

# Periodičke šestorke kružnica

---

**Plenković, Petra**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:043163>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Petra Plenković

**PERIODIČKE ŠESTORKE KRUŽNICA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2019

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Teorem o šest kružnica</b>	<b>2</b>
1.1 Uvod u iskaz teorema . . . . .	2
1.2 Prva formulacija teorema o šest kružnica . . . . .	4
1.3 Preciziranje iskaza teorema . . . . .	10
1.4 Druga formulacija teorema o šest kružnica . . . . .	14
<b>2 Poopćenja teorema o šest kružnica</b>	<b>26</b>
2.1 Poligoni i kružnice . . . . .	26
2.2 Teorem o devet kružnica . . . . .	37
<b>Bibliografija</b>	<b>40</b>

# Uvod

Promatramo trokut  $P_1P_2P_3$  u koji upišemo niz kružnica tako da je prva kružnica  $C_1$  upisana u kut pri vrhu  $P_1$ ; druga kružnica  $C_2$  upisana u kut pri vrhu  $P_2$  i dodiruje  $C_1$ ;  $C_3$ , upisana u kut pri vrhu  $P_3$  i dodiruje  $C_2$ ;  $C_4$ , upisana u kut pri vrhu  $P_1$  i dodiruje  $C_3$ , i tako dalje. Uz još neke dodatne uvjete, ovakvi nizovi pokazuju svojstvo periodičnosti te je ovaj postupak periodičan s periodom šest.

Teorem je poznat pod nazivom *Teorem o šest kružnica* i jedan je od mnogih koji se nalaze u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"*. Knjiga je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a i J. A. Tyrrell-a. U ovom radu prikazat ćemo različite varijante i neka poopćenja ovog teorema.

U prvom poglavlju precizno ćemo izreći dvije različite formulacije teorema o šest kružnica i dokazati ih. Najprije se razmatraju samo nizovi ili "lanci" kružnica kojima su sva dirališta unutar stranica i tada se sedma kružnica u nizu podudara s prvom, [3]. Zatim se promatra općenitiji slučaj kada se dirališta mogu nalaziti i na produžetcima stranica te tada periodičkoj šestorci može prethoditi preperiod po volji zadane duljine, [1].

Prirodno se nameće pitanje mogućih poopćenja ovog teorema. Primjerice, umjesto trokuta može se promatrati  $n$ -terokut  $A_1A_2 \dots A_n$  u koji se upisuje niz kružnica na način analogan navedenom za trokut. U drugom poglavlju rada pokazujemo da je takav niz kružnica periodičan za jednu posebnu klasu  $n$ -terokuta, koje ćemo ukratko nazvati *dobri  $n$ -terokuti*. Preciznije, niz kružnica je  $2n$ -periodičan za *dobre  $n$ -terokute* s neparnim  $n$ , a  $n$ -periodičan za *dobre  $n$ -terokute* s parnim  $n$  koji ispunjavaju još jedan dodatan uvjet, [4].

Za kraj ćemo prikazati, bez dokaza, jedan srodan rezultat kada se stranice trokuta zamijene kružnicama. U ovom slučaju polazimo od tri zadane kružnice i ako se u svakom koraku na prikladan način odabere kružnica koja dodiruje prethodnu u nizu i dvije od početnih kružnica, onda se sedma kružnica podudara s prvom. Ovaj teorem poznat je pod nazivom *Teorem o devet kružnica*, [6].

# Poglavlje 1

## Teorem o šest kružnica

### 1.1 Uvod u iskaz teorema

Prvo poglavlje ćemo započeti sažetcima životopisa trojice matematičara zaslužnih za pronalazak i prvi dokaz teorema o šest kružnica. Kao što je već spomenuto u uvodu, teorem o šest kružnica jedan je od mnogih koji se nalaze u knjizi *"The seven circles theorem and other new theorems"*. Knjiga je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a i J. A. Tyrrell-a. Zanimljivo je da je samo Tyrrell bio profesionalni matematičar i to vrlo ugledan.

Cecil John Alvin Evelyn (1904.-1976.) rođen je u Londonu. Za vrijeme školovanja razvio je veliki interes za matematiku, posebice za teoriju brojeva i geometriju, te se nakon završetka studija matematike učlanjuje u Londonsko matematičko društvo. Obiteljsko nasljedstvo omogućilo mu je da se u potpunosti posveti matematici i drugim brojnim interesima, naročito književnosti. Njegov matematički opus sastoji se od 12 radova i knjige u kojoj su objedinjeni svi njegovi radovi.

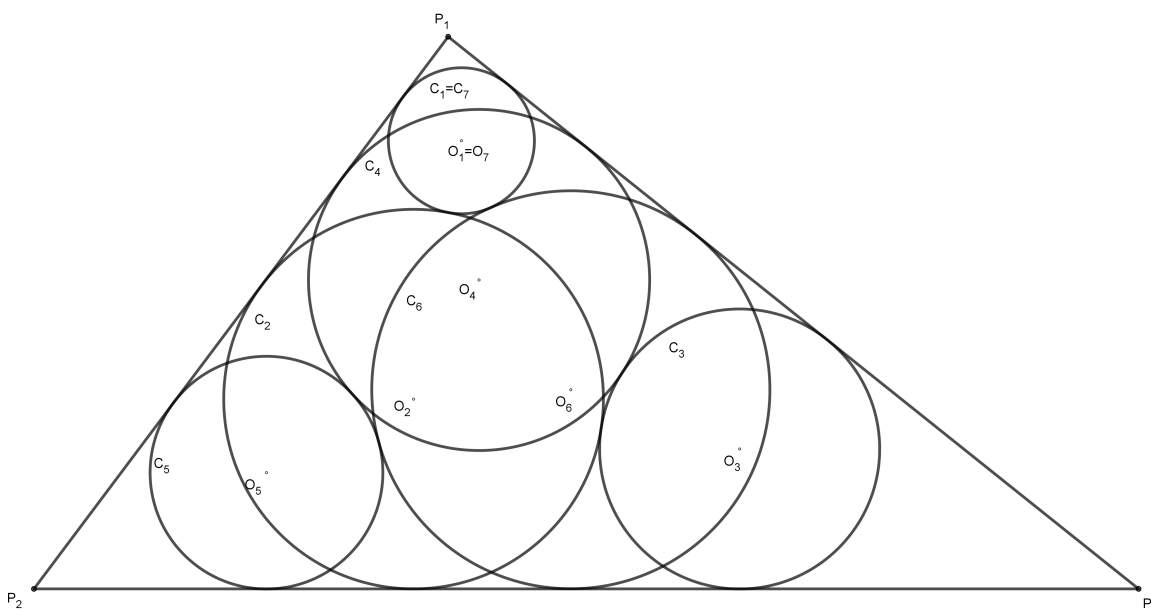
G. B. Money-Coutts najvjerojatnije je bio britanski plemić Godfrey Burdett Money-Coutts (1905.-1979.). O njegovu životu ne zna se puno. Studirao je na istom fakultetu kao i C. J. A. Evelyn te je bio član Londonskog matematičkog društva.

John Alfred Tyrrell (1932.-1992.) bio je profesor matematike na sveučilištu King's College u Londonu. Pod utjecajem svojih profesora Tyrrell je rano razvio zanimanje za geometriju te postao prvorazredni geometričar. Svoje široko znanje uvijek je rado dijelio sa svojim kolegama i studentima. King's College njemu u čast dodjeljuje nagradu za najuspješnijeg studenta koja nosi njegovo ime.

Trojica prijatelja običavali su se sastajati uz čaj te razgovarati o matematici. Najčešće su raspravljali o geometrijskim zakonitostima i svojstvima na koja su naišli eksperimentalnim putem, crtajući geometrijske likove velikih dimenzija i tražeći na njima različite pravilnosti. Njihova suradnja rezultirala je brojnim novim ili manje poznatim teoremima u planimetriji skupljenim u knjizi "The seven circles theorem and other new theorems". Spomenimo da se teorem o sedam kružnica iz naslova knjige ne odnosi na teorem koji je tema ovog rada, a u kojem se sedma kružnica podudara s prvom.

**Teorem 1.1.1. Teorem o šest kružnica.**

Neka je  $P_1P_2P_3$  trokut u ravnini i neka je  $C_1$  bilo koja kružnica koja dodiruje stranice  $P_3P_1$  i  $P_1P_2$ . Promotrimo tada lanac upisanih kružnica:  $C_2$  je kružnica koja dodiruje  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  i  $C_1$ ,  $C_3$  je kružnica koja dodiruje  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$  i  $C_2$ ,  $C_4$  je kružnica koja dodiruje  $P_3P_1$ ,  $P_1P_2$  i  $C_3$ ,  $C_5$  je kružnica koja dodiruje  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  i  $C_4$ ,  $C_6$  je kružnica koja dodiruje  $P_2P_3$ ,  $P_3P_1$  i  $C_5$ ,  $C_7$  je kružnica koja dodiruje  $P_3P_1$ ,  $P_1P_2$  i  $C_6$ . Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, ali ako je u svakom koraku kružnica odabrana na prikladan način, tada se kružnica  $C_7$  podudara s prvom kružnicom  $C_1$  i imamo zatvoren lanac kružnica, slika 1.1.



Slika 1.1: Teorem o šest kružnica.

Teorem o šest kružnica poznat je i pod imenom *Money-Coutts teorem*. Dana formulacija teorema 1.1.1, zbog svoje dvosmislenosti, treba pojašnjenje. U ovom poglavlju prikazat ćemo dva dokaza ovog teorema, odnosno njegovih varijanti u kojima su pretpostavke iskazane precizno.

Autori knjige "*The seven circles theorem and other new theorems*" nisu razmotrili pretporički dio lanca kružnica. Prva formulacija razmatra samo lance kružnica u kojima se svako diralište kružnice i stranice nalazi unutar stranica trokuta.

Teorem 1.1.1 ćemo malo drugačije formulirati u drugom pristupu. Ta formulacija imat će dodatne pretpostavke, a za dirališta bit će postavljen uvjet da se nalaze na pravcima na kojima leže stranice trokuta. To znači da se dirališta mogu nalaziti i na produžetcima stranica, a ne samo unutar njih. U ovom pristupu dokazat ćemo općenitiji slučaj kada lanac kružnica konačno postaje 6-periodičan, ali može imati proizvoljno dug pretporič.

## 1.2 Prva formulacija teorema o šest kružnica

Dokazat ćemo teorem 1.1.1 te ćemo, kako bi smanjili broj izbora kružnica, dodati uvjet da svaka kružnica treba ležati unutar trokuta. Ovaj uvjet daje najviše jedan izbor svake sljedeće kružnice.

*Dokaz.*

Označimo s  $a, b, c$  duljine stranica trokuta  $P_2P_3, P_3P_1$  i  $P_1P_2$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $\alpha_3$  kutove  $P_3P_1P_2, P_1P_2P_3$  i  $P_2P_3P_1$  te neka su  $l, m, n, l', m', n'$  i  $l''$  duljine odsječaka tangenti na kružnice  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  i  $C_7$  iz točaka  $P_1, P_2, P_3, P_1, P_2, P_3$  i  $P_1$ , redom. Pritom, duljina odsječaka tangente je udaljenost od vrha kuta u koji je upisana kružnica do dirališta stranice i kružnice.

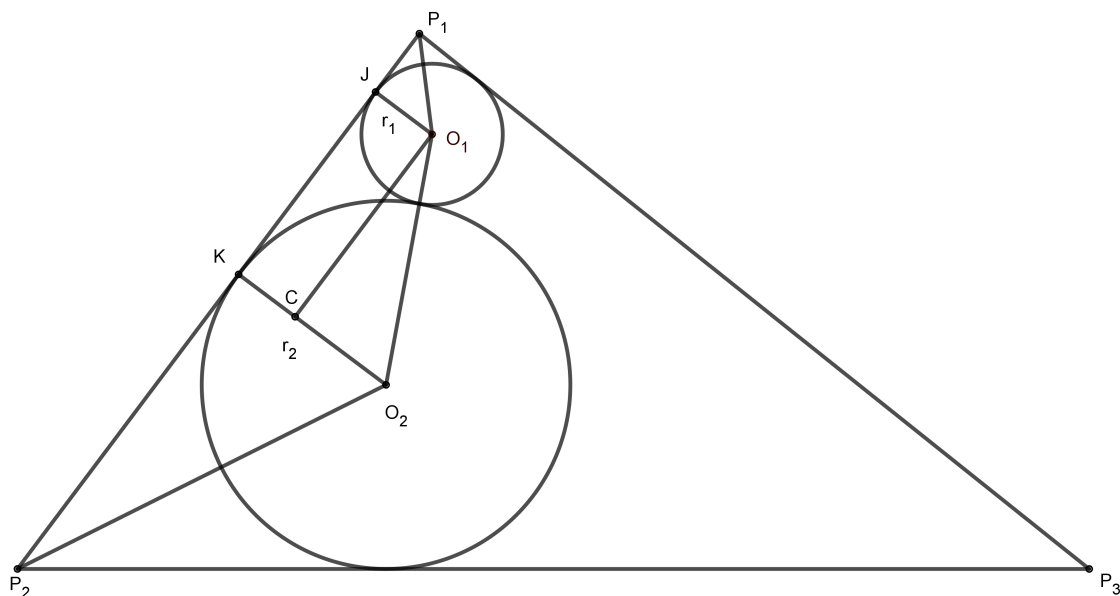
Na slici 1.2 je prikazano da ako su  $O_1$  i  $O_2$  središta kružnica  $C_1$  i  $C_2$ , te  $J$  i  $K$  dirališta kružnica i stranice  $P_1P_2$ , imamo  $P_1J = l$  i  $P_2K = m$ . Budući da je  $O_1$  na simetrali kuta pri vrhu  $P_1$ , razmatramo pravokutan trokut  $P_1JO_1$  s pravim kutom pri vrhu  $J$ . Kut pri vrhu  $P_1$  je kut  $\frac{1}{2}\alpha_1$  te je  $\text{tg } \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{|JO_1|}{l}$ . Sada, imamo da je radijus kružnice  $C_1$

$$|JO_1| = l \text{tg } \frac{1}{2}\alpha_1.$$

Analogno, imamo da je radijus kružnice  $C_2$

$$|KO_2| = m \text{tg } \frac{1}{2}\alpha_2.$$





Slika 1.2: Relacija između duljine odsječka tangente i radijusa upisanih kružnica.

Ako se dvije kružnice radijusa  $r_1$  i  $r_2$ , središta  $O_1$  i  $O_2$ , dodiruju izvana (slika 1.2) tada je duljina  $|O_1O_2| = r_1 + r_2$ . Povučemo paralelu sa stranicom  $P_1P_2$  kroz  $O_1$  i označimo na njoj segment  $O_1C$  te vidimo da je  $|O_1C| = |JK|$ , te je tada

$$\begin{aligned} |JK|^2 &= |O_1O_2|^2 - |O_1C|^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 \\ &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = 4r_1r_2, \\ |JK| &= \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}. \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali tvrdnju da dvije kružnice radijusa  $r_1$  i  $r_2$  koje se dodiruju izvana imaju duljinu zajedničkog segmenta na tangenti  $2\sqrt{r_1r_2}$ , te imamo

$$|JK| = 2\sqrt{lm \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Kako je  $|P_1P_2| = |P_1J| + |JK| + |KP_2|$ , slijedi da je

$$c = l + m + 2\sqrt{lm \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha_1}. \quad (1.1)$$

Označimo poluopseg trokuta  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Potrebna je Lema 1.2.1 kako bi mogli nastaviti s dokazom.

**Lema 1.2.1.** Za dani trokut  $ABC$ , neka su  $a, b, c$  njegove stranice,  $s$  poluopseg, i  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  njegovi kutovi.

Vrijedi

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 &= \frac{c}{s}, \\ 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_3 &= \frac{a}{s}, \\ 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 &= \frac{b}{s}. \end{aligned}$$

*Dokaz.*

Neka je  $R$  radijus upisane kružnice i  $P$  površina trokuta.

Neka je

$$t_A = |AF| = |AG|, \quad t_B = |BG| = |BE|, \quad t_C = |CE| = |CF|,$$

vidi sliku 1.3.

Sada je  $s = t_A + t_B + t_C$  i  $P = Rs$ . Po Heronovoj formuli za površinu trokuta je

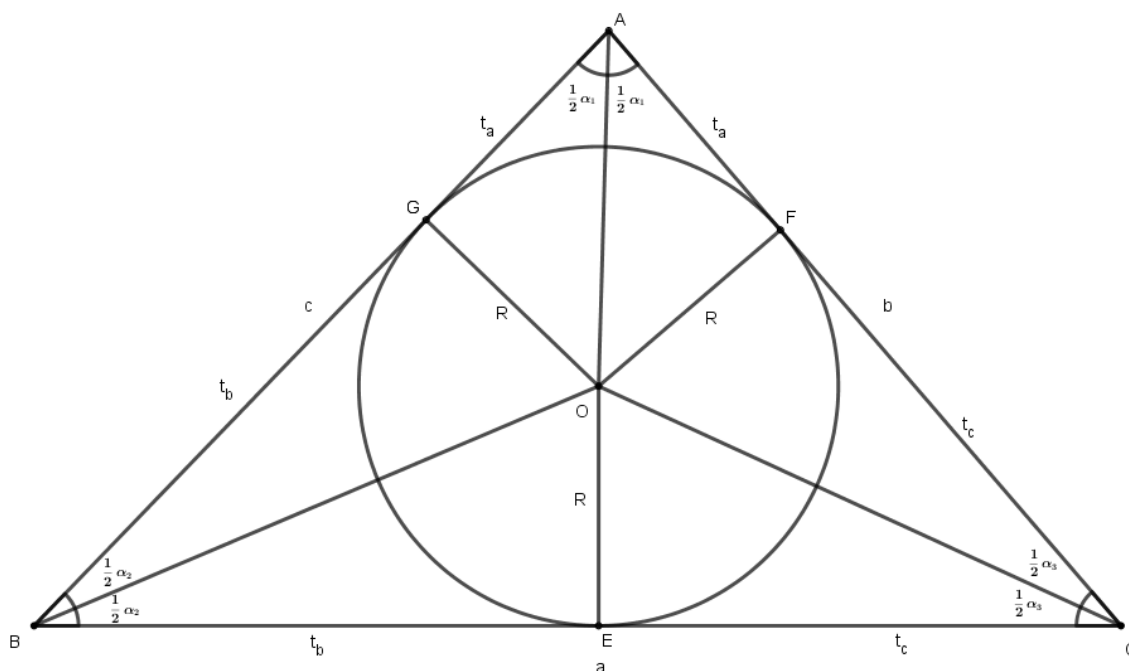
$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{s(t_A + t_B + t_C - (t_B + t_C))(t_A + t_B + t_C - (t_A + t_C))(t_A + t_B + t_C - (t_A + t_B))} \\ &= \sqrt{st_A t_B t_C}. \end{aligned}$$

Dakle,  $P^2 = R^2 s^2 = st_A t_B t_C$ , to jest  $R^2 = \frac{t_A t_B t_C}{s}$ .

Iz pravokutnog trokuta  $OFA$  imamo da je  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{R}{t_A}$ , te iz pravokutnog trokuta  $OGB$  imamo da je  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{R}{t_B}$ .

Dakle,

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 &= 1 - \frac{R}{t_A} \frac{R}{t_B} = 1 - \frac{R^2}{t_A t_B} \\ &= 1 - \frac{\frac{t_A t_B t_C}{s}}{t_A t_B} = 1 - \frac{t_C}{s} = \frac{s - t_C}{s} \\ &= \frac{t_A + t_B + t_C - t_C}{s} = \frac{t_A + t_B}{s} = \frac{c}{s}. \end{aligned}$$



Slika 1.3: Slika za dokaz Leme 1.2.1.

Analogno se pokazuje da vrijedi i

$$1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_3 = \frac{a}{s},$$

$$1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{b}{s}.$$

□

Prema Lemi 1.2.1 slijedi da je

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 = 1 - \frac{c}{s} = \frac{s-c}{s}.$$

Sada (1.1) možemo zapisati kao

$$c = l + m + 2 \sqrt{lm \frac{(s-c)}{s}}. \quad (1.2)$$

Tako dobivamo vezu između  $l$  i  $m$ . Slično, koristeći isti princip dokaza na drugim kružnicama u lancu, možemo povezati  $m$  i  $n, \dots, n'$  i  $l''$  te imamo

$$a = m + n + 2\sqrt{mn\frac{(s-a)}{s}},$$

i tako dalje. Na kraju dobivamo ukupno šest relacija.

Uvodimo supstituciju  $p, q, r, p', q', r'$  i  $p''$  za korijene od  $l, m, n, l', m', n'$  i  $l''$ , i  $f, g, h$  i  $d$  za korijene  $a, b, c, s$ . Definiramo tupe kutove  $\theta, \varphi$  i  $\psi$  s

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sqrt{1 - \frac{a}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{f^2}{d^2}}, & \sin \theta &= \frac{f}{d}, \\ \cos \varphi &= -\sqrt{1 - \frac{b}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{g^2}{d^2}}, & \sin \varphi &= \frac{g}{d}, \\ \cos \psi &= -\sqrt{1 - \frac{c}{s}} = -\sqrt{1 - \frac{h^2}{d^2}}, & \sin \psi &= \frac{h}{d}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Kutovi su dobro definirani jer su vrijednosti ispod korijena pozitivne i između 0 i 1. Stoga, (1.2) možemo zapisati kao

$$h^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \psi.\tag{1.4}$$

Pet drugih jednadžbi dobivamo tako da zamijenimo  $h, p, q$  i  $\psi$  s drugim varijablama kako je naznačeno u tablici 1.1.

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$
$h$	$f$	$g$	$h$	$f$	$g$
$p$	$q$	$r$	$p'$	$q$	$r'$
$q$	$r$	$p'$	$q'$	$r'$	$p''$
$\psi$	$\varphi$	$\theta$	$\psi$	$\varphi$	$\theta$

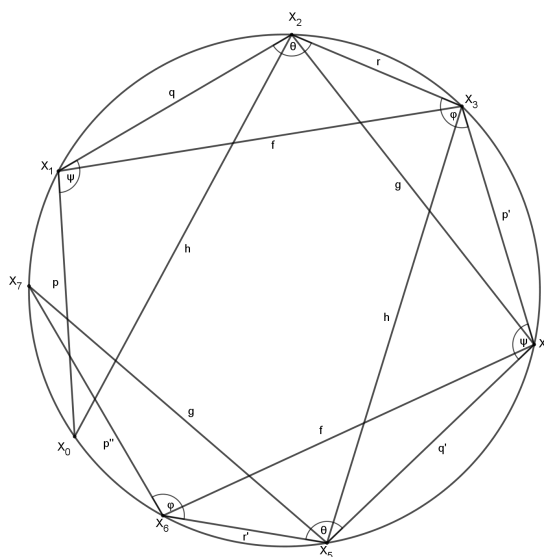
Tablica 1.1: Tablica relacija između dužina i kutova.

Sada u (1.4) prepoznamo kosinsov poučak i možemo konstruirati trokut  $T_1$  sa stranicama  $p, q, h$  i kutom  $\psi$  nasuprot stranice  $h$ . Analogno, koristeći relacije u tablici 1.1 dobivamo trokute  $T_2, T_3, T_4, T_5$  i  $T_6$ .

Primjenom poznate relacije prema kojoj je dijametar opisane kružnice trokuta jednak duljini bilo koje stranice trokuta podijeljene sa sinusom kuta nasuprot nje imamo za  $T_1$  da

je dijametar  $\frac{h}{\sin\varphi}$ , što je prema (1.3) jednako  $d$ . Štoviše, na sličan način dobivamo da su dijametri opisanih kružnica preostalih trokuta također  $d$ .

Iz ovog slijedi da ako spojimo trokute  $T_1, T_2$  tako da se stranice duljine  $q$  podudaraju tada se i njihove opisane kružnice također podudaraju. Ako nastavimo sličnim postupkom možemo smjestiti svih šest trokuta u istu opisanu kružnicu (slika 1.4). Ako uklonimo neke od stranica vidimo na slici 1.5 da imamo otvoreni sedmerokut (izlomljenu crtu)  $X_0X_1 \dots X_7$  upisan u kružnicu, s kutom  $\theta$  pri vrhovima  $X_2$  i  $X_5$ , kutom  $\psi$  pri vrhovima  $X_1$  i  $X_4$ , i kutom  $\varphi$  pri vrhu  $X_3$  i  $X_6$ .



Slika 1.4: Smještanje svih šest trokuta u istu opisanu kružnicu.

Primijetimo, trokuti  $X_0X_2X_4$  i  $X_3X_5X_7$  su sukladni, iz čega imamo da su kutovi  $X_0X_2X_4$  i  $X_3X_5X_7$  sukladni. Oduzimajući ove kutove od sukladnih kutova  $X_1X_2X_3$  i  $X_4X_5X_6$  imamo

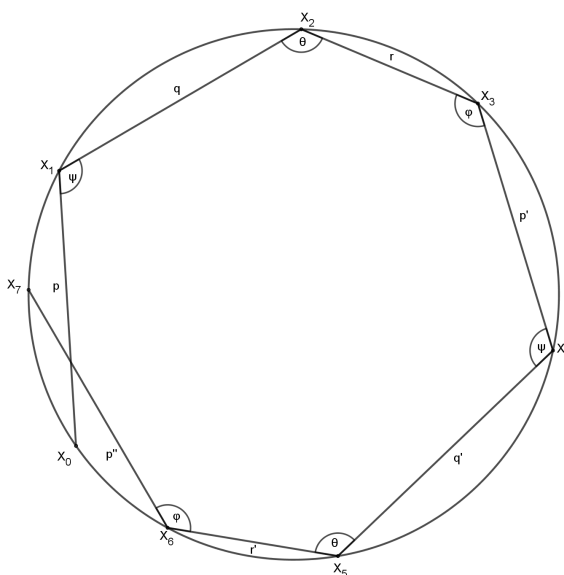
$$\angle X_0X_2X_1 + \angle X_3X_2X_4 = \angle X_3X_5X_4 + \angle X_6X_5X_7.$$

Ali, budući da su  $X_3X_2X_4$  i  $X_3X_5X_4$  također sukladni, slijedi

$$\angle X_0X_2X_1 = \angle X_6X_5X_7.$$

Dakle,  $\overline{X_0X_1}$  i  $\overline{X_6X_7}$  su tetive nasuprot sukladnih obodnih kutova kružnice, te iz toga slijedi da su jednake duljine.

Stoga,  $p = p'$ , i slijedi da je  $l = l'$  čime smo dokazali tvrdnju teorema.  $\square$



Slika 1.5: Otvoreni sedmerokut upisan u kružnicu.

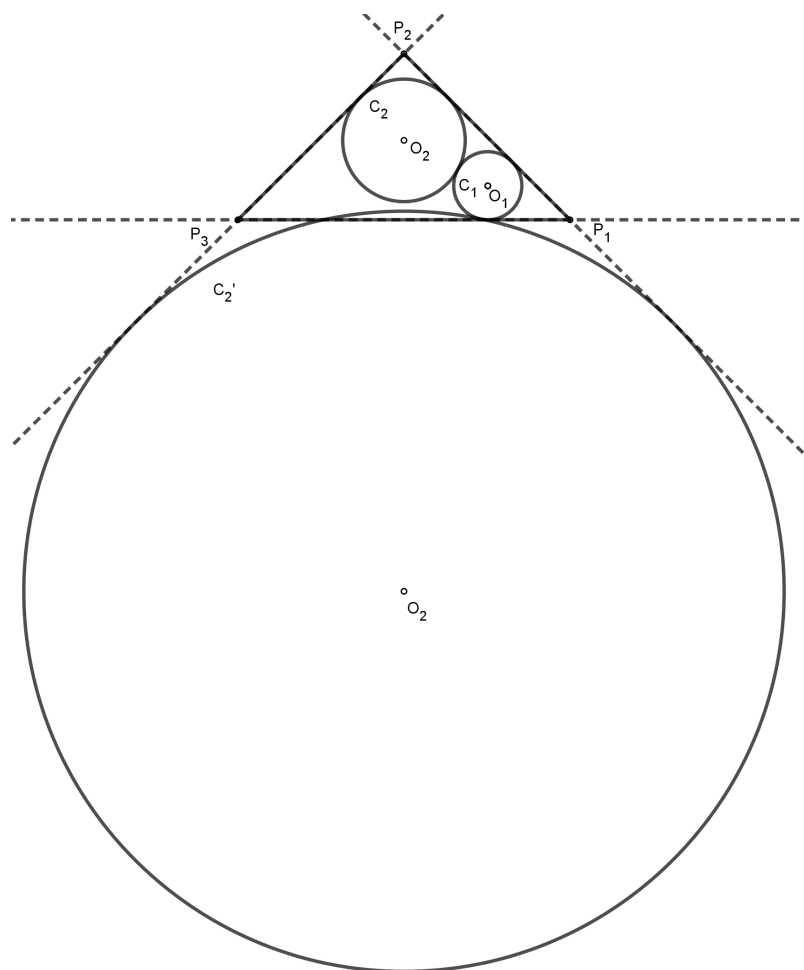
### 1.3 Preciziranje iskaza teorema

Teorem 1.1.1 ćemo malo preformulirati te ćemo u tu svrhu definirati još par pretpostavki. Za početak promotrimo što se događa kad upisujemo drugu kružnicu u lancu. Kada je upisana početna kružnica  $C_1$  u kut  $P_1$ , za drugu kružnicu  $C_2$ , upisanu u kut pri vrhu  $P_2$  tako da dodiruje kružnicu  $C_1$ , imamo dva izbora kružnica (slika 1.6).

Primijetimo da za svaku kružnicu u lancu, osim početne, postoje dva izbora za svaku sljedeću. Potrebno je dodati uvjet za odabir svake sljedeće kružnice u lancu. Mi pretpostavljamo da je odabrana manja od dvije kružnice koje dodiruju prethodnu, to jest pretpostavljamo da je odabrana kružnica čije je središte bliže odgovarajućem vrhu trokuta. Primjerice, na slici 1.6 kružnica  $C_1$  dodiruje kružnice  $C_2$  i  $C'_2$ , no odabrana je kružnica  $C_2$ .

Također se može dogoditi da sljedeća kružnica u lancu ne dodiruje stranicu trokuta već njezin produžetak. Promatrat ćemo isključivo lanac kružnica takav da su sve dodirne točke na stranicama trokuta, a ne na produžetcima istih.

U slučaju kada kružnice dodiruju produžetak stranica, lanac je konačno 6-periodičan s preperiodom. Primjerice, na slici 1.7 lanac ima preperiod duljine dva:  $C_9 = C_3$  ali  $C_8 \neq C_2$ . Postojanje preperioda proizlazi iz činjenice da postoji više izbora sljedeće kružnice koja dodiruje prethodnu.



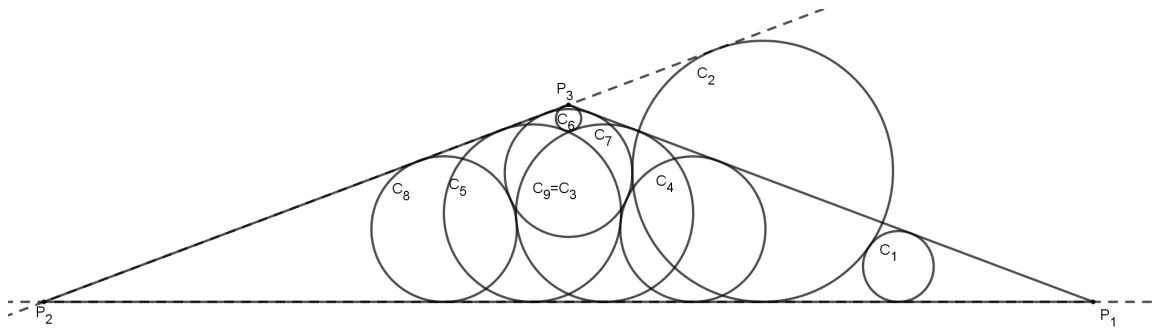
Slika 1.6: Za svaku sljedeću kružnicu u lancu imamo dva izbora.

Uzimajući u obzir da barem jedna dodirna točka početne kružnice leži na stranici trokuta, a ne na produžetku stranice, važnu ulogu ima sljedeća Lema.

**Lema 1.3.1.** *Ako početna kružnica zadovoljava pretpostavku da barem jedna dodirna točka leži na stranici trokuta tada je zadovoljavaju i sve sljedeće kružnice.*

*Dokaz.*

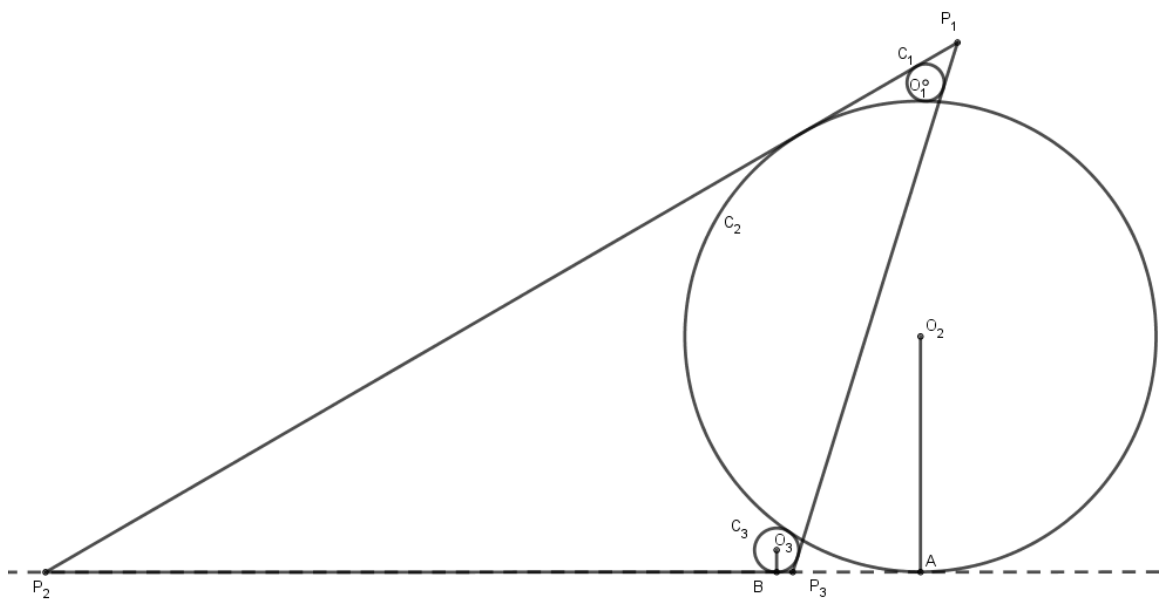
Neka je dan trokut  $P_1P_2P_3$  i neka je kružnica  $C_1$  upisana u kut pri vrhu  $P_1$ ,  $C_2$  upisana u kut pri vrhu  $P_2$  i dodiruje kružnicu  $C_1$ .



Slika 1.7: Lanac kružnica je konačno 6-periodičan s preterperiodom duljine dva:  $C_9 = C_3$ , ali  $C_8 \neq C_2$ .

Ako kružnica  $C_1$  dodiruje stranicu  $P_1P_2$  tada i  $C_2$  također dodiruje ovu stranicu u točki bližoj vrhu  $P_2$  nego prethodna.

Povećavanjem indeksa za 1, ako kružnica  $C_2$  ne dodiruje stranicu  $P_2P_3$ , ali dodiruje stranicu  $P_1P_2$  tada ona siječe stranicu  $P_1P_3$  i sljedeća kružnica  $C_3$  dodiruje stranicu  $P_1P_3$ , u točki bližoj  $P_3$  od točaka presjeka prethodne kružnice i stranice  $P_1P_3$  (slika 1.8).  $\square$

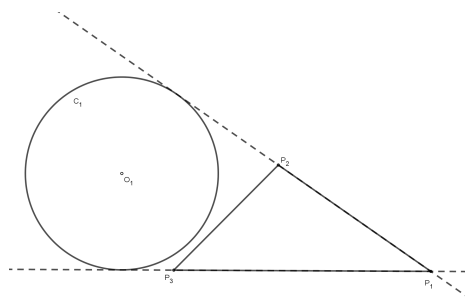


Slika 1.8: Slika za dokaz Leme 1.3.1.

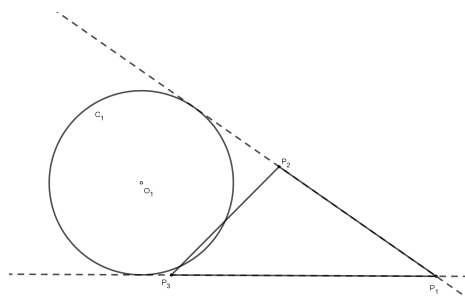


Potrebno je precizirati i izbor početne kružnice u lancu. Ako početna kružnica koja je upisana u kut pri vrhu  $P_1$  dodiruje produžetak stranice  $P_1P_2$  i  $P_1P_3$ , ali ne siječe stranicu  $P_2P_3$  tada nije moguće upisati sljedeću kružnicu, kao što vidimo i na slici 1.9, te ovaj slučaj nije od interesa.

Ako početna kružnica  $C_1$  siječe stranicu  $P_2P_3$  tada je moguće upisati sljedeću kružnicu koja dodiruje stranicu  $P_2P_3$  i zadovoljava pretpostavku da barem jedno diralište leži na stranici trokuta (slika 1.10). Stoga pretpostavka vrijedi počevši od druge upisane kružnice pa to ne utječe na tvrdnju teorema nego samo na duljinu pretperioda. Bez gubitka općenitosti možemo onda uzeti da pretpostavka vrijedi već od prve kružnice u lancu.



Slika 1.9: Slučaj kad početna kružnica dodiruje produžetak stranica  $P_1P_2$  i  $P_1P_3$  i ne siječe  $P_2P_3$ .



Slika 1.10: Slučaj kad početna kružnica dodiruje produžetak stranica  $P_1P_2$  i  $P_1P_3$  i siječe  $P_2P_3$ .

## 1.4 Druga formulacija teorema o šest kružnica

**Teorem 1.4.1.** *Neka je  $P_1P_2P_3$  trokut u ravnini i neka je  $C_1$  bilo koja kružnica upisana u kut pri vrhu  $P_1$  tako da barem jedna dodirna točka leži na stranici trokuta. Promotrimo tada lanac upisanih kružnica:  $C_2$  je kružnica upisana u kut pri vrhu  $P_2$  i dodiruje kružnicu  $C_1$ ,  $C_3$  je kružnica upisana u kut pri vrhu  $P_3$  i dodiruje kružnicu  $C_2$ ,  $C_4$  je kružnica upisana u kut pri vrhu  $P_1$  i dodiruje kružnicu  $C_3$ , i tako dalje.*

*Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, a dobro odabranom nazovimo onu kružnicu čije je središte bliže odgovarajućem vrhu trokuta. Ako je u svakom koraku kružnica dobro odabrana, tada je lanac kružnica na kraju periodičan s periodom 6. Može se odabrati oblik trokuta i početna kružnica tako da pretperiod bude proizvoljno dugačak.*

Dokaz Teorema 1.4.1 sastoji se od reduciranja sustava jednadžbi do na po dijelovima linearnu funkciju; to se postiže trigonometrijskom supstitucijom varijabli. U pojedinim koracima može se učiniti da nema jasne motivacije za način odabira koordinati i novih varijabli, ali postupak se na kraju pokazuje svrsishodnim.

*Dokaz.*

Za početak dokaza uvedimo oznake. Označimo kutove u zadanom trokutu:  $2\alpha_1$  kut pri vrhu  $P_1$ ,  $2\alpha_2$  kut pri vrhu  $P_2$  i  $2\alpha_3$  kut pri vrhu  $P_3$ . Neka su stranice trokuta duljina  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  (stranica  $a_1$  je nasuprot vrha  $P_1$ ,  $a_2$  nasuprot vrha  $P_2$  i  $a_3$  nasuprot vrha  $P_3$ ).

Neka je  $p = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$  poluopseg trokuta  $P_1P_2P_3$ .

Primijetimo da zbog nejednakosti trokuta vrijedi:

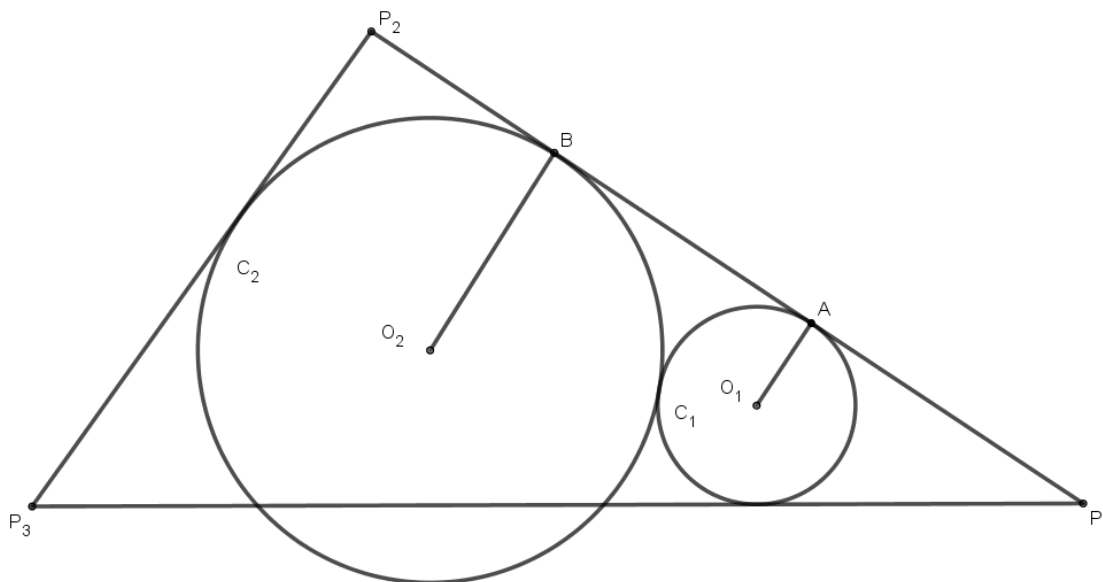
$$p = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) > \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} = a_1.$$

Analogno se pokazuje da vrijedi  $p > a_2$ ,  $p > a_3$ .

Označimo radijuse kružnica  $C_i$  s  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  i pretpostavimo da je kružnica  $C_i$  upisana u  $(i \bmod 3)$ -ti kut trokuta. Primjerice: kružnica  $C_4$  upisana je u kut  $2\alpha_1$ .

Prema već dokazanom poglavlju 1.2 znamo da dvije kružnice radijusa  $r_1$  i  $r_2$  koje se dodiruju izvana imaju duljinu zajedničkog segmenta na tangenti  $2\sqrt{r_1r_2}$ , te imamo

$$|AB| = 2\sqrt{r_1r_2}.$$


 Slika 1.11: Prvi slučaj:  $a_3 = |P_1A| + |AB| + |BP_2|$ .

U ovisnosti o međusobnim položajima uzastopnih kružnica, kao što je prikazano na slikama 1.11, 1.12 i 1.13, izraziti ćemo duljine stranica trokuta pomoću kutova i radijusa upisanih kružnica.

Ako promotrimo sliku 1.11 vidimo da je

$$a_3 = |P_1A| + |AB| + |BP_2|. \quad (1.5)$$

Duljinu segmenta  $\overline{AB}$  smo već izračunali. Uočimo pravokutan trokut  $P_1AO_1$ , s pravim kutom pri vrhu A. Kut pri vrhu  $P_1$  je kut  $\alpha_1$  jer se središte  $O_1$  upisane kružnice u kut  $P_1$  nalazi simetrali tog kuta. Iz tog trokuta imamo da je  $\text{ctg } \alpha_1 = \frac{|P_1A|}{r_1}$ , iz čega slijedi  $|P_1A| = r_1 \text{ctg } \alpha_1$ .

Analogno, iz pravokutnog trokuta  $BP_2O_2$  dobijemo  $|BP_2| = r_2 \text{ctg } \alpha_2$ .

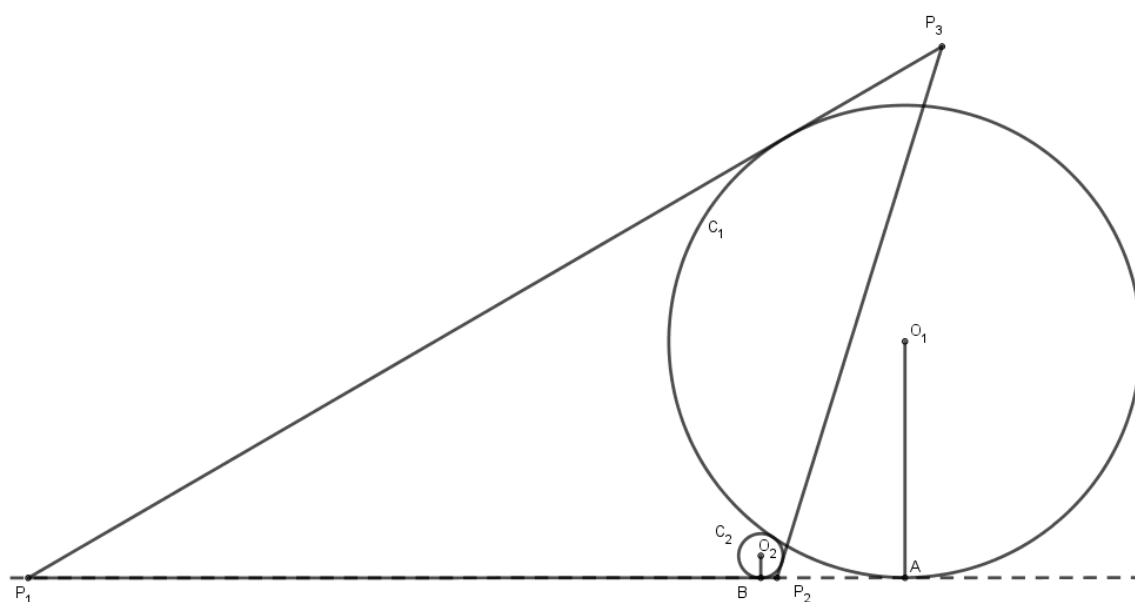
Uvrštavanjem u jednakost (1.5) imamo:

$$a_3 = r_1 \text{ctg } \alpha_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \text{ctg } \alpha_2.$$

Ako pak promotrimo slike 1.12 i 1.13 vidimo da je u oba slučaja

$$a_3 = |P_1A| - |AB| + |BP_2|. \quad (1.6)$$

Uočimo pravokutan trokut  $P_1AO_1$ , s pravim kutom pri vrhu A. Kut pri vrhu  $P_1$  je kut  $\alpha_1$ . Iz tog trokuta imamo da je  $\text{ctg } \alpha_1 = \frac{|P_1A|}{r_1}$ , iz čega slijedi  $|P_1A| = r_1 \text{ctg } \alpha_1$ .



Slika 1.12: Drugi slučaj:  $a_3 = |P_1A| - |AB| + |BP_2|$ .

Analogno, iz pravokutnog trokuta  $BP_2O_2$  imamo da je  $|BP_2| = r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2$ .  
Uvrštavanjem u jednakost (1.6) imamo:

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2.$$

Dakle, u ovisnosti o međusobnim položajima uzastopnih kružnica dobivamo ove jednadžbe:

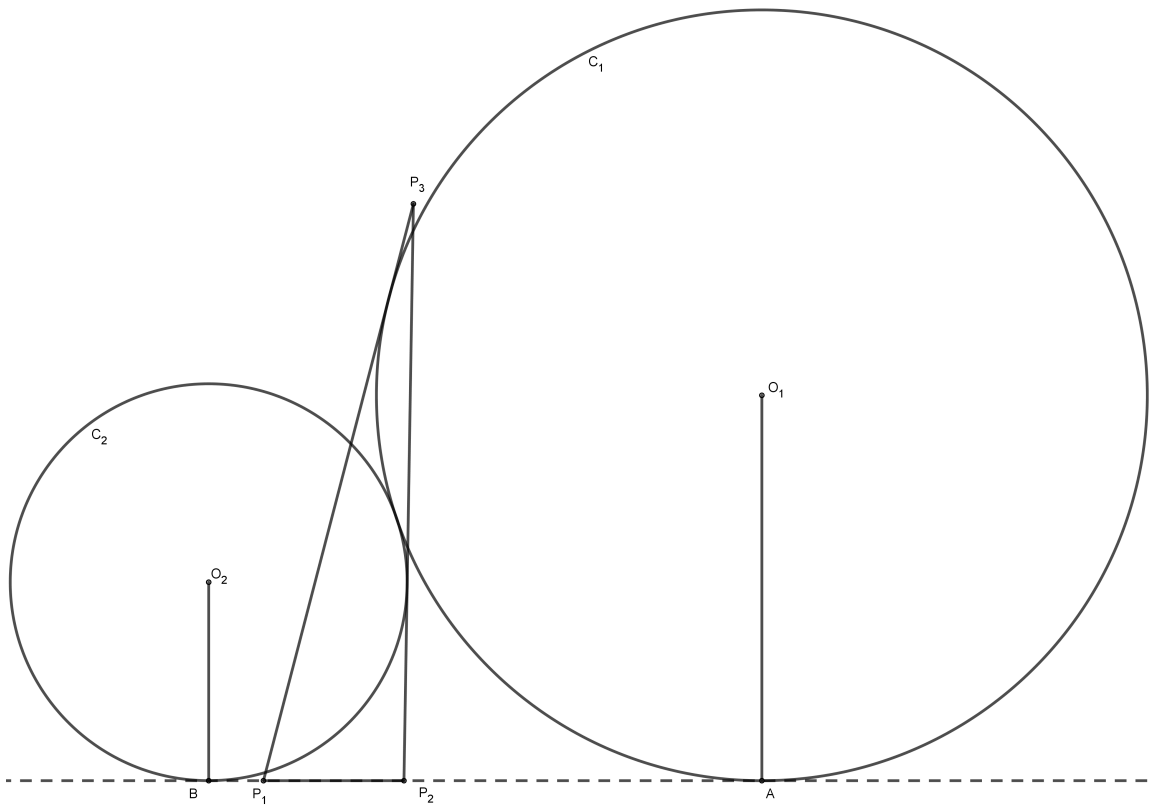
$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 \quad (1.7)$$

ili

$$a_3 = r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad (1.8)$$

i cikličke permutacije indeksa 1, 2, 3.

Posebno, ako kružnica  $C_1$  dodiruje stranicu  $P_1P_2$  tada imamo prvu jednadžbu (1.7), ako  $C_1$  dodiruje produžetak stranice  $P_1P_2$  tada imamo drugu jednadžbu (1.8).



Slika 1.13: Treći slučaj:  $a_3 = |P_1A| - |AB| + |BP_2|$ .

**Rješavanje jednađbi.** Jednađbe (1.7) i (1.8) određuju radijus  $r_2$ , nove kružnice, pomoću radijusa prethodne,  $r_1$ . Ove dvije jednađbe riješit ćemo u dva koraka. Prvo, uvodimo oznake:

$$u_1 = \sqrt{r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1}, \quad e_3 = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

i njihove cikličke permutacije indeksa.

Sada, jednađbe (1.7) i (1.8) možemo zapisati kao

$$u_1^2 \pm 2e_3 u_1 u_2 + u_2^2 = a_3, \quad (1.9)$$

ili

$$\begin{aligned} u_1^2 \pm e_3 u_1 u_2 \pm e_3 u_1 u_2 + u_2^2 &= a_3 \\ u_1(u_1 \pm e_3 u_2) + u_2(u_2 \pm e_3 u_1) &= a_3. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Izrazimo  $u_2$  iz jednadžbi (1.9)

$$\begin{aligned}
u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 &= a_3 \\
u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 + e_3^2u_1^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 \\
(u_2 + e_3u_1)^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 - u_1^2 \\
u_2 + e_3u_1 &= \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} \\
u_2 &= -e_3u_1 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

i

$$\begin{aligned}
u_1^2 - 2e_3u_1u_2 + u_2^2 &= a_3 \\
u_1^2 + 2e_3u_1u_2 + u_2^2 + e_3^2u_1^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 \\
(u_2 - e_3u_1)^2 &= a_3 + e_3^2u_1^2 - u_1^2 \\
u_2 - e_3u_1 &= -\sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} \\
u_2 &= e_3u_1 - \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Prema predznaku u (1.9), predznaci u formulama (1.11), (1.12) su pozitivni ili negativni. Ispred drugog korijena u formuli (1.12) je znak minus jer u našem lancu odabiremo manju od dvije kružnice koja dodiruje prethodnu.

Slično, izrazimo i  $u_1$ :

$$u_1 = -e_3u_2 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2} \tag{1.13}$$

ili

$$u_1 = e_3u_2 + \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2}. \tag{1.14}$$

Prema predznaku u (1.9), predznaci u (1.13) i (1.14) su ili pozitivni ili negativni. Predznak plus ispred drugog korijena u formuli (1.14) je zato što kada idemo u obrnutom smjeru, od kružnice  $C_2$  do  $C_1$ , biramo veću od dvije kružnice.

Uvrštavajući  $(u_1 \pm e_3u_2) = \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2}$  i  $(u_2 \pm e_3u_1) = \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2}$  u jednadžbu (1.10) dobivamo

$$u_1 \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2} \pm u_2 \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} = a_3. \tag{1.15}$$

Predznak ovisi o tome je li  $u_1^2$  manji ili veći od  $a_3$  (ako je  $u_1^2 = a_3$  tada je  $u_2 = 0$  u formuli (1.11) i (1.12)).

**Trigonometrijska supstitucija.** Prepisat ćemo prethodnu formulu (1.15) kao formulu za zbroj ili razliku sinusa dvaju kutova te za to trebamo Lemu 1.2.1 već dokazanu u radu.

Dakle, zbog Leme 1.2.1 formulu (1.15) možemo zapisati kao formulu za zbroj ili razliku sinusa dvaju kutova. Imamo  $e_3 = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$ ,  $1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{a_3}{p}$ , uvrštavanjem u formulu (1.15) dobijemo:

$$\begin{aligned}
 u_1 \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_2^2} \pm u_2 \sqrt{a_3 - (1 - e_3^2)u_1^2} &= a_3 \\
 u_1 \sqrt{a_3 - (1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2)u_2^2} \pm u_2 \sqrt{a_3 - (1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2)u_1^2} &= a_3 \\
 u_1 \sqrt{a_3 - \frac{a_3}{p}u_2^2} \pm u_2 \sqrt{a_3 - \frac{a_3}{p}u_1^2} &= a_3 \\
 u_1 \sqrt{a_3} \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm u_2 \sqrt{a_3} \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= a_3 \\
 u_1 \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm u_2 \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= \frac{a_3}{\sqrt{a_3}} = \sqrt{a_3} \\
 \frac{u_1}{\sqrt{p}} \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{p}} \pm \frac{u_2}{\sqrt{p}} \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{p}} &= \sqrt{\frac{a_3}{p}}. \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

Sada možemo napraviti zadnju supstituciju. Neka je

$$\varphi_i = \arcsin\left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right), \quad \beta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right). \tag{1.17}$$

Kako bi opravdali supstituciju  $\beta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right)$ , primijetimo da  $a_i < p$  iz čega slijedi  $\sqrt{\frac{a_i}{p}} \in [-1, 1]$ . Također, svaka kružnica dodiruje stranicu trokuta, te  $u_i^2$  nije veći od neke od stranica, i stoga je manji od  $p$ . Odnosno,  $u_i^2 < a_i < p$  iz čega slijedi  $\frac{u_i}{\sqrt{p}} \in [-1, 1]$ , i time je opravdana supstitucija  $\varphi_i = \arcsin\left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right)$ .

Uvodimo nove varijable te prepíšemo (1.16) kao

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin \beta_3,$$

gdje vrijedi predznak plus za  $\varphi_1 < \beta_3$ , a predznak minus inače. Sređivanjem izraza (1.17), vrijedi:

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \arcsin\left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right) \Rightarrow \sin \varphi_i = \frac{u_i}{\sqrt{p}}, \\ \beta_i &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right) \Rightarrow \cos \beta_i = \cos\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a_i}{p}}, \\ \cos \varphi_i &= \cos\left(\arcsin\left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{u_i}{\sqrt{p}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{u_i^2}{p}}.\end{aligned}$$

Dakle, uvrštavanjem u (1.16) imamo da je

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 = \sin \beta_3,$$

što možemo zapisati kao

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin \beta_3.$$

Konačno, imamo jednakost koja opisuje dinamiku lanca kružnica:

$$\varphi_2 = |\varphi_1 - \beta_3| . \quad (1.18)$$

Analogno, na sličan način dolazimo do jednakosti

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= |\varphi_2 - \beta_1| , \\ \varphi_1 &= |\varphi_3 - \beta_2| .\end{aligned}$$

Prije nego što proučimo dinamiku ove funkcije primijetimo da brojevi  $\beta_i$  zadovoljavaju nejednakost trokuta, što tvrdi i sljedeća Lema.

**Lema 1.4.2.** *Neka brojevi  $\beta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a_i}{p}}\right)$  zadovoljavaju nejednakost  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$ .*

*Vrijedi*

$$\beta_3 < \beta_1 + \beta_2.$$

*Dokaz.*

Na početku primijetimo da  $\beta_i = \arcsin \sqrt{\frac{a_i}{p}}$  iz čega slijedi da je  $\sin \beta_i = \sqrt{\frac{a_i}{p}}$ , što pak povlači da je  $\sin \beta_i < 1$ , za  $i = 1, 2, 3$ .



Znamo da vrijedi  $\cos \beta_i = \cos(\arcsin \sqrt{\frac{a_i}{p}}) = \sqrt{1 - (\sqrt{\frac{a_i}{p}})^2}$ , te je  $\cos^2 \beta_i = 1 - \frac{a_i}{p}$ . Dodatno,  $\sin \beta_i = \sin(\arcsin \sqrt{\frac{a_i}{p}}) = \sqrt{\frac{a_i}{p}}$ , te je  $\sin^2 \beta_i = \frac{a_i}{p}$ , za  $i = 1, 2, 3$ .

Primijetimo sad da je

$$\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_3 = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p} + \frac{a_3}{p} = 2,$$

ili

$$\sin^2 \beta_3 = 2 - \sin^2 \beta_1 - \sin^2 \beta_2 = 2 - 1 + \cos^2 \beta_1 - 1 + \cos^2 \beta_2 = \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2.$$

Pretpostavimo da postoji trokut za koji, suprotno tvrdnji Leme 1.4.2, vrijedi  $\beta_3 \geq \beta_1 + \beta_2$ , odnosno  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \leq 0$ .

Možemo zaključiti da u tom slučaju postoji i trokut za koji vrijedi  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$ , to jest  $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$ .

Naime, za jednakostranični trokut vrijedi  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$  pa za takav trokut vrijedi  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \geq 0$ . Neprekidnom deformacijom jednakostraničnog trokuta možemo dobiti trokut za koji smo pretpostavili da vrijedi  $\beta_3 \geq \beta_1 + \beta_2$ , to jest  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \leq 0$ . Zbog neprekidnosti funkcije koje pojedinom trokutu u postupku transformacije pridružuje vrijednost  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3$ , vidimo da se između pozitivne i negativne vrijednosti mora poprimiti i vrijednost  $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$ .

Tada je

$$\sin \beta_3 = \sin(\beta_1 + \beta_2),$$

pa slijedi

$$\sin^2 \beta_3 = (\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cos \beta_1)^2,$$

i zatim

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 = (\sin \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_2 \cos \beta_1)^2.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 &= (1 - \cos^2 \beta_1) \cos^2 \beta_2 + (1 - \cos^2 \beta_2) \cos^2 \beta_1 + 2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2, \\ 2 \cos^2 \beta_1 \cos^2 \beta_2 &= 2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2, \end{aligned}$$

$$\cos \beta_1 \cos \beta_2 = \sin \beta_1 \sin \beta_2. \quad (1.19)$$

Zbog (1.19) imamo da je  $\cos(\beta_1 + \beta_2) = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\beta_2 = 0$ , to jest  $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Dakle,  $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$  pa je  $\sin\beta_2 = \cos\beta_1$  i slijedi

$$\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 = \sin^2\beta_1 + \cos^2\beta_1 = 1,$$

te je konačno

$$\sin^2\beta_3 = 2 - \sin^2\beta_1 - \sin^2\beta_2 = 1,$$

što je proturječe, jer  $\sin^2\beta_3 = \frac{a_3}{p} < 1$ . □

**Dinamika po dijelovima linearne funkcije.** Spremni smo proučiti funkciju (1.18). Iako dinamika po dijelovima linearne funkcije može biti veoma kompleksna, naša je dosta jednostavna.

Iterirajući funkciju  $\varphi_3 = |\varphi_2 - \beta_1|$  tri puta, s vrijednostima indeksa  $i = 1, 2, 3$ , imamo

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= |\varphi_2 - \beta_1|, \\ \varphi_1 &= |\varphi_3 - \beta_2| = ||\varphi_2 - \beta_1| - \beta_2|, \\ \varphi'_2 &= |\varphi_1 - \beta_3| = |||\varphi_2 - \beta_1| - \beta_2| - \beta_3|.\end{aligned}$$

Proizlazi funkcija  $y = |||x - \beta_1| - \beta_2| - \beta_3|$ . Skaliramo  $xy$  ravninu tako da  $\beta_1 = 1$  i prepíšemo funkciju kao

$$f(x) = |||x - 1| - a| - b|, \tag{1.20}$$

gdje  $1 \leq a \leq b$  i  $b < a + 1$  (zbog Leme 1.4.2).

Na slici 1.14 prikazan je graf  $f(x)$  s označenim karakterističnim točkama. Pokazat ćemo da je svaka orbita funkcije  $f$  u konačnici 2-periodična.

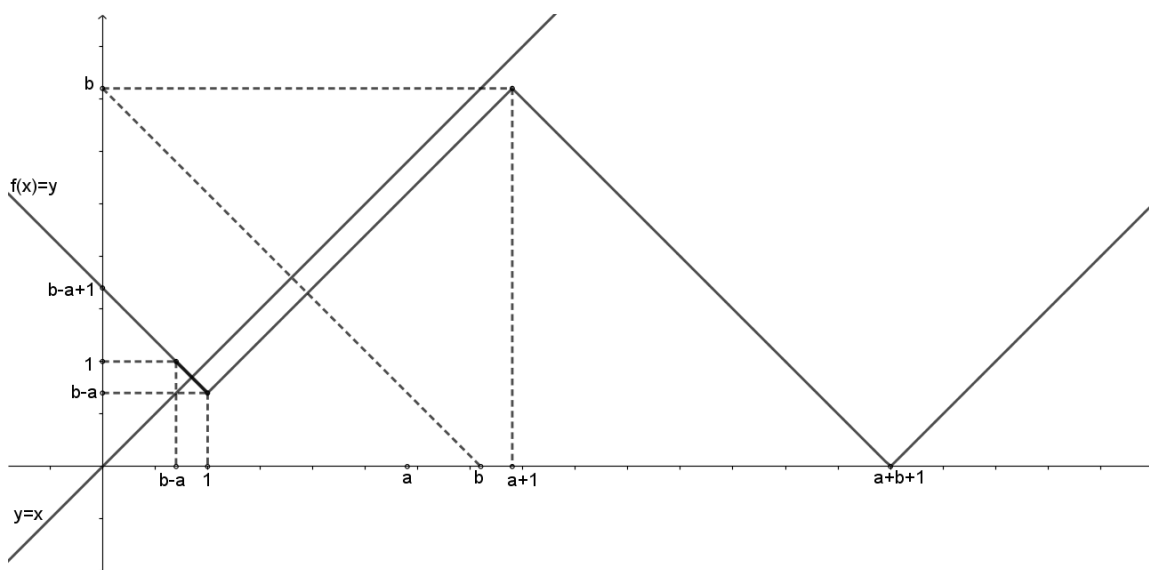
Prvo, promatramo  $f(x)$  na segmentu  $[0, 1]$ .

Dakle, imamo  $|x - 1| = 1 - x$  i  $x + a \geq 1$ , pa je  $f(x) = ||1 - x - a| - b| = |x + a - 1 - b|$ . Dalje,  $x \leq 1$  i  $a \leq b$ , pa imamo  $x + a - 1 - b \leq 0$  i vrijedi

$$f(x) = -x + b - a + 1 \tag{1.21}$$

na segmentu  $[0, 1]$ .

Pritom,  $f(x) \leq b$  na  $[0, 1]$ , jer  $x + a \geq 1$  pa  $f(x) = b - (x + a - 1) \leq b$ .


 Slika 1.14: Graf funkcije  $y = f(x)$ .

Sada promatramo  $f(x)$  na segmentu  $[1, b]$ .

Dakle, na ovom segmentu je  $x \geq 1$  pa je  $|x - 1| = x - 1$ , iz čega slijedi da je  $f(x) = |x - 1 - a| - b| = |a + 1 - x - b|$ . Dalje,  $x \geq 1$  i  $a \leq b$ , pa imamo  $x - 1 + b - a \geq 0$  i vrijedi

$$f(x) = x + b - a - 1 \quad (1.22)$$

na segmentu  $[1, b]$ .

Sada vidimo da je i na segmentu  $[1, b]$  vrijedi  $f(x) \leq b$  jer  $x \leq b \leq a + 1$ .

Ovim imamo eksplicitne vrijednosti za  $f(x)$  na cijelom  $[0, b]$  i vidimo da funkcija  $f$  preslikava taj segment sam u sebe (slika 1.14).

Promotrimo  $f(x)$  na segmentu  $[b, a + 1]$ .

Na ovom segmentu je, kao i na segmentu  $[1, b]$ ,  $f(x) = |x - 1 - a| - b| = |-x + 1 + a - b| = x + b - a - 1$ . Također, vidimo da zbog  $x \leq a + 1$  vrijedi  $f(x) \leq b$  i da je  $f(x) < x$  zbog  $b < a + 1$ .

Na segmentu  $[a + 1, a + b + 1]$  vrijedi  $f(x) = |x - 1 - a - b| = -x + a + b + 1$ , te je također  $f(x) \leq b$ .

Dakle, vidimo da  $f$  preslikava sve  $x \in [0, a + b + 1]$  na segment  $[0, b]$ .

Promotrimo iteracije funkcije  $f$  za  $x \geq a + b + 1$ .

Ako je  $x \geq a + b + 1$  tada je  $f(x) = x - a - b - 1$ .

Za  $x > a + b + 1$  vrijedi  $f(x) < x$ . Dakle, iteracijama se dobiva strogo padajući niz i svakako se postiže da za neki  $k$  iteracija  $f^k(x)$  bude u  $[0, b]$ , a daljnjim iteracijama vrijednosti ostaju u tom segmentu.

Preostaje ispitati kako se ponašaju vrijednosti  $f^n(x)$  na segmentu  $[0, b]$ .

Neka je rastav segmenta  $[0, b] = [0, b - a] \cup [b - a, 1] \cup [1, b]$  i označimo

$$I_1 = [0, b - a], \quad I_2 = [b - a, 1], \quad I_3 = [1, b].$$

Na segmentu  $[b - a, 1]$  je  $f(x) = -x + b - a + 1$  pa je

$$f(f(x)) = \|-x + b - a + 1 - 1 \mid -a \mid -b \mid = \|-x + b - a \mid -a \mid -b \mid.$$

Zbog  $x \geq b - a$  dalje imamo

$$f(f(x)) = \mid x - b + a - a \mid -b \mid = \mid x - b \mid -b \mid = \mid b - x - b \mid = x.$$

Ovime smo pokazali da za sve  $x \in [b - a, 1]$  vrijedi  $f^2(x) = x$ , to jest da je  $f$  2-periodička na tom segmentu.

Preostaje pokazati da se iteracijom  $f$  cijeli segment  $[0, b]$  preslika u  $[b - a, 1]$ . Potreb-  
nim iteracijama bit će određen pretperiod, a zatim će slijediti period 2.

Na segmentu  $[0, b - a]$  je  $f(x) = -x + b - a + 1$ . Uočimo da  $f$  preslika  $[0, b - a]$  u  $[1, b - a + 1]$ , a taj segment je sadržan u  $[1, b]$ .

Stoga je dovoljno pokazati da se iteracijama funkcije  $f$  svaka točka segmenta  $[1, b]$  preslika u neku točku segmenta  $[b - a, 1]$ .

Na segmentu  $[1, b]$  vrijedi  $f(x) = x + b - a - 1 = x - (a + 1 - b)$ .

Duljina segmenta  $[b - a, 1]$  iznosi  $a + 1 - b$ . Označimo  $a + 1 - b = d$  pa je tada  $f(x) = x - d$  na  $[1, b]$ . Znamo da  $0 < d < 1$ .

Vidimo da svaka iteracija od  $f$  "odsiječe" s lijeva segment duljine  $a + 1 - b$  od intervala  $I_3$  i "pošalje" ga u  $I_2$ , što znači da smo prvom iteracijom  $f$  podsegment  $[1, a - b + 2] \subseteq I_3$  preslikali u  $I_2$ .

Stoga, funkcija  $f$  preslika  $[1, b]$  u  $[b - a, 2b - a - 1]$  (pri čemu je  $2b - a - 1 < b$ ).

Sad, ako je  $2a - b - 1 \leq 1$ , onda smo gotovi s dokazom jer je dovoljna jedna iteracija da se cijeli  $I_3$  preslika unutar  $I_2$ . Ako je pak  $2a - b - 1 > 1$ , opet djelujemo s  $f$ .

Dalje, treba ponoviti primjenu  $f$ , sada na preostali dio od  $I_3$ , a to je  $[2 + a - b, b]$ . Njega najprije  $f$  preslika u  $[1, 2b - a - 1]$ , a onda ponovna primjena  $f$  preslika ovaj segment u  $[b - a, 3b - 2a - 2]$ . Sad, ako je  $3a - 2b - 2 \leq 1$ , onda smo gotovi s dokazom jer su dovoljne dvije iteracije da se cijeli  $I_3$  preslika unutar  $I_2$ . U protivnom, dalje djelujemo s  $f$ . Pomoću dvije iteracije dio  $[1, 2a - 2b + 3] \subseteq I_3$  preslika u  $I_2$ .

Vidimo da dobivamo niz točaka  $x_1 = a - b + 2, x_2 = 2a - 2b + 3, \dots, x_k = ka - kb + k + 1, \dots$  takvih da  $k$ -ta iteracija funkcije  $f$  preslika  $[1, x_k]$  u  $[b - a, 1]$ . Za dovoljno veliki  $k$  postići će se  $x_k \geq b$ , jer  $ka - kb + k + 1 \geq b$  ekvivalentno je s  $k(a - b + 1) \geq b - 1$ , dakle  $k \geq \frac{b-1}{a-b+1}$ . Kako je ovo omjer pozitivnih brojeva pa postoji takav  $k$ , te se u konačnom broju koraka može preslikati cijeli  $I_3$  u  $I_2$ .

□

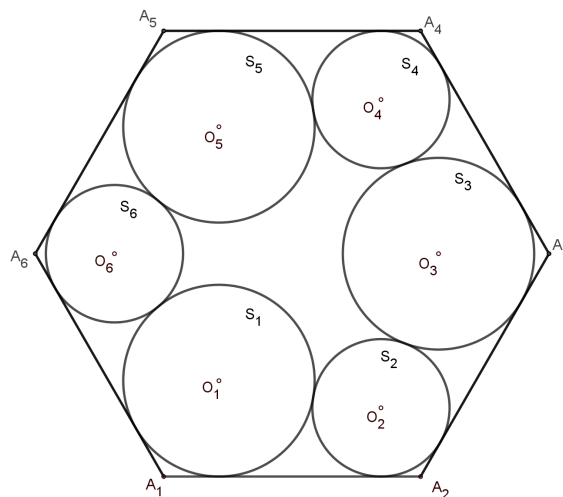
## Poglavlje 2

# Poopćenja teorema o šest kružnica

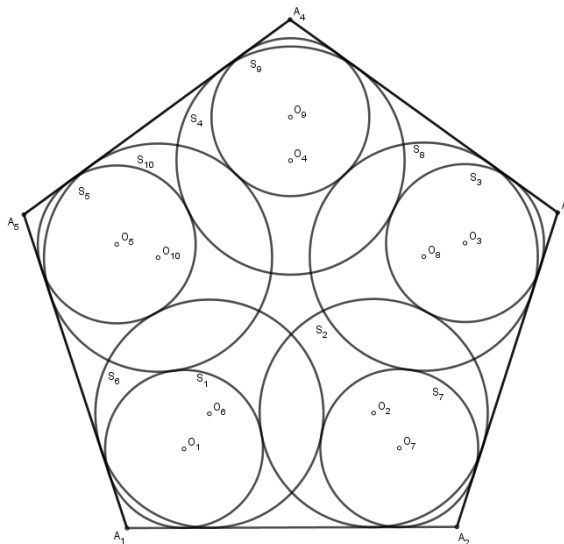
### 2.1 Poligoni i kružnice

#### *Dobri poligoni*

Pitanje koje se sada prirodno nameće je može li se teorem o šest kružnica proširiti na druge  $n$ -terokute. Primjerice, ako je  $P$  pravilni  $n$ -terokut s vrhovima  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tada, zbog simetričnosti, kružnice  $S_{i-1}$  i  $S_{i+1}$  se podudaraju za sve  $i = 1, 2, \dots, n$ . Slijedi da za takav pravilni  $n$ -terokut imamo da se  $S_1$  podudara s  $S_{n+1}$  za paran  $n$  (slika 2.1) i  $S_1$  podudara s  $S_{2n+1}$  za neparan  $n$  (slika 2.2).



Slika 2.1: Periodičke šestorke kružnica za pravilni šesterokut.



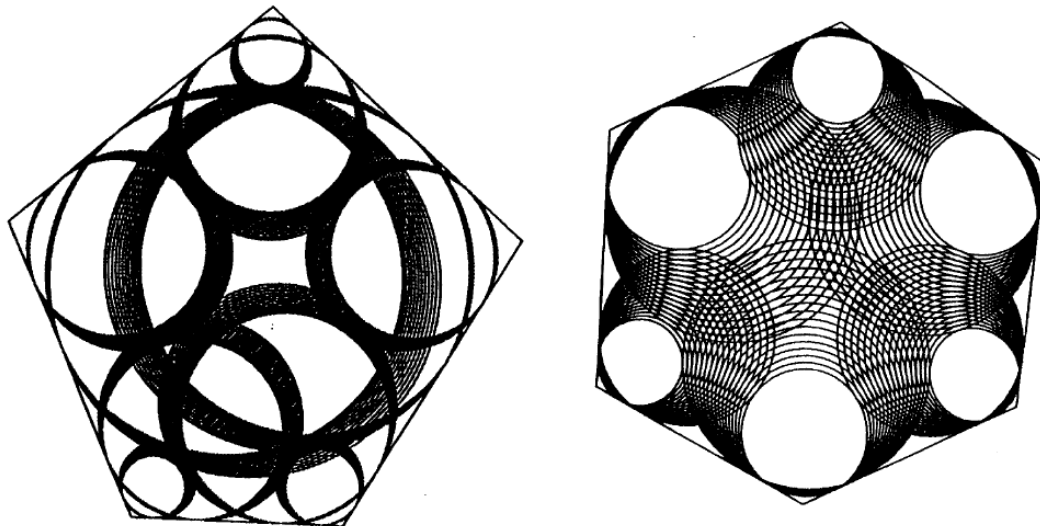
Slika 2.2: Periodičke desetorke kružnica za pravilni peterokut.

Međutim, pokazuje se da se periodičnost može izgubiti već i malim odstupanjima od pravilnosti poligona. Dva takva primjera ilustrirana su slikom 2.3 (preuzeto iz [4]). Dakle, periodičnost ne vrijedi općenito kod  $n$ -terokuta za  $n > 3$ , no pokazat ćemo da periodičnost ipak postoji za određenu klasu nepravilnih  $n$ -terokuta.

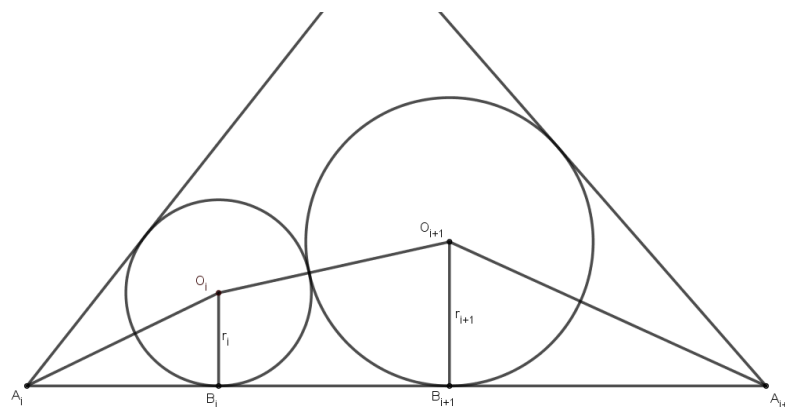
Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_n$  vrhovi konveksnog mnogokuta  $P$ , neka je  $2\alpha_i$  unutarnji kut u vrhu  $A_i$  i neka je  $a_i = |A_i A_{i+1}|$ . Kao i prije, upišemo kružnicu  $S_1$  u kut pri vrhu  $A_i$ , sljedeću kružnicu  $S_2$  upišemo u kut pri vrhu  $A_2$  tako da dodiruje  $S_1$ , i nastavljamo ciklički. Neka je  $O_i$  središte i  $r_i$  radijus kružnice  $S_i$ . Kako bi jednoznačno zadali pravilo izbora kružnice u svakom sljedećem koraku, pretpostavljamo da ortogonalne projekcije  $B_i$  i  $B_{i+1}$  središta  $O_i$  i  $O_{i+1}$  na pravac  $A_i A_{i+1}$  leže na segmentu  $A_i A_{i+1}$ , te da je  $B_i$  bliže  $A_i$  nego  $B_{i+1}$  (slika 2.4).

Opisat ćemo sada klasu  $n$ -terokuta na koju će se moći proširiti teorem o periodičkom nizu kružnica.

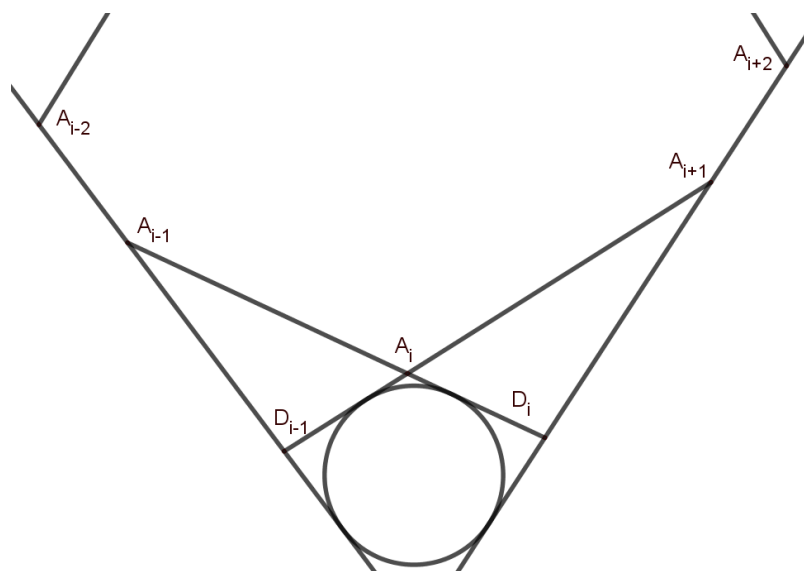
Budući da ključno svojstvo poligona te klase ima dosta složenu formulaciju, iz praktičnih razloga takve poligone nazvat ćemo *dobrim* poligonima (u [4] naziv glasi "nice  $n$ -gons"). Pretpostavimo da je  $n \geq 5$ , i  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \frac{\pi}{2}$  za sve  $i = 1, 2, \dots, n$ . Neka je  $D_i$  sjecište pravaca  $A_{i-1}A_i$  i  $A_{i+1}A_{i+2}$ . Promatrajući sliku 2.5, razmatramo kružnice pripisane trokutima  $A_{i-1}A_i D_{i-1}$  i  $A_i A_{i+1} D_i$  koje dodiruju stranice  $A_i D_{i-1}$  i  $A_i D_i$ , tim redom. Ako se ove kružnice podudaraju za svaki  $i$ , kažemo da je  $n$ -terokut *dobar*.



Slika 2.3: Periodičnost je narušena za neke  $n$ -terokute.



Slika 2.4: Određivanje svake sljedeće kružnice.



Slika 2.5: Prikaz svojstva *dobrih* poligona.



**Teorem o poligonima i kružnicama**

Naš je sljedeći cilj dokazati Teorem 2.1.1.

**Teorem 2.1.1.** *Neka je  $P$  dobar  $n$ -terokut.*

i) *Ako je  $n$  neparan tada je niz kružnica  $S_i$   $2n$ -periodičan:  $S_1 = S_{2n+1}$ .*

ii) *Ako je  $n$  paran, pretpostavimo da*

$$\prod_{i=1}^n (\sqrt{1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 + 1})^{(-1)^i} = 1; \quad (2.1)$$

*tada je niz kružnica  $S_i$   $n$ -periodičan:  $S_1 = S_{n+1}$ .*

Uočimo da je za neparne vrijednosti  $n \geq 5$  uvjet pripadnosti klasi *dobrih* poligona dovoljan za periodičnost niza kružnica  $S_i$ , dok je za parne vrijednosti  $n$  potreban još jedan dodatni uvjet.

Za dokaz Teorema 2.1.1 bit će nam važna karakterizacija *dobrih* poligona iskazana sljedećim teoremom.

**Teorem 2.1.2.**  *$n$ -terokut je dobar ako i samo ako postoji konstanta  $\rho > 0$  takva da*

$$a_i = \rho^2 (\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1), \quad (2.2)$$

*za sve  $i$ .*

*Dokaz.*

Primijetimo da  $\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} > 1$  jer je poligon *dobar* i vrijedi  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \frac{\pi}{2}$ .

Razmotrimo pripisane kružnice trokuta  $A_{i-1}A_iD_{i-1}$  na slici 2.6; neka je  $r$  njihov radijus. Iz pravokutnog trokuta  $OEA_i$ , s pravim kutom pri vrhu  $E$ , imamo da je  $\cot \alpha_i = \frac{|EA_i|}{r}$ , iz čega slijedi

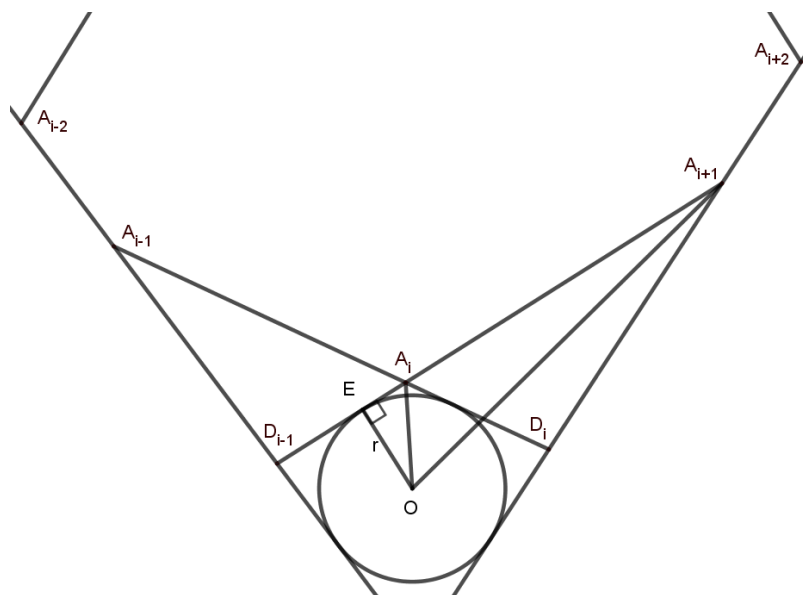
$$|EA_i| = r \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

Analogno, iz pravokutnog trokuta  $OEA_{i+1}$  imamo da je

$$|EA_{i+1}| = r \operatorname{tg} \alpha_{i+1}.$$

Nadalje,  $a_i = |A_iA_{i+1}|$ ,  $|EA_{i+1}| = |EA_i| + |A_iA_{i+1}|$  te iz toga slijedi

$$|EA_{i+1}| = r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} = r \operatorname{ctg} \alpha_i + a_i.$$


 Slika 2.6: Slika za dokaz teorema o *dobrim* poligonima.

Dakle,

$$\begin{aligned}
 r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} &= r \operatorname{ctg} \alpha_i + a_i \\
 r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} &= r \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} + a_i \\
 r \operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i &= r + a_i \operatorname{tg} \alpha_i \\
 r(\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1) &= a_i \operatorname{tg} \alpha_i \\
 \frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} &= \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha_i}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Slično, neka je  $r'$  radijus pripisane kružnice trokutima  $A_{i-1}A_iD_{i-1}$ ; tada imamo da vrijedi

$$\frac{a_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i-1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} = \frac{r'}{\operatorname{tg} \alpha_i}. \tag{2.4}$$

Poligon je *dobar* ako i samo ako se pripisane kružnice trokutima  $A_{i-1}A_iD_{i-1}$  i  $A_{i-1}A_iD_{i-1}$  podudaraju, tj. ako je  $r = r'$ , tada izjednačavanjem i uvrštavanjem (2.3) i (2.4) imamo

$$\frac{r}{\operatorname{tg} \alpha_i} = \frac{r'}{\operatorname{tg} \alpha_i} = \frac{a_{i-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{i-1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} = \frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1}. \tag{2.5}$$

Odavde zaključujemo da izraz  $\frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1}$  ne ovisi o  $i$ , to jest da je on konstantan. Ovime smo dokazali uvjet teorema, jednakost (2.2), te kao što smo i tvrdili vrijedi

$$\frac{a_i}{\operatorname{tg} \alpha_{i+1} \operatorname{tg} \alpha_i - 1} = \rho^2$$

$$a_i = \rho^2(\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1).$$

□

Sad prelazimo na dokaz Teorema 2.1.1.

*Dokaz.*

Slično, kao u dokazu teorema o šest kružnica, izrazit ćemo duljine stranica poligona pomoću kutova i radijusa upisanih kružnica.

Promotrimo još jednom sliku 2.4.

Sa slike vidimo da je duljina stranice poligona

$$|A_i A_{i+1}| = a_i = |A_i B_i| + |B_i B_{i+1}| + |B_{i+1} A_{i+1}|. \quad (2.6)$$

Ako se dvije kružnice radijusa  $r_i$  i  $r_{i+1}$ , središta  $O_i$  i  $O_{i+1}$ , dodiruju izvana (slika 2.4) tada je duljina  $\overline{O_i O_{i+1}} = r_i + r_{i+1}$ . Duljina njihova zajedničkog dijela na stranici, odnosno duljina segmenta  $\overline{B_i B_{i+1}}$  je

$$|B_i B_{i+1}|^2 = |O_i O_{i+1}|^2 - |O_{i+1} F|^2 = (r_i + r_{i+1})^2 - (r_{i+1} - r_i)^2 = 4r_i r_{i+1}$$

$$|B_i B_{i+1}| = \sqrt{4r_i r_{i+1}} = 2\sqrt{r_i r_{i+1}}.$$

Uočimo pravokutan trokut  $A_i B_i O_i$ , s pravim kutom pri vrhu  $B_i$ . Iz tog trokuta imamo da je  $\operatorname{ctg} \alpha_i = \frac{|A_i B_i|}{r_i}$ , odnosno  $|A_i B_i| = r_i \operatorname{ctg} \alpha_i$ . Analogno, iz pravokutnog trokuta  $A_{i+1} O_{i+1} B_{i+1}$  imamo da je  $|A_{i+1} B_{i+1}| = r_{i+1} \operatorname{ctg} \alpha_{i+1}$ .

Uvrštavanjem u (2.6) imamo:

$$a_i = r_i \operatorname{ctg} \alpha_i + 2\sqrt{r_i r_{i+1}} + r_{i+1} \operatorname{ctg} \alpha_{i+1}. \quad (2.7)$$

Sada uvodimo nove varijable, neka je

$$u_i = \sqrt{r_i \operatorname{ctg} \alpha_i}, \quad e_i = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}, \quad c_i = \sqrt{a_i};$$

imajmo na umu da je  $e_i > 1$ .

Jednadžba (2.7) sada glasi

$$u_i^2 + 2e_i u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2 = c_i^2. \quad (2.8)$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti eksplicitno pomoću hiperboličkih trigonometrijskih funkcija.

Nadopunimo (2.8) do punog kvadrata na dva načina te imamo

a)

$$\begin{aligned} u_i^2 + 2e_i u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2 + e_i^2 u_{i+1}^2 &= c_i^2 + e_i^2 u_{i+1}^2 \\ (u_i + e_i u_{i+1})^2 &= c_i^2 + e_i^2 u_{i+1}^2 - u_{i+1}^2 \\ (u_i + e_i u_{i+1})^2 &= c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_{i+1}^2 \\ u_i + e_i u_{i+1} &= \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_{i+1}^2} \\ u_i^2 + e_i u_{i+1} u_i &= u_i \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_{i+1}^2}, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_i^2 + 2e_i u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2 + e_i^2 u_i^2 &= c_i^2 + e_i^2 u_i^2 \\ (u_{i+1} + e_i u_i)^2 &= c_i^2 + e_i^2 u_i^2 - u_i^2 \\ (u_{i+1} + e_i u_i)^2 &= c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_i^2 \\ u_{i+1} + e_i u_i &= \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_i^2} \\ u_{i+1}^2 + e_i u_{i+1} u_i &= u_{i+1} \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_i^2}. \end{aligned}$$

Sada (2.8) možemo zapisati kao

$$u_i^2 + 2e_i u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2 = (u_i^2 + e_i u_i u_{i+1}) + (u_{i+1}^2 + e_i u_i u_{i+1}) = c_i^2$$

$$u_i \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_{i+1}^2} + u_{i+1} \sqrt{c_i^2 + (e_i^2 - 1) u_i^2} = c_i^2. \quad (2.9)$$

Uzimajući u obzir da je  $c_i = \sqrt{a_i}$  možemo zapisati  $c_i^2$  kao

$$c_i^2 = a_i = \rho^2 (\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1) = \rho^2 (e_i^2 - 1),$$

te množeci (2.9) s  $\frac{1}{c_i\rho}$ , imamo

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{\rho} \sqrt{\frac{c_i^2}{c_i^2} + \frac{(e_i^2 - 1)u_{i+1}^2}{c_i^2}} + \frac{u_{i+1}}{\rho} \sqrt{\frac{c_i^2}{c_i^2} + \frac{(e_i^2 - 1)u_i^2}{c_i^2}} &= \frac{c_i}{c_i\rho} \\ \frac{u_i}{\rho} \sqrt{1 + \frac{(e_i^2 - 1)u_{i+1}^2}{\rho^2(e_i^2 - 1)}} + \frac{u_{i+1}}{\rho} \sqrt{1 + \frac{(e_i^2 - 1)u_i^2}{\rho^2(e_i^2 - 1)}} &= \frac{c_i}{\rho} \\ \frac{u_i}{\rho} \sqrt{1 + \frac{u_{i+1}^2}{\rho^2}} + \frac{u_{i+1}}{\rho} \sqrt{1 + \frac{u_i^2}{\rho^2}} &= \frac{c_i}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Neka je  $x_i = \text{sh}^{-1}(\frac{u_i}{\rho})$  gdje  $\text{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ . Sada (2.11) možemo zapisati kao

$$\text{sh } x_i \text{ ch } x_{i+1} + \text{sh } x_{i+1} \text{ ch } x_i = \frac{c_i}{\rho},$$

$$\text{ili } \text{sh}(x_i + x_{i+1}) = \frac{c_i}{\rho}. \quad (2.12)$$

Iz čega slijedi

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} &= \text{sh}^{-1}\left(\frac{c_i}{\rho}\right) \\ x_{i+1} &= \text{sh}^{-1}\left(\frac{c_i}{\rho}\right) - x_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Označimo obitelj kružnica upisanih u  $i$ -ti kut poligona  $P$  s  $\mathcal{F}_i$ .

Imamo funkciju  $T_i: \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i+1}$  koja preslikava  $S_i$  u  $S_{i+1}$ . Možemo koristiti  $x_i$  kao koordinate u  $\mathcal{F}_i$ ; tada je (2.12) refleksija

$$T_i(x_i) = x_{i+1} = \text{sh}^{-1}\left(\frac{c_i}{\rho}\right) - x_i.$$

Iz ovog slijedi tvrdnja teorema. Promatrat ćemo dva slučaja, kada je  $n$  neparan i kada je  $n$  paran.

Ako je  $n$  neparan tada je preslikavanje  $T_n T_{n-1} \cdots T_1: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$  refleksija. Naime, označimo  $b_i = \text{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho})$ , te  $T_i(x_i) = x_{i+1} = b_i - x_i$ . Tada je

$$\begin{aligned} T_1(x_1) &= b_1 - x_1 = x_2 \\ T_2 T_1(x_1) &= T_2(x_2) = T_2(b_1 - x_1) = b_2 - (b_1 - x_1) = b_2 - b_1 + x_1 = x_3 \\ T_3 T_2 T_1(x_1) &= T_3(x_3) = T_3(b_2 - b_1 + x_1) = b_3 - (b_2 - b_1 + x_1) = b_3 - b_2 + b_1 - x_1 \\ &\dots \\ T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2 T_1(x_1) &= T_{n-1}(x_{n-1}) = b_{n-1} - b_{n-2} + \dots + b_2 - b_1 + x_1 = x_n \\ T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1(x_1) &= T_n(x_n) = b_n - b_{n-1} + \dots - b_2 + b_1 - x_1 \end{aligned}$$

Promotrimo drugo ponavljanje tog preslikavanja:

$$\begin{aligned} T_1 T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1(x_1) &= b_1 - (b_n - b_{n-1} + \dots - b_2 + b_1 - x_1) = b_1 - b_n + b_{n-1} - \dots + b_2 - b_1 + x_1 \\ &= -b_n + b_{n-1} + \dots - b_3 + b_2 + x_1 \\ T_2 T_1 T_n \dots T_2 T_1(x_1) &= b_2 - (-b_n + b_{n-1} + \dots - b_3 + b_2 + x_1) = b_n - b_{n-1} + \dots - b_4 + b_3 - x_1 \\ T_3 T_2 T_1 T_n \dots T_2 T_1(x_1) &= b_3 - (b_n - b_{n-1} + \dots - b_4 + b_3 - x_1) = -b_n + b_{n-1} - \dots + b_4 + x_1 \\ &\dots \\ T_{n-1} T_{n-2} \dots T_1 T_n T_{n-1} \dots T_1 &= b_{n-1} - (-b_n + b_{n-1} + x_1) = b_n - x_1 \\ T_n T_{n-1} \dots T_1 T_n T_{n-1} \dots T_1 &= b_n - (b_n - x_1) = x_1. \end{aligned}$$

Oдавде zaključujemo da se drugim ponavljanjem preslikavanja dobiva identiteta te je za slučaj kada je  $n$  neparan naš niz kružnica  $2n$ -periodičan.

Ako je  $n$  paran tada je preslikavanje translacija

$$T_n T_{n-1} \dots T_1(x_1) = b_n - b_{n-1} + \dots + b_2 - b_1 + x_1.$$

S obzirom na to da je  $b_i = \text{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho})$ , imamo

$$x_1 \rightarrow x_1 + \sum (-1)^i \text{sh}^{-1}(\frac{c_i}{\rho}). \quad (2.14)$$

Raspišemo sumu u (2.14) te vratimo supstitucije.

Prisjetimo se da za  $\text{sh}^{-1}(x)$  vrijedi da je  $\text{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ . Sada sumu u (2.14)

možemo zapisati kao

$$\sum (-1)^i \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{c_i}{\rho}\right) = \sum (-1)^i \ln\left(\frac{c_i}{\rho} + \sqrt{1 + \left(\frac{c_i}{\rho}\right)^2}\right). \quad (2.15)$$

Imamo da je  $a_i = \rho^2(\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1)$  te iz toga slijedi da je  $\frac{\sqrt{a_i}}{\rho} = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1}$ . Budući da je  $c_i = \sqrt{a_i}$  tada je  $\frac{c_i}{\rho} = \frac{\sqrt{a_i}}{\rho} = \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1}$ .  
Sumu iz (2.15) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} \sum (-1)^i \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{c_i}{\rho}\right) &= \sum (-1)^i \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{1 + (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1})^2}\right) \\ &= \sum (-1)^i \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1}\right) \\ &= \sum (-1)^i \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}\right) - \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3}\right) \\ &\quad + \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4}\right) - \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5}\right) \\ &\quad + \dots + \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n}\right) - \ln\left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5}}\right) \\ &\quad + \dots + \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1}}\right) \\ &= \ln\left[\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5}} \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1 - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1}}\right] \\ &= \ln\left[\prod_{i=1}^n \left(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}\right)^{(-1)^i}\right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Promotrimo sada pretpostavku teorema za paran  $n$ , (2.1).

Izraz  $\sqrt{1 - \operatorname{ctg} \alpha_i \operatorname{ctg} \alpha_{i+1}} + 1$  možemo zapisati i kao

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \operatorname{ctg} \alpha_i \operatorname{ctg} \alpha_{i+1}} + 1 &= \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}} + 1 \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1}{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}}. \end{aligned}$$

Sada umnožak iz pretpostavke teorema možemo zapisati kao

$$\prod_{i=1}^n (\sqrt{1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2} + 1)^{(-1)^i} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}} \right)^{(-1)^i}$$

odnosno,

$$\prod_{i=1}^n (\sqrt{1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2} + 1)^{(-1)^i} = \quad (2.17)$$

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}} \right)^{(-1)^i} \cdot \prod_{i=1}^n (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}})^{(-1)^i} = 1.$$

Primijetimo da je

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}}} \right)^{(-1)^i} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_4 \operatorname{tg} \alpha_5}{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_4} \cdots \frac{\operatorname{tg} \alpha_{n-2} \operatorname{tg} \alpha_{n-1}}{\operatorname{tg} \alpha_{n-3} \operatorname{tg} \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n}} = 1. \quad (2.18)$$

Uvrštavanjem (2.18) u (2.17) imamo

$$\prod_{i=1}^n (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}})^{(-1)^i} = 1. \quad (2.19)$$

Preostaje još da uvrstimo (2.19) u (2.16)

$$\begin{aligned} \sum (-1)^i \operatorname{sh}^{-1} \left( \frac{c_i}{\rho} \right) &= \ln \left[ \prod_{i=1}^n (\sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - 1} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_i \operatorname{tg} \alpha_{i+1}})^{(-1)^i} \right] \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

S obzirom na (2.2), poništavanje alternirajuće sume u (2.14) ekvivalentno je pretpostavci (2.1). Time je dokaz završen.  $\square$

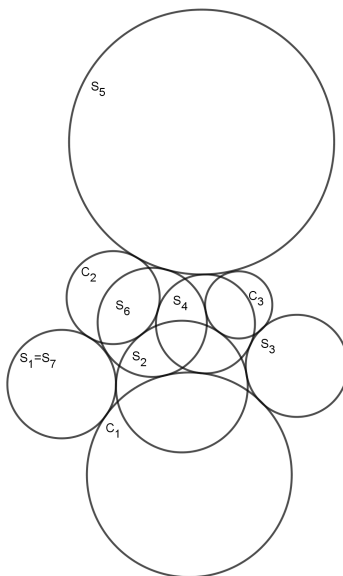


## 2.2 Teorem o devet kružnica

Nakon što su otkrili *teorem o šest kružnica*, C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts i J. A. Tyrrell krenuli su s daljnjim istraživanjem tražeći poopćenja tog teorema. Preciznim su crtanjem zamijenili svaku stranicu trokuta s kružnicom te otkrili da je općenitiji rezultat, *Teorem o devet kružnica*, također istinit.

### Teorem 2.2.1. Teorem o devet kružnica.

Neka su  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  tri kružnice u općem položaju u ravnini i neka je  $S_1$  kružnica koja dodiruje  $C_1$  i  $C_2$ . Promotrimo sada lanac kružnica:  $S_2$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_2$ ,  $C_3$  i  $S_1$ ;  $S_3$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_3$ ,  $C_1$  i  $S_2$ ;  $S_4$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_1$ ,  $C_2$  i  $S_3$ ;  $S_5$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_2$ ,  $C_3$  i  $S_4$ ;  $S_6$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_3$ ,  $C_1$  i  $S_5$ ;  $S_7$  je kružnica koja dodiruje kružnice  $C_1$ ,  $C_2$  i  $S_6$ . Postoji više izbora za svaku sljedeću kružnicu u svakom koraku, ali ako je u svakom koraku kružnica dobro odabrana, tada se kružnica  $S_7$  podudara s prvom kružnicom  $S_1$  i imamo zatvoren lanac kružnica (slika 2.7).



Slika 2.7: Teorem o devet kružnica.

Kada se lanac *zatvori* na ovaj način, devet kružnica  $C_1, C_2, C_3, S_1, \dots, S_6$  formiraju simetričan sustav tako da svaka kružnica dodiruje četiri ostale. Moguće je poredati oznake devet kružnica u skupine tri po tri tako da se dvije kružnice dodiruju ako i samo ako su njihove oznake u istom retku ili stupcu u tablici 2.1.

$C_1$	$C_2$	$C_3$
$S_5$	$S_3$	$S_1$
$S_2$	$S_6$	$S_4$

Tablica 2.1: Dvije se kružnice dodiruju ako i samo ako su im oznake u istom retku ili stupcu tablice.

Sada ćemo opisati što je *dobar* odabir kružnice spomenut u teoremu 2.2.1.

Prvo, za tri dane kružnice u općem položaju može se opisati osam kružnica koje dodiruju sve tri. (Ovo je tvrdnja glasovitog *Apolonijevog problema*.) Kada se ipak dvije od tri dane kružnice već dodiruju, ovaj broj se smanjuje na šest kružnica od kojih se dvije kružnice broje dvostruko i četiri jednostruko. Primjerice, s oznakama kao u teoremu 2.2.1, postoje dvije kružnice iz pramena kružnica određenih s  $C_2$  i  $S_1$  koje također dodiruju i  $C_3$ , i one su dva od mogućih šest odabira za  $S_2$ . Ova dva izbora broje se dvostruko i nazvat ćemo ih *posebni* izbori za  $S_2$ . Ostala četiri izbora nazvat ćemo *općeniti* izbori. Slična razlika između posebnih i općenitih izbora pojavljuje se u svakoj sljedećoj fazi konstrukcije lanca.

Definirat ćemo centar sličnosti dviju kružnica.

**Definicija 2.2.2.** *Točka u kojoj se sijeku dvije zajedničke vanjske tangente dviju kružnica zove se centar sličnosti danih kružnica.*

Drugo, ako je kružnica  $S$  nacrtana tako da dodiruje dvije dane kružnice, tada dužina koja spaja dvije točke dodira nužno prolazi kroz jedan od centara sličnosti danih kružnica i možemo reći da  $S$  pripada tom centru sličnosti. Prema tome, za šest mogućih izbora za  $S_2$  u našem lancu, tri izbora (jedna poseban i dva opća) pripadaju svakom centru sličnosti od  $C_2$  i  $C_3$ .

Konačno, centri sličnosti tri kružnice, gledano u parovima, su šest vrhova potpunog četverokuta. S ovim činjenicama, možemo precizirati iskaz teorema 2.2.1:

*Odaberemo tri kolinearna centra sličnosti (jedan za svaki par  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ ), i držimo se pravila da u svakoj fazi konstrukcije lanca, kružnica  $S_i$  pripada jednom odgovarajućem centru od fiksnih centara sličnosti. Ako u svakom koraku konstrukcije uvijek odaberemo poseban izbor za  $S_i$  tada će se lanac zatvoriti. S druge strane, ako u svakoj fazi odaberemo općeniti izbor, i ako su  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$  izabrane po volji, tada je uvijek moguće izabrati  $S_5$  i  $S_6$  tako da se lanac zatvori.*

Posljedica je ovih razmatranja da, za dani položaj kružnice  $S_1$ , postoji sveukupno osamnaest lanaca koji se zatvaraju, od kojih su dva *posebna* i šesnaest *općenitih*.

Teorem 2.2.1 je prvi dokazao J. A. Tyrrell zajedno sa svojim studentom M. T. Powellom, koristeći eliptičke funkcije. Dokaz ovdje nećemo izložiti jer metoda eliptičkih funkcija prelazi okvire ovog rada. Dokazi se mogu naći u [3] i [6].

# Bibliografija

- [1] D. Ivanov i S. Tabachnikov, *The six circles theorem revisited*, The American Mathematical Monthly **123** (2016), br. 7, 689–698.
- [2] M. J. Laird i J. R. Sylvester, *John Alfred Tyrrell, 1932–1992*, Bulletin of the London Mathematical Society **43** (2011), br. 2, 401–405.
- [3] J. Snape, *Applications of elliptic functions in classical and algebraic geometry*, (2004), dostupno na <https://wwwx.cs.unc.edu/~snape/publications/mmath/dissertation.pdf> (travanj 2019.).
- [4] S. Tabachnikov, *Going in circles: variations on the Money-Coutts theorem*, Geometriae Dedicata **80** (2000), br. 1-3, 201–209.
- [5] J. A. Tyrrell, *Cecil John Alvin Evelyn*, Bulletin of the London Mathematical Society **9** (1977), br. 3, 328–329.
- [6] J. A. Tyrrell i M. T. Powell, *A theorem in circle geometry*, Bulletin of the London Mathematical Society **3** (1971), br. 1, 70–74.

# Sažetak

U ovom radu prikazan je manje poznat teorem elementarne geometrije, *Teorem o šest kružnica*, i neke njegove generalizacije. Ovaj teorem jedan je od mnogih u knjizi "*The seven circles theorem and other new theorems*" koja je rezultat zajedničkog rada trojice prijatelja i geometrijskih entuzijasta, C. J. A. Evelyn-a, G. B. Money-Coutts-a, i J. A. Tyrrell-a.

Prvo poglavlje sadrži kratku povijest podrijetla teorema o šest kružnica i dvije različite formulacije te njihove dokaze. Razmatraju se lanci kružnica upisanih u dani trokut  $P_1P_2P_3$ : prva kružnica,  $C_1$ , upisana je u kut pri vrhu  $P_1$ ;  $C_2$ , upisana je u kut pri vrhu  $P_2$  i dodiruje kružnicu,  $C_1$ ;  $C_3$ , upisana je u kut pri vrhu  $P_3$  i dodiruje  $C_2$ ; i tako dalje, ciklički. Tvrdnja je teorema da je ovaj postupak periodičan, to jest,  $C_7 = C_1$ . Prva formulacija teorema razmatra samo lance kružnica kojima sve dodirne točke leže na stranicama trokuta, a ne na njihovim produžetcima, te je u ovom slučaju lanac 6-periodičan. Nadalje, promatraju se lanci kružnica u kojima sljedeća kružnica u lancu može dodirivati stranicu trokuta, ali i produžetak te stranice. Pokazuje se da je, općenito, lanac konačno 6-periodičan, ali može imati proizvoljno dug pretperiod.

U drugom poglavlju razmatra se mogućnost poopćenja teorema o šest kružnica i na druge poligone, osim trokuta. Dokazuje se da postoji klasa nepravilnih  $n$ -terokuta za koje je sačuvana periodičnost. Konačno, razmatra se zanimljiva varijacija glavnog teorema, kada su stranice trokuta zamijenjene kružnicama. Tyrrell i Powell dokazali su da je i tada sačuvana 6-periodičnost.

# Summary

The topic of this graduate thesis is one of lesser known gems of elementary geometry, *The six circles theorem*, and some of its generalizations. This theorem is one of many theorems in the book "*The seven circles theorem and other new theorems*" which is a result of collaboration of three geometry enthusiasts, C. J. A. Evelyn, G. B. Money-Coutts, and J. A. Tyrrell.

The first chapter contains a short history of The six circles theorem's origins and two different forms and proofs of it. The theorem concerns chains of circles inscribed in a given triangle  $P_1P_2P_3$ : the first circle,  $C_1$ , inscribed in the first angle at  $P_1$ ;  $C_2$ , inscribed in the angle at  $P_2$  and tangent to the circle  $C_1$ ;  $C_3$ , inscribed in the angle at  $P_3$  and tangent to  $C_2$ , and so on, cyclically. The claim of the theorem is that this process is periodic, that is,  $C_7 = C_1$ . The first form of the theorem holds for a chain of circles for which all tangency points lie on the sides of the triangle, and not their extensions. Secondly, chains of circles are observed for which the next circle can be tangent to a side of the triangle but also to its extension. It is proven that, in general, the chain is eventually 6-periodic but may have an arbitrarily long pre-period.

In the second chapter it is investigated whether The six circles theorem extends to polygons other than triangles. It is shown that there is a subclass of irregular  $n$ -gons for which periodicity holds. Finally, an interesting variation of the main theorem is considered, where the sides of a triangle are replaced by circles. It was proven by Tyrrell and Powell that the 6-periodicity persists even then.

# Životopis

Rođena sam 27.12.1992. u Splitu. Odrasla sam u Jelsi na otoku Hvaru.

Nakon osnovne škole, koju sam pohađala do 2007. godine, upisala sam opću gimnaziju u Jelsi, u kojoj sam maturirala 2011. godine. Iste godine započela sam sa studiranjem upisom preddiplomskog sveučilišnog studija Matematike, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. U srpnju 2015. godine stekla sam diplomu prvostupnice matematike. Nakon stjecanja diplome prvostupnice upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.