Periodičke šestorke kružnica

Plenković, Petra

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:043163

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Plenković

PERIODIČKE ŠESTORKE KRUŽNICA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Teorem o šest kružnica **2**
1.1 Uvod u iskaz teorema 2
1.2 Prva formulacija teorema o šest kružnica 4
1.3 Preciziranje iskaza teorema 10
1.4 Druga formulacija teorema o šest kružnica 14

2 Poopćenja teorema o šest kružnica **26**
2.1 Poligoni i kružnice 26
2.2 Teorem o devet kružnica 37

Bibliografija **40**

Uvod

Promatramo trokut $P_1P_2P_3$ u koji upišemo niz kružnica tako da je prva kružnica C_1 upisana u kut pri vrhu P_1; druga kružnica C_2 upisana u kut pri vrhu P_2 i dodiruje C_1; C_3, upisana u kut pri vrhu P_3 i dodiruje C_2; C_4, upisana u kut pri vrhu P_1 i dodiruje C_3, i tako dalje. Uz još neke dodatne uvjete, ovakvi nizovi pokazuju svojstvo periodičnosti te je ovaj postupak periodičan s periodom šest.

Teorem je poznat pod nazivom *Teorem o šest kružnica* i jedan je od mnogih koji se nalaze u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"*. Knjiga je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a i J. A. Tyrrell-a. U ovom radu prikazat ćemo različite varijante i neka poopćenja ovog teorema.

U prvom poglavlju precizno ćemo izreći dvije različite formulacije teorema o šest kružnica i dokazati ih. Najprije se razmatraju samo nizovi ili "lanci" kružnica kojima su sva dirališta unutar stranica i tada se sedma kružnica u nizu podudara s prvom, [3]. Zatim se promatra općenitiji slučaj kada se dirališta mogu nalaziti i na produžetcima stranica te tada periodičkoj šestorci može prethoditi pretperiod po volji zadane duljine, [1].

Prirodno se nameće pitanje mogućih poopćenja ovog teorema. Primjerice, umjesto trokuta može se promatrati n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$ u koji se upisuje niz kružnica na način analogan navedenom za trokut. U drugom poglavlju rada pokazujemo da je takav niz kružnica periodičan za jednu posebnu klasu n-terokuta, koje ćemo ukratko nazvati *dobri* n-terokuti. Preciznije, niz kružnica je $2n$-periodičan za *dobre* n-terokute s neparnim n, a n-periodičan za *dobre* n-terokute s parnim n koji ispunjavaju još jedan dodatan uvjet, [4].

Za kraj ćemo prikazati, bez dokaza, jedan srodan rezultat kada se stranice trokuta zamijene kružnicama. U ovom slučaju polazimo od tri zadane kružnice i ako se u svakom koraku na prikladan način odabere kružnica koja dodiruje prethodnu u nizu i dvije od početnih kružnica, onda se sedma kružnica podudara s prvom. Ovaj teorem poznat je pod nazivom *Teorem o devet kružnica*, [6].

Poglavlje 1

Teorem o šest kružnica

1.1 Uvod u iskaz teorema

Prvo poglavlje ćemo započeti sažetcima životopisa trojice matematičara zaslužnih za pronalazak i prvi dokaz teorema o šest kružnica. Kao što je već spomenuto u uvodu, teorem o šest kružnica jedan je od mnogih koji se nalaze u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"*. Knjiga je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a i J. A. Tyrrell-a. Zanimljivo je da je samo Tyrrell bio profesionalni matematičar i to vrlo ugledan.

Cecil John Alvin Evelyn (1904.-1976.) rođen je u Londonu. Za vrijeme školovanja razvio je veliki interes za matematiku, posebice za teoriju brojeva i geometriju, te se nakon završetka studija matematike učlanjuje u Londonsko matematičko društvo. Obiteljsko nasljedstvo omogućilo mu je da se u potpunosti posveti matematici i drugim brojnim interesima, naročito književnosti. Njegov matematički opus sastoji se od 12 radova i knjige u kojoj su objedinjeni svi njegovi radovi.

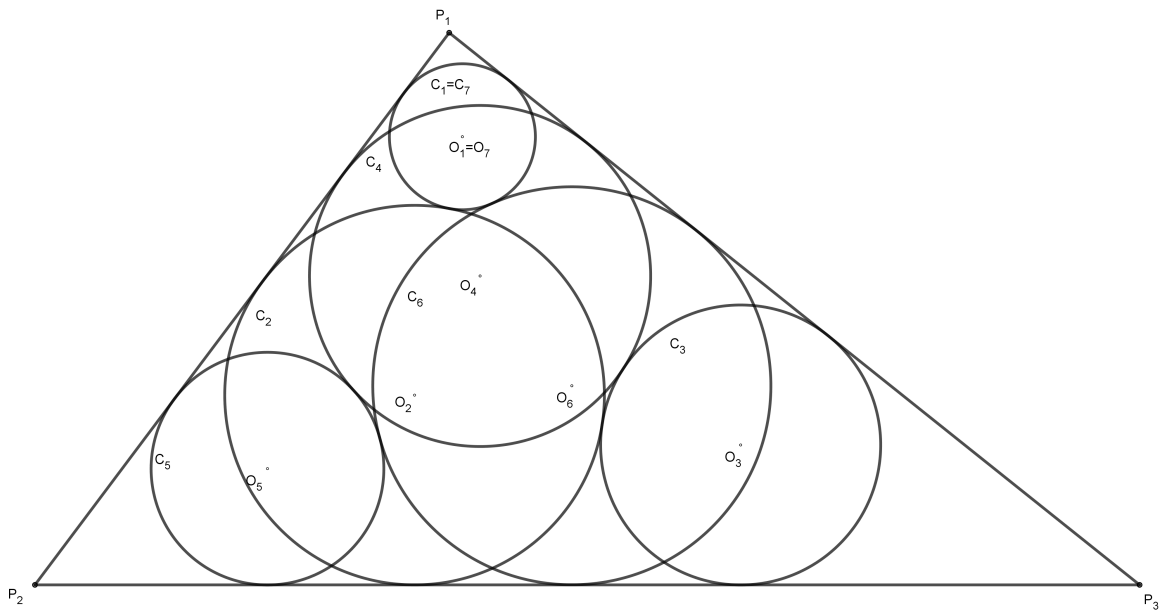
G. B. Money-Coutts najvjerojatnije je bio britanski plemić Godfrey Burdett Money-Coutts (1905.–1979.). O njegovu životu ne zna se puno. Studirao je na istom fakultetu kao i C. J. A. Evelyn te je bio član Londonskog matematičkog društva.

John Alfred Tyrrell (1932.-1992.) bio je profesor matematike na sveučilištu King's College u Londonu. Pod utjecajem svojih profesora Tyrrell je rano razvio zanimanje za geometriju te postao prvorazredni geometričar. Svoje široko znanje uvijek je rado dijelio sa svojim kolegama i studentima. King's College njemu u čast dodjeljuje nagradu za najuspješnijeg studenta koja nosi njegovo ime.

Trojica prijatelja običavali su se sastajati uz čaj te razgovarati o matematici. Najčešće su raspravljali o geometrijskim zakonitostima i svojstvima na koja su naišli eksperimentalnim putem, crtajući geometrijske likove velikih dimenzija i tražeći na njima različite pravilnosti. Njihova suradnja rezultirala je brojnim novim ili manje poznatim teoremima u planimetriji skupljenim u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"*. Spomenimo da se teorem o sedam kružnica iz naslova knjige ne odnosi na teorem koji je tema ovog rada, a u kojem se sedma kružnica podudara s prvom.

Teorem 1.1.1. ***Teorem o šest kružnica.***

Neka je $P_1P_2P_3$ trokut u ravnini i neka je C_1 bilo koja kružnica koja dodiruje stranice P_3P_1 i P_1P_2. Promotrimo tada lanac upisanih kružnica: C_2 je kružnica koja dodiruje P_1P_2, P_2P_3 i C_1, C_3 je kružnica koja dodiruje P_2P_3, P_3P_1 i C_2, C_4 je kružnica koja dodiruje P_3P_1, P_1P_2 i C_3, C_5 je kružnica koja dodiruje P_1P_2, P_2P_3 i C_4, C_6 je kružnica koja dodiruje P_2P_3, P_3P_1 i C_5, C_7 je kružnica koja dodiruje P_3P_1, P_1P_2 i C_6. Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, ali ako je u svakom koraku kružnica odabrana na prikladni način, tada se kružnica C_7 podudara s prvom kružnicom C_1 i imamo zatvoren lanac kružnica, slika 1.1.



Slika 1.1: Teorem o šest kružnica.

Teorem o šest kružnica poznat je i pod imenom *Money-Coutts teorem*.
Dana formulacija teorema 1.1.1, zbog svoje dvosmislenosti, treba pojašnjenje. U ovom poglavlju prikazat ćemo dva dokaza ovog teorema, odnosno njegovih varijanti u kojima su pretpostavke iskazane precizno.

Autori knjige *"The seven circles theorem and other new theorems"* nisu razmotrili pretperiodički dio lanca kružnica. Prva formulacija razmatra samo lance kružnica u kojima se svako diralište kružnice i stranice nalazi unutar stranica trokuta.
Teorem 1.1.1 ćemo malo drugačije formulirati u drugom pristupu. Ta formulacija imat će dodatne pretpostavke, a za dirališta bit će postavljen uvjet da se nalaze na pravcima na kojima leže stranice trokuta. To znači da se dirališta mogu nalaziti i na produžetcima stranica, a ne samo unutar njih. U ovom pristupu dokazat ćemo općenitiji slučaj kada lanac kružnica konačno postaje 6-periodičan, ali može imati proizvoljno dug pretperiod.

1.2 Prva formulacija teorema o šest kružnica

Dokazat ćemo teorem 1.1.1 te ćemo, kako bi smanjili broj izbora kružnica, dodati uvjet da svaka kružnica treba ležati unutar trokuta. Ovaj uvjet daje najviše jedan izbor svake sljedeće kružnice.

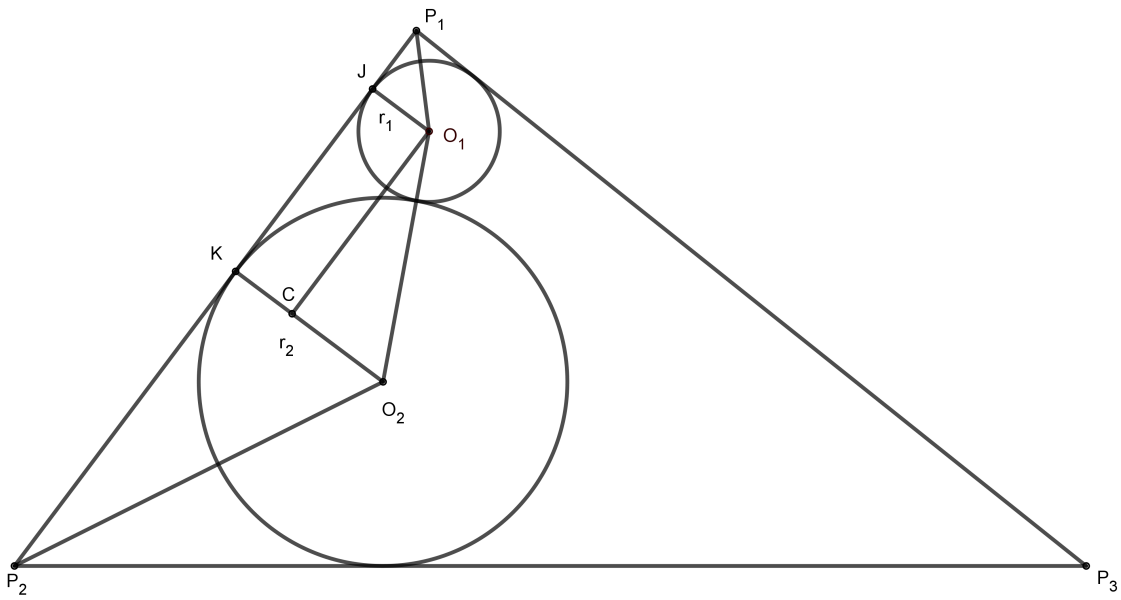
Dokaz.
Označimo s a, b, c duljine stranica trokuta P_2P_3, P_3P_1 i P_1P_2, α_1, α_2 i α_3 kutove $P_3P_1P_2$, $P_1P_2P_3$ i $P_2P_3P_1$ te neka su l, m, n, l', m', n' i l'' duljine odsječaka tangenti na kružnice C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 i C_7 iz točaka P_1, P_2, P_3, P_1, P_2, P_3 i P_1, redom. Pritom, duljina odsječka tangente je udaljenost od vrha kuta u koji je upisana kružnica do dirališta stranice i kružnice.

Na slici 1.2 je prikazano da ako su O_1 i O_2 središta kružnica C_1 i C_2, te J i K dirališta kružnica i stranice P_1P_2, imamo $P_1J = l$ i $P_2K = m$. Budući da je O_1 na simetrali kuta pri vrhu P_1, razmatramo pravokutan trokut P_1JO_1 s pravim kutom pri vrhu J. Kut pri vrhu P_1 je kut $\frac{1}{2}\alpha_1$ te je $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{|JO_1|}{l}$. Sada, imamo da je radijus kružnice C_1

$$|\,JO_1\,| = l \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1.$$

Analogno, imamo da je radijus kružnice C_2

$$|\,KO_2\,| = m \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2.$$



Slika 1.2: Relacija između duljine odsječka tangente i radijusa upisanih kružnica.

Ako se dvije kružnice radijusa r_1 i r_2, središta O_1 i O_2, dodiruju izvana (slika 1.2) tada je duljina $| O_1O_2 |= r_1 + r_2$. Povučemo paralelu sa stranicom P_1P_2 kroz O_1 i označimo na njoj segment $\overline{O_1C}$ te vidimo da je $| O_1C |=| JK |$, te je tada

$$\begin{aligned} | JK |^2 &=| O_1O_2 |^2 - | O_1C |^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 \\ &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = 4r_1r_2, \\ | JK | &= \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}. \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali tvrdnju da dvije kružnice radijusa r_1 i r_2 koje se dodiruju izvana imaju duljinu zajedničkog segmenta na tangenti $2\sqrt{r_1r_2}$, te imamo

$$| JK |= 2\sqrt{lm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Kako je $| P_1P_2 |=| P_1J | + | JK | + | KP_2 |$, slijedi da je

$$c = l + m + 2\sqrt{lm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1}. \tag{1.1}$$

Označimo poluopseg trokuta $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Potrebna je Lema 1.2.1 kako bi mogli nastaviti s dokazom.

Lema 1.2.1. *Za dani trokut ABC, neka su a, b, c njegove stranice, s poluopseg, i α_1, α_2, α_3 njegovi kutovi.*
Vrijedi

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 &= \frac{c}{s}, \\ 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_3 &= \frac{a}{s}, \\ 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 &= \frac{b}{s}. \end{aligned}$$

Dokaz.
Neka je R radijus upisane kružnice i P površina trokuta.
Neka je

$$t_A = | AF | = | AG |, \quad t_B = | BG | = | BE |, \quad t_C = | CE | = | CF |,$$

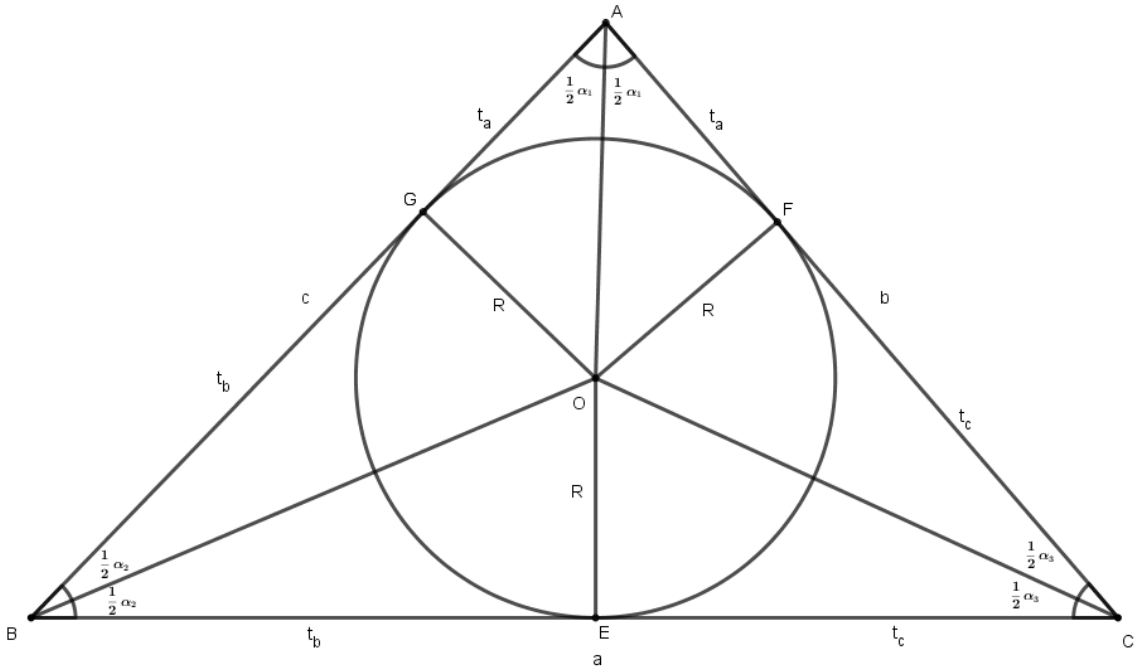
vidi sliku 1.3.

Sada je $s = t_A + t_B + t_C$ i $P = Rs$. Po Heronovoj formuli za površinu trokuta je

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s(t_A + t_B + t_C - (t_B + t_C))(t_A + t_B + t_C - (t_A + t_C))(t_A + t_B + t_C - (t_A + t_B))} \\ &= \sqrt{st_At_Bt_C}. \end{aligned}$$

Dakle, $P^2 = R^2s^2 = st_At_Bt_C$, to jest $R^2 = \frac{t_At_Bt_C}{s}$.
Iz pravokutnog trokuta OFA imamo da je $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{R}{t_A}$, te iz pravokutnog trokuta OGB imamo da je $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{R}{t_B}$.
Dakle,

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 &= 1 - \frac{R}{t_A}\frac{R}{t_B} = 1 - \frac{R^2}{t_At_B} \\ &= 1 - \frac{\frac{t_At_Bt_C}{s}}{t_At_B} = 1 - \frac{t_C}{s} = \frac{s - t_C}{s} \\ &= \frac{t_A + t_B + t_C - t_C}{s} = \frac{t_A + t_B}{s} = \frac{c}{s}. \end{aligned}$$



Slika 1.3: Slika za dokaz Leme 1.2.1.

Analogno se pokazuje da vrijedi i

$$1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_3 = \frac{a}{s},$$
$$1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{b}{s}.$$

□

Prema Lemi 1.2.1 slijedi da je

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha_2 = 1 - \frac{c}{s} = \frac{s-c}{s}.$$

Sada (1.1) možemo zapisati kao

$$c = l + m + 2\sqrt{lm\frac{(s-c)}{s}}. \tag{1.2}$$

Tako dobivamo vezu između l i m. Slično, koristeći isti princip dokaza na drugim kružnicama u lancu, možemo povezati m i $n, \ldots, n'$ i l'' te imamo

$$a = m + n + 2\sqrt{mn\frac{(s-a)}{s}},$$

i tako dalje. Na kraju dobivamo ukupno šest relacija.

Uvodimo supstituciju p, q, r, p', q', r' i p'' za korijene od l, m, n, l', m', n' i l'', i f, g, h i d za korijene a, b, c, s. Definiramo tupe kutove θ, φ i ψ s

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= -\sqrt{1-\frac{a}{s}} = -\sqrt{1-\frac{f^2}{d^2}}, \quad \sin\theta = \frac{f}{d}, \\
\cos\varphi &= -\sqrt{1-\frac{b}{s}} = -\sqrt{1-\frac{g^2}{d^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{g}{d}, \\
\cos\psi &= -\sqrt{1-\frac{c}{s}} = -\sqrt{1-\frac{h^2}{d^2}}, \quad \sin\theta = \frac{h}{d}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Kutovi su dobro definirani jer su vrijednosti ispod korijena pozitivne i između 0 i 1. Stoga, (1.2) možemo zapisati kao

$$h^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\psi. \tag{1.4}$$

Pet drugih jednadžbi dobivamo tako da zamijenimo h, p, q i ψ s drugim varijablama kako je naznačeno u tablici 1.1.

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
h	f	g	h	f	g
p	q	r	p'	q	r'
q	r	p'	q'	r'	p''
ψ	φ	θ	ψ	φ	θ

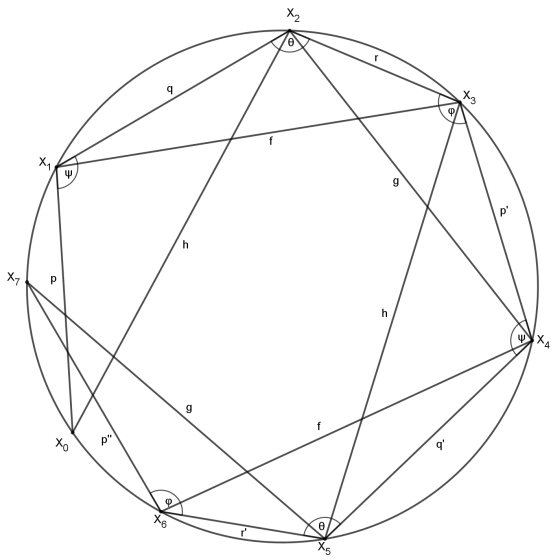
Tablica 1.1: Tablica relacija između dužina i kutova.

Sada u (1.4) prepoznajemo kosinusov poučak i možemo konstruirati trokut T_1 sa stranicama p, q, h i kutom ψ nasuprot stranice h. Analogno, koristeći relacije u tablici 1.1 dobivamo trokute T_2, T_3, T_4, T_5 i T_6.

Primjenom poznate relacije prema kojoj je dijametar opisane kružnice trokuta jednak duljini bilo koje stranice trokuta podijeljene sa sinusom kuta nasuprot nje imamo za T_1 da

je dijametar $\frac{h}{\sin\varphi}$, što je prema (1.3) jednako d. Štoviše, na sličan način dobivamo da su dijametri opisanih kružnica preostalih trokuta također d.

Iz ovog slijedi da ako spojimo trokute T_1, T_2 tako da se stranice duljine q podudaraju tada se i njihove opisane kružnice također podudaraju. Ako nastavimo sličnim postupkom možemo smjestiti svih šest trokuta u istu opisanu kružnicu (slika 1.4). Ako uklonimo neke od stranica vidimo na slici 1.5 da imamo otvoreni sedmerokut (izlomljenu crtu) $X_0X_1 \ldots X_7$ upisan u kružnicu, s kutom θ pri vrhovima X_2 i X_5, kutom ψ pri vrhovima X_1 i X_4, i kutom φ pri vrhu X_3 i X_6.



Slika 1.4: Smještanje svih šest trokuta u istu opisanu kružnicu.

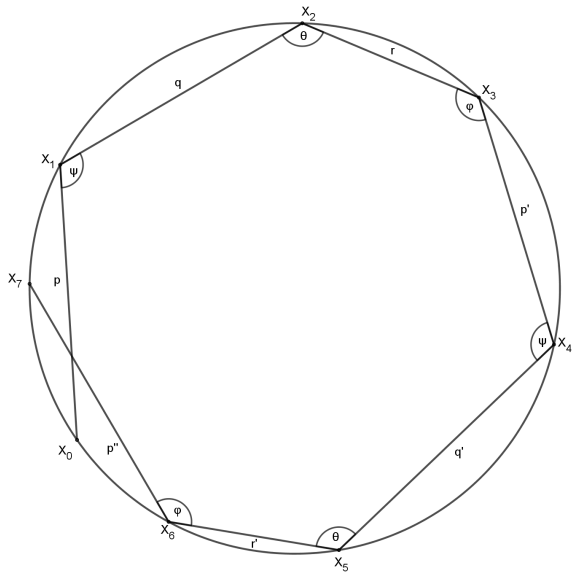
Primijetimo, trokuti $X_0X_2X_4$ i $X_3X_5X_7$ su sukladni, iz čega imamo da su kutovi $X_0X_2X_4$ i $X_3X_5X_7$ sukladni. Oduzimajući ove kutove od sukladnih kutova $X_1X_2X_3$ i $X_4X_5X_6$ imamo

$$\angle X_0X_2X_1 + \angle X_3X_2X_4 = \angle X_3X_5X_4 + \angle X_6X_5X_7.$$

Ali,budući da su $X_3X_2X_4$ i $X_3X_5X_4$ također sukladni, slijedi

$$\angle X_0X_2X_1 = \angle X_6X_5X_7.$$

Dakle, $\overline{X_0X_1}$ i $\overline{X_6X_7}$ su tetive nasuprot sukladnih obodnih kutova kružnice, te iz toga slijedi da su jednake duljine.
Stoga, $p = p''$, i slijedi da je $l = l''$ čime smo dokazali tvrdnju teorema. □



Slika 1.5: Otvoreni sedmerokut upisan u kružnicu.

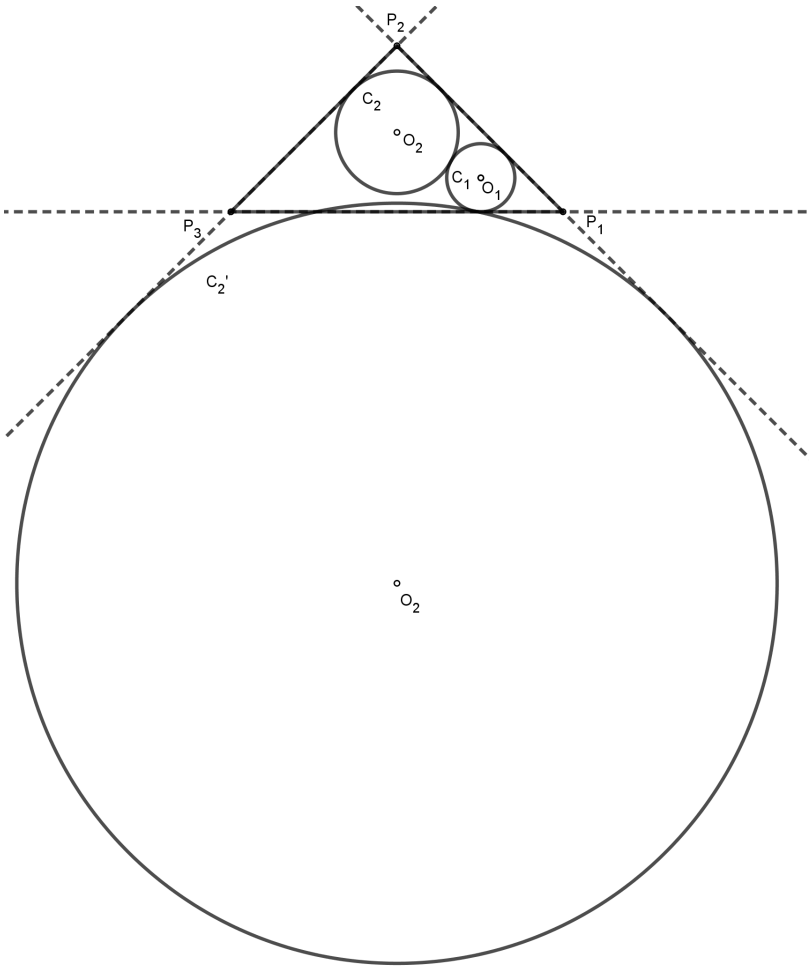
1.3 Preciziranje iskaza teorema

Teorem 1.1.1 ćemo malo preformulirati te ćemo u tu svrhu definirati još par pretpostavki. Za početak promotrimo što se događa kad upisujemo drugu kružnicu u lancu. Kada je upisana početna kružnica C_1 u kut P_1, za drugu kružnicu C_2, upisanu u kut pri vrhu P_2 tako da dodiruje kružnicu C_1, imamo dva izbora kružnica (slika 1.6).

Primijetimo da za svaku kružnicu u lancu, osim početne, postoje dva izbora za svaku sljedeću. Potrebno je dodati uvjet za odabir svake sljedeće kružnice u lancu. Mi pretpostavljamo da je odabrana manja od dvije kružnice koje dodiruju prethodnu, to jest pretpostavljamo da je odabrana kružnica čije je središte bliže odgovarajućem vrhu trokuta.
Primjerice, na slici 1.6 kružnica C_1 dodiruje kružnice C_2 i C_2', no odabrana je kružnica C_2.

Također se može dogoditi da sljedeća kružnica u lancu ne dodiruje stranicu trokuta već njezin produžetak. Promatrat ćemo isključivo lanac kružnica takav da su sve dodirne točke na stranicama trokuta, a ne na produžetcima istih.

U slučaju kada kružnice dodiruju produžetak stranica, lanac je konačno 6-periodičan s pretperiodom. Primjerice, na slici 1.7 lanac ima pretperiod duljine dva: $C_9 = C_3$ ali $C_8 \neq C_2$. Postojanje pretperioda proizlazi iz činjenice da postoji više izbora sljedeće kružnice koja dodiruje prethodnu.



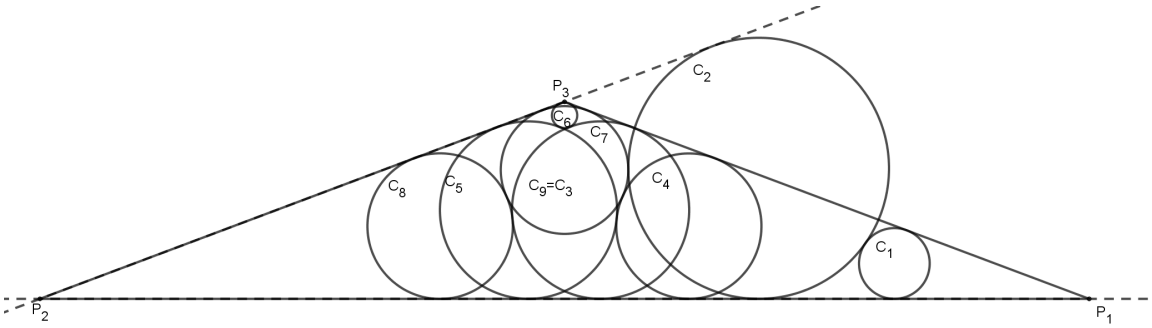
Slika 1.6: Za svaku sljedeću kružnicu u lancu imamo dva izbora.

Uzimajući u obzir da barem jedna dodirna točka početne kružnice leži na stranici trokuta, a ne na produžetku stranice, važnu ulogu ima sljedeća Lema.

Lema 1.3.1. *Ako početna kružnica zadovoljava pretpostavku da barem jedna dodirna točka leži na stranici trokuta tada je zadovoljavaju i sve sljedeće kružnice.*

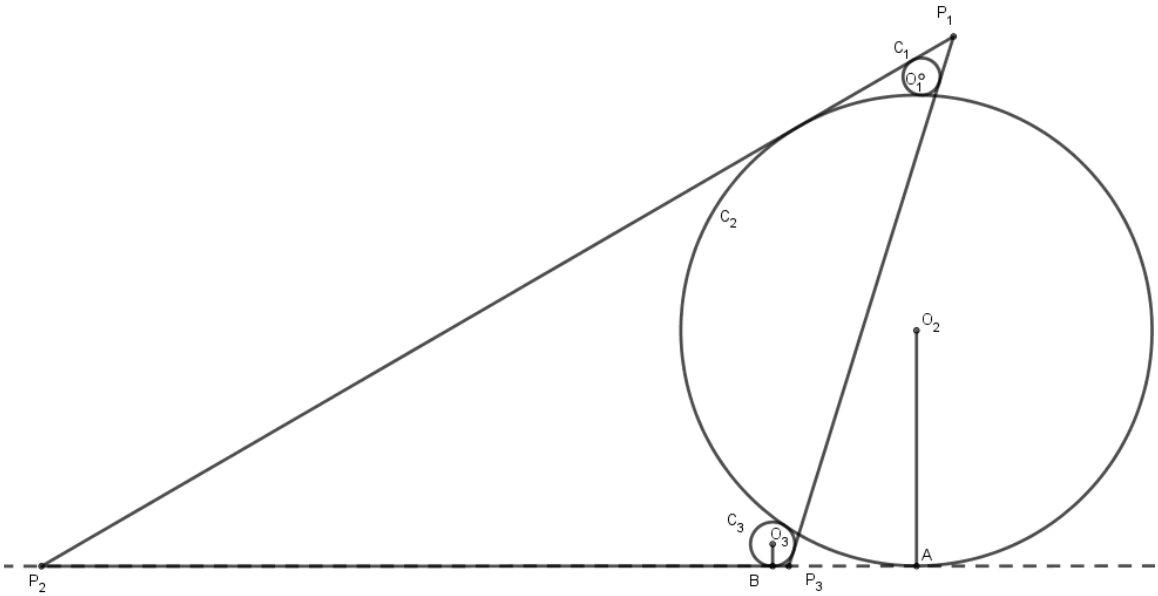
Dokaz.

Neka je dan trokut $P_1P_2P_3$ i neka je kružnica C_1 upisana u kut pri vrhu P_1, C_2 upisana u kut pri vrhu P_2 i dodiruje kružnicu C_1.



Slika 1.7: Lanac kružnica je konačno 6-periodičan s pretperiodom duljine dva: $C_9 = C_3$, ali $C_8 \neq C_2$.

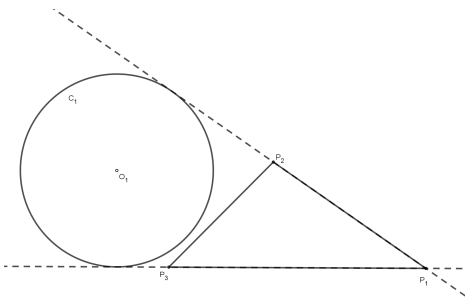
Ako kružnica C_1 dodiruje stranicu P_1P_2 tada i C_2 također dodiruje ovu stranicu u točki bližoj vrhu P_2 nego prethodna.
Povećavanjem indeksa za 1, ako kružnica C_2 ne dodiruje stranicu P_2P_3, ali dodiruje stranicu P_1P_2 tada ona siječe stranicu P_1P_3 i sljedeća kružnica C_3 dodiruje stranicu P_1P_3, u točki bližoj P_3 od točaka presjeka prethodne kružnice i stranice P_1P_3 (slika 1.8). □



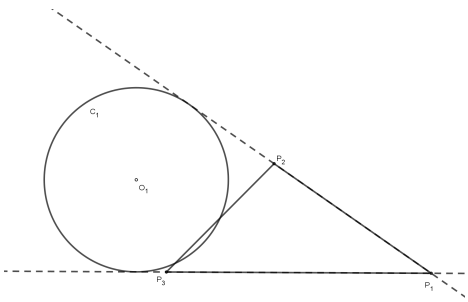
Slika 1.8: Slika za dokaz Leme 1.3.1.

Potrebno je precizirati i izbor početne kružnice u lancu.
Ako početna kružnica koja je upisana u kut pri vrhu P_1 dodiruje produžetak stranice P_1P_2 i P_1P_3, ali ne siječe stranicu P_2P_3 tada nije moguće upisati sljedeću kružnicu, kao što vidimo i na slici 1.9, te ovaj slučaj nije od interesa.

Ako početna kružnica C_1 siječe stranicu P_2P_3 tada je moguće upisati sljedeću kružnicu koja dodiruje stranicu P_2P_3 i zadovoljava pretpostavku da barem jedno diralište leži na stranici trokuta (slika 1.10). Stoga pretpostavka vrijedi počevši od druge upisane kružnice pa to ne utječe na tvrdnju teorema nego samo na duljinu pretperioda.
Bez gubitka općenitosti možemo onda uzeti da pretpostavka vrijedi već od prve kružnice u lancu.



Slika 1.9: Slučaj kad početna kružnica dodiruje produžetak stranica P_1P_2 i P_1P_3 i ne siječe P_2P_3.



Slika 1.10: Slučaj kad početna kružnica dodiruje produžetak stranica P_1P_2 i P_1P_3 i siječe P_2P_3.

1.4 Druga formulacija teorema o šest kružnica

Teorem 1.4.1. *Neka je $P_1P_2P_3$ trokut u ravnini i neka je C_1 bilo koja kružnica upisana u kut pri vrhu P_1 tako da barem jedna dodirna točka leži na stranici trokuta. Promotrimo tada lanac upisanih kružnica: C_2 je kružnica upisana u kut pri vrhu P_2 i dodiruje kružnicu C_1, C_3 je kružnica upisana u kut pri vrhu P_3 i dodiruje kružnicu C_2, C_4 je kružnica upisana u kut pri vrhu P_1 i dodiruje kružnicu C_3, i tako dalje.*
Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, a dobro odabranom nazovimo onu kružnicu čije je središte bliže odgovarajućem vrhu trokuta. Ako je u svakom koraku kružnica dobro odabrana, tada je lanac kružnica na kraju periodičan s periodom 6. Može se odabrati oblik trokuta i početna kružnica tako da pretperiod bude proizvoljno dugačak.

Dokaz Teorema 1.4.1 sastoji se od reduciranja sustava jednadžbi do na po dijelovima linearnu funkciju; to se postiže trigonometrijskom supstitucijom varijabli. U pojedinim koracima može se učiniti da nema jasne motivacije za način odabira koordinati i novih varijabli, ali postupak se na kraju pokazuje svrsishodnim.

Dokaz.
Za početak dokaza uvedimo oznake. Označimo kutove u zadanom trokutu: $2\alpha_1$ kut pri vrhu P_1, $2\alpha_2$ kut pri vrhu P_1 i $2\alpha_3$ kut pri vrhu P_1. Neka su stranice trokuta duljina a_1, a_2 i a_3 (stranica a_1 je nasuprot vrha P_1, a_2 nasuprot vrha P_2 i a_3 nasuprot vrha P_3).
Neka je $p = \frac{a_1+a_2+a_3}{2}$ poluopseg trokuta $P_1P_2P_3$.
Primijetimo da zbog nejednakosti trokuta vrijedi:

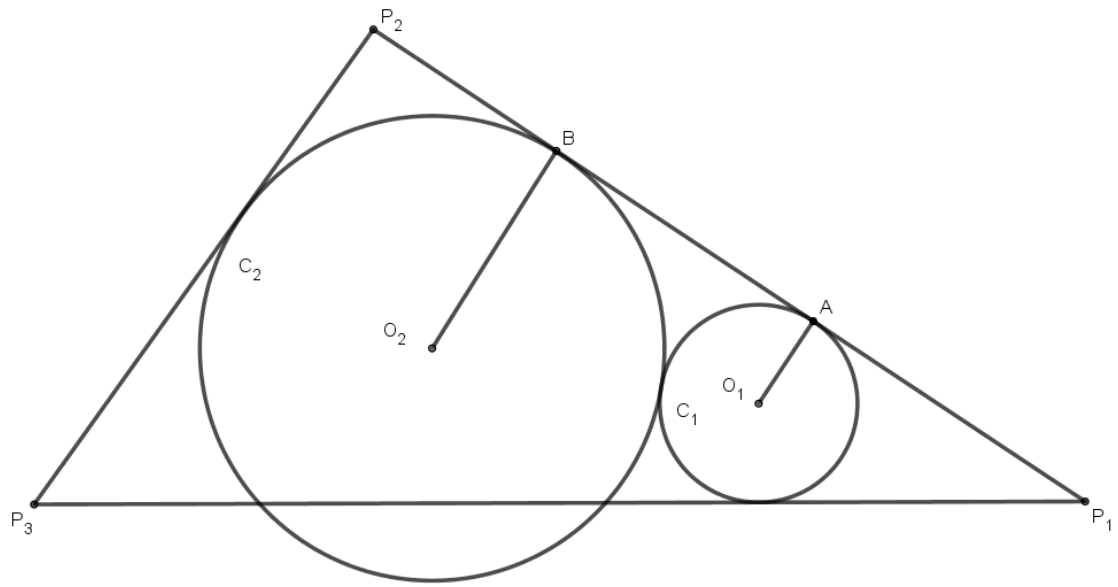
$$p = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) > \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} = a_1.$$

Analogno se pokazuje da vrijedi $p > a_2$, $p > a_3$.

Označimo radijuse kružnica C_i s r_i, $i = 1, 2, 3, ...$ i pretpostavimo da je kružnica C_i upisana u (i *mod* 3)-ti kut trokuta. Primjerice: kružnica C_4 upisana je u kut $2\alpha_1$.

Prema već dokazanom poglavlju 1.2 znamo da dvije kružnice radijusa r_1 i r_2 koje se dodiruju izvana imaju duljinu zajedničkog segmenta na tangenti $2\sqrt{r_1r_2}$, te imamo

$$| AB |= 2\sqrt{r_1r_2}.$$



Slika 1.11: Prvi slučaj: $a_3 =| P_1A | + | AB | + | BP_2 |$.

U ovisnosti o međusobnim položajima uzastopnih kružnica, kao što je prikazano na slikama 1.11, 1.12 i 1.13, izraziti ćemo duljine stranica trokuta pomoću kutova i radijusa upisanih kružnica.
Ako promotrimo sliku 1.11 vidimo da je

$$a_3 =| P_1A | + | AB | + | BP_2 | . \tag{1.5}$$

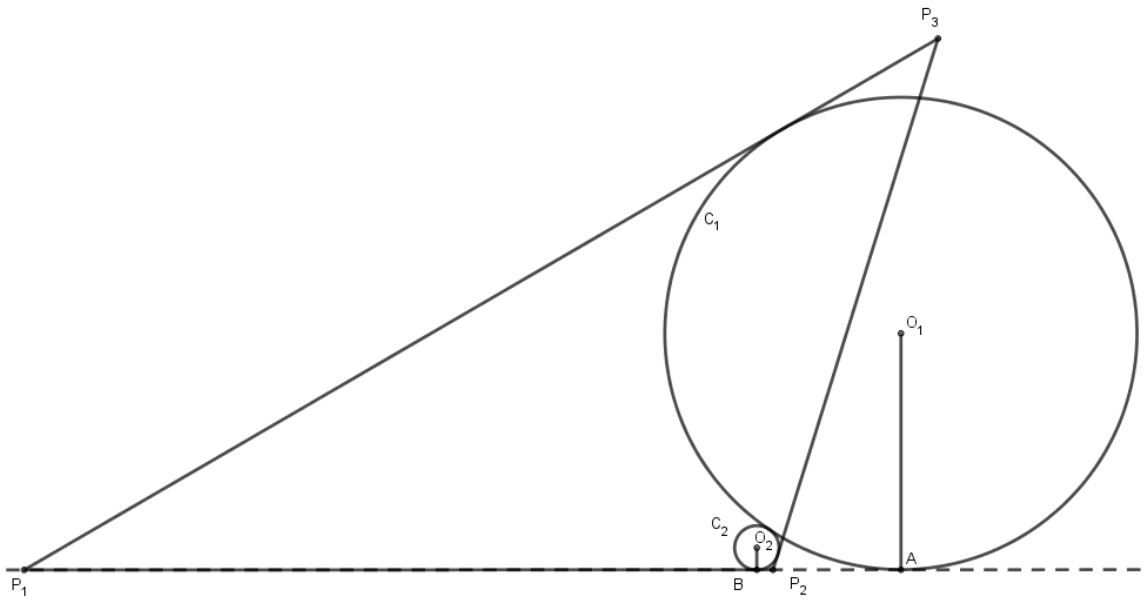
Duljinu segmenta $\overline{AB}$ smo već izračunali. Uočimo pravokutan trokut P_1AO_1, s pravim kutom pri vrhu A. Kut pri vrhu P_1 je kut α_1 jer se središte O_1 upisane kružnice u kut P_1 nalazi simetrali tog kuta. Iz tog trokuta imamo da je $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{|P_1A|}{r_1}$, iz čega slijedi $| P_1A |= r_1 \operatorname{ctg}\alpha_1$.
Analogno, iz pravokutnog trokuta BP_2O_2 dobijemo $| BP_2 |= r_2 \operatorname{ctg}\alpha_2$.
Uvrštavanjem u jednakost (1.5) imamo:

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + r_2 \operatorname{ctg}\alpha_2.$$

Ako pak promotrimo slike 1.12 i 1.13 vidimo da je u oba slučaja

$$a_3 =| P_1A | - | AB | + | BP_2 | . \tag{1.6}$$

Uočimo pravokutan trokut P_1AO_1, s pravim kutom pri vrhu A. Kut pri vrhu P_1 je kut α_1. Iz tog trokuta imamo da je $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{|P_1A|}{r_1}$, iz čega slijedi $| P_1A |= r_1 \operatorname{ctg}\alpha_1$.



Slika 1.12: Drugi slučaj: $a_3 = \mid P_1A \mid - \mid AB \mid + \mid BP_2 \mid$.

Analogno, iz pravokutnog trokuta BP_2O_2 imamo da je $\mid BP_2 \mid = r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2$.
Uvrštavanjem u jednakost (1.6) imamo:

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2.$$

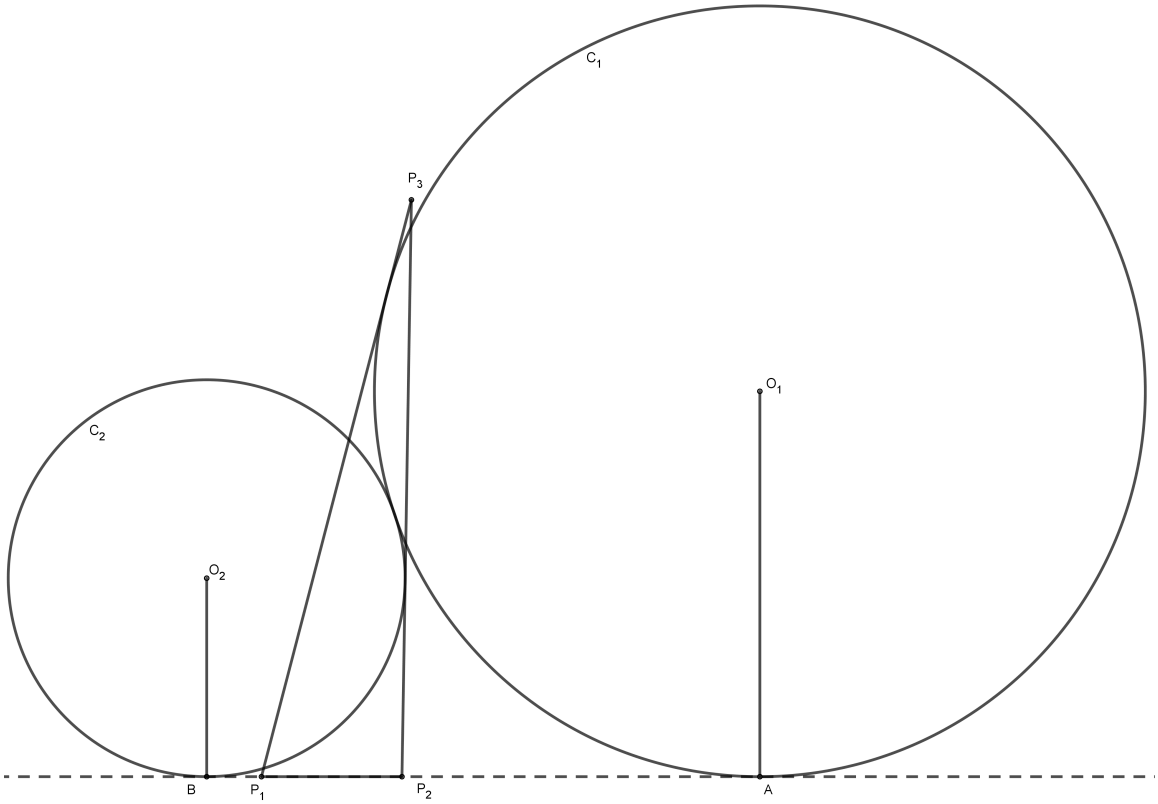
Dakle, u ovisnosti o međusobnim položajima uzastopnih kružnica dobivamo ove jednadžbe:

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 \tag{1.7}$$

ili

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \tag{1.8}$$

i cikličke permutacije indeksa $1, 2, 3$.
Posebno, ako kružnica C_1 dodiruje stranicu P_1P_2 tada imamo prvu jednadžbu (1.7), ako C_1 dodiruje produžetak stranice P_1P_2 tada imamo drugu jednadžbu (1.8).



Slika 1.13: Treći slučaj: $a_3 =| P_1A | - | AB | + | BP_2 |$.

Rješavanje jednadžbi. Jednadžbe (1.7) i (1.8) određuju radijus r_2, nove kružnice, pomoću radijusa prethodne, r_1. Ove dvije jednadžbe riješit ćemo u dva koraka.
Prvo, uvodimo oznake:

$$u_1 = \sqrt{r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1}, \quad e_3 = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

i njihove cikličke permutacije indeksa.
Sada, jednadžbe (1.7) i (1.8) možemo zapisati kao

$$u_1^2 \pm 2e_3u_1u_2 + u_2^2 = a_3, \tag{1.9}$$

ili

$$\begin{aligned} u_1^2 \pm e_3u_1u_2 \pm e_3u_1u_2 + u_2^2 &= a_3 \\ u_1(u_1 \pm e_3u_2) + u_2(u_2 \pm e_3u_1) &= a_3. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Izrazimo u_2 iz jednadžbi (1.9)

$$\begin{aligned} u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 &= a_3 \\ u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 + e_3^2u_1^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 \\ (u_2 + e_3u_1)^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 - u_1^2 \\ u_2 + e_3u_1 &= \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} \\ u_2 &= -e_3u_1 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

i

$$\begin{aligned} u_1^2 - 2e_3u_1u_2 + u_2^2 &= a_3 \\ u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 + e_3^2u_1^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 \\ (u_2 - e_3u_1)^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 - u_1^2 \\ u_2 - e_3u_1 &= -\sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} \\ u_2 &= e_3u_1 - \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Prema predznaku u (1.9), predznaci u formulama (1.11), (1.12) su pozitivni ili negativni. Ispred drugog korijena u formuli (1.12) je znak minus jer u našem lancu odabiremo manju od dvije kružnice koja dodiruje prethodnu.
Slično, izrazimo i u_1:

$$u_1 = -e_3u_2 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2} \tag{1.13}$$

ili

$$u_1 = e_3u_2 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2}. \tag{1.14}$$

Prema predznaku u (1.9), predznaci u (1.13) i (1.14) su ili pozitivni ili negativni. Predznak plus ispred drugog korijena u formuli (1.14) je zato što kada idemo u obrnutom smjeru, od kružnice C_2 do C_1, biramo veću od dvije kružnice.

Uvrštavajući $(u_1 \pm e_3u_2) = \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2}$ i $(u_2 \pm e_3u_1) = \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2}$ u jednadžbu (1.10) dobivamo

$$u_1\sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2} \pm u_2\sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} = a_3. \tag{1.15}$$

Predznak ovisi o tome je li u_1^2 manji ili veći od a_3 (ako je $u_1^2 = a_3$ tada je $u_2 = 0$ u formulama (1.11) i (1.12)).

Trigonometrijska supstitucija. Prepisat ćemo prethodnu formulu (1.15) kao formulu za zbroj ili razliku sinusa dvaju kutova te za to trebamo Lemu 1.2.1 već dokazanu u radu.

Dakle, zbog Leme 1.2.1 formulu (1.15) možemo zapisati kao formulu za zbroj ili razliku sinusa dvaju kutova. Imamo $e_3 = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$, $1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_3}{p}$, uvrštavanjem u formulu (1.15) dobijemo:

$$\begin{aligned}
u_1\sqrt{a_3 - (1-e_3^2)u_2^2} \pm u_2\sqrt{a_3 - (1-e_3^2)u_1^2} &= a_3\\
u_1\sqrt{a_3 - (1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2)u_2^2} \pm u_2\sqrt{a_3 - (1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2)u_1^2} &= a_3\\
u_1\sqrt{a_3 - \frac{a_3}{p}u_2^2} \pm u_2\sqrt{a_3 - \frac{a_3}{p}u_1^2} &= a_3\\
u_1\sqrt{a_3}\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm u_2\sqrt{a_3}\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= a_3\\
u_1\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm u_2\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= \frac{a_3}{\sqrt{a_3}} = \sqrt{a_3}\\
\frac{u_1}{\sqrt{p}}\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm \frac{u_2}{\sqrt{p}}\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= \sqrt{\frac{a_3}{p}}. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Sada možemo napraviti zadnju supstituciju. Neka je

$$\varphi_i = \arcsin\left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right), \quad \beta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right). \qquad (1.17)$$

Kako bi opravdali supstituciju $\beta_i = \arcsin(\sqrt{\frac{a_i}{p}})$, primijetimo da $a_i < p$ iz čega slijedi $\sqrt{\frac{a_i}{p}} \in [-1, 1]$. Također, svaka kružnica dodiruje stranicu trokuta, te u_i^2 nije veći od neke od stranica, i stoga je manji od p. Odnosno, $u_i^2 < a_i < p$ iz čega slijedi $\frac{u_i}{\sqrt{p}} \in [-1, 1]$, i time je opravdana supstitucija $\varphi_i = \arcsin(\frac{u_i}{\sqrt{p}})$.
Uvodimo nove varijable te prepišemo (1.16) kao

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\beta_3,$$

gdje vrijedi predznak plus za $\varphi_1 < \beta_3$, a predznak minus inače.
Sređivanjem izraza (1.17), vrijedi:

$$\varphi_i = \arcsin(\frac{u_i}{\sqrt{p}}) \Rightarrow \sin\varphi_i = \frac{u_i}{\sqrt{p}},$$

$$\beta_i = \arcsin(\sqrt{\frac{a_i}{p}}) \Rightarrow \cos\beta_i = \cos(\arcsin(\sqrt{\frac{a_i}{p}})) = \sqrt{1-(\sqrt{\frac{a_i}{p}})^2} = \sqrt{1-\frac{a_i}{p}},$$

$$\cos\varphi_i = \cos(\arcsin(\frac{u_i}{\sqrt{p}})) = \sqrt{1-(\frac{u_i}{\sqrt{p}})^2} = \sqrt{1-\frac{u_i^2}{p}}.$$

Dakle, uvrštavanjem u (1.16) imamo da je

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2\cos\varphi_1 = \sin\beta_3,$$

što možemo zapisati kao

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\beta_3.$$

Konačno, imamo jednakost koja opisuje dinamiku lanca kružnica:

$$\varphi_2 = \mid \varphi_1 - \beta_3 \mid . \tag{1.18}$$

Analogno, na sličan način dolazimo do jednakosti

$$\varphi_3 = \mid \varphi_2 - \beta_1 \mid,$$
$$\varphi_1 = \mid \varphi_3 - \beta_2 \mid .$$

Prije nego što proučimo dinamiku ove funkcije primijetimo da brojevi β_i zadovoljavaju nejednakost trokuta, što tvrdi i sljedeća Lema.

Lema 1.4.2. *Neka brojevi* $\beta_i = \arcsin(\sqrt{\frac{a_i}{p}})$ *zadovoljavaju nejednakost* $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$. *Vrijedi*

$$\beta_3 < \beta_1 + \beta_2.$$

Dokaz.

Na početku primijetimo da $\beta_i = \arcsin\sqrt{\frac{a_i}{p}}$ iz čega slijedi da je $\sin\beta_i = \sqrt{\frac{a_i}{p}}$, što pak povlači da je $\sin\beta_i < 1$, za $i = 1, 2, 3$.

Znamo da vrijedi $\cos\beta_i = \cos(\arcsin\sqrt{\frac{a_i}{p}}) = \sqrt{1-(\sqrt{\frac{a_i}{p}})^2}$, te je $\cos^2\beta_i = 1 - \frac{a_i}{p}$. Dodatno, $\sin\beta_i = \sin(\arcsin\sqrt{\frac{a_i}{p}}) = \sqrt{\frac{a_i}{p}}$, te je $\sin^2\beta_i = \frac{a_i}{p}$, za $i = 1, 2, 3$.

Primijetimo sad da je

$$\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p} + \frac{a_3}{p} = 2,$$

ili

$$\sin^2\beta_3 = 2 - \sin^2\beta_1 - \sin^2\beta_2 = 2 - 1 + \cos^2\beta_1 - 1 + \cos^2\beta_2 = \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2.$$

Pretpostavimo da postoji trokut za koji, suprotno tvrdnji Leme 1.4.2, vrijedi $\beta_3 \geq \beta_1 + \beta_2$, odnosno $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \leq 0$.
Možemo zaključiti da u tom slučaju postoji i trokut za koji vrijedi $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$, to jest $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$.
Naime, za jednakostranični trokut vrijedi $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ pa za takav trokut vrijedi $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \geqslant 0$. Neprekidnom deformacijom jednakostraničnog trokuta možemo dobiti trokut za koji smo pretpostavili da vrijedi $\beta_3 \geq \beta_1 + \beta_2$, to jest $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \leq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije koje pojedinom trokutu u postupku transformacije pridružuje vrijednost $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3$, vidimo da se između pozitivne i negativne vrijednosti mora poprimiti i vrijednost $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$.
Tada je

$$\sin\beta_3 = \sin(\beta_1 + \beta_2),$$

pa slijedi

$$\sin^2\beta_3 = (\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_2\cos\beta_1)^2,$$

i zatim

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 = (\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_2\cos\beta_1)^2.$$

Dalje imamo

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 = (1-\cos^2\beta_1)\cos^2\beta_2 + (1-\cos^2\beta_2)\cos^2\beta_1 + 2\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_1\cos\beta_2,$$
$$2\cos^2\beta_1\cos^2\beta_2 = 2\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_1\cos\beta_2,$$

$$\cos\beta_1\cos\beta_2 = \sin\beta_1\sin\beta_2. \tag{1.19}$$

Zbog (1.19) imamo da je $\cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\beta_2 = 0$, to jest $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Dakle, $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ pa je $\sin\beta_2 = \cos\beta_1$ i slijedi

$$\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 = \sin^2\beta_1 + \cos^2\beta_1 = 1,$$

te je konačno

$$\sin^2\beta_3 = 2 - \sin^2\beta_1 - \sin^2\beta_2 = 1,$$

što je proturječje, jer $\sin^2\beta_3 = \frac{a_3}{p} < 1$. □

Dinamika po dijelovima linearne funkcije. Spremni smo proučiti funkciju (1.18). Iako dinamika po dijelovima linearne funkcije može biti veoma kompleksna, naša je dosta jednostavna.
Iterirajući funkciju $\varphi_3 =\mid \varphi_2 - \beta_1 \mid$ tri puta, s vrijednostima indeksa $i = 1, 2, 3$, imamo

$$\begin{aligned} \varphi_3 &=\mid \varphi_2 - \beta_1 \mid, \\ \varphi_1 &=\mid \varphi_3 - \beta_2 \mid=\mid\mid \varphi_2 - \beta_1 \mid - \beta_2 \mid, \\ \varphi_2' &=\mid \varphi_1 - \beta_3 \mid=\mid\mid\mid \varphi_2 - \beta_1 \mid - \beta_2 \mid - \beta_3 \mid . \end{aligned}$$

Proizlazi funkcija $y =\mid\mid\mid x - \beta_1 \mid - \beta_2 \mid \beta_3 \mid$. Skaliramo xy ravninu tako da $\beta_1 = 1$ i prepišemo funkciju kao

$$f(x) =\mid\mid\mid x - 1 \mid - a \mid - b \mid, \tag{1.20}$$

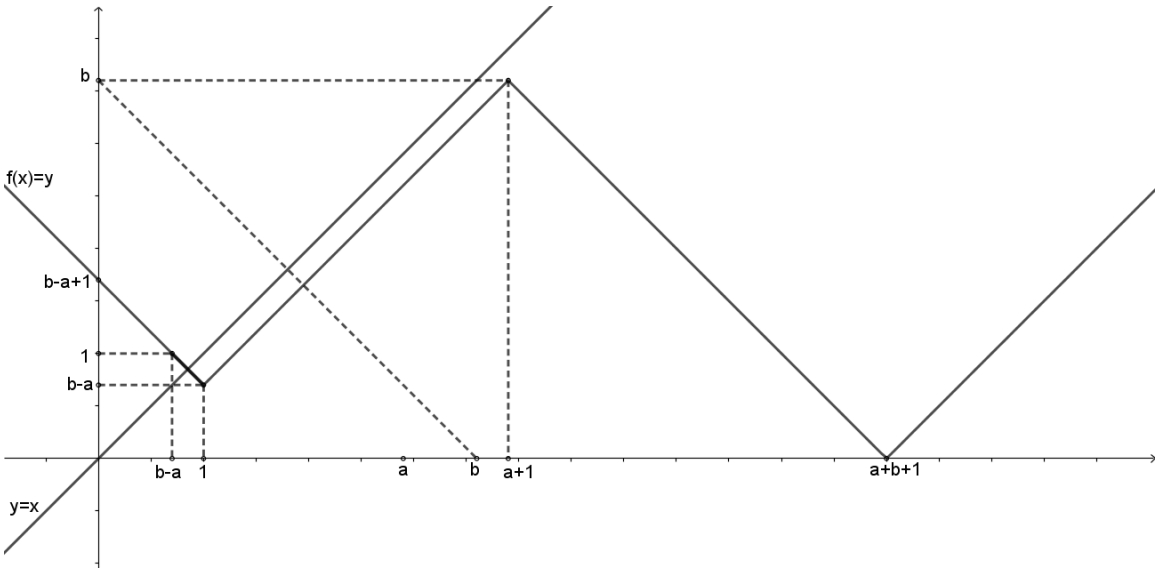
gdje $1 \leq a \leq b$ i $b < a + 1$ (zbog Leme 1.4.2).

Na slici 1.14 prikazan je graf $f(x)$ s označenim karakterističnim točkama.
Pokazat ćemo da je svaka orbita funkcije f u konačnici 2-periodična.

Prvo, promatramo $f(x)$ na segmentu $[0, 1]$.
Dakle, imamo $\mid x - 1 \mid= 1 - x$ i $x + a \geq 1$, pa je $f(x) =\mid\mid 1 - x - a \mid - b \mid=\mid x + a - 1 - b \mid$.
Dalje, $x \leqslant 1$ i $a \leqslant b$, pa imamo $x + a - 1 - b \leqslant 0$ i vrijedi

$$f(x) = -x + b - a + 1 \tag{1.21}$$

na segmentu $[0, 1]$.
Pritom, $f(x) \leqslant b$ na $[0, 1]$, jer $x + a \geq 1$ pa $f(x) = b - (x + a - 1) \leqslant b$.



Slika 1.14: Graf funkcije $y = f(x)$.

Sada promatramo $f(x)$ na segmentu $[1, b]$.
Dakle, na ovom segmentu je $x \geq 1$ pa je $| x - 1 |= x - 1$, iz čega slijedi da je $f(x) =\| x - 1 - a | - b |$. Kako je $x \leqslant b \leqslant a + 1$, pa je $f(x) =| a + 1 - x - b |$.
Dalje, $x \geq 1$ i $a \leqslant b$, pa imamo $x - 1 + b - a \geq 0$ i vrijedi

$$f(x) = x + b - a - 1 \tag{1.22}$$

na segmentu $[1, b]$.
Sada vidimo da je i na segmentu $[1, b]$ vrijedi $f(x) \leqslant b$ jer $x \leqslant b \leqslant a + 1$.

Ovim imamo eksplicitne vrijednosti za $f(x)$ na cijelom $[0, b]$ i vidimo da funkcija f preslikava taj segment sam u sebe (slika 1.14).

Promotrimo $f(x)$ na segmentu $[b, a + 1]$.
Na ovom segmentu je, kao i na segmentu $[1, b]$, $f(x) =\| x - 1 - a | - b |=| -x + 1 + a - b |= x + b - a - 1$. Također, vidimo da zbog $x \leqslant a + 1$ vrijedi $f(x) \leqslant b$ i da je $f(x) < x$ zbog $b < a + 1$.

Na segmentu $[a + 1, a + b + 1]$ vrijedi $f(x) =| x - 1 - a - b |= -x + a + b + 1$, te je također $f(x) \leqslant b$.

Dakle, vidimo da f preslikava sve $x \in [0, a+b+1]$ na segment $[0, b]$.

Promotrimo iteracije funkcije f za $x \geq a+b+1$.
Ako je $x \geq a+b+1$ tada je $f(x) = x-a-b-1$.
Za $x > a+b+1$ vrijedi $f(x) < x$. Dakle, iteracijama se dobiva strogo padajući niz i svakako se postiže da za neki k iteracija $f^k(x)$ bude u $[0, b]$, a daljnjim iteracijama vrijednosti ostaju u tom segmentu.

Preostaje ispitati kako se ponašaju vrijednosti $f^n(x)$ na segmentu $[0, b]$.
Neka je rastav segmenta $[0, b] = [0, b-a] \cup [b-a, 1] \cup [1, b]$ i označimo

$$I_1 = [0, b-a], \quad I_2 = [b-a, 1], \quad I_3 = [1, b].$$

Na segmentu $[b-a, 1]$ je $f(x) = -x+b-a+1$ pa je

$$f(f(x)) = ||| -x+b-a+1-1 \mid -a \mid -b \mid = ||| -x+b-a \mid -a \mid -b \mid .$$

Zbog $x \geq b-a$ dalje imamo

$$f(f(x)) = || x-b+a-a \mid -b \mid = || x-b \mid -b \mid = \mid b-x-b \mid = x.$$

Ovime smo pokazali da za sve $x \in [b-a, 1]$ vrijedi $f^2(x) = x$, to jest da je f 2-periodička na tom segmentu.

Preostaje pokazati da se iteracijom f cijeli segment $[0, b]$ preslika u $[b-a, 1]$. Potrebnim iteracijama bit će određen pretperiod, a zatim će slijediti period 2.

Na segmentu $[0, b-a]$ je $f(x) = -x+b-a+1$. Uočimo da f preslika $[0, b-a]$ u $[1, b-a+1]$, a taj segment je sadržan u $[1, b]$.
Stoga je dovoljno pokazati da se iteracijama funkcije f svaka točka segmenta $[1, b]$ preslika u neku točku segmenta $[b-a, 1]$.

Na segmentu $[1, b]$ vrijedi $f(x) = x+b-a-1 = x-(a+1-b)$.
Duljina segmenta $[b-a, 1]$ iznosi $a+1-b$. Označimo $a+1-b = d$ pa je tada $f(x) = x-d$ na $[1, b]$. Znamo da $0 < d < 1$.
Vidimo da svaka iteracija od f "odsiječe" s lijeva segment duljine $a+1-b$ od intervala I_3 i "pošalje" ga u I_2, što znači da smo prvom iteracijom f podsegment $[1, a-b+2] \subseteq I_3$ preslikali u I_2.
Stoga, funkcija f preslika $[1, b]$ u $[b-a, 2b-a-1]$ (pri čemu je $2b-a-1 < b$).
Sad, ako je $2a-b-1 \leqslant 1$, onda smo gotovi s dokazom jer je dovoljna jedna iteracija da se cijeli I_3 preslika unutar I_2. Ako je pak $2a-b-1 > 1$, opet djelujemo s f.

Dalje, treba ponoviti primjenu f, sada na preostali dio od I_3, a to je $[2 + a - b, b]$. Njega najprije f preslika u $[1, 2b - a - 1]$, a onda ponovna primjena f preslika ovaj segment u $[b - a, 3b - 2a - 2]$. Sad, ako je $3a - 2b - 2 \leqslant 1$, onda smo gotovi s dokazom jer su dovoljne dvije iteracije da se cijeli I_3 preslika unutar I_2. U protivnom, dalje djelujemo s f.
Pomoću dvije iteracije dio $[1, 2a - 2b + 3] \subseteq I_3$ preslika u I_2.

Vidimo da dobivamo niz točaka $x_1 = a-b+2, x_2 = 2a-2b+3, \ldots, x_k = ka-kb+k+1, \ldots$ takvih da k-ta iteracija funkcije f preslika $[1, x_k]$ u $[b - a, 1]$.
Za dovoljno veliki k postići će se $x_k \geq b$, jer $ka - kb + k + 1 \geq b$ ekvivalentno je s $k(a - b + 1) \geq b - 1$, dakle $k \geq \frac{b-1}{a-b+1}$. Kako je ovo omjer pozitivnih brojeva pa postoji takav k, te se u konačnom broju koraka može preslikati cijeli I_3 u I_2.

□

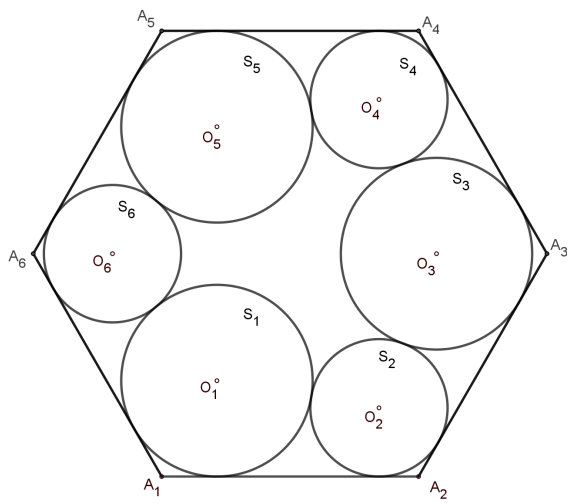
Poglavlje 2

Poopćenja teorema o šest kružnica

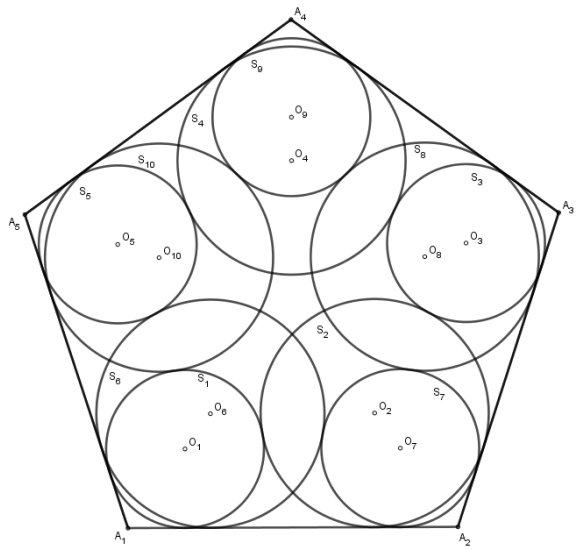
2.1 Poligoni i kružnice

Dobri poligoni

Pitanje koje se sada prirodno nameće je može li se teorem o šest kružnica proširiti na druge n-terokute. Primjerice, ako je P pravilni n-terokut s vrhovima $A_1, A_2, ..., A_n$ tada, zbog simetričnosti, kružnice S_{i-1} i S_{i+1} se podudaraju za sve $i = 1, 2, ..., n$. Slijedi da za takav pravilni n-terokut imamo da se S_1 podudara s S_{n+1} za paran n (slika 2.1) i S_1 podudara s S_{2n+1} za neparan n (slika 2.2).



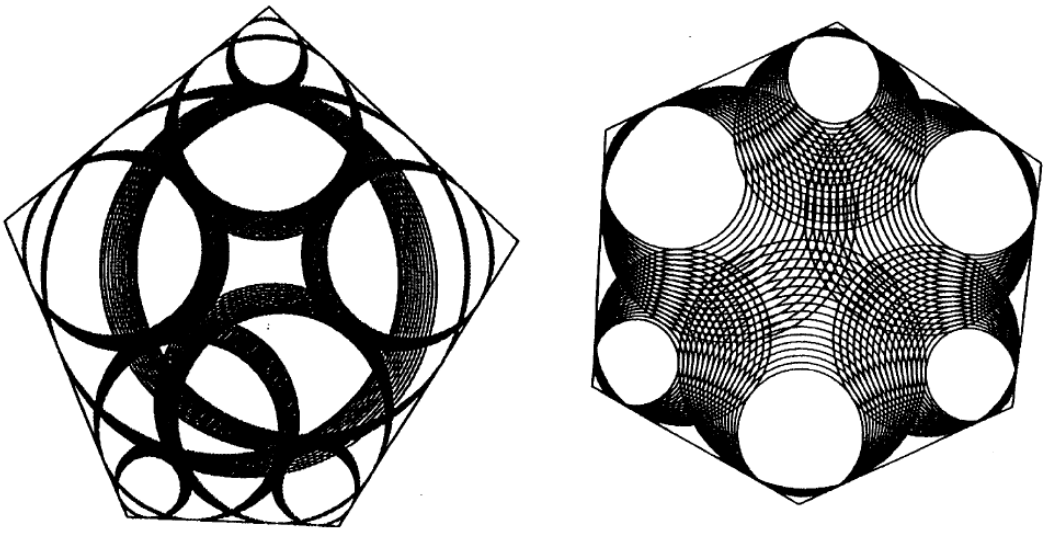
Slika 2.1: Periodičke šestorke kružnica za pravilni šesterokut.



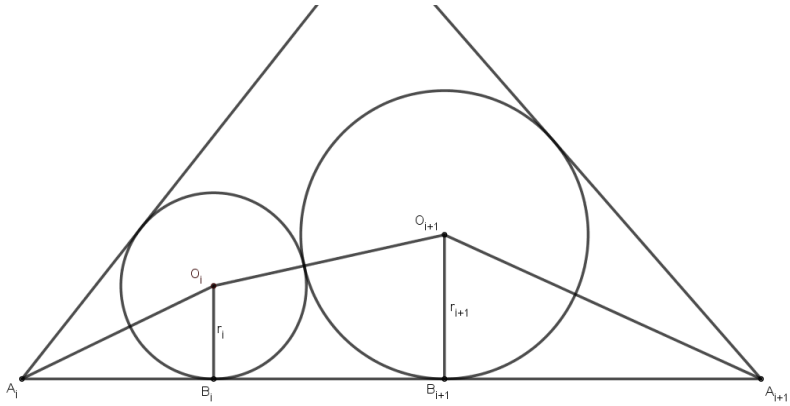
Slika 2.2: Periodičke desetorke kružnica za pravilni peterokut.

Međutim, pokazuje se da se periodičnost može izgubiti već i malim odstupanjima od pravilnosti poligona. Dva takva primjera ilustrirana su slikom 2.3 (preuzeto iz [4]).
Dakle, periodičnost ne vrijedi općenito kod n-terokuta za $n > 3$, no pokazat ćemo da periodičnost ipak postoji za određenu klasu nepravilnih n-terokuta.
Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ vrhovi konveksnog mnogokuta P, neka je $2\alpha_i$ unutarnji kut u vrhu A_i i neka je $a_i = | A_iA_{i+1} |$. Kao i prije, upišemo kružnicu S_1 u kut pri vrhu A_i, sljedeću kružnicu S_2 upišemo u kut pri vrhu A_2 tako da dodiruje S_1, i nastavljamo ciklički. Neka je O_i središte i r_i radijus kružnice S_i. Kako bi jednoznačno zadali pravilo izbora kružnice u svakom sljedećem koraku, pretpostavljamo da ortogonalne projekcije B_i i B_{i+1} središta O_i i O_{i+1} na pravac A_iA_{i+1} leže na segmentu A_iA_{i+1}, te da je B_i bliže A_i nego B_{i+1} (slika 2.4).

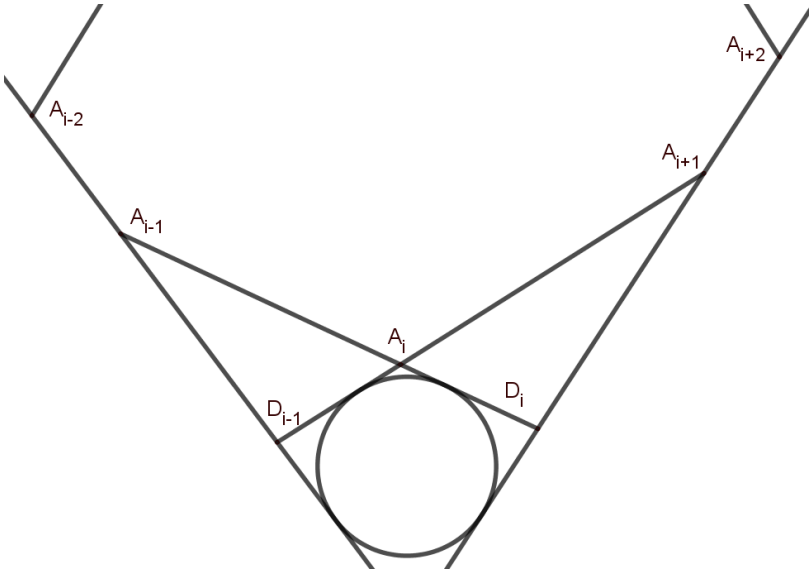
Opisat ćemo sada klasu n-terokuta na koju će se moći proširiti teorem o periodičkom nizu kružnica.
Budući da ključno svojstvo poligona te klase ima dosta složenu formulaciju, iz praktičnih razloga takve poligone nazvat ćemo *dobrim* poligonima (u [4] naziv glasi "*nice n-gons*").
Pretpostavimo da je $n \geq 5$, i $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \frac{\pi}{2}$ za sve $i = 1, 2, ..., n$. Neka je D_i sjecište pravaca $A_{i-1}A_i$ i $A_{i+1}A_{i+2}$. Promatrajući sliku 2.5, razmatramo kružnice pripisane trokutima $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ i $A_iA_{i+1}D_i$ koje dodiruju stranice A_iD_{i-1} i A_iD_{i-1}, tim redom. Ako se ove kružnice podudaraju za svaki i, kažemo da je n-terokut *dobar*.



Slika 2.3: Periodičnost je narušena za neke n-terokute.



Slika 2.4: Određivanje svake sljedeće kružnice.



Slika 2.5: Prikaz svojstva *dobrih* poligona.

Teorem o poligonima i kružnicama

Naš je sljedeći cilj dokazati Teorem 2.1.1.

Teorem 2.1.1. *Neka je P dobar n-terokut.*

i) Ako je n neparan tada je niz kružnica S_i 2n-periodičan: $S_1 = S_{2n+1}$.

ii) Ako je n paran, pretpostavimo da

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{1 - \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2} + 1)^{(-1)^i} = 1; \tag{2.1}$$

tada je niz kružnica S_i n-periodičan: $S_1 = S_{n+1}$.

Uočimo da je za neparne vrijednosti $n \geq 5$ uvjet pripadnosti klasi *dobrih* poligona dovoljan za periodičnost niza kružnica S_i, dok je za parne vrijednosti n potreban još jedan dodatni uvjet.
Za dokaz Teorema 2.1.1 bit će nam važna karakterizacija *dobrih* poligona iskazana sljedećim teoremom.

Teorem 2.1.2. *n-terokut je dobar ako i samo ako postoji konstanta $\rho > 0$ takva da*

$$a_i = \rho^2(\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1), \tag{2.2}$$

za sve i.

Dokaz.

Primijetimo da $\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} > 1$ jer je poligon *dobar* i vrijedi $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \frac{\pi}{2}$.

Razmotrimo pripisane kružnice trokuta $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ na slici 2.6; neka je r njihov radijus. Iz pravokutnog trokuta OEA_i, s pravim kutom pri vrhu E, imamo da je $\cot\alpha_i = \frac{|EA_i|}{r}$, iz čega slijedi

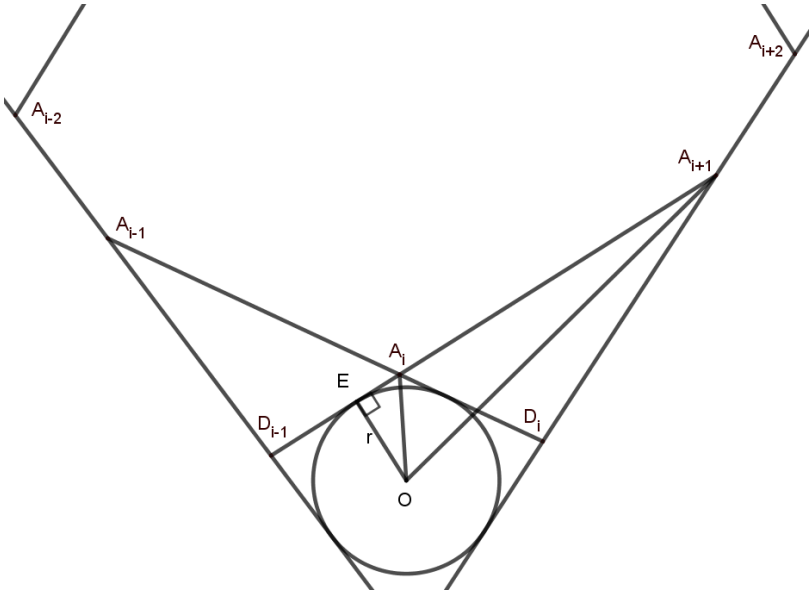
$$| EA_i |= r \operatorname{ctg}\alpha_i.$$

Analogno, iz pravokutnog trokuta OEA_{i+1} imamo da je

$$| EA_{i+1} |= r \operatorname{tg}\alpha_{i+1}.$$

Nadalje, $a_i =| A_iA_{i+1} |$, $| EA_{i+1} |=| EA_i | + | A_iA_{i+1} |$ te iz toga slijedi

$$|EA_{i+1}| = r \operatorname{tg}\alpha_{i+1} = r \operatorname{ctg}\alpha_i + a_i.$$



Slika 2.6: Slika za dokaz teorema o *dobrim* poligonima.

Dakle,

$$\begin{aligned} r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} &= r \operatorname{ctg} \alpha_i + a_i \\ r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} &= r \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} + a_i \\ r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i &= r + a_i \operatorname{tg} \alpha_i \\ r(\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1) &= a_i \operatorname{tg} \alpha_i \\ \frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} &= \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha_i}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Slično, neka je r' radijus pripisane kružnice trokutu $A_{i-1}A_iD_{i-1}$; tada imamo da vrijedi

$$\frac{a_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i-1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} = \frac{r'}{\operatorname{tg} \alpha_i}. \tag{2.4}$$

Poligon je *dobar* ako i samo ako se pripisane kružnice trokutima $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ i $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ podudaraju, tj. ako je $r = r'$, tada izjednačavanjem i uvrštavanjem (2.3) i (2.4) imamo

$$\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha_i} = \frac{r'}{\operatorname{tg} \alpha_i} = \frac{a_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i-1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} = \frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1}. \tag{2.5}$$

Odavde zaključujemo da izraz $\frac{a_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_i - 1}$ ne ovisi o i, to jest da je on konstantan.
Ovime smo dokazali uvjet teorema, jednakost (2.2), te kao što smo i tvrdili vrijedi

$$\frac{a_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_i - 1} = \rho^2$$
$$a_i = \rho^2(\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1).$$

□

Sad prelazimo na dokaz Teorema 2.1.1.

Dokaz.

Slično, kao u dokazu teorema o šest kružnica, izrazit ćemo duljine stranica poligona pomoću kutova i radijusa upisanih kružnica.
Promotrimo još jednom sliku 2.4.
Sa slike vidimo da je duljina stranice poligona

$$|A_iA_{i+1}| = a_i = |A_iB_i| + |B_iB_{i+1}| + |B_{i+1}A_{i+1}|. \tag{2.6}$$

Ako se dvije kružnice radijusa r_i i r_{i+1}, središta O_i i O_{i+1}, dodiruju izvana (slika 2.4) tada je duljina $\overline{O_iO_{i+1}} = r_i + r_{i+1}$. Duljina njihova zajedničkog dijela na stranici, odnosno duljina segmenta $\overline{B_iB_{i+1}}$ je

$$|B_iB_{i+1}|^2 = |O_iO_{i+1}|^2 - |O_{i+1}F|^2 = (r_i + r_{i+1})^2 - (r_{i+1} - r_i)^2 = 4r_ir_{i+1}$$
$$|B_iB_{i+1}| = \sqrt{4r_ir_{i+1}} = 2\sqrt{r_ir_{i+1}}.$$

Uočimo pravokutan trokut $A_iB_iO_i$, s pravim kutom pri vrhu B_i. Iz tog trokuta imamo da je $\operatorname{ctg}\alpha_i = \frac{|A_iB_i|}{r_i}$, odnosno $|A_iB_i| = r_i \operatorname{ctg}\alpha_i$. Analogno, iz pravokutnog trokuta $A_{i+1}¸O_{i+1}B_{i+1}$ imamo da je $|A_{i+1}B_{i+1}| = r_{i+1}\operatorname{ctg}\alpha_{i+1}$.
Uvrštavanjem u (2.6) imamo:

$$a_i = r_i \operatorname{ctg}\alpha_i + 2\sqrt{r_ir_{i+1}} + r_{i+1}\operatorname{ctg}\alpha_{i+1}. \tag{2.7}$$

Sada uvodimo nove varijable, neka je

$$u_i = \sqrt{r_i \operatorname{ctg}\alpha_i}, \quad e_i = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}, \quad c_i = \sqrt{a_i};$$

imajmo na umu da je $e_i > 1$.
Jednadžba (2.7) sada glasi

$$u_i^2 + 2e_iu_iu_{i+1} + u_{i+1}^2 = c_i^2. \tag{2.8}$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti eksplicitno pomoću hiperboličkih trigonometrijskih funkcija.

Nadopunimo (2.8) do punog kvadrata na dva načina te imamo

a)

$$\begin{aligned} u_i^2 + 2e_iu_iu_{i+1} + u_{i+1}^2 + e_i^2u_{i+1}^2 &= c_i^2 + e_i^2u_{i+1}^2 \\ (u_i + e_iu_{i+1})^2 &= c_i^2 + e_i^2u_{i+1}^2 - u_{i+1}^2 \\ (u_i + e_iu_{i+1})^2 &= c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_{i+1}^2 \\ u_i + e_iu_{i+1} &= \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_{i+1}^2} \\ u_i^2 + e_iu_{i+1}u_i &= u_i\sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_{i+1}^2}, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_i^2 + 2e_iu_iu_{i+1} + u_{i+1}^2 + e_i^2u_i^2 &= c_i^2 + e_i^2u_i^2 \\ (u_{i+1} + e_iu_i)^2 &= c_i^2 + e_i^2u_i^2 - u_i^2 \\ (u_{i+1} + e_iu_i)^2 &= c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_i^2 \\ u_{i+1} + e_iu_i &= \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_i^2} \\ u_{i+1}^2 + e_iu_{i+1}u_i &= u_{i+1}\sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_i^2}. \end{aligned}$$

Sada (2.8) možemo zapisati kao

$$u_i^2 + 2e_iu_iu_{i+1} + u_{i+1}^2 = (u_i^2 + e_iu_iu_{i+1}) + (u_{i+1}^2 + e_iu_iu_{i+1}) = c_i^2$$

$$u_i\sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_{i+1}^2} + u_{i+1}\sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1)u_i^2} = c_i^2. \tag{2.9}$$

Uzimajući u obzir da je $c_i = \sqrt{a_i}$ možemo zapisati c_i^2 kao

$$c_i^2 = a_i = \rho^2(\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1) = \rho^2(e_i^2 - 1),$$

te množeći (2.9) s $\frac{1}{c_i\rho}$, imamo

$$\frac{u_i}{\rho}\sqrt{\frac{c_i^2}{c_i^2}+\frac{(e_i^2-1)u_{i+1}^2}{c_i^2}}+\frac{u_{i+1}}{\rho}\sqrt{\frac{c_i^2}{c_i^2}+\frac{(e_i^2-1)u_i^2}{c_i^2}}=\frac{c_i^2}{c_i\rho}$$

$$\frac{u_i}{\rho}\sqrt{1+\frac{(e_i^2-1)u_{i+1}^2}{\rho^2(e_i^2-1)}}+\frac{u_{i+1}}{\rho}\sqrt{1+\frac{(e_i^2-1)u_i^2}{\rho^2(e_i^2-1)}}=\frac{c_i}{\rho}$$

$$\frac{u_i}{\rho}\sqrt{1+\frac{u_{i+1}^2}{\rho^2}}+\frac{u_{i+1}}{\rho}\sqrt{1+\frac{u_i^2}{\rho^2}}=\frac{c_i}{\rho}. \tag{2.10}$$

(2.11)

Neka je $x_i = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{u_i}{\rho})$ gdje $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Sada (2.11) možemo zapisati kao

$$\mathrm{sh}\, x_i\, \mathrm{ch}\, x_{i+1} + \mathrm{sh}\, x_{i+1}\, \mathrm{ch}\, x_i = \frac{c_i}{\rho},$$

$$\text{ili} \quad \mathrm{sh}(x_i + x_{i+1}) = \frac{c_i}{\rho}. \tag{2.12}$$

Iz čega slijedi

$$x_i + x_{i+1} = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho})$$

$$x_{i+1} = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}) - x_i. \tag{2.13}$$

Označimo obitelj kružnica upisanih u i-ti kut poligona P s $\mathcal{F}_i$.
Imamo funkciju $T_i\colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$ koja preslikava S_i u S_{i+1}. Možemo koristiti x_i kao koordinate u $\mathcal{F}_i$; tada je (2.12) refleksija

$$T_i(x_i) = x_{i+1} = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}) - x_i.$$

Iz ovog slijedi tvrdnja teorema. Promatrat ćemo dva slučaja, kada je n neparan i kada je n paran.

Ako je n neparan tada je preslikavanje $T_nT_{n-1}\cdots T_1\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ refleksija. Naime, označimo $b_i = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho})$, te $T_i(x_i) = x_{i+1} = b_i - x_i$.
Tada je

$$
\begin{aligned}
&T_1(x_1) = b_1 - x_1 = x_2\\
&T_2T_1(x_1) = T_2(x_2) = T_2(b_1 - x_1) = b_2 - (b_1 - x_1) = b_2 - b_1 + x_1 = x_3\\
&T_3T_2T_1(x_1) = T_3(x_3) = T_3(b_2 - b_1 + x_1) = b_3 - (b_2 - b_1 + x_1) = b_3 - b_2 + b_1 - x_1\\
&\dots\\
&T_{n-1}T_{n-2}\dots T_2T_1(x_1) = T_{n-1}(x_{n-1}) = b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + b_2 - b_1 + x_1 = x_n\\
&T_nT_{n-1}\dots T_2T_1(x_1) = T_n(x_n) = b_n - b_{n-1} + \cdots - b_2 + b_1 - x_1
\end{aligned}
$$

Promotrimo drugo ponavljanje tog preslikavanja:

$$
\begin{aligned}
&T_1T_nT_{n-1}\dots T_2T_1(x_1) = b_1 - (b_n - b_{n-1} + \cdots - b_2 + b_1 - x_1) = b_1 - b_n + b_{n-1} - \cdots + b_2 - b_1 + x_1\\
&= -b_n + b_{n-1} + \cdots - b_3 + b_2 + x_1\\
&T_2T_1T_n\dots T_2T_1(x_1) = b_2 - (-b_n + b_{n-1} + \cdots - b_3 + b_2 + x_1) = b_n - b_{n-1} + \cdots - b_4 + b_3 - x_1\\
&T_3T_2T_1T_n\dots T_2T_1(x_1) = b_3 - (b_n - b_{n-1} + \cdots - b_4 + b_3 - x_1) = -b_n + b_{n-1} - \cdots + b_4 + x_1\\
&\dots\\
&T_{n-1}T_{n-2}\dots T_1T_nT_{n-1}\dots T_1 = b_{n-1} - (-b_n + b_{n-1} + x_1) = b_n - x_1\\
&T_nT_{n-1}\dots T_1T_nT_{n-1}\dots T_1 = b_n - (b_n - x_1) = x_1.
\end{aligned}
$$

Odavde zaključujemo da se drugim ponavljanjem preslikavanja dobiva identiteta te je za slučaj kada je n neparan naš niz kružnica $2n$-periodičan.

Ako je n paran tada je preslikavanje translacija

$$T_nT_{n-1}\dots T_1(x_1) = b_n - b_{n-1} + \cdots + b_2 - b_1 + x_1.$$

S obzirom na to da je $b_i = \mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho})$, imamo

$$x_1 \to x_1 + \sum(-1)^i\,\mathrm{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}). \tag{2.14}$$

Raspišemo sumu u (2.14) te vratimo supstitucije.
Prisjetimo se da za $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ vrijedi da je $\mathrm{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Sada sumu u (2.14)

možemo zapisati kao

$$\sum(-1)^i \operatorname{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}) = \sum(-1)^i \ln(\frac{c_i}{\rho} + \sqrt{1 + (\frac{c_i}{\rho})^2}). \tag{2.15}$$

Imamo da je $a_i = \rho^2(\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1)$ te iz toga slijedi da je $\frac{\sqrt{a_i}}{\rho} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1}$. Budući da je $c_i = \sqrt{a_i}$ tada je $\frac{c_i}{\rho} = \frac{\sqrt{a_i}}{\rho} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1}$.
Sumu iz (2.15) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\sum(-1)^i \operatorname{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}) &= \sum(-1)^i \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{1 + (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1})^2}) \\
&= \sum(-1)^i \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1}) \\
&= \sum(-1)^i \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}) \\
&= \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}) - \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3}) \\
&+ \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4}) - \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5}) \\
&+ \cdots + \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n}) - \ln(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1}) \\
&= \ln(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3}}) + \ln(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5}}) \\
&+ \cdots + \ln(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1}}) \\
&= \ln[\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5}} \\
&\cdots\cdots \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1}}] \\
&= \ln[\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}})^{(-1)^i}].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Promotrimo sada pretpostavku teorema za paran n, (2.1).

Izraz $\sqrt{1-\operatorname{ctg}\alpha_i \operatorname{ctg}\alpha_{i+1}}+1$ možemo zapisati i kao

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\operatorname{ctg}\alpha_i \operatorname{ctg}\alpha_{i+1}}+1 &= \sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}}+1\\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}}+1\\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}}.\end{aligned}$$

Sada umnožak iz pretpostavke teorema možemo zapisati kao

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{1-\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2}+1)^{(-1)^i}=\prod_{i=1}^{n}(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}})^{(-1)^i}$$

odnosno,

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{1-\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2}+1)^{(-1)^i}= \tag{2.17}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}})^{(-1)^i}\cdot\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}})^{(-1)^i}=1.$$

Primijetimo da je

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}}})^{(-1)^i}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5}{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4}\cdot\ldots\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha_{n-2} \operatorname{tg}\alpha_{n-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{n-3} \operatorname{tg}\alpha_{n-2}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha_n \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n}}=1. \tag{2.18}$$

Uvrštavanjem (2.18) u (2.17) imamo

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}+\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1})}^{(-1)^i}=1. \tag{2.19}$$

Preostaje još da uvrstimo (2.19) u (2.16)

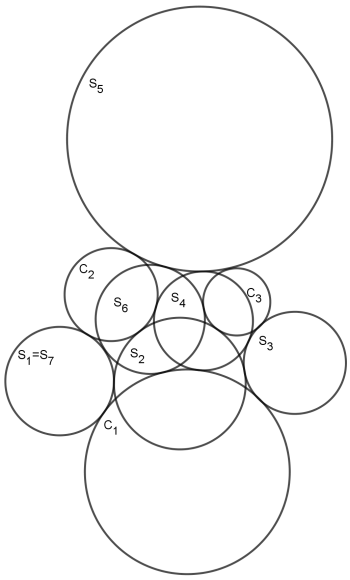
$$\begin{aligned}\sum(-1)^i \operatorname{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}) &= \ln[\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}-1}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_{i+1}})^{(-1)^i}]\\ &= \ln 1 = 0\end{aligned}$$

S obzirom na (2.2), poništavanje alternirajuće sume u (2.14) ekvivalentno je pretpostavci (2.1). Time je dokaz završen. □

2.2 Teorem o devet kružnica

Nakon što su otkrili *teorem o šest kružnica*, C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts i J. A. Tyrrell krenuli su s daljnjim istraživanjem tražeći poopćenja tog teorema. Preciznim su crtanjem zamijenili svaku stranicu trokuta s kružnicom te otkrili da je općenitiji rezultat, *Teorem o devet kružnica*, također istinit.

Teorem 2.2.1. ***Teorem o devet kružnica.***
Neka su C_1, C_2 i C_3 tri kružnice u općem položaju u ravnini i neka je S_1 kružnica koja dodiruje C_1 i C_2. Promotrimo sada lanac kružnica: S_2 je kružnica koja dodiruje kružnice C_2, C_3 i S_1; S_3 je kružnica koja dodiruje kružnice C_3, C_1 i S_2; S_4 je kružnica koja dodiruje kružnice C_1, C_2 i S_3; S_5 je kružnica koja dodiruje kružnice C_2, C_3 i S_4; S_6 je kružnica koja dodiruje kružnice C_3, C_1 i S_5; S_7 je kružnica koja dodiruje kružnice C_1, C_2 i S_6. Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, ali ako je u svakom koraku kružnica dobro odabrana, tada se kružnica S_7 podudara s prvom kružnicom S_1 i imamo zatvoren lanac kružnica (slika 2.7).



Slika 2.7: Teorem o devet kružnica.

Kada se lanac *zatvori* na ovaj način, devet kružnica $C_1, C_2, C_3, S_1, \ldots, S_6$ formiraju simetričan sustav tako da svaka kružnica dodiruje četiri ostale. Moguće je poredati oznake devet kružnica u skupine tri po tri tako da se dvije kružnice dodiruju ako i samo ako su njihove oznake u istom retku ili stupcu u tablici 2.1.

C_1	C_2	C_3
S_5	S_3	S_1
S_2	S_6	S_4

Tablica 2.1: Dvije se kružnice dodiruju ako i samo ako su im oznake u istom retku ili stupcu tablice.

Sada ćemo opisati što je *dobar* odabir kružnice spomenut u teoremu 2.2.1.
Prvo, za tri dane kružnice u općem položaju može se opisati osam kružnica koje dodiruju sve tri. (Ovo je tvrdnja glasovitog *Apolonijevog problema*.) Kada se ipak dvije od tri dane kružnice već dodiruju, ovaj broj se smanjuje na šest kružnica od kojih se dvije kružnice broje dvostruko i četiri jednostruko. Primjerice, s oznakama kao u teoremu 2.2.1, postoje dvije kružnice iz pramena kružnica određenih s C_2 i S_1 koje također dodiruju i C_3, i one su dva od mogućih šest odabira za S_2. Ova dva izbora broje se dvostruko i nazvat ćemo ih *posebni* izbori za S_2. Ostala četiri izbora nazvat ćemo *općeniti* izbori. Slična razlika između posebnih i općenitih izbora pojavljuje se u svakoj sljedećoj fazi konstrukcije lanca.

Definirat ćemo centar sličnosti dviju kružnica.

Definicija 2.2.2. *Točka u kojoj se sijeku dvije zajedničke vanjske tangente dviju kružnica zove se centar sličnosti danih kružnica.*

Drugo, ako je kružnica S nacrtana tako da dodiruje dvije dane kružnice, tada dužina koja spaja dvije točke dodira nužno prolazi kroz jedan od centara sličnosti danih kružnica i možemo reći da S pripada tom centru sličnosti. Prema tome, za šest mogućih izbora za S_2 u našem lancu, tri izbora (jedna poseban i dva opća) pripadaju svakom centru sličnosti od C_2 i C_3.
Konačno, centri sličnosti tri kružnice, gledano u parovima, su šest vrhova potpunog četverokuta.
S ovim činjenicama, možemo precizirati iskaz teorema 2.2.1:

Odaberemo tri kolinearna centra sličnosti (jedan za svaki par C_1, C_2 i C_3), i držimo se pravila da u svakoj fazi konstrukcije lanca, kružnica S_i pripada jednom odgovarajućem centru od fiksnih centara sličnosti. Ako u svakom koraku konstrukcije uvijek odaberemo poseban izbor za S_i tada će se lanac zatvoriti. S druge strane, ako u svakoj fazi odaberemo općeniti izbor, i ako su S_2, S_3 i S_4 izabrane po volji, tada je uvijek moguće izabrati S_5 i S_6 tako da se lanac zatvori.

Posljedica je ovih razmatranja da, za dani položaj kružnice S_1, postoji sveukupno osamnaest lanaca koji se zatvaraju, od kojih su dva *posebna* i šesnaest *općenitih*.

Teorem 2.2.1 je prvi dokazao J. A. Tyrrell zajedno sa svojim studentom M. T. Powellom, koristeći eliptičke funkcije. Dokaz ovdje nećemo izložiti jer metoda eliptičkih funkcija prelazi okvire ovog rada. Dokazi se mogu naći u [3] i [6].

Bibliografija

[1] D. Ivanov i S. Tabachnikov, *The six circles theorem revisited*, The American Mathematical Monthly **123** (2016), br. 7, 689–698.

[2] M. J. Laird i J. R. Silvester, *John Alfred Tyrrell, 1932–1992*, Bulletin of the London Mathematical Society **43** (2011), br. 2, 401–405.

[3] J. Snape, *Applications of elliptic functions in classical and algebraic geometry*, (2004), dostupno na `https://wwwx.cs.unc.edu/~snape/publications/mmath/dissertation.pdf` (travanj 2019.).

[4] S. Tabachnikov, *Going in circles: variations on the Money-Coutts theorem*, Geometriae Dedicata **80** (2000), br. 1-3, 201–209.

[5] J. A. Tyrrell, *Cecil John Alvin Evelyn*, Bulletin of the London Mathematical Society **9** (1977), br. 3, 328–329.

[6] J. A. Tyrrell i M. T. Powell, *A theorem in circle geometry*, Bulletin of the London Mathematical Society **3** (1971), br. 1, 70–74.

Sažetak

U ovom radu prikazan je manje poznat teorem elementarne geometrije, *Teorem o šest kružnica*, i neke njegove generalizacije. Ovaj teorem jedan je od mnogih u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"* koja je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a, i J. A. Tyrrell-a.

Prvo poglavlje sadrži kratku povijest podrijetla teorema o šest kružnica i dvije različite formulacije te njihove dokaze. Razmatraju se lanci kružnica upisanih u dani trokut $P_1P_2P_3$: prva kružnica, C_1, upisana je u kut pri vrhu P_1; C_2, upisana je u kut pri vrhu P_2 i dodiruje kružnicu, C_1; C_3, upisana je u kut pri vrhu P_3 i dodiruje C_2; i tako dalje, ciklički. Tvrdnja je teorema da je ovaj postupak periodičan, to jest, $C_7 = C_1$. Prva formulacija teorema razmatra samo lance kružnica kojima sve dodirne točke leže na stranicama trokuta, a ne na njihovim produžetcima, te je u ovom slučaju lanac 6-periodičan. Nadalje, promatraju se lanci kružnica u kojima sljedeća kružnica u lancu može dodirivati stranicu trokuta, ali i produžetak te stranice. Pokazuje se da je, općenito, lanac konačno 6-periodičan, ali može imati proizvoljno dug pretperiod.

U drugom poglavlju razmatra se mogućnost poopćenja teorema o šest kružnica i na druge poligone, osim trokuta. Dokazuje se da postoji klasa nepravilnih n-terokuta za koje je sačuvana periodičnost. Konačno, razmatra se zanimljiva varijacija glavnog teorema, kada su stranice trokuta zamijenjene kružnicama. Tyrrell i Powell dokazali su da je i tada sačuvana 6-periodičnost.

Summary

The topic of this graduate thesis is one of lesser known gems of elementary geometry, *The six circles theorem*, and some of its generalizations. This theorem is one of many theorems in the book *"The seven circles theorem and other new theorems"* which is a result of collaboration of three geometry enthusiasts, C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts, and J. A. Tyrrell.

The first chapter contains a short history of The six circles theorem's origins and two different forms and proofs of it. The theorem concerns chains of circles inscribed in a given triangle $P_1P_2P_3$: the first circle, C_1, inscribed in the first angle at P_1; C_2, inscribed in the angle at P_2 and tangent to the circle C_1; C_3, inscribed in the angle at P_3 and tangent to C_2, and so on, cyclically. The claim of the theorem is that this process is periodic, that is, $C_7 = C_1$. The first form of the theorem holds for a chain of circles for which all tangency points lie on the sides of the triangle, and not their extensions. Secondly, chains of circles are observed for which the next circle can be tangent to a side of the triangle but also to its extension. It is proven that, in general, the chain is eventually 6-periodic but may have an arbitrarily long pre-period.

In the second chapter it is investigated whether The six circles theorem extends to polygons other than triangles. It is shown that there is a subclass of irregular n-gons for which periodicity holds. Finally, an interesting variation of the main theorem is considered, where the sides of a triangle are replaced by circles. It was proven by Tyrrell and Powell that the 6-periodicity persists even then.

Životopis

Rođena sam 27.12.1992. u Splitu. Odrasla sam u Jelsi na otoku Hvaru.

Nakon osnovne škole, koju sam pohađala do 2007. godine, upisala sam opću gimnaziju u Jelsi, u kojoj sam maturirala 2011. godine. Iste godine započela sam sa studiranjem upisom preddiplomskog sveučilišnog studija Matematike, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. U srpnju 2015. godine stekla sam diplomu prvostupnice matematike. Nakon stjecanja diplome prvostupnice upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.