# Kombinatorni problemi distribucija

Polić, Barbara

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Barbara Polić

# KOMBINATORNI PROBLEMI DISTRIBUCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, travanj, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Hvala mojim dragim roditeljima koji su svojim skromnim i teškim radom pokazali vrijednost krvavih ruku i urezanih žuljeva.*

*Hvala bratu i sestrama koji su mi pokazali da je dijeljenje zapravo množenje,*
*prijateljima koji znaju svakoj kutiji susreta pridružiti kuglice šale,*
*Mariji što neumorno traži rješenja dosad nerješivih problema.*

# Sadržaj

# Uvod

Već od malih nogu susrećemo se s problemima kao što su dijeljenje bombona među djecom, raspoređivanje djece u grupe za vrijeme igre itd. Na spomenutim primjerima je jasno da broj mogućih rasporeda ovisi o tome jesu li svi bomboni jednaki, odnosno hoće li sve grupe djece sudjelovati u grupi. Međutim, problem postaje dodatno složeniji ako dodamo još neke uvjete, npr. svako dijete može pojesti određeni broj bombona ili grupe moraju imati različit broj djece. U odrasloj dobi susrećemo se s još ozbiljnijim problemima: raspoređivanje zaposlenika po različitim sektorima u tvrtci s ograničenim brojem ljudi u kojima je potrebno izabrati predstavnika svakog sektora, ili pak raspoređivanje ispita studentima tako da nijedan od njih ne ispravlja svoj test. Zbog svega toga nam izrazi „kombinirati", „distribuirati" i „raspodijeliti" nisu strani. S matematičkog gledišta, distribucija (lat. distributio - raspodjela) je najčešći kombinatorni problem usko povezan s permutacijama i kombinacijama. U ovom radu nećemo tražiti sve moguće distribucije određenog problema već samo njihov broj.

Cilj ovog rada je preko modela kuglica i kutija napraviti preciznu analizu slučajeva distribucija uz naglasak na pitanje različitosti kutija i kuglica. Distribucija je valjana ako su sve kuglice raspoređene, dok ćemo nekad dopuštati da nisu sve kutije neprazne. U prvom poglavlju ćemo se prisjetiti raznih definicija, teorema i propozicija koje će nam pomoći u otkrivanju broja raspodjela. Za razliku od ostalih poglavlja, u ovom poglavlju propozicije neće biti dokazane. U drugom poglavlju proučavamo distribuciju kuglica u jednake kutije s pretpostavkama da se kuglice razlikuju ili ne razlikuju, kutije imaju ili nemaju ograničen kapacitet, mogu li se pojaviti prazne kutije ili su sve kutije neprazne itd. U trećem poglavlju proučavamo distribuciju kuglica u različite kutije sa sličnim pretpostavkama kao u prethodnom poglavlju. Na kraju, u Zaključku je dan tablično pregled svih rezultata.

# Poglavlje 1

# Definicije i propozicije potrebne za računanje broja distribucije

U ovom poglavlju dajemo pregled osnovnih pojmova i tvrdnji koje koristimo u sljedećim poglavljima. Prije svega, moramo krenuti od preslikavanja. Ako bismo distribuciju gledali kao funkciju koja određenoj kuglici pridružuje neku kutiju tada trebamo definirati sljedeće:

**Definicija 1.0.1.** Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je *injekcija* ako vrijedi

$$(\forall x, x' \in S)\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')).$$

Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je *surjekcija* ako vrijedi

$$(\forall y \in T)\ (\exists x \in S)\ (y = f(x)).$$

Za funkciju $f : S \to T$ kažemo da je *bijekcija* ako je $f$ injekcija i surjekcija.

Budući da će broj kuglica i kutija biti konačan broj te ćemo prebrojavati raspodjele moramo definirati osnovna pravila prebrojavanja.

**Definicija 1.0.2.** Kažemo da je skup $S$ *konačan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da postoji bijekcija između skupova $S$ i $\{1, \ldots, n\}$.
Nadalje, tada kažemo da $S$ ima $n$ elemenata ili da je $n$-člani skup.

Broj elemenata u skupu $S$ ćemo označavati s oznakom $|S|$.

**Propozicija 1.0.1. Princip jednakosti (bijekcije)**
Dva skupa imaju isti broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija između njih.

**Propozicija 1.0.2. Princip zbroja**
Neka je $n \in \mathbb{N}$, a $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni međusobno disjunktni skupovi (tj. $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $i \neq j$). Tada je njihova unija $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = \bigcup_{i=1}^n S_i$ konačan skup i vrijedi

$$\left| \bigcup_{i=1}^n S_i \right| = \sum_{i=1}^n |S_i| .$$

**Propozicija 1.0.3. Princip umnoška**
Neka je $n \in \mathbb{N}$, a $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni skupovi. Tada je Kartezijev produkt $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \prod_{i=1}^n S_i$ konačan skup i vrijedi

$$\left| \prod_{i=1}^n S_i \right| = \prod_{i=1}^n |S_i| .$$

Kako se ne bi dogodilo da neku raspodjelu prebrojimo više puta, potrebna nam je sljedeća formula poznata pod nazivom FUI formula koju je u 19. stoljeću prvi jasno formulirao i dokazao englesko-američki matematičar James J. Sylvester.

**Propozicija 1.0.4** (Formula uključivanja-isključivanja FUI)**.** Neka je $S$ konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$. Tada vrijedi formula:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left| A_i \cap A_j \right| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| -$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| .$$

Ovu formulu možemo na malo drugačiji način napisati. Ali za to nam je potrebna definicija komplementa.

**Definicija 1.0.3.** Neka je $S$ skup te $A \subseteq S$. *Komplement skupa A*, u oznaci $\overline{A}$ , definiramo kao

$$\overline{A} := \{x \in S | x \notin A\} .$$

Uočavamo da vrijedi $S = A \cup \overline{A}$ . Budući da su skupovi disjunktni (tj. njihov presjek je prazan skup) vrijedi $|S| = |A| + \left|\overline{A}\right|$ . U našem slučaju vrijedi

$$S = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \bigcup \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} .$$

Ako iskoristimo jednu od de Morganovih formula $\left(\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\right)$ dobivamo

$$S = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \bigcup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right) ,$$

odnosno $|S| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right|$.
Kada izrazimo $|S|$ te iskoristimo FUI formulu, dobivamo:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = |S| - \sum_{1\le i\le n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1\le i<j<k\le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| +$$
$$\cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| .$$

U uvodnom dijelu je rečeno da je distribucija usko vezana za osnovne kombinatorne pojmove: permutacija i kombinacija te ćemo ih zbog toga pobliže objasniti.

**Definicija 1.0.4.** Neka je dan skup $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. *Permutacija skupa S bez ponavljanja* je svaka bijekcija $f : S \to S$. Drugim riječima, permutacija je svaka uređena $n$-torka različitih elemenata iz skupa S.

Zbog deranžmana koje ćemo susresti u dijelu 3.1.4 moramo prije toga znati što je fiksna točka. Ona će nam predstavljati kuglicu koja je pridružena kutiji iste boje.

**Definicija 1.0.5.** Za preslikavanje $f : S \to S$, točka $x \in S$ je *fiksna* ako je $f(x) = x$.

**Definicija 1.0.6.** Faktorijel nekog prirodnog broja $n$ označavamo s $n!$ te definiramo na sljedeći način:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n .$$

Dogovorno se uzima $0! := 1$.

**Propozicija 1.0.5.** Broj različitih permutacija skupa od $n$ elemenata je $P_n = n!$ .

**Definicija 1.0.7.** Neka je dan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Svaka uređena $n$-torka elemenata iz skupa S se zove *permutacija skupa S s ponavljanjem*.

Na prvom mjestu uređene $n$-torke može biti bilo koji element iz $S$, tj. postoji $k$ mogućnosti za odabir prvog člana. Na drugom mjestu također postoji $k$ mogućnosti. Možemo zaključiti da na svakom mjestu uređene $n$-torke postoji $k$ mogućnosti. Po principu umnoška slijedi da je ukupan broj uređenih $n$-torki elemenata iz $S$ jednak $k \cdot k \cdots k$, odnosno $k^n$.

**Propozicija 1.0.6.** Neka je dan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Broj permutacija skupa $S$ s ponavljanjem među kojima je element $a_1$ biran $n_1$ puta, $a_2$ biran $n_2$ puta (općenito element $a_i$ biran $n_i$ puta) jednak je

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} ,$$

pri čemu je $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ .

**Definicija 1.0.8.** Neka je dan skup $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Neka je $k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$. Svaki $k$-člani podskup skupa $S$ se zove *k-kombinacija bez ponavljanja*.

**Definicija 1.0.9.** *Binomni koeficijent* je broj koji se označava s $\binom{n}{k}$ i definira se na sljedeći način:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} ,$$

gdje su $n, k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n$.

**Propozicija 1.0.7. Simetrija binomnih koeficijenata**
Za cijele brojeve $n, k \geq 0$ vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} .$$

**Propozicija 1.0.8. Binomni teorem**
Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ i svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} .$$

**Propozicija 1.0.9.** Broj svih $k$-kombinacija bez ponavljanja u skupu od $n$ elemenata jednak je $\binom{n}{k}$.

Jedan od snažnijih alata u kombinatorici su funkcije izvodnice.

**Definicija 1.0.10.** Neka je $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ niz realnih (ili kompleksnih) brojeva. Pripadna obična *funkcija izvodnica* (kratko FI) je formalni red potencija

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n .$$

U ovom slučaju red smo nazvali formalnim jer nam nije bitno konvergira li ili ne. On je pomoćni alat kako bismo iskoristili njegove koeficijente uz određeni izraz. Koeficijent uz $x^k$ označavamo s $\langle x^k \rangle$. Nadalje, za funkcije izvodnice vrijede sljedeća pravila:

- **Pravilo jednakosti**: $A = B$ (tj. $A(x) = B(x),\ x \in \mathbb{R}) \iff (\forall n \geq 0)\, a_n = b_n$ .

- **Pravilo zbroja**: $A(x) + B(x) = (A + B)(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n)\, x^n .$$

- **Pravilo množenja**: $A(x) \cdot B(x) = C(x)$, tj.

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n \ ,$$

gdje je $c_0 = a_0 b_0,\ \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ \ldots,\ \ c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \ldots$

Funkcije izvodnice ćemo koristiti kao pomoćno sredstvo u pronalaženju broja raspodjele jednakih kuglica u različite kutije.

U složenijim zadacima nakon višestrukog korištenja FI formule često je komplicirano naći traženi koeficijent uz određeni izraz. Tada su potrebne druge formule koje olakšavaju rješavanje zadatka kao što je formula za sumu članova geometrijskog niza.

**Definicija 1.0.11.** *Geometrijski red* je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. red oblika $\sum_{n=0}^{\infty} = a + aq + aq^2 + \ldots$

**Propozicija 1.0.10.** Suma prvih $n$ članova geometrijskog niza jednak je

$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ ,$$

pri čemu je $a$ prvi član reda, a $q,\ (q \neq 1)$ zajednički omjer.

Nakon korištenja geometrijskog reda u zadacima će biti potrebna sljedeća lema:

**Lema 1.0.1.** Za $n,\ k \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k \ .$$

U sljedećim poglavljima $k$ će označavati broj kutija dok $n$ broj kuglica. Svaki rezultat u potpoglavlju će biti zapisan u obliku teorema.

# Poglavlje 2

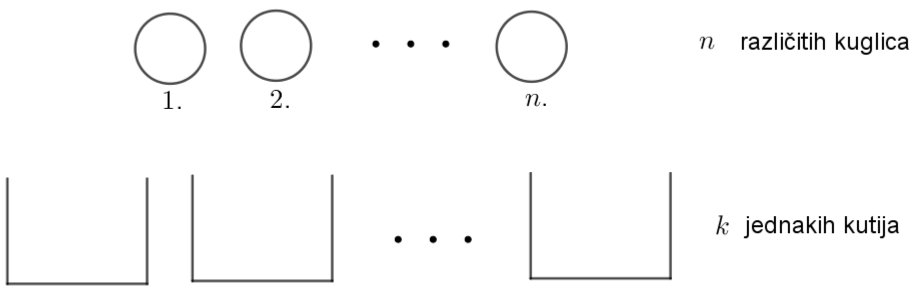
# Kutije se ne razlikuju

U ovom poglavlju će se proučavati distribucije kada su kutije jednake. Različite kuglice će nas dovesti do pojma particije $n$-članog skupa, Stirlingovih brojeva druge vrste te Bellovih brojeva dok će pojam particije prirodnog broja $n$ biti spomenut u slučaju jednakih kuglica.

## 2.1 Kuglice se razlikuju

### 2.1.1 Kutije su neprazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Pitanje koje nam se prvo postavlja je na koliko načina možemo raspodijeliti $n$ različitih kuglica u $k$ nepraznih jednakih kutija. Kako bismo kuglice razlikovali, možemo ih označiti s rednim brojevima 1., ..., n.




Slika 2.1: Prikaz različitih kuglica i jednakih kutija

Dakle, želimo n različitih kuglica rasporediti u k jednakih kutija a da pritom nema praznih kutija. Matematički rečeno, skup od n elemenata treba podijeliti u k podskupova. Broj takvih raspodjela upravo nam daje Stirlingov broj druge vrste [2, Definicija 5.5]. No, kako bismo definirali taj novi pojam, potrebno je znati definiciju *particije skupa* [4].

**Definicija 2.1.1.** *Particija n-članog skupa* je familija nepraznih disjunktnih podskupova koji u uniji daju cijeli $n$-člani skup. Pod *k-particijom* podrazumijevamo sve particije $n$-članog skupa kojoj je broj podskupova jednak $k$.

**Definicija 2.1.2.** Broj $k$-particija $n$-članog skupa označavamo sa $S(n,k)$. Broj $S(n,k)$ se zove *Stirlingov* [1] *broj druge vrste*.

Za $k = 0$ vrijedi da $n$ elemenata trebamo raspodijeliti u 0 disjunktnih podskupova a takva raspodjela ne postoji. Dakle $S(n,0) = 0$. Očito je $S(n,n) = 1$ jer je broj disjunktnih podskupova jednak broju elemenata u skupu te će svaki podskup imati po jedan element. Također je očito $S(n,1) = 1$ jer jedan podskup mora imati sve elemente a to je upravo cijeli skup pa je takva podjela jedinstvena. Za $1 \leq n < k$ trebalo bi biti više disjunktnih podskupova koji čine particiju nego elemenata u skupu pa ne možemo napraviti raspodjelu tako da svi takvi podskupovi imaju barem jedan element, tj. da su svi neprazni. Dakle, za ovaj slučaj vrijedi $S(n,k) = 0$. Zanimljivi su slučajevi za $1 \leq k < n$. Nadalje, dogovorno uzimamo da je $S(0,0) := 1$ te $S(0,k) = 0,\ k \geq 1$.

Pogledajmo na konkretnom primjeru broj odgovarajućih particija, odnosno vrijednosti Stirlingovog broja druge vrste:

**Primjer 2.1.1.** Neka je dan skup $S = \{1,2,3,4\}$. Ispiši sve raspodjele elemenata od $S$ u

a) 1-particiju, b) 2-particije, c) 3-particije,
d) 4-particije, e) 5-particija,

te izračunajmo Stirlingov broj druge vrste za svaki podzadatak.

a) Postoji jedna podjela: $\big\{\{1,2,3,4\}\big\}$. Dakle, $S(4,1) = 1$.

b) Najprije pogledajmo slučajeve u kojima particiju čine jednočlani i tročlani skup, a zatim particije koju čine dvočlani skupovi:

$$\begin{array}{ll}
\big\{\{1\},\{2,3,4\}\big\}, & \big\{\{1,2\},\{3,4\}\big\}, \\
\big\{\{2\},\{1,3,4\}\big\}, & \big\{\{1,3\},\{2,4\}\big\}, \\
\big\{\{3\},\{1,2,4\}\big\}, & \big\{\{1,4\},\{2,3\}\big\}. \\
\big\{\{4\},\{1,2,3\}\big\}, &
\end{array}$$

Postoji 7 takvih podjela pa je $S(4,2) = 7$.

c) Uočimo kako ovdje imamo jednu „vrstu” podjele, tj. sve particije se sastoje od dva jednočlana skupa i jednog dvočlanog:

[1] James Stirling (1692 - 1770), škotski matematičar

$$\Big\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\Big\}, \qquad \Big\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\Big\},$$
$$\Big\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\Big\}, \qquad \Big\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\Big\},$$
$$\Big\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\Big\}, \qquad \Big\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\Big\}.$$

Dakle, postoji 6 takvih podjela pa je $S(4,3) = 6$.

d) Postoji jedna takva podjela, a to je da svaki element stavimo u jedan podskup čime dobivamo: $\Big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1\}\Big\}$.
Dakle, $S(4,4) = 1$.

e) Ne postoji takva podjela jer ne možemo 4 elementa raspodijeliti u 5 disjunktnih nepraznih podskupova. Dakle, vrijedi $S(4,5) = 0$.

Naglasimo da ovdje nije bitan broj elemenata u podskupu particije. Cilj je da svaki element iz zadanog skupa pripada nekom podskupu. Budući da poredak podskupova u particiji nije bitan, u našem slučaju ti podskupovi nam predstavljaju jednake kutije.

Dobiveni rezultat možemo zapisati u obliku teorema:

**Teorem 2.1.1.** Broj rasporeda $n$ različitih kuglica u $k$ nepraznih jednakih kutija jednak je $S(n,k)$ pri čemu kutije mogu primiti neograničen broj kuglica.

Kao što smo rekli, Stirlingovi brojevi će nam biti važni u drugim slučajevima pa je korisno spomenuti još neke zanimljive činjenice vezane uz njih. Nadalje, postoji eksplicitna formula za pronalaženje Stirlingovog broja druge vrste i nju ćemo kasnije spomenuti. Isto tako postoji rekurzivna formula pomoću koje možemo izračunati Stirlingov broj nekog broja koristeći Stirlingove brojeve manjih brojeva [2, Teorem 5.8.]:

**Propozicija 2.1.1.** Za sve prirodne brojeve $2 \leq k < n$, vrijedi

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

*Dokaz.* Neka je zadan skup $S = \{1,2,\ldots,n\}$. Želimo sve elemente raspodijeliti u particije od $k$ elemenata. Njih možemo podijeliti u dvije skupine: $k$-particije u kojima je skup $\{n\}$ element particije i $k$-particije u kojima je element $n$ u podskupovima s drugim elementima.

U prvom slučaju ostali elementi skupa (njih $n-1$) se raspoređuju u preostalih $k-1$ podskupova te se mogu raspodijeliti na $S(n-1,k-1)$ načina. Iz toga slijedi da broj particija s elementom $\{n\}$ jednak $S(n-1,k-1)$.
U drugom slučaju naprije rasporedimo sve elemente skupa osim $n$ elementa u $k$ podskupova. Time dobivamo $k$-particije $(n-1)$-članog skupa. Element $n$ možemo staviti u bilo koji podskup $k$-particije. Uočimo da to možemo napraviti na $k$ načina. Budući da $k$-particija $(n-1)$-članog skupa ima $S(n-1,k)$, slijedi da je nakon ubacivanja elementa $n$ u podskupove broj takvih particija jednak $k \cdot S(n-1,k)$.

Kada zbrojimo načine iz oba slučaja, po principu zbroja dobivamo ukupan broj $k$-particija $n$-članog skupa, odnosno $S(n,k)$. □

Koristeći gornju rekurzivnu formulu, uz prethodno komentirane uvjete $S(n,n) = S(n,1) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ možemo odrediti $S(n,k)$ za sve prirodne brojeve $k$ i $n$, $k \leq n$. Međutim, da odredimo $S(n,k)$ moramo najprije odrediti sve $S(m,l)$ za $m \leq n$, $l \leq k$, $(m,l) \neq (n,k)$. Taj postupak je praktično napraviti u tablici koju nazivamo *Stirlingovim trokutom*.

Tablica 2.1: Stirlingov trokut za $n, k \in \{1,\ 2,\ \ldots, 9\}$

| $n$ | $S(n,1)$ | $S(n,2)$ | $S(n,3)$ | $S(n,4)$ | $S(n,5)$ | $S(n,6)$ | $S(n,7)$ | $S(n,8)$ | $S(n,9)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | |
| 7 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | |
| 8 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | |
| 9 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 |

Ilustrirajmo za $n = 7$ i $k = 4$ kako smo popunjavali tablicu koristeći prethodnu rekurzivnu formulu. Za izračunavanje $S(7,4)$ potrebni su nam brojevi $S(6,3)$ i $S(6,4)$. Prema rekurzivnoj formuli vrijedi $S(7,4) = S(6,3) + 4 \cdot S(6,4) = 90 + 4 \cdot 65 = 350$ te smo dobili jednak broj kao u tablici.

Pogledajmo preciznije treći stupac u tablici. Možemo uočiti da su brojevi dobiveni pomoću formule $2^{n-1} - 1$ [4]. No, prije njenog dokaza, prisjetimo se koliko iznosi ukupan broj podskupova $n$-članog skupa.

**Propozicija 2.1.2.** Broj svih podskupova $n$-članog skupa je $2^n$.

Doista, skup ima $n$ elemenata te za svaki element imamo dvije mogućnosti: nalazi se u podskupu ili se ne nalazi u podskupu. Iz toga slijedi: $\underbrace{2 \cdot 2\ \ldots 2}_{n} = 2^n$.

**Propozicija 2.1.3.** Za $k = 2$ vrijedi $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

*Dokaz.* Tražimo broj 2-particija $n$-članog skupa. Broj svih podskupova $n$-članog skupa je $2^n$. Od svih podskupova isključimo prazan skup i taj cijeli skup. Sada imamo $2^n - 2$ podskupova. Jednočlan podskup ima svog komplementa, $(n-1)$-članog podskupa koji sadrži sve elemente osim onoga koji je u tom jednočlanom podskupu. Dvočlani podskup također ima svog komplementa, $(n-2)$-članog podskupa koji sadrži sve elemente osim onih koji su u tom dvočlanom podskupu itd. Ako bismo za svaki podskup našli njegovog komplementa, dobili bismo 2-člane particije. Budući da smo te 2-člane particije dvaput brojali (jer kao što smo npr. tražili komplement za jednočlani podskup, tako smo tražili komplement za $(n-1)$-člani podskup) broj $2^n - 2$ podijelimo s 2. Dobivamo

$$\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

te smo time dokazali tvrdnju. □

Nadalje, uočimo da sve veći brojevi imaju puno veće Stirlingove brojeve. Zato nam je puno jednostavnije napisati rekurziju u nekom programskom jeziku i tako si olakšamo traženje takvih brojeva. Sljedeći kod je zapisan u programskom jeziku Python:

```
def S(n,k):
    if n<0 or k<0:
        print('Greska')
    elif n==0 and k==0:
        return 1
    elif n!=0 and k==0:
        return 0
    elif n>=1 and n<k:
        return 0
    elif n==0 and k>0:
        return 0
    else:
        return S(n-1,k-1)+k*S(n-1,k)
```

Ilustrirajmo na nekom primjeru kako radi funkcija. Neka je $n = 20$ i $k = 15$. Pozivamo prethodnu funkciju s navedenim brojevima

```
n=20
k=15
print(S(n,k))
```

```
452329200
```

Uočavamo da smo dobili velik broj kojeg je teško dobiti „ručnim" putem te ovdje vidimo važnost korištenja ovakvih funkcija u programskim jezicima.

Ako se zapitamo koliko postoji svih takvih raspodjela a da pritom ne ograničavamo broj kutija, tada dolazimo do slučaja koji je ekvivalentan slučaju kada kutije mogu biti prazne.

### 2.1.2 Svaka kutija sadrži točno određeni broj kuglica

Neka je $n_i$ broj kuglica u $i$-toj kutiji. Vrijedi $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Ovaj slučaj je najlakše riješiti uz pomoć rezultata kada se kutije razlikuju. To će biti opisano u dijelu 3.1.2 no sada ćemo samo napisati rezultat: broj raspodjela različitih kuglica u različite kutije ako svaka kutija sadrži točno određeni broj kuglica je jednak

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots n_{k-1})}{n_k},$$

tj.

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}\,.$$

Ako kutije ne razlikujemo, tada smo u ovom slučaju istu raspodjelu brojali nekoliko puta pa rezultat moramo podijeliti s $k!$ i time dobivamo:

$$\frac{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots n_{k-1})}{n_k}}{k!},$$

tj.

$$\frac{n!}{k!\,n_1!\,n_2!\cdots n_k!}\,.$$

Ako uz to želimo da iz svake kutije izdvojimo jednu kuglicu, tada dobiveni izraz množimo s $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ zato što su u prvoj kutiji $n_1$ kuglica te imamo na toliko načina birati, $n_2$ načina iz druge kutije, itd. Dobivamo:

$$\frac{n!}{k!\,n_1!\,n_2!\cdots n_k!}\cdot n_1\cdot n_2\cdots n_k = \frac{n!}{k!\;(n_1-1)!\;(n_2-1)!\;\cdots(n_k-1)!}\,.$$

**Teorem 2.1.2.** Dobiveni rezultat zapišimo u obliku teorema: Broj rasporeda $n$ različitih kuglica u $k$ jednakih kutija pri čemu $i$-ta kutija sadrži $n_i$ kuglica i kutije mogu biti prazne jednak je

$$\frac{n!}{k!\,n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

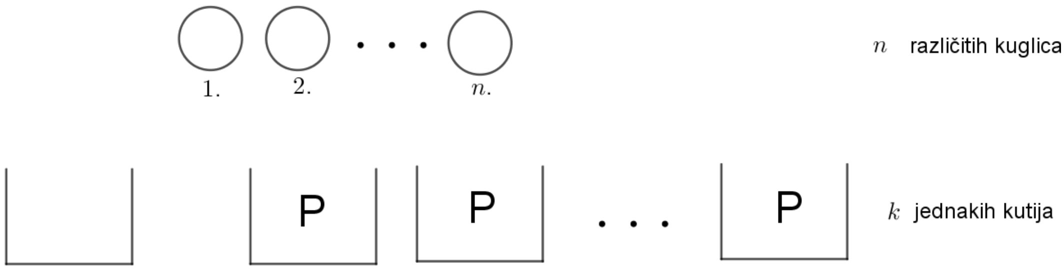
s uvjetom $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Uz to, ako želimo u svakoj kutiji posebno izdvojiti jednu kuglicu broj takvih raspodjela je

$$\frac{n!}{k!\,(n_1-1)!\,(n_2-1)!\cdots(n_k-1)!}\,.$$

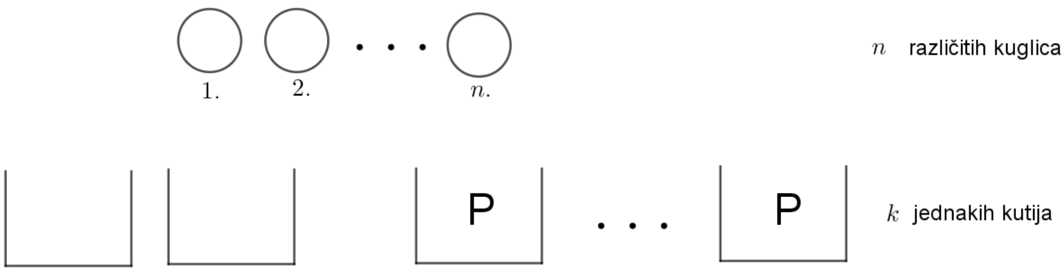
### 2.1.3 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Budući da broj praznih kutija nije ograničen, jednostavnije je najprije gledati slučaj kada su prazne sve kutije osim jedne.




Slika 2.2: Prikaz različitih kuglica i jednakih kutija pri čemu je jedna kutija neprazna, P - prazna kutija

Lako se vidi da postoji samo jedna raspodjela. Nadalje, sljedeći slučaj je kada su prazne sve osim dvije kutije.




Slika 2.3: Prikaz različitih kuglica i jednakih kutija pri čemu su dvije kutije neprazne, P - prazna kutija

Ako prazne kutije ostavimo postrani, ovaj slučaj možemo gledati kao slučaj raspodjele u dvije kutije a da pritom nijedna kutija ne smije biti prazna (2.1.1). U tom dijelu zaključeno je da je broj raspodjela jednak $S(n, 2)$. Zaključujemo da je broj raspodjela $n$ kuglica u bilo kojih $k$ kutija a da su pritom sve kutije prazne osim njih $i$ je jednak $S(n, i)$. Analognim postupkom kroz sve slučajeve pronalazimo broj raspodjela za bilo koji broj nepraznih kutija: $S(n, 1), S(n, 2), \ldots, S(n, k-1), S(n, k)$. Budući da su slučajevi međusobno disjunktni, po principu zbroja dobivena rješenja možemo zbrojiti:

$$S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, k-1) + S(n, k)\ ,$$

te kraće možemo pisati: $\sum_{i=1}^{k} S(n, i)$.

Ako je broj kutija veći ili jednak broju kuglica, tj. $k \geq n$, tada se prethodni problem svodi na traženje svih mogućih particija skupa te tako dolazimo do novog pojma zvanog *Bellov broj* [2, Definicija 5.11.].

**Definicija 2.1.3.** Ukupan broj particija na $n$-članom skupu označavamo s $B(n)$ i taj broj nazivamo *n-tim Bellovim brojem* [2].

Kao što smo rekli, Stirlingov broj druge vrste je broj $k$ particija $n$-članog skupa te budući da su rješenja međusobno disjunktna, po principu zbroja zaključujemo da je Bellov broj zbroj svih Stirlingovih brojeva:

$$S(n, 0) + S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n-1) + S(n, n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B(n) \,.$$

Dodatno definiramo: $B(0) := 1$. Tako bi Bellov broj u Primjeru 2.1.1 bio:

$$B(4) = S(4, 0) + S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) + S(4, 4) = 1 + 1 + 7 + 5 + 1 = 15.$$

Dobiveni rezultat možemo zapisati u obliku teorema:

**Teorem 2.1.3.** Broj rasporeda $n$ različitih kuglica u $k$ jednakih kutija je jednak $\sum_{i=1}^{k} S(n, i)$ za $k < n$ a da pritom kutije mogu primiti neograničen broj kuglica i mogu biti prazne. Posebno, za $k \geq n$ broj takvih raspodjela je jednak $B(n)$.

Za Bellov broj, kao i za Stirlingov broj, postoji eksplicitna formula. Isto tako postoji rekurzivna formula koja nam pomaže izračunati Bellov broj nekog prirodnog broja koristeći Bellove brojeve manjih prirodnih brojeva [4, Propozicija 21.].

**Propozicija 2.1.4.** Za prirodan broj $n \geq 1$ vrijedi

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k) \,.$$

*Dokaz.* Neka je zadan skup $S = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Istaknimo element $n + 1$. Uz to, ostavimo postrani $k$ elemenata te promotrimo particije u kojima se element $n + 1$ nalazi u podskupu s ostatkom elemenata. Tih $n - k$ elemenata možemo izabrati na $\binom{n}{n-k}$. Zbog propozicije 1.0.7 vrijedi da postoji $\binom{n}{k}$ načina. Iz toga slijedi da se taj podskup može izabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Preostalih $k$ elemenata moramo raspodijeliti u neprazne podskupove tako da s prvim podskupom čine particiju. Dakle, tražimo ukupan broj particija od $k$ elemenata, tj. $B(k)$. Prema principu produkta slijedi da je broj particija u kojem je element $n + 1$ u podskupu s još $k$ elemenata jednak $\binom{n}{k} B_{n-k}$. Budući da broj $k$ može biti u rasponu od 0 do $n$, po principu sume vrijedi početna tvrdnja. $\square$

Koristeći prethodnu rekurzivnu relaciju prikažimo tablično prvih 10 Bellovih brojeva:

[2] Eric Temple Bell (1883 - 1960), američki matematičar

Tablica 2.2: Vrijednost Bellovih brojeva $B(n)$ za $n \in \{1,\ 2, \dots,\ 10\}$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B(n)$ | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21147 | 115975 |

Pogledajmo na primjeru $B(5)$ kako popunjavamo tablicu koristeći prethodnu rekurzivnu formulu. Za izračunavanje $B(5)$ potrebni su nam svi Bellovih brojevi. Prema rekurzivnoj formuli vrijedi

$$B(5) = \binom{4}{0}B(0)+\binom{4}{1}B(1)+\binom{4}{2}B(2)+\binom{4}{3}B(3)+\binom{4}{4}B(4) = 1\cdot 1+4\cdot 1+6\cdot 2+4\cdot 5+1\cdot 15 = 52$$

te smo dobili jednak broj kao u tablici.

Posebno, pogledajmo slučaj kada je broj kutija veći od broja kuglica. Istom metodom kao u prethodnom primjeru dolazimo do zbroja

$$S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n-1) + S(n,n) + S(n,n+1) + \cdots + S(n,k-1) + S(n,k).$$

Budući da je $S(n,k) = 0$ za $k > n$, slijedi da je zbroj ekvivalentan zbroju

$$S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n-1) + S(n,n)$$

a to je upravo Bellov broj, $B(n)$.

Također, dobivenu rekurziju možemo napisati u programskim jezicima. Sljedeći kod je napisan u programskom jeziku Python:

```
def faktorijel(a):
    prod=1
    for j in range(2,a+1):
        prod=prod*j
    return prod

def binomnikoef(a,b):
    if a<b:
        print('Greska')
    else:
        f=faktorijel(a)/(faktorijel(b)*faktorijel(a-b))
        return f

def B(n):
    k=[]
```

```
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    else:
        r = 0
        for k in range(n):
            r += binomnikoef(n-1,k) * B(k)
        return r
```

Ilustrirajmo na nekom primjeru rad funkcije. Neka je $n = 19$ te pozivamo prethodnu funkciju s navedenim brojem:

```
n=17
print(B(n))
```

```
5832742205057
```

Dobili smo broj 5 832 742 205 057. Očito je da bi komplicirano bilo bez računala dobiti rezultat. S druge strane, mogli smo napisati funkciju koja bi se pozivala na funkciju definiranu kod Stirlingovih brojeva. Tada bismo koristili $B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$.

## 2.2 Kuglice se ne razlikuju

### 2.2.1 Kutije su neprazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Ako se kutije i kuglice ne razlikuju, dovoljno nam je istražiti na koliko načina kuglice možemo „grupirati". Primjerice, ako imamo šest kuglica i dvije kutije, tada kuglice možemo raspodijeliti na nekoliko načina:

- 1 kuglicu u jednu kutiju, ostalih 5 u drugu;
- 2 kuglice u jednu kutiju, ostalih 4 u drugu;
- 3 kuglice u jednu kutiju, ostalih 3 u drugu.

Uočimo da je ovaj problem jednak matematičkom problemu traženja broja načina pisanja pozitivnog cijelog broja $n$ kao zbroj pozitivnih cijelih brojeva gdje redoslijed pribrojnika nije važan, odnosno, tražimo određene *particije broja n* [2, Definicija 5.13.]. Budući da nam nije bitno pišemo li $5 = 2 + 3$ ili $5 = 3 + 2$, dogovorno ćemo pisati pribrojnike od većeg prema manjem.

**Definicija 2.2.1.** Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$ cijeli brojevi tako da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, $n \in \mathbb{N}$. Niz $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ se naziva *particija broja n*, točnije *k-particija broja n*. Broj svih particija broja $n$ označavamo s $p(n)$, dok broj $k$-particija broja $n$ označavamo s $p_k(n)$.

Uočimo da je $p_k(n) = 0$ za $k > n$ te $p_n(n) = 1$ za $n \in \mathbb{N}$. Dodatno, dogovorno uzimamo $p_0(0) := 1$.

Također, uočimo da imamo slične pojmove: *particija n-članog skupa* i *particija broja n*. Particija $n$-članog skupa ima skupove kao elemente koji u uniji daju $n$-člani skup, dok particija broja $n$ ima elemente koji u zbroju daju broj $n$. Pogledajmo na konkretnom primjeru:

**Primjer 2.2.1.** Navedimo sve particije broja 6.

1-particija broja 6: $(6)$;
2-particija broja 6: $(5, 1), (4, 2), (3, 3)$;
3-particija broja 6: $(4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$;
4-particija broja 6: $(3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1)$;
5-particija broja 6: $(2, 1, 1, 1, 1)$;
6-particija broja 6: $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Zaključujemo da je broj particija broja 6 jednak 11 te pišemo $p(6) = 11$.

Ako je broj kutija jednak broju kuglica, tj. $k = n$, tada tražimo sve moguće particije broja $n$, odnosno njihov broj, $p(n)$. Sada možemo zapisati sljedeći teorem:

**Teorem 2.2.1.** Broj raspodjela $n$ jednakih kuglica u $k$ nepraznih jednakih kutija je jednak $p_k(n)$ pri čemu kutije mogu primiti neograničen broj kuglica. Posebno, ako je broj kutija jednak borju kuglica tada je broj takvih raspodjela jednak $p(n)$.

Ne postoji zatvorena formula za particiju prirodnog broja. Zato nam sljedeća rekurzivna formula uvelike pomaže u pronalaženju particije velikih prirodnih brojeva [4, Propozicija 16.]:

**Propozicija 2.2.1.** Za sve pozitivne cijele brojeve $1 < k \leq n$, vrijedi

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)\ .$$

*Dokaz.* Neka je zadan prirodan broj $n$. Njegove particije u $k$ dijelova možemo podijeliti u dvije skupine: particije koje imaju jedinicu u rastavu i particije koje nemaju jedinicu kao dio. U prvom slučaju ostaje nam broj $n - 1$ kojem tražimo particije u $k - 1$ dijelova (jer smo iskoristili već jedno mjesto za jedinicu). Iz toga slijedi da je broj particija broja $n$ koje imaju jedinicu u rastavu jednak $p_{k-1}(n - 1)$.

U drugom slučaju promatramo particije koje nemaju jedinicu u rastavu. Ako od svakog pribrojnika iz particije oduzmemo jedinicu, pribrojnici su i dalje prirodni brojevi (jer su svi bili strogo veći od 1), te se broj $n$ se smanjuje na $n - k$. Sada tražimo broj particija broja $n - 1$ u $k$ dijelova, a to je broj $p_k(n - k)$.

Kada zbrojimo načine iz oba slučaja, dobivamo ukupan broj particija broja $n$ u $k$ dijelova. □

Pomoću navedene rekurzivne formule lako možemo ispisati tablicu particije brojeva do 10 koji se sastoje od točno $k$ elemenata te tako računati particije puno većih prirodnih brojeva:

Tablica 2.3: Particije broja $n$ u $k$ dijelova za $n, k \in \{1, 2, \dots, 10\}$

| $n$ | $p_1(n)$ | $p_2(n)$ | $p_3(n)$ | $p_4(n)$ | $p_5(n)$ | $p_6(n)$ | $p_7(n)$ | $p_8(n)$ | $p_9(n)$ | $p_{10}(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 4 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | | |
| 9 | 1 | 4 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | |
| 10 | 1 | 5 | 8 | 9 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Ilustrirajmo na primjeru $p_4(7)$ kako popunjavamo tablicu koristeći prethodnu rekurzivnu formulu. Za izračunavanje $p_4(7)$ potrebni su nam brojevi $p_3(6)$ i $p_4(3)$. Prema rekurzivnoj formuli vrijedi $p_4(7) = p_3(6) + p_4(3) = 3 + 0 = 3$ te smo dobili jednak broj kao u tablici.

Dobivenu rekurzivnu formulu možemo zapisati u Python-u:

```python
def p(n,k):
    if n<0 or k<0:
        print('Greska')
    elif n==0 and k==0:
        return 1
    elif n!=0 and k==0:
        return 0
    elif n>=1 and n<k:
        return 0
    elif n==0 and k>0:
```

```
        return 0
    else:
        return p(n-1,k-1)+p(n-k,k)
```

Ilustrirajmo funkciju na brojevima $n = 100$ i $k = 59$ te pozovimo funkciju:

```
n=100
k=59
print(p(n,k))
```

```
44583
```

U ovom slučaju također možemo zaključiti da bismo utrošili više vremena za dobivanje rezultata bez programa.

### 2.2.2 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Ako dopustimo da kutije mogu biti prazne, tada možemo slično postupiti kao u dijelu 2.1.3. Podijelimo na slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija. Ako imamo jednu nepraznu kutiju, očito imamo jednu mogućnost raspodjele (sve kuglice staviti u tu kutiju). Ako imamo dvije neprazne kutije, onda zadatak možemo promatrati kao slučaj raspodjele u dvije neprazne kutije (2.2.1). Iz tog dijela zaključujemo da je broj takvih raspodjela jednak $p_2(n)$. Analognim postupkom dobivamo da je broj raspodjela u bilo kojih $i$ nepraznih kutija jednak $p_i(n)$. Budući da su slučajevi međusobno disjunktni, po principu zbroja dobivena rješenja možemo zbrojiti:

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_{k-1}(n) + p_k(n) \ ,$$

te kraće zapisujemo $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$. Ako je broj kutija veći ili jednak broju kuglica, tj. $k \geq n$ tada imamo zbroj:

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_{n-1}(n) + p_n(n) + p_{n+1}(n) \cdots + p_{k-1}(n) + p_k(n) \ .$$

Budući da je $p_k(n) = 0$ za $k > n$, slijedi da je zbroj ekvivalentan zbroju

$$p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_{n-1}(n) + p_n(n)$$

a to je upravo $p(n)$.

Također, možemo ispisati tablicu particije brojeva do 10:

Tablica 2.4: Particije prvih 10 prirodnih brojeva

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(n)$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 |

Dobiveni rezultat napišimo u obliku teorema:

**Teorem 2.2.2.** Broj raspodjela $n$ jednakih kuglica u $k$ jednakih kutija je jednak $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$ za $k < n$ a da pritom kutije mogu primiti neograničen broj kuglica i mogu biti prazne. Posebno, za $k \geq n$ broj takvih raspodjela je jednak $p(n)$.

### 2.2.3 Broj kuglica je različit u svakoj kutiji

Međutim, što ako želimo dobiti takvu raspodjelu da nijedne dvije kutije nemaju jednak broj kuglica? Najprije ćemo rješenje tražiti kada su kutije neprazne. Možemo uočiti da će ih biti manji broj nego od prethodnog slučaja jer su ove raspodjele podskup skupa rješenja prethodnog slučaja. Dakle, tražimo $k$-particije broja $n$ koje imaju različite pribrojnike. Broj takvih $k$-particija označavamo s $\overline{p}_k(n)$ a ukupan broj takvih particija s $\overline{p}(n)$ [4].

Najprije pokušajmo definirati bijekciju između skupa $k$-particija nekog prirodnog broja $n$ koje imaju različite pribrojnike i skupa svih $k$-particija broja $m$. Broj $m$ ovisi o brojevima $n$ i $k$ te ćemo kasnije dobiti točan iznos. Budući da su pribrojnici u particiji različiti tada je svaki od njih strogo manji od prethodnog te takav skup $k$-particija broja $n$ možemo zapisati kao $A := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n,\ a_1 > a_2 > \cdots > a_k\}$. S druge strane, kod skupa $k$-particija ne moraju pribrojnici biti strogo veći od prethodnog te takav skup zapisujemo $B := \{(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \mathbb{N}^k : b_1 + b_2 + \cdots + b_k = m,\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k\}$. Kao što smo rekli pribrojnici particija prvog skupa su različiti. Znamo da vrijedi $a_{k-1} > a_k$ ali ako desnoj strani dodamo jedinicu, tada postoji mogućnost da je dobiveni broj jednak broju $a_{k-1}$: $a_{k-1} \geq a_k + 1$, odnosno vrijedi $a_{k-1} - 1 \geq a_k$. Analogno za svaka dva pribrojnika dobivamo sljedeće:

$$
\begin{gathered}
a_{k-1} > a_k \Rightarrow a_{k-1} \geq a_k + 1 \Rightarrow a_{k-1} - 1 \geq a_k\ ; \\
a_{k-2} > a_{k-1} \Rightarrow a_{k-2} \geq a_{k-1} + 1 \Rightarrow a_{k-2} - 1 \geq a_{k-1}\ ; \\
\vdots \\
a_2 > a_3 \Rightarrow a_2 \geq a_3 + 1 \Rightarrow a_2 - 1 \geq a_3\ ; \\
a_1 > a_2 \Rightarrow a_1 \geq a_2 + 1 \Rightarrow a_1 - 1 \geq a_2\ ;
\end{gathered}
$$

te iz toga slijedi

$$
a_1 - (k-1) \geq a_2 - (k-2) \geq \cdots \geq a_{k-2} - 2 \geq a_{k-1} - 1 \geq a_k\ .
$$

Sada možemo definirati nove brojeve na sljedeći način: $b_k := a_k$, $b_{k-1} := a_{k-1} - 1$, ..., $b_1 := a_1 - (k-1)$. Tada vrijedi $b_k \leq b_{k-1} \leq b_{k-2} \leq \cdots \leq b_1$. Dakle, dobili smo uvjet koji je spomenut u definiranju skupa $B$ te je

$$
b_1 + b_2 + \cdot + b_k = a_1 + a_2 + \cdot + a_k - \frac{k(k-1)}{2} = n - \frac{k(k-1)}{2}\ ,
$$

stoga u definiciji skupa $B$ uzimamo $m = n - \frac{k(k-1)}{2}$. Što znači da možemo definirati preslikavanje $f : A \to B$, $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1 - (k-1),\ a_2 - (k-2), \ldots, a_{k-1} - 1,\ a_k)$. Provjerimo je li funkcija injekcija. Neka su $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_k) \in B$ takvi da vrijedi

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_k) .$$

Iz toga slijedi

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = f(a'_1, a'_2, \ldots, a'_k) ,$$

tj.

$$(a_1 - (k-1),\ a_2 - (k-2), \ldots,\ a_{k-1} - 1,\ a_k) = (a'_1 - (k-1),\ a'_2 - (k-2), \ldots,\ a'_{k-1} - 1,\ a'_k) .$$

Jednakost će vrijediti ako i samo ako su odgovarajuće komponente jednake:

$$a_1 - (k-1) = a'_1,\ a_2 - (k-2) = a'_2, \ldots,\ a_k = a'_k$$

te konačno slijedi

$$a_1 = a'_1,\ a_2 = a'_2, \ldots,\ a_k = a'_k .$$

Dakle funkcija $f$ je injekcija. Provjerimo je li funkcija surjekcija. Neka je $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in B$. Tada za $a_k = b_k, \ldots, a_2 = b_2 + (k-2),\ a_1 = b_1 + (k+1)$, imamo $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A$ i $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ te je $f$ surjekcija. Budući da je $f$ injekcija i surjekcija, slijedi da $f$ je bijektivno preslikavanje.

Skup $A$ je skup $k$-particija broja $n$ kojima su svi pribrojnici međusobno različiti. Rekli smo da broj takvih particija označavamo s $\overline{p}_k(n)$ pa iz toga slijedi $|A| = \overline{p}_k(n)$. Isto tako skup $B$ je skup svih $k$-particija broja $m$ te vrijedi $|B| = p_k(m)$, tj. $|B| = p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right)$. Prema pricipu bijekcije slijedi

$$\overline{p}_k(n) = p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right) .$$

Međutim, raspodjele neće uvijek biti. Pomoću $p_k(n) = 0$ za $k > n$ kojeg smo otkrili u dijelu 2.2.2 proučimo kakva je veza s $\overline{p}_k(n)$. Ako je $p_k(n) = 0$ za $k > n$ onda je $p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right) = 0$ za $k > n - \frac{k(k-1)}{2}$, točnije $n < \frac{k(k+1)}{2}$. Dakle, podjele će biti ako je

$$n \geq \frac{k(k+1)}{2.}$$

Nadalje, iskoristimo rekurzivnu formulu od $p_k(n)$:

$$\overline{p}_k(n) = p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right) = p_{k-1}\left(n - \frac{k(k-1)}{2} - 1\right) + p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2} - k\right) ,$$

$$\overline{p}_k(n) = p_{k-1}\left(n-1-\frac{k(k-1)}{2}\right) + p_k\left(n-\frac{k(k-3)}{2}\right)$$

te koristeći nju možemo lakše doći do rješenja.

Vratimo se na Primjer 2.2.1. Particije koje imaju različite pribrojnike su (6), (5, 1), (4, 2) i (3, 2, 1). Ima ih 4. Pokušajmo taj broj dobiti preko formule $\overline{p}_k(n) = p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right)$ . Iz uvjeta $n \geq \frac{k(k+1)}{2}$ doznajemo da za $n = 6$ treba biti $k \leq 3$ kako bi postojala raspodjela. Dakle, dobivamo da je

$$\overline{p}(6) = \overline{p}_1(6) + \overline{p}_2(6) + \overline{p}_3(6)$$

te pomoću $\overline{p}_k(n) = p_k\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right)$ dobivamo

$$\overline{p}(6) = p_1\left(6-\frac{1(1-1)}{2}\right) + p_2\left(6-\frac{2(2-1)}{2}\right) + p_3\left(6-\frac{3(3-1)}{2}\right) = p_1(6) + p_2(5) + p_3(3)\,.$$

Iz Tablice 2.4. iščitamo brojeve te $\overline{p}(6) = 1 + 2 + 1 = 4$ te smo dobili smo isti broj particija s različitim pribrojnicima kao i prije.

Međutim, što ako želimo izračunati broj raspodjela jednakih kuglica tako da je u kutijama neparan broj kuglica? Ovdje nam može pomoći jedan vrlo zanimljiv teorem:

**Propozicija 2.2.2. Eulerov identitet**
Broj particija od $n$ čiji su pribrojnici neparni brojevi jednak je broju particija od $n$ čiji su pribrojnici međusobno različiti.

Dokaz se može naći u [4, Propozicija 16.].

Zatim, pogledajmo slučaj kada kutije mogu biti prazne i broj kuglica je različit u svakoj kutiji. Podijelimo na slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija kao u dijelu 2.1.3 te dobivamo

$$\overline{p}_1(n) + \overline{p}_2(n) + \ldots + \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n) = \sum_{i=1}^{k} \overline{p}_i(n)\,.$$

Ako je $k \geq n$ tada je zbroj jednak $\overline{p}(n)$. Nadalje, po Eulerovom identitetu vrijedi da je broj raspodjela u kojem kutije imaju neparan broj kuglica jednak $\sum_{i=1}^{k} \overline{p}_i(n)$ za $k < n$ i $\overline{p}(n)$ za $k \geq n$.

Sve rezultate možemo zapisati u teorem:

**Teorem 2.2.3.** Broj raspodjela $n$ jednakih kuglica u $k$ nepraznih jednakih kutija pri čemu je broj kuglica različit u svakoj kutiji je jednak $\overline{p}_k(n)$.

Broj raspodjela $n$ jednakih kuglica u $k$ jednakih kutija je jednak $\sum_{i=1}^{k} \overline{p}_i(n)$ za $k < n$ i $\overline{p}(n)$ za $k \geq n$ pri čemu je broj kuglica različit u svakoj kutiji i kutije mogu biti prazne.

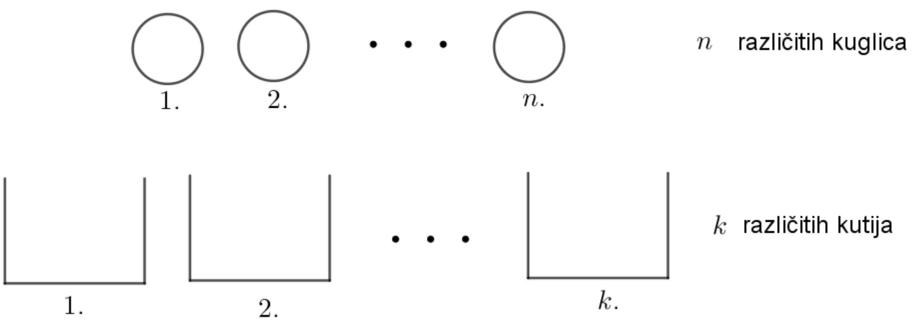
# Poglavlje 3

# Kutije se razlikuju

U ovom poglavlju će se analizirati slučajevi različitih kuglica. Koristit ćemo se rezultatima dobivenim u prethodnom poglavlju i dotaknut ćemo se pojma deranžmana. U slučaju jednakih kuglica tražit će se broj rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \ \ k, \ n \in \mathbb{N}$, te će se primjenjivati funkcije izvodnice.

## 3.1 Kuglice se razlikuju

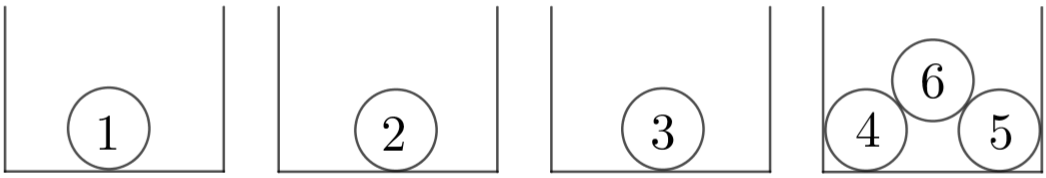
### 3.1.1 Kutije su neprazne i mogu primiti neograničen broj kuglica




Slika 3.1: Prikaz različitih kuglica i različitih kutija

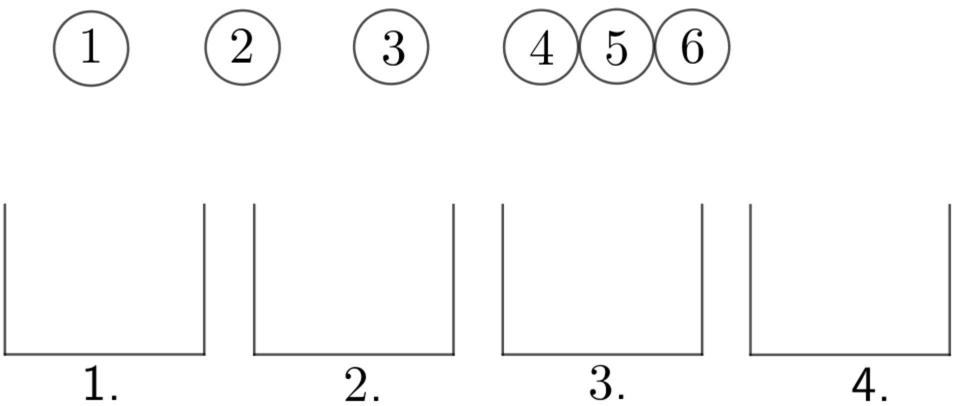
U dijelu 2.1.1 smo pokazali da nam broj $S(n, k)$ daje broj raspodjele $n$ različitih kuglica u $k$ jednake neprazne kutije. Budući da se sada kutije razlikuju, dovoljno je svaku takvu raspodjelu permutirati. Pogledajmo na primjeru:

**Primjer 3.1.1.** Ako želimo 6 različitih kuglica raspodijeliti u 4 različite neprazne kutije, najprije ćemo gledati raspodjelu za 4 jednake kutije. Ako kuglice označimo s brojevima od 1 do 6, jedan od načina raspodjele je:




Slika 3.2: Prikaz raspodjele šest različitih kuglica u četiri jednake kutije

Ako kuglice izvadimo iz kutija te ih ostavimo grupirane na taj način (kako smo ih izvadili), onda se možemo zapitati na koliko sve načina možemo raspodijeliti ovako grupirane kuglice u različite kutije:




Slika 3.3: Prikaz grupiranih kuglica nakon raspodjele

Za prvu kutiju imamo četiri mogućnosti: kuglica 1, kuglica 2, kuglica 3 ili kuglice 4, 5 i 6. Druga kutija ima tri mogućnosti (bilo koje grupirane kuglice osim onih koje smo stavili u prvu kuglicu). Analogno, treća kutija ima dvije mogućnosti dok četvrta jednu. Po principu umnoška broj načina podjele je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$. Uočimo da ovdje tražimo permutaciju bez ponavljanja 4-članog skupa.

Zaključujemo da za bilo kojih $k$ različitih kutija, broj načina pojedine podjele je $k!$. Budući da je broj svih podjela jednak $S(n,k)$, slijedi da je ukupan broj podjela različitih kuglica u različite neprazne kutije jednak $k! \cdot S(n,k)$ [2] te pišemo:

**Teorem 3.1.1.** Broj raspodjela $n$ različitih kuglica u $k$ nepraznih različitih kutija je jednak $k! \cdot S(n,k)$ pri čemu kutije mogu primiti neograničen broj kuglica.

Sada ćemo vidjeti da je ovaj problem u direktnoj vezi s brojem surjekcija. Naime, neka su dani skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Vidimo da je $|A| = n$ i $|B| = k$. Neka je $f : A \to B$ surjekcija. Nadalje, definirajmo skup svih takvih funkcija s $\mathcal{A} := \{f : A \to B : f surjekcija\}$ te skup svih rasporeda prethodnog problema distribucije $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija s $\mathcal{B}$. Ovdje ćemo uzeti da skup $A$ predstavlja kuglice pa elemente od $\mathcal{B}$ možemo realizirati kao uređenu $k$-torku nepraznih u parovima disjunktnih podskupova $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ pri čemu $\bigcup_{j=1}^{k} B_i = A$. Odnosno skup $\{B_1, b_2, \ldots, B_k\}$ je $k$-particija skupa $A$. Cilj je pokazati $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ tako da uspostavimo bijekciju između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Po Teoremu 3.1.1 imamo $|\mathcal{B}| = k!\, S(n,k)$, ali ne znamo koliki je $|\mathcal{A}|$.

Uzmimo neku funkciju $f$ te neka je $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takvo preslikavanje da funkciji $f$ pridružuje inverzne slike od svih elemenata iz $B$: $\phi(f) = \left(f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \ldots, f^{-1}(b_k)\right)$. Provjerimo je li funkcija $\phi$ dobro definirana, odnosno je li zaista $\phi(f) \in \mathcal{B}$. Kako je $f$ funkcija, svaki se element domene mora preslikati u točno jedan element kodomene iz čega slijedi $\bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(b_j) = A$, te $f^{-1}(b_i) \cap f^{-1}(b_j) = \emptyset$, $i \neq j$. Nadalje, surjektivnost funkcije $f$ povlači da se u svaki element kodomente $B$ preslika barem jedan element domene $A$, pa su time sve praslike neprazni skupovi. Time smo dobili da je $\{f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \ldots, f^{-1}(b_k)\}$ $k$-particiju skupa $A$, a onda i $\phi(f) \neq \mathcal{B}$. Dakle, funkcije $\phi$ je dobro definirana.

Neka su $\phi(f_1)$, $\phi(f_2) \in \mathcal{B}$ tako da vrijedi $\phi(f_1) = \phi(f_2)$. To povlači

$$\left(f_1^{-1}(b_1),\ f_1^{-1}(b_2), \ldots,\ f_1^{-1}(b_k)\right) = \left(f_2^{-1}(b_1),\ f_2^{-1}(b_2), \ldots,\ f_2^{-1}(b_k)\right).$$

Svaki element ima jedinstvenu inverznu sliku te vrijedi $f_1^{-1}(b_i) = f_2^{-1}(b_i)$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots,\ k\}$ pa ako dvije funkcije pridruže jednake elemente nekom određenom elementu, tada su te funkcije jednake. Dakle, $f_1 = f_2$. Funkcija $\phi$ je injekcija.

Nadalje, neka je $(B_1, B_2, \ldots B_k) \in \mathcal{B}$. Potrebno je vidjeti postoji li $f \in \mathcal{A}$ tako da $\phi(f) = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$. Definirajmo $f(a_i) := b_j$ ako $a_i \in B_j$. Funkcija $f$ je surjekcija jer za svaki $b_j \in B$ postoji $a_i \in B_j$, tj. $a_i \in A$ (jer je $B_j \subset A$). Dakle, postoji funkcija $f \in \mathcal{A}$ tako da vrijedi $\phi(f) = (B_1, B_2, \ldots, B_k)$ te slijedi da je $\phi$ surjekcija pa time i bijekcija. Po principu bijekcije slijedi $|\mathcal{A}| = k! \cdot S(n,k)$, odnosno broj surjekcija je jednak $S(n,k)$.

Jedna od posljedica koja potječe iz broja surjekcija je eksplicitna formula za $S(n,k)$ [4]:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

Dokaz ove formule se nalazi u [4, dokaz Propozicije 3.] a mi ćemo ga ukratko objasniti. Imamo preslikavanje $f : A \to B$ gdje je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Znamo da takvih preslikavanja ima $k^n$ (vidi 3.1.5). Definirajmo skup $A_1$ koji sadrži funkcije koje se nisu preslikale u $b_1$. Takvih surjekcija ima $(k-1)^n$. Analogno za svaki element iz $B$ definiramo ovakav skup.

Tražimo funkciju koja je elemente $A$ preslikala u sve elemente iz $B$. Dakle tražimo $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}|$. To možemo izračunati preko FUI formule. Svi $A_i$ imaju jednak broj elemenata te zbroj njihovih elemenata iznosi $k \cdot (k-1)^n$, tj. $\binom{k}{1} \cdot (k-1)^n$. Ako gledamo skup $A_i \cap A_j$ tada se ovdje nalaze sve funkcije koje se preslikaju sve elemente osim $b_i$ i $b_j$ te ih ima $(k-2)^n$. Budući da ta dva skupan možemo izabrati na $\binom{k}{2}$ načina, slijedi da je zbroj $A_i \cap A_j$ za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ jednak $\binom{k}{2} \cdot (k-2)^n$. Analognim postupkom prolazimo kroz sve presjeke te pomoću FUI formule dobivamo:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

Prije smo dobili da je broj surjekcija $k! \cdot S(n,k)$ kada izjednačimo i sredimo, dobivamo formulu za Stirlnigov broj druge vrste.

Budući da je Bellov broj zapravo zbroj Stirlingovih brojeva, dolazimo i do njegove eksplicitne formule:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n .$$

### 3.1.2 Svaka kutija sadrži točno određeni broj kuglica

Neka je $n_i$ broj kuglica u $i$-toj kutiji. Vrijedi $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Za prvu kutiju odabiremo $n_1$ kuglica te broj takvih mogućnosti je $\binom{n}{n_1}$. Sada imamo $n - n_1$ kuglica koje nisu raspodijeljene. Za drugu kutiju trebamo uzeti $n_2$ kuglica i njih možemo izabrati na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Ostale su nam neraspodijeljene $n - (n_1 + n_2)$ kuglice. Slično računamo sve dok ne dođemo do zadnje kutije te dobivamo da je broj raspodjela jednak

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})}{n_k}.$$

Međutim, možemo doći do broja raspodjele na drugačiji način. Imamo $n$ kuglica. Zamislimo da imamo ceduljice na kojima piše „1. kutija" , „2. kutija" ,..., „k-ta kutija". Takvih ceduljica ima $k$ vrsta i sveukupno ih je $n$. Budući da je raspodjela ceduljica zapravo permutacija s ponavljanjem, slijedi da ih možemo na $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \,\cdots\, n_k!}$ načina raspodijeliti. Tako smo kombinatorno dokazali sljedeći teorem [3]:

**Propozicija 3.1.1.** Neka su $k, n, n_1, n_2, \ldots n_k,\ k \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})}{n_k}.$$

Dodajmo još jedan uvjet: izdvojimo jednu kuglicu u svakoj kutiji. U prvoj kutiji možemo birati na $n_1$ načina kuglicu, u drugoj kutiji na $n_2$ načina, itd. Zbog toga dobiveni izraz možemo pomnožiti s tim brojevima:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_k!} \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \frac{n!}{(n_1 - 1)!\ (n_2 - 1)!\ \cdots\ (n_k - 1)!}\ .$$

Dobivene rezultate zapišimo u sljedeći teorem:

**Teorem 3.1.2.** Broj raspodjela $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija pri čemu $i$-ta kutija sadrži $n_i$ kuglica i kutije mogu biti prazne je jednak

$$\binom{n}{n_1}\binom{n - n_1}{n_2}\binom{n - (n_1 + n_2)}{n_3} \cdots \binom{n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1})}{n_k},$$

tj.

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_k!}$$

s uvjetom $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ .

Uz to, ako želimo u svakoj kutiji posebno izdvojiti jednu kuglicu broj takvih raspodjela je

$$\frac{n!}{(n_1 - 1)!\ (n_2 - 1)!\ \cdots\ (n_k - 1)!}\ .$$

Najčešće slučaj sa izdvojenom kuglicom gotovo nikad neće biti upotrijebljen u tom modelu kuglica i kutija. Međutim, kad raspoređujemo ljude u grupe (npr. učenike u razrede) tada želimo da u svaka grupa ima svog predstavnika.

### 3.1.3 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti točno jednu kuglicu

Međutim, što ako imamo kutije koje mogu primiti samo jednu kuglicu? Ako bismo htjeli sve kuglice staviti u kutije tada će nam trebati barem $n$ kutija. U suprotnom nećemo moći napraviti raspodjelu. Ako je $k = n$, odnosno, broj kutija jednak broju kuglica, tada prvu kuglicu možemo na $k$ načina raspodijeliti, drugu kuglicu na $k - 1$, treću na $k - 2$, ... , $k$-tu kuglicu na jedan način. Dakle, ukupan broj raspodjela je $k!$. Ako imamo kutija za jedan više nego kuglica, točnije, $k$ kutija i $k - 1$ kuglica, tada prvu kuglicu možemo raspodijeliti na $k$ kutija, drugu na $k - 1$, treću na $k - 2$, ... , $(k - 1)$-tu na dva načina te je ukupan broj raspodjela jednak $k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdots 2$. Općenito, možemo zaključiti da za $n$ kuglica postoji $k \cdot (k - 1) \cdots (k - n + 1)$ raspodjela.

**Teorem 3.1.3.** Broj raspodjela $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija je jednak $k \cdot (k - 1) \cdots (k - n + 1)$ (uz uvjet $k \geq n$) pri čemu kutije mogu primiti točno jednu kuglicu te mogu biti prazne.

Povežimo ovaj slučaj s brojem injekcija. Definirajmo i ovdje dva skupa: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Uočimo da je $|A| = n$ i $|B| = k$. Neka je $f : A \to B$ injekcija što povlači da različiti elementi iz $A$ se preslikaju u različite elemente u $B$. Prvi element se može preslikati na $k$ načina, drugi element na $k-1$ jer se ne može preslikati u onaj element u kojeg se prvi preslikao. Općenito, $i$-ti element se može preslikati na $k - i + 1$ načina. Po principu umnoška slijedi da je broj takvih funkcija $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-n+1)$, tj. $\left|\{f : A \to B : f\ je\ injekcija,\ |A| = n,\ |B| = k\}\right| = \prod_{i=0}^{n}(k - i + 1)$ .

S druge strane, svaka kuglica se nalazi u drugoj kutiji, tj. ne postoje dvije kuglice koje se nalaze u istoj kutiji. Zbog toga raspodjelu možemo gledati kao funkciju $f$, skup $A$ kao skup kuglica, a $B$ kao skup kutija.

### 3.1.4 Broj kutija i kuglica je jednak, kutije su neprazne i mogu primiti točno jednu kuglicu

Neka je $n$ broj kutija i broj kuglica. Prva kutija može primiti bilo koju kuglicu od njih $n$. Druga kutija može primiti bilo koju kuglicu osim one koja se nalazi u prvoj kutiji. Zaključujemo da je rješenje $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$, tj. $n!$ . Ovo je jedan od slučajeva koji su opisani u dijelu 3.1.3.

Nadalje, zamislimo da imamo jednak broj kutija i kuglica te da postoje parovi kuglica-kutija, npr. da su iste boje. Želimo napraviti takvu raspodjelu kuglica da nijedna od njih se ne nalazi u kutiji iste boje. Dakle, tražimo broj permutacija $n$-članog skupa koje nemaju fiksne točke. Takve se permutacije nazivaju *deranžmanima* [4].

**Propozicija 3.1.2.** Broj deranžmana od $n$ elemenata je jednak

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

*Dokaz.* Neka je $S_n$ skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označimo s $A_l$ skup svih permutacija kojima je $l$ fiksna točka. Mi tražimo broj permutacija koje nemaju niti jednu fiksnu točku. To možemo zapisati kao

$$D_n = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right|.$$

Primjenjujući FUI formulu 1.0.4 dobivamo:

$$D_n = |S_n| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Znamo da vrijedi $|S_n| = n!$. Također, vrijedi $|A_l| = (n-1)!$ za svaki $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jer ako imamo jednu fiksnu točku tada želimo premutirati sve osim tog jednog elementa. Broj

$l$ možemo izabrati na $\binom{n}{1}$ načina. Prema principu umnoška vrijedi $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = \binom{n}{1}(n-1)!$. Nadalje, permutacija s neke dvije fiksne točke ima $(n-2)!$. Dvije fiksne točke možemo izabrati na $\binom{n}{2}$ načina. Prema principu umnoška vrijedi $\sum_{1\leq i<j\leq n} \left|A_i \cap A_j\right| = \binom{n}{2}(n-2)!$. Općenito permutacija s bilo kojim $m$ fiksnim točkama ima $\binom{n}{m}(n-m)!$. Uvrstimo li to u prethodnu formulu, dobivamo

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!\,,$$

odnosno

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

te smo dobili početnu tvrdnju. □

Zaključujemo da je broj raspodjela kuglica tako da nijedna od njih se ne nalazi u kutiji iste boje jednaka $D_n$.

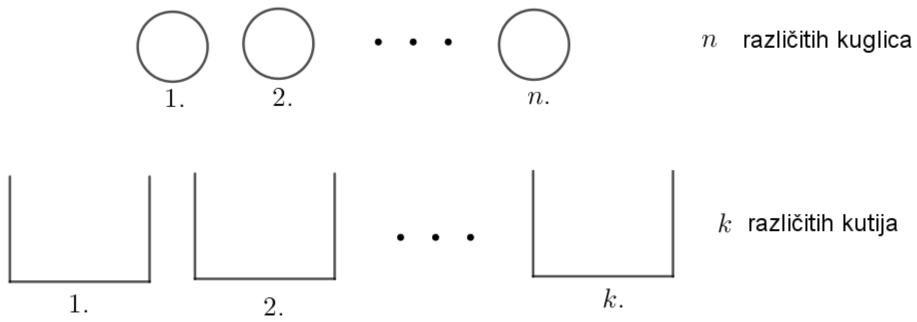
Ako želimo takvu raspodjelu da imamo samo $m$ parova tada najprije izaberemo koje parove želimo imati. Njih možemo odabrati na $\binom{n}{m}$ načina. Ostatak $n-m$ kuglica ne smiju biti uparene sa svojom kutijom i takvih načina ima $D_{n-m}$. Prema principu produkta broj takvih raspodjela je jednak $\binom{n}{m}D_{n-m}$.

Pogledajmo slučaj u kojem imamo kuglica različitih vrsta npr. $r_1$ kuglica prve vrste, $r_2$ kuglica druge vrste, ... , $r_m$ kuglica $m$-te vrste pri čemu vrijedi $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$ te svaka kutija može sadržavati samo jednu kuglicu. Definirajmo skup $S := \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$. Uočimo da tražimo različite nizove koji se sastoje od elemenata skupa $S$, tj. permutaciju skupa $S$ s ponavljanjem. Njihov broj je jednak $P_n^{r_1, r_2, \cdot, r_m} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_m!}$ pri čemu je $n$ ukupan broj kuglica.

**Teorem 3.1.4.** Broj rasporeda $n$ različitih kuglica u $k$ nepraznih različitih kutija pri čemu kutije mogu primiti točno jednu kuglicu je jednak $n!$.
Ako postoje parovi kuglica-kutija broj raspodjela u kojima nema niti jednog para je jednak $D_n$.
Nadalje, broj raspodjela u kojem se nalazi točno $m$ parova je jednak $\binom{n}{m}D_{n-m}$.
Broj raspodjela $n$ kuglica u $k$ nepraznih različitih kutija pri čemu postoje $r_1$ jedne vrste, $r_2$ druge vrste, ..., $r_m$ $m$-te vrste kuglica jednak je $\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_m!}$.

### 3.1.5 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Označimo kuglice i kutije rednim brojevima 1., ..., $n$..




Slika 3.4: Prikaz različitih kuglica i različitih kutija

Prvu kuglicu možemo rasporediti u $k$ kutija. Drugu kuglicu možemo rasporediti u $k$ kutija. Također, sve ostale kuglice možemo rasporediti u $k$ kutija. Prema principu produkta vrijedi

$$\underbrace{k \cdot k \; \ldots k}_{n} = k^n \; .$$

Dakle, na $k^n$ načina možemo raspodijeliti $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija.

Međutim, ovaj problem možemo riješiti na drugačiji način. Podijelimo zadatak na slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija. Ako imamo jednu nepraznu kutiju, najprije izaberemo kutiju koja neće biti prazna. To možemo izabrati na $\binom{k}{1}$, tj. na $k$ načina. Nakon toga, ostaje nam samo jedna mogućnost raspodjele a to je da sve kuglice stavimo u izabranu kutiju. Dakle, broj takvih raspodjela je $k$.

Ako imamo dvije neprazne kutije, opet izaberemo kutije koje će biti takve. Njih možemo izabrati na $\binom{k}{2}$ načina. Nakon toga gledamo raspodjelu kuglica u dvije neprazne kutije. Već prije smo vidjeli u 3.1.1 da je taj broj jednak $2! \cdot S(n, 2)$. Dakle, broj raspodjela kuglica u kutije gdje su samo dvije neprazne jednak je $\binom{k}{2} \cdot 2! \cdot S(n, 2)$.
Analognim postupkom dobivamo da je broj raspodjela u bilo koji $i$ nepraznih kutija jednak $\binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i)$. Budući da su slučajevi međusobno disjunktni, po principu zbroja dobivena rješenja možemo zbrojiti:

$$\binom{k}{1} \cdot 1! \cdot S(n, 1) + \binom{k}{2} \cdot 2! \cdot S(n, 2) + \cdots + \binom{k}{k} \cdot k! \cdot S(n, k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i).$$

Dakle, na $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i)$ načina možemo raspodijeliti $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija.

Time smo kombinatorno dokazali formulu

$$k^n = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i).$$

Ovaj slučaj odgovara broju svih funkcija. Zaista neka su $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Vidimo da je $|A| = n$ i $|B| = k$. Neka je $f : A \to B$ funkcija. Svaki se element preslikava u samo jedan element u $B$. Prvi element se može preslikati na $k$ načina, drugi element na $k$ načina. Općenito, $i$-ti element se može preslikati na $k$ načina. Po principu umnoška slijedi da je broj takvih funkcija $k^n$, tj $\left|\{f : A \to B : |A| = n, |B| = k\}\right| = k^n$.

S druge strane, svaka kuglica može biti u samo jednoj kutiji, dok kutija može imati više kuglica. Zbog toga skup $A$ nam predstavlja skup kuglica, skup $B$ skup kutija a preslikavanje $f$ raspodjelu kuglica u kutije.

**Teorem 3.1.5.** Broj raspodjela $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija jednak je $k^n$, tj. $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i)$ pri čemu kutije mogu primiti neograničen broj kuglica i mogu biti prazne.

### 3.1.6 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica, te je bitan poredak kuglica unutar kutija

Prvu kuglicu možemo staviti u bilo koju kutiju. Dakle, prva kuglica ima $k$ mogućnosti. Drugu kuglicu možemo staviti u ostatak kutija pa takvih mogućnosti ima $k - 1$. Uz to, u prvu kutiju možemo je staviti na dva načina: s lijeve ili s desne strane prve kuglice te zbog toga druga kuglica ima $k - 1 + 2$, tj. $k + 1$ mogućnosti. Analognim postupkom za svaku kuglicu zaključujemo da sa svakim stavljanjem kuglice broj načina povećavamo za jedan te dobivamo sljedeće [1]:

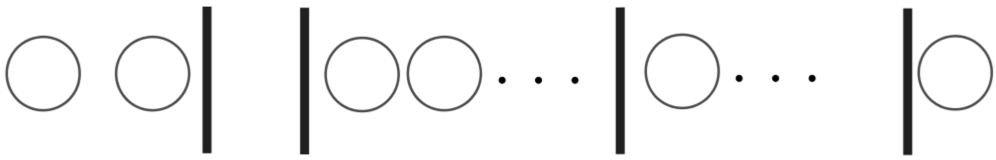
$$k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2) \cdots (k + n - 1).$$

**Teorem 3.1.6.** Broj rasporeda $n$ različitih kuglica u $k$ različitih kutija a da pritom kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica čiji je poredak u kutiji bitan je jednak $k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2) \cdots (k + n - 1)$.

## 3.2 Kuglice se ne razlikuju

### 3.2.1 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Budući da su kuglice jednake, jedino nam je bitan broj kuglica u svakoj kutiji. Ovaj problem ćemo riješiti preko *principa kuglica i štapića* [1] koji se često koristi u rješavanju kombinatornih problema. Promotrimo niz kuglica i štapića kao na Slici 3.5.



Slika 3.5: Prikaz raspodjele kuglica pomoću štapića

Kuglice lijevo od prvog štapića pripadaju prvoj kutiji, dok kuglice između prvog i drugog štapića pripadaju drugoj kutiji. Općenito, kuglice između $(i-1)$-tog i $i$-tog štapića pripadaju $i$-toj kutiji. Konačno, kuglice desno od zadnjeg štapića pripadaju zadnjoj, odnosno $k$-toj kutiji. Zaključujemo da imamo niz od $n$ kuglica i $k-1$ pregrada. Svaki takav niz, određuje točno jednu raspodjelu kuglica u kutije. Budući da imamo skup od $n$ jednakih kuglica i $k-1$ jednakih štapića (sveukupno skup ima $n+k-1$ elemenata), možemo zaključiti da su takvi nizovi zapravo permutacije s ponavljanjem. Takvih permutacija ima $P_{n+k-1}^{n,\,k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k+1)!}$ a to je po definiciji binomnog koeficijenta (Def. 1.0.9) jednako $P_{n+k-1}^{n,\,k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Ovu formulu možemo dobiti koristeći funkcije izvodnice. U svaku kutiju možemo staviti nijednu, jednu, dvije, tri ili neki drugi broj kuglica. Zato ćemo svakoj kutiji pridružiti funkciju $1+x+x^2+x^3+\cdots$. Tražena funkcija izvodnica je

$$f(x) = \underbrace{\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\cdots\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)}_{k}\ .$$

Koristeći geometrijski red te daljnjim sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x}}_{k} = \frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} \\ &= \sum_{i\geq 0}\binom{-k}{i}(-x)^i = \sum_{i\geq 0}\binom{k+i-1}{i}(-1)^i\cdot(-1)^i\cdot x^i \\ &= \sum_{i\geq 0}\binom{k+i-1}{i}\cdot x^i\ . \end{aligned}$$

Zbog simetrije binomnih koeficijenata (Prop. 1.0.7) vrijedi:

$$f(x) = \sum_{i \geq 0} \binom{k+i-1}{k-1} \cdot x^i \ .$$

Broj $\langle x^k \rangle$ je upravo broj tražene raspodjele $n$ kuglica.

Ovaj problem odgovara matematičkom problemu traženja rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, $x_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$. Svako rješenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ te jednadžbe se naziva *slaba kompozicija broja n* [2, Definicija 5.1.].

**Definicija 3.2.1.** Niz cijelih brojeva $(a_1, a_2, \ldots a_k)$ koji zadovoljava $a_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$, te zadovoljava uvjet $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, zove se *slaba kompozicija broja n*. Ako je $a_i \geq 1$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$, tada se takav niz zove *kompozicija broja n*.

Primjerice, niz $(1, 0, 2, 5)$ je slaba kompozicija broja 8, dok je $(2, 4, 1, 1)$ njegova kompozicija.

Budući da između skupa rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ i skupa rješenja ovog problema postoji bijekcija, takva da broj $x_i$ prikazuje broj kuglica u $i$-toj kutiji, slijedi da je broj rješenja zadane jednadžbe jednak $\binom{n+k-1}{k-1}$.

**Teorem 3.2.1.** Broj rasporeda $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih kutija a da pritom kutije mogu primiti neograničen broj kuglica i mogu biti prazne je jednak $\binom{n+k-1}{k-1}$.

### 3.2.2 Broj kuglica je različit u svakoj kutiji

Najprije pogledajmo kada su kutije neprazne. U dijelu 2.2.3 smo imali jednake kutije. Tamo smo dobili da je broj takvih raspodjela $\overline{p}_k(n)$. Svaku takvu raspodjelu možemo permutirati (jer nijedna kutija po svom sadržaju nije jednaka) te dobivamo takvu raspodjelu kada se kutije razlikuju. Dakle, rješenje je $k! \cdot \overline{p}_k(n)$.

Slučaj kada kutije mogu biti prazne podijelimo na slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija (kada su sve kutije prazne osim jedne, dvije, tri...). Ako je od ukupnog broja kutija njih $i$ neprazno tada je broj raspodjela nepraznih jednak kao broj prethodno opisane raspodjele: $i! \cdot \overline{p}_i(n)$. Neprazne kutije možemo izabrati na $\binom{k}{i}$ načina te po principu produkta vrijedi da postoji $\binom{k}{i} i! \cdot \overline{p}_i(n)$ načina raspodjele $n$ kuglica u $k$ kada je $i$ kutija neprazno. Zbrojimo li sve slučajeve dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot \overline{p}_i(n) \ .$$

Dobivene rezultate možemo zapisati u teorem:

**Teorem 3.2.2.** Broj raspodjela $n$ jednakih kutija u $k$ različitih nepraznih kutija je jednak $k! \cdot \overline{p}_k(n)$ pri čemu je broj kuglica u svakoj kutiji različit (ili neparan).

Broj raspodjela $n$ jednakih kutija u $k$ različitih kutija je jednak $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot \overline{p}_i(n)$ pri čemu kutije mogu biti prazne i broj kuglica u kutijama je različit (ili neparan).

### 3.2.3 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti točno jednu kuglicu

Nadalje, pogledajmo koliko ima načina raspodjele ako u svaku kutiju možemo staviti najviše jednu kuglicu. Uočimo da zbog uvjeta trebamo imati barem $n$ kutija. U tom slučaju postoji jedna raspodjela. Ako imamo $n + 1$ kutija, tada će biti $n$ punih i jedna prazna kutija. Ako označimo prazne kutije sa „$P$”, a neprazne s „$N$” tada možemo definirati skup $S := \{N, P\}$ te tražiti različite nizove od $n$ slova $P$ i jednog slova $N$. Broj permutacija skupa $S$ u kojima je element $N$ biran $n$ puta dok element $P$ biran jedanput jednak je $P_n^{N,P} = \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!}$ a to je ujedno i broj raspodjele kuglica. Općenito, ako imamo $n + i$ kutija analognim postupkom dobivamo da je broj raspodjela kuglica jednak $\frac{(n+i)!}{n! \cdot i!}$. Broj $n + i$ je zapravo $k$ te vrijedi: $\frac{k!}{n! \cdot (k-n)!} = \binom{k}{n}$. Ovaj problem možemo riješiti na drugačiji način, točnije preko funkcija izvodnica. Svaka kutija može imati jednu ili nijednu kuglicu. Zato joj pridružujemo funkciju $1 + x$. Zapravo, svakoj kutiji pridružujemo funkciju $1 + x$. Tada će konačna funkcija izvodnica izgledati na sljedeći način:

$$f(x) = \underbrace{(1 + x)(1 + x) \cdots (1 + x)}_{k} = (1 + x)^k$$

te zbog 1.0.8 vrijedi

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i \ .$$

Konačno, $\langle x^n \rangle$, tj. koeficijent uz $x^n$ nam daje broj raspodjele $n$ kuglica.

**Teorem 3.2.3.** Broj rasporeda $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih kutija je jednak $\binom{k}{n}$ a da pritom kutije mogu biti prazne i mogu primiti točno jednu kuglicu.

### 3.2.4 Kutije su neprazne i mogu primiti neograničen broj kuglica

Budući da svaka kutija mora sadržavati barem jednu kuglicu, tražimo broj rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, $x_i \geq 1$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$. Iz $x_i \geq 1$ slijedi $x_i - 1 \geq 0$. Uvedimo novu varijablu $y_i := x_i - 1$. Očito je $y_i \geq 0$. Ako svaki $x_i$ zamijenimo s $y_i + 1$, dobivamo: $y_1 + 1 + y_2 + 1 + \ldots y_k + 1 = n$, odnosno, $y_1 + y_2 + \ldots y_k = n - 1 - 1 - \ldots - 1$. Na lijevoj strani jednadžbe se nalazi $k$ jedinica pa možemo skraćeno pisati: $y_1+y_2+\dots y_k = n-k$. Dobili smo novu jednadžbu sličnu kao u prethodnom pitanju. Broj rješenja takve jednadžbe dobit ćemo ako iskoristimo dobivenu formulu:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Moramo napomenuti da je u ovom slučaju nužno $n-k \geq 0$, tj. $n \geq k$. Doista, ako imamo kutija više nego kuglica, ostat će nam praznih kutija (što smo htjeli izbjeći u ovom slučaju).

Isto tako možemo uočiti da nam ovaj slučaj daje broj rastava nekog prirodnog broja $n$ na $k$ pribrojnika gdje je bitan poredak (jer su kutije različite). Iz dijela 2.2.2 zaključujemo da nam $p_k(n)$ daje broj rastava prirodnog broja $n$ u $k$ pribrojnika u kojima nije bitan poredak (zapisujemo ih od većeg ka manjem). Ako svaki taj rastav permutiramo, tada ćemo dobiti sve rastave broja $n$ u $k$ pribrojnika gdje nam je njihov poredak bitan. Njihov broj je po prethodnome jednak $\binom{n-1}{k-1}$.

**Teorem 3.2.4.** Broj rasporeda $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih nepraznih kutija je jednak $\binom{n-1}{k-1}$ pri čemu kutije mogu primiti neograničen broj kuglica.

### 3.2.5 U kutijama treba biti najmanje neki određeni broj kuglica

Ako u svakoj kutiji treba biti najmanje određeni broj kuglica, npr. u $i$-toj kutiji najmanje $\alpha_i$ kuglica ($\alpha_i \neq 0$), to možemo zapisati kao:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \quad x_i \geq \alpha_i \geq 0 \ .$$

Iz $x_i \geq \alpha_i$ slijedi $x_i - \alpha_i \geq 0$ te možemo uvesti novu varijablu $y_i := x_i - \alpha_i$. Nakon uvrštavanja nove varijable u jednadžbu, dobivamo:

$$y_1 + y_2 + \dots y_k = n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_k \ ,$$

odnosno

$$y_1 + y_2 + \dots y_k = n - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \ y_i \geq 0 \ .$$

Ovdje moramo dodati još jedan uvjet: $n - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq 0$. U suprotnom, jednadžba ne bi imala rješenja jer bismo time tražili nenegativne brojeve koji u zbroju daju negativan broj. S druge strane, ako u $i$-toj kutiji mora biti barem $\alpha_i$ kuglica a imamo kuglica manje nego zbroj svih $\alpha_i$, tada nećemo moći raspodijeliti kuglice a da uvjet svake kutije bude zadovoljen. Kako bismo saznali broj rješenja jednadžbe, samo iskoristimo formulu iz prvog dijela ovog potpoglavlja:

$$\binom{n - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + k - 1}{k-1}.$$

**Teorem 3.2.5.** Broj rasporeda $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih kutija tako da u $i$-toj kutiji treba biti najmanje $\alpha_i$ kuglica ($\alpha_i \neq 0$) jednak je

$$\binom{n - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + k - 1}{k - 1}$$

s uvjetom $n \geq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

S druge strane, u stvarnom svijetu kutije imaju ograničenost. Zato bi bilo poželjno razmišljati i o tom uvjetu.

### 3.2.6 Uz pretpostavku 3.2.5 kutije mogu primiti ograničen broj kuglica

Možemo reći da tražimo broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \quad \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, \quad \alpha_i \leq \beta_i \leq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, k\}\,.$$

Prije svega, pogledajmo na primjeru zadatka koji će nam olakšati razumijevanje poopćenog.

**Primjer 3.2.1.** Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 24$ tako da vrijedi $1 \leq x_1 \leq 6$, $3 \leq x_2 \leq 9$, $5 \leq x_3 \leq 12$?

Sređivanjem uvjeta i definiranjem nove varijable dobivamo:
$0 \leq x_1 - 1 \leq 5,\ \ 0 \leq x_2 - 3 \leq 6,\ \ 0 \leq x_3 - 5 \leq 7$

$$\Big\Downarrow \quad y_1 := x_1 - 1,\ y_2 := x_2 - 3,\ y_3 := x_3 - 5$$

$0 \leq y_1 \leq 5,\ \ 0 \leq y_2 \leq 6,\ \ 0 \leq y_3 \leq 7.$
Dobili smo novu jednadžbu s novim uvjetima:
$y_1 + y_2 + y_3 = 15,\ \ 0 \leq y_1 \leq 5,\ \ 0 \leq y_2 \leq 6,\ \ 0 \leq y_3 \leq 7.$

Kad bismo samo imali uvjete $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ i $y_3 \geq 0$, broj rješenja bi bio $\binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$. Označimo takav skup s oznakom $S$. Pišemo $|S| = 136$. Dodatne uvjete pogledajmo pojedinačno. Rješenja jednadžbe s uvjetom $y_1 \leq 5$ teško nam je izračunati, no, znamo s njegovim komplementom: $y_1 > 5$, tj. $y_1 \geq 6$. Označimo takav skup rješenja s $A_1$. Analogno definirajmo za ostale uvjete te imamo:
$A_1$ je skup svih rješenja jednadžbe uz uvjet $y_1 \geq 6$,
$A_2$ je skup svih rješenja jednadžbe uz uvjet $y_2 \geq 7$,
$A_3$ je skup svih rješenja jednadžbe uz uvjet $y_3 \geq 8$.

Mi tražimo skup rješenja u kojem $x_1$ nije veći ili jednak 6, $x_2$ nije veći ili jednak od 7 te $x_3$ nije veći ili jednak od 8. Takav skup rješenja možemo označiti s $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ te tako tražimo $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|$. Po teoremu 1.0.4 slijedi:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| .$$

Najprije, izračunajmo $|A_1|$. Dakle, tražimo broj rješenja s uvjetima: $y_1 \geq 6$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$. Definirajmo nove varijable: $z_1 := y_1 - 6$, $z_2 := y_2$, $z_3 := y_3$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu i sređivanjem dobivamo: $z_1 + z_2 + z_3 = 9$ s uvjetima $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, $z_3 \geq 0$. Slijedi $|A_1| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$. Analognim postupkom dobijemo i za ostale skupove rješenja. Skraćeno:

- za $A_2$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 7,\ y_3 \geq 0$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1,\ z_2 := y_2 - 7,\ z_3 := y_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 8, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_2| = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

- za $A_3$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 8$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1,\ z_2 := y_2,\ z_3 := y_3 - 8$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 7, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_3| = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

- za $A_1 \cap A_2$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 6,\ y_2 \geq 7,\ y_3 \geq 0$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1 - 6,\ z_2 := y_2 - 7,\ z_3 := y_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 2, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

- za $A_2 \cap A_3$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 7,\ y_3 \geq 8$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1,\ z_2 := y_2 - 7,\ z_3 := y_3 - 8$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 1$$

- za $A_3 \cap A_1$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 6,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 8$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1 - 6,\ z_2 := y_2,\ z_3 := y_3 - 8$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_3 \cap A_1| = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

- za $A_1 \cap A_2 \cap A_3$: $y_1 + y_2 + y_3 = 15, \quad y_1 \geq 6,\ y_2 \geq 7,\ y_3 \geq 8$

$$\Big\Downarrow \quad z_1 := y_1 - 6,\ z_2 := y_2 - 7,\ z_3 := y_3 - 8$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = -6, \quad z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0$$

$$\Big\Downarrow$$

Nemoguće, jer zbroj nenegativnih brojeva ne može biti negativan broj.

$$\Big\Downarrow$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

Sada možemo sve dobivene brojeve uvrstiti u početnu formulu:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 136 - 55 - 45 - 36 + 6 + 1 + 3 - 0 = 10\ .$$

Dakle, jednadžba $y_1 + y_2 + y_3 = 15$ tako da vrijedi $0 \le y_1 \le 5$, $0 \le y_2 \le 6$, $0 \le y_3 \le 7$ ima 10 rješenja. Konačno, supstitucijom dolazimo do početne jednadžbe te zaključujemo da jednadžba $x_1 + x_2 + x_3 = 24$ s uvjetima $1 \le x_1 \le 6$, $3 \le x_2 \le 9$, $5 \le x_3 \le 12$ ima 10 rješenja.

Sada poopćimo ovakav slučaj: tražimo na koliko načima možemo raspodijeliti $n$ jednakih kuglica u $k$ različite kutije s tim da u $i$-tu kutiju stane najmanje $\alpha_i$ a najviše $\beta_i$ kuglica. Stoga, tražimo cjelobrojna rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ s uvjetom $\alpha_i \le x_i \le \beta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Kada zbrojimo ovih $k$ jednakosti dobivamo dva nužna uvjeta: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \le \sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} \beta_i$, tj. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \le n \le \sum_{i=1}^{k} \beta_i$.

Najprije jednadžbu sredimo kao u 3.2.5: $y_1 + y_2 + \cdots y_k = n - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, $y_i \ge 0$.
Neka je $S$ skup rješenja pod uvjetom $y_i \ge 0$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots k\}$. Neka je $A_i$ skup rješenja pod uvjetom $y_i > \beta_i - \alpha_i$, tj. $y_i \ge \beta_i - \alpha_i + 1$. Tražimo broj elemenata skupa $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}$, tj. tražimo $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right|$.
Preko formule 1.0.4 dobivamo:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right| = |S| - \sum_{1 \le i \le k} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le k} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1 \le i < j < l \le k} \left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| +$$

$$\cdots + (-1)^k |A_1 \cap \cdots \cap A_k| .$$

Vidjeli smo da u primjeru 3.2.1 imali velik broj jednadžbi te smo za svaku morali tražiti broj rješenja kako bismo uvrstili u formulu uključivanja-isključivanja. Ovakav način traženja raspodjele postaje još složeniji kada povećamo broj kutija koje mogu primiti ograničen broj kuglica. Zbog toga je lakše koristiti funkcije izvodnice (def 1.0.10) jer nam daju jednostavniji pristup problemu. Pogledajmo na sljedećem primjeru:

**Primjer 3.2.2.** Pronađimo broj načina raspodjele 24 jednakih kuglica u 3 različite kutije s tim da prva kutija može primiti najmanje 1 a najviše 6, druga najmanje 3 a najviše 9 i treća najmanje 5 a najviše 12 kuglica.

Ovaj primjer je sličan primjeru 3.2.1. Dakle, možemo ga riješiti tako da tražimo broj rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 24$ tako da vrijedi $1 \le x_1 \le 6, 3 \le x_2 \le 9, 5 \le x_3 \le 12$. No, mi ćemo ga riješiti preko funkcija izvodnica. U prvu kutiju možemo staviti jednu, dvije, četiri, pet ili šest kuglica. Zbog toga prvi dio funkcije ćemo definirati kao $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Analognim postupkom dobivamo i za drugu i treću kutiju. Množenjem dobivenih izraza dobivamo polinom te tražimo koeficijent uz $x^{24}$ jer je ukupan broj kuglica jednak 24. Detaljnije:

$$f(x) = \underbrace{\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)}_{1.kutija} \cdot \underbrace{\left(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9\right)}_{2.kutija}$$

$$\cdot \underbrace{\left(x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12}\right)}_{3.kutija} .$$

Daljnjim sređivanjem te koristeći definiciju geometrijskog reda 1.0.10 dobivamo:

$$f(x) = x^9 \cdot \frac{1-x^6}{1-x} \cdot \frac{1-x^7}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x},$$

$$f(x) = x^9 \left(1-x^6\right)\left(1-x^7\right)\left(1-x^8\right)(1-x)^{-3} ,$$

$$f(x) = x^9 \left(1-x^6\right)\left(1-x^7\right)\left(1-x^8\right)\sum_{k\geq 0}\binom{3+k-1}{k}x^k,$$

$$f(x) = x^9 \left(1-x^8-x^7+x^{15}-x^6+x^{14}+x^{13}-x^{21}\right)\sum_{k\geq 0}\binom{2+k}{k}x^k .$$

Budući da $k$ ide u beskonačnost, nema smisla dalje množiti i sređivati već možemo samo pogledati kada dobivamo $x^{24}$ te koji su koeficijenti uz njega. Izraz $x^{24}$ dobivamo kada:

- $x^9 \cdot 1$ pomnožimo s $\binom{2+15}{15}x^{15}$,
- $x^9 \cdot x^8$ pomnožimo s $\binom{2+7}{7}x^7$,
- $x^9 \cdot x^7$ pomnožimo s $\binom{2+8}{8}x^8$,
- $x^9 \cdot x^{15}$ pomnožimo s $\binom{2+0}{0}x^0$,
- $x^9 \cdot x^6$ pomnožimo s $\binom{2+9}{9}x^9$,
- $x^9 \cdot x^{14}$ pomnožimo s $\binom{2+1}{1}x^1$,
- $x^9 \cdot x^{13}$ pomnožimo s $\binom{2+2}{2}x^2$.

Preostaje nam samo zbrojiti, tj. oduzeti dobivene koeficijente:

$$\binom{17}{15} - \binom{9}{7} - \binom{10}{8} + \binom{2}{0} - \binom{11}{9} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} = 136 - 36 - 451 - 55 + 3 + 6 = 10.$$

Dobili smo $\langle x^{24}\rangle = 10$. Dakle, možemo na 10 načina raspodjeliti 24 jednakih kuglica u 3 različite kuglice s tim da prva kutija može primiti najmanje 1 a najviše 6, druga najmanje 3 a najviše 9 i treća najmanje 5 a najviše 12 kuglica.

Ako bismo ovaj slučaj poopćili, tj. tražimo cjelobrojna rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$, $\alpha \leq x_i \leq \beta_i$. Pronađimo njenu funkciju izvodnicu:

$$f(x) = \left(x^{\alpha_1} + x^{\alpha_1+1} + \cdots + x^{\beta_1}\right)\left(x^{\alpha_2} + x^{\alpha_2+1} + \cdots + x^{\beta_2}\right)\cdots\left(x^{\alpha_k} + x^{\alpha_k+1} + \cdots + x^{\beta_k}\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\left(1 + x + \cdots + x^{\beta_1-\alpha_1+1}\right)\left(1 + x + \cdots + x^{\beta_2-\alpha_2+1}\right)\cdots\left(1 + x + \cdots + x^{\beta_k-\alpha_k+1}\right) \\ &= x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \tfrac{1-x^{\beta_1-\alpha_1+1}}{1-x} \cdot \tfrac{1-x^{\beta_2-\alpha_2+1}}{1-x} \cdots \tfrac{1-x^{\beta_k-\alpha_k+1}}{1-x} \\ &= x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\left(1 - x^{\beta_1-\alpha_1+1}\right)\left(1 - x^{\beta_2-\alpha_2+1}\right)\cdots\left(1 - x^{\beta_k-\alpha_k+1}\right)(1-x)^{-k}, \end{aligned}$$

$$f(x) = x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\left(1 - x^{\beta_1-\alpha_1+1}\right)\left(1 - x^{\beta_2-\alpha_2+1}\right)\cdots\left(1 - x^{\beta_k-\alpha_k+1}\right)\sum_{i\geq 0}\binom{k+i-1}{i}x^i .$$

Sada nam jedino preostaje množenje zagrada te traženje koeficijenata uz $x^n$.

Napomenimo da ovdje također moramo staviti uvjet $\sum_{i=0}^{k}\beta_i \geq n$. U suprotnom nije moguća raspodjela. To možemo lakše uočiti ako vidimo konkretan primjer:

**Primjer 3.2.3.** Na koliko načina možemo raspodjeliti 8 jednakih kuglica u 3 različite kutije tako da u svaku može najviše stati dvije kuglice?

Ako bismo u svaku kutiju stavili maksimalan broj kuglica, ostat će nam dvije kuglice koje ne možemo nigdje staviti. Time nismo sve raspodijelili te zaključujemo da takva raspodjela nije moguća. Dakle, ako je broj kuglica manji od zbroja ograničenosti kutija, tada ovaj slučaj nema rješenja.

**Teorem 3.2.6.** Broj raspodjela $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih kutija pri čemu, uz pretpostavku 3.2.5, kutije mogu primiti ograničen broj kuglica jednak je broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$ s uvjetom $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Za $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$ tražimo $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right|$, gdje je $A_i$ skup rješenja pod uvjetom $y_i > \beta_i$, tj. $y_i \geq \beta_i + 1$. S druge strane, broj takve raspodjele daje $\langle x^n \rangle$ u funkciji

$$f(x) = x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}\left(1 - x^{\beta_1-\alpha_1+1}\right)\left(1 - x^{\beta_2-\alpha_2+1}\right)\cdots\left(1 - x^{\beta_k-\alpha_k+1}\right)\sum_{i\geq 0}\binom{k+i-1}{i}x^i .$$

Ako uvjet $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$ nije ispunjen, raspodjela nije moguća.

### 3.2.7 Kutije mogu biti prazne i mogu primiti neograničen broj kuglica - nastavak

Ovaj slučaj smo već obradili u 3.2.1 a sada ćemo ga riješiti na drugačiji način. Podijelimo zadatak na slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija.

Ako imamo jednu nepraznu kutiju,najprije izaberimo kutiju koja neće biti prazna i nju možemo izabrati na $\binom{k}{1}$ načina. Nakon toga kuglice trebamo rasporediti u tu jednu kutiju. Očito imamo jednu mogućnost raspodjele. Dakle, broj podjela kuglica u različite neprazne kutije je $\binom{k}{1}$. Ako imamo dvije neprazne kutije, opet izabiremo najprije kutije i to na $\binom{k}{2}$ načina. Nadalje, broj raspodjela kuglica u dvije neprazne kutije je jednak broju rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 = n$, $x_1, x_2 \geq 1$, a taj broj je po Teoremu 3.2.4 $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{2-1}$. Zaključujemo da je broj raspodjela kuglica u bilo koji $i$ nepraznih kutija jednak $\binom{k}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$. Analognim postupkom kroz sve slučajeve pronalazimo broj raspodjela za bilo koji broj nepraznih kutija: $\binom{k}{1} \cdot \binom{n-1}{1-1}$, $\binom{k}{1} \cdot \binom{n-1}{2-1}$, ..., $\binom{k}{k-1} \cdot \binom{n-1}{k-1-1}$, $\binom{k}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$. Budući da su slučajevi međusobno disjunktni, po principu zbroja dobivena rješenja možemo zbrojiti:

$$\binom{k}{1} \cdot \binom{n-1}{1-1} + \binom{k}{2} \cdot \binom{n-1}{2-1} + \ldots + \binom{k}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}.$$

Gornju formulu treba shvatiti na način da je $\binom{m}{l} = 0$ ako je $l > m$ jer ako je $n < i \leq k$ onda nikako ne možemo imati $i$ nepraznih kutija.

Dakle, na $\sum_{i=1}^{min\{n,k\}} \binom{k}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$ načina možemo raspodijeliti $n$ različitih kuglica u $k$ različitih nepraznih kutija. Već prije (vidi 3.2.1) smo dobili da je takav broj raspodjela jednak $\binom{n+k-1}{k-1}$ te smo tako kombinatorno dokazali sljedeću formulu:

**Propozicija 3.2.1.** Za pozitivne cijele brojeve $n$ i $k$, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{min\{n,\ k\}} \binom{k}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Konačno, prethodnim razmatranjem dobivamo sljedeće nadopunjenje Teorema 3.2.1:

**Teorem 3.2.7.** Broj rasporeda $n$ jednakih kuglica u $k$ različitih kutija a da pritom kutije mogu primiti neograničen broj kuglica i mogu biti prazne je jednak $\binom{k}{n}$, tj. $\sum_{i=1}^{min\{n,\ k\}} \binom{k}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$.

# Poglavlje 4

# Zaključak

Na kraju, u sljedećoj tablici prikazani su dobiveni rezultati za pojedini slučaj. Možemo uočiti da smo do nekih rezultata dolazili na sličan način, npr. kada su kutije mogle biti prazne često smo takve rastavljali na disjunktne slučajeve u ovisnosti o broju praznih kutija. S druge strane, neke rezultate smo dobili tako da smo prethodni rezultat permutirali. To smo mogli jedino u slučaju kada su kuglice bile različite i kutije neprazne te slučaj kada su neprazne kutije imale različit broj kuglica. Uz osnovne oznake spominju se $S(n,k)$ - Stirlingov broj druge vrste (Def. 2.1.2), $B(n)$ - Bellov broj (Def. 2.1.3), $p(n)$ - broj particija broja $n$ i $p_k(n)$ - broj particija broja $n$ u $k$ pribrojnika (Def. 2.2.1), $\overline{p}_k(n)$ - broj particija broja $n$ u $k$ međusobno različitih pribrojnika (potpoglavlje 2.2.3), $D_n$ - deranžmani od broja $n$ (potpoglavlje 3.1.4)...

Tablica 4.1: Broj raspodjela kuglica u kutije, $n$ - broj kuglica, $k$ - broj kutija

| | | broj kuglica u kutijama: | kuglice se razlikuju | kuglice se ne razlikuju |
|---|---|---|---|---|
| KUTIJE SE NE RAZLIKUJU | neprazne | neograničen | $S(n,k)$ | $p_k(n)$ |
| | | ograničen | | - broj kuglica je različit (ili neparan) u svakoj kutiji:<br>$\overline{p}_k(n)$ |

<table>
<tr><th></th><th></th><th>broj kuglica u kutijama:</th><th>kuglice se razlikuju</th><th>kuglice se ne razlikuju</th></tr>
<tr><td rowspan="2">KUTIJE SE NE RAZLIKUJU</td><td rowspan="2">mogu biti prazne</td><td>neograničen</td><td>$k < n, \ \sum_{i=1}^{k} S(n,i)$<br>$k \geq n, \ B(n)$</td><td>$k < n, \ \sum_{i=1}^{k} p_i(n)$<br>$k \geq n, \ p(n)$</td></tr>
<tr><td>ograničen</td><td>- $i$-ta kutija sadrži točno $n_i$ kuglica:<br>$\frac{n!}{k!\ n_1!\ n_2!\ \cdots\ n_k!}$<br>- $i$-ta kutija sadrži točno $n_i$ kuglica te u svakoj kutiji izdvojena kuglica:<br>$\frac{n!}{k!\ (n_1-1)!\ (n_2-1)!\ \cdots\ (n_k-1)!}$<br>uvjet: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$</td><td>- broj kuglica različit (ili neparan) u svakoj kutiji:<br>$\sum_{i=1}^{k} \overline{p}_i(n)$ za $k < n$,<br>$\overline{p}(n)$ za $k \geq n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KUTIJE SE RAZLIKUJU</td><td rowspan="2">neprazne</td><td>neograničen</td><td>$k! \cdot S(n,k)$</td><td>$\binom{n-1}{k-1}$</td></tr>
<tr><td>ograničen</td><td>- broj kutija i kuglica jednak i mogu primiti točno jednu kuglicu: $n!$<br>• postoje parovi kuglica-kutija te nijedan par nije uparen: $D_n$<br>• postoje parovi kuglica-kutija te samo $m$ parova je upareno: $\binom{n}{m} D_{n-m}$<br>• postoje više vrsta kuglica ($r_i$ broj kuglica $i$-te vrste):<br>$\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots\ r_m!}$<br>uvjet $\sum_{i=1}^{m} r_i = n$</td><td>- u $i$-toj kutiji najmanje $\alpha_i$ kuglica:<br>$\binom{n-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i+k-1}{k-1}$<br>uvjet: $n \geq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \ \alpha_i \neq 0$<br>- u $i$-toj kutiji najmanje $\alpha_i$ a najviše $\beta_i$ kuglica: vidi Teorem 3.2.6<br>- broj kuglica različit u svakoj kutiji:<br>$k! \cdot \overline{p}_k(n)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th></th><th>broj kuglica u kutijama:</th><th>kuglice se razlikuju</th><th>kuglice se ne razlikuju</th></tr>
<tr><td rowspan="2">KUTIJE SE RAZLIKUJU</td><td rowspan="2">mogu biti prazne</td><td>neograničen</td><td>$k^n$,<br>tj.<br>$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n,i)$<br>- poredak kuglica u kutiji bitan:<br>$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)$</td><td>$\binom{n+k-1}{k-1}$,<br>tj.<br>$\sum_{i=1}^{min\{n,k\}} \binom{k}{i}\binom{n-1}{i-1}$</td></tr>
<tr><td>ograničen</td><td>- kutije mogu primiti točno jednu kuglicu:<br>$k(k-1)\cdots(k-n+1)$<br>uvjet $k \geq n$<br>- $i$-ta kutija sadrži točno $n_i$ kuglica:<br>$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots\ n_k!}$<br>- $i$-ta kutija sadrži točno $n_i$ kuglica te u svakoj kutiji izdvojena kuglica:<br>$\frac{n!}{(n_1-1)!\ (n_2-1)!\ \cdots\ (n_k-1)!}$<br>uvjet: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$</td><td>- kutije mogu primiti točno jednu kuglicu:<br>$\binom{k}{n}$<br>- broj kuglica različit u svakoj kutiji:<br>$\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot \overline{p}_i(n)$</td></tr>
</table>

# Bibliografija


[1] M. Bašić i M. Marohnić, *Diskretna matematika - vježbe*, 2015., `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/SKRIPTA.pdf`.

[2] M. Bòna, *A walk through combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory*, World Scientific, 2006.

[3] M. Cvitković, *Kombinatorika - zbirka zadataka*, Element, 1994.

[4] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavaju se razne vrste distribucija koristeći model kuglica i kutija uz određene uvjete kao što je različitost kuglica, različitost kutija, ograničenost kutija itd. Za jednake kutije smo problem povezali s particijama skupa (pa time i sa Stirlingovim brojem druge vrste) u slučaju kada se kuglice razlikuju, odnosno s particijom prirodnog broja za jednake kuglice. U oba slučaja pripadni broj distribucija zadovoljava jednostavnu rekurzivnu formulu koju smo implementirali u programskom jeziku Python 3.4. Za različite kutije i različite kuglice smo koristili permutacije i kombinacije zajedno s nekim rezultatima dobivenim u slučajevima s jednakim kutijama i različitim kuglicama dok je problem s jednakim kuglicama bio složeniji te su bile potrebne FUI i FI formule. Dobivena je veza s brojem injekcija, surjekcija i funkcija a tako i formule za Stirlingov broj druge vrste i Bellov broj. Na kraju, dobiveni rezultati su bili tablično prikazani.

# Summary

This thesis studies different distributions using the box-ball model with certain criteria such as inequal balls, inequal boxes, boxes with limit etc. For equal boxes we linked the problem to set partitions (Stirling number of the second kind) when the balls are inequal and respectively with partition of a natural number when the balls are equal. In both cases the number of distributions satisfies the simple recursive formula that we implemented in the programming language Python 3.4. For inequal boxes and inequal balls we used permutations and combinations together with some results from cases with equal boxes and inequal balls, while the problem with equal balls was more complex and inclusion-exclusion and generating function formulas were needed. The result is a link with the number of injections, surjections and functions, and also the formula for Stirling number of the second kind and Bell's number. In the end, the results are shown in a table.

# Životopis

Rođena sam 8. srpnja 1994. u Slavonskom Brodu. Živim u Selni, selu u općini Garčin u kojoj sam završila Osnovnu školu „Vjekoslav Klaić”. Nakon toga zbog velikog interesa za matematiku upisujem Gimnaziju „Matija Mesić” u Slavonskom Brodu, program prirodoslovno - matematička gimnazija. Godine 2013. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom tog studija 2016. godine, na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.