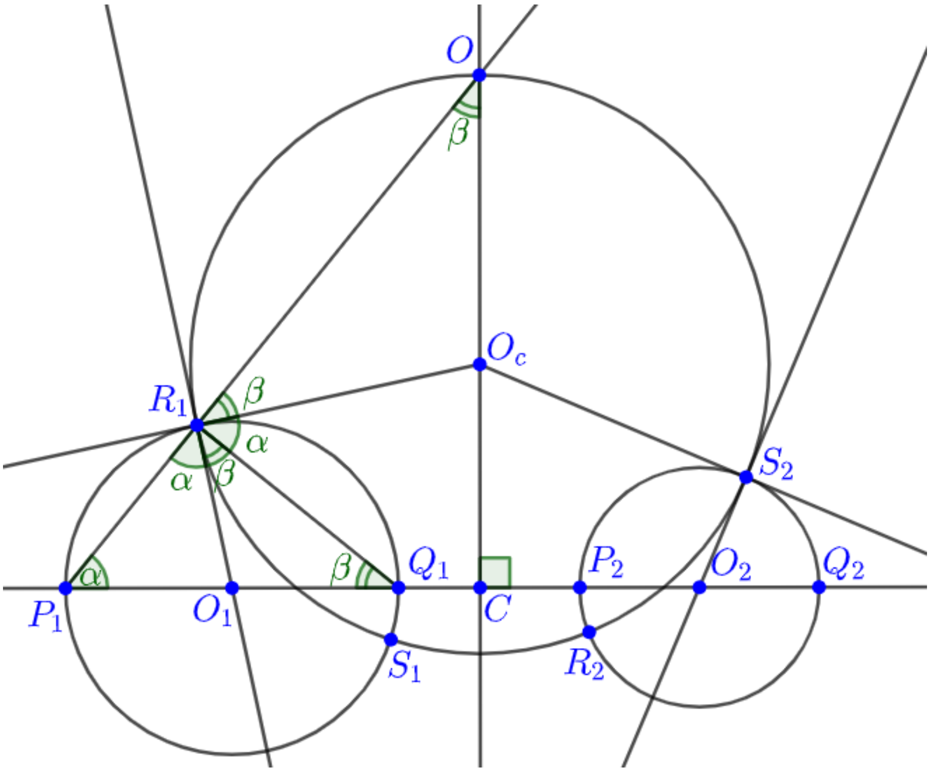
Prije dokaza teorema iskazat ćemo i dokazati sljedeću lemu.

Lema 2.1. *Neka su R_1, S_1, R_2, S_2 redom sjecišta kružnica $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ s kružnicom $k_c(O_c, r_c)$ koja je ortogonalna na k_1 i k_2. Neka je pravac p spojnica središta kružnica k_1 i k_2 koji kružnicu k_1 siječe redom u točkama P_1 i Q_1 te kružnicu k_2 siječe redom u točkama P_2 i Q_2. Tada vrijede jednakosti:*

$$\frac{|R_1S_2| \cdot |S_1R_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} \tag{2.2}$$

$$\frac{|R_1R_2|\cdot|S_1S_2|}{|R_1S_1|\cdot|R_2S_2|}=\frac{|P_1P_2|\cdot|Q_1Q_2|}{|P_1Q_1|\cdot|P_2Q_2|}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Označimo $|O_1O_2| = d$ i uočimo da je $|P_1Q_1| = 2r_1$, te $|P_2Q_2| = 2r_2$. Kako



Slika 2.2.

točke R_1 i S_2 leže na kružnici k_c, slijedi $|O_cR_1| = |O_cS_2| = r_c$. Potencija točke O_c u odnosu na kružnicu k_1 iznosi $|O_cR_1|^2 = r_c^2$, a na kružnicu k_2 iznosi $|O_cS_2|^2 = r_c^2$, pa zbog napomene 2.1 slijedi da O_c leži na potencijali (radikalnoj osi) kružnica k_1 i k_2. Pravac O_1R_1 je tangenta na k_c i pravac R_1O_c je tangenta na k_1. Kružnice k_1 i k_c su ortogonalne pa slijedi da su pravci O_1R_1 i O_cR_1 međusobno okomiti.
Neka je točka O sjecište potencijale kružnica k_1 i k_2 s pravcem P_1R_1. Znamo da su pravci OO_c i O_1O_2 međusobno okomiti.
Označimo kut $\angle R_1P_1O_1 = \alpha$ i kut $\angle O_1Q_1R_1 = \beta$. Kako je $|O_1P_1| = |O_1R_1| = r_1$ slijedi da je trokut $P_1O_1R_1$ jednakokračan, odnosno $\angle R_1P_1O_1 = \angle P_1R_1O_1 = \alpha$. Isto tako iz $|O_1Q_1| = |O_1R_1| = r_1$ slijedi da je trokut $Q_1O_1R_1$ jednakokračan, odnosno $\angle O_1R_1Q_1 = \angle O_1Q_1R_1 = \beta$.
Kut $\angle P_1R_1Q_1$ je pravi kut po Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice. Kako je kut $\angle P_1R_1Q_1$ pravi tada vrijedi $\angle P_1R_1Q_1 = \angle P_1R_1O_1 + \angle O_1R_1Q_1 = \alpha + \beta =$

90°.
Kako su pravci O_1R_1 i O_cR_1 međusobno okomiti slijedi da je kut $O_1R_1O_c$ pravi kut, odnosno slijedi da je kut $\angle Q_1R_1O_c = \alpha$.
Kut $\angle Q_1R_1O$ je također pravi kut iz čega slijedi da je $\angle O_cR_1O = \beta$.
Točka C je sjecište potencijale kružnica k_1 i k_2 i pravca p. Iz pravokutnog trokuta P_1OC zaključujemo da je kut $\angle P_1OC = \beta$. Konačno zaključujemo da je trokut R_1O_cO jednakokračan, odnosno da je $|O_cO| = r_c$ što znači da točka O leži na kružnici k_c.
Dakle, točka O se nalazi na sjecištu potencijale kružnica k_1 i k_2 i kružnice k_c. Na analogan način se pokaže da pravci Q_1S_1, P_2R_2 i Q_2S_2 prolaze točkom O.
Sada promatrajmo inverziju s centrom u točki O koja točku R_1 preslika u točku P_1. Ona preslikava točke S_1, R_2, S_2 redom u Q_1, P_2, Q_2, a kružnicu k_c u pravac p. Prema teoremu 2.6 za točke R_1, S_1, R_2, S_2 i njihove inverzne slike P_1, Q_1, P_2, Q_2 vrijede jednaksoti:

$$\frac{|R_1S_2| \cdot |S_1R_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|},$$

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|}.$$

□

Dokažimo sada teorem 2.8:

Dokaz. Ovisno o međusobnom položaju kružnica k_1 i k_2, te centra inverzije razlikujemo tri slučaja.

A. kružnice k_1 i k_2 se ne sijeku i centar inverzije O se nalazi izvan kružnica k_1 i k_2

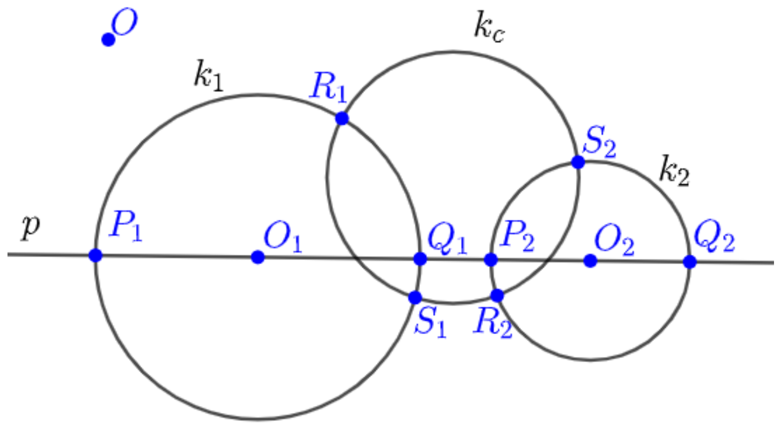
B. kružnice k_1 i k_2 se sijeku i centar inverzije O se nalazi izvan kružnica k_1 i k_2

C. kružnice k_1 i k_2 se sijeku i centar inverzije O se nalazi unutar kružnica k_1 i k_2

Neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ kružnice i neka pravac p siječe kružnice k_1 i k_2 redom u točkama P_1, Q_1, P_2 i Q_2 kao na slici 2.3. tako da je $|P_1Q_1| = 2r_1$ i $|P_2Q_2| = 2r_2$.
Slučaj A.-kružnice k_1 i k_2 se ne sijeku i centar inverzije O se nalazi izvan kružnica k_1 i k_2

Promotrimo sada sljedeće izraze:

$$\frac{|P_1Q_2| \cdot |Q_1P_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 + r_2)(d - r_1 - r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 + r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^u)^2}{4r_1r_2},$$



Slika 2.3.

$$\frac{|P_1P_2|\cdot|Q_1Q_2|}{|P_1Q_1|\cdot|P_2Q_2|}=\frac{(d+r_1-r_2)\,(d-r_1+r_2)}{2r_1\cdot 2r_2}=\frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2}=\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) i (1.4) brojnici $d^2-(r_1-r_2)^2$ i $d^2-(r_1+r_2)^2$, ako su pozitivni, predstavljaju kvadrat tangentne udaljenosti kružnica k_1 i k_2.
Neka je k_c ortogonalna na kružnice k_1 i k_2 i neka su R_1, S_1, R_2, S_2 redom sjecišta kružnica k_1 i k_2 s kružnicom k_c. Primijenimo sada lemu 2.1 na točke R_1, S_1, R_2, S_2:

$$\frac{|R_1S_2|\cdot|S_1R_2|}{|R_1S_1|\cdot|R_2S_2|}=\frac{|P_1Q_2|\cdot|Q_1P_2|}{|P_1Q_1|\cdot|P_2Q_2|}=\frac{(t_{12}^u)^2}{4r_1r_2},$$

$$\frac{|R_1R_2|\cdot|S_1S_2|}{|R_1S_1|\cdot|R_2S_2|}=\frac{|P_1P_2|\cdot|Q_1Q_2|}{|P_1Q_1|\cdot|P_2Q_2|}=\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem O izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu $k_1(O_1,r_1)$ u $k_1'(O_1',r_1')$, kružnicu $k_2(O_2,r_2)$ u $k_2'(O_2',r_2')$, a kružnicu k_c u k_c'. Kako je k_c ortogonalna na k_1 i k_2, a inverzija čuva kutove, kružnica k_c' je ortogonalna na k_1' i k_2'. Primijenimo prethodnu jednakost na slike R_1', S_1', R_2', S_2' točaka R_1, S_1, R_2, S_2 pri toj inverziji:

$$\frac{|R_1'S_2'|\cdot|S_1'R_2'|}{|R_1'S_1'|\cdot|R_2'S_2'|}=\frac{(t_{12}'^u)^2}{4r_1'r_2'},$$

$$\frac{|R_1'R_2'|\cdot|S_1'S_2'|}{|R_1'S_1'|\cdot|R_2'S_2'|}=\frac{(t_{12}'^v)^2}{4r_1'r_2'},$$

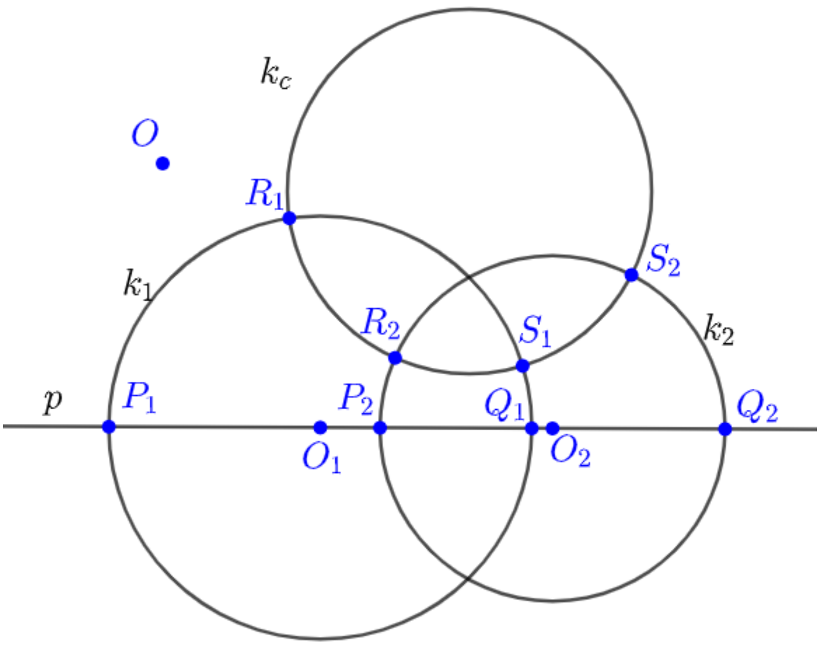
gdje je t'^{u}_{12} unutarnja tangentna udaljenost kružnica k'_1 i k'_2, te t'^{v}_{12} vanjska tangentna udaljenost kružnica k'_1 i k'_2. Prema teoremu 2.6 za točke R_1, S_1, R_2, S_2 i njihove inverzne slike R'_1, S'_1, R'_2, S'_2 vrijedi:

$$\frac{(t^u_{12})^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1S_2|\cdot|S_1R_2|}{|R_1S_1|\cdot|R_2S_2|} = \frac{|R'_1S'_2|\cdot|S'_1R'_2|}{|R'_1S'_1|\cdot|R'_2S'_2|} = \frac{(t'^{u}_{12})^2}{4r'_1r'_2},$$

$$\frac{(t^v_{12})^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1R_2|\cdot|S_1S_2|}{|R_1S_1|\cdot|R_2S_2|} = \frac{|R'_1R'_2|\cdot|S'_1S'_2|}{|R'_1S'_1|\cdot|R'_2S'_2|} = \frac{(t'^{v}_{12})^2}{4r'_1r'_2}.$$

Ovime je slučaj A. dokazan.
Slučaj B.-kružnice k_1 i k_2 se sijeku i centar inverzije O se nalazi izvan kružnica k_1 i k_2

Kružnice k_1 i k_2 se sijeku pa nemaju unutarnju tangentu udaljenost. Promotrimo



Slika 2.4.

sada sljedeći izraz:

$$\frac{|P_1P_2|\cdot|Q_1Q_2|}{|P_1Q_1|\cdot|P_2Q_2|} = \frac{(d+r_1-r_2)\,(d-r_1+r_2)}{2r_1\cdot 2r_2} = \frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t^v_{12})^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) brojnik $d^2 - (r_1 - r_2)^2$, ako je pozitivan, predstavlja kvadrat vanjske tangentne udaljenosti kružnica k_1 i k_2.
Primjenimo sada lemu 2.1 na točke R_1, S_1, R_2, S_2 iz čega slijedi:

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem O izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu $k_1(O_1, r_1)$ u $k_1'(O_1', r_1')$, kružnicu $k_2(O_2, r_2)$ u $k_2'(O_2', r_2')$, a kružnicu k_c u k_c'. Kako je k_c ortogonalna na k_1 i k_2, a inverzija čuva kutove, kružnica k_c' je ortogonalna na k_1' i k_2'. Primijenimo prethodnu jednakost na slike R_1', S_1', R_2', S_2' točaka R_1, S_1, R_2, S_2 pri toj inverziji:

$$\frac{|R_1'R_2'| \cdot |S_1'S_2'|}{|R_1'S_1'| \cdot |R_2'S_2'|} = \frac{\left(t_{12}'^v\right)^2}{4r_1'r_2'},$$

gdje je $t_{12}'^v$ vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2'. Prema teoremu 2.6 za točke R_1, S_1, R_2, S_2 i njihove inverzne slike R_1', S_1', R_2', S_2' vrijedi:

$$\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|R_1'R_2'| \cdot |S_1'S_2'|}{|R_1'S_1'| \cdot |R_2'S_2'|} = \frac{\left(t_{12}'^v\right)^2}{4r_1'r_2'}.$$

Ovime je slučaj B. dokazan.
Slučaj C.-kružnice k_1 i k_2 se sijeku i centar inverzije O se nalazi unutar kružnica k_1 i k_2

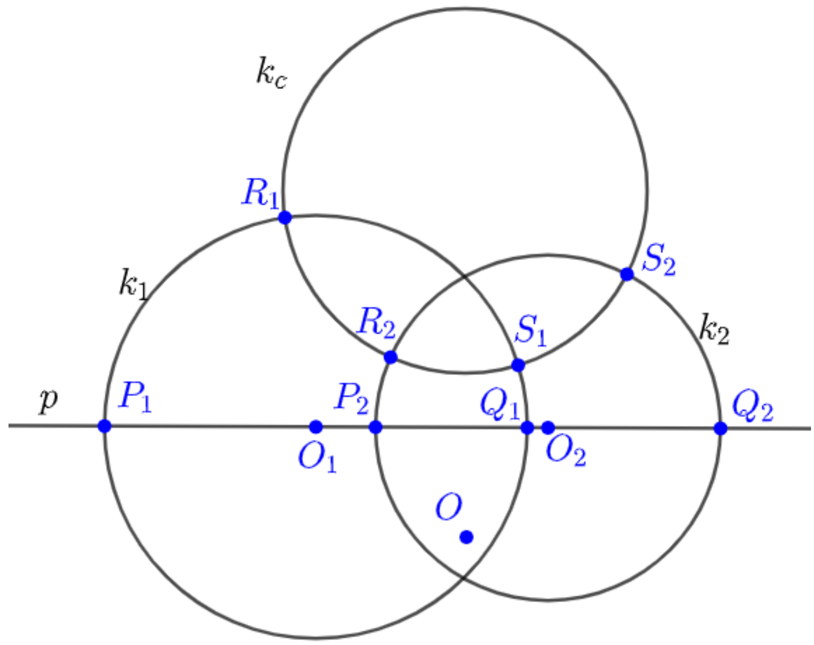
Kružnice k_1 i k_2 se sijeku pa nemaju unutarnju tangentu udaljenost. Promotrimo sada sljedeći izraz:

$$\frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(d + r_1 - r_2)(d - r_1 + r_2)}{2r_1 \cdot 2r_2} = \frac{d^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r_1r_2} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Kako vidimo iz jednakosti (1.3) brojnik $d^2 - (r_1 - r_2)^2$, ako je pozitivan, predstavlja kvadrat vanjske tangentne udaljenosti kružnica k_1 i k_2.
Primjenimo sada lemu 2.1 na točke R_1, S_1, R_2, S_2 iz čega slijedi:

$$\frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|P_1P_2| \cdot |Q_1Q_2|}{|P_1Q_1| \cdot |P_2Q_2|} = \frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2}.$$

Sada promotrimo bilo koju inverziju sa središtem O izvan obje kružnice. Neka ona preslikava kružnicu $k_1(O_1, r_1)$ u $k_1'(O_1', r_1')$, kružnicu $k_2(O_2, r_2)$ u $k_2'(O_2', r_2')$, a kružnicu k_c u k_c'. Kako je k_c ortogonalna na k_1 i k_2, a inverzija čuva kutove, kružnica k_c' je



Slika 2.5.

ortogonalna na k_1' i k_2'. Primijenimo prethodnu jednakost na slike R_1', S_1', R_2', S_2' točaka R_1, S_1, R_2, S_2 pri toj inverziji:

$$\frac{|R_1'R_2'| \cdot |S_1'S_2'|}{|R_1'S_1'| \cdot |R_2'S_2'|} = \frac{\left(t_{12}'^{v}\right)^2}{4r_1'r_2'},$$

gdje je $t_{12}'^{v}$ vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2'. Prema teoremu 2.6 za točke R_1, S_1, R_2, S_2 i njihove inverzne slike R_1', S_1', R_2', S_2' vrijedi:

$$\frac{(t_{12}^v)^2}{4r_1r_2} = \frac{|R_1R_2| \cdot |S_1S_2|}{|R_1S_1| \cdot |R_2S_2|} = \frac{|R_1'R_2'| \cdot |S_1'S_2'|}{|R_1'S_1'| \cdot |R_2'S_2'|} = \frac{\left(t_{12}'^{v}\right)^2}{4r_1'r_2'}.$$

Ovime je slučaj C. dokazan.

$\square$

Poglavlje 3

Caseyev teorem

Prema L. Gonzalezu [5] Caseyev teorem glasi:
Neka su $k_i\,(O_i, r_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ *i* $k\,(O, r)$ *kružnice. Kružnice* k_i*,* $i = 1, 2, 3, 4$ *dodiruju kružnicu* k *ako i samo ako, uz pravilan odabir predznaka, vrijedi:*

$$\pm\, t_{12} \cdot t_{34} \pm t_{23} \cdot t_{14} \pm t_{13} \cdot t_{24} = 0, \tag{3.1}$$

pri čemu t_{ij}*,* $i, j = 1, 2, 3, 4$ *i* $i \neq j$ *predstavlja tangentnu udaljenost kružnica* k_i *i* k_j*.*
Ako pobliže promotrimo gornju formulaciju Caseyevog teorema možemo si postaviti dva pitanja. Koji je pravilan odabir predznaka? Koju tangentu udaljenost koristimo, unutarnju ili vanjsku?

Izračunajmo tangentnu udaljenost kružnica $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ koje dodiruju kružnicu $k(O, R)$. Uvedimo najprije oznaku t_{12}^v za vanjsku tangentnu udaljenosti kružnica k_1 i k_2 i t_{12}^u za unutarnju tangentnu udaljenosti kružnica k_1 i k_2. Promotrimo sada četiri slučaja:

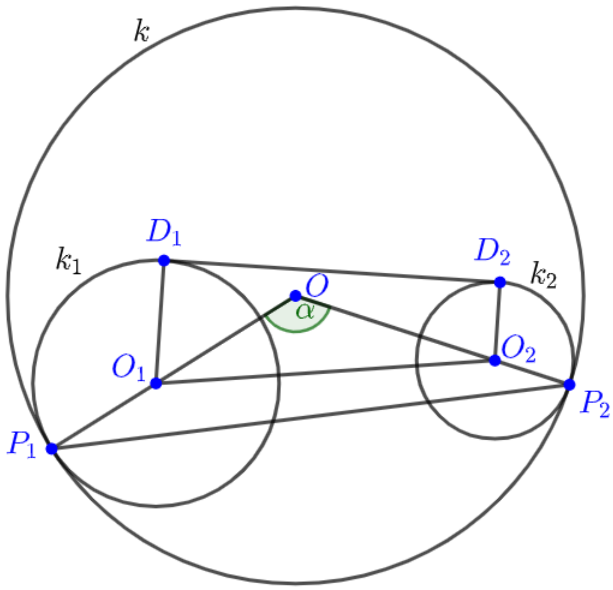
A. kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k iznutra,

B. kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k izvana,

C. kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k izvana,

D. kružnica k_1 dodiruje kružnicu k izvana, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k iznutra.

Slučaj A.- kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k iznutra
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r_1 \geq r_2$. Kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k iznutra redom u točkama P_1 i P_2. Zajednička vanjska tangenta na kružnice k_1 i k_2 dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, vidi sliku 3.1.. Prema



Slika 3.1.

jednakosti (1.3) vrijedi:

$$\left(t_{12}^v\right)^2 = |D_1D_2|^2 = d^2 - \left(r_1 - r_2\right)^2. \tag{3.2}$$

Označimo $\angle O_1OO_2 = \alpha$. Primjenom poučka o kosinusima na trokut OO_1O_2 dobije se:

$$\begin{aligned} d^2 = |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2 \cdot |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \cos\angle O_1OO_2 \\ &= \left(R - r_1\right)^2 + \left(R - r_2\right)^2 - 2\left(R - r_1\right)\left(R - r_2\right)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut OP_1P_2 i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2 = 2R^2\left(1 - \cos\alpha\right). \tag{3.4}$$

Iz jednakosti (3.3) izrazimo d^2, a iz jednakosti (3.4) $\cos\alpha$ te uvrstimo u (3.2) i dobijemo:

$$
\begin{aligned}
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\left(1-\frac{|P_1P_2|^2}{2R^2}\right)-(r_1-r_2)^2\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)+(R-r_1)(R-r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}\\
&- (r_1-r_2)^2\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= R^2-2Rr_1+r_1^2+R^2-2Rr_2+r_2^2-2R^2+2Rr_2+2Rr_1-2r_1r_2\\
&+ (R-r_1)(R-r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}-\left(r_1^2-2r_1r_2+r_2^2\right)\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R-r_1)(R-r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^{v}=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}. \tag{3.5}$$

Slučaj B.- kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k izvana
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r_1 \geq r_2$. Kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k izvana redom u točkama P_1 i P_2. Zajednička vanjska tangenta na kružnice k_1 i k_2 dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, vidi sliku 3.2..

Prema jednakosti (1.3) vrijedi:

$$\left(t_{12}^{v}\right)^{2}=|D_1D_2|^2=d^2-(r_1-r_2)^2. \tag{3.6}$$

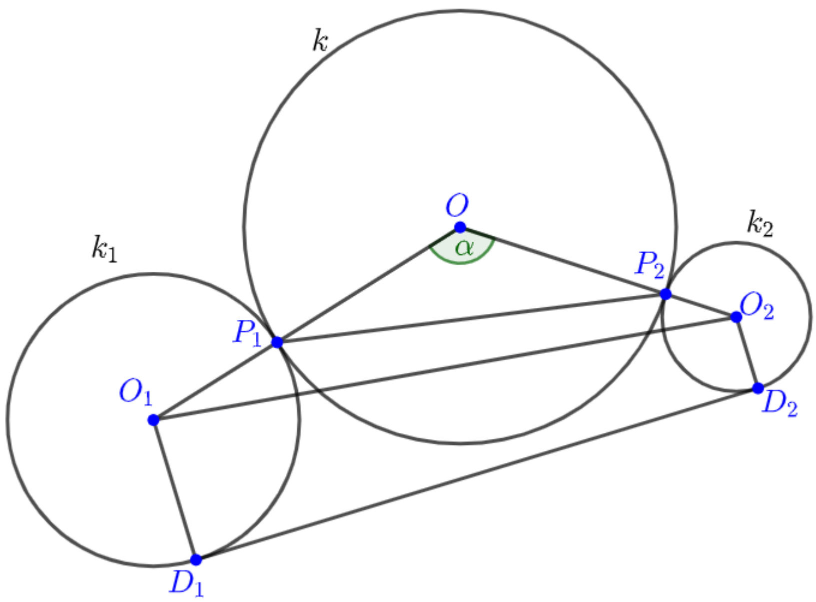
Označimo $\angle O_1OO_2=\alpha$. Primjenom poučka o kosinusima na trokut OO_1O_2 dobije se:

$$
\begin{aligned}
d^2=|O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2+|OO_2|^2-2\cdot|OO_1|\cdot|OO_2|\cdot\cos\angle O_1OO_2\\
&= (R+r_1)^2+(R+r_2)^2-2(R+r_1)(R+r_2)\cos\alpha. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut OP_1P_2 i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2=2R^2(1-\cos\alpha). \tag{3.8}$$

Iz jednakosti (3.7) izrazimo d^2, a iz jednakosti (3.8) $\cos\alpha$ te uvrstimo u (3.6) i dobi-



Slika 3.2.

jemo:

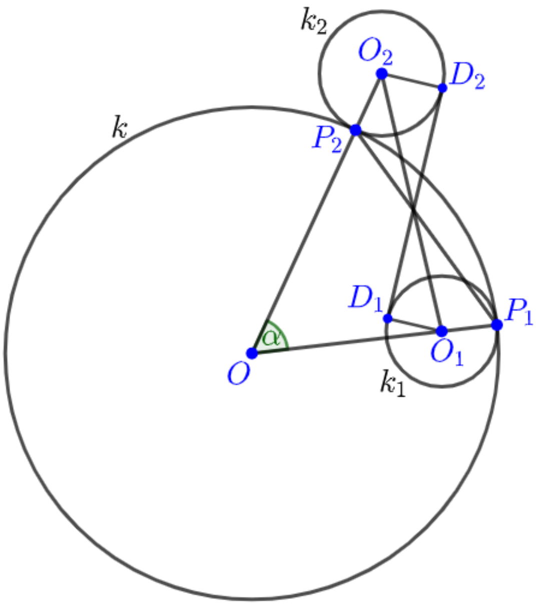
$$
\begin{aligned}
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R+r_1)^2+(R+r_2)^2-2\,(R+r_1)\,(R+r_2)\left(1-\frac{|P_1P_2|^2}{2R^2}\right)-(r_1-r_2)^2\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R+r_1)^2+(R+r_2)^2-2\,(R+r_1)\,(R+r_2)+(R+r_1)\,(R+r_2)\,\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}\\
&- (r_1-r_2)^2\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= R^2+2Rr_1+r_1^2+R^2+2Rr_2+r_2^2-2R^2-2Rr_2-2Rr_1-2r_1r_2\\
&+ (R+r_1)\,(R+r_2)\,\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}-\left(r_1^2-2r_1r_2+r_2^2\right)\\
\left(t_{12}^{v}\right)^{2} &= (R+r_1)\,(R+r_2)\,\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^{v}=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)\,(R+r_2)}. \tag{3.9}$$

Slučaj C.- kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k izvana

Kružnica k_1 dira kružnicu k iznutra i kružnica k_2 dodiruje kružnicu k izvana redom u točkama P_1 i P_2. Zajednička unutarnja tangenta na kružnice k_1 i k_2 dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, vidi sliku 3.3.. Prema jednakosti (1.4) vrijedi:



Slika 3.3.

$$\left(t_{12}^u\right)^2 = |D_1D_2|^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2 . \tag{3.10}$$

Označimo $\angle O_1OO_2 = \alpha$. Primjenom poučka o kosinusu na trokut OO_1O_2 dobije se:

$$\begin{aligned} d^2 = |O_1O_2|^2 &= |OO_1|^2 + |OO_2|^2 - 2 \cdot |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \cos\angle O_1OO_2 \\ &= (R - r_1)^2 + (R + r_2)^2 - 2\,(R - r_1)\,(R + r_2)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sada još primijenimo poučak o kosinusima na trokut OP_1P_2 i dobijemo:

$$|P_1P_2|^2 = 2R^2\,(1 - \cos\alpha) . \tag{3.12}$$

Iz jednakosti (3.11) izrazimo d^2, a iz jednakosti (3.12) $\cos\alpha$ te uvrstimo u (3.10) i dobijemo:

$$
\begin{aligned}
\left(t_{12}^u\right)^2 &= (R-r_1)^2+(R+r_2)^2-2(R-r_1)(R+r_2)\left(1-\frac{|P_1P_2|^2}{2R^2}\right)-(r_1+r_2)^2 \\
\left(t_{12}^u\right)^2 &= (R-r_1)^2+(R+r_2)^2-2(R-r_1)(R+r_2)+(R-r_1)(R+r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2} \\
&- (r_1+r_2)^2 \\
\left(t_{12}^u\right)^2 &= R^2-2Rr_1+r_1^2+R^2+2Rr_2+r_2^2-2R^2-2Rr_2+2Rr_1+2r_1r_2 \\
&+ (R-r_1)(R+r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}-\left(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2\right) \\
\left(t_{12}^u\right)^2 &= (R-r_1)(R+r_2)\frac{|P_1P_2|^2}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Nakon korjenovanja gornje jednakosti slijedi:

$$t_{12}^u=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R-r_1)(R+r_2)}. \tag{3.13}$$

Slučaj D.- kružnica k_1 dodiruje kružnicu k izvana, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k iznutra

Račun se provodi kao u slučaju C. samo zamijenimo kružnice k_1 i k_2. Konačna jednakosti glas:

$$t_{12}^u=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}. \tag{3.14}$$

Nakon izračunavanja tangentnih udaljenosti kružnica k_1 i k_2 koje dodiruju kružnicu k možemo izreći sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Dvije kružnice $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ dodiruju kružnicu $k(O,R)$ redom u točkama P_1 i P_2.*

A. Ako kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k iznutra tada je njihova vanjska tangentna udaljenost:

$$t_{12}^v=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}. \tag{3.15}$$

B. Ako kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k izvana tada je njihova vanjska tangentna udaljenost:

$$t_{12}^v=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}. \tag{3.16}$$

C. Ako kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k izvana tada je njihova unutarnja tangentna udaljenost:

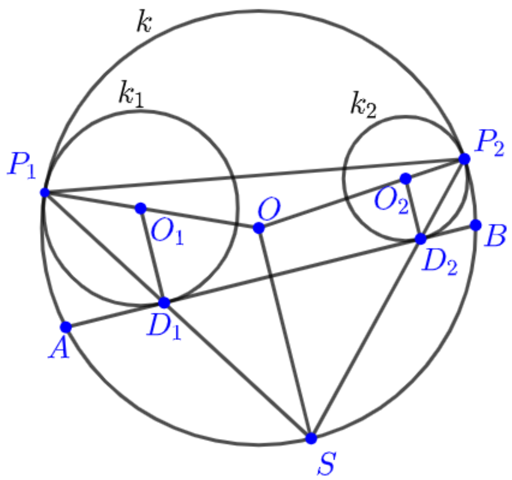
$$t_{12}^u=\frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R-r_1)(R+r_2)}. \tag{3.17}$$

D. *Ako kružnica k_1 dodiruje kružnicu k izvana, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k iznutra tada je njihova unutarnja tangentna udaljenost:*

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}. \tag{3.18}$$

Dokažimo sada teorem 3.1 koristeći sličnost.

Dokaz. Slučaj A.- kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k iznutra
Neka je AB zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2, tako da su točke A i B na kružnici k (vidi sliku 3.4.). Točke D_1 i D_2 su redom dirališta zajedničke tangente AB i kružnica k_1 i k_2. Točke P_1 i P_2 su redom dirališta kružnice k i kružnica k_1 i k_2. Sa S označimo sjecište pravca P_1D_1 i kružnice k, različito od P_1. Kutovi $\angle D_1P_1O_1$ i $\angle P_1D_1O_1$ su sukladni jer su to kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta $P_1O_1D_1$. Kutovi $\angle SP_1O$ i $\angle P_1SO$ su sukladni jer su to kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta P_1OS. Slijedi da su trokuti $P_1O_1D_1$ i P_1OS slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta. Zbog sličnosti trokuta $P_1O_1D_1$ i P_1OS slijedi da je $O_1D_1 \parallel OS$.
Na analogan način se pokaže da su trokuti $P_2O_2D_2$ i P_2OS slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta. Zbog sličnosti trokuta $P_2O_2D_2$ i P_2OS slijedi da je $O_2D_2 \parallel OS$.
Sada imamo:



Slika 3.4.

$$\angle SD_1D_2 = \angle P_1D_1A = \frac{1}{2}\angle P_1O_1D_1 = \frac{1}{2}\angle P_1OS = \angle SP_2P_1.$$

Zbog toga su trokuti SD_1D_2 i SP_2P_1 slični po K-K teoremu o sličnosti trokuta i slijedi:

$$\frac{|D_1D_2|}{|P_2P_1|} = \frac{|SD_1|}{|SP_2|} = \frac{|SD_2|}{|SP_1|}. \tag{3.19}$$

Sada kvadrirajmo zadnji član iz gornje jednakosti:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|SD_2|}{|SP_1|} \cdot \frac{|SD_2|}{|SP_1|},$$

iz jednakosti (3.19) vidimo da je:

$$\frac{|SD_1|}{|SP_2|} = \frac{|SD_2|}{|SP_1|},$$

te konačno imamo:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|SD_1|}{|SP_2|} \cdot \frac{|SD_2|}{|SP_1|}. \tag{3.20}$$

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na krakove kuta $\angle OP_1S$ i paralelne pravce O_1D_1 i OS, slijedi:

$$\frac{|P_1D_1|}{|P_1S|} = \frac{|P_1O_1|}{|P_1O|}, \tag{3.21}$$

$$\frac{|P_1D_1|}{|D_1S|} = \frac{|P_1O_1|}{|OO_1|}. \tag{3.22}$$

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na krakove kuta $\angle OP_2S$ i paralelne pravce O_2Q_2 i OS, slijedi:

$$\frac{|P_2D_2|}{|P_2S|} = \frac{|P_2O_2|}{|P_2O|}, \tag{3.23}$$

$$\frac{|P_2D_2|}{|D_2S|} = \frac{|P_2O_2|}{|OO_2|}. \tag{3.24}$$

Iz jednakosti (3.22) izrazimo $|SD_1|$:

$$|SD_1| = \frac{|OO_1|}{|P_1O_1|} \cdot |P_1D_1|$$

i iz jednakosti (3.24) izrazimo $|SD_2|$:

$$|SD_2| = \frac{|OO_2|}{|P_2O_2|} \cdot |P_2D_2|$$

te uvrstimo u jednakost (3.20). Slijedi:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|P_1D_1| \cdot |OO_1|}{|SP_2| \cdot |P_1O_1|} \cdot \frac{|P_2D_2| \cdot |OO_2|}{|SP_1| \cdot |P_2O_2|}.$$

Grupirajmo sada članove na sljedeći način:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = |OO_1| \cdot |OO_2| \cdot \frac{|P_1D_1|}{|SP_1| \cdot |P_1O_1|} \cdot \frac{|P_2D_2|}{|SP_2| \cdot |P_2O_2|}$$

Iz jednakosti (3.21) vidimo da je treći faktor jednak $\frac{1}{|P_1O|}$, a iz jednakosti (3.23) vidimo da je četvrti faktor jednak $\frac{1}{|P_2O|}$.

Stoga je:

$$\left(\frac{|SD_2|}{|SP_1|}\right)^2 = \frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}.$$

Sada korjenujmo gornju jednakost:

$$\frac{|SD_2|}{|SP_1|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}},$$

te je zbog (3.19):

$$\frac{|D_1D_2|}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{|OO_1| \cdot |OO_2|}{|P_1O| \cdot |P_2O|}}. \tag{3.25}$$

Kako su točke D_1 i D_2 redom dirališta zajedničke vanjske tangente s kružnicama k_1 i k_2, slijedi da je $|D_1D_2| = t_{12}^v$ vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2. Sada prepoznajemo da je $|OO_1| = R - r_1$, $|OO_2| = R - r_2$ i $|OP_1| = |OP_2| = R$, pa gornja jednakost glasi:

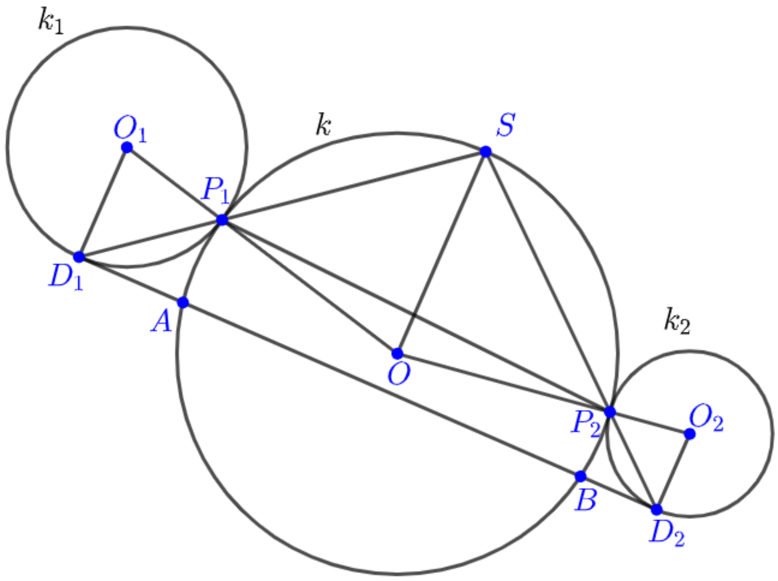
$$\frac{t_{12}^v}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R - r_1)(R - r_2)}{R^2}},$$

odnosno:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R - r_1)\,(R - r_2)}. \tag{3.26}$$

Slučaj B.- kružnice k_1 i k_2 dodiruju kružnicu k izvana

Na sličan način kao slučaj A. dokazuje se i ovaj slučaj. U ovom slučaju trokuti SD_1D_2 i SP_2P_1 su također slični i vrijedi $O_1D_1 \parallel OS \parallel O_2D_2$. Kako su točke D_1 i D_2 redom dirališta zajedničke vanjske tangente s kružnicama k_1 i k_2, slijedi da je



Slika 3.5.

$|D_1D_2| = t_{12}^v$ vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2. Sada prepoznajemo da je $|OO_1| = R + r_1$, $|OO_2| = R + r_2$ i $|OP_1| = |OP_2| = R$, pa jednakost (3.25) postaje:

$$\frac{t_{12}^v}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R+r_1)(R+r_2)}{R^2}},$$

odnosno:

$$t_{12}^v = \frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)\,(R+r_2)}. \tag{3.27}$$

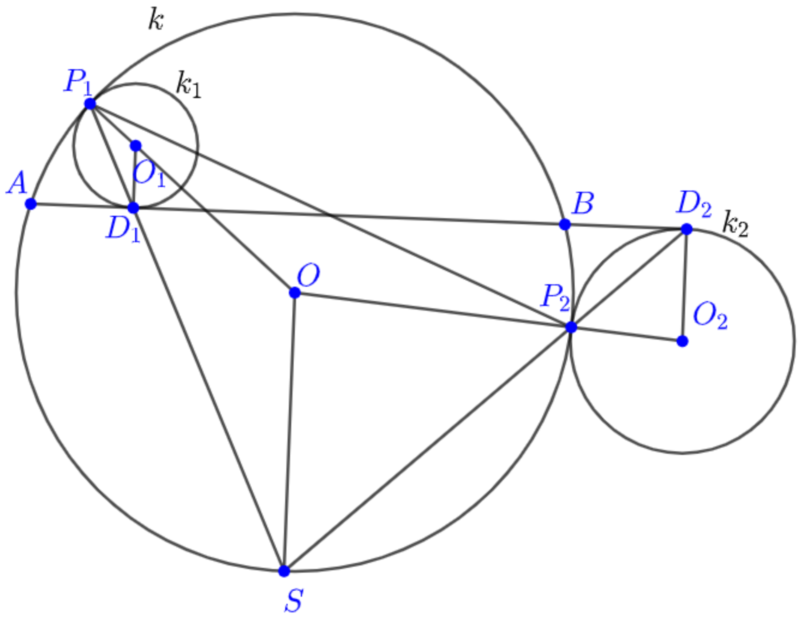
Slučaj C.- kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k izvana

Na sličan način kao slučaj A. dokazuje se i ovaj slučaj. U ovom slučaju trokuti SD_1D_2 i SP_2P_1 su također slični i vrijedi $O_1D_1 \parallel OS \parallel O_2D_2$. Kako su točke D_1 i D_2 redom dirališta zajedničke unutarnje tangente s kružnicama k_1 i k_2, slijedi da je $|D_1D_2| = t_{12}^u$ unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2. Sada prepoznajemo da je $|OO_1| = R - r_1$, $|OO_2| = R + r_2$ i $|OP_1| = |OP_2| = R$, pa jednakost (3.25) postaje:

$$\frac{t_{12}^u}{|P_1P_2|} = \sqrt{\frac{(R-r_1)(R+r_2)}{R^2}},$$

odnosno:

$$t_{12}^u = \frac{|P_1P_2|}{R}\sqrt{(R-r_1)\,(R+r_2)}. \tag{3.28}$$



Slika 3.6.

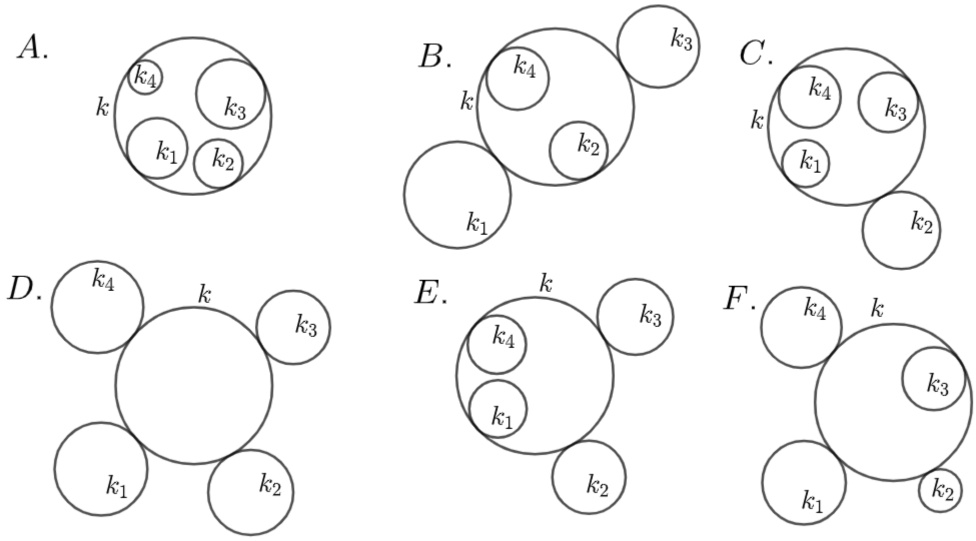
Slučaj D.- kružnica k_1 dodiruje kružnicu k izvana, a kružnica k_2 dodiruje kružnicu k iznutra
Dokaz se provodi isto kao u slučaju C. uz zamjenu k_1 i k_2, pa dobivamo:

$$t_{12}^{u} = \frac{|P_1 P_2|}{R}\sqrt{(R+r_1)(R-r_2)}. \tag{3.29}$$

Ovime je dovršen i drugi dokaz teorema 3.1. □

3.1 Prvi dokaz Caseyevog teorema

U iskazu Caseyevog teorema javljaju se četiri kružnice koje dodiruju kružnicu k, izvana ili iznutra. Ovisno o tome dodiruju li kružnice kružnicu k izvana ili iznutra postoji šest mogućnosti, vidi sliku 3.7..



Slika 3.7.: Šest konfiguracija dodirivanja kružnica

Promotrimo detaljnije slučaj $A.$, vidi sliku 3.8.. Neka su P_1, P_2, P_3, P_4 redom dirališta kružnica k_1, k_2, k_3, k_4 s kružnicom k. Na tetivni četverokut $P_1P_2P_3P_4$ primijenimo Ptolomejev teorem 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \tag{3.30}$$

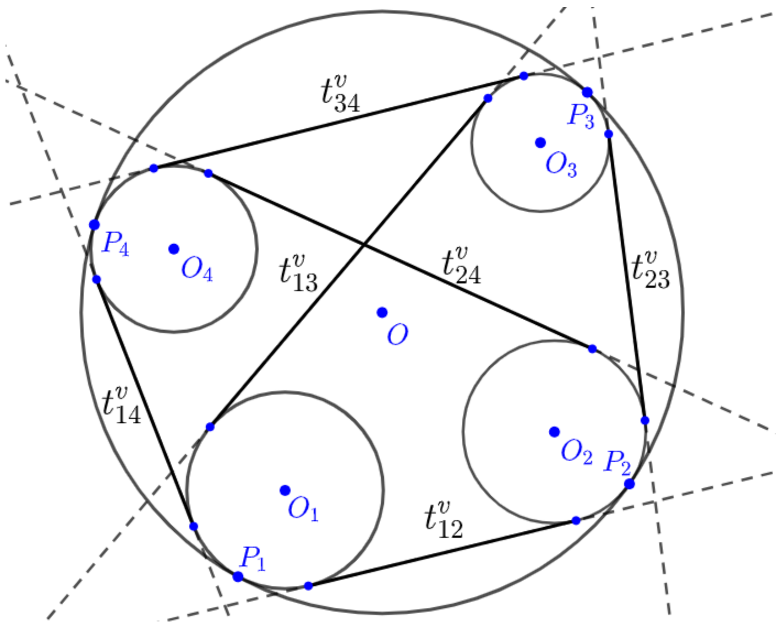
Kružnice k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ dodiruju kružnicu k iznutra, primijenimo jednakost (3.15) iz teorema 3.1:

$$|P_1P_2| = \frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}},$$

$$|P_3P_4| = \frac{t_{34}^v \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)(R - r_4)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23}^v \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)(R - r_3)}},$$

$$|P_1P_4| = \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)(R - r_4)}},$$



Slika 3.8.

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\,(R-r_3)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)\,(R-r_4)}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.30) slijedi:

$$\frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\,(R-r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)\,(R-r_4)}} + \frac{t_{23}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)\,(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\,(R-r_4)}}$$
$$= \frac{t_{13}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\,(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)\,(R-r_4)}}.$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R-r_1)\cdot(R-r_2)\cdot(R-r_3)\cdot(R-r_4)}$$

te dobivamo:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v.$$

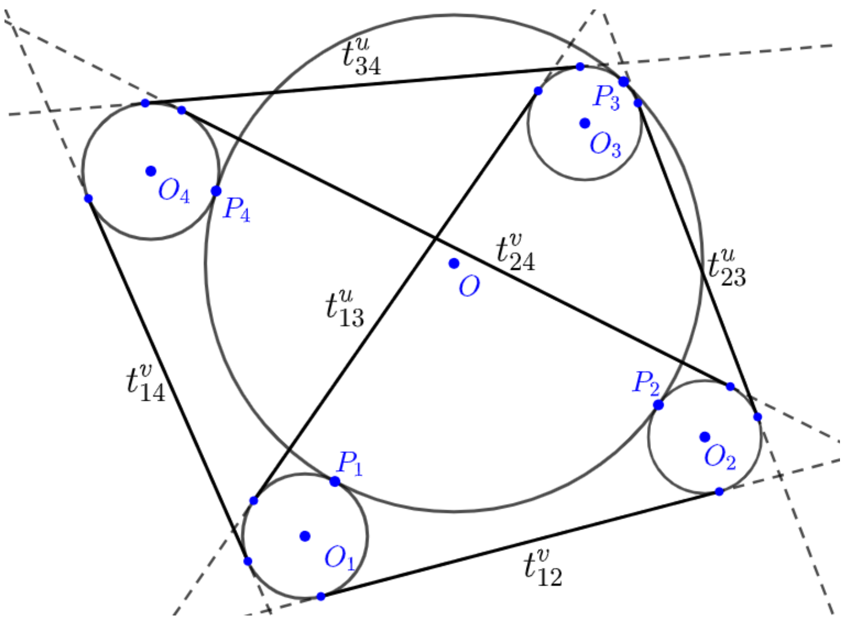
odnosno:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v - t_{13}^v \cdot t_{24}^v = 0.$$

Ovime smo pokazali da Caseyev teorem vrijedi za slučaj A. sa slike 3.7..

Slično se dokazuju i ostali slučajevi sa slike 3.7., a ovdje ćemo još provesti dokaz slučaja F.. Promotrimo detaljnije slučaj F., vidi sliku 3.9.. Neka su P_1, P_2, P_3, P_4 redom dirališta kružnica k_1, k_2, k_3, k_4 s kružnicom k. Na tetivni četverokut $P_1P_2P_3P_4$ primijenimo Ptolomejev teorem 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \tag{3.31}$$



Slika 3.9.

Kružnice k_1, k_2, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra, a k_3 izvana. Primijenimo jednakosti (3.15), (3.16) i (3.17) iz teorema 3.1:

$$|P_1P_2| = \frac{t^v_{12} \cdot R}{\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)}},$$

$$|P_1P_4| = \frac{t^v_{14} \cdot R}{\sqrt{(R + r_1)(R + r_4)}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t^v_{24} \cdot R}{\sqrt{(R + r_2)(R + r_4)}}.$$

$$|P_3P_4| = \frac{t^u_{34} \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)(R + r_4)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R-r_3)}},$$

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_3)}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.31) slijedi:

$$\frac{t_{12}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}} \cdot \frac{t_{34}^u \cdot R}{\sqrt{(R-r_3)(R+r_4)}} + \frac{t_{23}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{14}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_4)}}$$
$$= \frac{t_{13}^u \cdot R}{\sqrt{(R+r_1)(R-r_3)}} \cdot \frac{t_{24}^v \cdot R}{\sqrt{(R+r_2)(R+r_4)}}.$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R+r_1)\cdot(R+r_2)\cdot(R-r_3)\cdot(R+r_4)}$$

te dobivamo:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^v = t_{13}^u \cdot t_{24}^v.$$

odnosno:

$$t_{12}^v \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^v - t_{13}^u \cdot t_{24}^v = 0.$$

Ovime smo pokazali da Caseyev teorem vrijedi za slučaj F. sa slike 3.7..

Dakle vrijedi:

Teorem 3.2. *Neka su $k_i(O_i, r_i)$ $i = 1,2,3,4$ i $k(O,r)$ kružnice. Kružnice k_i, $i = 1,2,3,4$ dodiruju redom kružnicu k u točkama P_1, P_2, P_3, P_4 koje su vrhovi tetivnog četverokuta. Tada je u slučajevima sa slike 3.7.:*

$$A. \quad t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$B. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{23}^u \cdot t_{14}^u = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$C. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^v + t_{23}^u \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^u,$$

$$D. \quad t_{12}^v \cdot t_{34}^v + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^v \cdot t_{24}^v,$$

$$E. \quad t_{12}^u \cdot t_{34}^u + t_{23}^v \cdot t_{14}^v = t_{13}^u \cdot t_{24}^u,$$

$$F. \quad t^v_{12} \cdot t^u_{34} + t^u_{23} \cdot t^v_{14} = t^u_{13} \cdot t^v_{24},$$

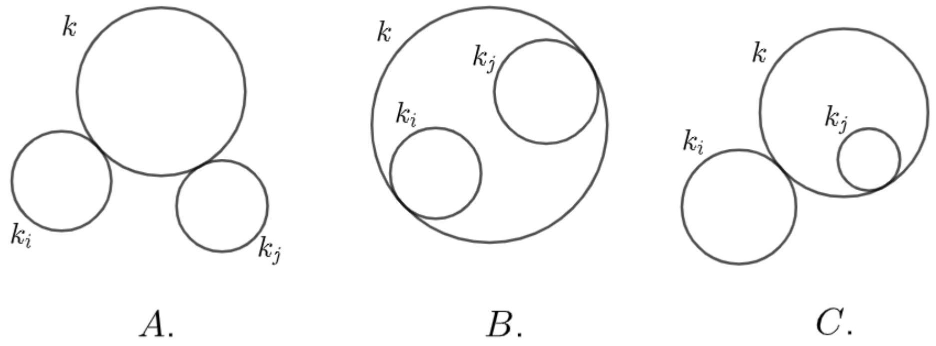
pri čemu t^v_{ij} predstavlja vanjsku tangentnu udaljenost kružnica k_i i k_j i t^u_{ij} predstavlja unutarnju tangentnu udaljenost kružnica k_i i k_j, gdje je $i, j = 1, 2, 3, 4$ i $i \neq j$.

Ovime smo dokazali i iskazali jedan smjer implikacije iz početnog Caseyevog teorema, bez nejasnoća koji predznak koristimo i koju tangentnu udaljenost koristimo.

Sada možemo odgovoriti na pitanja koja smo si postavili na početku ovog poglavlja.

Umnožak tangentnih udaljenosti dviju nasuprotnih kružnica jednak je zbroju umnožaka nasuprotnih tangentnih udaljenosti susjednih kružnica. Pri tome, pod pojam susjednih kružnica podrazumijevamo kružnice čija se dirališta s kružnicom k u cikličnom poretku nalaze jedna ispred druge ili jedna iza druge.

Ako su kružnice k_i i k_j s iste strane kružnice k, obje dodiruju kružnicu k izvana ili obje dodiruju kružnicu k iznutra (slučajevi $A.$ i $B.$ sa slike 3.10.), tada za t_{ij}



Slika 3.10.

uzimamo vanjsku tangentnu udaljenost kružnica k_i i k_j. Ako jedna od njih dira kružnicu k iznutra, a druga izvana (slučaj C sa slike 3.10.) tada za t_{ij} uzimamo unutarnju tangentnu udaljenost kružnica k_i i k_j.

3.2 Drugi dokaz Caseyevog teorema

Lema 3.1. *Neka su točke A, B, C, D redom na pravcu, tada vrijedi:*

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|. \tag{3.32}$$

Slika 3.11.

Dokaz. Označimo $b = |AB|$, $c = |AC|$, $d = |AD|$. Tada je $|BC| = c - b$, $|BD|d - b$ i $|CD| = d - c$.

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| &= b \cdot (d - c) + (c - b) \cdot d \\ &= bd - bc + cd - bd \\ &= -bc + cd \\ &= c \cdot (d - b) \\ &= |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

□

Teorem 3.3. ***Caseyev teorem*** *Neka su $k_i\,(O_i, r_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ i $k\,(O, r)$ kružnice. Kružnice k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ redom dodiruju kružnicu k ako i samo ako vrijedi:*

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}, \tag{3.33}$$

pri čemu t_{ij}, $i, j = 1, 2, 3, 4$ i $i \neq j$ predstavlja tangentnu udaljenost (vanjsku ili unutarnju) kružnica k_i i k_j.

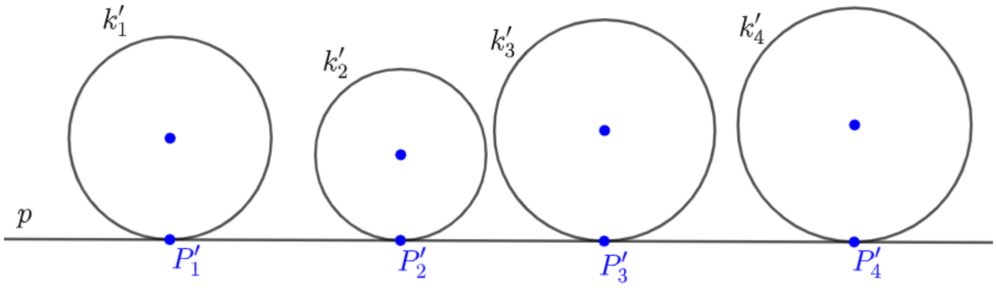
Sada ćemo dokazati Caseyev teorem pomoću inverzije, ali prije toga izkazat ćemo i dokazati sljedeću lemu.

Dokaz. Neka su $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ i $k_4(O_4, r_4)$ kružnice koje redom dodiruju kružnicu k izvana ili iznutra u točkama P_1, P_2, P_3 i P_4.
Sada, neka je centar inverzije O na kružnici k. Tada se kružnica k inverzijom preslika u pravac p, a kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 u kružnice k_1', k_2', k_3', $'k_4$ koje dodiruju pravac p. Točke dodira pravca p i kružnica k_1', k_2', k_3', $'k_4$ su P_1', P_2', P_3', P_4' (vidi sliku 3.12.) tada prema lemi 3.1 vrijedi:

$$|P_1'P_2'| \cdot |P_3'P_4'| + |P_1'P_3'| \cdot |P_2'P_4'| = |P_1'P_4'| \cdot |P_2'P_3'| \tag{3.34}$$

Ali $|P_1'P_2'|$ je baš tangentna udaljenost t_{12}' kružnica k_1' i k_2' u inverznoj slici. Svaki član jednadžbe (3.34) podijelimo s $\sqrt{r_1' \cdot r_2' \cdot r_3' \cdot r_4'}$, te primijenimo teorem 2.8. Sređivanjem dobivenog izraza dobijemo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24},$$



Slika 3.12.

odnosno:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = 0.$$

Time je dokazan jedan smjer teorema 3.3.

Za dokaz obrata trebat će nam sljedeće leme.

Lema 3.2. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ kružnice koje dodiruju kružnicu k izvana. Neka je $m \leq \min\{r_1, r_2\}$. Neka su $k'_1(O_1, r_1 - m)$ i $k'_2(O_2, r_2 - m)$ kružnice. Tada je vanjska tangentna udaljenost kružnica k'_1 i k'_2 jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

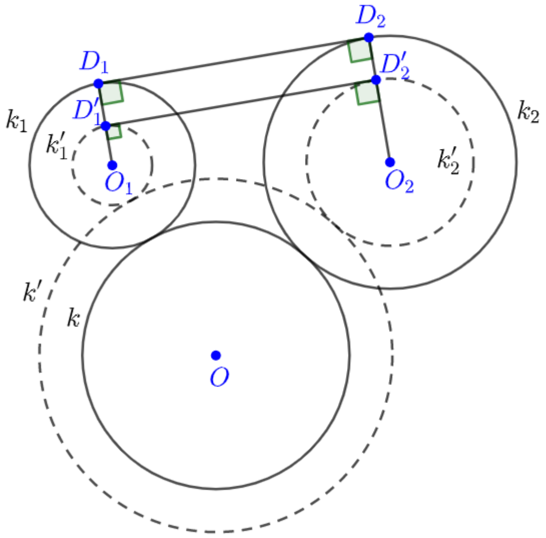
Dokaz. Neka je $k'(O, r + m)$. Sada pokažimo da kružnice k'_1 i k'_2 dodiruju kružnicu k' izvana. Označimo $r' = r + m$, $r'_1 = r_1 - m$ i $r'_2 = r_2 - m$. Kako se kružnice k i k_1 dodiruju izvana i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k'_1 je koncentrična s kružnicom k_1, slijedi:

$$|OO_1| = r + r_1 = (r + m) + (r_1 - m) = r' + r'_1.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k'_1 dodiruje kružnicu k' izvana. Na sličan način se pokaže da vrijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r + m) + (r_2 - m) = r' + r'_2,$$

odnosno da kružnica k'_2 dodiruje kružnicu k' izvana. Neka zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2 dodiruje te kružnice redom u točkama D_1 i D_2. Tada je dužina $\overline{D_1D_2}$ okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k'_1 i k'_2 redom u točkama D'_1 i D'_2. Uočimo da je $|D_1D'_1| = |O_1D_1| - |O_1D'_1| = r_1 - (r_1 - m) = m$ i $|D_2D'_2| = |O_2D_2| - |O_2D'_2| = r_2 - (r_2 - m) = m$. Zato je četverokut $D_1D'_1D'_2D_2$ pravokutnik pa je pravac $D'_1D'_2$ vanjska zajednička tangenta kružnica k'_1 i k'_2. Zbog $|D'_1D'_2| = |D_1D_2|$ slijedi da je vanjska tangentna udaljenost kružnica k'_1 i k'_2 jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. $\square$



Slika 3.13.

Lema 3.3. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2 = k(O_2, r_2)$ kružnice koje dodiruju kružnicu k iznutra. Neka je $m \leq \min\{r_1, r_2\}$. Neka su $k_1'(O_1, r_1 - m)$ i $k_2'(O_2, r_2 - m)$ kružnice. Tada je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

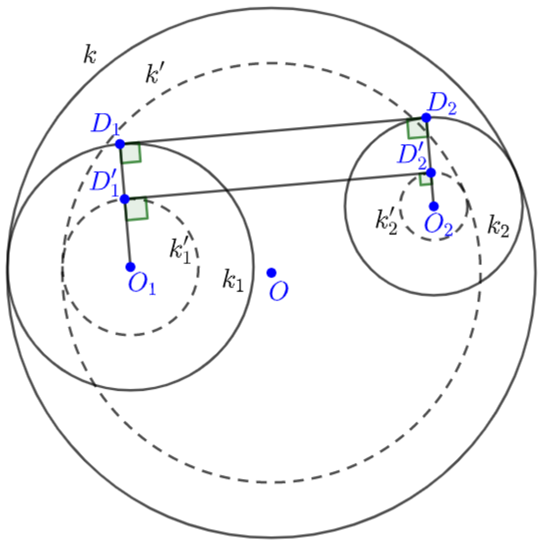
Dokaz. Neka je $k'(O, r - m)$. Prvo pokažimo da kružnice k_1' i k_2' dodiruju kružnicu k' iznutra. Označimo $r' = r - m$, $r_1' = r_1 - m$ i $r_2' = r_2 - m$. Kako se kružnice k i k_1 dodiruju iznutra i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k_1' je koncentrična s kružnicom k_1, slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r - m) - (r_1 - m) = r' - r_1'.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k_1' dodiruje kružnicu k' iznutra. Na sličan način se pokaže da vrijedi:

$$|OO_2| = r - r_2 = (r - m) - (r_2 - m) = r' - r_2',$$

odnosno da kružnica k_2' dodiruje kružnicu k' iznutra. Neka zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2 dodiruje te kružnice redom u točkama D_1 i D_2. Tada je dužina $\overline{D_1D_2}$ okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1| - |O_1D_1'| = r_1 - (r_1 - m) = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2| - |O_2D_2'| = r_2 - (r_2 - m) = m$. Zato je četverokut $D_1D_1'D_2'D_2$ pravokutnik pa je pravac $D_1'D_2'$ vanjska zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'. Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. $\square$



Slika 3.14.

Lema 3.4. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i neka kružnica $k_1(O_1, r_1)$ dodiruje kružnicu k iznutra i kružnica $k_2(O_2, r_2)$ dodiruje kružnicu k izvana. Neka je $m \leq r_1$. Neka su $k_1'(O_1, r_1 - m)$ i $k_2'(O_2, r_2 + m)$. Tada je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

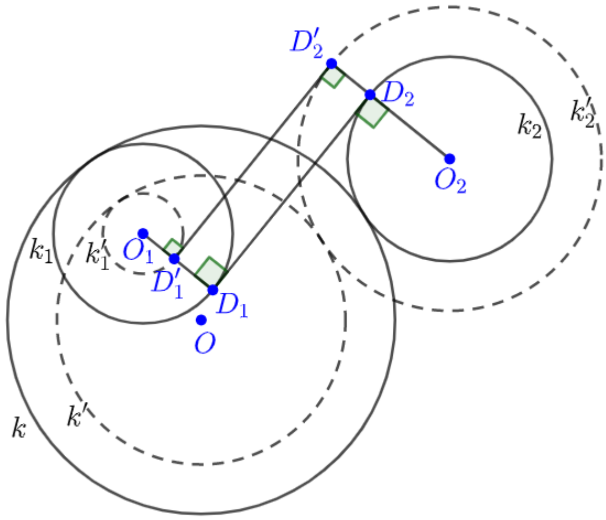
Dokaz. Neka je $k'(O, r - m)$. Sada pokažimo da kružnica k_1' dodiruje kružnicu k' iznutra i kružnica k_2' dodiruje kružnicu k' izvana. Označimo $r' = r - m$, $r_1' = r_1 - m$ i $r_2' = r_2 + m$. Kako se kružnice k i k_1 dodiruju iznutra i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k_1' koncentrična s kružnicom k_1, slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r - m) - (r_1 - m) = r' - r_1'.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k_1' dodiruje kružnicu k' izvana. Kako se kružnice k i k_2 dodiruju izvana i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k_2' koncentrična s kružnicom k_2, slijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r - m) + (r_2 + m) = r' + r_2'.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k_2' dodiruje kružnicu k' izvana. Neka zajednička unutarnja tangenta kružnica k_1 i k_2 dodiruje te kružnice redom u točkama D_1 i D_2. Tada je dužina $\overline{D_1D_2}$ okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1| - |O_1D_1'| = r_1 - (r_1 - m) = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2'| - |O_2D_2| = (r_2 + m) - r_2 = m$.



Slika 3.15.

Zato je četverokut $D_1'D_1D_2D_2'$ pravokutnik pa je pravac $D_1'D_2'$ unutarnja zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'. Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. □

Lema 3.5. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i neka kružnica $k_1(O_1, r_1)$ dodiruje kružnicu k iznutra i kružnica $k_2(O_2, r_2)$ dodiruje kružnicu k izvana. Neka je $m \leq r_2$. Neka su $k_1'(O_1, r_1 + m)$ i $k_2'(O_2, r_2 - m)$. Tada je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

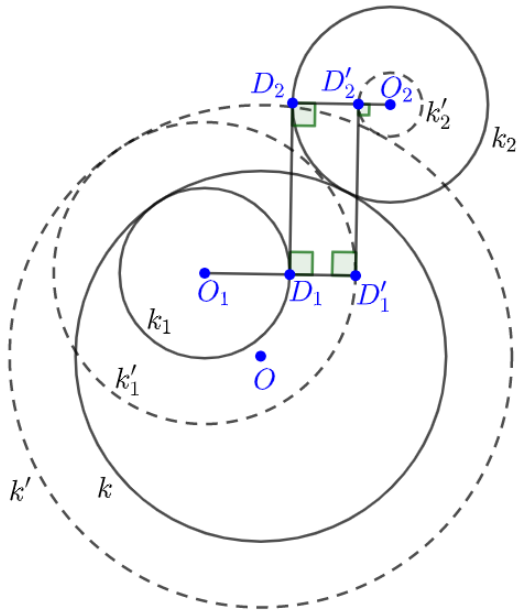
Dokaz. Neka je $k'(O, r + m)$. Sada pokažimo da kružnica k_1' dodiruje kružnicu k' iznutra i kružnica k_2' dodiruje kružnicu k' izvana. Označimo $r' = r + m$, $r_1' = r + m$ i $r_2' = r_2 - m$. Kako se kružnice k i k_1 dodiruju iznutra i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k_1' koncentrična s kružnicom k_1, slijedi:

$$|OO_1| = r - r_1 = (r + m) - (r_1 + m) = r' - r_1'.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k_1' dodiruje kružnicu k' izvana. Kako se kružnice k i k_2 dodiruju izvana i kružnica k' je koncentrična s kružnicom k te kružnica k_2' koncentrična s kružnicom k_2, slijedi:

$$|OO_2| = r + r_2 = (r + m) + (r_2 - m) = r' + r_2'.$$

Iz gornje jednakosti zaključujemo da kružnica k_2' dodiruje kružnicu k' izvana. Neka

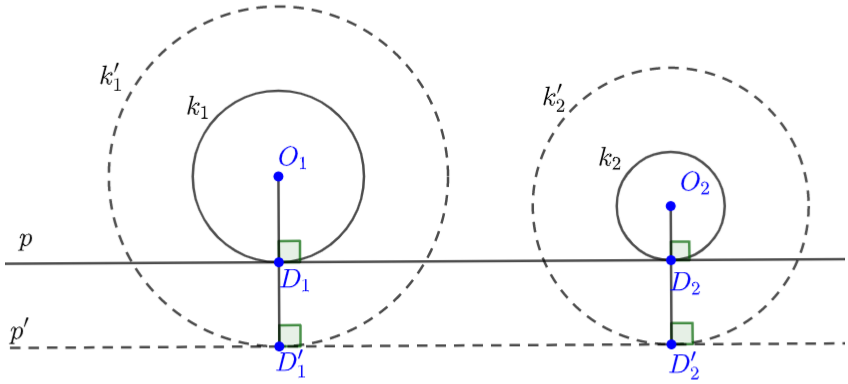


Slika 3.16.

zajednička unutarnja tangenta kružnica k_1 i k_2 dodiruje te kružnice redom u točkama D_1 i D_2. Tada je dužina $\overline{D_1D_2}$ okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1'| - |O_1D_1| = (r_1+m) - r_1 = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2| - |O_2D_2'| = r_2 - (r_2 - m) = m$. Zato je četverokut $D_1'D_1D_2D_2'$ pravokutnik pa je pravac $D_1'D_2'$ unutarnja zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'. Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. $\square$

Lema 3.6. *Neka je p pravac i neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ kružnice koje dodiruju pravac p s iste strane. Neka je $m > 0$ i neka su $k_1'(O, r_1 + m)$ i $k_2'(O_2, r_2 + m)$ kružnice. Tada je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

Dokaz. Pravac p dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, tada je pravac p zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2. Dužina $\overline{D_1D_2}$ je okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Kroz točke D_1' i D_2' povučemo pravac p'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1'| - |O_1D_1| = (r_1+m) - r_1 = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2'| - |O_2D_2| = (r_2+m) - r_2 = m$. Zato je četverokut $D_1'D_2'D_2D_1$ pravokutnik pa je pravac p' vanjska zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'.

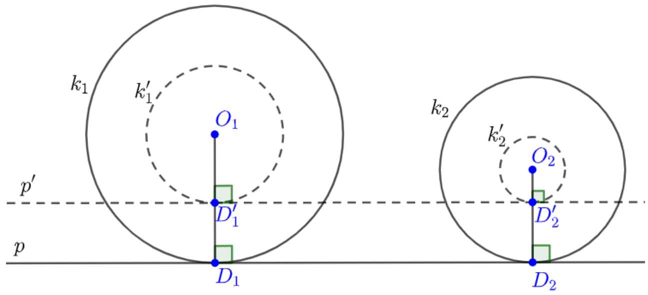


Slika 3.17.

Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. □

Lema 3.7. *Neka je p pravac i neka su $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ kružnice koje dodiruju pravac p s iste strane. Neka je $m \leq \min\{r_1, r_2\}$ i neka su $k_1'(O, r_1-m)$ i $k_2'(O_2, r_2-m)$ kružnice. Tada je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

Dokaz. Pravac p dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, tada je pravac p zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2. Dužina $\overline{D_1D_2}$ je okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Kroz točke D_1' i D_2' povučemo pravac p'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1| - |O_1D_1'| =$



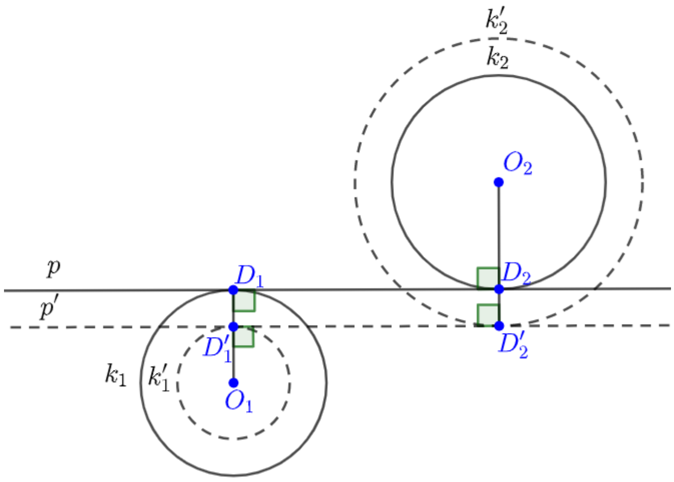
Slika 3.18.

$r_1-(r_1-m) = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2|-|O_2D_2'| = r_2-(r_2-m) = m$. Zato je četverokut $D_1D_2D_2'D_1'$ pravokutnik pa je pravac p' vanjska zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'.

Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka vanjskoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. □

Lema 3.8. *Neka su $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ kružnice koje dodiruju pravac p s različitih strana. Neka je $m \leq r_1$ i neka su $k_1'(O, r_1 - m)$ i $k_2'(O_2, r_2 + m)$ kružnice. Tada je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2.*

Dokaz. Pravac p dodiruje kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2, tada je pravac p zajednička vanjska tangenta kružnica k_1 i k_2. Dužina $\overline{D_1D_2}$ je okomita na $\overline{O_1D_1}$ i na $\overline{O_2D_2}$. Neka polupravci O_1D_1 odnosno O_2D_2 sijeku k_1' i k_2' redom u točkama D_1' i D_2'. Kroz točke D_1' i D_2' povučemo pravac p'. Uočimo da je $|D_1D_1'| = |O_1D_1| - |O_1D_1'| =$



Slika 3.19.

$r_1 - (r_1 - m) = m$ i $|D_2D_2'| = |O_2D_2'| - |O_2D_2| = (r_2 + m) - r_2 = m$. Zato je četverokut $D_1'D_2'D_2D_1$ pravokutnik pa je pravac p' unutarnja zajednička tangenta kružnica k_1' i k_2'. Zbog $|D_1'D_2'| = |D_1D_2|$ slijedi da je unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1' i k_2' jednaka unutarnjoj tangentnoj udaljenosti kružnica k_1 i k_2. □

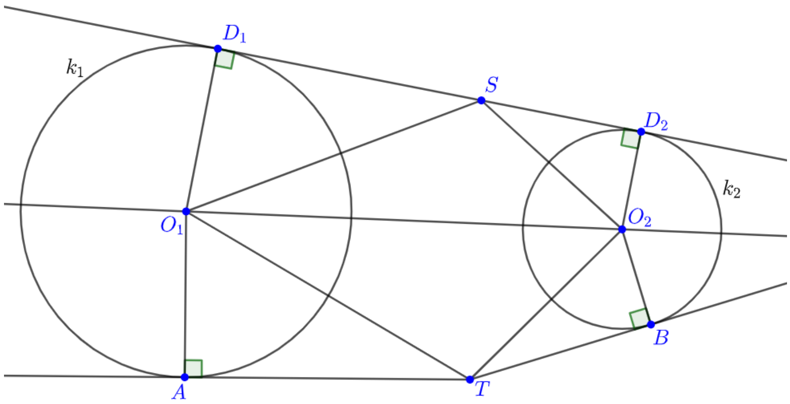
Lema 3.9. *Neka je T točka i neka su $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ kružnice. Neka je $t_{T1} + t_{T2} = t_{12}$ ili $t_{T1} + t_{12} = t_{T2}$, tangentna udaljenost t_{12} kružnica k_1 i k_2 može biti unutarnja ili vanjska. Tada točka T leži na zajedničkoj tangenti (unutarnjoj ili vanjskoj) kružnica k_1 i k_2.*

Dokaz. Ako pobliže promotrimo lemu vidimo da imamo dva slučaja:

A. vrijedi jednakost $t_{T1} + t_{T2} = t_{12}$,

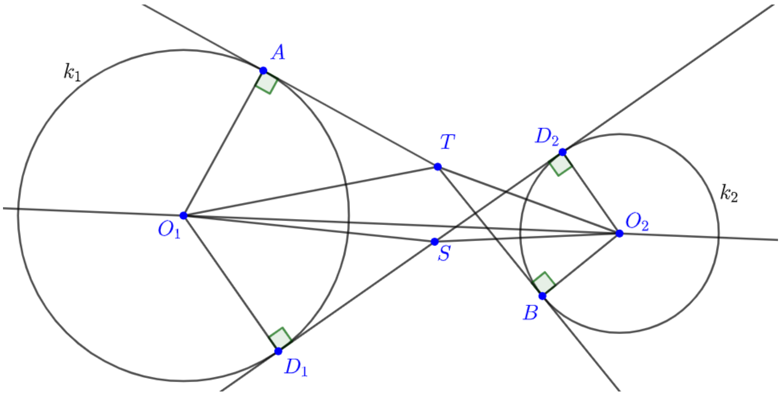
B. vrijedi jednakost $t_{T1} + t_{12} = t_{T2}$.

Slučaj A.- Neka je $t_{T1}+t_{T2} = t_{12}$, gdje je t_{12} vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 (vidi sliku 3.20.) ili t_{12} unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 (vidi sliku 3.21.), t_{T1} tangentna udaljenost točke T i kružnice k_1 i t_{T2} tangentna udaljenost točke T i kružnice k_2. Zajednička vanjska (unutarnja) tangenta dira kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2. Neka su točke A i B redom dirališta tangenta iz točke T na kružnice k_1 i k_2. Zbog uvjeta $t_{T1} + t_{T2} = t_{12}$, odnosno $|TA| + |TB| = |D_1D_2|$ na dužini $\overline{D_1D_2}$ postoji točka S takva da je $|D_1S| = |TA|$ i $|D_2S| = |TB|$. Kako je



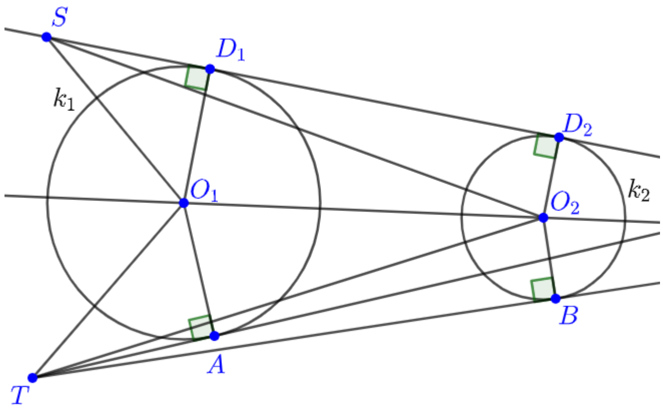
Slika 3.20.

$\angle SD_1O_1 = \angle TAO_1 = 90°$, $|D_1O_1| = |O_1A| = r_1$ i $|D_1S| = |TA|$ slijedi da su trokuti O_1AT i O_1D_1S sukladni po $S - K - S$ teoremu o sukladnosti trokuta. Isto tako trokuti O_2BT i O_2D_2S su sukladni po $S - K - S$ teoremu o sukladnosti trokuta jer je $\angle SD_2O_2 = \angle TBO_2 = 90°$, $|D_2O_2| = |O_2B| = r_2$ i $|D_2S| = |TB|$. Iz sukladnosti trokuta O_1AT i O_1D_1S slijedi $|O_1T| = |O_1S|$ i iz sukladnosti trokuta O_2BT i O_2D_2S slijedi $|O_2T| = |O_2S|$. Kako je $\overline{O_1O_2}$ zajednička stranica trokuta O_1O_2S i O_1O_2T, te je $|O_1T| = |O_1S|$ i $|O_2T| = |O_2S|$ slijedi da su ti trokuti sukladni po $S - S - S$ teoremu o sukladnosti trokuta. Ovo znači da su točke T i S osnosimetrične u odnosu na pravac O_1O_2 ili se podudaraju. Kako je S na zajedničkoj vanjskoj (unutarnjoj) tangenti kružnica k_1 i k_2, isto vrijedi i za točku T. To znači da je točka T na jednoj od dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente kružnica k_1 i k_2.



Slika 3.21.

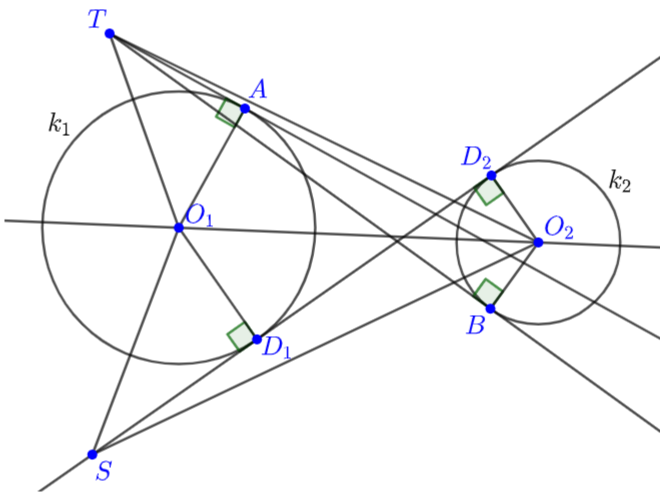
Slučaj B.- Neka je $t_{T1}+t_{12}=t_{T2}$, gdje je t_{12} vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 (vidi sliku 3.22.) ili t_{12} unutarnja tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2 (vidi sliku 3.23.), t_{T1} tangentna udaljenost točke T i kružnice k_1 i t_{T2} tangentna udaljenost točke T i kružnice k_2. Zajednička vanjska (unutarnja) tangenta dira kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2. Neka su točke A i B redom dirališta tangenta iz točke T na kružnice k_1 i k_2. Zbog uvjeta $t_{T1}+t_{12}=t_{T2}$, odnosno $|D_1D_2|=|TB|-|TA|$ na pravcu D_1D_2 postoji točka S takva da je $|D_1S|=|TA|$ i $|D_2S|=|TB|$. Kako je



Slika 3.22.

$\angle SD_1O_1=\angle TAO_1=90°$, $|D_1O_1|=|O_1A|=r_1$ i $|D_1S|=|TA|$ slijedi da su trokuti O_1AT i O_1D_1S sukladni po $S-K-S$ teoremu o sukladnosti trokuta. Isto tako trokuti O_2BT i O_2D_2S su sukladni po $S-K-S$ teoremu o sukladnosti trokuta jer je $\angle SD_2O_2=\angle TBO_2=90°$, $|D_2O_2|=|O_2B|=r_2$ i $|D_2S|=|TB|$. Iz sukladnosti trokuta O_1AT i O_1D_1S slijedi $|O_1T|=|O_1S|$ i iz sukladnosti trokuta O_2BT i O_2D_2S

slijedi $|O_2T| = |O_2S|$. Kako je $\overline{O_1O_2}$ zajednička stranica trokuta O_1O_2S i O_1O_2T, te je $|O_1T| = |O_1S|$ i $|O_2T| = |O_2S|$ slijedi da su ti trokuti sukladni po $S-S-S$ teoremu o sukladnosti trokuta. Ovo znači da su točke T i S osnosimetrične u odnosu



Slika 3.23.

na pravac O_1O_2 ili se podudaraju. Kako je S na zajedničkoj vanjskoj (unutarnjoj) tangenti kružnica k_1 i k_2, isto vrijedi i za točku T. To znači da je točka T na jednoj od dvije zajedničke vanjske (unutarnje) tangente kružnica k_1 i k_2.

□

Sada možemo dokazati obrat Caseyevog teorema. Ako kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ i $k_4(O_4, r_4)$ zadovoljavaju jednakost

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}, \tag{3.35}$$

tada želimo dokazati da one dodiruju izvana ili iznutra istu kružnicu k.

Dokaz ćemo provesti u slučaju da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Ako nisu, dokaz je moguće prilagoditi vodeći računa o tome koje su tangentne udaljenosti unutarnje, a koje vanjske. Na temelju koja je tangenta udaljenost (unutarnja ili vanjska) odredi se pomoću lema 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5 koje kružnice se istovremeno smanjuju ili povećavaju.

Dokaz sadrži nekoliko koraka. Počinjemo smanjivanjem polumjera najmanje kružnice. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to kružnica k_4 i smanjimo njen polumjer na nulu, dok istodobno povećavamo ili smanjujemo svaki polumjer ostalih kružnica. Prema lemama 3.2 i 3.3 tangentne udaljenosti neće se promijeniti (tj.

$t'_{12} = t_{12}, \ldots$), pa vrijedi formula:

$$t'_{12} \cdot t'_{34} + t'_{23} \cdot t'_{14} = t'_{13} \cdot t'_{24}. \tag{3.36}$$

Kružnica k_4 smanjenjem polumjera na nulu postaje točka O_4, a kružnice k_1, k_2, k_3 postaju $k'_1(O_1, r'_1)$, $k'_2(O_2, r'_2)$, $k'_3(O_3, r'_3)$. Točka O_4 uvijek se nalazi izvan ostalih kružnica.

Sada primijenimo inverziju s točkom O_4 kao centrom inverzije i polumjerom inverzije R. Kružnice k'_1, k'_2, k'_3 se tom inverzijom preslikaju u kružnice $k''_1(O''_1, r''_1)$, $k''_2(O''_1, r''_1)$, $k''_3(O''_1, r''_1)$. U skladu s teoremom 2.8 imamo:

$$t'_{12} = t''_{12}\sqrt{\frac{r'_1 r'_2}{r''_1 r''_2}},$$

$$t'_{23} = t''_{12}\sqrt{\frac{r'_2 r'_3}{r''_2 r''_3}},$$

$$t'_{13} = t''_{13}\sqrt{\frac{r'_1 r'_3}{r''_1 r''_3}}.$$

Isto tako iz teorema 2.7 slijedi:

$$\frac{r''_1}{r'_1} = \frac{R^2}{t^2_{14}} \Rightarrow t'_{14} = R\sqrt{\frac{r'_1}{r''_1}},$$

$$\frac{r''_2}{r'_2} = \frac{R^2}{t^2_{24}} \Rightarrow t'_{24} = R\sqrt{\frac{r'_2}{r''_2}},$$

$$\frac{r''_3}{r'_3} = \frac{R^2}{t^2_{34}} \Rightarrow t'_{34} = R\sqrt{\frac{r'_3}{r''_3}}.$$

Uvrštavanjem gornjih jednakosti u (3.36):

$$t''_{12}\sqrt{\frac{r'_1 r'_2}{r''_1 r''_2}} \cdot R\sqrt{\frac{r'_3}{r''_3}} + t''_{12}\sqrt{\frac{r'_2 r'_3}{r''_2 r''_3}} \cdot R\sqrt{\frac{r'_1}{r''_1}} = t''_{13}\sqrt{\frac{r'_1 r'_3}{r''_1 r''_3}} \cdot R\sqrt{\frac{r'_2}{r''_2}},$$

odnosno:

$$t''_{12} \cdot R\sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}} + t''_{23} \cdot R\sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}} = t''_{31} \cdot R\sqrt{\frac{r'_1 r'_2 r'_3}{r''_1 r''_2 r''_3}}.$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{r_1''r_2''r_3''}{r_1'r_2'r_3'}}$$

te dobivamo:

$$t_{12}'' + t_{23}'' = t_{31}''. \tag{3.37}$$

Sve tri tangente udaljenosti su vanjske tangente udaljenosti jer smo na početku rekli da ćemo promatrati kada su sve tangentne udaljenosti vanjske.
Sada smanjimo najmanju od kružnica k_1'', k_2'', k_3'' do točke, a ostalima smanjimo polumjer. Prema lemi 3.7 tangentne udaljenosti neće se promijeniti (tj. $t_{12}''' = t_{12}''$, ...).
Promotrimo kako će jednakost (3.37) glasiti ako je:

A. kružnica k_1'' najmanja,

B. kružnica k_2'' najmanja,

C. kružnica k_3'' najmanja.

Slučaj A.-Ako kružnicu k_1'' smanjimo do točke O_1'' kružnice k_2'', k_3'' postaju redom kružnice $k_2'''(O_2'', r_2''')$, $k_3'''(O_3'', r_3''')$. Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{O_1''2}''' + t_{23}''' = t_{O_1''3}'''. \tag{3.38}$$

Tangentna udaljenost t_{23}''' kružnica k_2''' i k_3''' je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka O_1'' nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti t''' kružnica k_2''' i k_3''', odnosno kružnice k_1'', k_2'' i k_3'' dodiruju isti pravac.

Slučaj B.-Ako kružnicu k_2'' smanjimo do točke O_2'' kružnice k_1'', k_3'' postaju redom kružnice $k_1'''(O_1'', r_1''')$, $k_3'''(O_3'', r_3''')$. Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{1O_2''}''' + t_{O_2''3}''' = t_{31}'''. \tag{3.39}$$

Tangentna udaljenost t_{31}''' kružnica k_1''' i k_3''' je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka O_2'' nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti t''' kružnica k_1''' i k_3''', odnosno kružnice k_1'', k_2'' i k_3'' dodiruju isti pravac.

Slučaj C.-Ako kružnicu k_3'' smanjimo do točke O_3'' kružnice k_1'', k_2'' postaju redom kružnice $k_1'''(O_1'', r_1''')$, $k_2'''(O_2'', r_2''')$. Tada jednakost (3.37) glasi:

$$t_{12}''' + t_{2O_3''}''' = t_{1O_3''}'''. \tag{3.40}$$

Tangentna udaljenost t_{12}''' kružnica k_1''' i k_2''' je vanjska tangentna udaljenost zbog početne pretpostavke da su sve tangentne udaljenosti koje se javljaju u (3.35) vanjske tangentne udaljenosti. Prema lemi 3.9 slijedi da se točka O_2'' nalazi na vanjskoj zajedničkoj tangenti t''' kružnica k_1''' i k_3''', odnosno kružnice k_1'', k_2'' i k_3'' dodiruju isti pravac.

Ovime smo pokazali da kružnice k_1'', k_2'', k_3'' dodiruju isti pravac.

Primijenimo inverziju s točkom O_4 kao centrom inverzije i polumjerom inverzije R, kružnice k_1'', k_2'' i k_3'' se preslikaju redom u kružnice k_1', k_2' i k_3', a pravac t''' u kružnicu k' koja prolazi točkom O_4 i sve kružnice k_1', k_2' i k_3' dodiruje istodobno izvana ili iznutra.
Sada istodobno povećavamo ili smanjujemo polumjere kružnica k', k_1', k_2', k_3' i točke O_4 one će redom postati kružnice k, k_1, k_2, k_3 i k_4, a prema lemama 3.2 i 3.3 tangentne udaljenosti neće se promijeniti.

Drugim riječima ako vrijedi jednakost (3.35) tada kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k. □

Vidjeli smo da vrijede oba smjera Caseyevog teorema s početka poglavlja. Konačno nakon shvaćanja koje tangentne udaljenosti kada koristimo i kako glasi Caseyev teorem u kojem slučaju (vidi sliku 3.7. i teorem 3.2) možemo razumijeti Caseyev teorem u potpunosti bez ikakvih nejasnoća.

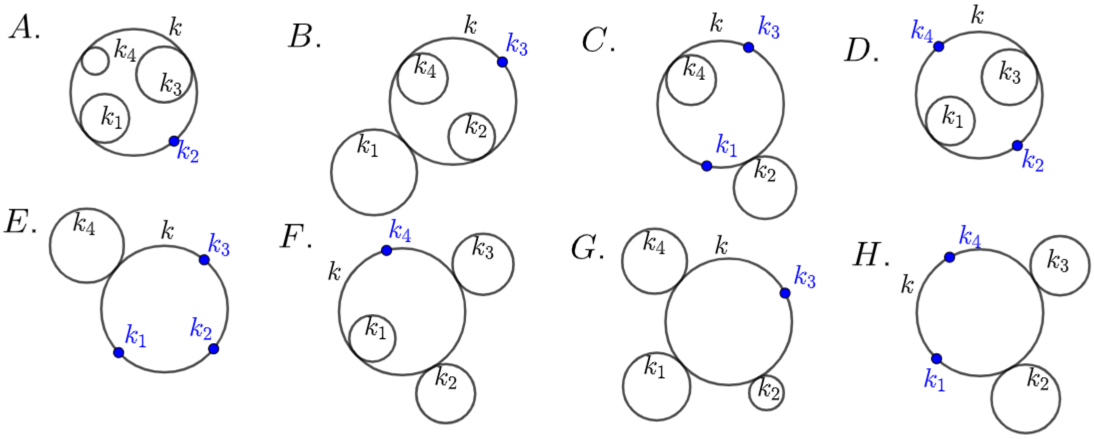
3.3 Specijalni slučajevi Caseyevog teorema

Kako je točka degenerirani slučaj kružnice, odnosno točka je kružnica polumjera nula, možemo se pitati vrijedi li Caseyev teorem za slučajeve kada neka od kružnica k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ ima polumjer nula. Na slici 3.24. su prikazani neki od specijalnih slučajeva Caseyevog teorema. Kao pomoć pri dokazivanju specijalnih slučajeva Caseyevog teorema koristit ćemo sljedeći korolar.

Korolar 3.1. *Neka kružnica $k_1(O_1, r_1)$ dodiruje kružnicu $k(O, R)$ i točka $P \in k$. Tangentna udaljenost kružnice k_1 i točke P dana je izrazom:*

A.

$$t_{1P} = \frac{|P_1P|}{R}\sqrt{R(R - r_1)}, \tag{3.41}$$



Slika 3.24.: Specijalni slučajevi Caseyevog teorema

ako kružnica k_1 dodiruje kružnicu k iznutra,

B.

$$B. \quad t_{1P} = \frac{|P_1P|}{R}\sqrt{R(R+r_1)}, \tag{3.42}$$

ako kružnica k_1 dodiruje kružnicu k izvana.

Dokaz. Dokaz korolara 3.1 slijedi direktno ako za slučajeve A. i B. iz teorema 3.1 uvrstimo $r_2 = 0$. □

Na slici 3.25. prikazan je specijalan slučaj Caseyevog teorema u kojem je kružnica k_4 polumjera nula, odnosno ona je postala točka koju smo označili s P_4.

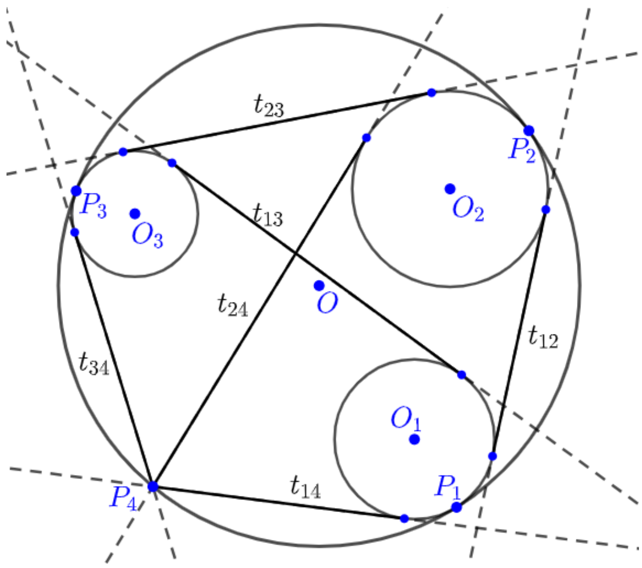
Dokaz. Neka su P_1, P_2, P_3 redom dirališta kružnica k_1, k_2, k_3 s kružnicom k. Na tetivni četverokut $P_1P_2P_3P_4$ primijenimo Ptolomejev teorema 1.1:

$$|P_1P_2| \cdot |P_3P_4| + |P_2P_3| \cdot |P_1P_4| = |P_1P_3| \cdot |P_2P_4|. \tag{3.43}$$

Kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$ dodiruju kružnicu k iznutra, primijenimo jednakost (3.15) iz teorema 3.1:

$$|P_1P_2| = \frac{t_{12} \cdot R}{\sqrt{(R-r_1)\,(R-r_2)}},$$

$$|P_2P_3| = \frac{t_{23} \cdot R}{\sqrt{(R-r_2)\,(R-r_3)}},$$



Slika 3.25.: Caseyev teorem

$$|P_1P_3| = \frac{t_{13} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)\,(R - r_3)}}.$$

Kako je točka P_4 kružnica polumjera nula primijenimo jednakost (3.41) iz korolara 3.1 slijedi:

$$|P_1P_4| = \frac{t_{14} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)\,R}},$$

$$|P_2P_4| = \frac{t_{24} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)\,R}},$$

$$|P_3P_4| = \frac{t_{34} \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)\,R}}.$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.43) slijedi:

$$\frac{t_{12} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)\,(R - r_2)}} \cdot \frac{t_{34} \cdot R}{\sqrt{(R - r_3)\,R}} + \frac{t_{23} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)\,(R - r_3)}} \cdot \frac{t_{14} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)\,R}}$$
$$= \frac{t_{13} \cdot R}{\sqrt{(R - r_1)\,(R - r_3)}} \cdot \frac{t_{24} \cdot R}{\sqrt{(R - r_2)\,R}}$$

Gornji izraz pomnožimo faktorom

$$\frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{(R - r_1) \cdot (R - r_2) \cdot (R - r_3) \cdot R}$$

te dobivamo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24},$$

odnosno:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} - t_{13} \cdot t_{24} = 0.$$

To je zapravo jednakost iz Caseyevog teorema. Na sličan način se dokazuju ostali specijalni slučajevi Caseyevog teorema. $\square$

Poglavlje 4

Primjena Caseyevog teorema

4.1 Feuerbachov teorem

Feuerbachova kružnica ili kružnica devet točaka, ponekad se još naziva Eulerova kružnica, prolazi kroz tri nožišta visina u trokutu, tri polovišta stranica i polovišta triju dužina koje spajaju vrh s ortocentrom.

Teorem 4.1. *(**Feuerbauchov teorem**) Kružnica devet točaka dira upisanu i sve tri pripisane kružnice danog trokuta. Pri tome upisana kružnica dira kružnicu devet točaka iznutra, dok je pripisane kružnice diraju izvana.*

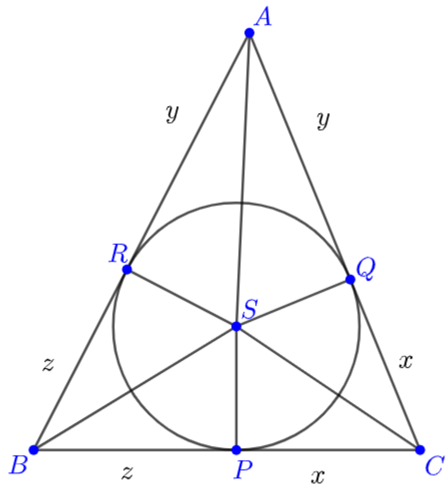
Kako bismo dokazali Feuerbachov teorem potrebni su nam sljedeći teoremi.

Teorem 4.2. *Neka je ABC trokut i k upisana kružnica tog trokuta. Kružnica k dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama P, Q i R i neka je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Tada vrijedi:*

$$|CP| = |CQ| = s - c,$$
$$|BP| = |BR| = s - b,$$
$$|AR| = |AQ| = s - a.$$

Dokaz. Neka je S središte upisane kružnice trokuta ABC. Iz sukladnosti trokuta SPC i SQC slijedi da je $|CP| = |CQ|$, iz sukladnosti trokuta ASR i ASQ slijedi da je $|AR| = |AQ|$ i iz sukladnosti trokuta BRS i BPS slijedi da je $|BP| = |BR|$. Označimo:

$$x = |CP| = |CQ|,$$
$$y = |AR| = |AQ|,$$



Slika 4.1.

$$z = |BP| = |BR|.$$

Sada je $s = x + y + z$ i $a = x + z$, $b = x + y$, $c = y + z$. Dakle,

$$|CP| = |CQ| = x = (x + y + z) - (y + z) = s - c,$$

$$|BP| = |BR| = y = (x + y + z) - (x + z) = s - b,$$

$$|AR| = |AQ| = z = (x + y + z) - (x + y) = s - a.$$

□

Teorem 4.3. *Neka je ABC trokut i k pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrha A. Kružnica k dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki P_a i pravce na kojima leže stranice $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama Q_a i R_a. Tada vrijedi:*

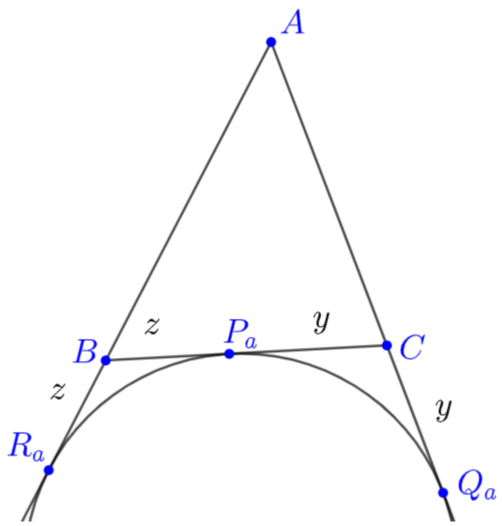
$$|BP_a| = s - c,$$

$$|CP_a| = s - b.$$

Dokaz. Označimo:

$$x = |AR_a| = |AQ_a|,$$
$$y = |CQ_a| = |CP_a|,$$
$$z = |BP_a| = |BR_a|.$$

Sada je:



Slika 4.2.

$$b = |AC| = |AQ_a| - |Q_aC| = x - y,$$
$$c = |AB| = |AR_a| - |R_aB| = x - z,$$
$$a = |BC| = |BP_a| + |P_aC| = y + z.$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobijemo $2x = a + b + c$ tj. $x = s$.
Sada imamo $y = x - b = s - b$, tada je

$$|CQ_a| = |CP_a| = s - b$$

i $z = x - c = s - c$ pa je

$$|BP_a| = |BR_a| = s - c.$$

$\square$

Na analogni način se pokaže da vrijedi:

$$|BP_c| = |BR_c| = s - a,$$

$$|AR_c| = |AQ_c| = s - b,$$
$$|CP_b| = |CQ_b| = s - a,$$
$$|AR_b| = |AQ_b| = s - c.$$

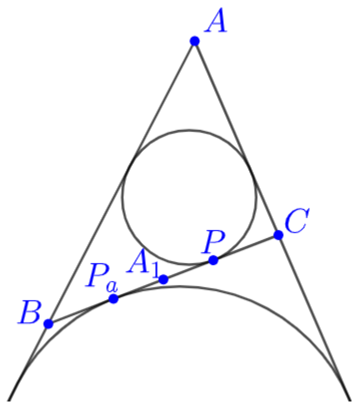
Teorem 4.4. *Neka je ABC trokut i A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, točka P je diralište stranice $\overline{BC}$ i trokutu upisane kružnice i točka P_a je diralište stranice $\overline{BC}$ i trokutu pripisane kružnice. Tada vrijedi:*

$$|A_1P| = |A_1P_a|.$$

Dokaz. Imamo:

$$|BP| = s - b \text{ prema teoremu 4.2,}$$

$$|CP_a| = s - b \text{ prema teoremu 4.3.}$$



Slika 4.3.

Neka je $|AB| > |AC|$ to jest $c > b$. A_1 je polovište stranice $\overline{BC}$ i vrijedi $|BA_1| = |A_1C| = \dfrac{a}{2}$. Slijedi:

$$|A_1P| = |BP| - |BA_1| = (s-b) - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2},$$

$$|A_1P_a| = |CP_a| - |A_1C| = (s-b) - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Ovime je teorem dokazan.

□

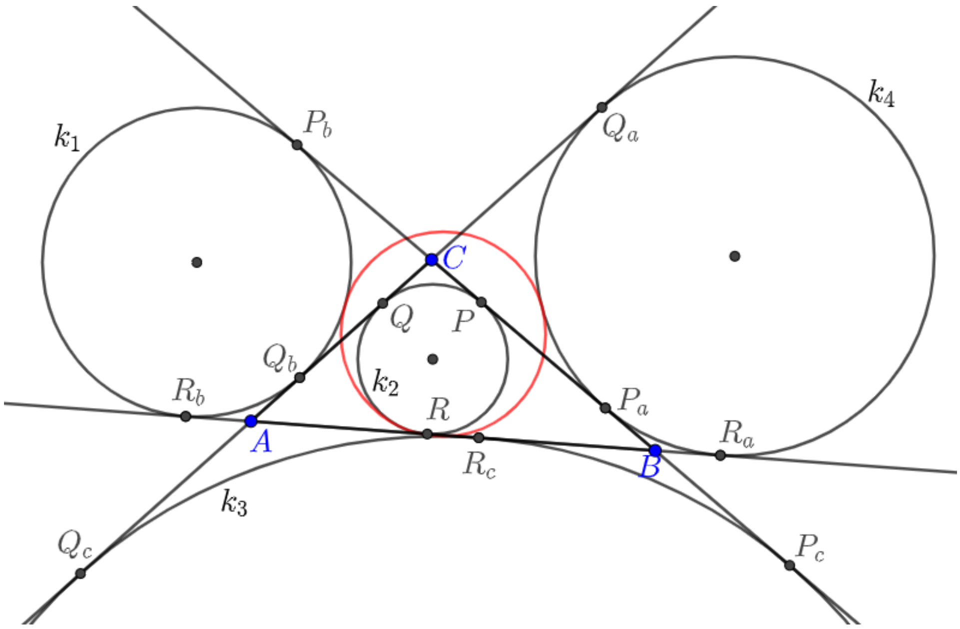
Na analogni način se pokaže da vrijedi $|B_1Q| = |B_1Q_b|$ i $|C_1R| = |C_1R_c|$.

Napomena 4.1. *Iz teorema 4.4 uz pretpostavku $c > b$ slijedi:*

$$|PP_a| = c - b.$$

Pokažimo da je udaljenost $|P_bP_c| = b + c$. Sa slike 4.4. vidimo da je $|P_bP_c| = |P_bC| + |BC| + |BP_c|$. Iz teorema 4.3 slijedi $|P_bC| = s - a$ i $|BP_c| = s - a$. Konačno je $|P_bP_c| = (s - a) + a + (s - a) = b + c$.
Na sličan način se pokaže da je $|Q_aQ_c| = a + c$ i $|R_aR_b| = a + b$.
Primjenjujući prethodno izrečeno dokazat ćemo Feuerbauchov teorem.

Dokaz. Za dokaz ćemo iskoristiti obrat Caseyevog teorema 3.3. Ako pripisane kružnice i upisana kružnica trokuta zadovoljavaju jednakost (3.33) tada one diraju kružnicu devet točaka. Pretpostavimo da je kao na slici 4.4. stranica $\overline{AB}$ najdulja, a stranica AC najkraća stranica trokuta ABC to jest $b < a < c$.
Neka je k_2 upisana kružnica trokuta ABC, a kružnice k_1, k_3 i k_4 su pripisane kružnice trokuta ABC. Očekujemo da upisana kružnica dira kružnicu devet točaka iznutra, a pripisane kružnice diraju izvana. Zato odredimo vanjske tangentne udaljenosti između pripisanih kružnica i unutarnju tangentnu udaljenost između upisane kružnice i pripisanih kružnica. Sada koristeći teoreme 4.2, 4.3 i 4.4 i sliku 4.4. odredimo tan-



Slika 4.4.

gentnu udaljenost kružnica k_1,k_2, k_3 i k_4.

$$t_{12}^u = |QQ_b| = c - a$$

$$t_{34}^v = |Q_aQ_c| = a + c$$

$$
\begin{aligned}
t_{23}^{u} &= |RR_c| = a - b \\
t_{14}^{v} &= |R_aR_b| = a + b \\
t_{13}^{v} &= |P_bP_c| = b + c \\
t_{24}^{u} &= |PP_a| = c - b
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u jednakost (3.33) imamo:

$$
\begin{aligned}
t_{12}^{u} \cdot t_{34}^{v} + t_{23}^{u} \cdot t_{14}^{v} &= (a-c) \cdot (a+c) + (b-a) \cdot (a+b) \\
&= a^2 - c^2 + b^2 - a^2 \\
&= b^2 - c^2 \\
&= (b+c) \cdot (b-c) \\
&= t_{13}^{v} \cdot t_{24}^{u}.
\end{aligned}
$$

Vidimo da jednakost (3.33) vrijedi. Po Caseyevom teoremu zaključujemo da pripisane kružnice trokuta i upisana kružnica dodiruju kružnicu devet točaka. □

4.2 Sangaku problem

Primjer 1. ***(Sangaku problem)*** *Neka kružnica $k(O,r)$ leži unutar kvadrata i neka su $k_i(O_i, r_i)$ $i = 1,2,3,4$ kružnice koje dodiruju kružnicu k izvana i dodiruju po dvije stranice kvadrata. Odredite duljinu stranice kvadrata u ovisnosti o r_1, r_2, r_3, r_3.*

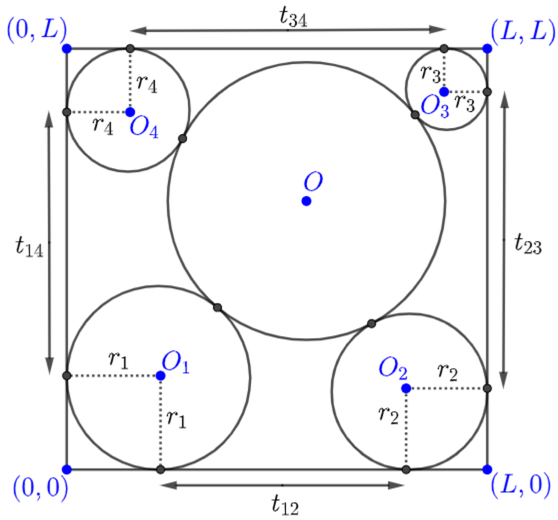
Rješenje. Označimo s L duljinu stranice kvadrata. Postavimo kvadrat u koordinatni sustav tako da donji lijevi vrh ima koordinate $(0,0)$, a gornji desni vrh ima koordinate (L,L).
Koordinate središta kružnica su: $O\,(x,y)$, $O_1\,(r_1,r_1)$, $O_2\,(L-r_2,r_2)$, $O_3\,(L-r_3,L-r_3)$ i $O_4\,(r_4,L-r_4)$. Tangentne udaljenosti t_{12}, t_{23}, t_{34} i t_{14} možemo odrediti sa slike 4.5.:

$$t_{12} = L - r_1 - r_2,$$

$$
\begin{aligned}
t_{23} &= L - r_2 - r_3, \\
t_{34} &= L - r_3 - r_4, \\
t_{14} &= L - r_1 - r_4.
\end{aligned}
$$

Preostaje nam još odrediti tangentne udaljenosti t_{13} i t_{24}. Prvo odredimo udaljenosti $|O_1O_3|$ i $|O_2O_4|$. Udaljenost središta O_1 i O_3 je:

$$|O_1O_3|^2 = (L - r_1 - r_3)^2 + (L - r_1 - r_3)^2 = 2\,(L - r_1 - r_3)^2\,,$$



Slika 4.5.: Sangaku problem

a udaljenost središta O_2 i O_4 je:

$$|O_2O_4|^2 = (L - r_2 - r_4)^2 + (L - r_2 - r_4)^2 = 2\,(L - r_2 - r_4)^2\,.$$

Primijenimo jednakost (3.2) da dobijemo tangentne udaljenosti t_{13} i t_{24}:

$$t_{13} = \sqrt{2\,(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2},$$

$$t_{24} = \sqrt{2\,(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Sada imamo:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = (L - r_1 - r_2) \cdot (L - r_3 - r_4) + (L - r_2 - r_3) \cdot (L - r_1 - r_4)\,,$$

$$t_{13} \cdot t_{24} = \sqrt{2\,(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \cdot \sqrt{2\,(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.$$

Sada primijenimo Caseyev teorem na kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 i njihove tangentne udaljenosti t_{12}, t_{23}, t_{34}, t_{14}, t_{13} i t_{24}:

$$\begin{aligned}&(L - r_1 - r_2) \cdot (L - r_3 - r_4) + (L - r_2 - r_3) \cdot (L - r_1 - r_4)\\ &= \sqrt{2\,(L - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \cdot \sqrt{2\,(L - r_2 - r_4)^2 - (r_2 - r_4)^2}.\end{aligned}$$

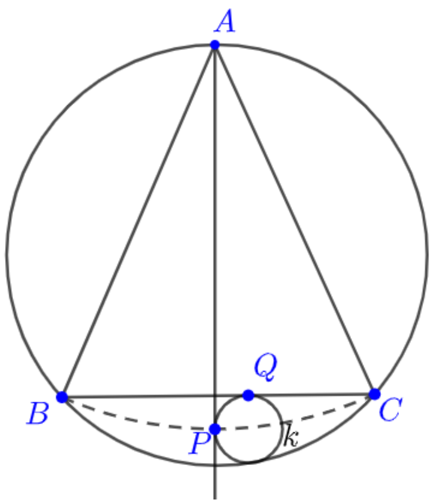
Nakon rješavanja gornje jednakosti po L dobije se:

$$L = \frac{2\,(r_1r_3 - r_2r_4) + \sqrt{2\,(r_1 - r_2)\,(r_1 - r_4)\,(r_3 - r_2)\,(r_3 - r_4)}}{r_1 - r_2 + r_3 - r_4}.$$

4.3 Zadaci

Primjer 2. *Neka je ABC jednakokračan trokut s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kružnica k dodiruje stranicu $\overline{BC}$ i luk BC trokutu ABC opisane kružnice. Tangenta iz točke A dodiruje kružnicu k u točki P. Opišite geometrijsko mjesto točaka P.*

Rješenje. Označimo $|AB| = |AC| = l$. Točke A, B, C shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula. Kružnice A, B, C, k dodiruju iznutra opisanu kružnicu trokuta ABC. Neka kružnica k dodiruje $\overline{BC}$ u točki Q. Primijenimo sada Caseyev teorem



Slika 4.6.: Primjer 2.

na kružnice A, B, k i C:

$$t_{AB} \cdot t_{kC} + t_{Bk} \cdot t_{AC} = t_{Ak} \cdot t_{BC},$$

$$l \cdot |CQ| + l \cdot |BQ| = |AP| \cdot |BC|.$$

Stoga imamo:

$$|AP| = \frac{l \cdot (|BQ| + |CQ|)}{|BC|},$$

a kako je $|BQ| + |CQ| = |BC| = l$ slijedi:

$$|AP| = \frac{l \cdot |BC|}{|BC|} = l.$$

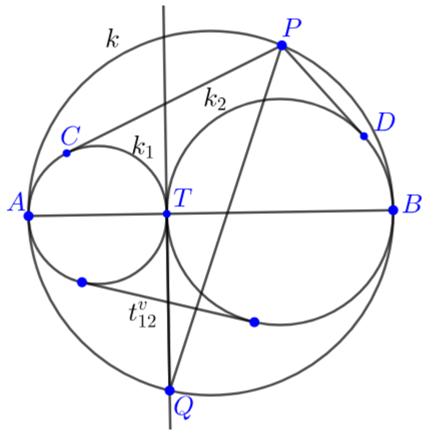
Duljina $|AP|$ je konstantna, dakle geometrijsko mjesto svih točaka P je dio kružnice sa središtem u točki A i polumjera $|AB| = |AC| = l$ između točaka B i C.

Primjer 3. *Neka je k kružnica promjera $\overline{AB}$. P i Q su točke na kružnici k i nalaze se s različitih strana $\overline{AB}$. Točka T je ortogonalna projekcija točke Q na $\overline{AB}$. Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{TA}$ i $\overline{TB}$. Neka su točke C i D redom dirališta tangenti na kružnice k_1 i k_2 iz točke P. Pokažite da vrijedi:*

$$|PC| + |PD| = |PQ|.$$

Rješenje. Neka je t_{12}^v vanjska tangentna udaljenost kružnica k_1 i k_2. Odmah vidimo da je $|PC| = t_{P1}$ tangentna udaljenost kružnice k_1 i točke P i $|PD| = t_{P2}$ tangentna udaljenost kružnice k_2 i točke P. Točke P i Q shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula.

Kružnice P, Q, k_1, k_2 dodiruju kružnicu k iznutra. Primijenimo Caseyev teorem na



Slika 4.7.: Primjer 3.

kružnice k_1, P, k_2 i Q:

$$t_{P1} \cdot t_{Q2} + t_{P2} \cdot t_{Q1} = t_{12}^v \cdot |PQ|,$$

$$|PC| \cdot |QT| + |PD| \cdot |QT| = t_{12}^v \cdot |PQ|,$$

$$|QT| \cdot (|PC| + |PD|) = t_{12}^v \cdot |PQ|,$$

$$|PC| + |PD| = |PQ| \cdot \frac{t_{12}^v}{|QT|}.$$

Sada prepoznajemo da udaljenost dirališta kružnica k_1 i k_2 s kružnicom k iznosi $|AB|$,

$R = \frac{|AB|}{2}$, $r_1 = \frac{|TA|}{2}$ i $r_2 = \frac{|TB|}{2}$, pa jednakost (3.15) iz teorema 3.1 postaje:

$$
\begin{aligned}
t_{12}^v &= \frac{|AB|}{\frac{|AB|}{2}}\sqrt{\left(\frac{|AB|}{2} - \frac{|TA|}{2}\right)\left(\frac{|AB|}{2} - \frac{|TB|}{2}\right)} \\
&= 2\sqrt{\frac{|AB| - |TA|}{2} \cdot \frac{|AB| - |TB|}{2}} \\
&= \sqrt{|TB| \cdot |TA|}.
\end{aligned}
$$

Primijenimo Euklidov teorem na trokut ABQ, tada imamo:

$$\sqrt{|TB| \cdot |TA|} = |QT|,$$

odnosno $t_{12}^v = |QT|$.
Konačno $|PC| + |PD| = |PQ|$.

Primjer 4. *U trokutu ABC kružnice k_A, k_B i k_C redom dodiruju stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u njihovim polovištima, te dodiruju lukove $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC. Ako t_{BC}, t_{CA} i t_{AB} redom predstavljaju tangentne udaljenosti parova kružnica (k_B, k_C), (k_C, k_A) i (k_A, k_B), pokažite da vrijedi:*

$$t_{BC} = t_{CA} = t_{AB} = \frac{1}{4}(a + b + c),$$

pri čemu je $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$.

Rješenje. Neka su redom t_A, t_B, t_C tangentne udaljenosti točaka A, B, C i kružnica k_A, k_B, k_C. Točke A, B, C shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula.
Neka su D, E, F redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Kružnice A, B, C, k_B dodiruju opisanu kružnicu trokuta ABC iznutra. Primijenimo Caseyev teorem na kružnice A, B, C i k_B:

$$t(A, B) \cdot t(C, k_B) + t(A, k_B) \cdot t(B, C) = t(A, C) \cdot t(B, k_B),$$

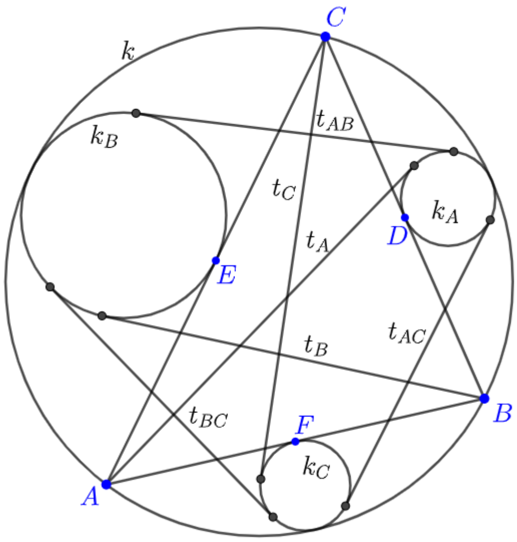
$$|AB| \cdot |CE| + |AE| \cdot |BC| = |AC| \cdot t_B.$$

Kako je $|AE| = |CE| = \frac{1}{2}|AC|$ slijedi:

$$t_B = \frac{1}{2}(a + c).$$

Sada primijenimo Caseyev teorem na kružnice A, k_C, B i C:

$$t(A, k_C) \cdot t(B, C) + t(A, C) \cdot t(k_C, B) = t(A, B) \cdot t(k_C, C),$$



Slika 4.8.: Primjer 4.

$$|AF| \cdot |BC| + |AC| \cdot |BF| = |AB| \cdot t_C.$$

Kako je $|AF| = |BF| = \frac{1}{2}|AB|$ slijedi:

$$t_C = \frac{1}{2}(a+b).$$

Ponovo primijenimo Caseyev teorem na kružnice B, C, k_B i k_C, tada imamo:

$$t(B,C) \cdot t(k_B,k_C) + t(B,k_C) \cdot t(C,k_B) = t(B,k_B) \cdot t(C,k_C),$$

$$|BC| \cdot t_{BC} + |BF| \cdot |CE| = t_B \cdot t_C.$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} t_{BC} &= \frac{t_B \cdot t_C - |BF| \cdot |CE|}{|BC|} \\ &= \frac{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{c}{2} \cdot \frac{b}{2}}{a} \\ &= \frac{(a+c)(a+b) - bc}{4a} \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c) \end{aligned}$$

Na analogni način se pokaže da vrijedi:

$$t_{CA} = t_{AB} = \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Primjer 5. *Neka je ABC trokut takav da je $|AC| > |AB|$. Kružnica $k_A(O, r_A)$ dodiruje iznutra opisanu kružnicu trokuta ABC i dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Neka je točka S polovište luka $\widehat{BC}$ koji ne sadrži točku A. Točka T je diralište kružnice k_A i tangente na kružnicu k_A iz točke S. Pokažite da vrijedi:*

$$\frac{|ST|}{|SA|} = \frac{|AC| - |AB|}{|AC| + |AB|}.$$

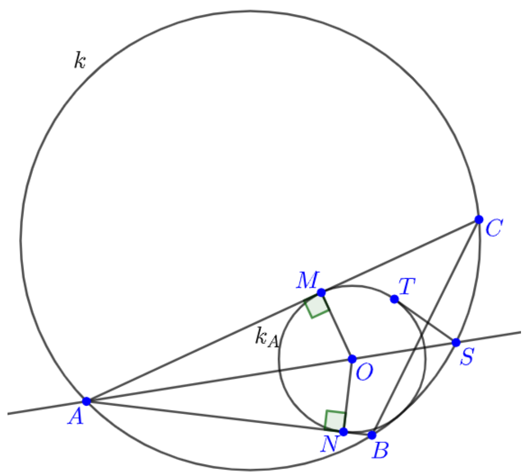
Rješenje. Neka su točke M, N redom dirališta kružnice $k_A(O, r_A)$ i stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Točke B, C i S shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula. Primjenom Caseyevog teorema na kružnice k_A, B, C, S imamo:

$$|BN| \cdot |CS| + |ST| \cdot |BC| = |CM| \cdot |BS|.$$

Kako je $|BS| = |CS|$ iz gornje jedankosti slijedi:

$$|ST| \cdot |BC| = |CS| (|CM| - |BN|). \tag{4.1}$$

Kako je $|OM| = |ON| = r_A$, $\angle OMA = \angle ONA = 90°$ i $\overline{OA}$ zajednička stranica



Slika 4.9.: Primjer 5.

trokuta OMA i ONA, slijedi da su ti trokuti sukladni po $S - S - K^{>}$ teoremu o sukladnosti. Odnosno $|AM| = |AN|$. Sada imamo:

$$|CM| - |BN| = (|AC| - |AM|) - (|AB| - |AN|) = |AC| - |AB|.$$

Stoga je jednakost (4.1):

$$|ST| \cdot |BC| = |CS| \left(|AC| - |AB| \right). \tag{4.2}$$

Primijenimo sada Ptolomejev teorem na četverokut $ABSC$, te tada imamo:

$$\begin{aligned} |SA| \cdot |BC| &= |SC| \cdot |AB| + |SC| \cdot |AC| \\ &= |SC| \left(|AB| + |AC| \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Djeljenjem jednakosti (4.2) i (4.3) dobije se:

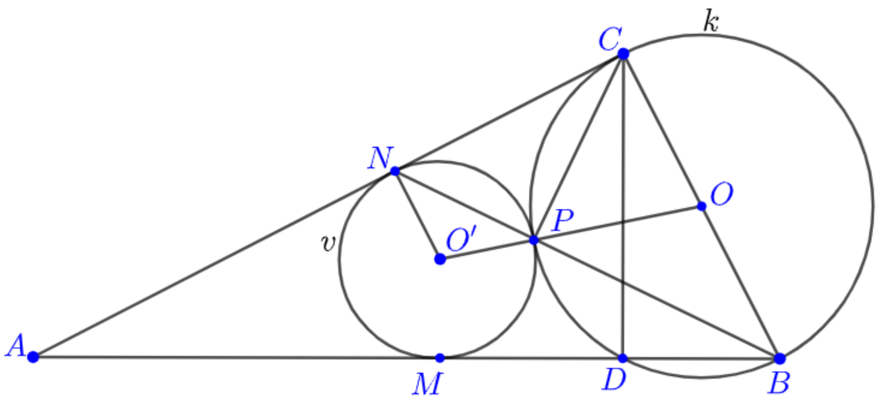
$$\frac{|ST|}{|SA|} = \frac{|AC| - |AB|}{|AC| + |AB|}.$$

Primjer 6. *(**2009., China, Hong Kong, Math Olympiad**) Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C, $\overline{CD}$ je visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Kružnica k je opisana trokutu BCD, a kružnica v je smještena u trokut ACD tako da dodiruje stranice $\overline{AD}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama M i N. Kružnice k i v dodiruju se u točki P. Pokažite da vrijedi:*

a) $|BD| \cdot |CN| + |BC| \cdot |DM| = |CD| \cdot |BM|$

b) $|BM| = |DC|$.

Rješenje.



Slika 4.10.: Primjer 6.

a) Točke B, C i D shvatit ćemo kao kružnice polumjera nula.
Primijenimo Caseyev teorem na kružnice D, B, C, v iz čega domah slijedi jednakost:

$$t_{DB} \cdot t_{Cv} + t_{Dv} \cdot t_{BC} = t_{DC} \cdot t_{Bv},$$
$$|BD| \cdot |CN| + |BC| \cdot |DM| = |CD| \cdot |BM|.$$

b) Kružnice k i v se dodiruju u točki P. Po Talesovom teoremu o kutu nad promjerom kružnice slijedi $\angle BPC = 90°$. Neka je O središte kružnice k i O' središte kružnice v. Slijedi da su točke O, P, O' kolinearne. Kut između tangente i tetive jednak je polovicu središnjeg kuta nad tom tetivom, odnosno $\angle PNC = \frac{1}{2}\angle PO'N$ i $\angle PCN = \frac{1}{2}\angle POC$.
Iz četverokuta $OO'NC$ slijedi:

$$360° = \angle PO'N + \angle POC + \angle OCN + \angle O'NC,$$

kako su kutovi $\angle OCN$ i $\angle O'NC$ pravi:

$$180° = \angle PO'N + \angle POC.$$

Dakle,

$$\angle PNC + \angle PCN = \frac{1}{2}\left(\angle PO'N + \angle POC\right) = 90°.$$

Promotrimo sada trokut NPC, kako je $\angle PNC + \angle PCN = 90°$ slijedi da je $\angle NPC = 90°$. Stoga su točke B, P, N kolinearne. Primjenom teorema o potenciji točke na točku B i kružnicu v slijedi $|BM|^2 = |BP| \cdot |BN|$. Kako je $\angle BCN = 90°$ i $CP \perp BN$ primijenimo Euklidov teorem na trokut NBC što povlači da je $|BC|^2 = |BP| \cdot |BN|$. Konačno

$$|BM| = |BC|.$$

Bibliografija

[1] R.A. Johnson, Advanced Euclidean Geometry, Dover, 1960.

[2] MacTutor History of Mathematics, John Casey, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Casey.html

[3] S. Shirali, On The Generalized Ptolemy Theorem, Rishi Valley. https://cms.math.ca/crux/v22/n2/page49-53.pdf

[4] D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija, Zagreb, 2007.

[5] L. Gonzalez, Casey's Theorem and its Applications, Maracaibo, Venezuela, July 2011, http://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf

[6] The Irish Mathematical Olympiad, Feuerbach's Theorem, http://www.irmo.ie/4.Feuerbach.pdf

[7] Wikipedia, Casey's theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Casey%27s_theorem

[8] Scientific American, Japanese Temple Geometry, May 1998, http://www.cipriancoman.net/~ciprianc/VAR/sangaku.pdf

[9] Mathematical Excalibur, Vol. 16, No. 5, Mar.-Apr. 12, https://www.math.ust.hk/excalibur/v16_n5.pdf

[10] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se Caseyevim teoremom. U prvom poglavlju iskazujemo i dokazujemo Ptolomejev teorem kako bismo pobliže razumjeli Caseyev teorem, te definiramo osnovne pojmove koje koristimo kroz rad. U drugom poglavlju pažnju posvećujemo inverziji koja se koristi u dokazivanju Caseyevog teorema. U trećem poglavlju iskazujemo i dokazujemo Caseyev teorem na nekoliko načina i dokazujemo specijalne slučajeve Caseyevog teorema. Sami kraj rada posvećen je primjeni Caseyevog teorema u dokazivanju drugih teorema i u rješavanju geometrijskih zadataka.

Summary

In this graduate thesis we are dealing with Casey's theorem. In the first chapter, we formulate and prove Ptolemy's theorem to better understand Casey's theorem, and define the basic terms we use through graduate thesis. In the second chapter, we dedicate to the inversion used to prove Casey's theorem. In the third chapter, we phrase and prove Casey's theorem in several ways and prove the special cases of Casey's theorem. The end of the graduate thesis is dedicated to the application of Casey's theorem in proving other theorems and in solving geometric problems.

Životopis

Moje ime je Adam Naglaš. Rođen sam 24. 6. 1994. godine u Varaždinu. Odrastao sam živeći u Lepoglavi s obitelji. 2001. godine krenuo sam u Osnovnu školu Ante Starčevića u Lepoglavi te 2009. godine istu i završio. Srednjoškolsko obrazovanje sam nastavio u Elektrostrojarskoj školi Varaždin, smjer: tehničar za elektroniku. Nakon maturiranja, 2013. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Matematika i fizika smjer: nastavnički. Svoje odrastanje obogatio sam baveći se sportskim aktivnostima, pripremajući se za natjecanja iz matematike i fizike te držeći poduke iz istih predmeta svojim vršnjacima. Tijekom studiranja radio sam studentski posao koji mi je proširio vidike i otvorio mogućnost zapošljavanja po završetku studija.